Analyse
Chapitre 2 : Dualité

Lucie Le Briquer

7 novembre 2018

Table des matières

1 Hilbert

Dans la suite on se placera dans H un $\mathbb{K}-$ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on utilisera la notation $\bar{z}$ qui dans $\mathbb{R}$ donne $\bar{z} = z$.

Définition 1 (produit scalaire)

Un produit scalaire est une application de $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ notée $(.,.)$ ou $\langle .,. \rangle$, telle que :

1. $(x,x) \geqslant 0$, $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x,y) + \mu(x,z)$ pour tout $x, y, z \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
3. $(x,y) = \overline{(y,x)} \Rightarrow (\lambda x + \mu y, z) = \bar{\lambda}(x,z) + \bar{\mu}(y,z)$

Théorème 1 (Cauchy-Schwarz)

Soit H un $\mathbb{K}-$ev quelconque, $(.,.)$ produit scalaire. Pour tout $x, y \in H$,

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$$

Preuve.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$. On a :

$$0 \leqslant \Big\| \|y\|x - \lambda\|x\|y \Big\|^2$$

où $\|z\| = \sqrt{(z,z)}$.

$$\begin{aligned}
\Big\| \|y\|x - \lambda\|x\|y \Big\|^2 &= (y\|x - \lambda\|x\|y, \|y\|x - \lambda\|x\|y) \\
&= \|y\|^2\|x\|^2 + \|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|\|y\|\{(x,\lambda y) + (\lambda y, x)\} \\
&= 2\|x\|\|y\|\big(\|x\|\|y\| - \Re(x,\lambda y)\big)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|x\|\|y\| \geqslant \Re(x, \lambda y)$$

Prenons $\lambda = \frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}$, de sorte que $(x,\lambda y) = |(x,y)|$. D'où le résultat.

Remarque. Cas d'égalité trivial. ∎

Corollaire 1

1. $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ est une norme.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Preuve.

1. - $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
   - $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
   -

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x,y) \\ &\underset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x,y) \\ &\ + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\Re(x,y) \\ &= 2\|x\|^{+} 2\|y\|^2\end{aligned}$$

■

Définition 2 (espace de Hilbert)

H est un espace de Hilbert si c'est un $\mathbb{K}-$ev muni d'un produit scalaire et s'il est complet pour $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$.

Exemples.

- $\mathbb{R}^d$ avec $(x, y) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$
- $l^2(\mathbb{N}) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < +\infty$
- $L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\Omega)$
- $H^1(\Omega)$ Sobolev

Proposition 1

Soit H un Hilbert, $A \subset H$ convexe et fermée.

$$\exists! a \in A,\ \|a\| = \inf_{x\in A} \|x\|$$

Preuve.

$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} m := \inf_A \|x\|$. Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrons donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On souhaite estimer $\|x_n - x_p\|$.

$$\|x_n + x_p\|^2 + \|x_n - x_p\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_p\|^2$$

$$\left\|\frac{x_n + x_p}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n - x_p}{2}\right\|^2 = \frac{\|x_n\|^2 + \|x_p\|^2}{2}$$

A est convexe donc $\frac{x_n+x_p}{2} \in A$, donc la norme de cet élément $\geqslant m$. Ainsi :

$$m^2 + \left\| \frac{x_n - x_p}{2} \right\|^2 \leqslant \frac{\|x_n\|^2 + \|x_p\|^2}{2}$$

$n \longrightarrow +\infty$, $p \longrightarrow +\infty$ à droite $\longrightarrow \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} = m^2$. Donc $\|x_n - x_p\| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, $p \geqslant N$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. A fermée $\Rightarrow \lim x_n \in A$ et $\|\lim x_n\| = \inf_A \|x\|$. ∎

Théorème 2

Soit F un s.e.v. fermé de H. Il existe $P_F \colon H \longrightarrow F$ telle que $\|x - P_F(x)\| = \mathrm{dist}(x, F)$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ où :

$$F^\perp = \left\{ y \in H \ : \ (y, x) = 0 \ \forall x \in F \right\}$$

Corollaire 2

1. Si F est un s.e.v. fermé alors $H = F \oplus F^\perp$.
2. Si F est un s.e.v. quelconque alors $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$
3. Si F est un s.e.v. quelconque alors $\overline{F} = H$ ssi $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 3 (Riesz-Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert. $\forall \varphi \in H'$, $\exists! f \in H$ tel que $\forall v \in H$, $\varphi(v) = (f, v)$.
(où $H' = H^*$ est le dual topologique)

Preuve.
Soit $f \in H$. On pose $\Theta_f(v) = (f, v)$.

$$|\Theta_f(x)| = |(f, v)| \leqslant \|f\| \|v\| \quad \text{donc } \Theta_f \in H'$$

On veut montrer que $\exists f \in H$ tel que $\varphi = \Theta_f$. Si $\varphi = 0$ alors $\varphi = \Theta_0$. Si $\varphi \neq 0$ introduisons $F = \ker(\varphi)$. F est fermé car φ est continue. Donc $H = F \oplus F^\perp$.

Montrons que $F^\perp$ est de dimension 1. Soit $x, y \in F^\perp$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On pose $z = y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} x$. $\varphi(x) \neq 0$ car $x \in F^\perp$ et $x \neq 0 \Rightarrow x \notin F \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. On a $\varphi(z) = 0$ donc $z \in F = \ker(\varphi)$. Mais on a aussi $z \in F^\perp$ puisque $y \in F^\perp$, $x \in F^\perp$ et $F^\perp$ s.e.v.

Finalement $z \in F \cap F^\perp = \{0\}$, donc $z = 0$ ainsi $y = \lambda x \Rightarrow \ F^\perp = \mathbb{K}x$.

On choisit ensuite $f \in F^\perp$ tel que $\varphi(f) = \|f\|^2$, alors $\varphi(f) = (f, f)$. Donc $\varphi = \theta_f$ sur $F^\perp$ et $\varphi = \theta_f$ sur F (=0). Finalement $\varphi = \theta_f$ sur H. ∎

Définition 3 (convergence faible)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans un espace de Hilbert. On dit que (x_n) converge faiblement vers x si

$$\forall \varphi \in H' \ \varphi(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall f \in H,\ (f, x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (f, x)$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque.

