Analyse complexe

Chapitre 1 : Rappels

Lucie Le Briquer

1 Rappels de topologie

Définition 1 (ouvert)

Dans $\mathbb{C}$ un ouvert U est une union de disques ouverts $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$
de façon équivalente $\forall z_0 \in U$ il existe $r > 0$ avec $D(z_0, r) \subset U$

Définition 2 (intérieur)

Si $X \subset \mathbb{C}$, l'intérieur $\overset{\circ}{X}$ est l'union des disques ouverts contenus dans X ; c'est aussi le plus grand ouvert contenu dans X

Remarque.

L'*adhérence* de X notée $\bar{X}$ est le plus petit fermé contenant X. La frontière de X est $\bar{X} - \overset{\circ}{X}$

Définition 3 (compact)

$X \subset \mathbb{C}$ est compact : si $X \subset \cup_{i \in I} U_i$ avec U_i ouvert alors $\exists J$ fini $\in I$ avec $X \subset \cup_{i \in J} U_i$

Critère. Compact ssi (fermé et borné)

Définition 4 (connexe, connexe par arc)

- $X \subset \mathbb{C}$ est *connexe* si l'inclusion $X \subset U_1 \cup U_2$ avec U_i ouverts disjoints entraîne $X \subset U_1$ ou $X \subset U_2$
- X est *connexe par arc* si $\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists \gamma_i : [0, 1] \to X$ continue avec $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$

Remarque.

- Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe La réciproque est vraie pour un ouvert mais fausse en général.
- Un convexe, un ensemble étoilé est CPA
- Si f continue $f(\text{compact}) = \text{compact}$ et $f(\text{connexe}) = \text{connexe}$

Définition 5 (homotopie)

Une homotopie entre deux chemins γ_1 et γ_2 tq $\gamma_i(0) = x_1$ et $\gamma_i(1) = x_2$ est une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ avec $H(0,t) = \gamma_1(t) \quad H(1,t) = \gamma_2(t) \quad H(s,0) = x_1$ $H(s,1) = x_2$

Définition 6 (simplement connexe)

Un espace CPA X est *simplement connexe* si étant donnés deux chemis γ_1 et γ_2 de x_1 à x_2 il existe une homotopie de γ_1 à γ_2

Exemple.
Un disque, un convexe, un ensemble étoilé est simplement connexe

Remarque.
Pour un *convexe* : $H(s,t) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_2(t)$

2 Rappels sur les séries et suites

2.1 Produit de séries

Propriété 1 (produit de Cauchy)

Si les deux séries de terme général a_n et b_n convergent *absolument* alors la série de droite converge absoluement et on a l'égalité :

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m) = \sum_{l=0}^{+\infty}(\sum_{n+m=l} a_n b_m) \quad (1)$$

Remarque.
Si a_n, b_m sont des réels positifs alors (1) est toujours vrai avec éventuellement "$+\infty = +\infty$"

2.2 Convergence uniforme de suites et séries de fonctions

Définition 7 (convergence uniforme)

$f_n : U \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur $X \subset U$ s'il existe $g : X \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall z \in X\ :\ |f_n(z) - g(z)| \leq \varepsilon$$

Propriété 2

- Une limite uniforme de fonction continue est continue
- Si $U = [a,b]$ on a $lim \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b g(t)dt$
- La plus utile : si $\underset{\text{ouvert}}{U} \subset \mathbb{C}$, f_n CVU sur tout compact contenu dans U

3 Similitude, homographie et sphère de Riemann

Théorème 3

Une similitude du plan complexe s'écrit $f(z) = az + b$ ou $f(z) = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$

Définition 8 (homographie)

$$f(z) = \tfrac{az+b}{cz+d} \quad \text{avec } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ et } ad - bc \neq 0 \quad f : \mathbb{C} - \{\tfrac{-d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{\tfrac{a}{c}\}$$

Formellement on peut étendre f en une bijection $\bar{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \frac{-d}{c} & \longmapsto & \infty \\ \infty & \longmapsto & \frac{a}{c} \end{array} \right.$

On appelle $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la *sphère de Riemann* ou la *droite projective complexe* notée $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{ \text{ droites vectorielles dans } \mathbb{C}^2\} = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}/\sim$$

où $(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2')$ si $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$ tq $z_i' = \alpha z_i$

$$\text{Action de } GL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})\text{inversibles} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} GL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times [(z_1, z_2)] & \longmapsto & [(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)] \end{array}$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_1 \cup U_2 \quad U_1 = \{[(z_1, z_2)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) | z_1 \neq 0\} \quad$ et $U_2 = \{[(z_1, z_2)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) | z_2 \neq 0\}$

Remarque.

$U_1 = \{[(1,z)] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) | z \in \mathbb{C}\}$

$\exists \Phi_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & U_1 \\ z & \longmapsto & [(1,z)] \end{array} \right. \qquad \exists \Phi_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & U_2 \\ z & \longmapsto & [(z,1)] \end{array} \right. \qquad \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1(z) = \frac{1}{z}$