

## ГЛАВА 1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

### 1.1 ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ МНОЖЕСТВУ

В классической теории множеств принадлежность элемента  $x$  некоторому множеству  $A$  записывается в формализованном виде:

$$x \in A.$$

Эта формальная запись может также представляться с помощью характеристической функции:

$$\mu_A^*(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in A$$

Символ  $\Leftrightarrow$  обозначает эквивалентность.

Принадлежность множества к некоторому одномерному множеству  $A$  можно представить в графической форме. Пусть имеем одномерное арифметическое пространство –  $R_1$ , в котором заданы два непересекающихся подмножества  $A$  и  $B$ :  $A \subset R_1$ ,  $B \subset R_1$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .

Тогда принадлежность  $x$  подмножеству  $A$  можно представить в виде прямоугольника  $\Pi_A$  (рис. 1.1а), принадлежность подмножеству  $B$  в виде прямоугольника  $\Pi_B$  (рис. 1.1б). Обычно эти графические формы принадлежности совмещаются и в результате получается совокупность из 2-х прямоугольников (рис. 1.1в). Принадлежность некоторому двумерному подмножеству представляется параллелепипедом в 3-х мерном пространстве, а принадлежность  $n$  - мерному подмножеству соответственно  $(n+1)$  - мерным параллелепипедом.

В классической (четкой) теории множеств четкое подмножество  $A$  определяется как совокупность упорядоченных пар  $\{x, \mu_A^*(x)\}$ , где  $\{ \cdot \}$  – символ совокупности. В одномерном случае  $x \in R_1$ , в общем  $x \in R_n$ . Выбор арифметического пространства  $R_n$  обусловлен тем, что в теории управления с переменными  $x$  обычно связывают некоторые физические величины (температура, давление, расход и т.д.), которые получают с измерительных датчиков, установленных на объекте управления.

Факту принадлежности можно также придать лингвистическую форму. Пусть в  $R_1$  задана некоторая физическая величина, например, температура воды, которая измеряется соответствующим датчиком. Будем ассоциировать с подмножеством  $A$  диапазон изменения температуры  $0^\circ\text{C}$  до  $50^\circ$ , а с подмножеством  $B$  ее изменение в диапазоне от  $50^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$ . В лингвистической интерпретации принадлежность измеренной температуры подмножеству  $A$  будет соответствовать лингвистической переменной “холодная вода”, а подмножеству  $B$  – “горячая вода”. Аналогичная интерпретация может быть дана и для других физических величин: давление – “низкое” (подмножество  $A$ ) или “высокое” (подмножество  $B$ ), линейная скорость перемещения “маленькая” (подмножество  $A$ ) или “большая” (подмножество  $B$ ) и т.д. Если использовать кодирование символами 0 и 1 для упомянутых выше лингвистических переменных, то получим соответствие: “холодная” – 0, “горячая” – 1, “маленькая” – 0, “большая” – 1 и т.д. В этой интерпретации не представляется возможным отразить промежуточные состояния температуры воды типа: “прохладная” вода, «теплая» вода, т.к. переменная принадлежности тому или иному подмножеству принимает только два значения 0 или 1, что подразумевает наличие четкой или резкой границы между подмножествами.

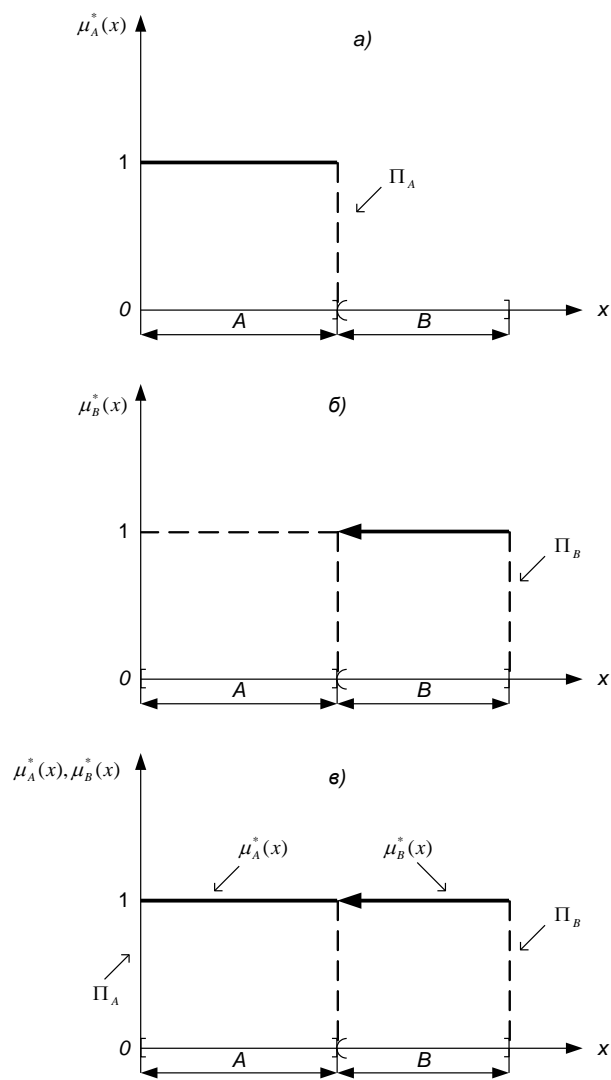


Рис.1.1 Графическое представление принадлежности в классической теории множеств.

В классической теории множеств принадлежность элемента одному подмножеству исключает одновременную принадлежность его другому множеству.

Таким образом, в математических терминах характеристическая функция  $\mu_A^*(x)$  осуществляет отображение некоторого дискретного или непрерывного подмножества  $A$  в множество  $R_1$ , которое содержит всего лишь два элемента 0 и 1:

$$\mu_A^*(x): A \rightarrow R_1 = \{0, 1\}.$$

Из определения следует, что областью определения  $\mu_A^*(x)$  является дискретное или непрерывное подмножество, а область значений есть дискретное множество  $\{0, 1\}$ . В дискретной математике для исчисления высказываний с функциями, имеющими двоичные значения, используется булева алгебра, которая является теоретической базой вычислительной техники.

Если область значений одномерного отображения  $\mu_A(x) \in [0, 1] \subset R_1$ , тогда  $\mu_A(x)$  называется одномерной функцией принадлежности (membership function). Для исчисления высказываний с такими функциями, принимающими непрерывные значения на отрезке  $[0, 1]$ , используется нечеткая логика, которая является одним из разделов теории нечетких множеств. Сопоставление характеристической функции  $\mu_A^*(x)$  классической теории множеств с функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  теории нечетких множеств показывает, что характеристическая функция является частным случаем функции принадлежности, т.к. бинарная совокупность  $\{0, 1\} \subset [0, 1]$ . Графическая трактовка одномерной функции принадлежности представлена на рис.1.2. Подмножество  $A \subset R_1$  имеет функцию принадлежности  $\mu_A(x)$  (рис.1.2а), подмножество  $B \subset R_1$  функцию принадлежности  $\mu_B(x)$  (рис.1.2б), их совместное положение изображено на рис.1.2в.

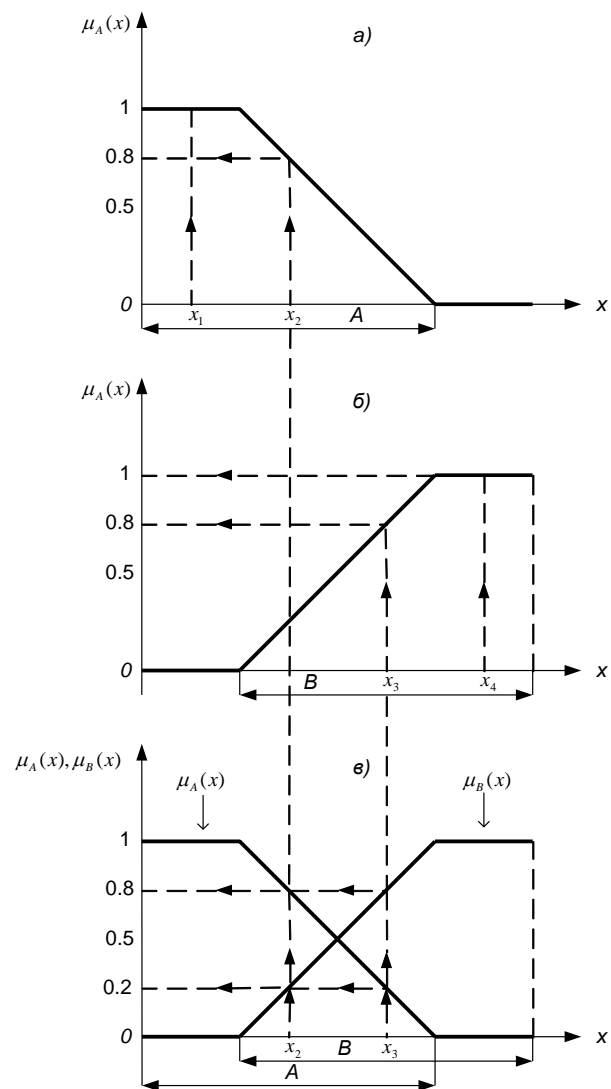


Рис.1.2 Графическое представление принадлежности в теории нечетких множеств.

Из рис.1.2а следует, что элемент  $x_1 \in A$  имеет  $\mu_A(x_1) = 1$ , а элемент  $x_2 \in A$  соответственно  $\mu_A(x_2)=0.8$ , поэтому в теории нечетких множеств принято говорить, что элемент  $x_1$  принадлежит множеству  $A$  полностью, а элемент  $x_2$  принадлежит множеству  $A$  частично. Аналогично из рис.1.2б имеем  $x_4 \in B$  полностью ( $\mu_B(x_4) = 1$ ),  $x_3 \in B$  частично ( $\mu_B(x_3)=0.8$ ). Соответственно из рис.1.2в имеем:  $x_2 \in A$  частично с весом 0.8 ( $\mu_A(x_2)=0.8$ ) и  $x_2 \in B$  частично – с весом 0.2 ( $\mu_B(x_2)=0.2$ ). Элемент  $x_3 \in A$  частично с весом 0.2 ( $\mu_A(x_3)=0.2$ ) и  $x_3 \in B$  частично с весом 0.8 ( $\mu_B(x_3)=0.8$ ).

Таким образом, граница между двумя множествами  $A$  и  $B$  является размытой или нечеткой и переход элементов из одного множества в другое происходит плавно, без скачков. В классической теории множеств этот переход осуществляется скачкообразно, и оба множества имеют четкую границу между собой. В таблице 1.1 представлено сопоставление характеристической функции  $\mu_A^*(x)$  теории четких множеств с функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  теории нечетких множеств.

**Таблица 1.1.** Сопоставление характеристической функции с функцией принадлежности

Теория четких множеств характеристическая функция $\mu_A^*(x)$	Теория нечетких множеств функция принадлежности $\mu_A(x)$
$\mu : A \rightarrow \{0,1\} \subset R_1$	$\mu : A \rightarrow [0,1] \subset R_1$

Наличие между нечеткими множествами размытых границ можно интерпретировать в лингвистической форме (рис. 1.3). Для температуры воды будем предполагать, что температура в  $15^\circ\text{C}$  и ее окрестности являются «холодной» водой, температура в  $85^\circ\text{C}$  и ее окрестности ассоциируются

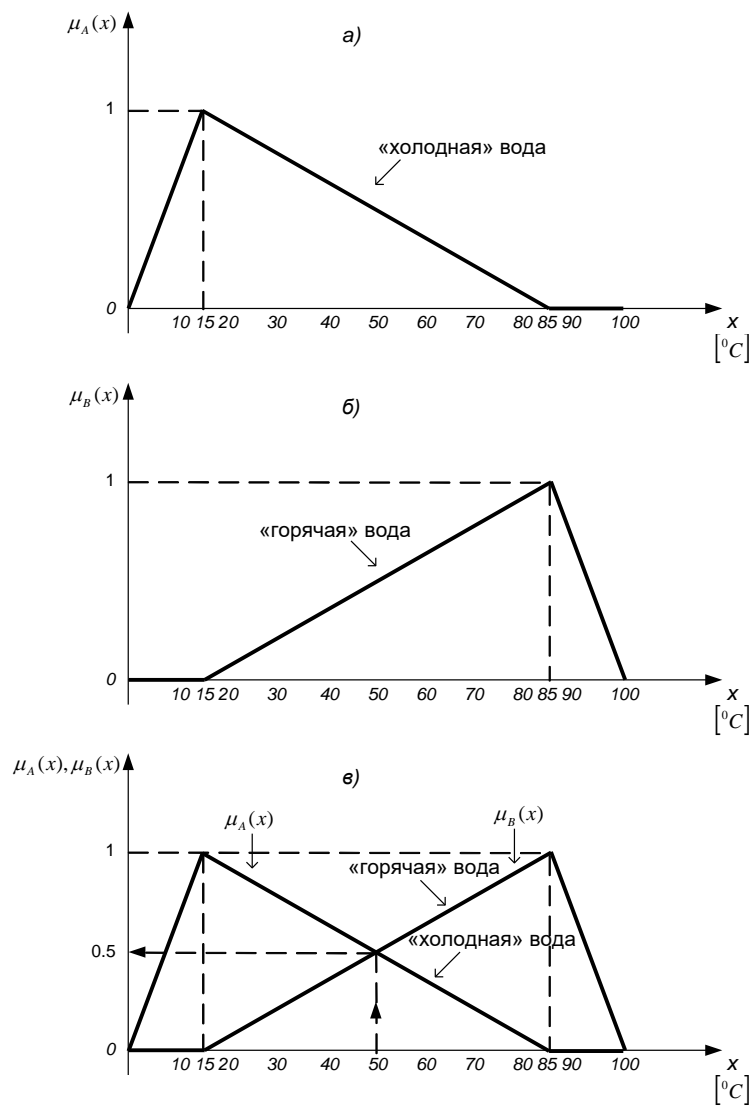


Рис. 1.3 Количественное представление нечетких логических переменных «холодная», «горячая» вода.

с «горячей» водой (рис. 1.3а,б).

Тогда нечетким лингвистическим переменным «холодная», «горячая» можно дать количественную форму с использованием функций принадлежности. Температура в 50°С частично с весом 0.5 является «холодной» и с весом 0.5 «горячей» (рис.1.3в). Отметим, что имеет место условие нормировки:  $\mu_A(x) + \mu_B(x) = 1$ .

Одномерное нечеткое подмножество  $A \subset R_1$  определяется как совокупность упорядоченных пар  $\{x, \mu_A(x)\}$ ,  $x \in R_1$ . В различных источниках используется эквивалентные способы представления нечетких множеств:

$$A = \{ x / \mu_A(x) \} \Leftrightarrow A = \{ \mu_A(x) / x \} \Leftrightarrow A = \{ (x; \mu_A(x)) \} \Leftrightarrow A = \{ (\mu_A(x); x) \} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \mu_A(x_i) / x - \text{дискретное множество} \\ \int_A \mu_A(x_i) / x - \text{непрерывное множество} \end{array} \right.$$

Здесь символы  $\Sigma$  и  $\int$  понимаются как объединение. Аналогичным способом представляются четкие множества с заменой  $\mu_A(x)$  на  $\mu_A^*(x)$ .

**Пример.** Пусть  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  – четкое дискретное множество,  $A = \{2, 3, 5\}$  – четкое дискретное подмножество множества  $E$ , т.е.  $A \subset E$ . Тогда подмножество  $A$  может быть представлено в следующих эквивалентных формах:

$$A = \{(1; 0), (2; 1), (3; 1), (4; 0), (5; 1)\} \Leftrightarrow A = \{1/0 + 2/1 + 3/1 + 4/0 + 5/1\} \Leftrightarrow A = \{(1|0) \cup (2|1) \cup (3|1) \cup (4|0) \cup (5|1)\}.$$



Графическое представление  $A$  изображено на рис.1.4. Четкое число  $x_i \in R_1$  в теории нечетких множеств определяется с помощью одиночной (singleton) функции принадлежности

(рис.1.5)

$$\mu_A(x) = \text{singl}(x - x_i) = \begin{cases} 1, & x_i = x \\ 0 & x_i \neq x. \end{cases}$$

**Пример.**  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  – дискретное множество,  $E \supset A$  – нечеткое дискретное подмножество с заданной функцией принадлежности (рис.1.6), тогда  $A$  может быть представлено в следующих эквивалентных формах

$$A = \{(1; 0), (2; 0.5), (3; 1), (4; 0.5), (5; 0)\} \Leftrightarrow$$

$$A = \{1/0 + 2/0.5 + 3/1 + 4/0.5 + 5/0\} \Leftrightarrow$$

$$A = \{1/0 \cup 2/0.5 \cup 3/1 \cup 4/0.5 \cup 5/0\}.$$

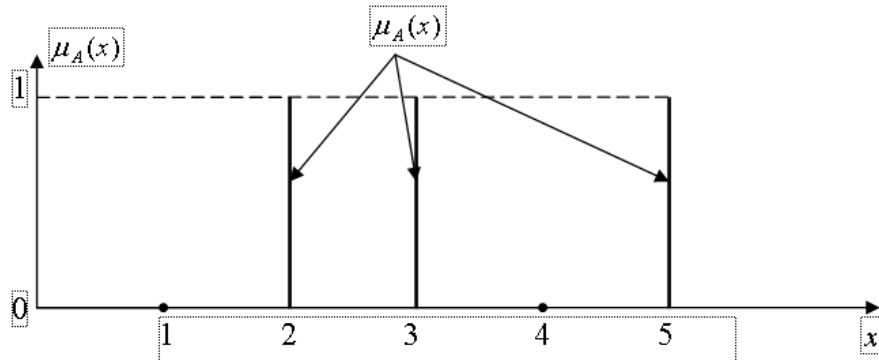


Рис. 1.4. Четкое дискретное подмножество  $A$ .

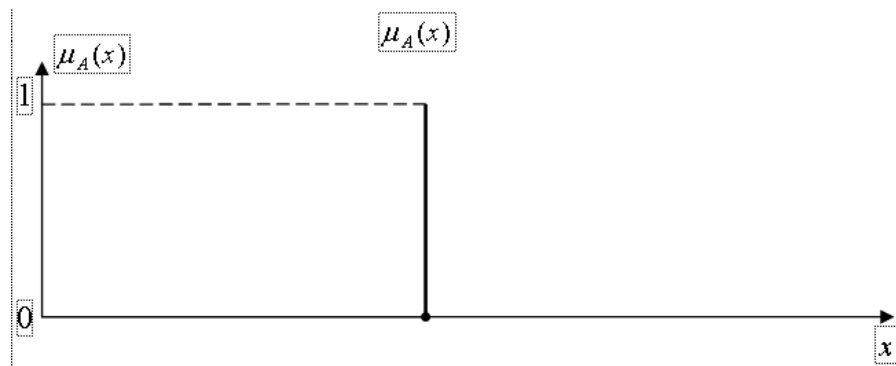


Рис. 1.5. Одиночная функция принадлежности, представляющая четкое число  $x_i \in R_1$  в теории нечетких множеств.

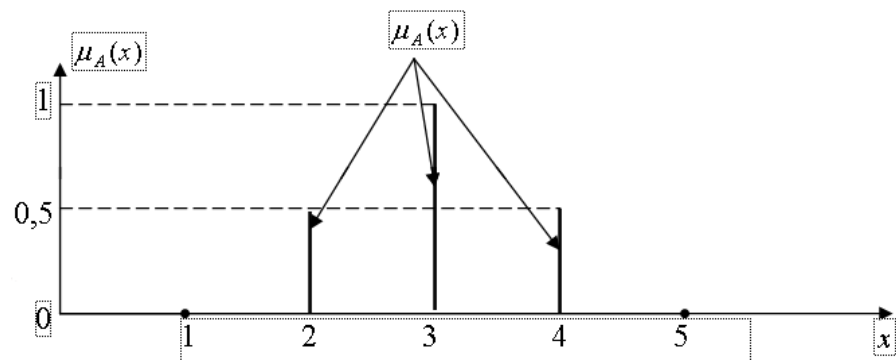


Рис. 1.6. Нечеткое дискретное подмножество  $A$ .

**Пример.**  $E \subset R_1$ ,  $E \supset A$  – нечеткое непрерывное подмножество с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \max(y_1 - |x-2|; y_2=0), \quad x \in R_1, \quad (1.2)$$

тогда  $A$  может быть представлено в форме (рис.1.7):

$$A = \int_E \max(1 - |x - 2|; 0) / x,$$

где, как и ранее, символ  $\int$  обозначает объединение. При использовании вычислительных устройств непрерывная функция принадлежности представляется в дискретной форме. После аппроксимации непрерывной функции принадлежности  $\mu_A(x)$  треугольного типа ступенчатой функцией  $\mu_{A^*}(x)$  получим нечеткое дискретное подмножество  $A^*$ , которое в первом приближении аппроксимирует непрерывное нечеткое подмножество  $A$  и может быть также записано в следующих эквивалентных формах (рис.1.8)

$$\begin{aligned} A \approx A^* = & \{(1;0), (1.25;0.25), (1.5;0.5), (1.75;0.75), (2,1), (2.25;0.75), \\ & (2.5;0.5), (2.75;0.25), (3,0)\} \equiv 1/0 + 1.25/0.25 + 1.5/0.5 + 1.75/0.75 + 2/1 + \\ & + 2.25/0.75 + 2.5/0.5 + 2.75/0.25 + 3/0 \equiv \\ & 1/0 \cup 1.25/0.25 \cup 1.5/0.5 \cup 1.75/0.75 \cup 2/1 \cup 2.25/0.75 \cup 2.5/0. \\ & 5 \cup 2.75/0.25 \cup 3/0. \end{aligned}$$

Помимо приведенных выше функций принадлежности треугольного типа и одиночной в теории нечеткого управления широко используются функции трапецеидальной и колоколообразной формы (рис.1.9):

$\mu_A(x) = \min\{\max(a - k|x - b|; 0); 1\}$  - трапецеидальная,  $a, b$  – заданные числа,  $k$ - показатель нечеткости;  $x \in R_1$ ;

$\mu_A(x) = \exp\{-(x - m)^2/\delta^2\}$  - колоколообразная (нормальная);  $m$ - заданное число,  $\delta$ - показатель нечеткости,  $x \in R_1$ .

При решении научно-исследовательских задач нечеткого управления также могут быть использованы следующие функции принадлежности:

$\mu_A(x) = \exp(-kx)$ ,  $x > 0$ ,  $\mu_A(x) = 1 - ax^k$ ,  $0 \leq x \leq a^{-1/k}$ ;  $\mu_A(x) = (1 + kx^2)^{-1}$ ,  $k > 1$ .

Обзор простейших функций принадлежности, которые ассоциируются с нечеткими утверждениями «величина  $x$  –

мала», «величина  $|x|$  – мала», «величина  $x$  – велика», «величина  $|x|$ –велика» приведен в [6].

Нечеткое множество с одномерной функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  принято называть нечетким множеством 1-го рода.

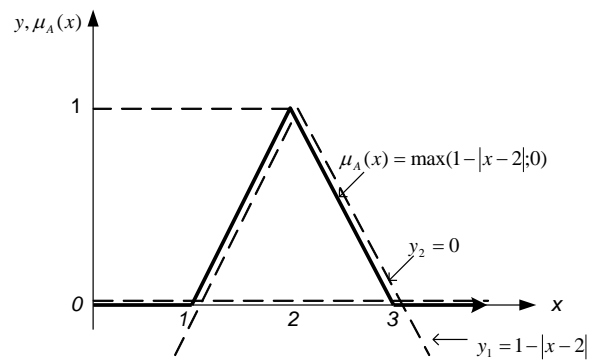


Рис.1.7. Нечеткое непрерывное подмножество  $A$ .

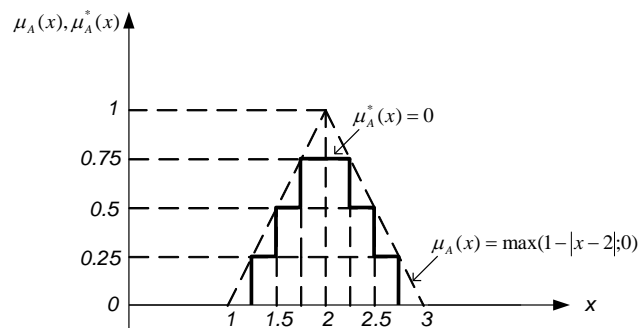


Рис.1.8. Нечеткое непрерывное подмножество  $A$  и его дискретная аппроксимация  $A^*$ .

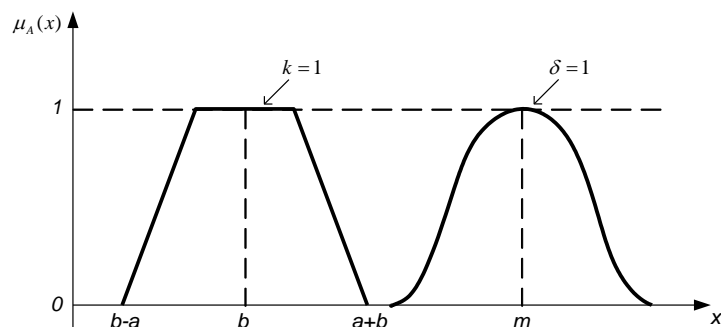


Рис.1.9. Функции принадлежности трапецеидальной и колоколообразной формы.

Различают также нечеткие множества 2-го рода; в этом случае функция принадлежности  $\mu_{A_3} = \mu_{A_2}(\mu_{A_1}(x))$ .

Для нечеткого множества n-го рода, соответственно,

$$\mu_{A_{n+1}}(x) = \mu_{A_n}(\mu_{A_{n-1}} \dots \mu_{A_1}(x)).$$

В современных разделах теории нечетких множеств активно изучается теория вероятностей нечетких множеств (глава 5), для которых

$\mu_{A_2}(x) = P\{\mu_{A_1} \in [0;1]\}$ , где  $P\{\cdot\}$  – вероятность того, что случайная величина  $\mu_{A_1}(x)$  принимает значения из промежутка  $[0;1]$ .

Изучаются другие типы нечетких множеств с определением функций принадлежности на булевых переменных, решетках, сетях и т.д. Обобщаются традиционные разделы математики в нечеткой постановке: нечеткая статистическая проверка гипотез, нечеткий регрессионный анализ, нечеткие марковские случайные процессы, нечеткие дифференциальные уравнения и другие разделы.

Двумерное нечеткое множество  $A$  с использованием двумерной функции принадлежности  $\mu_A(x_1, x_2)$  определяется как совокупность:

$$A = \{A_1 \times A_2; \mu_A(x_1, x_2)\},$$

где  $A_1 \times A_2$  - прямое (декартово) произведение;  $x_1, x_2 \in R_1$ . На рис.1.10 представлено нечеткое множество  $A$  с двумерной функцией принадлежности пирамидального типа:

$$\mu_A(x_1, x_2) = \max\{a - k_1|x_1 - b| - k_2|x_2 - c|; (x_1=0, x_2=0)\},$$

где  $a, b, c$  - заданные числа,  $k_1, k_2$  - показатели нечеткости, а на рис.1.11 с двумерной колоколообразной функцией:

$$\mu_A(x_1, x_2) = \exp\left[-\frac{(x_1 - m_1)^2}{\delta_1^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{\delta_2^2}\right],$$

где  $m_1, m_2$  - заданные числа,  $\delta_1, \delta_2$  - показатели нечеткости.

Многомерное нечеткое множество  $A$  определяется как совокупность:

$$A = \{A_1 \times \dots \times A_n; \mu_A(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Многомерная пирамидальная функция принадлежности:

$$\mu_A(x_1, \dots, x_n) = \max\{a - k_1|x_1 - b_1| - \dots - k_n|x_n - b_n|; (x_1=0, \dots, x_n=0)\},$$

где  $a_i, b_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) - заданные числа;  $k_i$  - показатели нечеткости.

Многомерная колоколообразная функция принадлежности:

$$\mu_A(x_1, \dots, x_n) = \max\left\{\exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{\delta_i^2}\right]; (0; \dots, 0)\right\},$$

$m_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) - заданные числа;  $\delta_i$  - показатели нечеткости

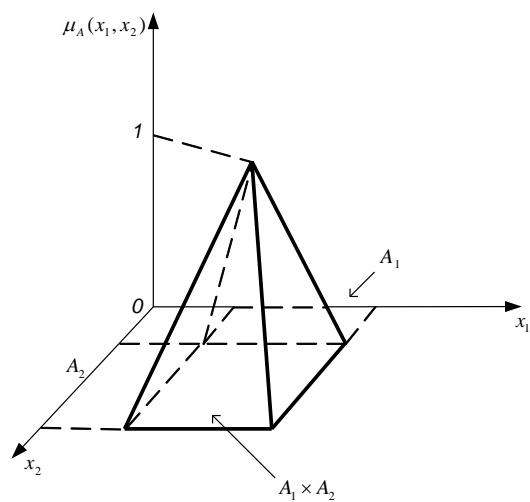


Рис.1.10. Нечеткое множество  $A$  с двумерной функцией принадлежности пирамидального типа.

