ENS Cachan | 2015-2016
Probabilités
L3

Feuille de TD N$^{\circ}$3

Exercice 1. On lance une pièce à plusieurs reprises jusqu'à obtenir face. Soit X le nombre de lancers requis.

1. Trouver l'entropie $H_2(X)$ en bits.
2. Trouver une séquence de questions binaires (oui ou non) de la forme "X est-il contenu dans l'ensemble S ?" qui permettrait de déterminer les valeurs de X. Comparer le nombre moyen de questions à $H_2(X)$.

Exercice 2. Soit l'épreuve aléatoire "Lancer deux dés non pipés", et les variables aléatoires suivantes :

— P_1 qui vaut 0 si le nombre tiré (dé 1) est pair, 1 s'il est impair.
— X_1 qui représente le nombre tiré (dé 1).
— X_{12} qui représente le couple de nombres tirés (dé 1, dé 2).
— Σ qui représente la somme des nombres tirés (dé 1+ dé 2).

Calculer

1. La quantité d'information associée aux évènements : $\{X_1 = 4\}$; $\{P_1 = 0\}$; $\{\Sigma = 6\}$; $\{X_{12} = (4, 2)\}$; $\{X_{12} = (4, 2) \mid \Sigma = 6\}$.
2. Les entropies de X_1, P_1, X_{12} et Σ.
3. L'information mutuelle $I(X_1, P_1)$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ dont la distribution jointe $p(x, y)$ est donnée par : $p(1, 1) = p(2, 2) = p(3, 3) = p(1, 3) = 0$, $p(1, 2) = p(2, 1) = p(2, 3) = 1/4$ et $p(3, 1) = p(3, 2) = 1/8$. Calculer $H(X)$, $H(Y)$, $H(X \mid Y)$ et $H(Y \mid X)$.

Exercice 4.

1. Calculer $H(X)$ où $X \sim B(p)$.
2. Calculer $\mathrm{Ent}(f)$ où f est la densité de $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
3. Calculer $\mathrm{Ent}(f)$ où f est la densité de $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 5. (Inégalité de Pinsker) Soient P et Q deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La distance en variation totale entre P et Q est définie par

$$TV(P, Q) := \sup_{A \in \mathcal{A}} \Big| P(A) - Q(A) \Big|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si $Q \ll P$ alors

$$TV(P, Q)^2 \leq \frac{1}{2} D(Q \mid\mid P).$$

1. Soit λ une mesure t.q $P \ll \lambda$ et $Q \ll \lambda$. On note $p(x) = dP/d\lambda$ et $q(x) = dQ/d\lambda$. Montrer que
$$TV(P,Q) = P(A^*) - Q(A^*) = \frac{1}{2}\int |p(x) - q(x)| d\lambda(x),$$
où $A^* = \{x : p(x) \geq q(x)\}$.
2. Soit Y t.q $Q = YP$, $B^* = \{Y \geq 1\}$ et $Z = \mathbf{1}_{\{B^*\}}$. Montrer que
$$TV(P,Q) = \mathbb{E}_Q Z - \mathbb{E}Z.$$
3. Montrer que $\Lambda_{Z-\mathbb{E}Z}(\alpha) \leq \frac{\alpha^2}{8}$. (Penser à Hoeffding).
4. Montrer que pour tout $\alpha > 0$
$$TV(P,Q) \leq \frac{\frac{\alpha^2}{8} + D(P \mid\mid Q)}{\alpha}$$
5. En déduire l'inégalité de Pinsker
$$TV(P,Q)^2 \leq \frac{1}{2} D(Q \mid\mid P).$$

Exercice 6. Soit P une mesure de probabilité sur $\mathcal{X}$. Montrer que la fonction qui à toute mesure de probabilité Q sur $\mathcal{X}$ associe $D(P \mid\mid Q)$ est convexe.

Exercice 7. (Inégalité de Han) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Montrer que
$$H(X_1, \ldots, X_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n).$$

Exercice 8. Let but de cet exercice est de montrer que si Z est une variable aléatoire positive alors $\mathrm{Var}(Z) \leq \mathrm{Ent}(Z^2)$.

1. Montrer que
$$\phi(p) = \frac{\mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z^p)^{\frac{2}{p}}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$$
est croissante sur $[1,2)$.
2. Montrer que $\lim_{p\to 2} \phi(p) = 2\mathrm{Ent}(Z^2)$.
3. En déduire que $\mathrm{Var}(Z) \leq \mathrm{Ent}(Z^2)$.

Exercice 9. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles compacts. On définit
$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$
Montrer que
$$\mathrm{Vol}(A + B) \geq \mathrm{Vol}(A) + \mathrm{Vol}(B).$$
Indication : Montrer qu'il suffit de considérer $A \subset (-\infty, 0]$ et $B \subset [0, \infty)$.

Exercice 10. (Inégalité de Prékopa-Leindler) Soit $\lambda \in (0,1)$, et $f, g, h = \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}.$$
Le but de cet exercice est de montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{\lambda}.$$

1. Justifier qu'il suffit de montrer l'inégalité quand $\sup f(x) = \sup g(x) = 1$.
2. On suppose $n = 1$. Justifier que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \mathrm{Vol}(\{x :\ f(x) \geq t\}).$$

3. Montrer que

$$(1-\lambda)\{x :\ f(x) \geq t\} + \lambda\{x :\ g(x) \geq t\} \subseteq \{x :\ h(x) \geq t\}.$$

4. En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx \geq (1-\lambda)\int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

5. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right)^{\lambda}.$$

6. On suppose que l'inégalité de Prékopa-Leindler est vérifiée pour toutes les dimensions inférieure ou égale à $n-1$. Montrer cette inégalité en dimension n.

Exercice 11. (Inégalité de Brunn-Minkowski) Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compacts et pour tout $\lambda \in (0,1)$, on a

$$\mathrm{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B)^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)\mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

1. En utilisant l'inégalité de Prékopa-Leindler, montrer que

$$\mathrm{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \mathrm{Vol}(A)^{1-\lambda} + \mathrm{Vol}(B)^{\lambda}.$$

2. Montrer que pour avoir (1), il suffit de montrer que pour tout $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compacts

$$\mathrm{Vol}(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \mathrm{Vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}(B)^{\frac{1}{n}}.$$

3. Justifier qu'on peut supposer $\mathrm{Vol}(A)$ et $\mathrm{Vol}(B)$ strictement positifs.
4. On pose $A' = \mathrm{Vol}(A)^{-\frac{1}{n}}A$ et $B' = \mathrm{Vol}(B)^{-\frac{1}{n}}B$. Montrer que pour tout $\lambda \in (0,1)$ on a

$$\mathrm{Vol}((1-\lambda)A' + \lambda B') \geq 1.$$

5. En utilisant l'inégalité ci-dessous avec un λ bien choisi, montrer l'inégalité de Brunn-Minkowski.