Analyse
Chapitre 7 : Régularité elliptique

Lucie Le Briquer

17 décembre 2017

1 Rappels et fonctions harmoniques

1.1 Théorèmes

Théorème 1

$n \geqslant 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné quelconque. $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Théorème 2

$n \geqslant 2$, $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûement dans $\mathcal{L}^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ où $2^* = \frac{2n}{n-2}(\mathbb{R}^n)$.

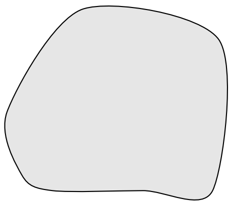
Pour le Théorème 1 on utilise que si $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ alors u prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{H}^1$ espace de Hilbert.

Définition 1 (ouvert borné $\mathcal{C}^1$, régulier)

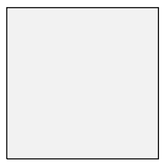
On dit que Ω ouvert borné est $\mathcal{C}^1$ s'il existe un nombre fini d'ouverts $U_i \subset \mathbb{R}^n$ et d'applications $\theta_i : \overline{U_i} \longrightarrow \overline{\mathcal{B}(0,1)}$ tels que :

- $\partial\Omega \subset \bigcup_1^N U_i$
- θ_i bijection de $\overline{U_i}$ sur $\overline{\mathcal{B}(0,1)}$, $\theta_i \in \mathcal{C}^1(\overline{U_i})$, $\theta_i^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{B}(0,1)})$
- $\theta_i^{-1}(B_+) = U_i \cap \Omega$ où $B_+ = \mathcal{B}(0,1) \cap \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ : \ x_n > 0\}$
- $\theta_i^{-1}(B_0) = U_i \cap \partial\Omega$ où $B_0 = \mathcal{B}(0,1) \cap \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ : \ x_n = 0\}$

Remarque. Correspond à dire que le bord est localement le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$.



$\mathcal{C}^1$



pas $\mathcal{C}^1$

Théorème 3 (d'extension)

Si Ω est $\mathcal{C}^1$ alors $\exists E_\Omega \colon \mathcal{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ linéaire continue telle que $E_\Omega u|_\Omega = u$.

Théorème 4

Soit Ω borné $\mathcal{C}^1$, $n \geqslant 2$, $\mathcal{H}^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathcal{L}^(\Omega)$ pour tout $2 \leqslant q < \frac{2n}{n-2}$.

Preuve.
Idem à Théorème 1 $\Rightarrow$ injection compacte dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Mais :

$$\|f_n\|_{\mathcal{L}^q} \leqslant C(q,n)\|f_n\|_{\mathcal{L}^2}^{\alpha}\|f_n\|_{\mathcal{L}^{2^*}}^{1-\alpha}$$

□

Théorème 5 (Poincaré)

Soit Ω un ouvert borné $\mathcal{C}^1$. Il existe une constante $C(\Omega)$ telle que $\forall u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ avec $\int_\Omega u dx = 0$, on a :

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leqslant C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

Remarque. Donc :

$$\int_\Omega \left| u - \frac{1}{|\Omega|} \int u dx \right|^2 \leqslant C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$$

Preuve.
Par l'absurde, si faux alors il existe une suite (u_n) de fonctions $u_n \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ telles que :

$$\int_\Omega u_n dx = 0, \quad \int_\Omega |u_n(x)|^2 dx = 1, \quad \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leqslant \frac{1}{n}$$

Alors $\|u_n\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \|u_n\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\nabla u_n\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ donc (u_n) est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$. On peut extraire une sous-suite $(u_{n'})$ qui converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ fortement. Mais $(\nabla u_{n'})$ de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ donc en fait $(u_{n'})$ converge dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ vers $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Alors, par convergence forte pour les normes, u vérifie :

$$\int_\Omega u dx = 0, \quad \int_\Omega |u(x)|^2 dx = 1, \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0 \;\Rightarrow\; u \text{ constante}$$

Absurde, u ne peut être constante par 1 et 2. □

1.2 Fonctions harmoniques

Une fonction harmonique est une fonction vérifiant :

$$\Delta u = 0$$

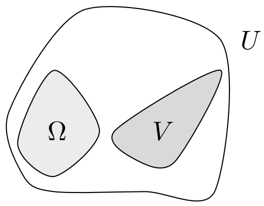
Définition 2 (solution faible)

On dit que $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est solution faible de $\Delta u = 0$ si :

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \partial_{x_i} u \partial_{x_i} \varphi dx = 0$$

$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$.

