УДК 62–50:519.7/8

Устойчивость решения оптимизационных задач в условиях неопределенности

Левин В. И.

Актуальность. *Рассматривается задача оптимизации неполностью определенных функций интервального вида, т.е. функций, параметры которых заданы с точностью до интервалов возможных значений. Подчеркнута актуальность проблемы в связи с неполнотой исходных данных в практических задачах. Дан обзор существующих подходов к решению задач оптимизации неполностью определенных функций с различными видами неопределенности. Указаны достоинства и недостатки каждого подхода.* ***Цель статьи.*** *Целью является описание возможности проверки устойчивости решения оптимизационных задач к изменению их параметров.* ***Метод.*** *Приведен предложенный автором метод решения данной задачи путем сведения исходной задачи к двум задачам оптимизации того же типа для полностью определенных функций, т.е. функций с точно известными параметрами. Это так называемый метод детерминизации. Дается необходимая для такого сведения методика сравнения интервальных чисел.* ***Новизна.*** *Новизна работы заключается в том, что в ней впервые показывается возможность единообразного математического моделирования устойчивости решения задачи оптимизации к варьированию ее параметров. Также введены понятия макроустойчивости и микроустойчивости неполностью определенной функции.* ***Результат.*** *Приведен алгоритм проверки макроустойчивости задачи оптимизации полностью определенной функции. Дан простой пример проверки макроустойчивости конкретной задачи оптимизации с помощью этого алгоритма. Для этого примера выбрана известная задача о назначениях. Кроме того, приведен алгоритм проверки микроустойчивости задачи оптимизации полностью определенной функции. С помощью этого алгоритма проверена микроустойчивость некоторой конкретной задачи оптимизации. В качестве математического аппарата в процессе данного исследования использованы методы интервальной математики.*

Ключевые слова: *оптимизация, неопределенность, устойчивость оптимума, варьирование параметров, интервальная математика.*

Введение

Сегодня в мировой науке имеется обширная литература по оптимизации различных систем с детерминированными параметрами – технических, экономических, социальных, политических и т.д. Соответствующие задачи формулируются как задачи математического программирования с целевыми функциями и функциями ограничений, параметры которых являются детерминированными величинами. Однако на практике по объективным причинам чаще встречаются системы с недетерминированными параметрами. Оптимизация таких систем обычно формализуется в виде задач математического программирования с целевыми функциями и функциями ограничений, параметры которых – различные недетерминированные величины: случайные, нечеткие, интервальные и т.д. Эти задачи сложнее детерминированных. Они требуют обобщения понятия экстремума, выяснения условий его существования, связанных с недетерминированностью параметров функции, и разработки специальных методов поиска экстремума функций.

К решению неполностью определенных задач математического программирования есть три различных подхода: детерминированный, вероятностный [1] и интервальный [2]. Детерминированный подход заключается в решении задачи для определенных значений ее параметров, выбранных внутри соответствующих заданных областей неопределенности. Могут, например, быть выбраны центры (середины) областей неопределенности параметров (центральная стратегия), наихудшее сочетание значений параметров задачи (пессимистическая стратегия), их наилучшее сочетание (оптимистическая стратегия) и т.д. Вероятностный подход заключается в решении задачи для усредненных (ожидаемых, в смысле математического ожидания) значений ее параметров, что предполагает задание вероятностной меры внутри соответствующих областей неопределенности. Оба указанных подхода объединяет предварительная детерминизация параметров задачи, выполняемая перед ее оптимальным решением. В отличие от них, интервальный подход не предполагает детерминизации параметров задачи, которые задаются в интервальной форме – в нем оптимальное решение задачи проводится в ее «естественной форме», т.е. на основе прямого сравнения недетерминированных значений целевой функции, соответствующих различным значениям вектора аргументов, и выборе оптимального (максимального или минимального) значения этой функции. Достоинства и недостатки указанных трех подходов рассмотрены в [1–8].

Изложенные подходы к решению недетерминированных задач математического программирования, при всем их очевидном различии, объединяет одна общая существенная черта. А именно, все они предназначены для решения задач оптимизации, в которых параметры целевых функций и функций ограничений точно не известны. Поэтому мы не можем ограничиться просто отысканием оптимального решения нашей задачи, используя для этого один из упомянутых выше методов. В самом деле, из-за отсутствия при решении задачи точных значений ее параметров может оказаться, что действительные значения параметров задачи несколько отличаются от тех, которые были приняты в процессе отыскания ее решения. В этих условиях, для того чтобы найденное оптимальное решение задачи имело содержательный прикладной смысл, нам нужно, чтобы оно еще обладало следующим свойством: при небольшом варьировании значении параметров решаемой задачи ее оптимальное решение должно по-прежнему существовать. При этом точка, в которой достигается оптимум целевой функции, может переместиться из исходного положения в новое положение, которое, однако, должно быть близко к исходному. Другими словами, требуется, чтобы найденное оптимальное решение неполностью определенной (недетерминированной) задачи математического программирования было устойчивым относительно малых количественных изменений ее параметров.

1. Постановка задачи

Сначала рассмотрим детерминированный случай. Пусть задана следующая непрерывная функция n переменных

$$y = F(x_1,..., x_n), \tag{1}$$

где все параметры (коэффициенты) ее явного представления $p_k, k = \overline{1,l}$, известны точно. Будем рассматривать функцию (1) в ограниченной области, определяемой системой ограничений

$$\Phi_i(x_1,..., x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1,m}\}, \tag{2}$$

в которой параметры $q_s, s = \overline{1,t}$, явного представления функций ограничений Φ_i и правые части b_i также известны точно.