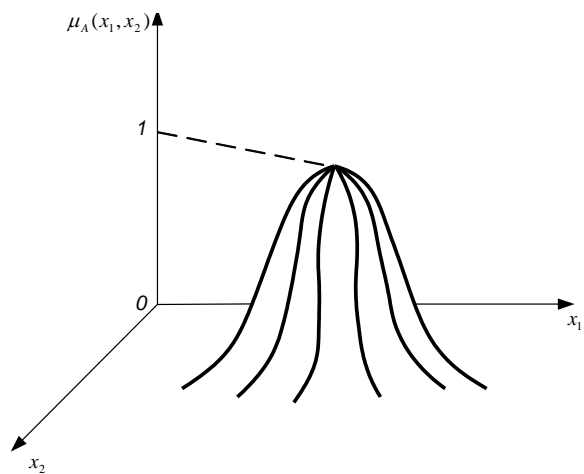


Рис.1.11. Нечеткое множество  $A$  с двумерной функцией принадлежности колоколообразного типа.

Нечеткое множество с многомерной функцией принадлежности помимо названия «многомерное нечеткое множество» имеет эквивалентное название «нечеткое отношение» (fuzzy relation).

По аналогии с (1.1) оно записывается в виде:

$$A = R = \sum_{A_1} \dots \sum_{A_n} \mu_R(x_1, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_n) = \sum_{A_1 \times \dots \times A_n} \mu(x_1, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_n)$$

- многомерное нечеткое дискретное множество.

$$A = R = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \mu_R(x_1, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_n) = \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \mu_R(x_1, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_n)$$

- многомерное нечеткое непрерывное множество.

Здесь символ R – аббревиатура Relation – отношение.

Например, двумерное нечеткое дискретное множество A с  $\mu_A(x_1, x_2) = \max(1 - |x_1 - x_2|/2; (0; 0))$  на дискретной области  $x_1, x_2: 0; 1; 2; \dots, 10$  имеет представление  $A = R = 0/(0; 0) + 0/(0; 1) + \dots + 1/2/(0; 9) + 1/(0; 10) + \dots + 1/(10; 0) + 1/2/(10; 1) + 0/(10; 2) + \dots + 0/(10; 10)$  или в матричной форме:

$$A = R = \underbrace{\left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} x_1 : x_{10} = 0 & x_{11} = 1 & x_{12} = 2 & \dots & x_{1,9} = 9 & x_{1,10} = 10 \end{array} & \begin{array}{c} x_2 : \\ x_{20} = 0 \\ x_{21} = 1 \\ x_{22} = 2 \\ \vdots \\ x_{2,8} = 8 \\ x_{2,9} = 9 \\ x_{2,10} = 10 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} & \end{array} \right)}_{\mu_A(x_1, x_2)}$$



## 1.2. СВОЙСТВА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ.

При анализе работы нечеткого регулятора важную роль играют свойства нечетких множеств, перечислим некоторые из них (рис.1.12-1.17).

**Высота** (height-hgt) нечеткого множества  $A$ :

$$\text{hgt } A = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Нечеткое множество  $A$  с  $\text{hgt } A=1$  называется нормальным, а при  $\text{hgt } A < 1$  субнормальным.

**Ядро** (core, kernal, nucleus) или центр нечеткого множества  $A$ :

$$\text{core } A = \{ x \in R_1 / \mu_A(x) = 1 \}$$

**Основание** (support-supp) нечеткого множества  $A$ :

$$\text{supp } A = \{ x \in R_1 / \mu_A(x) > 0 \}$$

Если  $\text{supp } A < \infty$ , то основание называется компактным основанием, т.е. совокупность точек является ограниченной и замкнутой. При  $\text{supp } A = \pm \infty$  основание называется некомпактным.

**Поперечными точками** (crossover points) нечеткого множества  $A$  называется совокупность:

$$\{ x \in R_1 / \mu_A(x) = 0,5 \}.$$

**Уровень  $\alpha$**  нечеткого множества  $A$  или  **$\alpha$ -разрез** (сечение) нечеткого множества  $A$ :

$$\alpha - \text{cut } A = \{ x \in R_1 / \mu_A(x) \geq \alpha \}.$$

### Строгий $\alpha$ -разрез

$$\alpha - cut A = \{x \in R_1 / \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Из определений следует

$$core A = \alpha - cut A \big|_{\alpha=1} = 1 - cut A = \{x \in X / \mu_A(x) = 1\}.$$

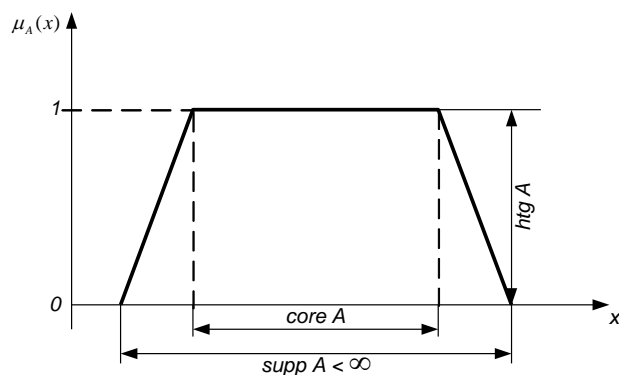


Рис.1.12. Нечеткое множество с компактным основанием и центром в виде отрезка.

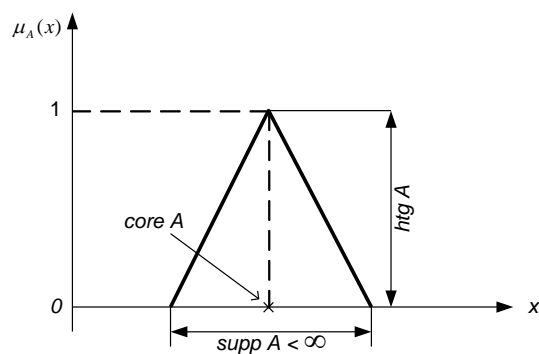


Рис.1.13. Нечеткое множество с компактным основанием и центром, содержащим одну точку.

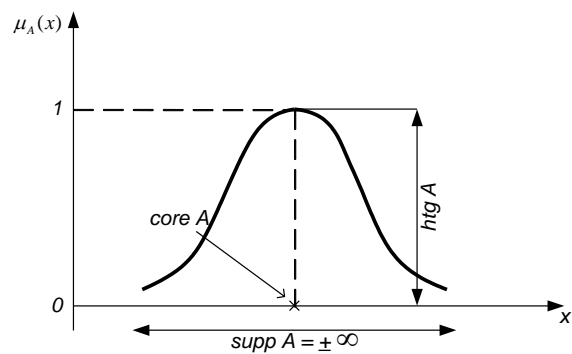


Рис.1.14. Нечеткое множество с некомпактным основанием.

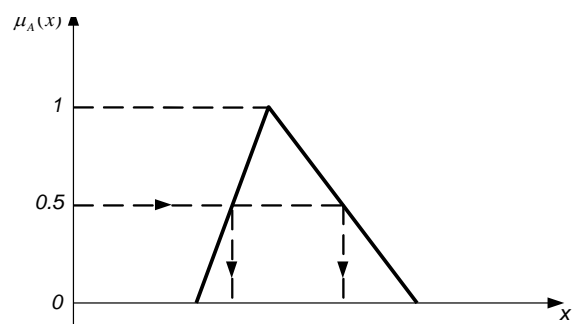


Рис.1.15. Поперечные точки нечеткого множества.

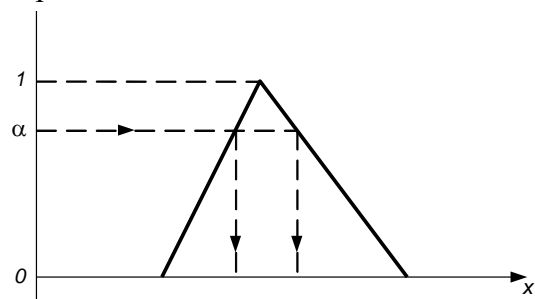


Рис.1.16.  $\alpha$ -уровень нечеткого множества.

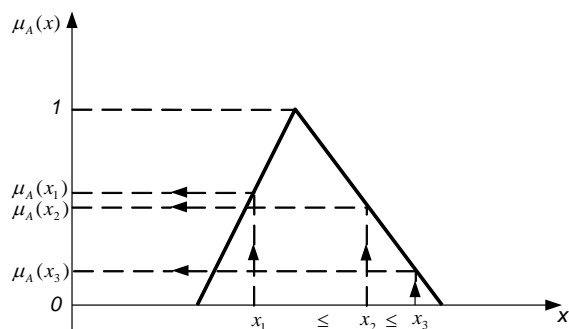


Рис.1.17. Выпуклое нечеткое множество.

т.е. ядро нечеткого множества равно разрезу с  $\alpha = 1$

$$\text{supp} A = \alpha - \text{cut} A /_{\alpha=0} = \{x \in X / \mu_A(x) > 0\}$$

т.е. основание нечеткого множества равно разрезу с  $\alpha = 1$ .

Выпуклое (convex) нечеткое множество  $A$ :

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X : x_1 \leq x_2 \leq x_3 \Rightarrow \mu_A(x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_3)).$$

При невыполнении неравенства нечеткое множество называется невыпуклым.

Нечеткое разбиение нечеткого множества  $A$ . Если имеем: нечеткое множество  $A$ ; нечеткие подмножества

$$A_j \subset A, j = \overline{1, N}; A_j \neq \emptyset; A_j \neq A; \forall x \in A \Rightarrow \sum_{j=1}^N \mu_{A_j}(x) = 1,$$

тогда подмножества  $A_1, \dots, A_N$  называются нечетким разбиением нечеткого множества  $A$ .

**Пример.** Пусть  $A_j, j = \overline{1, N}$  нечеткие подмножества, такие что

$$\text{hgt} A_j = 1; A_j - \text{выпуклые,} \\ \text{т.е. } \forall x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3} \in A_j : \mu_{A_j}(x_{j_2}) \geq \min(\mu_{A_j}(x_{j_1}), \mu_{A_j}(x_{j_3}));$$

для  $\forall j$  нечеткое подмножество не содержит более 2-х пересечений с другими нечеткими подмножествами, тогда  $A_j$  есть нечеткое разбиение  $A$  (рис.1.18).

Специальный тип нечеткого множества  $A$  называется нечетким числом, если выполняются следующие условия:

$A$  является выпуклым, (1.5)

$A$  является нормальным ( $\text{hgt } A = 1$ ), (1.6)

$\mu_A(x)$  является кусочно-непрерывной функцией, (1.7)

$\text{core } A$  содержит одну точку. (1.8)

Пример нечеткого числа «приблизительно 5» в графической форме приведен на рис.1.19.

Нечеткое множество  $A$ , для которого выполняются условия (1.5) – (1.7), а (1.8) не выполняется, называется нечетким интервалом. Пример нечеткого интервала «от приблизительно 2 до приблизительно 7» приведен на рис.1.20.

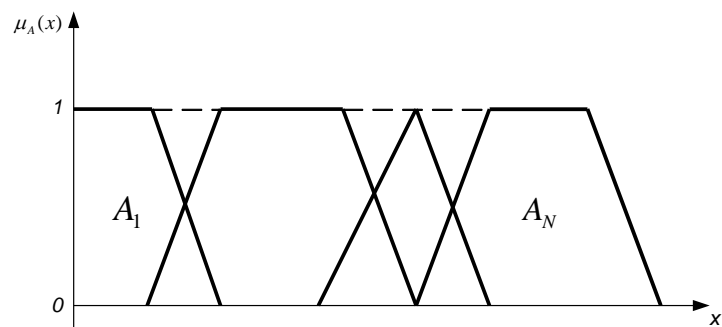


Рис.1.18. Нечеткое разбиение нечеткого множества.

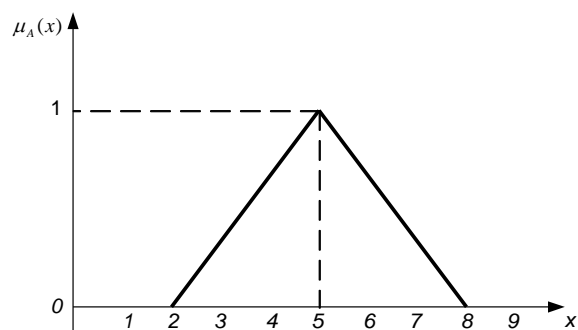


Рис.1.19. Нечеткое число « $\approx 5$ ».

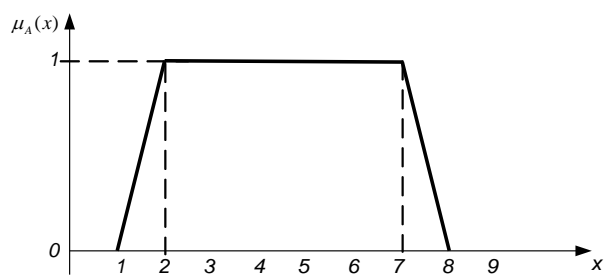


Рис.1.20. Нечеткий интервал «от приблизительно 2 до приблизительно 7».

### 1.3. ПРИНЦИП ОБОБЩЕНИЯ.

Этот принцип обобщает понятие «отображение» математического анализа и соответственно математические операции типа сложение, вычитание, умножение, деление и другие, которые в теории нечетких множеств интерпретируются как специальный тип отображения. Впервые этот принцип был сформулирован Л.Заде в 1975 году и является одним из наиболее важных в теории нечетких множеств. Как утверждают ведущие специалисты в области теории нечетких множеств Дубоис (Dubois) и Праде (Prade) “этот принцип дает общий метод для обобщения нечетких понятий с тем, чтобы иметь дело с нечеткими количествами» [7].

Применение этого принципа для нечеткой арифметики с нечеткими числами позволяет решать традиционные задачи теории управления: параметрической и структурной идентификации; фильтрации и прогнозирования случайных процессов; обработки измерений по методу наименьших квадратов; распознавания образов и другие задачи.

Имеется много вариантов определения нечеткого отображения. Рассмотрим некоторые из них.

Классическое отображение  $f$  определяется как соответствие элемента  $x \in A_1$  элементу  $y \in A_2$ :

$$f: A_1 \rightarrow A_2.$$

В теории нечетких множеств нечеткое отображение  $f$  определяется, как соответствие элемента  $x \in A_1$  элементу  $y \in A_2$  с функцией принадлежности  $\mu_f(x, y)$ . В одномерном случае нечеткое отображение в системе координат  $\{x, y, \mu_f(x, y)\}$  характеризуется некоторой поверхностью и для этого отображения приняты различные обозначения:

$$f: A_1 \rightarrow A_2 \Leftrightarrow y \xrightarrow{\mu_f(x,y)} f(x)$$

и т.д.

По другому варианту определения нечеткое отображение  $f$  это отображение с нечеткой областью определения  $A_1$  и нечеткой областью значений  $A_2$ :

$y \xrightarrow{f} f(x); x \in A_1; y \in A_2; A_1, A_2$  – нечеткие множества.

Иногда нечеткое отображение  $f$  определяется нечеткой поверхностью  $\mu_f(x,y)$  в  $A_1 \times A_2$ .

Нечеткая функция  $f$  многих переменных определяется в виде:

$y \xrightarrow{f} f(x_1, \dots, x_n); x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n, y \in A_{n+1}; A_1, \dots, A_{n+1}$  – нечеткие множества.  
 $\mu_f(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n, A_{n+1}$ .

Геометрическая интерпретация нечеткой функции одного переменного  $y \xrightarrow{f} f(x)$  приведена на рис.1.21.

Принцип обобщения в многомерном случае формулируется в следующей постановке:

- задана нечеткая функция многих переменных  $y \xrightarrow{f} f(x_1, \dots, x_n);$
- задано нечеткое множество  $A$  аргумента нечеткой функции  
 $A = \{A_1 \times \dots \times A_n; \mu_A(x_1, \dots, x_n)\}.$

Необходимо найти функцию принадлежности  $\mu_{A_{n+1}}(y)$  нечеткого множества  $A_{n+1}$ , которое является область значений нечеткой функции многих переменных



$$y \stackrel{n}{=} f(x_1, \dots, x_n).$$

Имеет место следующее определение принципа обобщения в многомерном случае

$$\mu_{A_{n+1}}(y) = \sup \mu_A(x_1, \dots, x_n) = \sup \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))$$

$$\begin{array}{cc} x_1, \dots, x_n : & x_1, \dots, x_n : \\ y = f(x_1, \dots, x_n) & y = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Пример. Применим этот принцип для сложения двух нечетких чисел:

« $\cong 5 + \cong 2$ » с заданными непрерывными функциями принадлежности треугольного типа:

$$\mu_{A_1 \cong 5}(x_1) = \max(1 - 0.5 / x_1 - 5 / ; 0), \quad (1.9)$$

$$\mu_{A_2 \cong 2}(x_2) = \max(1 - / x_2 - 2 / ; 0). \quad (1.10)$$

Шаг1. По заданным

$$A_1 \approx 5, \mu_{A_1 \approx 5}(x_1); A_2 \approx 2, \mu_{A_1 \approx 2}(x_2)$$

находятся (рис.1.22)

$$A_3 = A_1 \times A_2, \mu_{A_3 = A_1 \times A_2}(x_1, x_2).$$

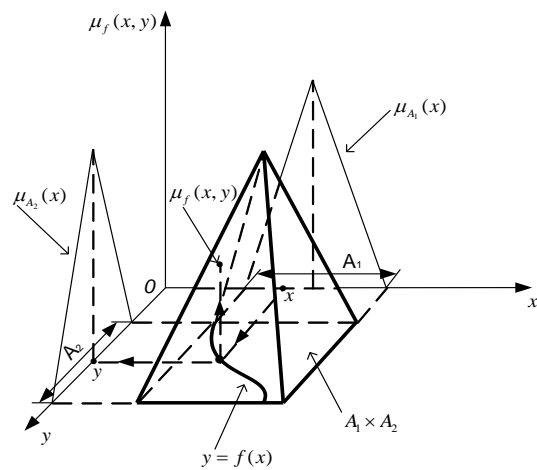


Рис.1.21. Геометрическая интерпретация нечеткой функции одного переменного  $y^H = f(x)$ .

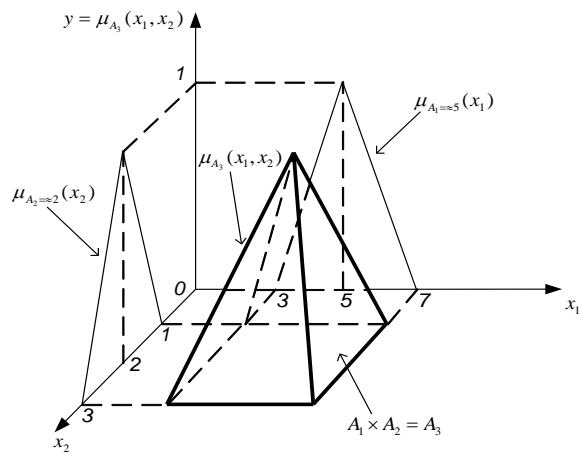


Рис.1.22. Нечеткое множество  $A_3 = \{A_1 \times A_2 ; \mu_{A_3}(x_1, x_2)\}$ .

$$\min [\mu_{A_1 \approx 5}(x_1), \mu_{A_2 \approx 2}(x_2)].$$

Для этого фиксируется  $x_2=x_{21}$  и варьируется  $x_1 \in [3,7]$ . В результате получается плоскость  $\pi_1$ , которая пересекает пирамиду

$$\mu_{A_3}(x_1, x_2).$$

по прямой  $C_1C_2$  (рис.1.23). Аналогично поступаем для  $x_2=x_{21}$  и далее для  $x_1=x_{11}$ ,  $x_1=x_{12}$ , ..... и т.д. В проекции на горизонтальную плоскость  $x_2 \ 0x_1$  при различных  $y=\{0;1/4;1/2;3/4;1\}$  будем иметь изокривые (рис.1.24)

$$\min [\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)] /_{y=y_i} \quad (1.11)$$

Шаг 3. На горизонтальной плоскости  $x_2 \ 0x_1$  строятся зависимости для отображения  $y=x_1+x_2$  при фиксированных  $y=y_i$  (рис.1.25)

$$y \begin{array}{l} \diagup \\ y=4 \end{array} = x_1 + x \Rightarrow 4 = x_1 + x \Rightarrow x_2 = 4 - x_1,$$

$$y \begin{array}{l} \diagup \\ y=5 \end{array} = x_1 + x \Rightarrow 5 = x_1 + x \Rightarrow x_2 = 5 - x_1,$$

:

$$y \begin{array}{l} \diagup \\ y=10 \end{array} = x_1 + x \Rightarrow 10 = x_1 + x \Rightarrow x_2 = 10 - x_1.$$

Пересечение этих прямых с изокривыми определяются точки:

$$\sup \min [\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)] \Big|_{y=y_i} = \mu_{A_3 \approx 5 + \approx 2}(y_i).$$

$$x_1, x_2 :$$

$$y = x_1 + x_2$$

В результате получается совокупность точек (рис.1.26):

$$\{y_i, \mu_{A_3 \approx 5 + \approx 2}(y_i)\},$$

которые определяют функцию принадлежности при сложении двух нечетких чисел « $\approx 5 + \approx 2$ ».

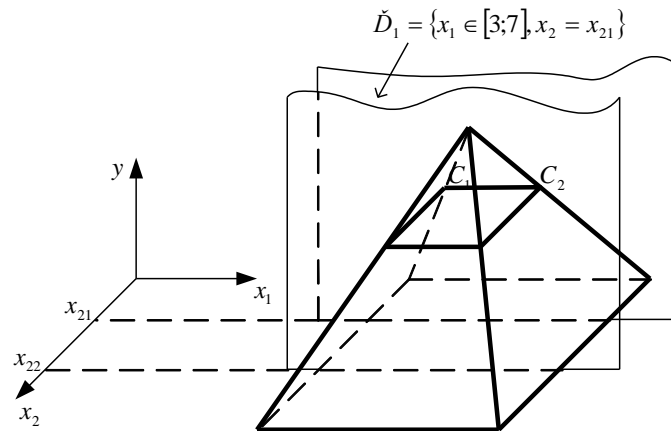


Рис.1.23. Изокривая  $y \Big|_{y_i} = \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} \Big|_{y_i}$ .

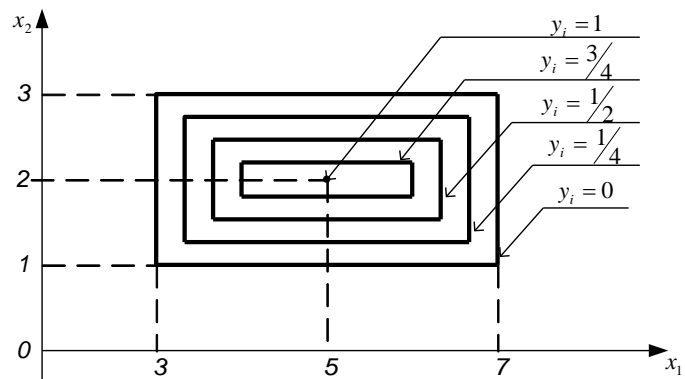


Рис.1.24. Совокупность изокривых  $y|_{y_i} = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}|_{y_i}$ .

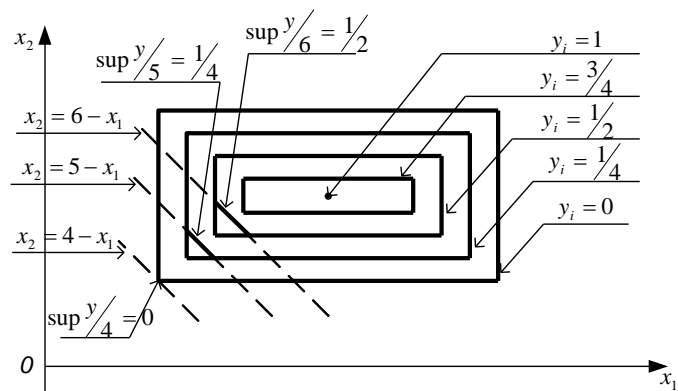


Рис.1.25. Совокупность  $A_3 = \{y_i ; \mu_{A_3 \approx 5+ \approx 2}(y_i)\}$ .

Аналогичные построения могут быть сделаны в случае арифметических операций «-» «:» «х» для нечетких чисел с треугольными функциями принадлежности.

Пусть, как и ранее, имеем функции принадлежности (1.9), (1.10) двух нечетких чисел  $\approx 5$  и  $\approx 2$  и необходимо вычислить  $\approx 5 - \approx 2$ , т.е. необходимо найти:

$$\mu_{A_3 \approx 5 - \approx 2}(x_1, x_2).$$

После вычисления прямого произведения пространств  $A_3 = A_1 \times A_2$  и дальнейших построений, получим в плоскости  $x_2 x_1$  соответствующие изокривые (1.11), и, для задаваемых  $C_i$ , соответствующие зависимости  $y = x_1 - x_2 = C_i$  (рис.1.27). Их взаимные пересечения определяет совокупность:

$$\{y = c_i; \mu_{A_3 \approx 5 - \approx 2}(y_i = c_i) = a_i\},$$

которая будет представлять собой функцию принадлежности

$$\mu_{A_3 \approx 5 - \approx 2}(y = x_1 - x_2)$$

разности 2-х нечетких чисел « $\approx 5 - \approx 2$ ».

На рис.1.28 показаны изокривые и зависимости  $y = x_1 - x_2 = C_i$ , возникающие при вычислении « $\approx 5 - \approx 2$ ». На рис. 1.29 представлены изокривые и зависимости

$$y = \frac{x_1}{x_2} = C_i$$

при вычислении « $\approx 5 : \approx 2$ ».

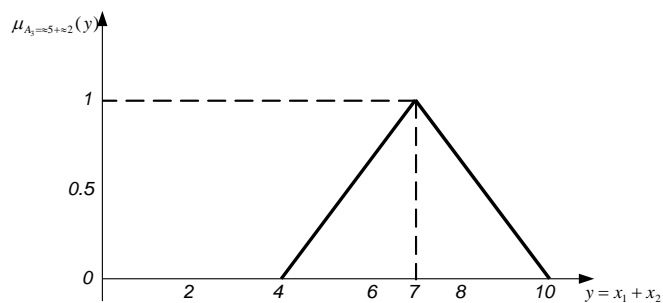


Рис.1.26. Функция принадлежности суммы 2-х нечетких чисел « $\approx 5 + \approx 2$ ».

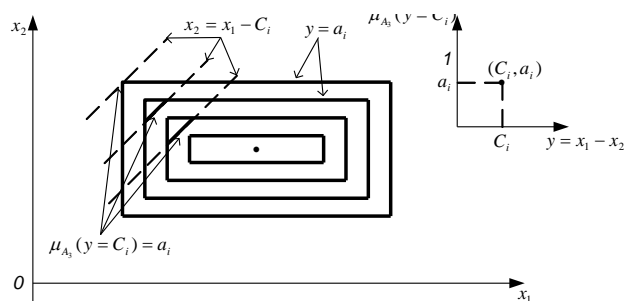


Рис.1.27. Функция принадлежности разности 2-х нечетких чисел.

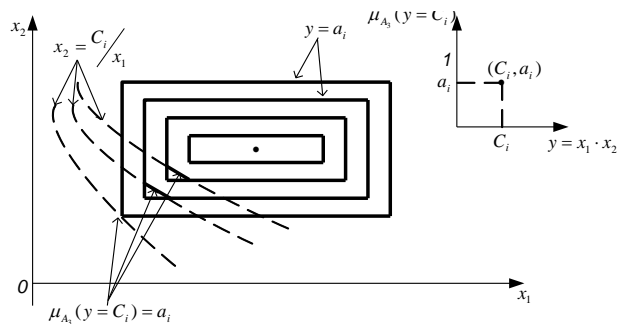


Рис.1.28. Функция принадлежности произведения 2-х нечетких чисел.