- $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \Rightarrow\ x_n \rightharpoonup x$
- si $x_n \rightharpoonup 0$, alors (x_n) est bornée (Banach-Steinhaus)

Exemple. $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{N}$. $e_n \rightharpoonup 0$ dans $H = L^2(S^1)$ puisque

$$\forall f \in L^2(S^1),\ (f, e_n) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Rappels 1

La boule unité n'est pas compacte en dimension infinie.

Théorème 4

Soit H un espace de Hilbert. De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Preuve.

Soit (x_n) une suite bornée. Alors $(x_0, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{K}$. Donc $\exists \theta_0$ croissante, $\theta_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_0, x_{\theta_0(n)})$ converge.
$(x_1, x_{\theta_0(n)})$ est bornée $\Rightarrow \exists \theta_1 \ \ldots$
On construit $(x_k, x_{\theta_0\circ\ldots\circ\theta_k(n)})_n$ qui converge.
Principe d'extraction diagonale, on pose :

$$y_n = x_{\theta_0\circ\ldots\circ\theta_n(n)}$$

Alors $(x_k, y_n)_n$ converge pour tout k. Donc $(x, y_n)_n$ converge pour tout $x \in \mathrm{Vect}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ noté E. Notons $U(x)$ la limité de $\overline{(x, y_n)}$ pour $x \in E$. $U : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.

$$\begin{aligned}|U(x)| &\leqslant \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|\right) \|x\| \\ &\leqslant \underbrace{\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\right)}_{<+\infty \text{ par hyp}} \|x\|\end{aligned}$$

On peut alors étendre U qui est uniformément continue sur $U : \overline{E} \longrightarrow \mathbb{K}$.

$(\overline{E}, (.,.))$ s.e.v fermé dans un Hilbert, est un Hilbert. Par Riesz-Fréchet, $\exists f \in \overline{E}$ tel que :

$$U(x) = (f, x) \ \forall x \in \overline{E}$$

Ainsi sur $\overline{E}$, $(y_n, x) \longrightarrow (f, x)$, sur $\overline{E}^{\perp}$, $0 \longrightarrow 0$. Donc sur $H = \overline{E} \oplus \overline{E}^{\perp}$ on a :

$$(y_n, x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (f, x)$$

■

Propriété 1 (inégalité de Bessel)
$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(e_n, e_m) = \delta_n^m$. $\forall f \in H$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |(f, e_n)|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Preuve.
Posons $S_N f = \sum_{n=0}^{N} \overline{(f, e_n)} e_n$. On a :

1.

$$\begin{aligned} \|S_N f\|^2 &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{(f, e_n)} e_n, \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{(f, e_m)} e_m \right) \\ &= \sum_n \sum_m \overline{\overline{(f, e_n)} (f, e_m)} (e_n, e_m) \\ &= \sum_n |(f, e_n)|^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (S_N f, f) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{(f, e_n)} e_n, f \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\overline{(f, e_n)}} (e_n, f) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |(f, e_n)|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|S_N f\|^2 = (S_N f, f) \leqslant \|S_N f\| \|f\|$, ainsi $\|S_N f\| \leqslant \|f\|$. donc :

$$\|S_N f\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |(f, e_n)|^2 \leqslant \|f\|^2$$

puis passage à la limite. ■

Théorème 5

Soit H un espace de Hilbert. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(e_n, e_m) = \delta_n^m$. On a équivalence entre :

1. $\text{Vect}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense
2. $\forall f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(f, e_n)|^2$
3. $\forall f \in H$, $\left(\sum_{n\leqslant N}(e_n, f)e_n\right)_N$ converge vers f
4. $\forall f \in H$ si $(f, e_n) = 0$ pour tout n alors $f = 0$

Définition 4 (base hilbertienne)

Une telle famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée base Hilbertienne.

Preuve.

(3) $\Rightarrow$ (1) : immédiat

(3) $\Rightarrow$ (4) : immédiat

(2) $\Rightarrow$ (3) : on a vu que $(S_N f, f) = \|S_N f\|^2$, donc $\|f - S_N f\|^2 = \|f\|^2 - \|S_N f\|^2$

(1) $\Rightarrow$ (2) : exercice

(4) $\Rightarrow$ (3) : on pose $a_n = (e_n, f)$ et $S_N f = \sum_0^N a_n e_n$. On a :

$$\|S_{N'} f - S_N f\|^2 = \sum_{N+1}^{N'} |a_n|^2$$

Par Bessel on a $(a_n) \in l^2$ alors $S_N f$ est de Cauchy. Comme on est dans un Hilbert, $S_N f$ converge, notons f' la limite. On a :

$$(e_n, f') = a_n \quad \text{car } (e_n, S_N f) = a_n \text{ pour } N > n$$

Donc $(e_n, f') = (e_n, f)$ $\forall n \Rightarrow f' - f = 0$ par (4). Donc $S_N f$ converge vers f. ∎

Théorème 6

$e_n : x \mapsto e^{in\cdot x}$ $n \in \mathbb{Z}^d$ où $n \cdot x = n_1 x_1 + \ldots + n_d x_d$. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^d)$

Remarque. $L^2(\mathbb{T}^d)$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ $2\pi-$périodiques par rapport à chaque variable,

$$\int_{[0,2\pi]^d} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Espace quotienté par équivalence presque partout.

