

CHAPITRE 1

Le système de numération binaire

1.1 INTRODUCTION

La plupart des éléments électroniques que comporte un ordinateur sont bistables par nature ; cela signifie qu'ils peuvent être dans l'un ou l'autre de deux états (tels que : en service/hors service, magnétisé positivement ou négativement). Ces deux états possibles sont généralement notés par 0 et 1, qui sont également les chiffres correspondant au système de numération binaire. De plus, un élément d'information est généralement rangé dans l'ordinateur sous la forme d'une séquence de ces chiffres binaires (que l'on appelle des *bits*, abréviation du terme anglo-saxon *binary digit*). De telles séquences de bits peuvent être considérées comme des nombres binaires et de nombreux ordinateurs utilisent le système de numération binaire non seulement pour représenter des grandeurs mais, aussi, pour exécuter des calculs sur la base du système binaire.

Le système binaire et le système décimal utilisés couramment sont des exemples de *systèmes de numération fondés sur la position des chiffres*. Tout système de ce genre ne nécessite qu'un nombre limité de symboles pour représenter n'importe quel grand nombre. En fonction de ces chiffres, l'exécution de calculs numériques est une opération relativement simple. Le nombre b de chiffres du système de numération considéré constitue sa *base*. Comme nous le verrons plus tard, tout nombre peut être représenté par une somme de puissances de la base b , où chaque puissance a comme poids l'un des chiffres du système.

Bien que ce chapitre soit consacré pour l'essentiel au système binaire et à son arithmétique, nous allons commencer par une révision rapide des propriétés du système décimal, ce qui nous permettra de simplifier l'exposé ultérieur des propriétés relatives au système binaire.

1.2. SYSTEME DECIMAL

Le système comprend dix chiffres représentés par les symboles :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

qui correspondent, respectivement, aux entiers de 0 à 9. Par conséquent la base du système décimal est $b = 10$.

Tout entier positif N , représenté dans le système décimal par une chaîne de chiffres décimaux, peut également s'exprimer sous la forme d'une somme de puissances de 10, où chacune des puissances a comme poids l'un des chiffres. Par exemple, $N = 8253$ peut être exprimé de la manière suivante :

$$8253 = 8 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 8 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$$

qui constitue ce que l'on appelle la *notation étendue* de l'entier. Remarquons que :

$$8253 = 8000 + 200 + 50 + 3$$

Ainsi, le chiffre 3 de l'entier représente trois unités, le chiffre 5, cinq dizaines, le chiffre 2, deux centaines et le chiffre 8, huit milliers. Les puissances de 10,

$$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000 \quad \dots$$

qui correspondent respectivement aux chiffres d'un entier décimal lus de droite à gauche, constituent les *valeurs de position* des chiffres.

Toute valeur fractionnaire représentée dans le système décimal par une chaîne de chiffres décimaux associés à une virgule peut également s'exprimer sous la forme étendue en utilisant les puissances négatives de 10. Plus précisément, les valeurs de position des chiffres de la valeur fractionnaire situés à droite de la virgule sont, respectivement :

$$10^{-1} = \frac{1}{10} \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad \dots$$

Par exemple, $M = 837.526$ a pour expression en notation étendue :

$$\begin{aligned} 837.526 &= 8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} \\ &= 800 + 30 + 7 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} \end{aligned}$$

On dit que cette fraction décimale présente trois *positions décimales*, nombre de chiffres qu'elle comprend à droite de la virgule.

L'arithmétique des fractions décimales n'introduit pas de difficultés majeures dans la mesure où l'on prête attention à la position des virgules décimales.

Addition*

Au cours de l'addition des fractions décimales, il est nécessaire d'aligner verticalement les virgules. Par exemple, la somme $34.215 + 513.48 + 2.1326$ s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 34.2150 \\ 513.4800 \\ + 2.1326 \\ \hline 549.8276 \end{array}$$

Remarquons que l'on introduit des 0 supplémentaires de manière à ce que tous les nombres présentent la même quantité de chiffres après la virgule.