Remarque. Soit Ω ouvert, U ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec Ω strictement inclus dans U ($\exists V,\ V \subset U,\ V \cap \Omega) = \emptyset$). Soit $f \mathcal{L}^2(U)$ avec supp$f \subset V$.



Par exemple $F \in \mathcal{L}^2(V)$ et $f = \mathbb{1}_V F \in \mathcal{L}^2(U)$.
On a vu qu'il existe $u \in \mathcal{H}_0^1(U)$ solution faible de $\Delta u = f$. Alors u vérifie $\Delta u = 0$ dans Ω.

Théorème 6 (Weyl)

Si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est harmonique (au sens faible), alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. ⚠ pas $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$!

Lemme 1 (Caccioppoli)

Supposons $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ harmonique et considérons deux boules concentriques $\mathcal{B}(r) \subset\subset \mathcal{B}(R) \subset \Omega$. Alors, $\forall c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathcal{B}(r)} |\nabla u|^2 dx \leqslant \frac{K}{(R-r)^2} \int_{\mathcal{B}(R)} (u(x) - c)^2 dx$$

⚠ $\subset\subset$: relativement compact

Remarque. Contrôle de $\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2}$ par $\|u\|_{\mathcal{L}^2}$ (inverse de Poincaré).

Preuve.
Introduisons $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}(R))$ telle que $\eta = 1$ sur $\mathcal{B}(r)$. Alors $\varphi = (u-c)\eta^2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On a :

$$\int_\Omega \Delta u dx = 0 \quad \text{donc} \quad \int_\Omega \nabla\varphi.\nabla u dx = 0$$

Or $\nabla\varphi = \eta^2\nabla u + (u-c)2\eta\nabla\eta$. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2 dx &= \left|\int_\Omega (u-c)2\eta\nabla\eta.\nabla u dx\right| \\
&\leqslant 2\int_\Omega |u-x||\eta||\nabla\eta|\nabla u|dx \\
&\leqslant 2\left(\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u-c|^2|\nabla\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \quad \left(\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant 2\left(\int_\Omega |u-c|^2|\nabla\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Or $\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2 \geqslant \int_{\mathcal{B}(r)} |\nabla u|^2$, alors :

$$\int_\Omega |u-c|^2|\nabla\eta|^2 \leqslant \frac{K}{(R-r)^2}\int_{\mathcal{B}(R)} |u-c|^2$$

□

Lemme 2
Considérons $\mathcal{B}(x_0,R) \subset \Omega$, $\forall k,\ \exists K$ tel que $\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec $\Delta u = 0$ on a :

$$\int_{\mathcal{B}(x_0,R/2)} |\nabla^k u|^2 dx \leqslant K\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} |u|^2 dx$$

$\nabla^k \longrightarrow \partial_x^\beta$, $\beta \leqslant k$.

Preuve. Si $\Delta u = 0$ alors $\Delta\partial_x^\alpha u = 0$, $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$, on itère le lemme précédent. □

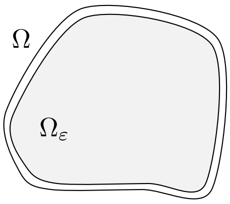
Preuve. (du Théorème 6)
Soit $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ solution faible de $\Delta u = 0$. Introduisons une approximation de l'identité :

$$\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

où $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geqslant 0$, $\int \phi = 1$, supp$\phi \subset\subset \mathcal{B}(0,1)$. On pose :

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy$$

pour $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$.