$\mathbb{T}^1 = S^1$ le cercle, $\mathbb{T}^d = S^1 \times \ldots S^d$

Preuve.
$(e^{in\cdot x})_{\mathbb{Z}^d}$ base Hilbertienne de $\mathcal{L}^2$. On utilise (4). Montrons que si $(f, e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ alors $f = 0$. Il suffit alors de démontrer que les polynômes trigonométriques $\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}^d\}$ sont denses dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$. En effet, si c'est vrai, alors $(f, e_n) = 0 \Rightarrow (f, P) = 0\ \forall P \in \mathrm{Vect}\{e_n\} \Rightarrow (f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

En fait il suffit de montrer que $\mathrm{Vect}\{e_n\}$ dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ pour la norme $\|.\|_\infty = \sup_{\mathbb{T}^d} |f(x)|$ car $(\mathcal{C}^0, \|.\|_\infty)$ dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^d)$. Ce qui suit de Stone-Weierstrass (cf. TD). ■

Corollaire 3

Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ on introduit :

$$\hat{f}(n) = (e_n, f) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int f(x) e^{-in\cdot x} dx$$

$(g, f) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \overline{g(x)} f(x) dx$. Alors $S_N f = \sum_{|n| \leqslant N} \hat{f}(n) e_n$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. De plus,

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)|^2$$

Preuve.
Théorème + définition base Hilbertienne. ■

Proposition 2

Il existe une fonction continue périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

Preuve.
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π−périodique.

$$S_N f = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} \quad \text{série de Fourier de } f$$

$$S_N f = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx}$$

On peut réécrire :

$$S_N f(x) = \int_0^{2\pi} D_N(x - y) f(y) dy$$

où $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

On montre qu'il existe f telle que $(S_N f)(x = 0)$ ne converge pas. Il suffit de montrer qu'il existe f telle que $\left((S_N f)(0)\right)_N$ est non bornée. Introduisons :

$$l_N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & (S_N f)(0) \end{array} \right.$$

Les (l_n) sont des formes linéaires continues. On veut $(l_N(f))$ non bornée $\Leftrightarrow$ $(l_N)_N$ n'est pas simplement bornée. D'après Banach-Steinhaus, il suffit donc de montrer que (l_N) n'est pas bornée dans ${\mathcal{C}^0}^*$.

Montrons que $\|l_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0,\mathbb{C})}$ est non bornée.

$$\begin{aligned} l_N(f) = (S_N f)(0) &= \int_0^{2\pi} D_N(-y) f(y) dy \\ &= \int_0^{2\pi} D_N(y) f(y) dy \end{aligned}$$

Donc $|l_N(f)| \leqslant \|D_N\|_{\mathcal{L}^1} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$. Donc $\|l_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0,\mathbb{C})} \leqslant \|D_N\|_{\mathcal{L}^1}$. Posons :

$$f_\varepsilon = \frac{D_N}{|D_N| + \varepsilon} \in \mathcal{C}^0$$

Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, $l_n(f_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to +\infty]{} \int_0^{2\pi} |D_N(y)| dy, \forall N$. Ainsi :

$$\|l_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0,\mathbb{C})} = \|D_N\|_{\mathcal{L}^1}$$

Or $\|D_N\|_{\mathcal{L}^1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$. En effet :

$$\begin{aligned} \|D_N\|_{\mathcal{L}^1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} dx \\ &\geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)\right|}{\frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\|D_N\|_{\mathcal{L}^1} \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin(y)|}{|y|} dy \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

■

2 Théorème de Hahn-Banach

Résultats d'existence de formes linéaires continues.

Lemme 1

(X, d), (Y, δ) deux espaces métriques. D dense dans X, $g\colon D \longrightarrow Y$ uniformément continue, (Y, δ) complet. Alors il existe $\tilde{g}\colon X \longrightarrow Y$ continue telle que $\tilde{g}|_D = g$.

Preuve. Vue en TD. ■

> **Théorème 7** (Hahn-Banach)
>
> Soit E un $\mathbb{R}-$ev normé, $F \subset E$ un s.e.v. et $f\colon F \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire continue telle que $g|_F = f$ et $\|g\|_{E^*} = \|f\|_{F^*}$.

Remarque. Il y a des généralisations, voir [Brézis]

Preuve.
On suppose de plus que E est séparable ; il existe une famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans E. On introduit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.e.v. de E définis par :

$$F_0 = F \qquad F_n = \mathrm{Vect}\big(F \cup \{e_1, \dots, e_n\}\big)$$

$F_n \subset F_{n+1}$ mais ($F_n = F_{n+1}$ “souvent”).
On veut une suite $f_n\colon F_n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_0 = f$, $f_n|_{F_{n-1}} = f_{n-1}$ et $\|f_n\|_{F_n^*} = \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}$. On pose ensuite $g(x) = f_n(x)$ si $x \in F_n$.

Remarque. X' ou X^* est le dual topologique : $\lambda \in X^*$ ssi $\lambda\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$, λ linéaire continue $\|\lambda\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\lambda(x)| < +\infty$.

On construit (f_n) par récurrence :

- Si $F_n = F_{n-1}$ alors on pose $f_n = f_{n-1}$
- Sinon, dans ce cas $e_n \notin F_{n-1}$, et on peut décomposer $u \in F_n$ sous la forme :

$$u = x + te_n,\ x \in F_{n-1},\ t \in \mathbb{R}$$

On cherche f_n sous la forme $f_n(u) = f_{n-1}(x) + ta_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. f_n forme linéaire, $f_n|_{F_{n-1}} = f_{n-1}$ et f_n continue. Il faut montrer que l'on peut choisir a_n tel que $\|f_n\|_{F_n^*} = \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}$. Par la propriété de restriction on a déjà $\|f_n\|_{F_n^*} \geqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}$. Montrons donc que :

$$\begin{aligned}
& \|f_n\|_{F_n^*} \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*} \\
\Leftrightarrow\ & \forall u \in F_n,\ |f_n(u)| \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}\|u\| \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in F_{n-1},\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ |f_{n-1}(x) + \tau a_n| \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}\|x + \tau e_n\| \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in F_{n-1},\ \forall t > 0,\ \begin{cases} f_{n-1}(x) + ta_n \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}\|x + te_n\| \\ f_{n-1}(x) - ta_n \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}\|x - te_n\| \end{cases}
\end{aligned}$$

($x \in F_{n-1}$ ssi $-x \in F_{n-1}$). Comme $t^{-1}F_{n-1} = F_{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \forall w \in F_{n-1},\ \begin{cases} f_{n-1}(w) + a_n \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}\|w + e_n\| \\ f_{n-1}(w) - a_n \leqslant \|f_{n-1}\|_{F_{n-1}^*}\|w - e_n\| \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a_n \leqslant M_n \\ a_n \geqslant m_n \end{cases} \text{ où } \begin{cases} M_n = \inf_{w \in F_{n-1}} \big\{\|f_{n-1}\|\|w + e_n\| - f_{n-1}(w)\big\} \\ m_n = \sup_{w' \in F_{n-1}} \big\{f_{n-1}(w') - \|f_{n-1}\|\|w' - e_n\|\big\} \end{cases}
\end{aligned}$$