Тогда относительно указанной выше функции (1) мы можем сформулировать полностью определенную задачу условной оптимизации (задачу математического программирования)

$$F(x_1,..., x_n) = \max, \tag{3}$$

при условии

$$\Phi_i(x_1,..., x_n) \le b_i, i = \overline{1,m}\}. \tag{4}$$

Решением задачи (3), (4) является некоторая точка $x^* = (x_1^*,..., x_n^*)$ (множество точек $M = \{x^*\}$) области (4), в которой целевая функция F достигает максимального значения $F_{\max}$. В современном математическом программировании разработано много различных методов эффективного решения задач вида (3), (4), ориентирующихся на тип целевой функции F и функций ограничений $\Phi_i, i = \overline{1,m}$.

Предположим теперь, что в задаче оптимизации (3), (4) параметры явного представления целевой функции F, а также параметры явного представления функций ограничений Φ_i и правые части ограничений b_i известны не точно, а приближенно. Тогда, в соответствии со сказанным в п.1, мы должны совместно с задачей условной оптимизации (3), (4) рассматривать еще одну: проверка устойчивости (неустойчивости) решения задачи (3), (4) относительно небольших количественных изменений ее параметров.

В отличие от существующих методов изучения устойчивости решения задач оптимизации [5], будем рассматривать все возможные количественные изменения каждого параметра задачи как единое целое. Такое рассмотрение позволяет задавать все возможные количественные изменения параметров задач оптимизации в теоретико-множественных терминах. Простейший способ такого задания заключается в том, чтобы задать совокупность указанных изменений параметров задачи в виде соответствующих числовых интервалов. Преимущество такого подхода к изучению устойчивости решения задач оптимизации состоит в том, что в его рамках изучать устойчивость задач оптимизации можно с помощью хорошо разработанных методов интервальной математики [9].

Итак, совместно с полностью определенной задачей условной оптимизации (3), (4) мы должны рассмотреть производную от нее интервальную задачу условной оптимизации

$$\tilde{F}(x_1,..., x_n) = \max, \tag{5}$$

при условии

$$\tilde{\Phi}_i(x_1,..., x_n) \le \tilde{b}_i, i = \overline{1,m}\}. \tag{6}$$

Целевая функция $\tilde{F}$ интервальной задачи оптимизации (5), (6) получается из целевой функции F искомой, полностью определенной задачи оптимизации (3), (4) путем замены ее точно известных параметров $p_k, k = \overline{1,l}$, соответствующими интервальными параметрами $\tilde{p}_k = [p_{k1}, p_{k2}],\ k = \overline{1,l}$, которые и определяют интервальную целевую функцию $\tilde{F}$. Аналогично, любая функция ограничений $\tilde{\Phi}_i,\ i = \overline{1,m}$, интервальной задачи условной оптимизации (5), (6) получается из соответствующей функции $\Phi_i,\ i = \overline{1,m}$, исходной полностью определенной задачи (3), (4) заменой ее точно известных параметров $q_{si},\ s = \overline{1,t},\ i = \overline{1,m}$, соответствующими интервальными параметрами $\tilde{q}_{si} = [q_{si1}, q_{si2}],\ s = \overline{1,t},\ i = \overline{1,m}$.

Точно так же интервальные параметры $\tilde{b}_i, i = \overline{1,m}$, в ограничениях интервальной задачи условной оптимизации (5), (6) заменяют собой соответствующие точно известные параметры $b_i, i = \overline{1,m}$ в ограничениях исходной задачи оптимизации (3), (4).

Будем называть полностью определенную задачу условной оптимизации (математического программирования) (3), (4) макроустойчивой, если она имеет решение и, кроме того, имеет решение производная от нее интервальная задача оптимизации (математического программирования) (5), (6).

Далее, будем называть полностью определенную задачу условной оптимизации (математического программирования) (3), (4) микроустойчивой, если она макроустойчива и, сверх того, существует пара решений (x', x''), где $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ – некоторая точка решения задачи (3), (4), а $x'' = (x''_1, ..., x''_n)$ – некоторая точка решения задачи (5), (6), расстояние между которыми $D(x', x'')$ не превосходит заданной достаточно малой величины d.

Задача настоящего исследования – разработать алгоритмы определения макро- и микроустойчивости полностью определенных задач условной оптимизации типа (3), (4).

2. Математика сравнения интервалов

В основе решения поставленной задачи – аппарат интервальной математики [9]. В этой математике алгебраические операции над интервальными числами $\tilde{a} = [a_1, a_2], \tilde{b} = [b_1, b_2], ...$ вводятся в виде следующих теоретико-множественных конструкций

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \\ &\tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \\ &k\tilde{a} = \{ka \mid a \in \tilde{a}\} \end{aligned} \tag{7}$$

и т.д. Другими словами, любая операция над интервалами определяется на основе соответствующей операции над точечными величинами, при условии, что конкретные значения величин пробегают все возможные значения из соответствующих интервалов. Из введенных алгебраических операций над интервалами вытекают простые правила выполнения этих операций:

$$[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,\,a_2+b_2],\quad [a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,\,a_2-b_1];$$

$$k[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2],\,k>0,\\ [ka_2,ka_1],\,k<0;\end{cases}\quad [a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)];\;(8)$$

$$[a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1.a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1].$$