$\phi_\varepsilon(y) \neq 0 \;\Rightarrow\; y \in \mathcal{B}(0,\varepsilon)$. Alors $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ et $\Delta u_\varepsilon = 0$. Montrons que :

$$\delta u_\varepsilon = 0 \;\Leftrightarrow\; \int \Delta u_\varepsilon \varphi dx = 0 \;\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

On a $\int \Delta u_\varepsilon \varphi = -\int \nabla u_\varepsilon . \nabla \varphi$. Or :

$$\nabla u_\varepsilon = \int u(y) \nabla \phi_\varepsilon(x-y) dy = -\int \nabla u(y) \phi_\varepsilon(x-y) dy$$

par définition de la dérivée au sens faible. Donc :

$$\nabla u_\varepsilon = \int \nabla u(x-y) \phi_\varepsilon(y) dy$$

et,

$$\int \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx = \int \left(\int \nabla u(x-y) . \nabla \varphi dx \right) \phi_\varepsilon(y) dy \underset{\text{Fubini}}{=} 0$$

car $\int \nabla u . \nabla \theta dx = 0 \;\forall \theta \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$.
On peut appliquer le Lemme 2 :

$$\int_{\mathcal{B}(R/2)} \left| \nabla^k (u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) \right|^2 \leqslant C \int_{\mathcal{B}(R)} |u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}|^2 dx \quad \forall \mathcal{B}(R) \subset\subset \Omega$$

Or $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $\mathcal{L}^2(\omega)$ $\forall \omega \subset\subset \Omega$ donc de Cauchy. Donc on en déduit que $u \in \mathcal{H}^k(\mathcal{B})$ pour toute boule $\mathcal{B} \subset \Omega \Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty$. □

2 Théorème de De Giorgi-Nash

2.1 Définitions et énoncé

Fixons $n \geqslant 2$ et considérons un ouvert borné régulier connexe. On s'intéresse à l'E.D.P. $LU = 0$ où $L = \operatorname{div}(A(x)\nabla \cdot)$ et $A = (a_{i,j}) 1 \leqslant i,j \leqslant n$. I.e. :

$$0 = Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j u)$$

Définition 3 (elliptique)

On dit que L est elliptique s'il existe deux constantes $0 < \lambda, \Lambda$ telles que :

1. $\sup_{i,j} \|a_{i,j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant \Lambda$
2. $\forall x \in \Omega,\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2$$

Remarque. Contexte minimal.

1. $\Rightarrow$:
$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j}(x)\partial_i u \partial_j v dx$$
est continue sur $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1$ dans $\mathbb{R}$.

2. $\Rightarrow$ a est cœrcive (pour appliquer Lax-Milgram)

Exemple. Si $A = \text{id}$ alors $L = \Delta$.

Définition 4 (solution faible de $Lu = 0$)

On dit que $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est une solution faible de $Lu = 0$ ssi $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, on a :
$$\int_{\Omega} (A\nabla u) \cdot \nabla \varphi dx = 0$$

Théorème 7 (De Giorgi)

Pour toute boule $\mathcal{B} \subset \Omega$, il existe $\alpha \in]0,1]$ et $c > 0$ tels que $\forall u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ solution faible de $Lu = 0$ avec L elliptique, on a :
$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{B})} + \sup_{x,y\in\mathcal{B},x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant c\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

Preuve. (idées)

Changements non linéaire d'inconnues $v = \phi(y)$. Problème : $Lv \neq 0$ en général. Il faut étendre la notion de solution et trouver des fonctions ϕ qui respectent cette structure.

Caccioppoli ok si $\Delta u \geqslant 0$.

Idée 1. Considérer des sous-solutions telles que $Lu \geqslant 0$.
Idée 2. Si ϕ convexe croissante alors $L\phi(u) \geqslant 0$.
$|u|^{p\to+\infty}$ va permettre de contrôler $\|u\|_{\mathcal{L}^\infty}$ et $\log(u) \longrightarrow \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$. □

2.2 Démonstration du théorème de De Giorgi

Définition 5 (sous-solution)

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Supposons $A \in \mathcal{C}^1(\Omega)^{n\times n}$. On dit que u est sous-solution si $Lu \geqslant 0$.

Propriété 1

Si $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ convexe et croissante alors $\phi(u)$ est sous-solution dès que u est sous-solution.

Preuve.

$$\begin{aligned}
L\phi(u) &= \sum_{i,j} \partial_i(a_{i,j}\partial_j\phi(u)) \\
&= \underbrace{\phi'(u)}_{\geqslant 0 \text{ croissante}} \times \underbrace{Lu}_{\geqslant 0 \text{ sous-sol}} + \underbrace{\phi''(y)}_{\geqslant 0 \text{ cvx}} \times \underbrace{\sum_{i,j} a_{i,j}\partial_i u \partial_j u}_{\geqslant \lambda|\nabla u|^2 \geqslant 0 \text{ ellipticité}} \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

□

Remarque. Extension au sens faible ?