Or $\forall w, w' \in F_{n-1}$,

$$f_{n-1}(w) + f_{n-1}(w') = f_{n-1}(w+w') \leqslant \|f_{n-1}\|\|w+w'\| \leqslant \ldots \leqslant \|f_{n-1}\|\big\{\|w+e_n\| + \|w'-e_n\|\big\}$$

Donc,

$$f_{n-1}(w') - \|f_{n-1}\|\|w'-e_n\| \leqslant \|f_{n-1}\|\|w+e_n\| - f_{n-1}(w)$$

Puis en passant au sup en w' et à l'inf en w on a finalement $m_n \leqslant M_n$. Ainsi le nombre $a_n = m_n$ convient. ■

Définition 5 (relation d'ordre)

Soit E un ensemble non vide. $\preceq$ est une relation d'ordre si c'est une relation binaire sur E, réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 6 (totalement ordonné)

$(E, \preceq)$ est totalement ordonné si tous les éléments de E sont comparables :

$$\forall x, y, \text{ on a } x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

Exemple. $E = \{\emptyset, C_0^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\}$ est ordonné pour l'inclusion $x \preceq y$ si $x \subset y$ mais pas totalement ordonné.

Définition 7

$(E, \preceq)$ est inductif si toute partie totalement ordonnée admet un majorant.

Lemme 2 (Zorn)

Tout ensemble ordonné, inductif admet un élément majorant.

Preuve. Admis. ■

Preuve. (de Hahn-Banach à partir du lemme de Zorn)

On introduit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prolongements possibles de f ; un élément de $\mathcal{P}$ est un couple $(\tilde{F}, \tilde{f})$ tel que :

1. $\tilde{F} \subset E$, s.e.v., $F \subset \tilde{F}$
2. $\tilde{f} \colon \tilde{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire continue et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

Alors :

- $\mathcal{P}$ est non vide puisque $(F, f) \in \mathcal{P}$
- $\mathcal{P}$ est ordonné pour la relation $\preceq$ définie par :

$$(G_1, g_1) \preceq (G_2, g_2) \text{ ssi } G_1 \subset G_2 \text{ et } g_2|_{G_1} = g_1$$

- $\mathcal{P}$ est inductif car si $(G_\alpha, g_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une partie totalement ordonnée, on pose :

$$\begin{cases} G = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \\ g\colon G \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g_\alpha(x) \text{ si } x \in G_\alpha \end{cases}$$

D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal (G, g). Alors $G = E$. Sinon il existerait $e \in E\backslash G$ et on pourrait définir $\tilde{f}$ sur $G \oplus \mathbb{R}e$ comme précédemment, qui prolonge g, absurde.

Remarque. En fait on a montré un résultat plus général :

Théorème 8

E $\mathbb{R}$−e.v., $\rho\colon E \longrightarrow [0, +\infty[$ telle que :

- $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ $x, y \in E$,
- $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$ pour $x \in E, \lambda > 0$

Soit $f\colon F \longrightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire avec F s.e.v. telle que $f(x) \leqslant \rho(x)$, $\forall x \in F$. Alors il existe $\tilde{f}\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire telle que $\tilde{f}|_F = f$ et $\tilde{f}(x) \leqslant \rho(x)$ $\forall x \in E$.

Preuve. Remplacer $\|.\|$ par ρ dans la démonstration précédente. ■

Corollaire 4

E $\mathbb{R}$−e.v.n., $u \in E$, $u \neq 0$. Il existe $l \in E^*$ tel que $\|l\|_{E^*} = 1$ et $l(u) = \|u\|$. En particulier :

$$\|u\| = \sup_{l\in E^*,\ \|l\|_{E^*}=1} |l(u)|$$

Preuve.

$F = \mathbb{R}u$

$$f\colon \begin{cases} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ tu & \longmapsto & t\|u\| \end{cases}$$

D'après Hahn-Banach, il existe $l\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $l|_F = f$ et $\|l\|_{E^*} = \|f\|_{F^*}$. Donc :

$$\|l\|_{E^*} = \sup_{x\in F, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_F} = \sup_{t\in\mathbb{R}^*} \frac{t\|u\|}{\|tu\|} = 1$$

$l(u) = f(u) = \|u\|$. ■

Corollaire 5

E $\mathbb{R}$−e.v.n., F un s.e.v. fermé. Soit $u \in E\backslash F$. Il existe $l \in E^*$ telle que :

$$\begin{cases} l(u) = 1 \\ l(w) = 0 \quad \forall w \in F \end{cases}$$

Preuve.
On introduit l'espace quotient E/F et la norme quotient (rappel : E/F est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence. $v \sim w$ ssi $v - w \in F$). Alors :

$$\dot{v} = \{w \in F \mid v \sim w\} = v + F = \{v + x \ ; \ x \in F\}$$

On pose :

$$\|\dot{v}\|_{E/F} = \inf_{w \in \dot{v}} \|w\|_E$$

Alors,

$$\|\dot{w}\|_{E/F} = \inf_{x \in F} \|w + x\|_E = \inf_{x \in F} \|w - x\|_E = \mathrm{dist}(w, F)$$

On vérifie que c'est une norme. On définit :

$$f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\dot{u} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t\dot{u} & \longmapsto & t \end{array} \right.$$

Alors f est continue et d'après Hahn-Banach il existe $\tilde{l} \colon E/F \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f avec $\|\tilde{l}\|_{(E/F)^*} = \|f\|$. On définit ensuite $l \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $l(v) = \tilde{l}(\dot{v})$. Alors $l(u) = \tilde{l}(\dot{u}) = f(\dot{u}) = 1$ et si $w \in F$, $l(w) = \tilde{l}(\dot{0}) = 0$. De plus, l est continue car :

$$|l(v)| = |\tilde{l}(\dot{v})| \leqslant \|\tilde{l}\|\|\dot{v}\| \leqslant \|\tilde{l}\|\|v\|$$

car $\|\dot{v}\| = \mathrm{dist}(v, F) \leqslant \|v\|$ puisque $0 \in F$. Donc :

$$\sup_{v \neq 0} \frac{|l(v)|}{\|v\|} < +\infty \ \Rightarrow \ l \text{ continue}$$

$\blacksquare$

Corollaire 6

E $\mathbb{R}-$e.v.n. et $F \subset E$ s.e.v. Alors F est dense si et seulement si :

$$\forall l \in E^*, \ l|_F = 0 \ \Leftrightarrow \ l = 0$$

Preuve. Immédiat. $\blacksquare$

Remarque. Généralise F s.e.v. de H Hilbert dense ssi $F^\perp = \{0\}$.