Геометрические построения, представленные на рис.1.22-1.29, показывают, что при наличии треугольных функций принадлежности и элементарных арифметических операций типа «+», «-», «:», «х», получение результирующей функции принадлежности является более или менее тривиальной операцией. В этом случае принцип обобщения для результирующей функции принадлежности может быть сформулирован в виде следующего правила:

$$\mu_{A_2}(y) = \sum_{i=1}^n \mu_{A_1}(x_i) / f(x_i),$$

$$\mu_{A_2}(y) = \int_x \mu_{A_1}(x_i) / f(x_i), \quad (1.12)$$

$A_1$  - непрерывно е нечеткое множество

яа́í  $y = f(x)$ ,  $x \in A_1$ ,  $y \in A_2$ ,  $A_1, A_2$  - í÷íñęčĺ ěñćĺíñâŕ í  
треугольными функциями принадлежности.

Рассмотрим несколько примеров арифметических операций с нечеткими числами по (1.12.).

**Пример.** Имеем нечеткое число «≈5» с дискретной функцией принадлежности (рис.1.30):

$$\mu_{\approx 5}(x) = 0.5/4 + 1/5 + 0.5/6.$$

Это нечеткое число возводится в квадрат  $(\approx 5)^2 = (\approx 5) * (\approx 5)$ .

Необходимо найти  $\mu_{(\approx 5)^2}(x)$ .



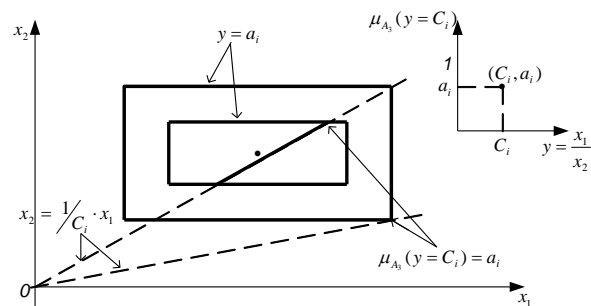


Рис.1.29. Функция принадлежности отношения 2-х нечетких чисел.

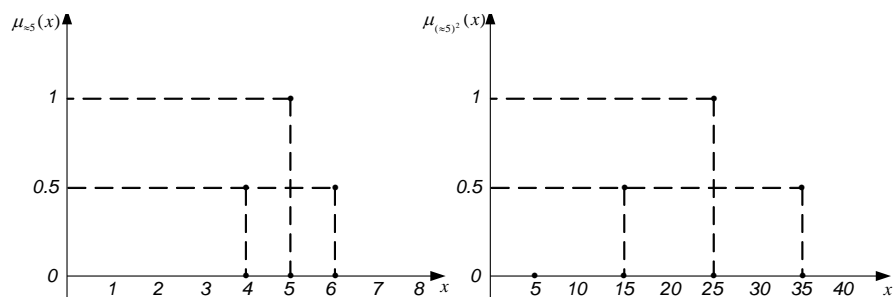


Рис.1.30. Возведение в квадрат нечеткого числа « $\approx 5$ ».

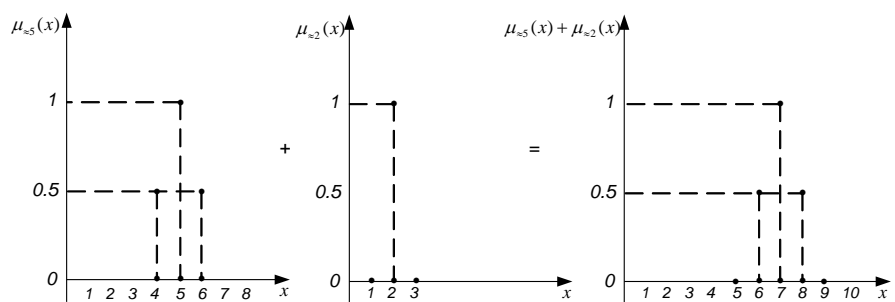


Рис.1.31. Сложение двух нечетких чисел « $\approx 5 + \approx 2$ ».

В соответствии с (1.12) имеем

$$\mu_{(\approx 5)}^2 = \sum_{i=1}^3 \mu_{(\approx 5)}(x_i) / x_i = (0,5/4 + 1/5 + 0,5/6)^2 = (0,5/4^2 + 1/5^2 + 0,5/6^2) = 0,5/16 + 1/25 + 0,5/36.$$

Пример. Имеем нечеткие числа « $\approx 5$ » и « $\approx 2$ » с дискретными функциями принадлежности (рис.1.31):

$$\mu_{\approx 5} = 0,5/4 + 1/5 + 0,5/6; \mu_{\approx 2}(x) = 1/2.$$

Рассматривается сумма 2-х нечетких чисел: « $\approx 5 + \approx 2$ ».

Необходимо найти  $\mu_{\approx 5 + \approx 2}(x)$ . По (1.12) имеем:

$$\mu_{\approx 5 + \approx 2}(x) = (0,5/4 + 1/5 + 0,5/6) + (1/2) = (0,5/4 + 2 + 1/5 + 2 + 0,5/6 + 2) = 0,5/6 + 1/7 + 0,5/8.$$

При наличии более сложных функций принадлежности, например, колоколообразных:

$$\mu_{A_1}(x_1) = \exp\left[-\frac{(x_1 - a)^2}{\delta_1^2}\right], \mu_{A_2}(x_2) = \exp\left[-\frac{(x_2 - b)^2}{\delta_2^2}\right]$$

с показателями нечеткости  $\delta_1, \delta_2$  соответственно, построение результирующей функции принадлежности для соответствующих арифметических операций представляет собой достаточно сложную вычислительную процедуру (рис. 1.32). В некоторых случаях не всегда удастся получить аналитические решения для результирующей функции принадлежности. Это обусловлено вычислением декартового произведения пространств.

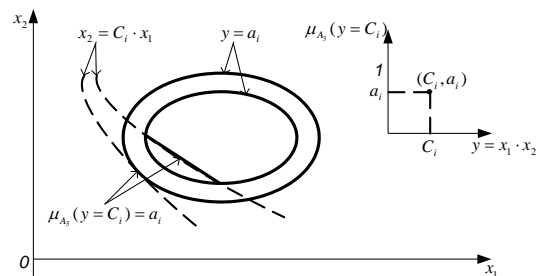


Рис.1.32. Функция принадлежности произведения двух нечетких чисел для колоколообразных функций принадлежности сомножителей.

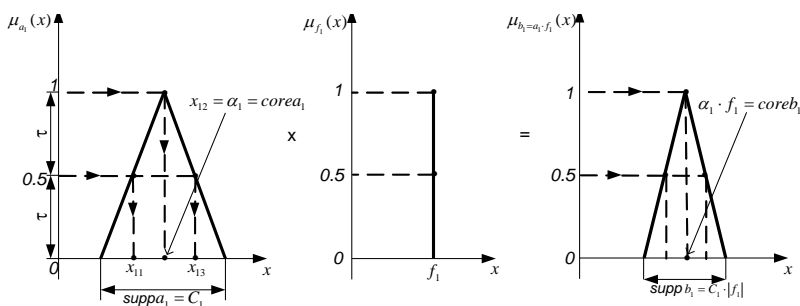


Рис.1.33. Умножение нечеткого числа  $a_1$  на четкое число

$$f_1: b_1 = a_1 \cdot f_1.$$

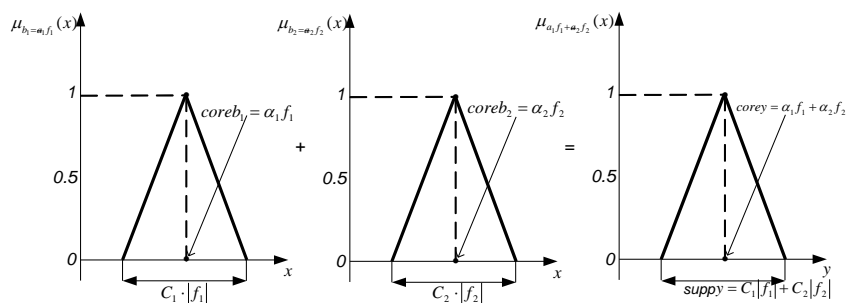


Рис.1.34. Сложение 2-х нечетких чисел:  $y = b_1 + b_2 = a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2$ .

#### **1.4. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И ИХ КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ.**

В теории нечетких множеств большинство арифметических операций определены для непрерывных областей. Операции для дискретных областей выделяются обычно в виде особого случая.

На практике нечеткие множества запоминаются в компьютере в виде данных о структуре и операциях над ними, и далее производится исполнение этих операций. Компьютерная реализация обуславливает необходимость рассмотрения основных форм представления нечетких множеств. Эти представления имеют три формы.

**Функциональное (аналитическое) представление.** Для представления нечеткого множества в этой форме используется представление в виде некоторой функциональной зависимости  $f$ :

$$\mu_A(x) = f(x).$$

Примером  $f$  служат зависимости треугольного (1.2), трапецеидального (1.3), колоколообразного (1.4) и других типов. При использовании такого представления появляются затруднения, обусловленные необходимостью производить операции с множеством другого типа представления, например, с дискретным нечетким множеством. При функциональном представлении возможно использование компьютера, оперирующего символами. Однако символьные вычисления возможны лишь для простых операций с простыми функциями принадлежности. Во многих случаях результат не может быть представлен в символьной форме в виде функциональной

зависимости, поэтому используются различные варианты приближения для результирующей функции принадлежности. Таким образом, при компьютерном решении практических задач необходима дискретизация непрерывной области.

**Парное представление.** Оно определяется в виде

$$\mu_A(x) = \mu_1/x_1 + \dots + \mu_n/x_n,$$

где  $x_i$  – дискретные значения аргумента,  $\mu_i$  – дискретные значения функции. Это представление описывает дискретные нечеткие множества. Примером такого описания в лингвистических переменных служит множество «друзья Петра», которое объединяет множество персон, определяемых своими именами  $x_i$  и рангами  $\mu_i$ , которые приписываются друзьям и эти ранги определяют степень дружбы.

**Уровневое представление.** Оно описывает нечеткое множество, как совокупность уровней или  $\alpha$  сечений:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} [\alpha\text{-cut}(\mu_A(x))],$$

где  $\alpha$  – дискретное.

Во многих прикладных задачах возникает проблема сравнения нечетких чисел. Эта операция вводится следующим образом. Пусть имеем два нечетких числа  $x_n$  и  $y_n$ , что, согласно определению, означает то, что эти нечеткие числа имеют треугольные функции принадлежности  $\mu(x_n)$ ,  $\mu(y_n)$ . Представим нечеткие числа в уровневой форме, тогда будем иметь:

$$x_i \Leftrightarrow (x_i(\mu), \overline{x_i}(\mu)) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

$$y_i \Leftrightarrow (y_i(\mu), \overline{y_i}(\mu)) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

где  $\Leftrightarrow$  - символ эквивалентности.

Для каждого нечеткого числа вводится критерий:

$$X = \int_0^1 \mu [x_f(\mu) + \overline{x_f}(\mu)] d\mu,$$

$$Y = \int_0^1 \mu [y_f(\mu) + \overline{y_f}(\mu)] d\mu.$$

Полагается, что  $x_n \leq y_n$ , если выполняется:  $X \leq Y$ .

Таким образом, введенный критерий позволяет сравнить нечеткие числа. В частности, очевидно, что введенное упорядочивание обобщает обычную операцию «четких чисел». Можно показать, что введенное упорядочивание нечетких чисел является транзитивным и рефлексивным, т.е.:

- транзитивность R:  $x_n, y_n, z_n$  из условий  $x_n R y_n, y_n R z_n, \Rightarrow x_n R z_n$ , где R – символ отношения упорядочивания ( $\leq, \geq, =$ );
- рефлексивность R: если  $x_n R x_n$  для  $\forall x_n \leq X_n$ , где  $X_n$  – совокупность нечетких чисел. Типичные примеры рефлексивности: подобие, тождественность, эквивалентность и т.д.

Пример. Определим отношение упорядочивания между нечетким числом  $\approx 2$  и нечетким числом  $\approx 5$ .

Имеем:

$$x_f = \mu_{\approx 2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -x+3, & 2 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

В уровневой форме  $x_n$  соответственно будет иметь представление:

$X_n = (\mu+1, 3-\mu)$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ . Далее пусть задано:

$$y_i = \mu_{\approx 5}(y) = \begin{cases} 0, & y < 3 \\ 0.5y - 1.5, & 3 \leq y \leq 5, \\ -0.5y + 3.5, & 5 \leq y \leq 7, \\ 0, & y > 7. \end{cases}$$

или в уровневой форме:  $y_n = (2\mu+3, -2\mu+7)$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Критерий X равен:

$$X = \int_0^1 \mu[(\mu+1) + (3-\mu)] d\mu = 2.$$

Для Y имеем:

$$Y = \int_0^1 \mu[(2\mu+3) + (-2\mu+7)] d\mu = 5.$$

Из расчетов следует, что  $X = 2 < 5 = Y$ , поэтому  $\approx 2 < \approx 5$ .

Для компьютерной реализации в основном используется парное представление, а функциональное – лишь для компьютера, имеющего символьную форму операций.

Рассмотрим компьютерную реализацию перечисленных выше форм представления нечетких множеств.

Для приближенного описания функционального представления дискретным имеется несколько вариантов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

Один из этих вариантов – это **векторное представление**, которое является дискретной аппроксимацией непрерывной области в виде парного представления с равноточной дискретной областью. Название такого вида представления связано с тем, что значения принадлежности в памяти компьютера запоминается как вектор. Например, при  $x \in [0, 10]$  и шаге  $\Delta=1$  дискретизации имеем:

$$\mu_A(x) = \max(1 - \frac{1}{2} \cdot |x-5|; 0) \approx \sum_{i=0}^{10} \mu_i / i \cdot \Delta =$$

$$= (0/0 + 0/1 + 0/2 + 0/3 + \frac{1}{2}/4 + 1/5 + \frac{1}{2}/6 + 0/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10 =$$

$$= (0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0).$$

В двумерном случае при  $x_1, x_2: 0, 1, 2, 3, \dots, 10$  имеем совокупность векторов или матрицу:

$$\mu_A(x_1, x_2) = \max \left\{ 1 - \frac{1}{2} |x_1 - 5| - \frac{1}{2} |x_2 - 5|; (0, 0) \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В трехмерном случае будем иметь соответственно совокупность матриц и т.д. Этот тип приближения может приводить к проблеме, когда необходимо представить четкое число в виде нечеткого множества. В этом случае нечеткое множество представлено только одной точкой (функция принадлежности – синглон), которая не подлежит какой-либо



дискретизации, поэтому это множество не может быть представлено в векторной форме. В этом случае используется приближение для  $\text{singl}(x-x_k)$  по двум соседним значениям  $\mu_r/x_r$ ,  $\mu_i/x_i$  какой-либо дискретной функции принадлежности, которая находится в компьютерной памяти. Это приближение может быть получено из геометрических построений (рис.1.37). Пусть  $x_k = \mu_A^{-1}(1)$  обозначает обратное отображение. Величина  $x_k$  является неизвестной и подлежит определению. Пусть выбрано значение  $x_r$ , тогда по заданному  $\mu_A(x)$  определяется соответствующее значение  $\mu_r$  и площадь  $S_3 = \mu_r \cdot x_r$ . Значение  $\mu_i$  выбирается из условия  $\mu_i = 1 - \mu_r$ , тогда соответственно найдутся  $x_i$  и площадь  $S_4 + S_2 = \mu_i \cdot x_i$ . Координата  $\mu_i = 1 - \mu_r$  находится из условия  $S_1 = S_2$ :

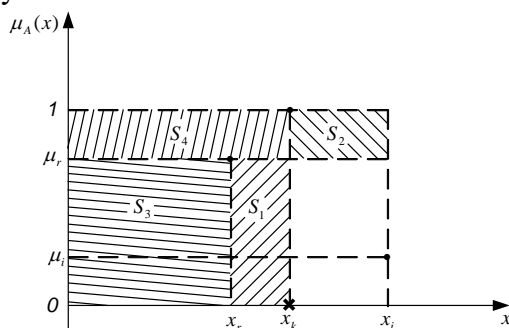


Рис.1.37. Взаимосвязь  $x_k$  функции  $\text{singl}(x-x_k)$  с соседними значениями  $\mu_r | x_r$ ,  $\mu_i | x_i$ .

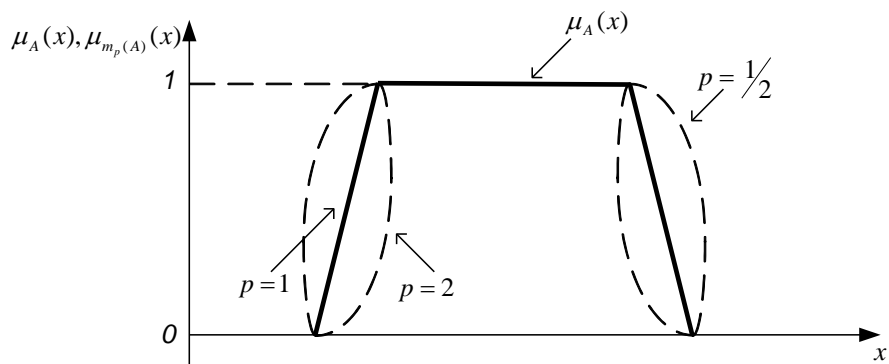


Рис.1.38. Нечеткое множество  $A$  (тело), модифицированные нечеткие множества «очень( $A$ )»  $= A^2$  при  $p=2$  и «более или менее( $A$ )»  $= \sqrt{A}$  при  $p=1/2$ , для которых используется арифметическая операция возведения в степень.

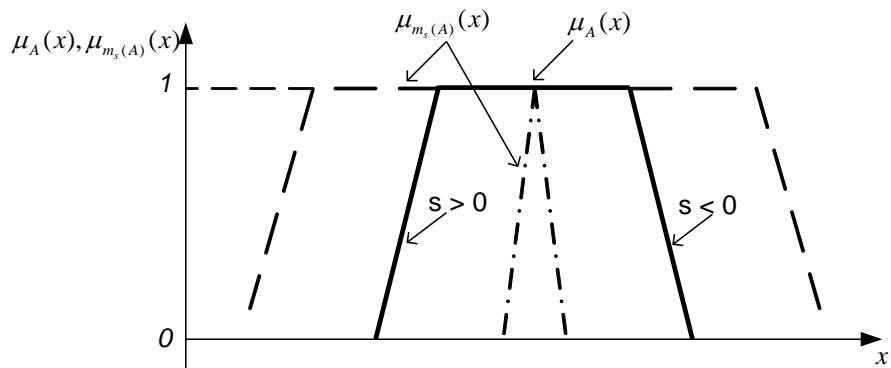


Рис.1.39. Нечеткое множество  $A$  (тело), модифицированные нечеткие множества «очень( $A$ )» (---) и «более или менее( $A$ )» (---), полученные с помощью операции сдвига.

$$\mu_r[\mu_A^{-1}(1) - x_i] = 1 - \mu_r[x_i - \mu_A^{-1}(1)],$$

$$\text{откуда получается: } x_k = \mu_A^{-1}(1) = \frac{\mu_r \cdot x_r + \mu_i \cdot x_i}{\mu_r + \mu_i}, \mu_r + \mu_i = 1.$$

Таким образом, получено приближение четкого множества в виде нечеткого множества.

Парное представление в компьютере реализуется точечным способом. При этом шаг дискретизации обязательно представляется эквидистантным способом. Промежуточные значения получаются методом интерполяции. Этот способ имеет преимущества перед векторным представлением, т.к. при точечной реализации отсутствуют ограничения, связанные с эквидистантной дискретизацией. Точечный способ часто используется в программном обеспечении компьютеров при решении коммерческих задач методами нечеткого управления. Простым примером является нечеткое множество с треугольной функцией принадлежности, которая содержит только три точки  $\mu_i/x_i$ , а остальные получаются путем интерполяции. Более сложная форма может быть аппроксимирована любым способом, который дает компромисс между необходимой памятью и точностью.

Уровневое представление нечеткого множества в компьютере также реализуется путем дискретизации. При уровневой дискретизации нечеткое множество запоминается в виде множества интервалов, каждый из которых имеет свой вес. Каждый из этих интервалов является классическим четким множеством и включение их в нечеткое множество производится в соответствии со своим весом. При уровневой дискретизации возникает проблема, связанная с вычислением произведения пространств. Число операций над классическими

множествами зависит экспоненциально от числа нечетких множеств, включенных в произведение пространств.

В программном обеспечении компьютеров обычно имеются различные способы представления нечетких множеств и, в зависимости от операций над ними используется та или иная форма представления. Например, при существовании решений для определенных типов операций в аналитической форме целесообразно использовать функциональное представление нечеткого множества.

### **1.5 ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ МОДИФИКАЦИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ.**

Каждое нечеткое множество может быть ассоциировано с некоторой лингвистической переменной. Например, нечеткому множеству с функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  может быть поставлена в соответствие лингвистическая переменная «большая величина». Для нее может быть определена лингвистическая модификация «очень», которая характеризует взаимосвязь лингвистической переменной «большая величина» с переменной «очень большая величина». Этой модификации соответствует модифицированное нечеткое множество с функцией принадлежности  $m(A)$ . Другими примерами могут служить лингвистические модификации: «незначительно», «более или менее» и т.д. В теории нечетких множеств взаимосвязь нечеткого множества  $A$  с функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  с его модификацией  $m(A)$  характеризуется связанностью.

При определении связанности нечеткого множества с его модификацией используются следующие арифметические операции:

- степенная связанность;

- связанность в форме сдвига;
- связанность в форме изменения масштаба.

Степенная связанность определяется в следующем виде:

$$m_p(A) = \int_x \mu_A^p(x) / x,$$

где  $p$ -параметр модификации;  $\mu_A(x)$  – функция принадлежности нечеткого множества  $A$ ,  $m_p(A)$ - функция принадлежности модифицированного нечеткого множества. Использование арифметической операции возведение в степень позволяет получить соответствующие модификации, например:

$$"\text{очень}(A)" = A^2 = \int_x \mu_A^2(x) / x,$$

$$"\text{более или менее}(A)" = \sqrt{A} = \int_x \mu_A^{\frac{1}{2}}(x) dx.$$

Здесь степенная арифметическая операция производится в соответствии с принципом обобщения. На рис.1.38

приводятся примеры для лингвистических модификаций «очень» и «более или менее». Преимуществом подхода степенной связанности является то, что для каждой связанности определяется стандартная операция путем выбора соответствующих значений параметра « $p$ ». Отметим следующие свойства  $m_p(A)$  для различных значений  $p$ :

$0 < p < 1$  – нечеткое множество  $A$  расширяется, т.е.  $m_p(A) \supset A$ ;

$p = 1$  – нечеткое множество  $A$  не изменяется, т.е.  $m_p(A) = A$ ;

$p > 1$  – нечеткое множество  $A$  уменьшается, т.е.  $m_p(A) \subset A$ .

Другим характерным свойством степенной связанности является тот факт, что «основание» и «центр» модифицированного нечеткого множества  $m_p(A)$  не изменяются, т.к.  $1^p = 1$  и  $0^p = 0$ .

Связанность в форме сдвига определяется в виде:

$$m_s(A) = \int_x \mu_A(x - s) / x,$$

где  $m_s(A)$ - функция принадлежности модифицированного нечеткого множества;  $s$  – параметр сдвига. В пределах одной и той же связанности параметр  $s$  может иметь различные значения. Например, для нечеткого множества с трапецеидальной функцией принадлежности при получении модификации «очень» параметр  $s > 0$  на левой стороне от центра и  $s < 0$  на правой стороне (рис.1.39). При таком способе модификации исходное нечеткое множество  $A$  сжимается, для примера «очень  $A$ »:  $m_s(A) \subset A$ . Расширение  $A$ , например, «более или менее  $A$ », получается как операция инверсии:  $m_s(A) \supset A$ .

Связанность в форме изменения масштаба определяется в виде:

$$m_c(A) = \int_x \mu_A(c(x - r_A) + r_A) / x = \int_x \mu_A(cx + (1 - c)r_A) / x,$$

где  $c$ - масштабный множитель лингвистической модификации  $m_c(A)$ ;  $r_A$ - точка сравнения для нечеткого множества  $A$ . Точка  $r_A$  является характеристической точкой  $A$ . В случае выпуклой функции принадлежности такой точкой может быть выбрана точка центра ядра. В случае монотонной функции принадлежности может выбираться точка  $\sup A$ , если такая точка существует. Если  $\sup A$  не существует, тогда в качестве точки сравнения может выбираться произвольная точка. На рис.1.40 показаны нечеткое множество  $A$  и его модификации «очень  $A$ », «более или менее  $A$ », которые получены путем изменения масштаба относительно точки  $r_A$ . Модификации сохраняют форму оригинала. Можно утверждать, что масштабирование оригинала является специальным случаем модификации путем сдвига. Отметим, что в случае одиночной функции принадлежности, методы модификации нечетких множеств не могут быть применены несмотря на то, что четкие множества

приближаются нечеткими. В настоящее время существует много методов построения  $\mu_A(x)$ ,  $\mu_{m(A)}(x)$  [8]:

- парных сравнений;
- обработки статистических данных;
- параметрической идентификации с использованием дробно-линейного конформного отображения теории функции комплексного переменного;
- экспертных оценок и другие.

## ГЛАВА 2. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА.

### 2.1 НЕЧЕТКАЯ ОПЕРАЦИЯ «И».

В классической четкой (двухзначной) логике существуют логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ», которые определяются единственным образом и они составляют полные системы, т.е. любое уравнение четкой логики путем логических преобразований может быть выражено в виде логических комбинаций:

«не-и-или»;  
«не-и»;  
«не-или».

Одна из задач теории нечетких множеств состоит в обобщении четких логических операций в их нечеткие аналоги. Нечетким расширением операции «и» в общей форме является Т или триангулярная норма, которая в теории нечетких множеств обозначается символом (Т). Другим названием Т-нормы является S-конорма [9].

Эта операция определяется как отображение:

$$\mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) \rightarrow \mu_{A_3}(x);$$
$$\mu_{A_1}(x) \in [0;1], \mu_{A_2}(x) \in [0;1], \mu_{A_3}(x) \in [0;1],$$

для которого выполняются аксиомы:



$$1. \mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x)=1) = (\mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1}(x)), \quad \forall \mu_{A_1}(x) \in [0;1] \quad (2.1)$$

$$2. \mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x)=0) = (\mu_{A_3}(x)=0), \quad \forall \mu_{A_1}(x) \in [0;1] \quad (2.2)$$

$$3. \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_2}(x)(T)\mu_{A_1}(x) ; \quad (2.3)$$

$$4. \mu_{A_1}(x)(T)(\mu_{A_2}(x)(T)\mu_{A_3}(x)) = (\mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x))(T)\mu_{A_3}(x); \quad (2.4)$$

$$5. \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x) \rightarrow \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_3}(x) \leq \mu_{A_2}(x)(T)\mu_{A_3}(x). \quad (2.5)$$

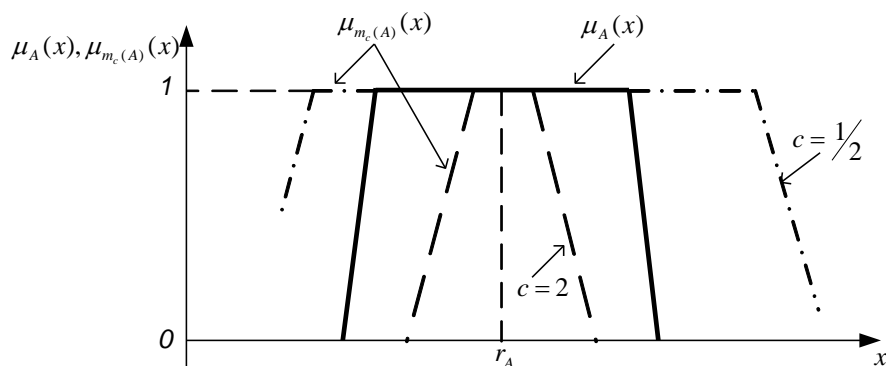


Рис.1.40. Нечеткое множество  $A$  (тело), модифицированные нечеткие множества «очень( $A$ )»(---,  $c = 2$ ) и «более или менее( $A$ )» (-·-·-,  $c = 1/2$ ), полученные путем изменения масштаба относительно точки  $r_A$ .

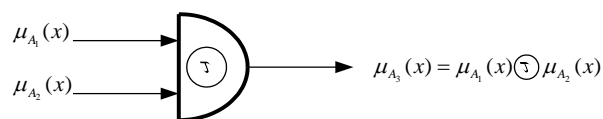


Рис.2.1. Схематическое представление Т-нормы.