Définition 6 (sous-solution faible)

Soit $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. On dit que u est une sous-solution faible si :

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla\varphi dx \leqslant 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \text{ avec } \varphi \geqslant 0$$

Propriété 2

Soit $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ convexe et croissante. Soit $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ une sous-solution faible. Soit $\omega \subset\subset \Omega$, si $\phi(u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ alors $\phi(u) \in \mathcal{H}^1(\omega)$ et $\phi(u)$ est une sous-solution faible dans ω.

Lemme 3

Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec G' bornée sur $\mathbb{R}$. Si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ alors $G(u) \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ et les dérivées faibles sont $\partial_j(G(u)) = G'(u)\partial_j u$.

Preuve.
$\exists K > 0$ tel que $|G(t) - G(0)| \leqslant K|t|$ $\forall t \in \mathbb{R}$ car G' bornée. Alors :

$$|G(u(x))| \leqslant G(0) + K|u(x)|$$

Donc $G(u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ($G(0) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ car Ω borné). Par ailleurs $G'(u) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ donc $G'(u)\partial_j u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Il reste à voir que :

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \ \int G(y)\partial_j\varphi dx = -\int G'(y)\partial_j u\varphi dx$$

1. Comme Ω est régulier, $\exists E_\Omega\colon \mathcal{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ linéaire continue.
2. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

On en déduit que $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$.
Démonstration. Soit $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. $E_\Omega u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ \exists\theta_p \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta_p \longrightarrow E_\Omega u$ dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\theta_p|_\Omega \longrightarrow u$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ (exercice). (Attention ! $\overline{\mathcal{C}_0^1(\Omega)}^{\mathcal{H}^1} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$)

Si $\theta_p \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ alors :

$$\int G(\theta_p)\partial_j\varphi = -\int G'(\theta_p)\partial_j\theta_p\varphi$$

Puis on passe à la limite :

$$|G(\theta_p) - G(u)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |G'||\theta_p - u| \qquad \Rightarrow \; \|G(\theta_p) - G(u)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Donc :

$$\int G(\theta_p)\partial_j\varphi \longrightarrow \int G(\theta)\partial_j\varphi$$

(par Cauchy-Schwarz ou convergence faible). Et :

$$\int G'(\theta_p)\partial_j\theta_p\varphi \longrightarrow \int G'(u)\partial_j u\varphi$$

En effet,

$$G'(\theta_p)\partial_j\theta_p\varphi - G'(u)\partial_j u\varphi = \big(G'(\theta_p) - G'(u)\big)\partial_j u\varphi + G'(\theta_p)(\partial_j\theta_p - \partial_j u)\varphi$$

Puis on utilise que $\theta_p \longrightarrow u$ p.p. (quitte à extraire une sous-suite), donc :

$$\int \big(G'(\theta_p) - G'(u)\big)\partial_j u\varphi \longrightarrow 0 \quad \text{par convergence dominée}$$

Et on écrit :

$$\int \big|G'(\theta_p)(\partial_j\theta_p - \partial_j u)\varphi\big| \leqslant \|G'\|_{\mathcal{L}^\infty}\|\theta_p - u\|_{\mathcal{H}^1}\|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$$

donc :

$$\int G'(\theta_p)(\partial_j\theta_p - \partial_j u)\varphi \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

On a :

$$\int G(u)\partial_j\varphi = -\int G'(u)\partial_j u\varphi$$

□

Preuve. Propriété 2

- *Étape 1.* On suppose que ϕ est $\mathcal{C}^2$, croissante et $\phi''(y) = 0$ pour $|y| \geqslant R$ avec R assez grand.