Proposition 3

Soit (a_n) une suite de nombres réels dans $]1, +\infty[$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. On introduit $f_{a_n} \in C^0([0,1])$ définie par $f_{a_n}(x) = \frac{1}{x - a_n}$. Alors,

$$\mathrm{Vect}\big\{f_{a_n} : n \in \mathbb{N}\big\} \text{ est dense dans } C^0([0,1])$$

Preuve.
Remarque : $C^0([0,1])$ est séparable. Soit μ une forme linéaire continue $C^0([0,1])^*$ telle que $\mu(f_{a_n}) = 0$, montrons que $\mu = 0$. La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{a_n^k}$ converge normalement sur $[0,1]$ vers $\frac{1}{1-\frac{x}{a_n}} = -a_n f_{a_n}(x)$. Donc :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{\mu(x\mapsto x^k)}{a_n^k} = 0$$

$\mu(\sum) = \sum(\mu)$ car convergence normale. Posons $\varphi(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(x\mapsto x^k)z^k$. La suite $|\mu(x\mapsto x^k)|$ est bornée par :

$$\|\mu\|\|x\mapsto x^k\|_{C^0([0,1])} = \|\mu\|\times 1 = \|\mu\|$$

Donc φ est holomorphe sur $\{|z|<1\}$. Par ailleurs :

$$\varphi\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mu(x\mapsto x^k)}{a_n^k} = 0$$

Comme $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a nécessairement $\varphi \equiv 0$ (théorème des 0 isolés). Donc $\mu(x\mapsto x^k) = 0$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Or $\mathrm{Vect}\{x\mapsto x^k : k\in\mathbb{N}\}$ est dense (Weierstrass) dans $C^0([0,1])$. Donc $\mu\equiv 0$. ■

Théorème 9 (Hahn-Banach géométrique)

E $\mathbb{R}-$e.v.n. A, B convexes, non vides et $A\cap B = \emptyset$.

1. Si A est ouvert, il existe $f\in E^*\backslash\{0\}$ telle que :

$$\sup_A f \leqslant \inf_B f$$

   (séparation par un hyperplan)

2. Si A est fermé et B compact, $\exists f\in E^*$ telle que :

$$\sup_A f < \inf_B f$$

Preuve.

1. (a) A ouvert, $0\in A$, $B=\{u\}$ singleton. On note μ la jauge de Minkowski :

$$\mu(x) = \inf\{t>0 : x\in tA\}$$

   Alors (déjà vu),
   i. $\mu(x+y) \leqslant \mu(x)+\mu(y)$ $(x,y\in E)$
   ii. $\mu(\lambda x) = \lambda\mu(x)$ $(\lambda\geqslant 0, x\in E)$
   iii. $A = \mu^{-1}([0,1[)$

   On introduit $\tilde{f}$: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}u & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ tu & \longmapsto & t \end{array}\right.$. Alors $\tilde{f}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}u$ et :

$$\tilde{f}(tu) \leqslant \mu(tu)$$

   car pour $t>0$, $\tilde{f}(tu) = t \leqslant t\mu(u) = \mu(tu)$ puisque $\mu(u)\geqslant 1$ puisque $u\notin A$ car $A\cap B=\emptyset$. Pour $t<0$, évident puis $\tilde{f}(tu)\leqslant 0$ et $\mu(tu)\geqslant 0$.

D'après la version de Hahn-Banach Théorème 8, il existe $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f est linéaire, $f|_{\mathbb{R}u} = \tilde{f}$ et $f(x) \leqslant \mu(x)\ \forall x \in E$. Alors $\forall x \in A$, on a $f(x) \leqslant \mu(x) \leqslant 1 = f(u)$, donc $\sup_A f \leqslant \inf_B f$.

Montrons que f est continue. $\exists R > 0$, $\mathcal{B}_E(0,R) \subset A$, on a :

$$\sup_{\mathcal{B}_E(0,R)} f \leqslant f(u)$$

Donc $f(x) \leqslant f(u)\ \forall x \in \mathcal{B}_E(0,R)$ donc $f(-x) \leqslant f(u)\ \forall x \in \mathcal{B}_E(0,R)$ ainsi $-f(x) \leqslant f(u)\ \forall x \in \mathcal{B}_E(0,R)$. Finalement $|f(x)| \leqslant f(u)\ \forall x \in \mathcal{B}_E(0,R)$. Donc $f \in E^*$.

(b) A ouvert, B quelconque, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Prenons $a \in A$ et $b \in B$. On pose $C = A - B - a + b$. C est convexe, ouvert et contient 0. On applique (a) avec C et $\{a-b\}$.

2. A fermé, B compact. Soit $\varepsilon > 0$. Notons :

$$A_\varepsilon = \{x \in E : \operatorname{dist}(x,A) < \varepsilon\} \qquad B_\varepsilon = \{x \in E : \operatorname{dist}(x,B) \leqslant \varepsilon\}$$

A_ε et B_ε sont des convexes. A_ε est ouvert et $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ pour ε assez petit. En effet soit $x \in A_\varepsilon$, $y \in A_\varepsilon$, $\lambda \in [0,1]$.

$$\exists a_1 \in A \mid \|x - a_1\| < \varepsilon \qquad \exists a_2 \in A \mid \|y - a_2\| < \varepsilon$$

Alors,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2)\| \leqslant \lambda\|x - a_1\| + (1-\lambda)\|y - a_2\| < \varepsilon$$

et $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A \Rightarrow \operatorname{dist}(\lambda x + (1-\lambda)y, A) < \varepsilon$). Donc A_ε convexe, de même B_ε convexe.

