ENS Cachan 2015-2016
Probabilités
L3

Feuille de TD N^{o}4

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Soit $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$ fonction de carré intégrable. Montrer que

$$\mathrm{Var}(Z) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(Z - \mathbb{E}^{(i)} Z)^2\right].$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'Efron-Stein.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que la mesure Gaussienne satisfait une inégalité de Poincaré.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur Gaussien standard i.e. les X_i sont des variables Gaussiennes standard indépendantes. Le but est donc de montrer que pour tout $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continument différentiable on a

$$\mathrm{Var}(f(X)) \leq \mathbb{E}\left[\left\|\nabla f(X)\right\|^2\right]$$

1. Montrer qu'il suffit de montrer l'inégalité pour $n = 1$.

   Par la suite on prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continument dérivable.
2. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables de Rademacher indépendantes. On pose $S_n = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. Calculer $\mathrm{Var}^{(i)}(f(S_n))$ pour tout $i \leq n$.
3. Montrer que

$$\mathrm{Var}(f(S_n)) \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)\right)^2\right]$$

4. Montrer que

$$\limsup_{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)\right)^2\right] = 4\mathbb{E}\left[f'(X)^2\right].$$

5. En déduire l'inégalité de Poincaré Gaussienne pour $n = 1$.

Exercice 3.

1. Montrer que si un mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ satisfait une inégalité de Sobolev Logarithmique alors elle satisfait une inégalité de Poincaré.
   Indication : Pour toute fonction f et $\varepsilon > 0$, appliquer l'inégalité de Sobolev Logarithmique pour la fonction $(1 + \varepsilon f)$.
2. Montrer que l'inégalité de Sobolev Logarithmique et l'inégalité de Poincaré ne sont pas equivalentes. *Indication : Considérer la loi exponentielle.*