  Le Lemme 3 implique que $\phi(u) \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Montrons que $\forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$, on a :

$$\int_\Omega A\nabla\phi(u).\nabla\varphi \leqslant 0$$

  On vérifie que :

$$\begin{aligned}\int A\nabla\phi(u).\nabla\varphi &= \int A\phi'(u)\nabla u.\nabla\varphi \\ &= \int A\nabla u.\nabla\big(\phi'(u)\varphi\big) - \int \varphi\phi''(u)A\nabla(u).\nabla u\end{aligned}$$

On a $\int \varphi\phi''(u)A\nabla u.\nabla u \geqslant 0$ par hypothèses. Il reste à voir que :

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla\left(\phi'(u)\varphi\right) \leqslant 0(*)$$

Pour le voir, rappelons que :

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla\theta dx \leqslant 0 \quad \forall\theta\in\mathcal{C}_0^1(\Omega),\ \theta\geqslant 0 \qquad (**)$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, vrai aussi sur $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. On a $\phi'(u)\in\mathcal{H}^1(\Omega)$ (lemme précédent) et $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ dense dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ donc $\exists g_n\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi'(u)$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Alors $g_n\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ et $g_n\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi'(u)\varphi$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ car le produit par φ est continu sur $\mathcal{H}^1(\Omega)$. On applique $(**)$ avec $\theta = g_n\varphi$ et on fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $(*)$.

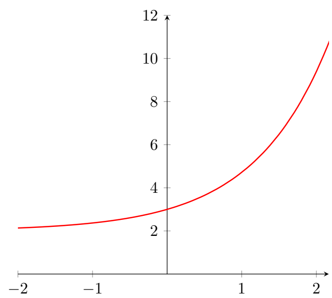
- *Étape 2.*

Lemme

Soit $\phi\colon\mathbb{R}\longrightarrow[0,+\infty[$ convexe croissante. $\exists\phi_n$ convexes croissantes $\mathcal{C}^2$, affines à l'infinie telles que :

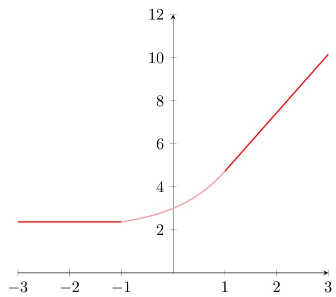
$$0\leqslant\phi_n\leqslant\phi \quad \text{et} \quad \phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi \text{ simplement}$$

  - ϕ convexe croissante $\Rightarrow$ ϕ a une limite en $-\infty$.



N'est pas $\mathcal{C}^2$, croît en $\exp(x)$ en $+\infty$. Il faut régulariser pour obtenir $\mathcal{C}^2$ et affine à l'infini.

  - Étape (a) : on tronque.



$$\tilde{\phi}_n(t) = \begin{cases} \phi(t) \text{ si } t\in[-n,n] \\ \phi(-n) \text{ si } t\leqslant n \\ a_n(t-n)+\phi(n) \text{ si } t\geqslant n \end{cases}$$

où $a_n = \phi_d'(n)$ (dérivée à droite car ϕ convexe).

  - Étape (b) :

$$\psi_{n,p}(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_p(x-y)\tilde{\phi}_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \rho_p(y)\tilde{\phi}_n(x-y)dy$$

où $\rho_p \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho_p(t) = p\rho(pt)$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors $\psi_{n,p} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est convexe, croissante et $\psi_{n,p} \geqslant 0$.

En ajoutant les hypothèses $\int_\mathbb{R} \rho = 1$ et $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq]-\infty, 0]$, on a de plus $\psi_{n,p} \leqslant \tilde{\phi}_n$ (on fait des moyennes locales avec tout le poids à gauche, et $\tilde{\phi}_n$ croissante). Quitte à décaler $\tilde{\phi}_n$ vers le bas (i.e. à lui retirer $\phi(n)$) on en tire $\psi_{n,p} \leqslant \phi$.

De plus $\psi_{n,p}(u) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \tilde{\phi}_n(u)\ \forall y$. En effet :

$$\psi_{n,p}(x) - \tilde{\phi}_n(x) = p\int_R \rho(py)\big[\tilde{\phi}_n(x-y) - \tilde{\phi}_n(x)\big]dy$$

Si $x \leqslant -n-k$ ou $x \geqslant n+k$ (k tel que $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq [-k, 0]$), on a $\psi''_{1,p}(x) = 0$, et en fait $\psi_{n,p}(x) = \tilde{\phi}_n(x)$.