A_ε est bien ouvert : si $x \in A_\varepsilon$, $\exists a \in A$ tel que $\|x - a\| < \varepsilon$ donc $\|x + y - a\| < \varepsilon$ pour $y \in \mathcal{B}_E(0,\delta)$ avec $\delta = \frac{\varepsilon - \|x-a\|}{3}$.

Enfin montrons que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ pour ε assez petit. Par l'absurde :

$$\exists a_n \in A,\ b_n \in B \mid \|a_n - b_n\| \leqslant \frac{1}{n}$$

B compact, A fermé. On extrait donc $(b_{\theta(n)})$ convergente, alors $(a_{\theta(n)})$ converge $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ absurde. Ainsi par le cas 1. $\exists f \in E^*$ telle que $\sup_{A_\varepsilon} f \leqslant \inf B_\varepsilon f$,

$$\Rightarrow\ \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \forall w, w' \in \mathcal{B}_E(0,1) \quad f(a + \varepsilon w) \leqslant f(b + \varepsilon w')$$

Donc :

$$f(a) + \varepsilon \sup_{w \in \mathcal{B}_E(0,1)} f(w) \leqslant f(b) + \varepsilon \inf_{\mathcal{B}_E(0,1)} f(w')$$

Or $\sup_{w \in \mathcal{B}_E(0,1)} f(w) = \sup_{w \in \mathcal{B}_E(0,1)} |f(w)| = \|f\|$ et $\inf_{w' \in \mathcal{B}_E(0,1)} f(w') = -\sup_{\mathcal{B}_E(0,1)} |f(w')| = -\|f\|$. Donc :

$$f(a) + \varepsilon\|f\| \leqslant f(b) - \varepsilon\|f\|$$

D'où :

$$\sup_A f \leqslant \inf_B f - 2\varepsilon\|f\| \quad \Rightarrow \quad \sup_A f < \inf_B f$$

■

3 Convergence faible et convergence faible $*$

$(E, \|.\|_E)$ espace normé *réel.* E^* dual topologique.

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)|$$

$(E^*, \|.\|_{E^*})$ est de Banach. On rappelle que $\mathcal{L}(E, F)$ est de Banach dès que F est de Banach (ici $\mathbb{R}$ est complet).

Définition 8 (topologie)

X ensemble, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est une topologie si :
1. $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$ et X
2. $\mathcal{T}$ est stable par réunion quelconque
3. $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie

Remarques.

- $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X
- Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies alors $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est une topologie. En fait si $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de topologies, alors $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie.

Corollaire 7

En particulier, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ alors :

$$\mathcal{T}_\mathcal{A} := \bigcap_{\tau \text{ top sur } X, \mathcal{A} \subset \tau} \tau$$

est une topologie. Alors $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{A}$, c'est la plus petite topologie sur X contenant $\mathcal{A}$.

Proposition 4

$\mathcal{T}_\mathcal{A}$ est la réunion de $\emptyset, X$ et de toutes les réunions d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$.

Preuve.

$\mathcal{B} := \big(\text{intersections finies d'éléments de } \mathcal{A}\big) \cup X$. Soit $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in U, \exists V \in \mathcal{B} \text{ tq } x \in V \subset U\}$. Alors $\tau =$ réunions d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors τ est une topologie (en exercice). τ est minimal : si $\mathcal{T}$ est une topologie qui contient $\mathcal{A}$, $\tau \subset \mathcal{T}$. Donc $\tau = \mathcal{T}_\mathcal{A}$. ■

Soient X un ensemble, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espace topologique et $\mathcal{F} = \{f_\alpha \colon X \longrightarrow Y\}_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions. On cherche la topologique minimale sur X qui rende toutes les f_α continues. Posons :

$$\mathcal{A} = \big\{f_\alpha^{-1}(U); \alpha \in A, U \in \mathcal{T}_Y\big\}$$

On pose $\mathcal{T}_\mathcal{F} = \mathcal{T}_\mathcal{A}$ la topologie induite par $\mathcal{F}$ sur X.

Définition 9 (topologie faible, topologie faible-$*$)

Soit E un e.v.n., E^* son dual.

1. La topologie faible sur E, noté $\sigma(E, E^*)$ est :

$$\sigma(E, E^*) := \mathcal{T}_{E^*}$$

(topologie minimale qui rende continues les formes linéaires $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$)

2. On note $E^{**} = (E^*)^*$ appelé le bi-dual de E. La topologie faible sur E^* est $\sigma(E^*, E^{**})$.

3. La topologie faible-$*$ sur E^*, notée $\sigma(E^*, E)$, est la topologie induite par la famille :

$$\mathcal{F} := \{J_x; x \in E\} \text{ où } J_x\colon E^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } J_x(f) = f(x)$$

Définition 10

On dit que E est réflexif si $J\colon E \longrightarrow E^{**}$ est un isomorphisme (J linéaire, bijective, J^{-1} linéaire, J et J^{-1} continues). Dans ce cas $\sigma(E^*, E^{**}) = \sigma(E^*, E)$.

Remarque. Il existe un espace non réflexif mais isomorphe à son bi-dual.

Proposition 5

$J\colon E \longrightarrow \mathbb{E}^{**}$ est toujours une isométrie

$$\|J_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$$

En particulier, E est réflexif ssi $J\colon E \longrightarrow E^{**}$ est surjective.

Preuve.

On utlise le Corollaire 4 de Hahn-Banach :

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

Donc,

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |J_x(f)| = \|J_x\|_{E^{**}}$$

On note que $x \mapsto J_x$ est linéaire. ■

Proposition 6

1. $\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{T}_{\|.\|_E}$
2. $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**})$ ($=$ si réflexif)
3. $\sigma(E^*, E)$ séparée
4. $\sigma(E, E^*)$ séparée

Preuve.