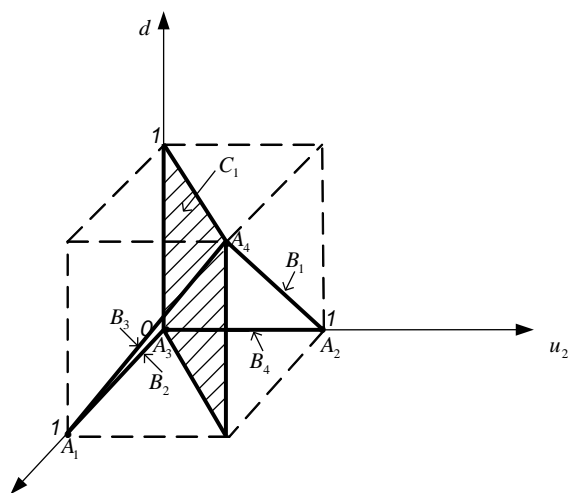


Рис.2.2. Граничные условия Т-нормы.

аксиомы (2.1),(2.2) называются аксиомами граничных условий Т-нормы; (2.3),(2.4) – объединения или пересечения, (2.5)-упорядоченности.

На схемотехническом уровне операция (Т) реализуется в виде схемы с двумя входами и одним выходом (рис.2.1). Аксиомы (2.3),(2.4) означают, что входы равнозначны и нет необходимости их различать. С позиций традиционной математики операция (Т) реализует функцию двух переменных:

$$y=T(u_1,u_2),$$

где  $u_1 = \mu_{A_1}(x), u_2 = \mu_{A_2}(x), y = \mu_{A_3}(x).$

Эта функция «Т» в трехмерном пространстве  $(u_1,u_2,y)$  изображает некоторую поверхность. Геометрическая фигура,

построенная в соответствии с аксиомами граничных условий, дает возможность определить максимальные и минимальные значения Т-нормы, как функции двух переменных. При ее построении величинам

$$\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x).$$

придают различные значения, принадлежащие отрезку  $[0;1]$ , и в соответствии с (2.1), (2.2) определяют значение

$$\mu_{A_3}(x),$$

что в системе координат  $(u_1, u_2, y)$  дает соответствующую совокупность точек (рис.2.2)

$$u_1 = 1, u_2 = 0 \rightarrow y \Big/_{u_1=1, u_2=0} = 1(T)0 = 0.$$

Это изображает точку  $A_1$  с координатами  $(u_1=1; u_2=0; y=0)$ .

После аналогичных вычислений получаются координаты точек  $A_2$ - $A_4$ :

$$y \Big/_{u_1=0, u_2=1} = 0(T)1 = 0 \rightarrow (0;1;0) = A_2;$$

$$y \Big/_{u_1=0, u_2=0} = 0(T)0 = 0 \rightarrow (0;0;0) = A_3;$$

$$y \Big/_{u_1=1, u_2=1} = 1(T)1 = 1 \rightarrow (1;1;1) = A_4.$$

Совокупность точек  $A_2$ - $A_4$  определяют вершины единичного куба. При изменении  $u_1$  от 0 до 1 и фиксированном  $u_2=1$  получим уравнение прямой  $B_1$ :

$$y \Big/_{u_1 \in [0;1], u_2=1} = u_1(T)1 = u_1.$$

Далее аналогично для прямых В<sub>2</sub>-В<sub>4</sub>:

$$y \Big/_{\substack{u_1 \in [0;1] \\ u_2 = 0}} = u_1(T)0 = 0. \quad - \text{ уравнение прямой В}_2$$

$$y \Big/_{\substack{u_1 = 1 \\ u_2 \in [0;1]}} = 1(T)u_2 = u_2. \quad - \text{ уравнение прямой В}_3$$

$$y \Big/_{\substack{u_1 = 0 \\ u_2 \in [0;1]}} = 0(T)u_2 = 0 \quad - \text{ уравнение прямой В}_4.$$

Из аксиомы 3 (2.3) имеем:

$$\mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_2}(x)(T)\mu_{A_1}(x) \rightarrow u_1 = u_2 \quad - \text{ уравнение}$$

плоскости С<sub>1</sub>.

Таким образом, максимальные и минимальные значения Т-нормы изображаются геометрической фигурой симметричной относительно плоскости  $u_1 - u_2 = 0$ .

В теории нечетких множеств в зависимости от способов задания операции (Т), которые удовлетворяют аксиомам (2.1)-(2.5), существует бесконечное число нечетких операций «и». В теории нечеткого управления находят применение следующие их типы.

**Логическое произведение** (Заде, 1973 г.):

$$\begin{aligned} \mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1 \wedge A_2}(x) = \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_2}(x) = \\ &= \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)), \quad \forall x \in R_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно показать, что аксиомы (2.1)-(2.5) для операции « $\wedge$ » выполняются.

Геометрическая фигура граничных условий для логического произведения получается по методике аналогичной выше и в результате будем иметь совокупность точек  $A_1$ - $A_4$  и прямых  $B_1$ - $B_4$ .

По аксиоме (2.3) получим уравнение прямой  $B_5$ , проходящей через т.  $A_3=(0,0,0)$  и т.  $A_4=(1,1,1)$  (рис.2.3):

$$y = u_1 = u_2 \Leftrightarrow \frac{u_1 - 0}{1 - 0} = \frac{u_2 - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{1 - 0}.$$

Логическое произведение (2.6) имеет геометрическую интерпретацию в виде пересечения нечетких множеств  $A_1$  и  $A_2$  (рис.2.4).

**Алгебраическое произведение** (Бандлер и Кохоут, 1980):

$$\mu_{A_3}(x) = \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x), \quad \forall x \in R_1, \quad (2.7)$$

где символ « $\cdot$ » – произведение, принятое в классической алгебре. Выполнение аксиом (2.1)-(2.5) очевидно. График граничных условий Т-нормы для т.т.  $A_1$ - $A_4$ , прямых  $B_1$ - $B_4$  получается аналогично предыдущему. Найдём уравнение кривой  $B_5$ .

Из (2.3):

$$y = u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$$

следует, что  $u_1 = u_2$ , поэтому  
 $y = u_1^2 = u_2^2$ .

При  $y \begin{smallmatrix} / \\ 0 \end{smallmatrix} = u_1^2 = 0$ ,  $y \begin{smallmatrix} / \\ 1 \end{smallmatrix} = u_2^2 = 1$ . В результате сложении этих уравнений получим:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \text{ откуда } u_2 = \pm \sqrt{1 - u_1^2}.$$

Так как  $u_2 \geq 0$ , поэтому  $u_2 = +\sqrt{1 - u_1^2}$ , определяет уравнение кривой  $B_5$ , проходящей через т.т.  $A_1, A_2$  (рис. 2.5).

Геометрическая интерпретация алгебраического произведения (2.7) изображена на рис.2.6.

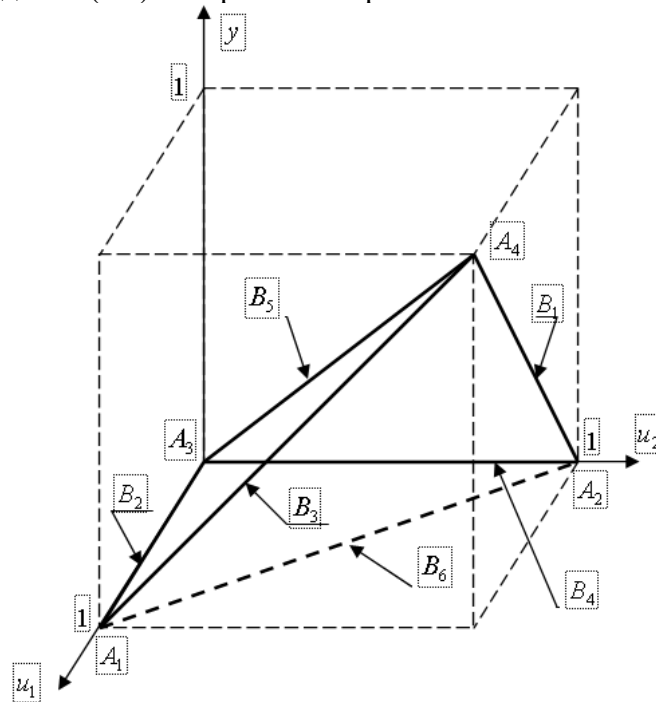


Рис.2.3. Граничные условия логического произведения.

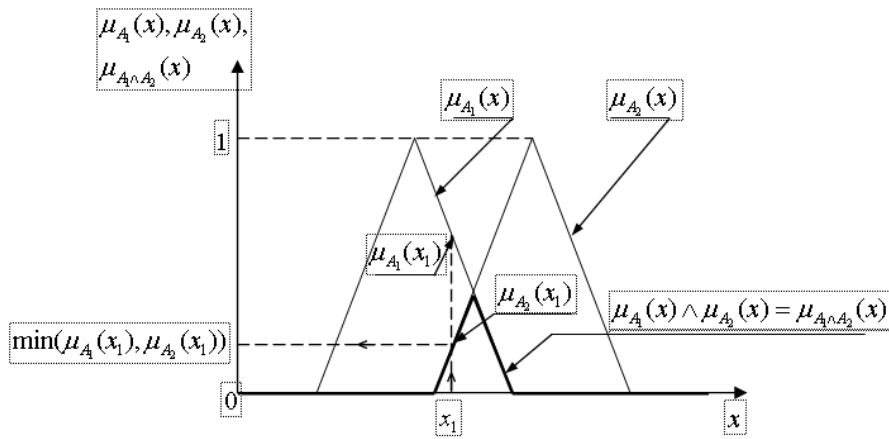


Рис.2.4. Логическое произведение нечетких множеств.

**Граничное произведение** (Лукашевич, Гилес, 1976):

$$\begin{aligned} \mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1}(x) \otimes \mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \otimes \mu_{A_2}(x) = \\ &= \max(\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - 1; 0) \equiv (\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - 1) \vee 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где символ  $\otimes$  - граничное произведение). График граничных условий аналогичен предыдущему (совокупность т.т.  $A_1$ - $A_4$  и прямых  $B_1$ - $B_4$ ). Кривая  $B_6$  из (2.3) имеет вид :

$$\begin{aligned} y &= u_1 \otimes u_2 = u_2 \otimes u_1 \rightarrow (u_1 + u_2 - 1) \vee 0 = 0 \vee (u_1 + u_2 - 1) \rightarrow u_1 + u_2 - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow u_2 = 1 - u_1. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация (2.8) приведена на рис. 2.6.

**Сильное или драстическое (drastic) произведение**  
(Вебер, 1983):

$$\begin{aligned}\mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x) = \\ &= \mu_{A_1}(x)\Delta\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \mu_{A_1}(x), & \text{если } \mu_{A_2}(x) = 1 \\ \mu_{A_2}(x), & \text{если } \mu_{A_1}(x) = 1, \forall x \in R_1 \\ 0, & \text{для других,} \end{cases}\end{aligned}\tag{2.9}$$

где  $\Delta$  - символ сильного произведения. Геометрическая интерпретация (2.9) изображена на рис 2.6.

Из графических построений следует, что справедливо соотношение:

$$0 \leq u_1 \Delta u_2 \leq u_1 \otimes u_2 \leq u_1 \cdot u_2 \leq u_1 \wedge u_2.$$

Существует бесконечное число других типов нечеткой операции «и». Некоторые из них, зависящие от вещественных параметров, приведены в [6].

В теории нечетких множеств показывается, что все операции «и» расположены между сильным и логическим произведениями:

$$0 \leq u_1 \Delta u_2 \leq \dots \leq u_1 \wedge u_2.$$



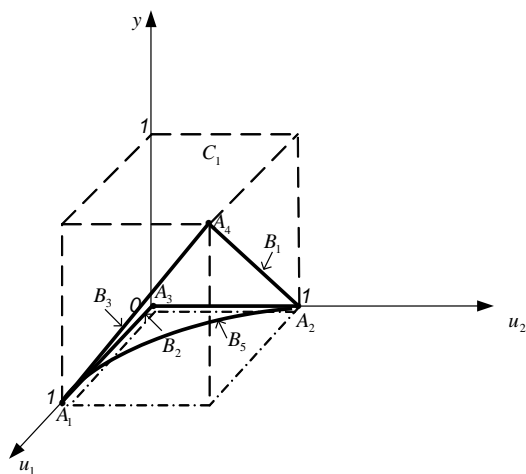


Рис.2.5. Граничные условия алгебраического произведения.

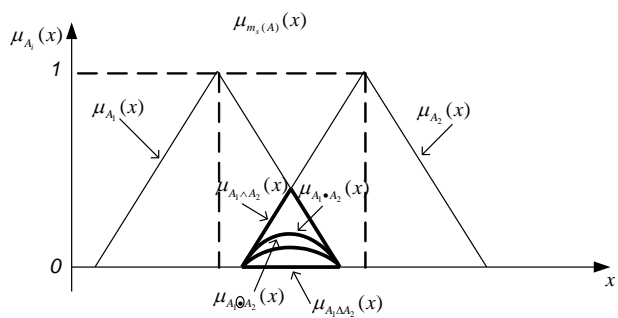


Рис.2.6. Логическое, алгебраическое, граничное и сильное произведение нечетких множеств.

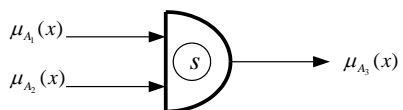


Рис.2.7. Схематическое представление S-нормы.

## 2.2. НЕЧЕТКАЯ ОПЕРАЦИЯ «ИЛИ».

Нечетким расширением операции «или» в общей форме является S-норма, которая обозначается символом  $(S)$ . Иногда для нее используется название Т-конорма.

Эта операция определяется как отображение:

$$\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x) \rightarrow \mu_{A_3}(x),$$

для которого выполняются аксиомы:

$$1. \mu_{A_1}(x)(S)(\mu_{A_2}(x)=1) = (\mu_{A_3}(x)=1), \quad \forall \mu_{A_1}(x) \in [0;1] \quad (2.10)$$

$$2. \mu_{A_1}(x)(S)(\mu_{A_2}(x)=0) = (\mu_{A_3}(x)=\mu_{A_1}(x)), \quad \forall \mu_{A_1}(x) \in [0;1] \quad (2.11)$$

$$3. \mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_2}(x)(S)\mu_{A_1}(x); \quad (2.12)$$

$$4. \mu_{A_1}(x)(S)(\mu_{A_2}(x)(S)\mu_{A_3}(x)) = (\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x))(S)\mu_{A_3}(x); \quad (2.13)$$

$$5. \mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x) \rightarrow \mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_3}(x) \leq \mu_{A_2}(x)(S)\mu_{A_3}(x). \quad (2.14)$$

Сравнение аксиом для Т-нормы с аксиомами для S-нормы показывает, что различие между ними состоит только в аксиомах граничных условий.

Операция (S) реализуется в виде схемы с двумя входами и одним выходом (рис.2.7) и представляет из себя функцию двух переменных:

$$y = S(u_1, u_2),$$

где, как и ранее  $u_1 = \mu_{A_1}(x)$ ,  $u_2 = \mu_{A_2}(x)$ ,  $y = \mu_{A_3}(x)$ .

Геометрическая фигура, которая изображена рис. 2.8, изображает граничные условия (2.10), (2.11) и аксиому (2.12).

Существует бесконечное число нечетких операций, которые удовлетворяют аксиомам (2.10)-(2.14).

Некоторые из них, которые используются в теории нечеткого управления, приводятся ниже.

**Логическая сумма** (Заде, 1973 г.):

$$\begin{aligned} \mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1 \vee A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \vee \mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \vee \mu_{A_2}(x) = \\ &= \max(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)), \quad \forall x \in R_1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

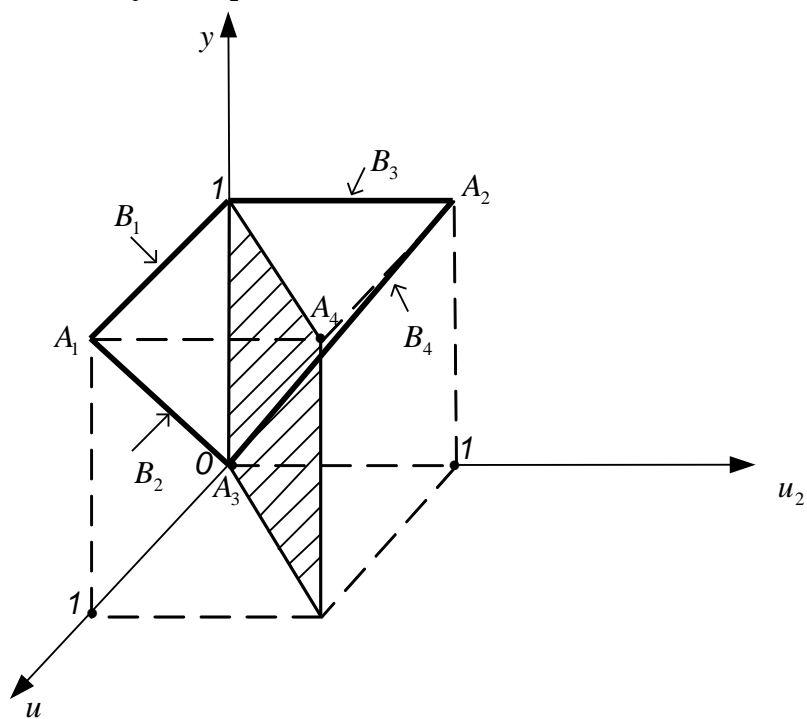


Рис.2.8. Граничные условия S-нормы.

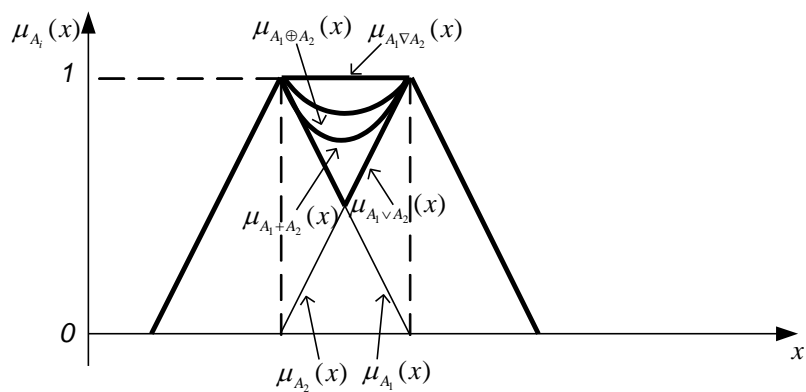


Рис.2.9. Логическая, алгебраическая, граничная и сильная сумма нечетких множеств.

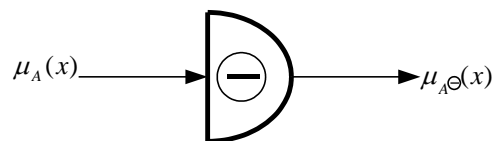


Рис.2.10. Схемотехническое представление нечеткого «НЕ».

**Алгебраическая сумма** (Бандлер и Кохоут, 1980):

$$\begin{aligned}\mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1 + A_2}(x) = \\ &= \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - \mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x), \quad \forall x \in R_1,\end{aligned}\quad (2.16)$$

**Граничная сумма** (Лукашевич, Гилес, 1976):

$$\begin{aligned}\mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1 \oplus A_2}(x) = \mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \oplus \mu_{A_2}(x) = \\ &= \min(\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x), 1) \equiv \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) \wedge 1.\end{aligned}\quad (2.17)$$

**Сильная или драстическая (drastic) сумма** (Вебер, 1983):

$$\begin{aligned}\mu_{A_3}(x) &= \mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x) = \mu_{A_1}(x) \nabla \mu_{A_2}(x) = \\ &= \begin{cases} \mu_{A_1}(x), & \text{если } \mu_{A_2}(x) = 0 \\ \mu_{A_2}(x), & \text{если } \mu_{A_1}(x) = 0 \\ 1, & \text{для других.} \end{cases} \quad \forall x \in R_1\end{aligned}\quad (2.18)$$

Геометрическая интерпретация перечисленных выше S – норм (2.15-2.18) приведена на рис 2.9., из которого следует:

$$\begin{aligned}u_1 \vee u_2 &\leq u_1 + u_2 \leq u_1 \oplus u_2 \leq u_1 \nabla u_2 \leq 1, \\ \text{а́л } u_1 &= \mu_{A_1}(x), \quad u_2 = \mu_{A_2}(x).\end{aligned}$$

Так же как и выше существует бесконечное число других типов нечеткой операции «или». Некоторые из них, зависящие от вещественных параметров, приведены в [7].

В теории нечетких множеств показывается, что всевозможные операции «или» расположены между логической и сильной суммой:

$$u_1 \vee u_2 \leq \dots \mu_1 \nabla u_2 \leq 1. \quad .$$

### 2.3 НЕЧЕТКАЯ ОПЕРАЦИЯ «НЕ».

Операция нечеткого «не» или дополнение определяется как отображение:

$$(-): \mu_A(x) \rightarrow \mu_{A(-)}(x),$$

для которого выполняются аксиомы:

$$1. (\mu_A(x) = 0)^{(-)} = (\mu_{A(-)}(x) = 1); \quad (2.19)$$

$$2. ((\mu_A(x))^{(-)})^{(-)} = \mu_A(x), \quad \forall \mu_A(x) \in [0;1]; \quad (2.20)$$

$$3. \mu_{A_1}(x) < \mu_{A_2}(x) \rightarrow (\mu_{A_1}(x))^{(-)} > (\mu_{A_2}(x))^{(-)}, \quad \forall \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x) \in [0;1] \quad (2.21)$$

Таким образом, множество отображений, которые удовлетворяют аксиомам (2.19)-(2.21), являются нечетким отрицанием.

Операция (-) реализуется в виде схемы с одним входом и одним выходом (рис.2.10) и представляет из себя функцию одного переменного (рис.2.11):

$$y = f(u),$$

$$\text{где } u = \mu_A(x), y = \mu_{A(-)}(x).$$

Существует бесконечное число операций нечеткого «не». Некоторые из них, используемые в теории нечеткого управления, приводятся ниже.

**Нечеткое «не»** по Заде (1973), определяется как вычитание из единицы:

$$\mu_{A^{(-)}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (2.22)$$

Проверим выполнение аксиом (2.19-2.21):

$$(u=0)^{(-)} = 1 - (u=0) = 1 - 0 = 1 \rightarrow 0^{(-)} = 1;$$

$$(u^{(-)})^{(-)} = 1 - u^{(-)} = 1 - (1 - u) = u \rightarrow (u^{(-)})^{(-)} = u.$$

Из графика рис.2.11:

$$u_1 < u_2 \rightarrow u_1^{(-)} > u_2^{(-)}.$$

Все аксиомы выполнены, поэтому (2.22) является нечетким «не».

Функции принадлежности

$$\mu_A(x) \text{ и } \mu_{A^{(-)}}(x)$$

изображены на рис.2.12.

**Нечеткое «не» по Сугено (1977)** или  $\lambda$ -дополнение определяется в следующем виде:

$$\mu_{A^{(-)}}(x) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda \cdot \mu_A(x)}, \quad (2.23)$$

где  $\lambda > -1$  - вещественный параметр.

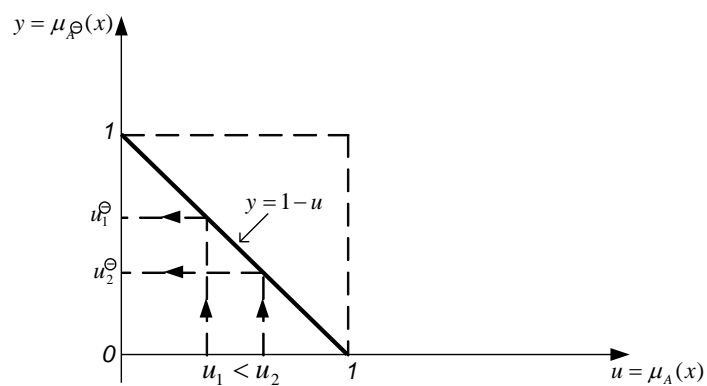


Рис.2.11. Операция нечеткого «НЕ» по Заде.

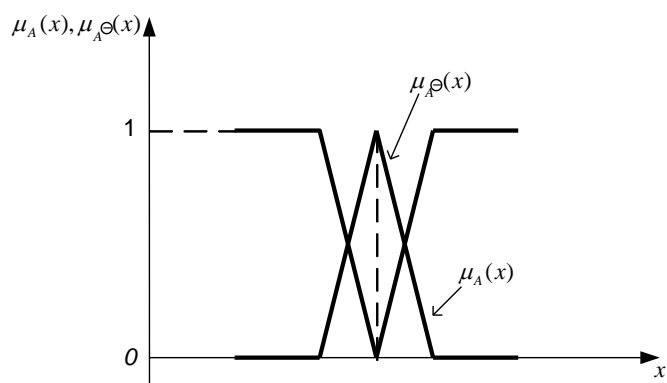


Рис.2.12. Функции принадлежности  $\mu_A(x)$  и нечеткого «НЕ»  $\mu_{A^c}(x)$  по Заде.



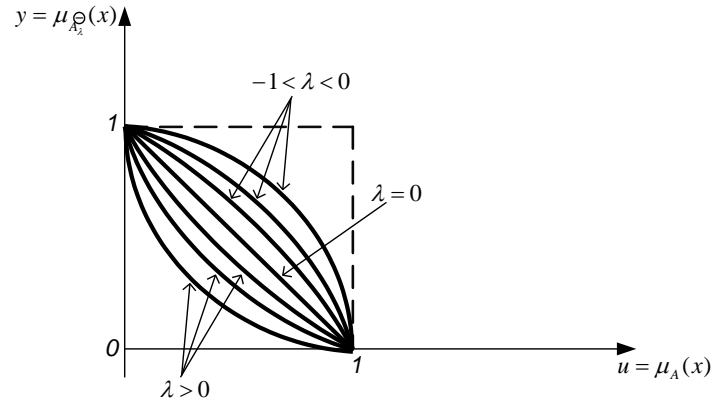


Рис.2.13. Операция нечеткого «НЕ» по Сугено.

Выполнение аксиом (2.19) – (2.21) очевидно. При  $\lambda=0$  (2.23) совпадает с (2.22). Зависимости  $y=f(u, \lambda)$  при различных  $\lambda$  изображены на рис.2.13. Функции принадлежности  $\mu_A(x), \mu_{A^c_\lambda}(x)$ , представлены на рис.2.14

**Нечеткое «не» по Ягеру (1980)**, определяется как:

$$\mu_{A^{(-)}}(x) = \sqrt[p]{1 - \mu_A(x)}, \quad (2.24)$$

где  $p>0$  – параметр. Справедливость аксиом (2.19)-(2.21) очевидна.

При  $p=1$  (2.24) совпадает с (2.22).

Для T- и S-норм возможны различные варианты отрицаний из-за бесконечного числа нечетких «не». Обычно выбирают такие отрицания, которые удовлетворяют следующим

условиям:

$$\left(\mu_{A_1}(x)(T)\mu_{A_2}(x)\right)^{(-)} = \left(\mu_{A_1}(x)\right)^{(-)}(S)\left(\mu_{A_2}(x)\right)^{(-)}; \quad (2.25)$$

$$\left(\mu_{A_1}(x)(S)\mu_{A_2}(x)\right)^{(-)} = \left(\mu_{A_1}(x)\right)^{(-)}(T)\left(\mu_{A_2}(x)\right)^{(-)}. \quad (2.26)$$

По аналогии с четкой логикой (2.25), (2.26) называют нечеткими законами де Моргана.

В теории нечетких множеств доказывается, что из (2.25) следует (2.26) и, наоборот, из (2.26) следует (2.25). Поэтому достаточно указывать либо (2.25), либо (2.26). В этой связи операции (2.25) и (2.26) называют взаимно дуальными. Можно

*в.д.*

показать взаимную дуальность ( $\leftrightarrow$ ) следующих нечетких операций:

$$\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_2}(x) \overset{в.д.}{\leftrightarrow} \mu_{A_1}(x) \vee \mu_{A_2}(x);$$

$$\mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x) \overset{в.д.}{\leftrightarrow} \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x);$$

$$\mu_{A_1}(x) \otimes \mu_{A_2}(x) \overset{в.д.}{\leftrightarrow} \mu_{A_1}(x) \oplus \mu_{A_2}(x);$$

$$\mu_{A_1}(x) \Delta \mu_{A_2}(x) \overset{в.д.}{\leftrightarrow} \mu_{A_1}(x) \nabla \mu_{A_2}(x).$$

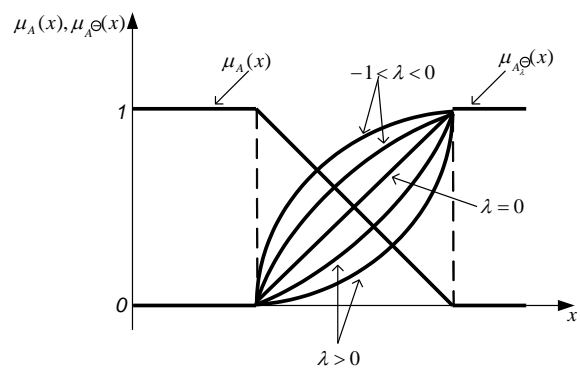


Рис.2.14. Функции принадлежности  $\mu_A(x)$  и нечеткого «НЕ»  $\mu_{A^c}(x)$ .