Il reste à montrer que $\psi_{n,p}(x) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \tilde{\phi}_n(x)$ pour $x \in [-n-k, n+k]$.
Rappel. Par le lemme des trois pentes, une fonction convexe est localement lipschitzienne. Sur $[-n-2k, n+2k]$, il existe c_n tel que $|\tilde{\phi}_n(t_1) - \tilde{\phi}_n(t_2)| \leqslant c_n|t_1 - t_2|$. Donc si $x \in [-n-k, n+k]$ et $y \in \mathrm{supp}(\rho(p\cdot)) \subseteq [-k, 0]$, on a :

$$|\tilde{\phi}_n(x-y) - \tilde{\phi}_n(x)| \leqslant c_n|y|$$

Donc :

$$|\psi_{n,p}(x) - \tilde{\phi}_n(x)| \leqslant c_n \int p|y|\rho(py)dy \leqslant \frac{c_n}{p}\left(\int_\mathbb{R} |z|\rho(z)dz\right)$$

- Étape (c) : on pose $\phi_n(t) = \psi_{n,\lfloor n \rfloor n}(t)$. Fin de la preuve si $\lim_{-\infty} \phi = 0$; sinon, on se ramène à ce cas.

- *Étape 3.*

Lemme (Caccioppoli)

Considérons une sous-solution faible positive $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ et un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$. Il existe $C = C(\lambda, \Lambda, n, \omega, \Omega)$ tel que :

$$\int_\omega |\nabla v|^2 dx \leqslant C \int_\Omega v^2 dx$$

De plus si $\omega = \mathcal{B}(x_0, \rho)$ et $\Omega = \mathcal{B}(x_0, r)$ avec $0 < \rho < r$, on a $C \leqslant \frac{K(\lambda,\Lambda,n)}{(r-\rho)^2}$

Preuve.

$$\begin{aligned} v \text{ sous-solution } &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega),\ \varphi \geqslant 0,\ \int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),\ \varphi \geqslant 0,\ \int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi \leqslant 0 \qquad \text{par densité} \end{aligned}$$

Soit $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\eta(x) = 1$ si $x \in \omega$). Alors $\varphi = \eta^2 v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ (à vérifier en exercice). Donc :

$$\int A\nabla v.\nabla(\eta^2 v)dx \leqslant 0 \qquad (\eta^2 v \geqslant 0)$$

Ainsi,

$$\int \eta^2 A\nabla v.\nabla v dx \leqslant -2\int \eta v A\nabla v.\nabla\eta dx$$

Puis on écrit :

1. $$\int_\Omega \eta^2 A\nabla v.\nabla v dx \underset{\text{ellipticité}}{\geqslant} \lambda_\Omega \eta^2|\nabla v|^2 dx$$

2. $$\left|\int \eta v A\nabla v.\nabla\eta dx\right| \underset{\text{C.S.}}{\leqslant} \Big(\int \underbrace{\eta^2|A\nabla v|^2}_{\leqslant\Lambda^2\eta^2|\nabla v|^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(v^2|\nabla\eta|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\lambda\left(\int_\Omega \eta^2|\nabla v|^2\right) \leqslant \Lambda\left(\int_\Omega \eta^2|\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v^2|\nabla\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow\ \lambda\left(\int_\Omega \eta^2|\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Lambda\left(\int_\Omega \eta^2|\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$\int_\omega |\nabla v|^2 \leqslant \int_\Omega \eta^2|\nabla v|^2 \leqslant \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2\int_\Omega v^2|\nabla\eta|^2 \leqslant \|\nabla\eta\|^2_{\mathcal{L}^\infty}\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2\left(\int_\Omega v^2\right)$$

□

D'où le résultat voulu : si $\omega = \mathcal{B}(x_0,\rho)$, $\Omega = \mathcal{B}(x_0,r)$ alors $\exists\eta$ convenant et telle que $\|\nabla\eta\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} \leqslant \frac{2}{r-\rho}$

- *Étape 4.* Fin de la démonstration.
  Soit $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ convexe, croissante, $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ sous-solution faible telle que $\phi(u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Montrons que $\forall\omega \subset\subset \Omega$, $\phi(u \in \mathcal{H}^1(\omega)$ est sous-solution faible dans ω.

