Gestion des incertitudes
TD2 :

Lucie Le Briquer

26 janvier 2018

Exercice 3 (algorithme de Metropolis Hastings)

1.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \mathbb{P}(X_{n+1}=y|X_n=x) \\ &= a(x,y)Q(x,y) \quad x \neq y \end{aligned}$$

$$P(x,x) = 1 - \sum_{y \neq x} P(x,y)$$

2. On souhaite que $\forall x \neq y$:

$$\begin{aligned} &\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \\ \Leftrightarrow\ &\pi(x)a(x,y)Q(x,y) = \pi(y)a(y,x)Q(y,x) \\ \Leftrightarrow\ &a(x,y) = r(x,y)a(y,x) \end{aligned}$$

avec $r(x,y) = \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}$. soit $F(z) = zF\left(\frac{1}{z}\right)$.

Montrons que la réversibilité $\Leftrightarrow a(x,y) = F(r(x,y))\lambda(x,y)$.

$\Rightarrow$:

$$\lambda(x,y) := \frac{a(x,y)}{F(r(x,y))} = \frac{r(x,y)a(x,y)}{F(r(x,y))} = \frac{a(y,x)}{F(r(y,x))} = \lambda(y,x)$$

$\Leftarrow$: $a(x,y) = F(r(x,y))\lambda(x,y)$ et

$$a(y,x) = F\left(\frac{1}{r(x,y)}\right)\lambda(x,y) = \frac{F(r(x,y))}{r(x,y)}\lambda(x,y) = \frac{a(x,y)}{r(x,y)}$$

Deux fonctions importantes :

$$a(x,y) = \min(1, r(x,y)) \qquad\qquad a(x,y) = \frac{r(x,y)}{1+r(x,y)}$$

3. $\pi(x) = Z^{-1}\exp(-\beta V(x))$ avec $\beta > 0$. On suppose de plus $Q(x,y) = Q(y,x)$.

$$r(x,y) = \exp(-\beta(V(y)-V(x))) \qquad a(x,y) = \min\big(1, \exp(-\beta(V(y)-V(x)))\big)$$

On a $a(x,y) = 1$ quand le potentiel du point départ est plus grand que celui du point d'arrivée (descente).

4.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_0,\dots,X_n)=(x_0,\dots,x_n)) &= \pi(x_0)P(x_0,x_1)\dots P(x_{n-1},x_n)\\ &= P(x_1,x_0)\pi(x_1)\dots P(x_{n-1},x_n)\\ &= P(x_1,x_0)P(x_2,x_1)\dots P(x_n,x_{n-1})\pi(x_n)\\ &= \mathbb{P}((X_n,\dots,X_0)=(x_n,\dots,x_0))\end{aligned}$$

5. P auto-adjoint signifie que $\langle Pf,g\rangle_\pi = \langle f,Pg\rangle_\pi$, montrons que cela équivaut à P est π réversible.

   $\Leftarrow$:

$$Pf(x)=\sum_{y\in M} P(x,y)f(y)$$

$$\sum_{x,y} P(x,y)f(y)g(x)\pi(x) = \sum_{x,y} f(x)P(x,y)g(y)\pi(x) \quad \text{puis réversibilité}$$

   $\Rightarrow$: à faire.

6. P est symétrique donc diagonalisable $Pe_i=\lambda_i e_i$ avec $\langle e_i,e_j\rangle_\pi=\delta_{i,j}$ et $\lambda_1\geqslant\dots\geqslant\lambda_d$.

$$P\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

   Montrons que toutes valeurs propres sont $\leqslant 1$. Prenons i_0 tel que $|e(i_0)|=\max_{1\leqslant j\leqslant l}|e(j)|$;

$$\sum_{j=1}^d P_{i_0,j}e(j)=\lambda e(j)$$

   Alors,

$$|\lambda||e(i_0)|\leqslant\sum_{j=1}^d P_{i_0,j}|e(j)|\leqslant|e(j_0)|$$

   Donc $\lambda_1=1$.

7. Si 1 est valeur propre simple pour P, alors elle l'est aussi pour P^T. Ainsi, ν mesure invariante $\Leftrightarrow \nu P=\nu \;\Leftrightarrow\; P^T\nu^T=\nu^T \;\Leftrightarrow \nu=\pi$

8. Si 1 est valeur propre simple et $\lambda_d>-1$. Soit $f\colon M\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\bar f = f-\mathbb{E}_\pi(f)$. On a :

$$\bar f=\sum_{i=1}^d\langle\bar f,e_i\rangle_\pi.e_i=\sum_{i=2}^d\langle\bar f,e_i\rangle_\pi.e_i$$

$$P^n\bar f=\sum_{i=2}^n\lambda_i^n\langle\bar f,e_i\rangle.e_i$$

$$\begin{aligned}\|P^n\bar f\|^2_{L^2(\pi)} &= \sum_{i=2}^d\lambda_i^{2n}|\langle\bar f,e_i\rangle|^2\\ &\leqslant\rho^{2n}\|\bar f\|^2_{L^2(\pi)}\end{aligned}$$

   où $\rho=\max(|\lambda_2|,|\lambda_d|)<1$.

9.

10.

11.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\pi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{f}(X_k)\right)^2 &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_k)^2)+\frac{2}{n}\sum_{k<l}\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_k)\bar{f}(X_l))\\ &= \mathrm{Var}_\pi(f)+\frac{2}{n}\sum_{k<l}\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_0)\bar{f}(X_{l-k}))\\ &= \mathrm{Var}_\pi(f)+\frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\underbrace{\sum_{m=1}^{l}\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_0)\bar{f}(X_m))}_{S_l} \quad (*)\end{aligned}$$

Or $|\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_0)\bar{f}(X_m)| \leqslant \|\bar{f}\|_{L^2(\pi)}\|P^m\bar{f}\|_{L^2(\pi)} \leqslant \rho^m\|\bar{f}\|_L^2(\pi)^2$. Finalement,

$$(*)\quad \mathrm{Var}_\pi(f)+2\sum_{m\geqslant 1}\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_0)\bar{f}(X_m))$$

12.

$$v(f,P)=\mathrm{Var}_\pi(f)+2\sum_{m\geqslant 1}\mathbb{E}^\pi(\bar{f}(X_0)P^m\bar{f}(X_0)) = 2\langle\bar{f},(\mathrm{id}-p)^{-1}\bar{f}\rangle_\pi-\|\bar{f}\|^2_{L^2(\pi)}$$

car $\sum_{m\geqslant 0}P^m=(\mathrm{id}-P)^{-1}$.