Итак, введем операции сравнения интервальных чисел [2, 8]. Попытаемся сравнить два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$, рассматривая их как интервальные числа. Естественно начать со сравнения интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на базе сравнений в отдельных парах вещественных чисел (a_i,b_j), где $a_i\in\tilde{a}, b_i\in\tilde{b}$. Но это ведет к провалу, так как в общем случае одни пары чисел (a_i,b_j) будут находиться в отношении $a_i>b_j$, а другие – в противоположном отношении: $a_i<b_j$. Поэтому единственное, что остается – реализовать операцию сравнения интервалов на теоретико-множественном уровне, подобно алгебраическим операциям над интервалами (7). В соответствии со сказанным, введем операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервальных чисел $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ в виде теоретико-множественных конструкций

$$\tilde{a}\vee\tilde{b}=\{a\vee b\,|\,a\in\tilde{a},b\in\tilde{b}\},\;\tilde{a}\wedge\tilde{b}=\{a\wedge b\,|\,a\in\tilde{a},b\in\tilde{b}\}. \quad (9)$$

Операция взятия максимума (минимума) из двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, согласно определениям (9), определяется как нахождение максимума (минимума) из двух точечных величин a и b, при условии, что конкретные значения этих величин пробегают все возможные значения соответственно из интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно было сравнить по величине, установив их отношение ($\tilde{a}\geq\tilde{b}$ или $\tilde{a}\leq\tilde{b}$), нужно, чтобы: 1) введенные операции $\vee,\wedge$ над этими интервалами существовали, 2) результатом этих операций был один из операндов $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$, 3) операции $\vee,\wedge$ являлись согласованными, т.е. было истинно условие: если большим (меньшим) является один из интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$, то меньшим (большим) является другой из них. Условие сравнимости величин двух интервалов является, очевидно, необходимым и достаточным условием. Однако легко доказать, что условие согласованности операций $\vee$ и $\wedge$ над интервалами выполняется всегда (для любой пары интервалов $(\tilde{a},\tilde{b})$). Также всегда (для любой пары интервалов) выполняется условие существования введенных нами выше операций взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервалов, причем результатом операции оказывается некоторый новый интервал. В итоге необходимое и достаточное условие сравнимости двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ превращается в условие, по которому операции $\tilde{a}\vee\tilde{b}$ и $\tilde{a}\wedge\tilde{b}$ должны давать в результате обязательно один из интервалов-операндов: $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$. Такая формулировка условия сравнимости интервалов дает возможность получения его в конструктивной форме, пригодной еще и для практического использования. Базовая форма условия здесь такова.

Теорема 1. Для сравнимости двух интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ и их нахождения между собой в отношении $\tilde{a}\ge\tilde{b}$ необходимо и достаточно, чтобы одноименные границы этих интервалов удовлетворяли условиям

$$a_1 \ge b_1, \quad a_2 \ge b_2, \tag{10}$$

а для их сравнимости и нахождения между собой в отношении $\tilde{a}\le\tilde{b}$ – чтобы удовлетворялись условия

$$a_1 \le b_1, \quad a_2 \le b_2. \tag{11}$$

По теореме 1, интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сравнимы и находятся в определенном отношении $\tilde{a}\ge\tilde{b}$ или $\tilde{a}\le\tilde{b}$ только когда в таком же отношении находятся их одноименные границы a_1,b_1 и a_2,b_2. Другими словами, для сравнимости интервалов меньший интервал должен быть сдвинут обеими границами влево относительно большего интервала. Так что с помощью теоремы 1 сравнение двух интервалов и выбор большего (меньшего) из этих интервалов сводится к сравнению одноименных границ этих интервалов, являющихся вещественными числами. **Доказательство** теоремы 1 см. в [2, 8, 13].

Теорема 2. Для несравнимости двух интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$, иными словами, для того, чтобы они не находились ни в отношении $\tilde{a}\ge\tilde{b}$, ни в $\tilde{a}\le\tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы одноименные границы интервалов удовлетворяли условиям

$$a_1 < b_1, a_2 > b_2 \quad \text{или} \quad b_1 < a_1, b_2 > a_2. \tag{12}$$

Условия (12) дают ситуацию, когда один интервал на числовой оси полностью «накрывает» другой. **Доказательство** теоремы 2 см. в [2, 8, 13].

Теорема 2 показывает существование случаев несравнимости интервалов. Несравнимость величин некоторых интервалов – естественное следствие того, что, в отличие от точно известных вещественных, интервальные числа задаются с некоторой неопределенностью (точно известно, что вещественное число принимает некоторое значение в заданном интервале, но не известно, какое именно это значение).

Далее, теоремы 1 и 2, посвященные сравнению пар интервалов, можно обобщить на системы с произвольным числом интервалов.

Теорема 3. Для существования максимального интервала в системе интервалов $\tilde{a}(1)=[a_1(1),a_2(1)], \tilde{a}(2)=[a_1(2),a_2(2)],...$ необходимо и достаточно, чтобы его границы были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно следующим условиям

$$a_1(1)\ge a_1(2),\ a_1(1)\ge a_1(3),...;\quad a_2(1)\ge a_2(2),\ a_2(1)\ge a_2(3),... \tag{13}$$

Условия (13) записаны для того случая, когда максимальным является интервал $\tilde{a}(1)$, что не ограничивает общности.

Теорема 4. Для существования минимального интервала в системе из интервалов $\tilde{a}(1)=[a_1(1),a_2(1)], \tilde{a}(2)=[a_1(2),a_2(2)],...$ необходимо и достаточно, чтобы его границы располагались относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$a_1(1)\le a_1(2),\ a_1(1)\le a_1(3),...;\quad a_2(1)\le a_2(2),\ a_2(1)\le a_2(3),... \tag{14}$$

Условия (14), аналогично условиям (13), записаны для случая, когда минимальным является интервал $\tilde{a}(1)$, что не ограничивает общности.