Soustraction

De même que dans le cas de l'addition, il est nécessaire d'aligner les virgules verticalement. Ainsi les opérations $45.217 - 23.64$ et $123.45 - 75.168$ sont effectuées de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 45.217 \\ - 23.640 \\ \hline 21.577 \end{array} \quad \begin{array}{r} 123.450 \\ - 75.168 \\ \hline 48.282 \end{array}$$

Ici encore, on introduit des 0 supplémentaires afin que les nombres considérés présentent le même nombre de chiffres après la virgule.

* Dans le cours de cet ouvrage, nous avons conservé la notation anglo-saxonne où la virgule est remplacée par un point parce que l'écriture informatique des nombres utilise cette convention. Dans le texte, cependant, nous ferons référence à la virgule. (N. du T.)

Multiplication

Le nombre de chiffres après la virgule du produit est égal à la somme des nombres de chiffres après la virgule des facteurs. Par exemple, pour l'opération 2.35×43.162 :

$$\begin{array}{r} 43.162 \\ \times 2.35 \\ \hline 215810 \\ 129486 \\ 86324 \\ \hline 101.43070 \end{array}$$

Le produit comporte cinq chiffres après la virgule parce que 43.162 en possède 3 et 2.35, 2.

Division

Au cours de la division d'une fraction décimale par une autre, nous déplaçons la virgule du diviseur vers la droite de manière à rendre ce diviseur entier. Cette opération est compensée par un déplacement de la virgule du dividende vers la droite du même nombre de positions décimales. Par exemple, dans le cas de la division $387.167 \div 2.55$

$$\begin{array}{r} 151.83 \\ 2.55 \overline{)387.167} \\ \underline{255} \\ 1321 \\ \underline{1275} \\ 466 \\ \underline{255} \\ 2117 \\ \underline{2040} \\ 770 \\ \underline{765} \\ 5 \end{array}$$

Remarquons que nous avons déplacé la virgule de deux positions vers la droite pour 2.55, de manière à en faire 255. Puis nous avons déplacé la virgule dans 387.167 de deux positions vers la droite, ce qui en a fait 38716.7. Nous avons, ensuite, effectué la division. Nous pouvons ajouter autant de 0 terminaux que nous le souhaitons au dividende de manière à poursuivre la division aussi loin que nous le choisissons. Ici, nous en avons ajouté un et nous avons poursuivi l'opération jusqu'à obtenir deux chiffres après la virgule.

1.3 SYSTEME BINAIRE

Le système binaire est un système de numération fondé sur la position des chiffres dont la base $b = 2$. Ses deux chiffres, notés 0 et 1, sont appelés *bits*. Dans ces conditions, tout *nombre binaire* est une séquence de bits qui peut comporter une *virgule binaire*. Les nombres binaires qui ne comportent pas de partie fractionnaire (c'est-à-dire qui ne présentent pas de virgule) sont appelés *entiers binaires*.

Les valeurs attachées aux positions des chiffres dans le système binaire sont les puissances de la base $b = 2$, exactement comme dans le cas du système décimal où ces valeurs sont représentées par des puissances de 10. Plus précisément, les valeurs de positions de la partie entière d'un nombre binaire sont les puissances non négatives de 2 :

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \dots$$

et celles de la partie fractionnaire, les puissances négatives de 2 :

$$2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad \dots$$

Le tableau 1-1 donne les valeurs de quelques puissances de 2.

Conversion binaire-décimal

Tout nombre binaire peut être représenté en notation étendue comme la somme produits entre chaque chiffre binaire et sa valeur de position. Par exemple :

$$110101 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

$$101.1101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$$

Dans la mesure où chaque puissance de deux a comme poids 0 ou 1, le nombre binaire représente simplement la somme des valeurs de position où apparaît le bit 1. Cette somme nous donne immédiatement l'équivalent décimal du nombre binaire (cf. le problème 1.12 pour une méthode de conversion, valable uniquement pour les entiers binaires).