  Par l'étape 2, il existe ϕ_n convexe croissante, $\mathcal{C}^2$, affine à l'infini telle que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant \phi$ et $\phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi$ simplement.
  Par l'étape 1, $\phi_n(u)$ est sous-solution faible, et positive car ϕ_n à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
  Par l'étape 3, il existe c tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

  $$\int_\omega |\nabla\phi_n(u)|^2 \leqslant c\int_\Omega |\phi_n(u)|^2 \leqslant c \in_\Omega |\phi(u)|^2$$

  Par ailleurs $\phi_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(u)$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ donc dans $\mathcal{L}^2(\omega)$, par convergence dominée. Montrons que $\phi(u) \in \mathcal{H}^1(\omega)$.

  - Preuve 1. $\mathcal{H}^1(\omega)$ est un espace de Hilbert. $(\phi_n(u))$ est une suite bornée dans un Hilbert donc on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement. Elle converge fortement dans $\mathcal{L}^2(\omega)$ par ce qui précède, doc elle converge fortement par unicité de la limite dans $\mathcal{L}^2(\omega)$ (qui se démontrer par densité de $\mathcal{C}_0^\infty$ dans $\mathcal{L}^2$).

– Preuve 2. $f \in \mathcal{H}^1(\omega)$ ssi $f \in \mathcal{L}^2(\omega)$ et $\exists c > 0$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\omega)$ on ait :

$$\left| \int f \partial_f \varphi \right| \leqslant C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2} \qquad \text{(critère de dualité)}$$

Donc si $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ dans $\mathcal{L}^2$ et (f_n) bornée dans $\mathcal{H}^1$, on a $f \in \mathcal{H}^1$ car :

$$\left| \int f \partial_j \varphi \right| = \left| \lim \int f_n \partial_j f_n \varphi \right| \leqslant \overline{\lim} \|\partial_j f_n\|_{\mathcal{L}^2} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$$

Donc $\phi(u) \in \mathcal{H}^1(\omega)$. De plus :

$$\int A \nabla \phi_n(u).\nabla \varphi \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \int A \nabla \phi(u).\nabla \varphi \leqslant 0$$

Donc $\phi(u)$ est sous-solution faible.

□

2.3 Itérations de Moser

Théorème 8

Soit $x_0 \in \Omega$ et $0 < \rho < r$ avec $\mathcal{B}(x_0, r) \subset \Omega$). $\exists c > 0$ tel que pour toute sous-solution positive $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{B}(x_0,l))} \leqslant c \|v\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{B}(x_0,r))}$$

Remarque. La moitié de De Giorgi

Preuve. Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $R_j = \rho + 2^{-j}(r - \rho)$. Alors :

$$\mathcal{B}(x_0, \rho) \subset \mathcal{B}_{j+1} \subset \mathcal{B}_j \subset \ldots \subset \mathcal{B}(x_0, r) \qquad \text{où } \mathcal{B}_j = \mathcal{B}(x_0, R_j)$$

Moser : il existe $k > 1$ tel que $v_{j+1} = v^{k^{j+1}}$ estimé dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)$ en fonction de v^{k^k} dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)$.

Lemme

Soit $k \in \left[1, \frac{n}{n-2}\right]$ si $n \geqslant 3$, $k \in [1, +\infty[$ si $n = 2$. Il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall j \in \mathbb{N},\ \forall v \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_j)$:

$$\|v^k\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)} \leqslant \gamma \|\nabla v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)} + \gamma \|v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)}$$

Preuve. On a vu que, si $n \geqslant 3$, $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$ et $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [2, +\infty[$ (pas vu en cours).
Pour $\mathcal{H}^1(\Omega)$ avec Ω régulier, on a les mêmes injections car il existe un opérateur de prolongement $E_\Omega \colon \mathcal{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $E_\Omega f|_\Omega = f$. En particulier, $\exists E_{\mathcal{B}(x_0,1)} \colon \mathcal{H}^1(\mathcal{B}(x_0, 1)) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. On en déduit $E_{\mathcal{B}_j}$ en composant $E_{\mathcal{B}(x_0,1)}$ avec :

$$D_k \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_j) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(\mathcal{B}(x_0, 1)) \\ f & \longmapsto & f(x_0 + R_j(x - x_0)) \end{array} \right.$$

On vérifie que $\sup_j \|D_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}_j), \mathcal{H}^1(\mathcal{B}(x_0,1)))} < +\infty$. Donc $\|v\|_{\mathcal{L}^{2k}(\mathcal{B}_j)} \leqslant c \|v\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B}_j)}$.