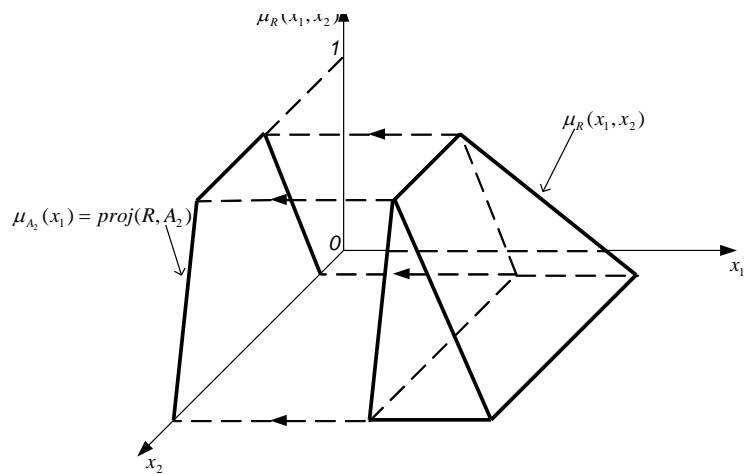


Рис.3.3. Проектирование нечеткого отношения  $R$ .

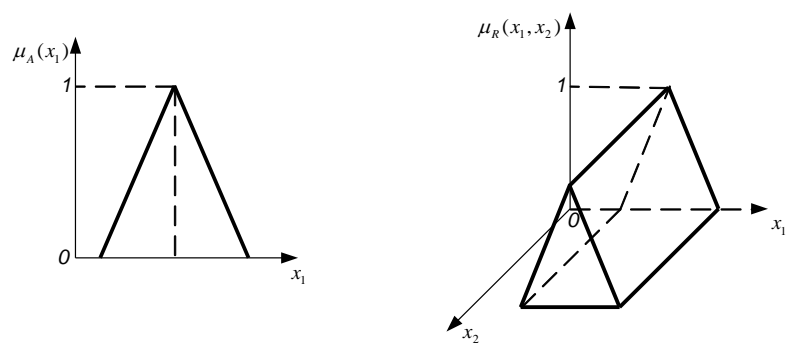


Рис.3.4. Цилиндрическое расширение  $R$  нечеткого множества  $A$ :  $R = \text{cext}(A; A_1 \times A_2)$ .

## ГЛАВА 3. НЕЧЕТКИЕ ВЫВОДЫ.

### 3.1. НЕЧЕТКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И НЕЧЕТКАЯ БАЗА ПРАВИЛ.

Важным понятием в нечеткой логике является понятие нечеткого предложения. (fuzzy proposition), которое определяется как высказывание типа «р:  $x$  есть  $A$ ». Здесь символ « $x$ » обозначает некоторую физическую величину, например, температуру, давление, скорость и т.д., символ « $A$ » лингвистическую переменную, которая ассоциируется с нечетким множеством, а символ «р», является аббревиатурой proposition- предложение. Примером такого предложения может служить высказывание “уровень воды есть высокий” Физической переменной  $x$  здесь является «уровень воды», который измеряется соответствующим датчиком, нечеткое множество  $A$  характеризуется лингвистикой «высокий» и задается с помощью соответствующей функции принадлежности  $\mu_A(x)$ . Лингвистике «есть» соответствует операция упорядоченности в виде равенства, которая обозначается символом « $=$ ». В результате нечеткое предложение «р: уровень воды есть высокий» может быть записано в формализованном виде «р: $x=A$ ».

Нечеткие предложения комбинируются между собой связками «и», «или», которые реализуются посредством  $T$  и  $S$  норм соответственно. Как было показано ранее, существует бесконечное их число и для выбора не существует общих правил. Выбор логических связок зависит от смысла и контекста нечетких предложений и взаимосвязи между ними. Операции  $T$  и  $S$  норм по Заде (2.6), (2.15) в теории нечеткого управления имеют предпочтение, т.к. они не имеют избыточности.

Это соответствует тому, что комбинация двух равных нечетких предложений представляют одинаковую информацию:

$$\mu_{A \cap A} = \min(\mu_A(x), \mu_A(x)) = \mu_A(x)$$

$$\mu_{A \cup A} = \max(\mu_A(x), \mu_A(x)) = \mu_A(x).$$

Это свойство отсутствия избыточности не справедливо для других Т и S норм, Однако, когда нечеткие предложения не являются эквивалентными, но коррелированы или взаимосвязаны, тогда возможно использование Т и S норм по Лукашевичу (2.8),(2.17). Наиболее часто используемы логические связки даны в табл. 3.1.

**Табл.3.1.** Часто используемы логические связки «и», «или» в нечеткой логике.

"И"	"ИЛИ"	Примечание
$\min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$	$\max(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$	<i>Заде</i>
$\max(\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - 1; 0)$	$\min(\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - 1; 0)$	<i>Лукашевич</i>
$\mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x)$	$\mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - \mu_{A_1}(x) \cdot \mu_{A_2}(x)$	<i>Бандлер, Кохоут</i>

Предложение р может, кроме того, быть представлено, как нечеткое отношение Р с функцией принадлежности:

$$\mu_P(x_1, x_2) = T(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$$

Нечеткие предложения, соединенные нечетким «и», иногда называют **условиями** или **предпосылками** и для их обозначения используют индикатор «если»:

1. если  $p_{11}:x_1=A_{11}$  и  $p_{12}:x_2=A_{12}$  и ....

Или

2. если  $p_{21}:x_1=A_{21}$  и  $p_{22}:x_2=A_{22}$  и ....

Или

Совокупность условий определяет совокупность **выводов** или **заключений**. Для их обозначения используют индикатор «тогда».

Совокупность условий и выводов определяет продукционное **нечеткое правило** (fuzzy rule):

$R_1$ : если  $x_1=A_{11}$  и  $x_2=A_{12}$  и ..., тогда  $y_{11}=B_{11}$  и  $y_{21}=B_{12}$  и ...

Или

Здесь символ  $R_1$  является аббревиатурой “rule –правило”.

Например, одно из правил при управлении температурой воды в лингвистических терминах имеет вид:

« $R_1$ : если температура воды есть холодная и температура воздуха есть холодная, тогда поверни вентиль горячей воды влево на большой угол и вентиль холодной воды вправо на большой угол».

Здесь имеем нечеткие условия:

$x_1$ - температура воды,  $A_1$ - холодная;

$x_2$ - температура воздуха,  $A_2$ - холодная;

и нечеткие выводы:

$y_1$ - угол поворота вентиля влево,  $B_1$ - большой;

$y_2$ - угол поворота вентиля вправо,  $B_2$ - большой.

Лингвистическому нечеткому правилу соответствует формализованное представление:

$R_1$ : если  $x_1=A_1$  и  $x_2=A_2$  и ..., тогда  $y_1=B_1$  и  $y_2=B_2$ , (3.1)

где  $A_1, \dots, B_2$  –нечеткие множества, которые задаются соответствующими функциями принадлежности.

Совокупность нечетких продукционных правил образуют нечеткую базу правил  $\{R_i\}_{i=1}^k$ :

$R_i$ : если ..., тогда...  $i = \overline{1, k}$

Для нее справедливы следующие свойства:

- непрерывность;
- непротиворечивость;
- полнота.

Для того, чтобы определить непрерывность  $\{R_i\}_{i=1}^k$  используются следующие понятия:

- упорядоченная совокупность нечетких множеств;
- прилегающие нечеткие множества.

Совокупность нечетких множеств  $\{A_i\}$  называется **упорядоченной**, если для них задано отношение порядка, например,

$$“<”: A_1 < \dots < A_{i-1} < A_i < A_{i+1} < \dots$$

Если  $\{A_i\}$  упорядочена, тогда множества  $A_{i-1}$  и  $A_i$ ,  $A_i$  и  $A_{i+1}$  называются **прилегающими**. Здесь предполагается, что эти нечеткие множества являются перекрывающимися.

База правил  $\{R_i\}_{i=1}^k$  называется непрерывной, если для правил:

“ $R_k$ : если  $x_1=A_{1,k}$  и  $x_2=A_{2,k}$ , тогда  $y=B_k$ ” и  $k' \neq k$  имеем:

$A_{1,k} = A_{1,k'} \wedge A_{2,k}$  и  $A_{2,k'}$  является прилегающим;

$A_{2,k} = A_{2,k'} \wedge A_{1,k}$  и  $A_{1,k'}$  является прилегающим;

$B_k$  и  $B_{k'}$  являются прилегающими.

Непротиворечивость базы правил обычно демонстрируется на контрпримерах.



**Контрпример 1.** Нечеткое управление роботом:

:

или

$R_i$  : если препятствие впереди, тогда двигайся влево

$\{R_i\}_{i=1}^k$  или

$R_{i+1}$  : если препятствие впереди, тогда двигайся вправо

или

:

База правил  $\{R_i\}_{i=1}^k$  противоречива.

**Контрпример 2.** Нечеткая система (рис.3.1)

$R_1$ : если  $x_1=A$  или  $x_2=E$ , тогда  $y=H$ ;

$\{R_i\}_{i=1}^3$   $R_2$ : если  $x_1=C$  или  $x_2=F$ , тогда  $y=I$ ;

$R_3$ : если  $x_1=B$  или  $x_2=D$ , тогда  $y=G$ .

В терминах управления, правила, которые содержат 2 условия и один вывод, представляют собой систему с двумя входами  $x_1$  и  $x_2$  и одним выходом  $y$ . В этом случае алгоритм функционирования нечеткой системы может быть задан в матричной форме:

$x_2 \backslash x_1$	A	B	C	
D		G		y
E	H			
F		I		

Представленная база правил непротиворечива. Пусть теперь база правил имеет вид.

$x_2 \backslash x_1$	A	B	C
D	H	G	I
E	H	H	H, I
F	H, I	I	I

Рис.3.1 Противоречивость базы правил.

В этом случае база правил противоречива, так как она приводит к двусмысленности выводов в случае  $x_1=A$ ,  $x_2=F$  и  $x_1=C$ ,  $x_2=E$ . Из этого простого примера становится очевидным, что заранее высказанные два правила, будут давать двусмысленность выводов. Этот феномен не так легко может быть идентифицирован, в общем случае, при наличии более сложной базы правил.

**Полнота**  $\{R_i\}_{i=1}^k$  используется как мера, указывающая на полноту знаний, которые содержатся в базе правил. Неполная база правил имеет так называемые «пустые места» для определенных ситуаций (на семантическом уровне), т.е. не определены связи между входами и выходами. Это не означает, что результат вывода из правила не существует из-за неполноты базы правил, а этот эффект обусловлен свойствами нечетких множеств, которые используются в условиях правил.

В качестве меры полноты (CM-Completeness Measure) используется критерий:

$$CM(x) = \sum_{K=1}^{N_r} \left\{ \prod_{i=1}^{N_x} \mu_{A_{i,k}}(x) \right\},$$

$x$ - физическая переменная входных данных (условий);  $N_x$  – число условий в правиле;  $N_r$  – число правил в базе правил. Например, при  $N_x=1$ ,  $N_r=1$ , что соответствует наличию одного условия ( $N_x=1$ ) базе правил, содержащей одно правило ( $N_r=1$ ), получим:

$$CM(x) = \sum_{k=1}^1 \left\{ \prod_{i=1}^1 \mu_{i,k}(x) \right\} = \mu_{1,1}(x), \quad 0 \leq \mu_{1,1}(x) \leq 1.$$

Если  $\mu_{1,1}=0$ , что соответствует пустому месту, получим  $CM(x)=0$ .

Численные значения, которые принимает критерий  $CM(x)$ , позволяют классифицировать базы правил по полноте знаний:

- $CM(x)=0$  - «неполная» база правил;
- $1 < CM(x) < 1$  - база правил «незначительно полная»;
- $CM(x)=1$  - база правил «точно полная»;
- $CM(x) > 1$  - база правил «сверх полная (избыточная)».

Таким образом, при разработке алгоритмов нечетких систем управления в виде базы правил обязательным этапом анализа алгоритма является проверка соответствующей базы правил на непрерывность, непротиворечивость и полноту и далее приступают к компьютерной реализации алгоритма управления.

### 3.2. НЕЧЕТКАЯ ИМПЛИКАЦИЯ.

Если продукционное правило (3.1) содержит один вывод, то база правил может быть записана в виде:

$$R_i : \mu_{B_{i1}} = \mu_{A_{1i}}(x_1) \rightarrow \mu_{A_{2i}}(x_2), \quad i = \overline{1, k},$$

где символ « $\rightarrow$ » - нечеткая импликация;

$\mu_{A_{1i}}(x_1), \mu_{A_{2i}}(x_2)$  функции принадлежности нечетких множеств условий  $A_{1i}, A_{2i}$  соответственно;  $\mu_{B_{i1}}$  функция принадлежностей нечеткого множества (вывода)  $B_{i1}$ .

Для нечеткой импликации используются следующие эквивалентные обозначения:

$$\mu_B(y) = I(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) \equiv \mu_{A_1}(x) \rightarrow \mu_{A_2}(x) \quad (3.2)$$

Нечеткая импликация является обобщением четкой импликации. В случае булевой функции 2-х переменных четкая импликация в терминах характеристических функций определяется как:

$$\mu_B^*(y) = I^*(\mu_{A_1}^*(x), \mu_{A_2}^*(x)) \equiv \mu_{A_1}^*(x) \rightarrow \mu_{A_2}^*(x) \quad (3.3)$$

или с помощью таблицы истинности

$\mu_{A_1}^*(x)$	$\mu_{A_2}^*(x)$	$\mu_B^*(y) = I^*(\mu_{A_1}^*(x), \mu_{A_2}^*(x))$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

С помощью таблицы истинности доказывается формула:

$$\mu_{A_1}^*(x) \rightarrow \mu_{A_2}^*(x) \equiv \mu_{A_1^{(-)}}^*(x) + \mu_{A_2}^*(x),$$

где  $\mu_{A_1^{(-)}}^*(x)$  - четкое отрицание.

Сравнение (3.2) и (3.3) показывает, что в четкой импликации область определения и область значения функции  $\Gamma^*$  принадлежит множеству  $\{0;1\}$ , содержащему два элемента 0 и 1, в нечеткой импликации эти области принадлежат промежутку  $[0;1]$ :

четкая импликация

$$y^* = I^*(u_1^*, u_2^*);$$

$$\mu_{A_1}^*(x) = u_1^* \in \{0;1\},$$

$$\mu_{A_2}^*(x) = u_2^* \in \{0;1\},$$

$$y^* \in \{0;1\}.$$

нечеткая импликация

$$y = I(u_1, u_2);$$

$$\mu_{A_1}(x) = u_1 \in [0;1],$$

$$\mu_{A_2}(x) = u_2 \in [0;1]$$

$$y^* \in [0;1].$$

На лингвистическом уровне примером четкой импликации является **силлогизм**. На формальном уровне силлогизм представляется в виде нескольких формул.

### Формула 1.

Формальный уровень:  
уровень:

Лингвистический

$u_1^* = u_1^* \rightarrow u_2^*$  “если птица, то летает”

$u_2^* = u_2^* \rightarrow u_3^*$  “если летает, то направляется на тот остров”

вывод:  
 $u_3^* = u_1^* \rightarrow u_3^*$  “если птица, то направляется на тот остров”

Таким образом, из утверждений:  $u_1^* \rightarrow u_2^*$ ;  $u_2^* \rightarrow u_3^*$   
следует новое утверждение:  $u_1^* \rightarrow u_3^*$ .

### Формула 2.

$u_1^* \rightarrow u_2^*$  Из утверждения: “если птица, то летает”,

$u_1^*$  делается вывод:  
(3.4)

вывод:  $u_2^*$  “если животное-птица, то это животное –летает”

Формула 2 называется modus ponens (лат.)

### Формула 3.

$u_1^* \rightarrow u_2^*$  Из утверждения: “если птица, то летает”,

$u_2^{*(-)}$  делается вывод:

$u_2^{*(-)}$   $u_1^{*(-)}$   
вывод:  $u_1^{*(-)}$  “если это животное не летает, то это животное не птица”.

Аналогичные формулы существуют для нечеткой импликации, и с их помощью могут быть получены новые выводы из исходной информации. Для этого необходимо произвести замену  $u_i^*$  на  $u_i$  и  $u^*$  на  $u$ .

По аналогии с нечеткими «и», «или», «не» число которых не ограничено в нечеткой логике и зависит от способов их задания, число нечетких импликаций также не ограничено.

В нечеткой логике рассматриваются следующие типы нечетких импликаций по классификации Дубоиса и Праде [7].

**1. Нечеткие импликации S-типа**, которые являются аналогом четкой импликации (3.2):

$$y = I(u_1, u_2) = S(u_1^{(-)}, u_2),$$

где S-норма. Пример импликации этого типа приведен ниже в сопоставлении с четкой импликацией:

<b>четкая импликация</b>	<b>нечеткая импликация</b>
(Клине, 1938)	

$$y^* = I^*(u_1^*, u_2^*) = u_1^{*(-)} \vee u_2^* \quad y = I(u_1, u_2) = u_1^{(-)} \vee u_2 = (1 - u_1) \vee u_2.$$

Геометрическая интерпретация граничных условий нечеткой импликации представлена на рис.3.2.

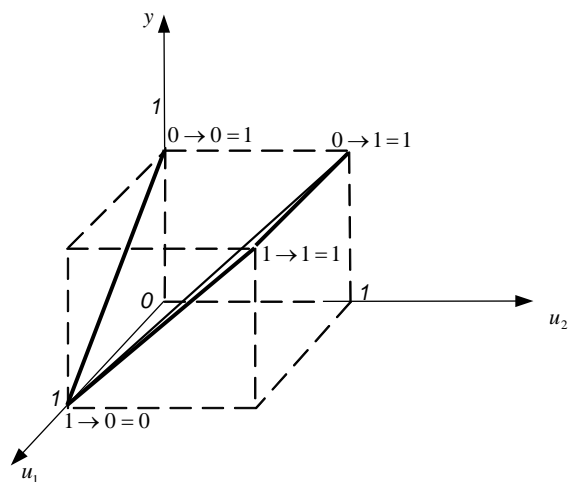


Рис.3.2. Граничные условия нечеткой импликации S-типа.

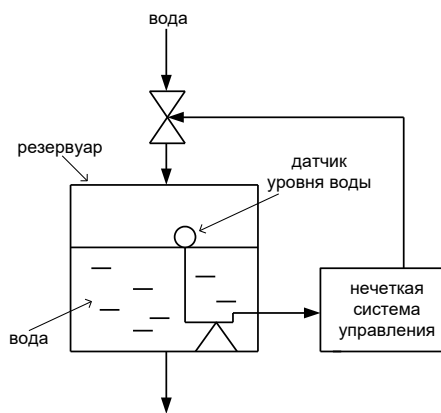


Рис.3.7. Управление уровнем воды в резервуаре.



## 2. Нечеткие импликации QL типа { QL – Quantum logic)

$y=I(u_1, u_2)=S(u_1^{(-)}, T(u_1, u_2))$ , где  $S, T$  – нормы.

Пример импликации QL типа по Рейшенбаху:

$$y=I(u_1, u_2)=S(u_1^{(-)}, T(u_1, u_2))=u_1^{(-)}+u_1 \cdot u_2=1-u_1+u_1 \cdot u_2.$$

Модификаций QL типа является импликация «расширение исчисления высказываний по Ли»:

$$y=I(u_1, u_2)=S(T(u_1^{(-)}), u_2^{(-)}, u_2).$$

Другой пример импликации QL типа:

$$1-u_1, \text{ если } u_2=0$$

$$y=I(u_1, u_2)= \begin{cases} u_2, & \text{если } u_1=1 \end{cases}$$

$$1, \text{ для других.}$$

## 3. Нечеткие импликации, отражающие частичный порядок в предложениях (нечеткие импликации R типа):

$$1, \text{ если } u_1 \leq u_2$$

$$y=I(u_1, u_2)= \begin{cases} 0, & \text{если } u_1=1 \wedge u_2=0 \end{cases}$$

$$\in [0,1), \text{ для других.}$$

Здесь R аббревиатура residuated – разность, остаток.

К этому типу относится также импликация:

$$I(u_1, u_2) = \sup\{\gamma \in [0, 1] / T(u_1, \gamma) \leq u_2\}. \quad (3.5)$$

Иногда этот тип упоминается, как «обобщенный modus ponens» и так же включается в перечень “обобщенного modus tollens” или обобщенного способа замещения. Часто используется другая форма (3.5) в виде:

$I(u_1, u_2) = 1 - \inf\{\gamma \in [0, 1] / S(u_2, \gamma) \geq u_1\}$ ,  
которая следует из предыдущей в результате замены  $u_1$  и  $u_2$  на  $1 - u_2$  и  $1 - u_1$  соответственно.

Примером импликации R типа является импликация по Гогаену (1969):

$$y = I(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_1 = 0 \\ \min(u_2 / u_1; 1), & \text{для других.} \end{cases}$$

#### 4. Нечеткие импликации T-типа, которые базируются на T норме:

$$y = I(u_1, u_2) = T(u_1, u_2). \quad (3.6).$$

Примером импликации T-типа является импликация по Мамдани (1974):  $y = I(u_1, u_2) = u_1 \wedge u_2 = \min(u_1, u_2)$ ,

и по Ларсену (1980):  $y = I(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$ , где “.” – алгебраическое произведение.

#### 5. Нечеткие импликации, отражающие частичный порядок и основанные на классическом пересечении множеств:

$$y = I(u_1, u_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } u_1 + u_2 \leq 1 \\ 1, & \text{если } u_1 = 1 \wedge u_2 = 1 \end{cases}$$

$\in(0,1]$ , для других.

Подклассом этой импликации является также нечеткая импликация:

$$I(u_1, u_2)=\inf\{\gamma\in[0,1]/S(1-u_1, \gamma)\geq u_2\}.$$

6. К этому типу нечетких импликаций относятся импликации, которые не вписываются в классы приведенные выше, например, **нечеткая импликация по Ягеру** (1980):

7.  $y=I(u_1, u_2)=u_2^{u_1}$ .

В [7] приведен перечень нечетких импликаций различных типов по Геделю, Ви, Виллмоту и т.д.

По аналогии с импликацией S-типа можно также дать геометрическую интерпретацию приведенных выше нечетких импликаций, оценить максимальные и минимальные значения и установить по ним взаимоотношения порядка. Приведенная выше классификация нечетких импликаций базируется на различии Т и S типов импликаций. Можно дать другую более общую классификацию импликаций [7].

### 3.3. КОМПОЗИЦИЯ НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ.

Выше были рассмотрены операции с нечеткими множествами, для которых принадлежность определялась функцией одной переменной. Можно обобщить определения высоты, основания, определения и свойства операций  $\alpha$ -сечения, Т и S норм, отрицания для нечетких отношений (fuzzy relations –R) или многомерных нечетких множеств с функцией принадлежности  $\mu_R(x_1, \dots, x_n)$ .

В теории нечетких множеств также рассматривается операция композиции нечетких отношений, которая в символической форме для двумерного нечеткого отношения определяется в виде:

$$B = A \circ R, \quad (3.7)$$

где  $R$  - заданное двумерное нечеткое отношение в  $A_1 \times A_2$  с функцией принадлежности  $\mu_R(x_1, x_2)$ ,  $A$  заданное одномерное нечеткое множество в  $A_1$  с функцией принадлежности  $\mu_A(x_1)$ ;  $B$  – нечеткое множество в  $A_2$  с функцией принадлежности, подлежащей определению;  $\circ$  - символ композиции.

Для согласования размерностей пространств при выполнении этой операции используются две вспомогательные операции проектирование ( $proj$ ) и цилиндрическое расширение ( $cext$ ).

В двумерном случае операция проектирования нечеткого отношения с  $R$ , которое является подмножеством  $A = A_1 \times A_2$  ( $R \subset A$ )

$$R = \int_{A=A_1 \times A_2} \mu_R(x_1, x_2) / (x_1, x_2)$$

на одномерное нечеткое множество  $A_2$  определяется в виде:

$$A_2 = \{ \mu_{A_2}(x_2); x_2 \} = proj(R, A_2) = \int_{A_2} \sup_{x_2} \mu_R(x_1, x_2) / x_2.$$

Пример техники проектирования показан на рис.3.3.

В двумерном случае **операция цилиндрического расширения** определяется по Заде в виде:

$$R = cext(A; A_1 \times A_2) = \int_{A_1 \times A_2} \mu_R(x_1) / (x_1, x_2).$$

Пример техники цилиндрического расширения показан на рис.4.4.

С учетом операций проектирования и цилиндрического расширения операция композиции по (3.7), в результате которой получается нечеткое множество В, определяется в виде

$$B = \text{proj}(R \cap \text{sext}(A; A_1 \times A_2); A_2),$$

где операция  $\cap$  задается в виде Т-нормы. Таким образом для получения В выполняются три операции:  $\text{proj}$ ,  $\text{sext}$ ,  $\cap$ .

В настоящее время в качестве Т-нормы в операции композиции широко используется логическое произведение (2.6) по Заде. В результате этого функция принадлежности  $\mu_B(x_2)$  нечеткого множества В, определяемого по (3.7) будет равна:

$$\mu_B(x_2) = \sup_{x_1} T(\mu_A(x_1), \mu_R(x_1, x_2)) = \sup_{x_1} \min(\mu_A(x_1), \mu_R(x_1, x_2)). \quad (3.8)$$

Для примера используем лингвистическую переменную « $\approx 5$ » с одномерной функцией принадлежности треугольного типа:

$$\mu_{A_1}(x_1) = \mu_{\approx 5}(x_1) = \max\left(1 - \frac{1}{2}|x_1 - 5|; 0\right).$$

и лингвистическую переменную «приблизительно равное» в виде нечеткого отношения « $\approx$ » с двумерной функцией принадлежности пирамидального типа:

$$\mu_R(x_1, x_2) = \mu_{\approx}(x_1, x_2) = \max\left(1 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2|; (0; 0)\right).$$

Найдем лингвистическую переменную «приблизительно 5 приблизительно равное  $x_2$ », где  $x_2$  – заданное значение. Это соответствует нахождению результирующего нечеткого

множества В с функцией принадлежности  $\mu_B(x_2)$  по заданным  $\mu_{\approx 5}(x_1)$ ,  $\mu_{\approx}(x_1, x_2)$ .  
По (3.8) имеем

$$\begin{aligned}
 \mu_B(x_2) &= \sup_{x_1} \min(\mu_{\approx 5}(x_1), \mu_{\approx}(x_1, x_2)) \\
 &= \sup_{x_1} \min\left(\max\left(1 - \frac{1}{2}|x_1 - 5|; 0\right), \max\left(1 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2|; (0; 0)\right)\right) = \\
 &= \max\left(1 - \frac{1}{4}|x_2 - 5|; 0\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Различные стадии получения В показаны на рис.3.5.