Теоремы 3, 4 говорят, что интервал является максимальным (минимальным) в системе только если максимальны (минимальны) его нижняя граница – среди нижних границ всех интервалов – и верхняя граница – среди верхних границ всех интервалов. **Доказательство** теорем 3 и 4 в [2, 8, 13].

3. Макроустойчивость задачи условной оптимизации

Обратимся теперь к полностью определенной задаче условной оптимизации (3), (4). Опишем метод установления ее макроустойчивости.

Полностью определенная задача условной оптимизации (3), (4) по определению (см. п. 1) является макроустойчивой, если она сама и производная от нее интервальная задача условной оптимизации (5), (6) имеют решения. Существование решения полностью определенной задачи условной оптимизации (3), (4) можно установить с помощью общеизвестных методов математического программирования [10–12], так что здесь нет никаких проблем. Сложнее, однако, обстоит дело с проверкой существования решения интервальной задачи условной оптимизации (5), (6). В этом случае эффективным оказывается применение детерминизационного метода решения задач интервальной оптимизации [2, 8, 13].

Интервальная задача условной оптимизации (5), (6) имеет интервальную целевую функцию $\tilde{F}(x_1,..., x_n)$, интервальные функции ограничений $\tilde{\Phi}_i, \overline{1,m}$ в левых частях ограничений и интервальные параметры $\tilde{b}_i, i=\overline{1,m}$ в правых частях. Используя формулы элементарных преобразований интервалов (8), функции $\tilde{F}$, $\tilde{\Phi}_i$ можно представить явно в интервальной форме. Так же можно представить и параметры $\tilde{b}_i$. Все эти представления записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}(x_1,..., x_n)=[F_1(x_1,..., x_n), F_2(x_1,..., x_n)],\\
&\tilde{\Phi}_i(x_1,..., x_n)=[\Phi_{i1}(x_1,..., x_n), \Phi_{i2}(x_1,..., x_n)], \quad i=\overline{1,m},\\
&\tilde{b}_i=[b_{i1}, b_{i2}], \qquad i=\overline{1,m}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Алгоритм получения представлений (15) покажем на примере общей задачи оптимизации типа (5), (6).

Пример 1. Рассмотрим частный случай интервальной задачи оптимизации (5), (6) – интервальную задачу линейного программирования

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_1 x_1+...+\tilde{c}_n x_n = \max,\\
&\tilde{a}_{i1}x_1+...+\tilde{a}_{in}x_n \le \tilde{b}_i,\ i=\overline{1,m}.\\
&x_1 \ge 0,..., x_n \ge 0.\\
&\tilde{c}_j=[c_{j1}, c_{j2}],\ j=\overline{1,n};\quad \tilde{a}_{ij}=[a_{ij,1}, a_{ij,2}],\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n};\quad \tilde{b}_i=[b_{i1}, b_{i2}].
\end{aligned}$$

Здесь интервальная целевая функция $\tilde{F}(x_1,..., x_n)=\tilde{c}_1 x_1+...+\tilde{c}_n x_n$, интервальные функции ограничений $\tilde{\Phi}_i(x_1,..., x_n)=\tilde{a}_{i1}x_1+...+\tilde{a}_{in}x_n, i=\overline{1,m}$, и интервальные параметры $\tilde{b}_i$ в правых частях: $\tilde{b}_i=[b_{i1}, b_{i2}]$.

Подставляя в выражения функций $\tilde{F}, \tilde{\Phi}_i$ параметры $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ в явной форме интервалов и умножая интервалы на неотрицательные переменные $x_1,..., x_n$, согласно формуле (8), получим необходимые явные интервальные представления (15) для рассматриваемой нами задачи линейного программирования

$$\tilde{F}(x_1,..., x_n) = [F_1(x_1,..., x_n) = \tilde{c}_{11}x_1 + ... + \tilde{c}_{n1}x_n, F_2(x_1,..., x_n) = \tilde{c}_{12}x_1 + ... + \tilde{c}_{n2}x_n],$$
$$\tilde{\Phi}_i(x_1,..., x_n) = [\Phi_{i1}(x_1,..., x_n) = \tilde{a}_{i1,1}x_1 + ... + \tilde{a}_{in,1}x_n, \Phi_{i2}(x_1,..., x_n) = \tilde{a}_{i1,2}x_1 + ... + \tilde{a}_{in,2}x_n],\ i = \overline{1,m},$$
$$\tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}],\ i = \overline{1,m}.$$

Всю задачу оптимизации (5), (6) после этого можно переписать в явном интервальном виде

$$[F_1(x_1,..., x_n), F_2(x_1,..., x_n)] = \max, \tag{16}$$

$$[\Phi_{i1}(x_1,..., x_n), \Phi_{i2}(x_1,..., x_n)] \le [b_{i1}, b_{i2}],\quad i = \overline{1,m}\ \} \tag{17}$$

Согласно представлению (16), (17), задача (5), (6) заключается в том, чтобы найти максимум интервальной функции в области, ограниченной системой интервальных неравенств.