Le tableau 1-2 donne une liste des représentations binaires des entiers décimaux de 0 à 25, où les valeurs de positions des bits sont données en tête. On utilise, parfois, l'indice pour indiquer qu'il s'agit d'un nombre binaire. On peut, ainsi, écrire 101011_2 si l'on n'est pas assuré que le contexte n'indique pas clairement que 101011 est un nombre binaire plutôt que décimal. De plus, pour une lecture plus aisée, on sépare parfois un nombre binaire en groupes de 4 bits à gauche et à droite de la virgule binaire :

10110100.011010 peut être écrit 1011 0100.0110 10

Tableau 1-1

Puissances de deux	Valeurs décimales
2^{10}	1024
2^9	512
2^8	256
2^7	128
2^6	64
2^5	32
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
2^0	1
2^{-1}	$1/2 = 0.5$
2^{-2}	$1/4 = 0.25$
2^{-3}	$1/8 = 0.125$
2^{-4}	$1/16 = 0.0625$
2^{-5}	$1/32 = 0.03125$
2^{-6}	$1/64 = 0.015625$

Tableau 1-2

Nombre décimal	Nombre binaire				
	16	8	4	2	1
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1

EXEMPLE 1.1

- (a) Pour convertir 110101_2 en son équivalent décimal, écrire la valeur de position appropriée au-dessus de chaque bit, puis faire la somme des puissances de deux dont le poids est 1 :

Valeurs de position	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
Nombre binaire	1	1	0	1	0	1	
							1
							4
							16
							<u>32</u>
							53
							Equivalent décimal

- (b) Pour convertir 101.1101_2 , utiliser le tableau 1-1 pour les valeurs décimales des puissances négatives de 2 :

Valeurs de position	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	
Nombre binaire	1	0	1	1	1	0	1	
								0.0625
								0.25
								0.5
								1
								<u>4</u>
								5.8125
								Equivalent décimal

Conversion décimal-binaire

Nous trouverons l'équivalent binaire d'un nombre décimal N en traitant sa partie entière N_I et sa partie fractionnaire N_F , séparément. Nous allons illustrer l'opération dans le cas de $N = 109.781\ 25$.

EXEMPLE 1.2

- (a) Pour convertir $N_I = 109$ en son équivalent binaire, nous divisons N_I et chaque quotient successif par 2 en notant les restes :

Divisions	Quotients	Restes
$109 \div 2$	54	1
$54 \div 2$	27	0
$27 \div 2$	13	1
$13 \div 2$	6	1
$6 \div 2$	3	0
$3 \div 2$	1	1
$1 \div 2$	0	1

Le quotient nul indique la fin de l'opération. Dans la mesure où le diviseur est toujours 2, les restes ne peuvent être que 1 ou 0. La séquence des restes prise de bas en haut (cf. le sens de la flèche) conduit à l'équivalent binaire.

Donc, $N_I = 109 = 1101101_2$.

Pratiquement, on condense les divisions précédentes de la manière suivante :

	Restes
$2 \overline{)109}$	
$2 \overline{)54}$	1
$2 \overline{)27}$	0
$2 \overline{)13}$	1
$2 \overline{)6}$	1
$2 \overline{)3}$	0
1	1

Ici, on arrête quand le quotient, 1, est inférieur au diviseur 2, dans la mesure où ce dernier quotient sera le reste suivant et ultime. Là encore, la flèche indique la séquence des bits qui donne l'équivalent binaire (cf. problème 1.14 pour une autre méthode de conversion d'un entier décimal en son équivalent binaire).