Если композиционное правило для получения нечеткого вывода или заключение применяется на дискретных областях с  $x_1, x_2: 0, 1, 2, \dots$  в промежутке  $[0; 10]$ , тогда получим следующие результаты:

$$\mu_B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& \min \left( \mu_{\approx 5, (x_1)}, \mu_{\approx (x_1, x_2)} \right) \\
= & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & 1/2 & 1 & 1/2 & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & 1/2 & 1 & 1/2 & \mathbf{0} \\ \vdots & 1 & 1/2 & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \dots & & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \overbrace{(0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1/2 \ 1 \ 1/2 \ 1/2 \ 0 \ 0 \ 0)}^{\max_{x_1} \min \left( \mu_{\approx 5, (x_1)}, \mu_{\approx (x_1, x_2)} \right)}.
\end{aligned}$$

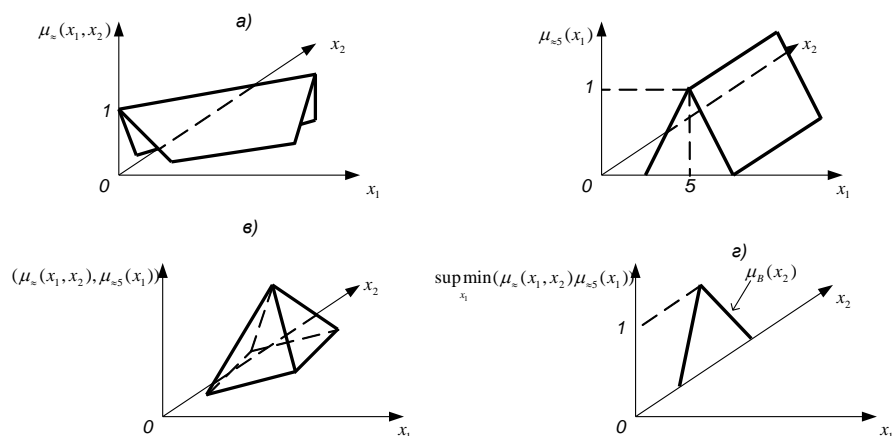


Рис.3.5. Композиция нечеткого отношения  $R$  - (а), цилиндрическое расширение  $\mu_{\approx 5}(x_1)$  - (б), пересечение отношения  $R$  и цилиндрического расширения - (в) и проекция  $B$  - (г).

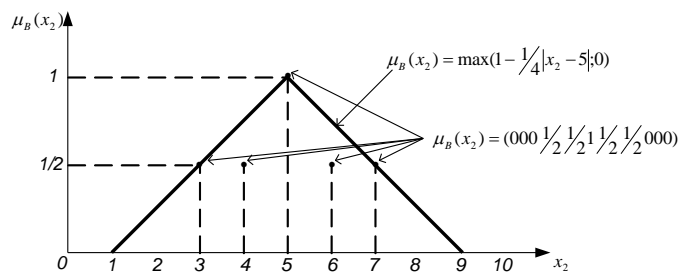


Рис.3.6. Операция композиции на непрерывной и дискретной областях.



Этот результат показан на рис.3.6. Из него становится ясным, что полученный результат не обусловлен эффектом дискретизации областей по сравнению с тем, когда используется операция композиции на непрерывных областях. Поэтому необходимо быть внимательным, когда используется дискретизация нечетких множеств и отношений при компьютерной реализации нечеткой системы.

Аналогично предыдущему примеру можно получить локальный вывод при управлении уровнем воды в резервуаре (рис.3.7).

Имеем лингвистические правила управления уровнем воды:

R<sub>1</sub>: если уровень воды в резервуаре низкий (нечеткое множество A<sub>1</sub>), тогда клапан поступления воды в резервуар открыт (нечеткое множество A<sub>2</sub>);

R<sub>2</sub>: если уровень воды в резервуаре не очень высокий (нечеткое множество A), тогда клапан поступления воды в резервуар слегка открыт (нечеткое множество B).

Задача состоит в получении нечеткого множества B или нечеткого локального вывода из двух правил при заданных нечетких множествах A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>.

В соответствии с нечеткой композицией и нечеткой импликацией имеем:

$$B = A \circ R = A \circ (A_1 \rightarrow A_2)$$

здесь  $\circ$  – нечеткая композиция;  $\rightarrow$  – нечеткая импликация; R – нечеткое отношение. Выберем импликацию I в виде нечеткой импликации T-типа (3.6), тогда для  $R = A_1 \rightarrow A_2$  получим:

$$I(u_1, u_2) = T(u_1, u_2) = u_1(T) \quad u_2 = u_1 \wedge \quad u_2 = \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)) = \mu_R(x_1, x_2).$$

Операцию композиции  $\circ$  выбираем по Заде (3.8), тогда для нечеткого множества  $B=A \circ R$  получим:

$$\mu_B(x_2) = \sup_x T(u_1, u_2) = \max \{ \mu_A(x), \min \{ \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x) \} \}$$

Стадии получения  $\mu_B(x)$  показаны на рис.3.8. Дальнейшая задача в системах управления состоит в преобразовании нечеткого множества  $B$  в физическую переменную. Различные методы этого преобразования будут рассмотрены далее.

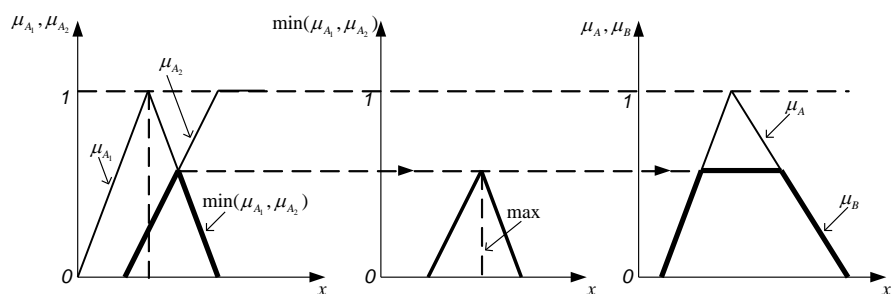


Рис.3.8. Стадии получения нечеткого локального вывода  $B$  в виде функции принадлежности  
 $\mu_B(x) = \max \{ \mu_A(x), \min \{ \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x) \} \}.$

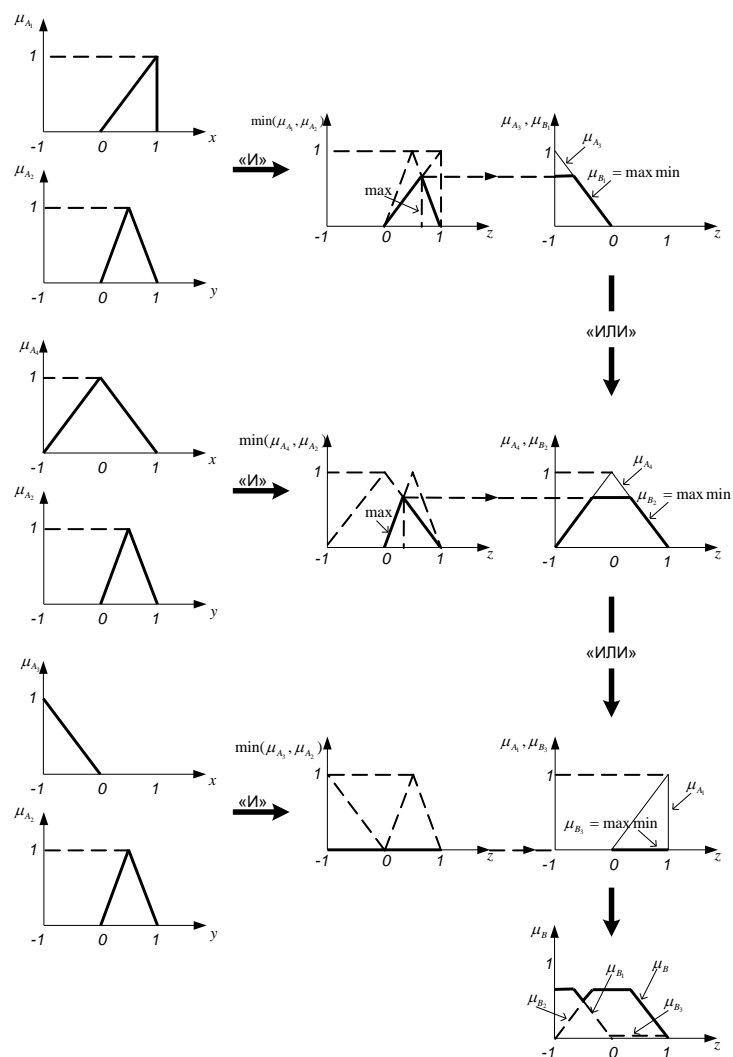


Рис.3.9. Процедура получения общего вывода  $B$  по локальным выводам  $B_1, B_2, B_3$ .

### 3.4. АГРЕГАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВЫВОДОВ И ДЕФАЗИФИКАЦИЯ.

Операция агрегации (aggregation) подразумевает объединение локальных выводов  $B_i$ , полученных по каждому правилу  $R_i$ , в один общий вывод  $B$ , который характеризует в целом базу правил  $\{R_i\}_{i=1}^k$ , или в символической форме:

$R_i$ : если ..., тогда  $B_i (i = \overline{1, k})$ , где нечеткое множество  $B_i$  известно  $\rightarrow$ ? нечеткое множество  $B$  для  $\{R_i\}_{i=1}^k$ . Здесь символ  $\rightarrow$ ? обозначает “необходимо найти”.

Для решения этой задачи возможны несколько подходов.

Первый из них, обычно применяемый в традиционных экспертных системах, состоит сначала в получении выводов  $B_i$  по каждому правилу и далее в комбинировании этих выводов по определенным алгоритмам в общий вывод  $B$ .

Второй подход состоит сначала в комбинировании всех правил  $R_i$  и затем в получении вывода по этой комбинации, который принимается за общий вывод  $B$  для базы правил.

Возможен другой подход, когда сначала из общей базы правил выделяются индивидуальные базы правил и для каждой из них формируется вывод с использованием первого или второго подходов. Совокупность таких выводов образует базу выводов. Затем формируется общий вывод, как композиция базы выводов.

В теории нечетких множеств доказывается, что при реализации в базе правил нечетких «и», «или» и нечеткой импликации в виде логических произведений и суммы по Заде  $T(u_1, u_2) = u_1 \wedge u_2$ ,  $S(u_1, u_2) = u_1 \vee u_2$ , два подхода в получении общего вывода  $B$  дают эквивалентные результаты и поэтому справедливо соотношение:

$$B = \bigcup_{i=1}^K B_i,$$

где  $\bigcup$  - объединение локальных выводов в виде нечетких множеств  $B_i$ .

Этот результат показывает, что при компьютерной реализации получения общего вывода по базе правил возможно использование параллельных вычислений, когда по каждому правилу параллельно вычисляется  $B_i$  и далее полученные результаты объединяются. Так как при вычислении  $B_i$  и  $B$  используются логические операции, которые являются более быстрыми по сравнению с вычислительными операциями, поэтому в сочетании с параллельностью очевидно возможно достижение существенного быстродействия при реализации нечетких систем управления на нечетких компьютерах (контроллерах).

Для нечеткого контроллера, который обрабатывает нечеткую информацию принята следующая единица быстродействия — FLIPS (число нечетких локальных выводов/сек). Например, японский нечеткий контроллер образца 80-х годов, который управлял скоростью разгона и торможения электролокомотива метрополитена, имел следующие характеристики:

Быстродействие — 10 FLIPS;

База правил 24;

Длина разрядной сетки процессора 8 бит.

В настоящее время в Японии созданы нечеткие контроллеры с быстродействием  $40 \cdot 10^6$  FLIPS.

Продemonстрируем процедуру получения общего вывода В по локальным выводам В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>, В<sub>3</sub> с помощью графических построений (рис.3.9). Для простоты рассмотрим базу правил {R<sub>i</sub>}<sup>3</sup><sub>i=1</sub>, которая содержит три правила:

$$\begin{aligned} & R_1: \text{если } x=A_1 \text{ и } y=A_2, \text{ тогда } z=A_3; \\ & \text{или} \\ & \{R_i\}_{i=1}^3 \quad R_2: \text{если } x=A_4 \text{ и } y=A_2, \text{ тогда } z=A_4; \\ & \text{или} \\ & R_3: \text{если } x=A_3 \text{ и } y=A_2, \text{ тогда } z=A_1, \end{aligned}$$

где А<sub>і</sub> (і=1,4) – нечеткие множества, заданные своими функциями принадлежности. Нечеткие логические операции «и», «или» задаются в виде логических «и», «или» по Заде, тогда функции принадлежности локальных выводов В<sub>і</sub> будут равны:

$$\begin{aligned} \mu_{B_1}(z) &= \max \left\{ \mu_{A_3}(z), \min \left( \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y) \right) \right\}, \\ \mu_{B_2}(z) &= \max \left\{ \mu_{A_4}(z), \min \left( \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y) \right) \right\}, \\ \mu_{B_3}(z) &= \max \left\{ \mu_{A_1}(z), \min \left( \mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y) \right) \right\} \end{aligned}$$

Функция принадлежности общего вывода В равна:

$$\mu_B(z) = \mu_{B_1}(z) + \mu_{B_2}(z) + \mu_{B_3}(z).$$

Заключительной операцией в нечетком управлении является процедура преобразования нечеткого общего вывода В в физическую переменную. Эта процедура называется дефазификация (defuzzification) и обозначается dfz. Для ее выполнения существует достаточно много разнообразных методов. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Интуитивно очевидно, что преобразование общего вывода В, который характеризуется функцией принадлежности  $\mu_B(z)$ , в общем случае, с достаточно сложной формой (рис.3.9), в физическую переменную может быть сделано с помощью техники усреднения. Метод центра тяжести (center of gravity – cog) является ничем иным, как тем самым методом, который использует усреднение (рис.3.10):

$$z_{cog}(B) = \frac{\int_z \mu_B(z) \cdot z dz}{\int_z \mu_B(z) dz} \quad \text{непрерывный случай;}$$

$$z_{icog}(B) = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_B(z_i) \cdot z_i}{\sum_{i=1}^N \mu_B(z_i)} \quad \text{дискретный случай,}$$

где N является числом разбиений, используемых для дискретизации функции принадлежности  $\mu_B(z)$ . Метод cog имеет место также для n-го случая, когда  $\mu_B(z_1, \dots, z_n)$ . В этом случае численное значение j-той координаты равно:

$$z_{jcog}(B) = \frac{\int_z \mu_B(z_1, \dots, z_n) z_j dz_1 \dots dz_n}{\int_z \mu_B(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n},$$

где z – произведение пространств.

Наиболее известным методом дефазификации является **метод центра области** (center of area – coa) или **метод медианы**, когда значение z разбивает площадь фигуры под функцией принадлежности  $\mu_B(z)$  нечеткого множества В на две равные части (рис.3.11):

$$z_{coa}(B) = \int_{\inf z}^{z_{coa}(B)} \mu_B(z) dz = \int_{z_{coa}(B)}^{\sup z} \mu_B(z) dz.$$

Этот метод может быть обобщен на многомерный случай нечеткого множества В, для двумерного случая имеем:

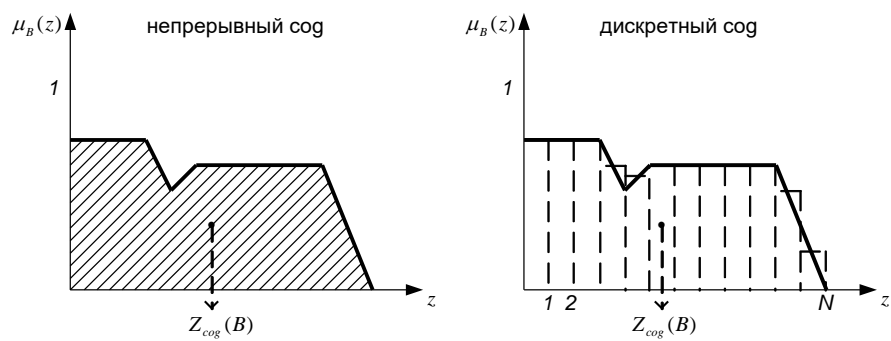


Рис.3.10. Дефазификация методом *cog*.

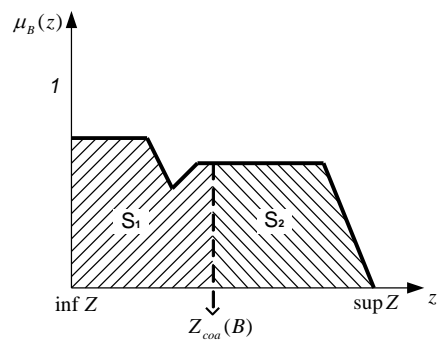


Рис.3.11. Дефазификация методом *coa* (площадь  $S_1 =$  площадь  $S_2$ ).



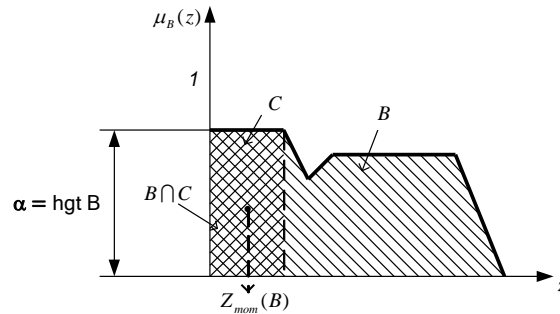


Рис.3.12. Дефазификация методом *mom*.

$$z_{1coa}(B) = \int_{\inf z_2}^{\sup z_2} \int_{\inf z_1}^{z_{1coa}(B)} \mu_B(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \int_{\inf z_2}^{\sup z_2} \int_{z_{coa}(B)}^{\sup z_1} \mu_B(z_1, z_2) dz_1 dz_2;$$

$$z_{2coa}(B) = \int_{\inf z_2}^{z_{1coa}(B)} \int_{\inf z_1}^{\sup z_1} \mu_B(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \int_{z_{2coa}(B)}^{\sup z_2} \int_{\inf z_1}^{\sup z_1} \mu_B(z_1, z_2) dz_1 dz_2.$$

Для решения задач нечеткого управления также часто используется **метод среднего максимума** (mean of maxima-mom), который определяется следующим образом (рис.3.12):  $Z_{mom}(B) = \text{cog}\{B \cap C\}$ , где  $C = \alpha\text{-cut} B / \alpha = \text{hgt} B$  – сечение множества  $B$  при  $\alpha = \text{hgt} B$ .

Очевидно, что этот метод дефазификации игнорирует большую часть той информации, которую дает нечеткое множество  $B$  (за счет применения  $\alpha$ -разреза) с уровнем разреза, равным высоте множества  $B$ . Этот метод применяется в случае, когда процедура дефазификации должна иметь фильтрующие свойства. Иногда такой метод называется индексным или

методом пороговой дефазификации (indexed defuzzification – idfz) и, в сочетании с методом «cog», обозначается icog:

$$Z_{\text{mom}}(B) = \text{cog}\{B \cap C\} = \text{icog}\{B, \text{hgt}B\}.$$

Возможно также сочетание с методом “coa”, тогда

$$Z_{\text{mom}}(B) = \text{icoa}\{B, \text{hgt}B\}.$$

Большой класс методов с фильтрующими свойствами составляют **индексные методы**, в которых  $\alpha = \beta_t$  ( $\beta_t$  – заданные априори значения), и, в сочетании с методами “cog” и “coa”, равны (рис.3.13):

$$Z_{\text{idfz}}(B, \beta_t) = \text{cog}\{B \cap C_{\beta_t}\}, C_{\beta_t} = \alpha\text{-cut}B / \alpha = \beta_t;$$

$$Z_{\text{idfz}}(B, \beta_t) = \text{coa}\{B \cap C_{\beta_t}\}.$$

В практических задачах обычно  $\beta_t = 0,5$ . Численные результаты сравнения методов дефазификации приведены в табл.3.1.

**Табл.3.1.** Сравнение методов дефазификации

Метод	dfz B	idfz(B, $\beta_t = 0,5$ )
Непр. Cog	$4^4/9$	$4^4/29$
Дискр. Cog	$4^4/9$	4
COA	$4^{1/2}$	$4^{1/16}$
MOM	$3^{1/2}$	$3^{1/2}$

Классификация методов дефазификации приведена на рис.3.14.

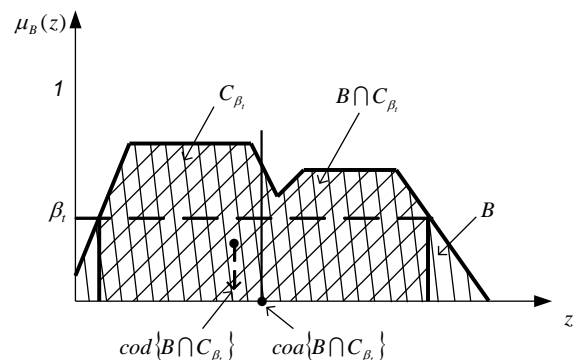


Рис.3.13. Дефазификация индексными методами с уровнем разреза  $\beta_i$ .

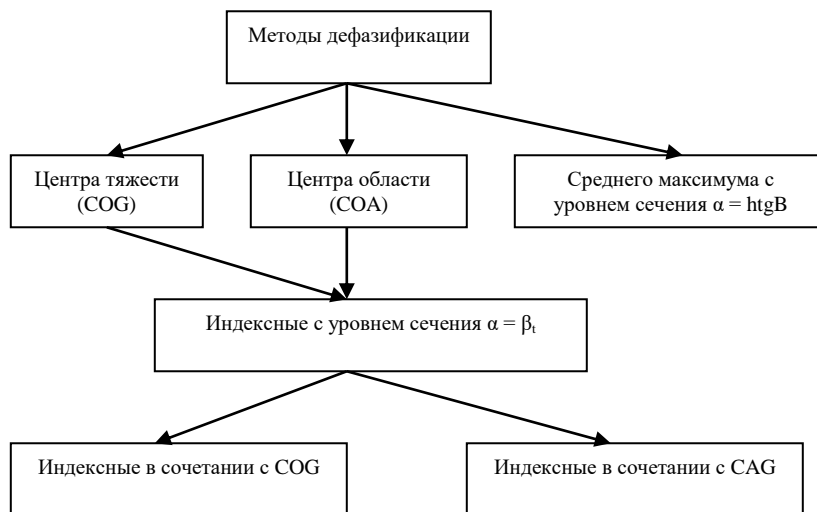


Рис.3.14. Классификация методов дефазификации.

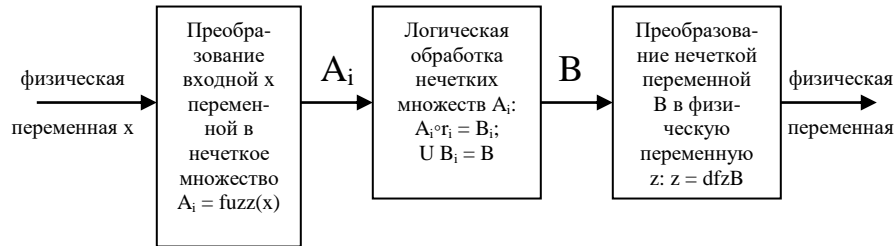


Рис.3.15. Стадии обработки информации в нечетком контроллере.

### 3.5. НЕЧЕТКИЕ КОНТРОЛЛЕРЫ.

Алгоритм функционирования нечеткого контроллера (регулятора) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 R_1: A_1 \circ r_1 &= A_1 \circ (A_{11} \rightarrow A_{21}) = B_1 \\
 R_2: A_2 \circ r_2 &= A_2 \circ (A_{12} \rightarrow A_{22}) = B_2 \\
 \{R_i\}_{i=1}^k &: \\
 R_k: A_k \circ r_k &= A_k \circ (A_{1k} \rightarrow A_{2k}) = B_k, \\
 B &= \bigcup_{i=1}^k B_i, \quad z = \text{dfz } B,
 \end{aligned}$$

где « $\circ$ » композиция нечетких отношений, « $\rightarrow$ » – нечеткая импликация;  $B_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) локальный вывод из правила  $R_i$ ;

$B$ - общий вывод из базы правил  $\{R_i\}_{i=1}^K$ ;  $A_i \left( i = \overline{1, k} \right) = \text{fuzz}(x_i)$ ;  
 $A_j = \text{fuzz}(x_j, x_1)$ ; fuzz- операция фазификации.

Эта система уравнений показывает, что в нечетком контроллере для получения его выхода  $z$  по входу  $x$  имеют место три взаимосвязанные стадии обработки информации (рис.3.15).

1. Преобразование входной физической переменной  $x$  в нечеткое множество – процедура фазификации (fuzz);
2. Логическая обработка нечетких переменных (композиция, импликация) базы правил контроллера, получение локальных и общего вывода базы правил в виде нечеткого множества  $B$ ;
3. Преобразование нечеткого множества  $B$  в физическую переменную  $z$  – процедура дефазификации (dfz).

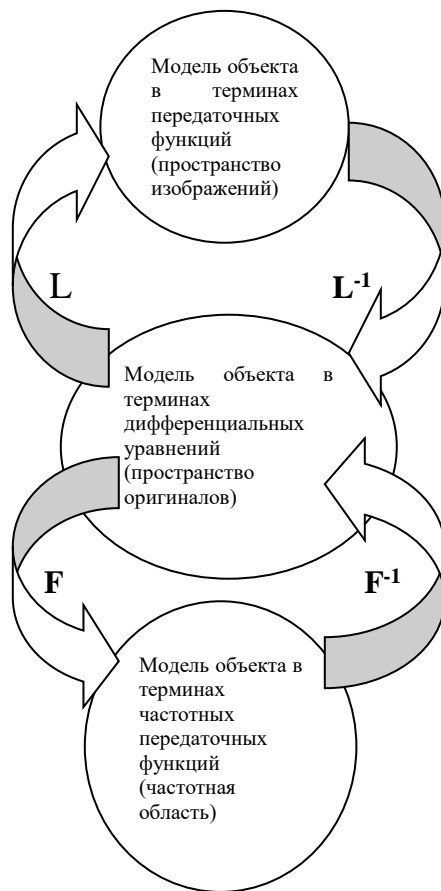
В соответствии со стадиями обработки информации алгоритм функционирования нечеткого контроллера по аналогии с классической теорией автоматического регулирования можно интерпретировать, как модель регулятора в терминах “вход-выход” в некотором новом пространстве, переход в которое из пространства оригиналов (физические переменные) осуществляется с помощью оператора “fuzz”. После проведения в новом пространстве (аналог пространства изображений в преобразовании Лапласа) некоторых операций, осуществляется обратное преобразование с помощью оператора dfz в исходное пространство. Сопоставление преобразований Фурье и Лапласа, принятых в классической теории автоматического регулирования, с преобразованием переменных типа “fuzz” и “dfz”, используемых в теории нечеткого управления, показано на рис.3.16. Подобная ситуация имеет место также в элементарной математике, когда такие относительно сложные операции как умножение и деление, путем логарифмического преобразования, могут быть заменены

более простыми арифметическими операциями сложения и вычитания, и затем полученный результат с помощью обратного преобразования (антилогарифмирование) преобразуется в искомый результат.

Характерной особенностью преобразования информации в нечетком контроллере является то, что оператор “fuzz” не является единственным и определяется типом задания функций принадлежности: треугольные, трапециидальные, колоколообразные и др. Логическая обработка нечетких множеств также не является единственной и определяется способами задания нечеткой импликации и композиции. Не единственным является оператор “dfz”: методы Cog, COA и т.д.

Эту неединственность можно ассоциировать с тем фактом, что теория нечетких множеств появилась в результате попытки исчисления высказываний с неопределенными лингвистическими переменными: “большой”, “маленький”, “более или менее” и т.д., которыми обычно оперирует человек, и эти переменные в силу своей природы являются неоднозначными. В этой связи можно высказать предположение, что нечеткий контроллер является первым приближением в создании интеллектуальных систем управления, в которых сделана попытка формализации мыслительной деятельности человека и реализации этой деятельности в виде некоторого технического устройства. Архитектура нечеткого контроллера представлена на рис.3.17. Особенностью архитектуры является возможность параллельно обрабатывать правила базы правил, что позволяет существенно повышать быстродействие контроллера.

Преобразование переменных в классической теории автоматического регулирования



Преобразование переменных в нечетком контроллере

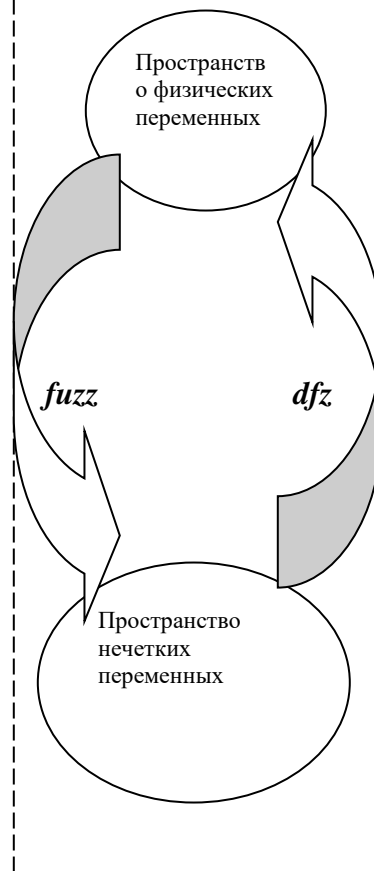


Рис.3.16. Сопоставление преобразований Лапласа (Z) и Фурье (F) с преобразованием переменных в нечетком контроллере.

