

概率统计试卷

2004. 1

院系专业_____ 学号_____ 姓名_____ 得分_____

一、 选择题（每题 3 分, 共 15 分）

1. 设 A, B 是两个随机事件, 下列等式中一定成立的是 ()

- (A) $(A \cup B) - B = A$ (B) $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB)$
(C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) 若 $A \cup B = B$, 则 $P(A) \geq P(B)$

2. 设 A, B 是两个随机事件, $P(\overline{A}) = 0.2, P(B) = 0.7, P(A|B) = 0.8$, 则 ()

- (A) A, B 相互独立 (B) A, B 互斥
(C) $A \subset B$ (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, X 的方差为 σ^2 ,

则 $p = P\left(\left|\frac{1-x}{a}\right| > 1\right)$ 的一个估计式是 ()

- (A) $p \geq \frac{\sigma}{a}$ (B) $p \leq a\sigma$ (C) $p \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ (D) $p \leq a^2\sigma^2$

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的样本, 且统计量

$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 则常数 σ 等于 ()

- (A) 1 (B) n (C) n^2 (D) \sqrt{n}

5. 设 X_1, X_2 是两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度分别为

$f_1(x), f_2(x)$, 分布函数分别是 $F_1(x), F_2(x)$, 则 ()

- (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;
(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;

(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数;

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

二、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 同时抛三枚硬币, 则至少两枚出现正面的概率为_____.

2. 设 A, B 为两个随机事件, $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.8$, 则 $P(AB) =$ _____.

3. 设随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$ 且 $P(0 < X < 2) = 0.5$, 则 $P(X \leq 2) =$ _____.

4. 设随机变量 X 的概率密度是 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in (0, 1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 X 的数学期望

$E(X) =$ _____.

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的样本, 则当 $c =$ _____

时, $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

三、设随机变量 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, Y 服从参数为 n, p 的二项分布, Z 服从参数为 $2p$ 的 Poisson 分布.

(1) 写出 X, Y, Z 的分布律.

(2) 如果已知 X 取值为 0 的概率是 Y 取值为 0 的概率的 9 倍, X 取值为 1 的概率是 Y 取值为 1 的概率的 3 倍, 求 $P(Z < 2)$. (10 分)

四、一台机器正常工作时产出的废品率是 0.0009, 发生故障时的废品率是 0.05, 而发生故障的概率是 0.01.

(1) 求该机器的产品的废品率;

(2) 现从该机器的一批产品中任意抽取一件, 若已知取得的是废品, 问这时机器是处于正常状态还是有故障的可能性更大? (10 分)

五、已知随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	2
P	1/8	2/8	3/8	2/8

(1) 求随机变量 $Y = 2X^2 - 1$ 的分布律, 写出其分布函数, 并计算 Y 的方差 $D(Y)$.

(2) 随机变量 Z 与 Y 同分布, Z 与 X 相互独立, 试写出二维随机变量 (X, Z) 的联合分布律, 并求 $P(Z \leq X)$. (10 分)

六、设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求 X, Y 的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.
- (2) 求 $E(X), D(X)$.
- (3) 求 $E(2X - 3Y + 1), E(XY), D(X + Y), D(1 - 2Y)$.
- (4) 据理判断 X 与 Y 是否相互独立, 是否相关. (20 分)

七、设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本，试求总体参数 a 的矩估计和最大似然估计.

(10 分)

八、某食用糖厂用自动装袋机装糖，规定：每袋重量为 500g，标准差不超过 10g.

每天定时检查. 某天抽取 9 袋，测得平均重量为 $\bar{X} = 499$ g，标准差为 $S = 16.03$ g.

假设袋装糖的重量 X 服从正态分布. 问这一天这台装袋机工作是否正常？

($\alpha = 0.05$) 参考数据: $t_{0.05/2}(8) = 2.306$, $\chi_{0.05}^2(8) = 15.5$ (10 分)