Lemme

Soit k comme dans le lemme précédent et $v \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_j)$ sous-solution faible positive. Alors $v^k \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_{j+1})$ et v^k sous-solution faible positive. De plus, $\exists c$ tel que $\forall j$,

$$\|v^k\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} \leqslant c2^{kj}\|v\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)}$$

Preuve. Soit $\phi(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et t^k sinon. ϕ est convexe croissante (pas $\mathcal{C}^2$ si $n > 4$ quelque soit k) et $v^k = \phi(v)$. Par hypothèse, $v \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_j)$ donc $v \in \mathcal{L}^{2k}\mathcal{B}_j$, alors $\phi(v) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)$ et donc $\phi(v) \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}_{j+1})$. Alors par le lemme précédent :

$$\begin{aligned}\|v^k\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} &\leqslant \gamma\|\nabla v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} + \gamma\|v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1}} \\ &\underset{\text{Caccipoli}}{\leqslant} \gamma c_j^k\|v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} + \gamma\|v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} \qquad \text{où } c_j \leqslant \frac{K}{(r_j - r_{j+1})}\end{aligned}$$

Donc $c_j \leqslant \frac{1}{(2^{-j}(r-\rho))^2}$. D'où :

$$\|v^k\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} \leqslant \left(\gamma\frac{A^k}{(r-\rho)^2} + 1\right)2^{kj}\|v\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)}$$

Ce qui termine la preuve du lemme. Revenons à la preuve du théorème. Posons $N_j = \|v\|_{\mathcal{L}^{2n^j}(\mathcal{B}_j)}$. Alors $N_0 = \|v\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_0)}$ et $N_\infty \sim \|v\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}(x_0,\rho))}$ (heuristique à montrer). Posons $v_j = v^{k^j}$, alors $N_j = \|v_j\|^{\frac{1}{k}j}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)}$ et $v_{j+1} = v_j^k$. Alors par le second lemme :

$$\|v_{j+1}\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} \leqslant C2^{kj}\|v_j\|^{2k}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)}$$

Donc :

$$N_{j+1}^2 = \|v_{j+1}\|^{\frac{2}{k^{j+1}}}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_{j+1})} \leqslant (C2^{kj})^{\frac{1}{k^{j+1}}i}\underbrace{\|v_j\|^{\frac{2}{k^j}}_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}_j)}}_{=N_j^2}$$

Ainsi :

$$N_{j+1}^2 \leqslant (C2^{kj})^{\frac{1}{k^{j+1}}}N_j^2 \qquad \Rightarrow \qquad N_j^2 \leqslant \prod_{p=1}^{+\infty}(c2^{pk})^{\frac{1}{k^p}}N_0^2$$

Ce produit est fini car :

$$\log\left(\prod_{p=1}^{+\infty}(c2^{pk})^{\frac{1}{k^p}}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}\log(c2^{pk}) < +\infty$$

Donc $N_j \leqslant CN_0$ $\forall j$. Montrons que ceci implique que $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}(x_0,\rho))$. Posons $M = 2CN_0$ et $A = \{x \in \mathcal{B}(x_0,\rho) \mid v(x) \geqslant M\}$. Alors :

$$N_j^{2k^j}\int_{\mathcal{B}_j} v^{2k^j}dx \geqslant \int_A M^{2k^j}dx = |A|M^{2k^j}$$

Or $N_j^{2k^j} \leqslant (CN_0)^{2k^j} = \left(\frac{M}{2}\right)^{2k^j}$. Donc :

$$|A|M^{2k^j} \leqslant M^{2k^j}2^{-2k^j} \quad \text{i.e. } \forall j,\ |A| \leqslant 2^{-2k^j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$

D'où $|A| = 0$ i.e. $\|v\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}(x_0,\rho))} \leqslant M = 2CN_0 \leqslant 2C\|v\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B}(x_0,r))}$ □