От интервального представления задачи (16), (17) можно перейти к эквивалентному представлению в виде пары полностью определенных (детерминированных) задач условной оптимизации, которое уже поддается решению. Для этого сначала по теореме 3 представим интервальное уравнение (16) в виде эквивалентной пары детерминированных уравнений

$$F_1(x_1,..., x_n) = \max,\quad F_2(x_1,..., x_n) = \max. \tag{18}$$

Далее, по теореме 1 представим систему интервальных неравенств (17) в виде эквивалентной системы обычных детерминированных неравенств

$$\Phi_{i1}(x_1,..., x_n) \le b_{i1},\ \Phi_{i2}(x_1,..., x_n) \le b_{i2},\quad i = \overline{1,m}. \tag{19}$$

Соединив пару уравнений (18) с системой неравенств-ограничений (19), мы получим совокупность двух полностью определенных (детерминированных) задач условной оптимизации вида (3), (4)

$$\begin{aligned} &F_1(x_1,..., x_n) = \max,\\ &\left.\begin{aligned}\Phi_{i1}(x_1,..., x_n) \le b_{i1},\ i = \overline{1,m},\\ \Phi_{i2}(x_1,..., x_n) \le b_{i2},\ i = \overline{1,m},\end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &F_2(x_1,..., x_n) = \max,\\ &\left.\begin{aligned}\Phi_{i1}(x_1,..., x_n) \le b_{i1},\ i = \overline{1,m},\\ \Phi_{i2}(x_1,..., x_n) \le b_{i2},\ i = \overline{1,m},\end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{21}$$

эквивалентную исходной интервальной задаче условной оптимизации (5), (6). Задачу (20) назовем нижней граничной задачей исходной интервальной задачи (5), (6), а задачу (21) – ее верхней граничной задачей.

Итак, для получения решения интервальной задачи (5), (6) нужно решить ее нижнюю (20) и верхнюю (21) граничные задачи. В общем случае полное решение нижней граничной задачи имеет вид $\{M_{\text{н}}(x), F_{1,\max}\}$, а верхней граничной задачи – вид $\{M_{\text{в}}(x), F_{2,\max}\}$.

Здесь $M_{\text{н}}(x), M_{\text{в}}(x)$ – множества точек решения $x = (x_1,..., x_n)$ нижней и верхней граничных задач, а $F_{1,\max}, F_{2,\max}$ – полученные максимальные значения целевых функций этих задач. Решение интервальной задачи (5), (6) формируется из решений ее нижней и верхней граничных задач и имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* \in M_{\text{н}}(x) \cap M_{\text{в}}(x); \\ \widetilde{F}_{\max} = [F_{1,\max}, F_{2,\max}] \end{array} \right\}. \tag{22}$$

Согласно (22), в качестве точки решения x^* интервальной задачи оптимизации (5), (6) выбирается любая точка из пересечения множеств точек решения ее нижней и верхней граничных задач, а в качестве максимального значения интервальной целевой функции $\widetilde{F}_{\max}$ – интервал от максимального значения целевой функции нижней задачи $F_{1,\max}$ до максимального значения целевой функции верхней задачи $F_{2,\max}$.

Из выполненного процесса построения решения интервальной задачи условной оптимизации вида (5), (6) и определения макроустойчивости полностью определенной задачи условной оптимизации (3), (4) вытекает следующая основная теорема.

Теорема 5. Для того чтобы полностью определенная задача условной оптимизации (3), (4) была макроустойчива, необходимо и достаточно, чтобы: 1) эта задача имела решение; 2) интервальная задача условной оптимизации (5), (6), производная от детерминированной задачи (3), (4), имела нижнюю и верхнюю граничные задачи, обладающие решениями; 3) множества решений нижней и верхней граничных задач интервальной задачи оптимизации (5), (6) пересекались.

Сформулированная выше теорема 5 дает следующий алгоритм для проверки произвольной полностью определенной (детерминированной) задачи условной оптимизации (3), (4) на макроустойчивость.

Шаг 1. Используя подходящие известные методы решения полностью определенных (детерминированных) задач условной оптимизации [10–12], ищем решение $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ задачи (3), (4). Одновременно проверяем существование (несуществование) решения этой задачи.

Шаг 2. Задаваясь некоторыми подходящими значениями интервальных параметров целевой функции F, функций ограничений $\Phi_i, i = \overline{1,m}$, и правых частей ограничений $b_i, i = \overline{1,m}$ в полностью определенной задаче условной оптимизации (3), (4), строим производную от нее интервальную задачу условной оптимизации (5), (6).

Шаг 3. Используя законы интервальной математики (8), выражающие результаты элементарных преобразований интервалов, представляем целевую функцию $\widetilde{F}$, функции ограничений $\widetilde{\Phi}_i, i = \overline{1,m}$, а также правые части ограничений $\widetilde{b}_i, i = \overline{1,m}$, интервальной задачи условной оптимизации (5), (6) в интервальной форме (15).

Шаг 4. Используя полученные на шаге 3 интервальные представления функций $\widetilde{F}, \widetilde{\Phi}_i, i = \overline{1,m}$, и параметров $\widetilde{b}_i, i = \overline{1,m}$, формируем нижнюю (20) и верхнюю (21) граничные задачи интервальной задачи оптимизации (5), (6).

Шаг 5. Используя те же методы, что и на шаге 1, ищем решения задач (20) и (21). Одновременно проверяем существование или несуществование решений этих задач. Полные решения задач имеют соответственно форму $\{M_{н}(x), F_{1,\max}\}, \{M_{в}(x), F_{2,\max}\}$, где $M_{н}(x)$ – множество точек x решения нижней, $M_{в}(x)$ – множество точек x решения верхней граничной задачи.

Шаг 6. Проверяется наличие или отсутствие пересечения найденных в результате решения задач (20) и (21) множеств $M_{н}(x), M_{в}(x)$.

Итог. Если в результате работы указанного алгоритма выяснилось, что полностью определенная задача условной оптимизации (3), (4) имеет решение, а производная от нее интервальная задача (5), (6) имеет нижнюю и верхнюю граничные задачи, обладающие решениями, причем множества этих решений пересекаются, то задача оптимизации (3), (4) является макроустойчивой. В противном случае задача (3), (4) не макроустойчива.