- (b) Pour convertir $N_F = 0.781\ 25$, on multiplie N_F et chacune des parties fractionnaires successives par 2 en notant chaque fois la partie entière du produit :

Multiplications	Parties entières
$0.781\ 25 \times 2 = 1.562\ 50$	1
$0.5625 \times 2 = 1.1250$	1
$0.125 \times 2 = 0.250$	0
$0.25 \times 2 = 0.50$	0
$0.50 \times 2 = 1.00$	1

La partie fractionnaire nulle indique la fin des calculs. Remarquons que pour tout produit partiel, la partie ne peut être que 0 ou 1 dans la mesure où chaque fois nous doublons un nombre inférieur à 1 (décimal). La séquence des chiffres de la partie entière de haut en bas (cf. le sens de la flèche) donne l'équivalent binaire, soit $N_F = 0.781\ 25 = 0.11001_2$.

Dans la pratique, on opère comme ci-dessous :

0.781 25
<u>× 2</u>
1.562 50
<u>× 2</u>
1.125 00
<u>× 2</u>
0.250 00
<u>× 2</u>
0.500 00
<u>× 2</u>
1.000 00

Notons que chaque fois la partie entière est soulignée et ne figure pas dans la multiplication suivante. Ici encore, le sens de la flèche nous indique l'ordre dans lequel les chiffres des parties entières s'alignent pour donner la représentation binaire recherchée.

Nous avons successivement trouvé les équivalents des parties entière et fractionnaire du nombre décimal $N = 109.781\ 25$. L'équivalent binaire de ce nombre N est tout simplement représenté par la somme de ces deux équivalents :

$$N = N_I + N_F = 110\ 1101.1100\ 1$$

EXEMPLE 1.3 Soit $N = 13.6875$. Nous convertissons les parties entière et fractionnaire, respectivement $N_I = 13$ et $N_F = 0.6875$, comme ci-dessus :

Restes	Parties entières
$\begin{array}{r} 2 \overline{)13} \\ 2 \overline{)6} \\ 2 \overline{)3} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0.6875 \\ \times 2 \\ \hline 1.3750 \\ \times 2 \\ \hline 0.7500 \\ \times 2 \\ \hline 1.5000 \\ \times 2 \\ \hline 1.0000 \end{array}$

D'où : $N = 13.6875 = 1101.1011_2$.

Remarque : L'équivalent binaire d'une fraction décimale qui tombe juste ne tombe pas obligatoirement juste. Par exemple, dans le cas de $N = 0.6$:

Multiplications	Parties entières
$0.6 \times 2 = 1.2$	1
$0.2 \times 2 = 0.4$	0
$0.4 \times 2 = 0.8$	0
$0.8 \times 2 = 1.6$	1

Arrivé à ce point du calcul, nous multiplions de nouveau par 2. Dans ce cas, les quatre étapes précédentes vont se répéter et nous obtiendrons une répétition des quatre bits précédents, soit :

$$N = 0.6 = 0.1001\ 1001\ 1001 \dots_2$$

(Cf. problème 1.15. Le nombre de bits qui se répètent n'est pas toujours quatre, pas plus que la séquence de bits répétés ne commence toujours à la virgule ; tout dépend, bien sûr, du nombre N donné.)

1.4 ADDITION ET MULTIPLICATION BINAIRES

L'exécution de calculs numériques est la même, essentiellement, pour tous les systèmes de numérations fondés sur la position des chiffres. Dans ce paragraphe, nous étudierons l'addition et la multiplication des nombres binaires, soustraction et division étant étudiée dans le paragraphe 1.5.

Addition binaire

Nous allons d'abord revoir la familière addition décimale. L'addition de deux nombres décimaux s'effectue selon l'algorithme à trois étapes suivant :

ETAPE 1 : Ajouter les chiffres de la première colonne (la plus à droite).

ETAPE 2 : Noter les chiffres d'unité de la somme de cette colonne. Si cette somme excède 9, reporter en retenue le chiffre correspondant aux dizaines à la colonne suivante.

ETAPE 3 : S'il y a d'autres colonnes ou s'il y a une retenue de l'étape 2, additionner la colonne suivante et répéter l'étape 2. Autrement cesser l'opération.

(Dans la mesure où nous additionnons deux nombres décimaux seulement, aucune des sommes de colonnes, même s'il y a retenue, ne peut excéder 19 ; il en résulte que le nombre de dizaines ne peut excéder 1.)