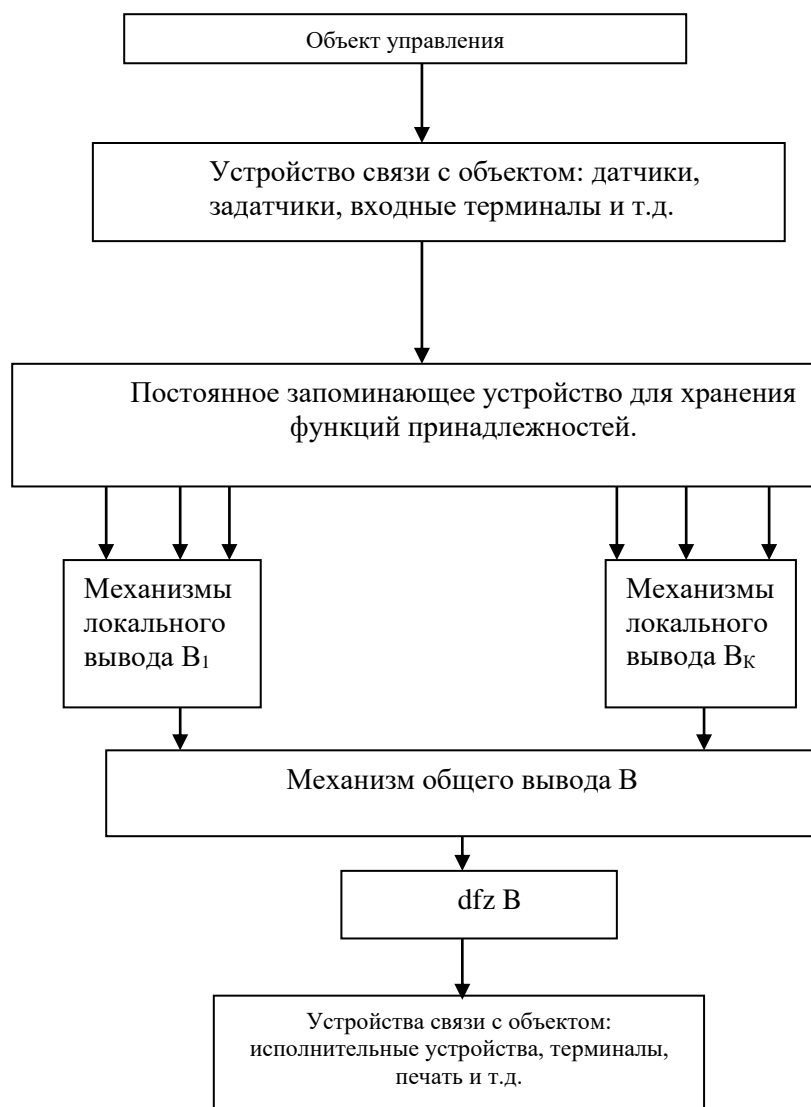


Рис. 3.17. Архитектура нечеткого контроллера.



В настоящее время нечеткие контроллеры выпускаются предприятиями США, Японии, Германии и другими странами. Они выполнены либо в виде интеллектуальной платы универсального контроллера, либо в виде самостоятельного блока.

Для простейших систем управления, которые имеют два входа и один выход, программирование контроллера производится со специализированного пульта. Для более сложных систем управления программирование осуществляется через персональный компьютер, который оснащается специализированным программным обеспечением и платой связи контроллера с персональным компьютером.

Настройка специализированного программного обеспечения состоит в выборе типа функций принадлежности, задании для них показателей нечеткости, определении типов логических операций и задании способа дефазификации. Выпускается программное обеспечение с интерфейсом пользователя, который позволяет программировать контроллер в виде структурных блоков, как это принято в теории автоматического управления.

## **ГЛАВА 4. НЕЧЕТКОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ.**

Нечеткая логика применяется в системах автоматического управления для различных целей и условно можно выделить две области ее практической реализации:

- нечеткие логические регуляторы, которые функционируют в прямом контуре и выполняют функции некоторого линейного преобразователя, в том числе они могут реализовывать линейные функции по типу П, ПИ, ПИД и др. регуляторов;
- комбинированные нечеткие регуляторы, у которых в прямом контуре функционируют традиционные регуляторы, а в дополнительном контуре имеются нечеткие системы, которые адаптируют коэффициенты усиления регулятора прямого контура, подстраивая их к изменяющимся условиям функционирования объекта управления. Ниже приводятся примеры нескольких таких систем нечеткого логического управления.

### **4.1. НЕЧЕТКОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫМ МЕХАНИЗМОМ [5].**

При управлении сложными нелинейными объектами обычно используется два подхода. При первом пытаются описать объект с помощью различных математических моделей. Однако, в эти модели входит достаточно много эмпирических коэффициентов, которые, как правило, изменяются в широком диапазоне и их идентификация является сложной научно-технической задачей. Кроме того, возникают проблемы обеспечения устойчивости вычислительного процесса.

При таком подходе системы управления не обеспечивают нужного качества управления и, как следствие этого, не удастся получить готовую продукцию с высокими потребительскими свойствами. Примерами таких объектов являются доменная печь в металлургии, ректификационная колонна при переработке нефти и т.д.

Однако с управлением такими сложными объектами человек справляется достаточно уверенно. При этом он использует показания контрольно-измерительных приборов и по эвристическим алгоритмам, которые основаны на опыте и интуиции, воздействует на исполнительные органы объекта, добиваясь приемлемых конечных результатов. При этом, чем более квалифицирован оператор, тем лучших результатов он добивается. В этой связи возможен второй подход при управлении сложными объектами, когда эвристические алгоритмы управления реализуются с использованием языка нечеткой логики, который по своей структуре близок к естественному языку. Впервые этот подход в виде нечеткой системы управления был реализован при управлении цементной печью.

Ниже дается простейший пример нечеткого управления подъемно-транспортным механизмом, когда на специализированном языке формализуются действия оператора для предотвращения раскачивания груза на крюке подъемно-транспортного механизма при начале его перемещения, изменении скоростных режимов или остановке.

Покажем предварительно, что объект, которым управляет крановщик является нелинейным динамическим объектом. Простейшей одномерной математической моделью раскачивания груза при движении крана является маятник с подвижной точкой подвеса (рис.4.1) Баланс моментов относительно точки О дает

$$M_1 + M_2 = M_3,$$

где  $M_1 = J_r \cdot \ddot{\alpha}(t)$  - момент инерции груза относительно точки подвеса;

$M_2 = m[V_r(t) \cos \alpha(t) \cdot l]_t'$  - момент, создаваемый составляющей скорости подвеса, относительно точки подвеса;

$M_3 = mgl \sin \alpha(t)$  - момент, создаваемый составляющей веса груза, относительно точки подвеса. После интегрирования и преобразований получим:

$$J_r \cdot \frac{1}{\cos \alpha(t)} \dot{\alpha}(t) + mgl \cdot \frac{1}{\cos \alpha(t)} \int \sin \alpha(t) dt = -mlV_r(t),$$

$$\alpha(t=0) = \alpha_0, \quad \int \sin \alpha(t) dt /_{t=0} = \beta_0$$

- начальные условия нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

Задача управления нелинейным объектом состоит в определении скорости  $V_0(t)$  по измерениям его текущей скорости  $V_T(t)$  и угла раскачивания  $\alpha(t)$  для того, чтобы предотвратить опасное раскачивание груза при изменении скоростных режимов крана (рис.4.2): начало разгона - т.О<sub>1</sub>; конец разгона т.О<sub>2</sub>; начало торможения т.О<sub>3</sub>; конец торможения т.О<sub>4</sub>. Эта задача решается оператором крана эвристическим способом. Один из возможных вариантов изменения скорости  $V_0(t)$  в конце торможения (т.О<sub>4</sub>), при котором обеспечивается.2): начало разгона- т.О<sub>1</sub>; конец разгона т.О<sub>2</sub>; начало торможения т.О<sub>3</sub>; конец торможения т.О<sub>4</sub>. Эта задача решается оператором крана эвристическим способом. Один из возможных вариантов изменения скорости  $V_0(t)$  в конце торможения (т.О<sub>4</sub>), при котором обеспечивается .2): начало разгона- т.О<sub>1</sub>; конец разгона т.О<sub>2</sub>; начало торможения т.О<sub>3</sub>;

конец торможения т.О<sub>4</sub>. Эта задача решается оператором крана эвристическим способом. Один из возможных вариантов изменения скорости  $V_0(t)$  в конце торможения (т.О<sub>4</sub>), при котором обеспечивается  $\min \alpha(t)$ , показан на рис 4.3. При этом оператор формулирует для себя одно из возможных лингвистических правил:

R<sub>i</sub>: если угол  $\delta\alpha = \alpha_3 - \alpha$ , где  $\alpha_3$  - задание,  $\alpha$  - измеренное значение; немного увеличивается по часовой стрелке и

производная угла  $\dot{\delta\alpha}$  колебания груза немного увеличивается против часовой стрелки и скорость  $\delta V_T = V_{T3} - V_T$ , где  $V_{T3}$  – задание,  $V_T$  – измеренное значение; равна нулю, тогда скорость  $V_0$  должна быть небольшой в отрицательном направлении относительно нуля.

Определим для нечетких лингвистических переменных

$\delta\alpha$ ,  $\dot{\delta\alpha}$ ,  $\delta V_T$ ,  $V_0$  нечеткие множества с соответствующими идентификаторами для функций принадлежности

$\mu(\delta\alpha)$ ,  $\mu(\dot{\delta\alpha})$ ,  $\mu(V_T)$ ,  $\mu(V_0)$  (рис.4.4). Например, для  $\mu(\delta\alpha)$  эти идентификаторы имеют вид :

PM- угол раскачивания  $\delta\alpha$  положительный (против часовой стрелки) средний;

PS- угол раскачивания  $\delta\alpha$  положительный небольшой;

ZR - угол раскачивания  $\delta\alpha$  нулевой;

NS - угол раскачивания  $\delta\alpha$  отрицательный (по часовой стрелки) небольшой;

NM - угол раскачивания  $\delta\alpha$  отрицательный средний.

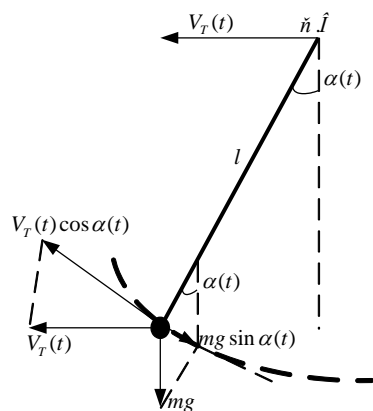


Рис.4.1. Маятник с подвижной точкой О подвеса.

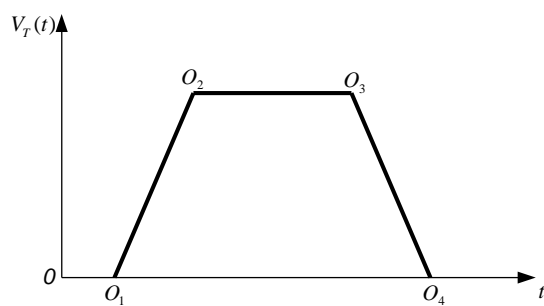


Рис.4.2. Текущая скорость  $V_T(t)$  перемещения крана (т.  $O_1$  - начало разгона; т.  $O_2$  - конец разгона; т.  $O_3$  - начало торможения; т.  $O_4$  - конец торможения).

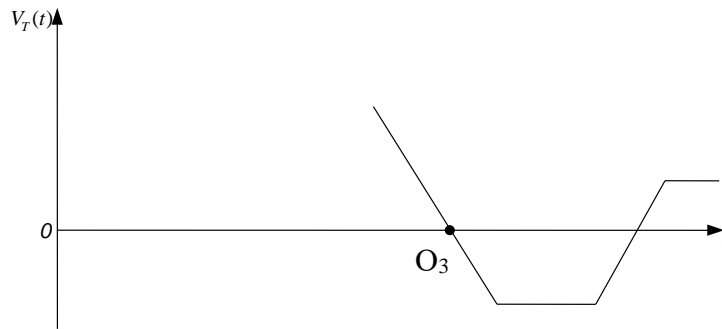


Рис.4.3. Изменение скорости крана для предотвращения раскачивания груза.

Аналогично определяются идентификаторы для  $\mu(\delta\alpha)$ ,  $\mu(\dot{\delta\alpha})$ ,  $\mu(V_0)$ .

С учетом заданных нечетких множеств база правил эвристического алгоритма управления оператором скоростью  $V_0(t)$  крана при  $V_T(t) = 0$  (т.О<sub>4</sub>, рис.4.2) имеет вид:

R<sub>1</sub>: если  $\delta\alpha = \text{NS}$  и  $\dot{\delta\alpha} = \text{NS}$  и  $\delta V_T = \text{ZR}$ , тогда  $V_0 = \text{ZR}$

или

R<sub>2</sub>: если  $\delta\alpha = \text{NS}$  и  $\dot{\delta\alpha} = \text{ZR}$  и  $\delta V_T = \text{ZR}$ , тогда  $V_0 = \text{NS}$

или

R<sub>3</sub>: если  $\delta\alpha = \text{NS}$  и  $\dot{\delta\alpha} = \text{PS}$  и  $\delta V_T = \text{ZR}$ , тогда  $V_0 = \text{NS}$

или

$\{R_i\}_{i=1}^7$        $R_4$ : если  $\delta\alpha=ZR$  и  $\delta\dot{\alpha}=NS$  и  $\delta V_T=ZR$ , тогда  
 $V_0=PS$

$R_5$ : если  $\delta\alpha=ZR$  и  $\delta\dot{\alpha}=ZR$  и  $\delta V_T=ZR$ , тогда  
 $V_0=ZR$

или

$R_6$ : если  $\delta\alpha=ZR$  и  $\delta\dot{\alpha}=PS$  и  $\delta V_T=ZR$ , тогда  
 $V_0=NS$

или

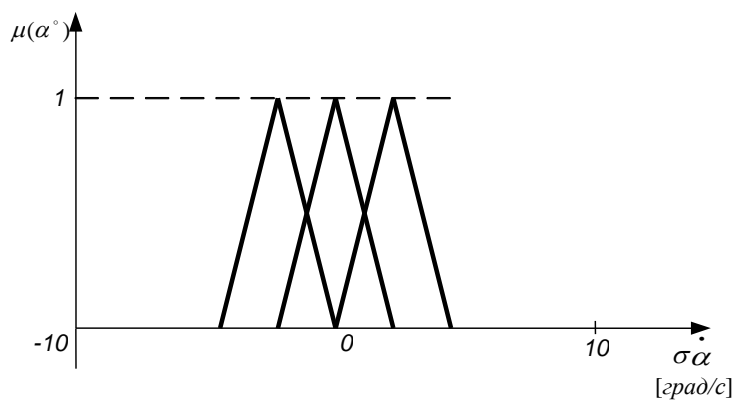
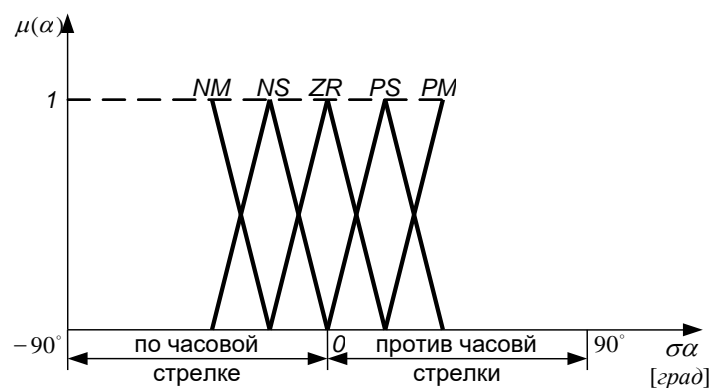
$R_7$ : если  $\delta\alpha=PS$  и  $\delta\dot{\alpha}=NS$  и  $\delta V_T=ZR$ , тогда  
 $V_0=PS$ .

Аналогичные базы правил могут быть записаны для т.т.  $O_1$ - $O_3$  изменения скоростных режимов крана (рис.4.2). После их объединения получим формализованное представление эвристического алгоритма, с помощью которого оператор управляет скоростью перемещения крана для предотвращения опасного раскачивания груза. Реализация этого алгоритма в виде нечеткого контроллера в прямом контуре управления позволяют исключить оператора крана и передать его функции нечеткой системе регулирования.

Приведенный пример показывает преимущество нечеткой системы регулирования нелинейным объектом по сравнению с традиционной системой регулирования простотой своей технической реализации. Блок-схема нечеткой системы регулирования изображена на рис.4.5. Подобные нечеткие системы регулирования могут быть рассмотрены для подъемно-транспортных механизмов загрузки ракет в подводные лодки, шахты, на пусковые платформы и т.д. с учетом воздействия неконтролируемых факторов типа: ветровые нагрузки, которые



воздействуют на груз; волнения поверхности воды, которые перемещают место расположения посадки ракеты и т.д. Во всех этих случаях действия опытного оператора могут быть формализованы и далее реализованы в виде нечеткой системы регулирования.



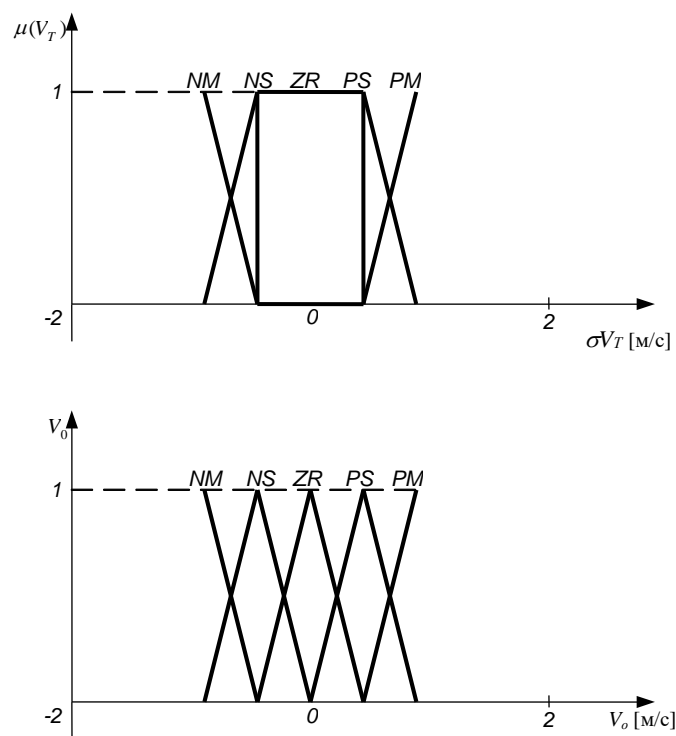


Рис.4.4. Функции принадлежности нечетких множеств.

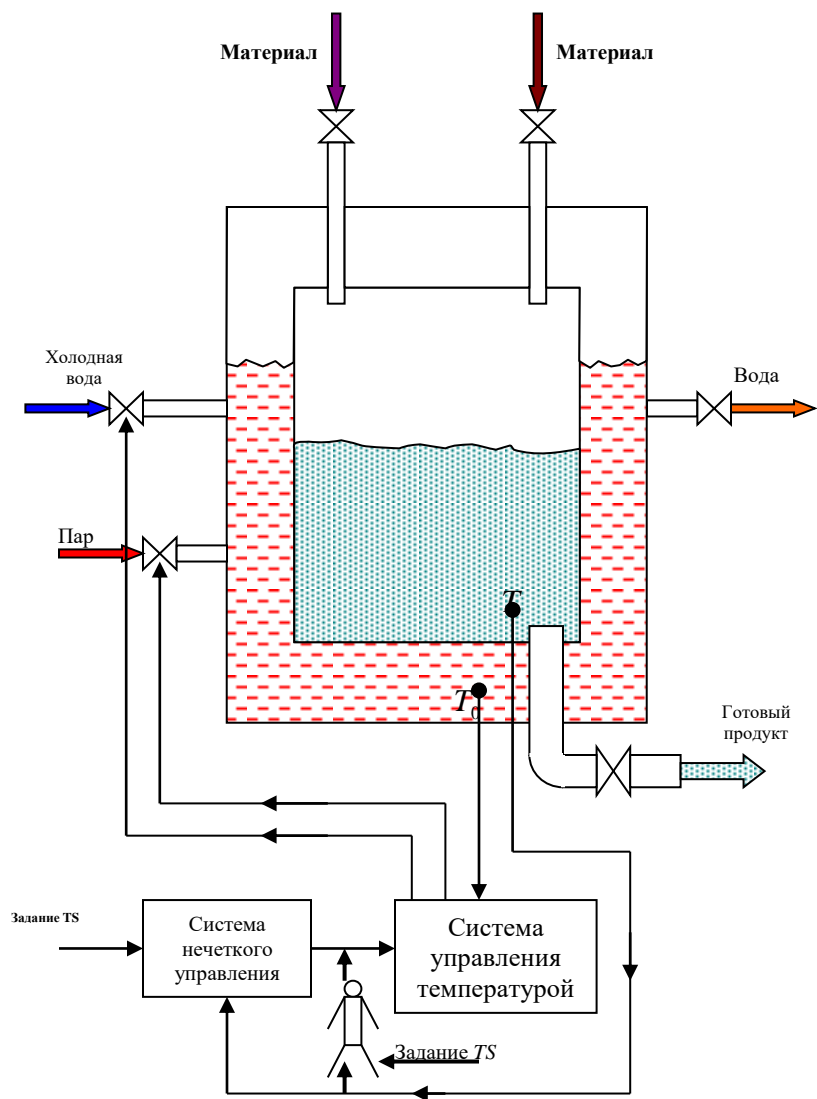
#### **4.2. НЕЧЕТКОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОЙ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА [5].**

Нечеткое управление применяется для поддержания температуры внутри «рубашки» химического реактора, сделанного по принципу термоса (рис.4.6). Химические реакторы такого типа используются в медицине, химии, в производстве косметики и т.д., когда необходимо обеспечить плавность изменения температуры во времени и одновременно равномерность ее изменения внутри реактора.

Температура внутри реактора управляется путем изменения температуры рабочего тела внутри «рубашки» реактора. При управлении по классической схеме обычно используется ПИД-регулятор. Однако, использование нечеткого управления может повысить точность регулирования, обеспечивая таким способом выход более качественной продукции.

Основная задача управления состоит в поддержании заданной температуры внутри реактора, которая может изменяться под воздействием неконтролируемых возмущений. Например, в результате добавления материала 1 в реактор может происходить химическая реакция с выделением или поглощением тепла, поэтому необходимо соответственно либо понижать, либо повышать температуру внутри «рубашки», быстро восстанавливая заданную температуру внутри реактора. Метод управления с использованием ПИД-регулятора не может обеспечить автоматическое решение этой задачи из-за воздействия неконтролируемых возмущений. Как правило, при таком способе управления, оператор визуально контролирует температуру и затем изменяет задание ПИД-регулятора по режимным картам. Однако использование в системе управления блока обработки нечетких высказываний позволяет полностью

автоматизировать процедуру текущей настройки ПИД-регулятора. Проблемы управления, результат и эффективность нечеткого управления представлены в таблице 4.2.



**Рис. 4.6. Система управления температурой химического реактора (жирные стрелки – классический контур управления температурой).**

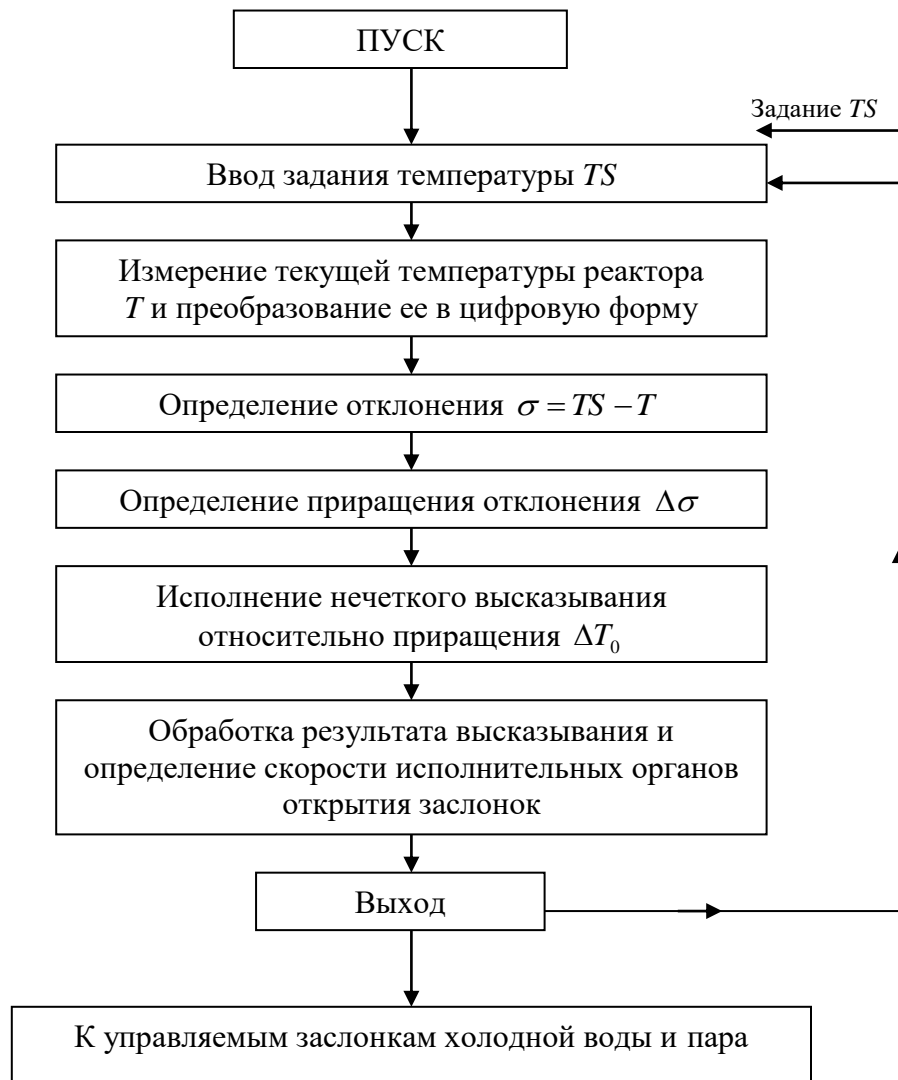
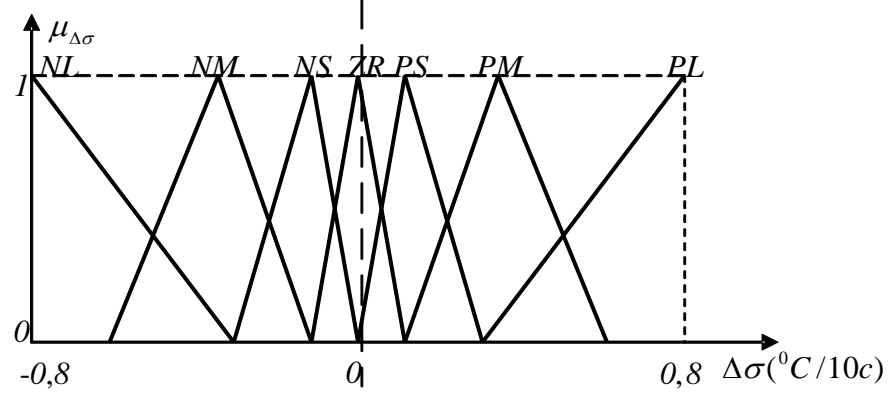
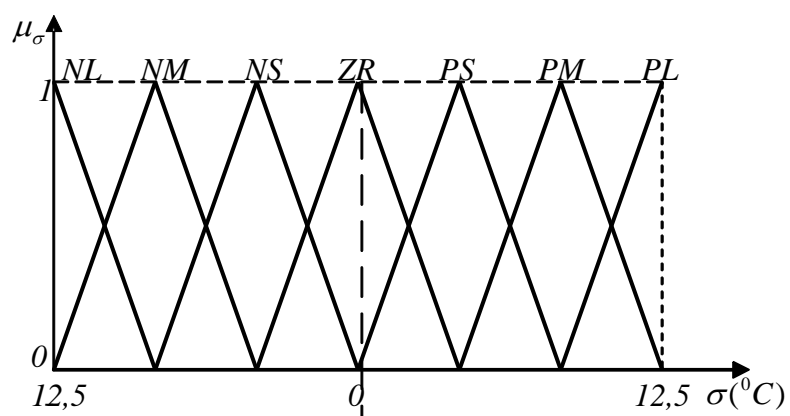


Рис.4.7. Блок-схема системы нечеткого управления температурой химического реактора.