Пример 2 (задача о назначениях). Есть три работы и три исполнителя, заданы доходы a_{ij} от выполнения любой j-й работы любым i-м $(i, j = \overline{1,3})$ исполнителем. Требуется распределить работы между исполнителями так, чтобы каждый из них выполнял ровно одну работу, и, кроме этого, суммарный доход от выполнения всех работ был максимален. Введя множество неизвестных матриц назначений $X = \|x_{ij}\|, x_{ij} \in \{0,1\}$, причем $x_{ij} = 1$, если i-й исполнитель делает j-ю работу, и $x_{ij} = 0$ в противном случае, задачу можно записать математически в виде

$$F(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_{ij} = \max, \text{ при условии}$$

$$\Phi_1(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,3};\ \Phi_2(x_{ij}) \equiv \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,3}.$$

Видим, что наша задача – частный случай полностью определенной задачи условной оптимизации (3), (4). Проверим задачу на макроустойчивость, используя изложенный алгоритм.

Шаг 1. Для определенности конкретизируем матрицу $A = \|a_{ij}\|$ в виде матрицы с точно известными параметрами

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{Vmatrix}$$

и решим нашу задачу при этих условиях. Имеется шесть различных матриц назначений X, удовлетворяющих ограничениям задачи:

$$X_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},\ X_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$X_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\ X_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$X_5 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\ X_6 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

которым соответствуют значения целевой функции оптимизационной задачи:

$F_1 = 9, F_2 = 10, F_3 = 11, F_4 = 11, F_5 = 9, F_6 = 10$. Так что решение задачи существует, достигается на матрицах назначений X_3, X_4 и равно

$$F_{\max} = F_{X_3, X_4} = 11.$$

Шаг 2. Согласно описанию данного шага алгоритма (см. выше), задаемся подходящими значениями интервальных параметров целевой функции F нашей недетерминированной задачи о назначениях в виде заданной неполностью (с точностью до интервалов возможных значений) матрицы доходов $\tilde{A} = \|\tilde{a}_{ij}\| = \|[a_{1ij}, a_{2ij}]\|$:

$$\tilde{A} = [A_1, A_2], \quad \text{где} \quad A_1 = \|\tilde{a}_{1ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}, \; A_2 = \|\tilde{a}_{2ij}\| = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Имеем производную от решенной полностью определенной задачи условной оптимизации интервальную задачу оптимизации типа (5), (6)

$$\tilde{F}(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \tilde{a}_{ij} x_{ij} = \max ,$$

при тех же самых условиях-ограничениях, которые существовали и для детерминированной задачи условной оптимизации.

Шаг 3. С помощью формул (8) элементарных преобразований интервалов представляем целевую функцию производной задачи $\tilde{F}$ в явной интервальной форме (15)

$$\tilde{F}(x_{ij}) = \left[F_1(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{1ij} x_{ij}, \; F_2(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{2ij} x_{ij} \right].$$

Шаг 4. По найденному на шаге 3 интервальному представлению целевой функции $\tilde{F}$ и заданным условиям-ограничениям мы с формируем нижнюю (20) и верхнюю (21) граничные задачи интервальной задачи

$$\left. \begin{array}{c} F_1(x_{ij}) \equiv \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1ij} x_{ij} = \max, \; \text{при условии} \\ \Phi_1(x_{ij}) \equiv \sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \; j = \overline{1,3}; \; \Phi_2(x_{ij}) \equiv \sum\limits_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \; i = \overline{1,3} \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} F_2(x_{ij}) \equiv \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2ij} x_{ij} = \max, \\ \text{при тех же самых условиях} \end{array} \right\}.$$

Шаг 5. Тем же методом, что и на шаге 1, находим решения нижней и верхней граничных задач. В нашем случае решение нижней граничной задачи существует, достигается на матрицах назначений X_1, X_2, X_3, X_4 и равно $F_{1,\max} = F_{1(X_1, X_2, X_3, X_4)} = 5$. Решение верхней граничной задачи тоже существует, достигается на матрицах X_3, X_4 и принимает значение $F_{2,\max} = F_{1(X_3, X_4)} = 14$.

Шаг 6. Проверяем наличие пересечения множеств точек решения нижней и верхней граничных задач интервальной задачи

$$M_H \cap M_B = \{X_1, X_2, X_3, X_4\} \cap \{X_3, X_4\} = \{X_3, X_4\} \neq \varnothing,$$

т.е. пересечение непусто.

Итог. Исходная полностью определенная задача условной оптимизации типа (3), (4) имеет решение. Производная интервальная задача (5), (6) имеет нижнюю и верхнюю граничные задачи, обладающие решениями, причем множества точек решения этих задач пересекаются. Таким образом, полностью определенная задача условной оптимизации типа (3), (4) является макроустойчивой.

4. Микроустойчивость задачи условной оптимизации

Снова обратимся к полностью определенной задаче условной оптимизации (3), (4). Опишем метод установления микроустойчивости задачи.

Полностью определенная задача условной оптимизации (3), (4) согласно определению (п. 1) является микроустойчивой, если она макроустойчива и, кроме того, существует пара решений (x', x''), где $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ – некоторое решение задачи (3), (4), а $x'' = (x''_1, ..., x''_n)$ – некоторое решение производной от нее интервальной задачи условной оптимизации (5), (6), расстояние между которыми $D(x', x'')$ не превосходит заданной достаточно малой величины d. Из этого определения напрямую вытекает следующий алгоритм проверки произвольной полностью определенной задачи условной оптимизации (3), (4) на микроустойчивость.

