Géométrie
Chapitre 1 : Topologie algébrique

Lucie Le Briquer

1^{er} février 2018

Table des matières

Quelques références sur la topologie algébrique :

1. Pansu, *Groupe fondamental, revêtement*
2. Massey, *Algeric topology, an introduction*

Quelques références sur la topologie algébrique :

1. Pansu 2
2. Milnor,*Topology from the differentiable view point*
3. Gramain, *Topologie des surfaces*

1 Détermination de l'angle

1.1 Quelques résultats de topologie générale

Propriété 1 (recollement d'applications continues)

X, Y deux espaces topologiques avec $X = A \cup B$ où A et B fermés. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ avec $f|_A, f|_B$ continues. Alors f est continue.

Preuve.
Soit F un fermé dans Y. Montrons que $f^{-1}(F)$ est fermé.

$$f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = (f|_A)^{-1}(F) \cup (f|_B)^{-1}(F) \text{ fermé}$$

□

Propriété 2 (nombre de Lebesgue d'un recouvrement)

X compact métrique, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Alors il existe $\varepsilon > 0$, appelé nombre de Lebesgue, tel que $\forall x \in X,\ \exists i$ tel que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset U_i$.

Preuve.
Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini $U_1, \ldots, U_n$ tel que $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$. Considérons la fonction continue sur X $x \mapsto d(x, U_i^C)$, et définissons :

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \max\limits_{i=1\ldots n} d(x, U_i^C) \end{array} \right.$$

qui est continue. Or, $\forall x\ \exists i$ tel que $x \in U_i$, ainsi $d(x, U_i^C) > 0$, d'où φ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue sur X compact donc atteint ses bornes :

$$\inf_X \varphi = \min_X \varphi = \varepsilon > 0$$

Cet ε convient. □

Définition 1 (topologie quotient)

Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On note $X/_{\mathcal{R}} = \{\text{classes d'équivalence pour } \mathcal{R}\}$. Notons :

$$\pi\colon X \longrightarrow X/_{\mathcal{R}} \quad \text{la projection canonique}$$

$$U \text{ ouvert de } X/_{\mathcal{R}} \ \Leftrightarrow\ \pi^{-1}(U) \text{ ouvert de } X \text{ (saturé pour } \mathcal{R})$$

Ceci définit la topologie quotient ; c'est la topologie la plus fine qui rend π continue.

Propriété 3 (universelle)

Si Y est un autre espace topologique et $X \xrightarrow{f} Y$, f continue et passe au quotient pour $\mathcal{R}$ (f constante sur les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$), alors $\exists! \bar{f}\colon X/_{\mathcal{R}} \longrightarrow Y$ continue telle que

$$\bar{f} \circ \pi = f$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& X/_{\mathcal{R}} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemples. $[0,1]/_{0\sim 1} \longrightarrow \mathcal{S}^1$, $f\colon t \mapsto e^{2i\pi t}$, $\bar{f}$ est une bijection continue. Donc $[0,1]/_{0\sim 1}$ est homéomorphe à $\mathcal{S}^1$.

Propriété 4

$X \xrightarrow{f} Y$ bijection continue, X et Y compacts $\Rightarrow f^{-1}$ continue.

Propriété 5

$F \subset X$, F fermé donc compact $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ compact dans Y

Définition 2

X, Y espaces topologiques, $f\colon A \subset X \longrightarrow Y$ continue. On pose :

$$X \cup_f Y = (X \cup Y)_{x \sim f(x)}$$

Exemple. $X = Y = [0,1]$, $A = \{0,1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ alors $X \bigcup_f Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^1$.

1.2 Détermination de l'angle

Soit $f\colon I \longrightarrow \mathcal{S}^1 =$ cercle unité de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit

$$\exp\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$$

On cherche une fonction $\theta\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(t) = \exp \circ\, \theta(t) = e^{i\theta(t)}$. On se pose la question de l'existence et de l'unicité de θ.