1. Par définiton.
2. Par définiton.
3. Soit $f \in E^*$ et $f' \in E^*$ avec $f \neq f'$. Il existe $x \in E$, $f(x) \neq f'(x)$. Posons $\varepsilon = |f(x) - f'(x)| > 0$ et :
$$V := \left\{ g \in E^* \ : \ |g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$
$$V' := \left\{ g' \in E^* \ : \ |g'(x) - f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$
Alors $f \in V$, $f' \in V'$, $V \cap V' = \emptyset$ et $V, V' \in \sigma(E^*, E)$ (puisqu'ils s'écrivent en fonction des fonctions d'évaluation).
4. On utilise le Théorème 9 Hahn-Banach géométrique. Soit $x, y \in E$, $x \neq y$. On pose $A = \{x\}$, $B = \{y\}$. Alors A est convexe et compact, B est convexe et fermé. Il existe $f \in E^*$ telle que :
$$\sup_A f < \inf_B f$$
D'où $f(x) < f(y)$. Alors on pose $\lambda = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$. Soit $U = f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$ et $V = f^{-1}(]\lambda, +\infty[)$. On a $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ et U, Y ouverts de $\sigma(E, E^*)$.

■

Proposition 7

1. $(E, \sigma(E, E^*))$ est un e.v.t.
2. $(E^*, \sigma(E^*, E))$ est un e.v.t

Preuve. En exercice. ■

Corollaire 8

En dimension finie,
$$\sigma(E, E^*) = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_E}$$

Définition 11 (suites)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de points de E.

1. On dit que (x_n) c.v. fortement vers x si $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On note $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
2. On dit que (x_n) c.v. faiblement vers x si $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour tout $f \in E^*$. On note $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 8

(x_n) suite de points de E un espace de Banach réel.

1. $x_n \longrightarrow x \;\Rightarrow\; x_n \rightharpoonup x$
2. $x_n \rightharpoonup x$ ssi (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E^*)$
3. $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup x' \Rightarrow x = x'$
4. si $x_n \rightharpoonup x$ alors (x_n) est bornée dans E et $\|x\| \leqslant \underline{\lim}\|x_n\|$

Preuve.

1. Si $x_n \longrightarrow x$ et $f \in E^*$ alors $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ par continuité de f. Donc $x_n \rightharpoonup x$.
2. Supposons $x_n \rightharpoonup x$. Soit V un voisinage de x dans $\sigma(E, E^*)$. On veut montrer que $x_n \in V$ à partir d'un certain rang. On peut supposer que V est de la forme :
$$V = \bigcap_{i=1}^{N} f_i^{-1}(V_i),\ N \in \mathbb{N}^*,\ f_i \in E^*,\ V_i \text{ voisinage de } f_i(x)$$
$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \forall f \in E^*,\ f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Donc $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\exists N_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in f_i^{-1}(V_i)$ pour $n \geqslant N_i$. Donc $x \in V$ pour $n \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} N_i$. Donc (x_n) converge vers x pour $\sigma(E, E^*)$.

   Réciproquement si (x_n) c.v. vers x pour $\sigma(E, E^*)$, comme $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue pour $\sigma(E, E^*)$ pour tout $f \in E^*$, on a $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ donc $x_n \rightharpoonup x$.
3. Car $\sigma(E, E^*)$ est séparée.
4. Montrons que si $x_n \rightharpoonup x$ alors (x_n) est bornée (Banach-Steinhaus). Soit :
$$T_n \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x_n) \end{array} \right.$$
$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$ et a fortiori $f(x_n)$ est bornée. Donc $(T_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout $f \in E^*$. La famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est simplement bornée. Donc $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée d'après Banach-Steinhaus :
$$\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in E^*, \quad |T_n(f)| \leqslant c\|f\|_{E^*}$$
Donc $|f(x_n)| \leqslant c\|f\|_{E^*}$ pour tout $f \in E^*$. Or :
$$\|x_n\|_E = \sup_{\|l\|_{E^*} = 1} |l(x_n)|$$
d'après Hahn-Banach (analytique), d'où $\|x_n\|_E \leqslant c$. La suite est donc bornée.

■

Proposition 9

Soit E un e.v.n. réel et C convexe de E. Alors C est faiblement fermé ssi C est fortement fermé. En particulier, si $x_n \in C$ et $x_n \rightharpoonup x$ on a $x \in C$ pour C convexe fortement fermé.

Preuve.

$\Rightarrow$: Tout ouvert faible est un ouvert fort ($\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_E}$) donc tout fermé faible est fermé fort (sans besoin de convexité).

$\Leftarrow$: Montrons que C convexe fortement fermé $\Rightarrow$ C faiblement fermé. Montrons que $E \backslash C$ est faiblement ouvert. Montrons que $E \backslash C$ est un voisinage de chacun de ses points pour $\sigma(E, E^*)$. Soit $x_0 \in E \backslash C$. Alors $\{x_0\}$ et C sont deux convexes disjoints. C est fermé et x_0 compact. Donc $\exists f \in E^*$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in C, \ f(x) < \lambda < f(x_0)$$

Alors $U = \{x \in E \mid f(x) > \lambda\}$ est un ouvert faible, contenant x_0, inclus dans $E \backslash C$. Donc C est faiblement fermé. ■

Proposition 10

Soient E, F espaces de Banach réels. $T\colon E \longrightarrow F$ est fortement continue ssi T est faiblement continue.

Preuve.

$\Rightarrow$: T fortement continue $\Rightarrow$ T faiblement continue $\Leftarrow$: T faiblement continue $\Rightarrow$ T fortement continue. E et F sont des espaces de Banach, on peut donc appliquer le théorème du graphe fermé.

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F \ : \ y = Tx\}$$

Montrons que $G(T)$ est fermé. Notons que $G(T)$ est convexe. Il suffit de montrer que $G(T)$ est faiblement fermé.

$$G(T) = \phi^{-1}(\{0\}) \quad \text{où } \phi(x, y) = y - Tx$$

ϕ est faiblement continue donc $\phi^{-1}(\{0\})$ est faiblement fermé. ■

Définition 12 (convergence faible-$*$)

1. $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E^* ssi $\|f_n - f\|_{E^*} \longrightarrow 0$
2. $f_n \rightharpoonup f$ faible-$*$ ssi $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in E$ (c'est la convergence simple)

Proposition 11

Soit E un e.v.n. réel.