Шаг 1. С помощью 6-шагового алгоритма, указанного в п. 3, проверяем задачу (3), (4) на макроустойчивость. В случае отрицательного результата проверки (задача (3), (4) не макроустойчива) конец алгоритма, с выводом: задача (3), (4) не является микроустойчивой. В случае положительного результата проверки (задача (3), (4) макроустойчива) переход к шагу 2.

Шаг 2. Выбираем точку решения $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ задачи (3), (4), найденную на шаге 1. Добавляем к ней какую-нибудь точку решения $x'' = (x''_1, ..., x''_n)$ интервальной задачи (5), (6), также найденную на шаге 1. В результате получаем пару решений (x', x'') указанных двух задач.

Шаг 3. Вычисляем расстояние $D(x', x'')$ между точками решения x', x'' указанных двух задач, используя для этого формулу

$$D(x', x'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + ... + (x'_n - x''_n)^2}\ . \tag{23}$$

Шаг 4. Проверяем выполнение неравенства, сравнивающего расстояние $D(x', x'')$ с заданной достаточно малой величиной d:

$$D(x', x'') \le d\ , \tag{24}$$

Если условие (24) выполнено, задача оптимизации (3), (4) объявляется микроустойчивой и конец алгоритма. В противном случае совершается переход к шагу 2, в котором теперь к точке решения $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ задачи (3), (4), найденной на шаге 1, добавляется какая-то другая точка решения $x'' = (x''_1, ..., x''_n)$ задачи (5), (6) из числа точек, найденных на шаге 1. В результате получаем новую пару решений (x', x'') и т.д.

Итог. Если в результате работы алгоритма после некоторого достаточного числа шагов получена пара решений (x', x''), удовлетворяющая неравенству (24), выполнение останавливается и задача (3), (4) объявляется микроустойчивой. В противном случае процедура также останавливается, а задача (3), (4) признается не обладающей свойством микроустойчивости.

Заключение

В данной статье показано, что проблема оптимизации неполностью определенных функций не может ограничиться лишь отысканием точки оптимума и значения в ней нашей функции, но и должна включать в себя задачу определения устойчивости найденного оптимума. Последнее означает, что при небольшом варьировании параметров оптимизируемой функции ее оптимум должен по-прежнему существовать и находиться в точке, близкой к точке исходного оптимума. Для установления устойчивости оптимума неполностью определенных функций предложена специальная эффективная методика, основанная на аппарате интервальной математики.

Литература

1. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975. 616 с.
2. Левин В. И. Интервальное дискретное программирование // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 6. С. 92–103.
3. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function // Control and Cybernetics, 1980. Vol. 9. № 4. P. 189–202.
4. Тимохин С. Г., Шапкин А. В. О задачах линейного программирования в условиях неточных данных // Экономика и математические методы. 1981. Том 17. № 5. С. 955–963.
5. Рощин В. А. Семенова Н. В., Сергиенко И. В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. 1989. № 2. С. 42–46.
6. Семенова Н. В. Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования // Кибернетика. 1984. № 5. С. 25–31.
7. Вощинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ, 1989. 224 с.
8. Левин В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности. Пенза: Изд-во Пензенского технологического института, 1999. 95 с.
9. Алефельд Г, Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
10. Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Советское радио, 1964. 350 с.
11. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 280 с.
12. Левин В. И. Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ. М.: Наука, 1987. 304 с.

13. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97–106.

14. Левин В. И. Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2. С. 138–146.

15. Шашихин В. Н. Оптимизация интервальных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 11. С. 94–103.

16. Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006. 285 с.

17. Островский Г. М, Волин Ю. М. Технические системы в условиях неопределенности. Анализ гибкости и оптимизация. М.: Бином, 2008. 325 с.

18. Островский Г. М., Зиятдинов Н. Н., Лаптева Т. В. Оптимизация технических систем. М.: Кнорус, 2012. 252 с.

19. Tsoukias A., Vincke P. A Characterization of PQI Interval Orders // Discrete Applied Mathematics. 2003. № 127 (2). P. 387–397.

20. Давыдов Д. В. Идентификация параметров линейных интервальных управляемых систем с интервальным наблюдением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 25–29.

21. Ozturk M., Tsoukias A. Positive and Negative Reasons in the Interval Comparisons // Proc. of 15th Intern. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU-2004). 2004. P. 983–989.

22. Шашихин В. Н. Решение интервальной матричной игры в смешанных стратегиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 97–104.

23. Левин В. И. Сравнение интервальных чисел и оптимизация систем с интервальными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65. № 4. С. 625–633.

24. Левин В. И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации // Автоматика и вычислительная техника. 2012. Т. 46. № 4. С. 17–25.

25. Левин В. И. Алгоритм оптимизации в условиях неопределенности с помощью детерминизации // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. 2014. Т. 1. № 5. С. 6–27.

26. Левин В. И. Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 4. С. 123–141.

References

1. Pervozvanskiy A. A. *Matematicheskie modeli v upravlenii proizvod-stvom* [Mathematical Models in Production Management]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 616 p (in Russian).

2. Levin V. I. Interval Discrete Programming. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994, vol. 30, no. 6, pp. 866–874 (in Ukraine).

3. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function. *Control and Cybernetics*, 1980, vol. 9, no 4, pp. 189–202.

4. Timokhin S. G., Shapkin A. V. O zadachakh lineinogo programmirovaniya v usloviiakh netochnykh dannykh [About Linear Programming Problems in Terms of Imperfect Data]. *Economics and mathematical methods*, 1981, no. 5, 955 p (in Russian).

5. Roshchin V. A., Semenova N. V., Sergienko I. V. Solution and Investigation of One Class of Inexact Integer Programming Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 185–193(in Ukraine).

6. Semenova N. V. Solution of a Generalized Integer-Valued Programming Problem. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1984, vol. 20, no. 5, pp. 641–651(in Ukraine).

7. Voshchinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizatsiya v usloviyakh neopredelennosti* [Optimization under uncertainty]. Moscow, MEI Publ., 1989, 224 p (in Russian).

8. Levin V. I. *Intervalnye metody optimizacii system v usloviyah neopredelennosti* [Interval Methods of System Optimization in Condition of Uncertainty]. Penza, Penza Technological Institute Publ., 1999, 95 p (in Russian).

9. Alefeld G., Herzberger Ju., Zürich B.I. *Einführung in die Intervallrechnung* [Introduction to the Interval Computations], Wissenschaftsverlag, 1974, 398 p [in German].

10. Yudin D. B, Gol'dshtein E. G. *Zadachi i metody lineinogo programmirovaniya* [Tasks and Methods of Linear Programming]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1964, 735 p (in Russian).

11. Korbut A.A., Finkel'shtein Yu.Yu. *Diskretnoe programmirovanie* [Discrete Programming]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 280 p (in Russian).

12. Levin V. I. *Strukturno-logicheskie metody issledovaniia slozhnykh sistem s primeneniem EVM* [Structural-Logical Research Methods of Complex Systems Using Computer]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 304 p (in Russian).

13. Levin V. I. Discrete Optimization under Interval Uncertainty. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no 7, pp 1039–1047.

14. Levin V. I. Nonlinear Optimization under Interval Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, vol. 35, no. 2, pp. 297–306 (in Ukraine).

15. Shashikhin V. N. Optimization of Interval Systems. *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 11, pp. 1843–1851.

16. Ashchepkov L. T., Davydov D. V. *Universal'nye resheniia interval'nykh zadach optimizatsii i upravleniia* [Universal Solutions of Interval Problems of Optimization and Control]. Moscow, Nauka Publ., 2006, 285 p (in Russian).

17. Ostrovskiy G. M., Volin Yu. M. *Tekhnicheskie sistemy v usloviyakh neopredelennosti. Analiz gibkosti i optimizatsiia* [Technical Systems in Conditions of Uncertainty. Analysis of Flexibility and Optimization]. Moscow, Binom Publ., 2008, 325 p (in Russian).

18. Ostrovskiy G. M., Ziiatdinov N. N., Lapteva T. V. *Optimizatsiia tekhnicheskikh system* [Optimization of Technical Systems]. Moscow, Knorus Publ., 2012, 252 p (in Russian).

19. Tsoukias A., Vincke P. A Characterization of PQI Interval Orders. *Discrete Applied Mathematics*, 2003, no. 127 (2), pp. 387–397.

20. Davydov D. V. Identification of Parameters of Linear Interval Controllable Systems with the Interval Observation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 6, pp. 861–865.

21. Ozturk M., Tsoukias A. Positive and Negative Reasons in the Interval Comparisons. *Proc. of 15th Intern. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU-2004)*, 2004, pp. 983–989.

22. Shashikhin V. N. A Mixed Strategy Solution of an Interval Matrix Game. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 770–777.

23. Levin V. I. Comparison of Interval Numbers and Optimization in Interval-Parameter Systems, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 4, pp. 625–633.

24. Levin V. I. Optimization in Terms of Interval Uncertainty. The Determination Method, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2012, vol. 46, no. 4, pp. 157–163.

25. Levin V. I. Algoritm optimizacii v usloviyah neopredelennosti s pomoschyu determinizacii [Algorithm of Optimization in Condition of Uncertainty by Determination]. *Evristicheskie algoritmy i raspredelennye vychisleniya*, 2014, vol. 1, no. 5, pp. 6–27 [in Russian].

26. Levin V. I. Intervalniy podhod k optimizacii v usloviyah neopredelennosti [Interval Approach to Optimization with Uncertainty]. *Systems of Control, Communication and Security*, 2015, no 4, pp. 123–141 [in Russian].

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. Тел. +7(8412)670-263. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Stability of Solution of Optimization Problems in Condition of Uncertainty

V. I. Levin

Relevance. *Here the problem of optimization of incompletely specified functions of interval kind, i.e., functions, whose parameters are defined up to an interval of possible values, is considered. Actuality of problem in connection with incompleteness of data in practical tasks is underlined. A review of existing approaches to solving optimization problems of incompletely defined functions with different types of uncertainty is given. Some advantages and disadvantages of each approach are listed.* ***The purpose.*** *The aim of the article is description of the possibility to test stability of solution of optimization problems when parameters are changing.* ***Method.*** *The author of research proposed a method to solve this problem by* *reducing it to two optimization problems of the same type for completely specific functions, i.e. functions which have exactly known parameters. This is so-called method of determination. The theory of comparison of interval values is touched.* ***Novelty.*** *The novelty of the paper is that it shows for the first time the possibility of a uniform mathematical modeling of stability of solution of optimization problem when its parameters are varying. Also concepts of macrostability and microstability of incompletely defined function are introduced.* ***Result****. The algorithm of checking macrostability of optimization problem of completely defined function is given here. A simple example of checking macrostability of concrete optimization task by this algorithm is presented. For this example we selected well-known assignment problem. In addition the algorithm for checking microstability of optimization problem of completely defined function is posed. With this algorithm we tested microstability of specific optimization problem. As mathematical means in research we use methods of interval mathematics.*

Keywords: *conflict, cooperation, neutrality, logic algebra, logical investigations of the systems.*

Information about Author

Vitaly Ilich Levin – Dr. habil. of Technical Sciences, Full Professor. Honoured Scientist of Russia. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economics, sociology, history; decision making, optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. Tel. +7(8412)670-263. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova/Gagarin st., 1A/11.