2020~2021 学年第 2 学期概率论与数理统计 B-*B* 卷解答与评分标准

一. 填空题（每题 3 分，计 15 分.）

1. $A\cup B\cup C$；　2. 0.72；　3. $\dfrac{1}{2}$；　4. 0.4；　5.不独立.

二．单项选择题（每题 3 分，计 15 分. ）

6. C；　7. A；　8. B；　9. D；　10. C.

三. 解答题(每题 12 分，共 70 分.)

11. 解:（1）设 A={被调查学生是努力学习的}，则 $\overline{A}$={被调查学生是不努力学习的}.由题意知 P（A）=0.8，P（$\overline{A}$）=0.2，又设 B={被调查学生考试及格}.由题意知 P（$B|A$）=0.9，P（$\overline{B}\,|\,\overline{A}$）=0.9，故由全概率公式知

$$P(B)=P(A)P(B\,|A)+P(A)P(B\,|\overline{A})=0.8\times0.9+0.2\times0.1=0.74;$$ （6 分）

（2）由贝叶斯公式知

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B\,|\overline{A})}{P(A)P(B\,|A)+P(A)P(B\,|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.2\times0.1}{0.8\times0.9+0.2\times0.1}=\frac{1}{37}=0.02702$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 2.702% （12 分）

12. **解** (1)由密度函数的性质可得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=A\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=A\arctan x\,|_0^{\infty}=A\cdot\frac{\pi}{2}\text{，得 }A=\frac{2}{\pi}$$ （4 分）

记随机变量 Y 的分布函数分别为 $F_Y(y)$，则 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\ln X\le y\}=P\left\{X\le e^y\right\}=\frac{2}{\pi}\int_0^{e^y}\frac{dx}{1+x^2}\text{，}$$ （9 分）

将分布函数 $F_Y(y)$ 对 y 求导，得 Y 概率密度

$$f_Y(y)=F'(y)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+(e^y)^2}\cdot e^y=\frac{2}{\pi}\frac{e^y}{1+e^{2y}}(-\infty<y<+\infty)$$ （12 分）

13. 解：（1）随机变量 Y 的分布律

Y	1	1/2	1/3	1/4
P_k	0.1	0.2	0.4	0.3

（5 分）

(2) $$EY=1\times0.1+\frac{1}{2}\times0.2+\frac{1}{3}\times0.4+\frac{1}{4}\times0.3=\frac{49}{12}$$ **(10 分)**

14. 解：（1） $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^2(x+y)dy,0\le x\le 2\\ 0,\qquad \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(x+1),0\le x\le 2\\ 0,\qquad \text{其它}\end{cases}\text{，}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dx, 0\le y\le 2\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}(y+1), 0\le y\le 2\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{4}\int_0^2 x(x+1)dx=\frac{7}{6}, E(X^2)=\frac{1}{4}\int_0^2 x^2(x+1)dx=\frac{5}{3}, D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{11}{36}$$

同样地，$E(Y)=\frac{7}{6}, DY=\frac{11}{36}.$ （9 分）

(2) $E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}$ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=-\frac{1}{36}$.(12 分)

15. 解： （1） $E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0, E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$，

令 $2\sigma^2=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，故 σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ （6 分）

（2）似然函数

$$L\left(\sigma\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=\frac{1}{2^n}\frac{1}{\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

对数似然函数为

$$\ln L\left(\theta\right)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln L\left(\theta\right)}{d\theta}=\frac{n}{\sigma}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

解得 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$。 （12 分）

16.解：要检验假设：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5000 \quad vs \quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ **(3 分)**

拒绝域为： $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1), \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ **(9 分)**

$$\chi^2_{0.01}(25)=44.314, \chi^2_{0.99}(25)=11.524, n=26, s^2=9200, \sigma_0^2=5000$$

即有 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=46\ge 44.314$，拒绝 H_0，认为这批电池的寿命较以往有显著变化. （12 分）