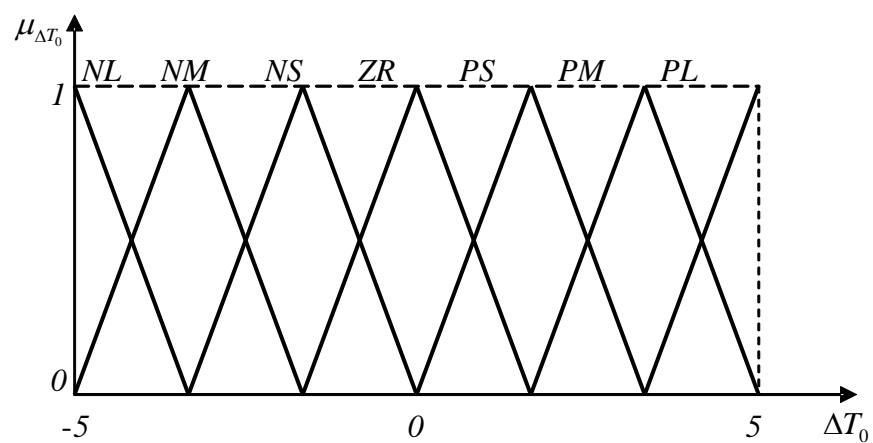


Рис.4.8. Функции принадлежности для входных и выходных переменных системы нечеткого управления температурой химического реактора.



**Таблица 4.2.**

<b>Постановка задачи Управления</b>	<b>Результат при улучшении управления</b>	<b>Эффективность нечеткого управления</b>
Из-за неконтролируемых возмущений возможно появление выбросов температуры, которую необходимо стабилизировать. Настройка для изменения температуры должна быть сделана автоматически, без участия оператора.	Исключаются выбросы температуры и обеспечивается точное ее поддержание. Снижение требований к квалификации оператора.	Качественное отслеживание заданных температурных графиков.  Упрощение процесса управления с помощью оператора.
Не существует формализованных правил настройки регулятора к требуемой температуре.	Использование для формализации нечетких высказываний.	

Блок-схема нечеткого управления температурой реактора показана на рис.4.7. Имеется задание на температуру внутри химического реактора  $TS$ . С помощью датчика измеряется  $T$ -текущая температура реактора и преобразуется в цифровое значение. Вычисляется отклонение  $\sigma = TS - T$  и производная  $\dot{\sigma}$  (приращение  $\Delta\sigma$ ).

В зависимости от величин  $\sigma$  и  $\dot{\sigma}$  корректируется температура  $T_0$  - «рубашки» реактора путем воздействия на заслонки холодной воды и пара.

Функции принадлежности для переменных  $\sigma, \Delta\sigma$  и  $\Delta T_0$  показаны на рис.4.8. Правило нечеткого высказывания имеет два условия  $\sigma$  и  $\Delta\sigma$ , соединенных логическим «и» и одно заключение  $\Delta T_0$ , т.е. система нечеткого управления имеет два входа и один выход. Каждая функция принадлежности для входных переменных имеет 7 меток:  $\{NL, NM, \dots, PL\}$ .

Для 2-х условий и 7-ми меток для каждой входной переменной имеется  $7^2=49$  возможных комбинаций, что соответствует 49 правилам. Эти правила изображены ниже в виде матрицы:

		отклонение температуры $\sigma$						
		NL	NM	NS	ZR	PS	PM	PL
приращение отклонения температуры $\Delta\sigma$	NL	ZR	PS	PM	PL	PL	PL	PL
	NM	NS	ZR	PS	PM	PL	PL	PL
	NS	NM	NS	ZR	PS	PM	PL	PL
	ZR	NL	NM	NS	ZR	PS	PM	PL
	PS	NL	NL	NM	NS	ZR	PS	PM
	PM	NL	NL	NL	NM	NS	ZR	PS
	PL	NL	NL	NL	NL	NM	NS	ZR

В этой матрице элемент с координатами ( $\sigma = ZR; \Delta\sigma = NL$ ) является пустым, т.к. условие правила:

*if*  $\sigma = ZR$  &  $\Delta\sigma = NS$  *then* ....

соответствует наличию шума на выходе объекта управления. Для простых систем управления типа «2 входа и 1 выход», элементы матрицы задаются с автономного дисплея, входящего в состав технических средств.

Программа нечеткого контроллера может быть написана в терминах «*if – then*» с использованием матрицы. Например, одно из правил:

*if*  $\sigma = NM$  &  $\Delta\sigma = NS$  *then*  $\Delta T_0 = NS$

#### **4.3. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИЧЕСКАЯ НАСТРОЙКА СКОРОСТИ ДВУХ ТРАНСПОРТЕРОВ[5].**

В этом примере нечеткое управление обеспечивает синхронное управление двумя транспортными конвейерами в ходе упаковки изделий при их нерегулярном потоке (рис.4.9).

Объект управления состоит из двух транспортеров *A* и *B*. Транспортер *A* перемещает изделия, а транспортер *B* – упаковочные коробки для изделий. Потоки изделий и коробок не являются регулярными по времени. Оба транспортера имеют фотодатчики *PH1-PH4*, которые обнаруживают наличие изделий и коробок. Задача управления состоит в синхронизации транспортера *B*, обеспечивающего встречу изделия и его упаковочной коробки. Подобная задача имеет место и при сборке автомобилей при помощи роботов, автоматической сборке электронных плат и т.д.

Блок-схема алгоритма системы нечеткого управления представлена на рис.4.10. С помощью фотодатчиков *PH1* и *PH3* обнаруживаются предметы на транспортерах *A* и *B* конвейера и регистрируется начало отсчета времени.

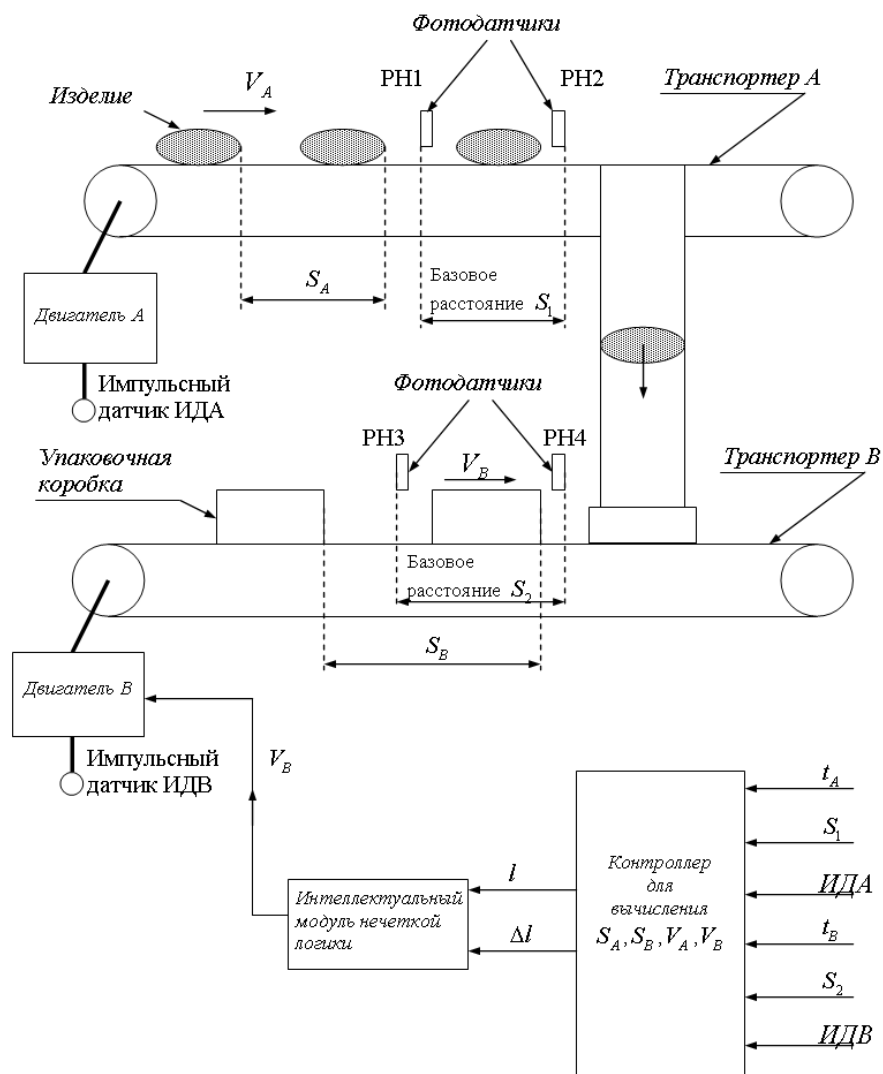


Рис.4.9. Функциональная схема конвейера с двумя транспортерами и система нечеткого управления ими.



Рис.4.10. Блок-схема системы нечеткого управления скоростью транспортера конвейера.

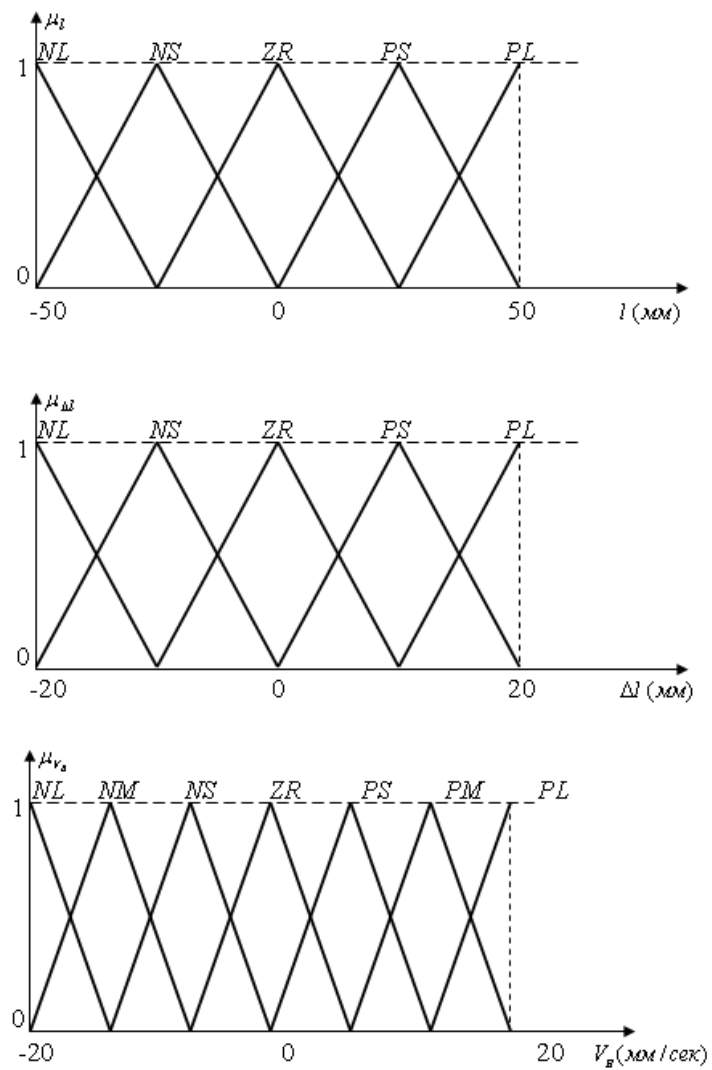


Рис.4.11. Функции принадлежности для входных и выходных переменных системы нечеткого управления настройкой транспортеров конвейера.

При прохождении этими предметами базовых расстояний определяются текущие скорости  $V_A$  и  $V_B$  транспортеров. С помощью импульсных датчиков ИДА и ИДВ, установленных на двигателях  $A$  и  $B$ , определяются расстояния между предметами  $S_A$  и  $S_B$ . По этим величинам находится отклонение  $\sigma = S_A - S_B$ , определяется разность  $l$  в перемещениях транспортеров  $A$  и  $B$ , и вычисляется ее первая производная  $\dot{l}$ .

По величинам  $l$  и  $\dot{l}$ , являющимся условиями нечеткого высказывания, происходит его исполнение «if / then» и задается необходимая скорость  $V_B$  транспортера  $B$ . Таким образом, система нечеткого управления имеет два входа и один выход. Функции принадлежности изображены на рис.4.11. Для входных переменных используется пять меток:  $\{NL, NS, ..., PL\}$ , а для выходной переменной семь меток:  $\{NL, NM, ..., PL\}$ .

Программа для нечеткого контроллера задается в виде матрицы:

		Разность в перемещениях $l$				
		$NL$	$NS$	$ZR$	$PS$	$PL$
Первая производная $\dot{l}$	$PL$	$NL$	$NM$	$NS$	$PS$	$PM$
	$PS$	$NL$	$NM$	$NS$	$PS$	$PM$
	$ZR$	$NM$	$NS$	$ZR$	$PS$	$PM$
	$NS$	$NM$	$NS$	$PS$	$PM$	$PL$
	$NL$	$NM$	$NS$	$PS$	$PM$	$PL$

Одно из правил, соответствующее элементу в 4-й строке и 2-м столбце матрицы, приведено ниже:

$$\text{if } l = NS \quad \& \quad \dot{l} = NS \quad \text{then } V_B = NS.$$

#### 4.4. ГИБРИДНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ [5].

Рассмотрим традиционную систему регулирования для асинхронного электропривода с частотным преобразователем и далее модифицируем ее с использованием нечетких высказываний. Как будет показано далее, это дает улучшение динамических характеристик (пуск, торможение) и точность поддержания задания асинхронного двигателя.



Рис.4.5. Нечеткая система регулирования в прямом контуре управления.

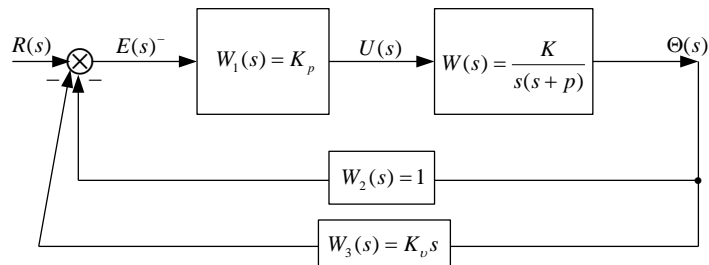


Рис.4.12. Структурная схема системы регулирования асинхронного электропривода с ПД-регулятором в цепи обратной



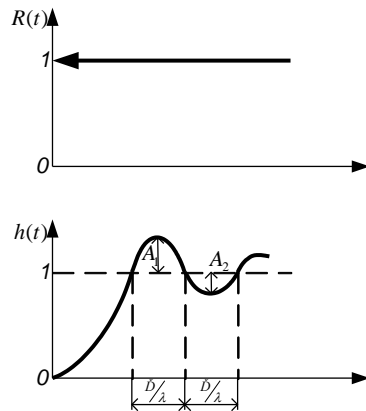


Рис.4.13. График переходной функции  $h(t)$ .

Рассмотрим структурную схему 1 классической системы с ПД регулятором в цепи обратной связи и проанализируем ее эффективность (рис.4.12). На схеме приняты следующие обозначения:

$$W(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(s + p)} \text{ - передаточная функция электропривода;}$$

где  $\Theta(s)$  - угол поворота вала двигателя (выход объекта);  $U(s)$  - управляющий сигнал (вход объекта);  $p$  - динамический параметр объекта;  $s$  - переменная преобразования Лапласа;  $k$  - коэффициент усиления двигателя;  $W_1(s) = k_p$  - передаточная функция «П» регулятора в прямой цепи регулирования;  $W_2(s)$  - передаточная функция измерительного устройства;  $W_3(s) = k_v \cdot s$  - передаточная функция «ПД» регулятора в цепи обратной связи;  $R(s)$  - задание;  $E(s)$  - ошибка в отработке задания.

Передаточная функция замкнутой системы равна:

$$W_{\text{зв}}(s) = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{k}{s(s+p)} = \frac{\frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W \cdot W_2}}{1 + \frac{W_1 \cdot W}{1 + W_1 \cdot W \cdot W_2} \cdot W_3} =$$

$$= \frac{k \cdot k_p}{s^2 + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)s + k \cdot k_p},$$

откуда имеем

$$\ddot{\Theta}(t) + (p + k \cdot k_v \cdot k_p) \dot{\Theta}(t) + k \cdot k_p \cdot \Theta(t) = k \cdot k_p \cdot R(t) \quad (4.1)$$

$$\Theta(t=0) = 0, \quad \dot{\Theta}(t=0) = 0.$$

Переходная функция  $h(t)$  изображена на рис. 4.13. Из (4.1) получим коэффициент затухания колебаний:

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2}$$

где  $\lambda$  - частота затухающих колебаний, откуда  $\gamma = \gamma(k_p, k_v)$ .

Полученные результаты показывают, что с увеличением коэффициентов усиления  $k_p, k_v$  увеличивается  $\gamma$ . Это приводит к появлению нежелательных выбросов на выходе объектов управления. Кроме того, установившаяся ошибка в отработке задания не зависит от  $k_p, k_v$ :  $E(t=\infty) = R(t=\infty) - h(t=\infty) = 0$ .

Замечание. Обычно передаточные функции  $W_1, W_3$  реализуют в цифровом виде на контроллере, поэтому часто необходимо иметь цифровой аналог:

$$W_1(s) = k_p = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{U(s)}{R(s) - W_3 \cdot \Theta(s) - W_2 \cdot \Theta(s)}$$

$$= \frac{U(s)}{R(s) - (1 + k_v \cdot s) \cdot \Theta(s)},$$

откуда

$$U(s) = k_p \cdot E(s) - k_p \cdot k_v s \cdot \Theta(s).$$

После применения обратного преобразования Лапласа получим:

$$u(t) = k_p \cdot E(t) - k_p k_v \cdot \dot{\Theta}(t).$$

Положим  $\dot{\Theta}(t) = \frac{d\Theta}{dt} \approx \frac{\Delta\Theta}{\tau}$ , где  $\tau$  - шаг дискретизации по

времени, тогда:  $U = k_p E - k_p k_v \frac{\Delta\Theta}{\tau}$ .

Это уравнение используется для представления ПД регулятора в виде программы контроллера.

Помимо структуры рис.4.12. для асинхронного электропривода используется ПД регулятор в форме последовательного корректирующего звена (структура 2, рис.4.14).

Из схемы следует:

$$W_{\zeta\ddot{e}}(s) = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{W \cdot W_1}{1 + W \cdot W_1 \cdot 1} = \frac{k(k_p + k_v \cdot s)}{s^2 + (p + k \cdot k_v)s + k \cdot k_p},$$

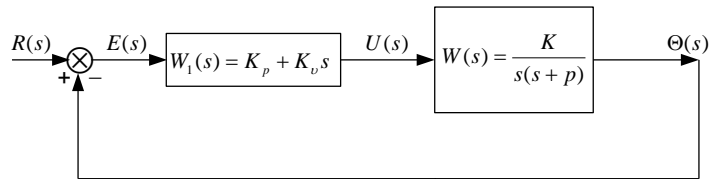


Рис.4.14. Структурная схема системы регулирования асинхронного электропривода с ПД-регулятором в прямом контуре.

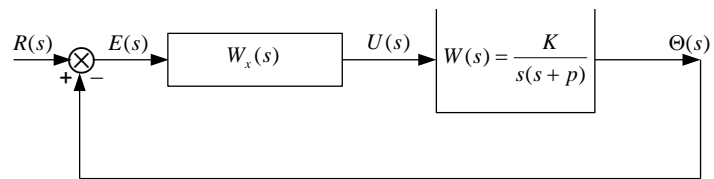


Рис.4.15. Структурная схема системы регулирования асинхронного электропривода при определении  $W_x(s)$ .

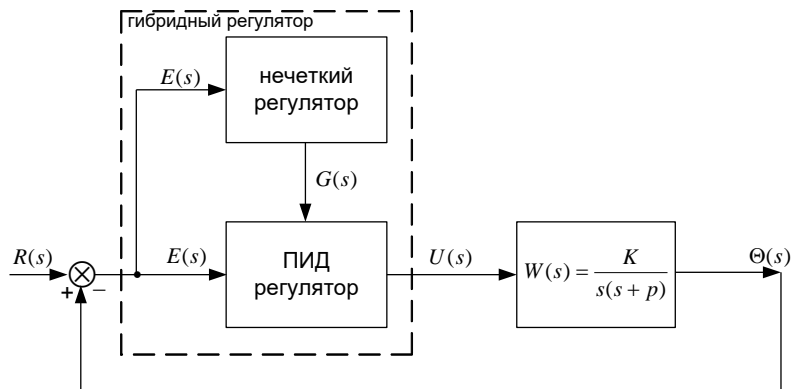


Рис.4.16. Структурная схема гибридной системы регулирования, использующей нечеткие высказывания.

откуда имеем

$$\ddot{\Theta}(t) + (p + k \cdot k_v) \dot{\Theta}(t) + k \cdot k_p \cdot \Theta(t) = k \cdot k_p \cdot R(t) + k \cdot k_v \dot{R}(t) \quad (4.2)$$

$$\Theta(t=0) = 0, \quad \dot{\Theta}(t=0) = 0, \quad R(t=0) = 0$$

Сравнение (4.1) с (4.2) показывает, что при реализации структур рис.4.12. и структуры рис.4.14. будем иметь различные типы дифференциальных уравнений при описании замкнутой системы. Эти структуры имеют один общий недостаток: из-за отсутствия знаменателей в передаточных функциях регуляторов происходит усиление высокочастотных колебаний, которые поступают на вход объекта управления, и это может вызвать нежелательные последствия (перегрев, пробой изоляции и т.д.).

Для решения проблемы подавления высокочастотных колебаний рассматривается структура 3 (рис.4.15), в которой неизвестная передаточная функция регулятора выбирается из условия:

$$W_{\text{зам.3}}(s) = W_{\text{зам.1}}(s), \quad (4.3)$$

где  $W_{\text{зам.3}}(s)$ - передаточная функция замкнутой системы структуры 3, либо из условия:

$$W_{\text{зам.3}}(s) = W_{\text{зам.2}}(s).$$

Найдем  $W_x(s)$  из условия (4.3)

$$W_{\text{кр}3}(s) = \frac{W \cdot W_x}{1 + W \cdot W_x \cdot 1} = \frac{k \cdot W_x}{s^2 + ps + k \cdot W_x} =$$

$$= \frac{k k_p}{s^2 + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)s + k \cdot k_p} = W_{\text{кр}1},$$

откуда имеем:

$$W_x(s) = \frac{k_p(s+p)}{s+(p+k \cdot k_v)} = p(k_p \cdot s) \frac{k_p}{s+(p+k \cdot k_v \cdot k_p)}$$

Таким образом  $W_x(s)$  представляет собой ПИД регулятор, который фильтрует высокочастотные колебания. Получим цифровой аналог ПИД-регулятора структуры 3 (рис.4.15). Из определения передаточной функции  $W_x(s)$  имеем:

$$W_x(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_p(s+p)}{s+(p+k \cdot k_v \cdot k_p)},$$

откуда:  $k_p(s+p) \cdot E(s) = [s + (p + k \cdot k_v \cdot k_p)] \cdot U(s)$ .

В пространстве оригиналов этому уравнению соответствует дифференциальное уравнение:

$$k_p \cdot \dot{E}(t) + k_p \cdot p \cdot E(t) = \dot{u}(t) + (p + k \cdot k_v \cdot k_p) \cdot u(t).$$

Аппроксимируем производные:

$$\dot{E}(t) \approx \frac{\Delta E}{\tau}, \quad \dot{u}(t) \approx \frac{\Delta u}{\tau},$$

где  $\Delta E = E(t) - E(t-\tau)$ ,  $\Delta u = u(t) - u(t-\tau)$ , тогда получим:

$$u(t) = \frac{u(t-\tau) + k_p \cdot \Delta E + k_p \cdot p \cdot \tau \cdot E(t)}{1 + (p + k \cdot k_v \cdot k_p) \cdot \tau}$$

Это уравнение описывает ПИД регулятор в цифровой форме.

Структура 3 (рис.4.15) решает проблемы фильтрации высокочастотных колебаний, однако, при задании  $R(t) \neq 1(t)$  эта структура не обеспечивает сверхбыстрой его обработки. В этой связи структура 3 модифицируется в структуру 4 (рис.4.16), которая в своем составе имеет дополнительный блок, использующий нечеткие высказывания относительно

зависимости  $G(E)$  (рис.4.17). Функции принадлежности  $\mu(E)$ ,  $\mu(G)$  изображены на рис. 4.18.

Динамические свойства системы с ПД регулятором улучшаются при использовании гибридного регулятора на базе нечетких высказываний. Для этого в качестве входной обратной связи обычного ПИД регулятора используется нечеткий регулятор, который настраивает коэффициент усиления  $G$  в зависимости от величины ошибки  $E(t)$ . При малой величине  $E(t)$  в гибридном регуляторе используется величина  $G$  принятая для обычного ПИД регулятора, а при больших величинах  $E(t)$  скорость коэффициента усиления  $G$  уменьшается. Сравнение обычного ПИД регулятора с гибридным в системе управления асинхронным электроприводом представлено на рис.4.19. Из него видно, что при управлении частотным преобразователем интеллектуальная управляющая стратегия на базе нечетких высказываний обладает преимуществом перед традиционным ПИД регулированием.

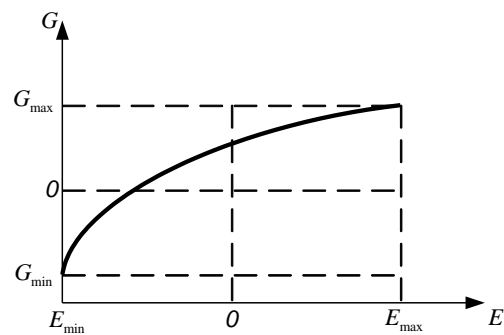


Рис.4.17. Зависимость «вход-выход» нечеткого регулятора.

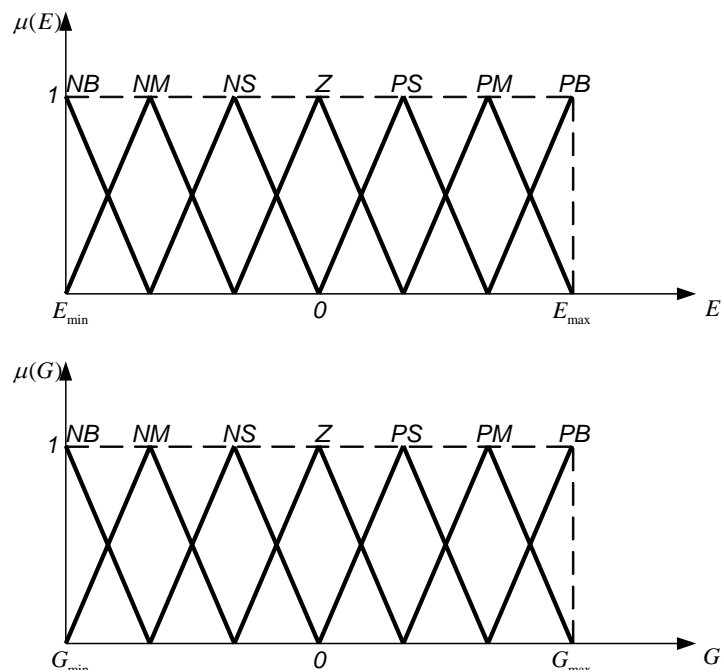


Рис.4.18. Функции принадлежности нечеткого регулятора.



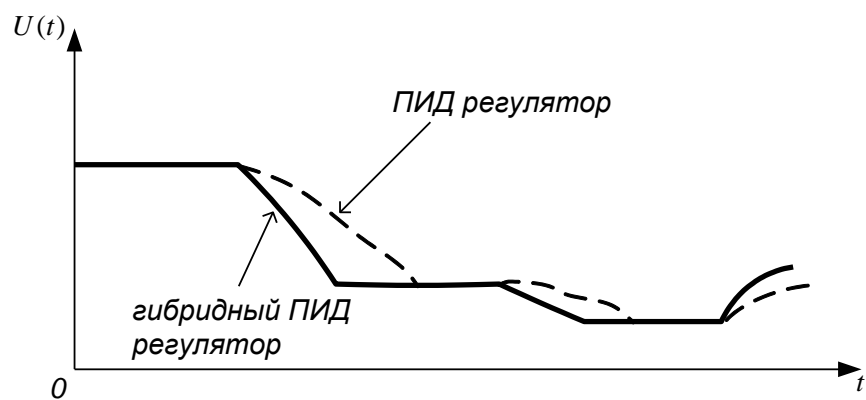


Рис.4.19 Изменение сигнала управления  $u(t)$  для ПИД и гибридного ПИД регулятора.