

# 中国剩余定理 (crt)

## 【题目描述】

「物不知数」问题：

有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？

即求满足以下条件的整数：除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2。该问题最早见于《孙子算经》中，并有该问题的具体解法。宋朝数学家秦九韶于 1247 年《数书九章》卷一、二《大衍类》对「物不知数」问题做出了完整系统的解答。上面具体问题的解答口诀由明朝数学家程大位在《算法统宗》中给出：

三人同行七十希，五树梅花廿一支，七子团圆正半月，除百零五便得知。

$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233 = 2 \times 105 + 23$ ，故答案为 23。

用现代数学的语言来说明的话，中国剩余定理 (Chinese Remainder Theorem, CRT) 可求解如下形式的一元线性同余方程组（其中  $n_1, n_2, \dots, n_k$  两两互质）：

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

上面的「物不知数」问题就是一元线性同余方程组的一个实例。使用中国剩余定理求解一元线性同余方程组的步骤如下：

1. 计算所有模数的积  $n$ ；

2. 对于第  $i$  个方程：

(a) 计算  $m_i = \frac{n}{n_i}$ ；

(b) 计算  $m_i$  在模  $n_i$  意义下的逆元  $m_i^{-1}$ ；

(c) 计算  $c_i = m_i m_i^{-1}$ （不要对  $n_i$  取模）。

3. 方程组在模  $n$  意义下的唯一解为： $x = \sum_{i=1}^k a_i c_i \pmod{n}$ 。

中国剩余定理的一个应用是，如果要计算  $a \bmod n$ ，其中  $n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$ ，那么可以先计算  $a_i = a \bmod p_i^{c_i}$ ，然后使用中国剩余定理求解出  $a \bmod n$  的值，这样就可以在  $n$  是一个比较大的合数的时候减小乘法运算的规模。

Alice 想要计算两个数字  $a, b$  的乘积对某个整数  $n$  取模的结果。在学习了中国剩余定理后，她决定采用上述的方法，先对  $n$  进行质因数分解，然后计算答案对每个质因数取

模的结果，最后使用中国剩余定理求解出答案。但是很悲惨的是，在计算过程中，对于其中一个质因数的运算过程出现了错误，导致最终的结果也是错误的。虽然经过重新计算她得出了正确的结果，但是她还是想知道她之前的计算过程中在哪个质因数上出错了。

**【输入格式】**

从文件 *crt.in* 中读入数据。输入的第一行包含一个整数  $T$ ，表示数据组数。

接下来  $T$  行，每行包含四个整数  $a, b, m, n$ ，分别表示要计算乘积的两个数，Alice 计算出的错误结果，以及模数。

**【输出格式】**

输出到文件 *crt.in* 中。输出到文件 *crt.out* 中。

输出  $T$  行，每行一个整数，表示 Alice 在哪个质因数上出错了。

**【样例 1 输入】**

```
1 1
2 2 3 1 10
```

**【样例 1 输出】**

```
1 2
```

**【样例 2 输入】**

```
1 1
2 2 3 1 10
```

**【样例 2 输出】**

```
1 2
```

**【样例 3】**

见选手目录下的 *crt/crt3.in* 与 *crt/crt3.ans*。

该组样例满足测试点 10 的限制。

**【数据范围】**

对于所有测试数据，保证： $1 \leq T \leq 1000$ ， $1 \leq a, b, m, n \leq 10^{18}$ 。

每个测试点的具体限制见下表：

测试点编号	$T \leq$	$a, b, m, n \leq$	特殊限制
1 ~ 2	1000	$10^6$	
3 ~ 4	1000	$10^{18}$	$n$ 的所有质因数都 $\leq 100$
5 ~ 6	1	$10^{18}$	
7 ~ 10	1000	$10^{18}$	