1. $f_n \longrightarrow f$ fortement $\Rightarrow$ $f_n \rightharpoonup f$ faible-$*$
2. $f_n \rightharpoonup f$ faible-$*$ ssi (f_n) c.v. vers f pour $\sigma(E^*, E)$
3. $f_n \rightharpoonup f$ faible-$*$ et $f_n \rightharpoonup f'$ faible-$*$ $\Rightarrow$ $f = f'$
4. $f_n \rightharpoonup f$ faible-$*$ $\Rightarrow$ (f_n) bornée dans E^*

Preuve. Analogue à la démonstration de Proposition 8. ■

Remarque. Réciproquement $(f_n)_n$ bornée dans E^*, existence d'une sous-suite qui converge faiblement-$*$?

Théorème 10 (Banach-Alaoglu)

Soit E un espace de Banach *séparable* (version non séparable : Banach-Bourbaki-Alaoglu). Toute suite bornée dans E^* admet une sous-suite qui converge faiblement-$*$.

Preuve.
$D = \{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ partie dense dans E. $(f_n(e_0))$ est bornée car $|f_n(e_0)| \leqslant \|f_n\|_{E^*}\|e_0\|_E$ et (f_n) bornée dans E^*. Donc il existe une extraction θ_0 telle que $\big(f_{\theta_0(n)}(e_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On construite de proche en proche $\theta_k\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que :

$$\big(f_{\theta_0\circ\ldots\circ\theta_k(n)}(e_k)\big) \text{ converge}$$

Posons $g_n = f_{\theta_0\circ\ldots\circ\theta_n(n)}$. Alors $(g_n(e))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $e \in D$. On note $g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ la limite. Comme $(g_n)_n$ est bornée dans E^*, $\exists M > 0$ tel que :

$$\forall x \in E,\ |g_n(x)| \leqslant M\|x\|_E \quad (M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E^*})$$

...

Montrons que $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{g}(x)\ \forall x \in E$. Soit $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $\exists e \in D$ tel que :

$$M\|x - e\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|g_n(e) - \tilde{g}(e)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Donc si $n \geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned} |g_n(x) - \tilde{g}(x)| \leqslant{} & |g_n(x) - g_n(e)| \\ & + |g_n(e) - \tilde{g}(e)| \\ & + |\tilde{g}(e) - g(x)| \end{aligned}$$

Donc g_n, $\tilde{g}$ $M-$lipschitzienne implique que :

$$|g_n(x) - \tilde{g}(x)| < M\|x - e\|_E + \frac{\varepsilon}{3} + M\|x - e\|_E < \varepsilon$$

On montre que $\tilde{g}$ est linéaire. ∎

Corollaire 9

Soit E un espace de Banach réflexif dont le dual est séparable. Alors toute suite (x_n) bornée dans E admet une sous-suite faiblement convergente.

Preuve.
Soit (x_n) bornée dans E. Alors (J_{x_n}) est bornée dans E^{**}. Par hypothèse E^* est séparable. Donc par Banach-Alaoglu, $\exists\theta\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissante tel que $(J_{x_{\theta(n)}})$ converge faiblement-$*$ vers $\lambda \in E^{**}$. Ce qui signifie par défnition que :

$$J_{x_{\theta(n)}}(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(f) \quad \forall f \in E^*$$

Donc :

$$f(x_{\theta(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(f) \quad \forall f \in E^*$$

Or E est réflexif, donc $J\colon E \longrightarrow E^{**}$ est surjective. Donc $\exists x \in E$ tel que $\lambda = J_x$. Donc $\lambda(f) = f(x)$. Ainsi $f(x_{\theta(n)}) \longrightarrow f(x)$ $\forall f \in E^*$ i.e. $x_{\theta(n)} \rightharpoonup x$ dans E. ∎

Théorème 11

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

1. Si $1 \leqslant p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable.
2. Si $1 \leqslant p < +\infty$, et $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué, alors pour toute forme linéaire $\Lambda\colon L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\exists f \in L^q(\Omega)$ telle que :

$$\Lambda(u) = \int_\Omega f(x)u(x)dx$$

Preuve. C.f. mail ∎

Proposition 12

$\exists$ forme linéaire $\Lambda\colon L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Lambda \neq \theta_f$ où $\theta_f(u) = \int_\mathbb{R} fudx$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Preuve.
Introduisons

$$F = \{u \in C^0(\mathbb{R}) \;:\; u \text{ bornée et } \lim_{\infty} u \text{ existe et dans } \mathbb{R}\}$$

Notons $l\colon F \longrightarrow \mathbb{R}$, $l(u) = \lim_{+\infty} u$. $|l(u)| \leqslant \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Par Hahn-Banach, $\exists \Lambda\colon L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Lambda|_F = l$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ alors :

$$\cos(n\xi)e^{-\varepsilon x^2} \in F \quad \text{et} \quad \sin(n\xi)e^{-\varepsilon x^2} \in F$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_\mathbb{R} f(x)\cos(x\xi)e^{-\varepsilon x^2}dx &= \theta_f\big(\cos(x\xi)e^{-\varepsilon x^2}\big) \\ &= \Lambda\big(\cos(x\xi)e^{-\varepsilon x^2}\big) \\ &= l\big(\cos(x\xi)e^{-\varepsilon x^2}\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, par convergence dominée,

$$\int f(x)\cos(x\xi)e^{-\varepsilon x^2}dx \xrightarrow[0\to0]{} \int f(x)\cos(x\xi)dx$$

Donc $\int f(x)\cos(x\xi)dx = 0$. De même $\int f(x)\sin(x\xi)dx = 0$. Donc $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}dx = 0$$

Or $f \in L^1$ et $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$. Donc $\theta_f = \theta_0 = 0$. Or $l \neq 0$, donc $\Lambda \neq 0$. Absurde. ∎