EXEMPLE 1.4 Soit la somme décimale suivante :

Dans la pratique, les étapes 1 et 3 sont faites de tête et, dans ces conditions, l'étape 2 appliquée au même schéma donne :

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 87\ 434 \end{array}$$

La propriété fondamentale de cet algorithme est que toute paire de nombres, aussi grand que soit chacun d'entre eux, peut être additionnée dans la mesure où l'opérateur sait (i) additionner deux chiffres quelconques et (ii) comment opérer l'addition de deux chiffres quelconques et d'une retenue de 1. Les données nécessaires à l'addition sont généralement présentées sous forme d'une table d'addition des chiffres décimaux que nous mémorisons à l'âge le plus tendre.

Par chance, cet algorithme en trois étapes est également valide dans le cas de l'addition des nombres binaires dans la mesure où à l'étape 2, nous remplaçons *neuf* par *un* et les *dizaines* par des *deux*. Le tableau 1-3 représente la table d'addition des chiffres binaires 0 et 1 et les données nécessaires dans le tableau 1-4.

$$\begin{array}{r} 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline \end{array}$$

1^{er} facteur
2^e facteur

Nous appliquons l'algorithme précédent aux additions :

ETAPE 1. $3 + 1 = 4$.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r} 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 4 \end{array}$$

1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $7 + 6 = 13$.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 34 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $1 + 5 + 8 = 14$.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 434 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $1 + 4 + 2 = 7$.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 7\ 434 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $3 + 5 = 8$.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 87\ 434 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

Somme

ETAPE 3. Stop.

Tableau 1-3. Table d'addition binaire

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tableau 1-4. Lois de l'addition binaire

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 0$, avec une retenue de 1
$1 + 1 + 1 = 1$, avec retenue de 1

EXEMPLE 1.5 Soit à évaluer la somme binaire

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 101 \\ \hline \end{array}$$

1^{er} facteur
2^e facteur

au moyen de l'algorithme à trois étapes.

ETAPE 1. $1 + 1 = 0$, avec retenue de 1.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 111 \\
 + 101 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $1 + 1 = 0$, avec retenue de 1.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 111 \\
 + 101 \\
 \hline
 00
 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $1 + 1 + 1 = 1$, avec retenue de 1.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 111 \\
 + 101 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

ETAPE 3. $1 + 0 = 1$.

ETAPE 2.

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 111 \\
 + 101 \\
 \hline
 1100
 \end{array}$$

Retenues
1^{er} facteur
2^e facteur

Somme

ETAPE 3. Stop.

De nouveau, et dans la pratique, les étapes 1 et 3 sont effectuées de tête en utilisant le tableau 1-4. De plus, au cours de l'addition de la dernière colonne (la plus à gauche) il n'est pas nécessaire de porter la retenue dernière mais de l'écrire simplement sous le trait d'addition. Ainsi l'opération apparaîtra sous la forme :

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 111 \\
 + 101 \\
 \hline
 1100
 \end{array}$$

En fait, souvent la dernière retenue ne sera même pas écrite.

EXEMPLE 1.6

(a) Effectuer la somme binaire $110011101 + 10110111$. Il vient :

$$\begin{array}{r}
 1 \ 111111 \\
 110011101 \\
 + 10110111 \\
 \hline
 1001010100
 \end{array}$$

(b) Effectuer la somme $1001 + 1101 + 110 + 1011$. Nous additionnons les deux premiers, puis les autres, les uns après les autres jusqu'à obtenir la somme finale :

$$\begin{array}{rcl}
 1001 & 1^{\text{er}} \text{ nombre} \\
 + 1101 & 2^{\text{e}} \text{ nombre} \\
 \hline
 10110 & \text{Somme} \\
 + 110 & 3^{\text{e}} \text{ nombre} \\
 \hline
 11100 & \text{Somme} \\
 + 1011 & 4^{\text{e}} \text{ nombre} \\
 \hline
 100111 & \text{Somme finale}
 \end{array}$$