Unicité. Si $f(t) = e^{i\theta(t)} = e^{i\theta_1(t)}$ avec θ, θ_1 continues. Alors $\theta_1(t) - \theta(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi $\theta(t) - \theta_1(t) = 2k\pi$ pour un certain k entier. On a donc l'unicité à une constante près de la forme $2\pi k$.

Existence.

Remarque initiale. Si f évite 1 dans $\mathcal{S}^1$, θ est facile à construire :

$$\left\{ \begin{array}{ccc}]0, 2\pi[& \xrightarrow{\sim} & \mathcal{S}^1 \backslash \{1\} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right. \quad \text{homéomorphisme}$$

Notons a son inverse. $\theta = a \circ f$ convient, $e^{i\theta = f}$. Pour k entier, on peut remplacer a par $a + 2k\pi$.

De même si f évite -1 :

$$\left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi, \pi[& \underset{\sim}{\xrightarrow{\exp}} & \mathcal{S}^1 \backslash \{-1\} \\ & \xleftarrow{b} & \end{array} \right.$$

Théorème 1 (relèvement)

Soit $f\colon I \longrightarrow \mathcal{S}^1$ continue. $f(t_0) = e^{i\theta_0}$ alors il existe un unique relèvement, de f, $\theta\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\theta(t_0) = \theta_0$ (relèvement : θ continue et $f(t) = e^{i\theta(t)}$).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R} \\ & \mathcal{S}^1 \arrow[ur, "\exp"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve.
Existence. $I = [0,1]$, $t_0 = 0$, $f(0) = e^{i\theta_0}$ i.e. $\theta(0) = \theta_0$. On pose $U = f^{-1}(\mathcal{S}^1\backslash\{1\})$ et $V = f^{-1}(\mathcal{S}^1\backslash\{-1\})$. $U \cup V$ est un recouvrement de $[0,1]$ ainsi on peut considérer ε un nombre de Lebesgue de ce recouvrement. Pour n assez grand on a $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$$

Pour tout i :

$$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \subset U \text{ ou } V$$

On va définir θ de proche en proche. Supposons que $[0, \frac{1}{n}] \subset U$, $\theta_0 \in]2k_0\pi, 2(k_0+1)\pi[$ pour un certain k_0. On pose alors :

$$\theta|_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} = a \circ f|_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} + 2k_0\pi$$

On suppose $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \subset V$, $f(V) \subset \mathcal{S}^1\backslash\{-1\}$. $\theta\left(\frac{1}{n}\right) \in]-\pi + 2k_1\pi, \pi + 2k_1\pi[$ avec k_1 bien déterminé. $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{i\theta\left(\frac{1}{n}\right)} \neq -1$. On pose alors :

$$\theta(t) = b \circ f(t) + 2k_1\pi \text{ sur } \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \qquad \theta\left(\frac{1}{n}\right) = \text{l'ancien } \theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

etc. On obtient finalement θ sur $[0,1]$, continue sur $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ pour tout $i \Rightarrow$ continue. $\square$

Définition 3 (degré d'une application)

Soit $f\colon \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathcal{S}^1$ continue. $\deg f$ correspond au nombre de tours de f. Par le théorème de relèvement, il existe θ continu tel que $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$. On définit :

$$\deg f = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} \quad \text{qui est entier}$$

$e^{i\theta(2\pi)} = f(e^{2\pi i}) = f(e^{i0}) = e^{i\theta(0)}$

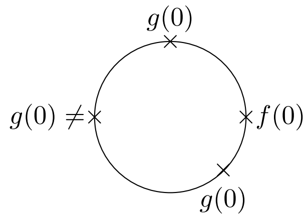
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\theta"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathcal{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathcal{S}^1 \end{tikzcd}$$

Proposition 1

Soient $f, g\colon \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathcal{S}^1$ continues, si elles sont suffisamment proches $\deg(f) = \deg(g)$.

Preuve.

Montrons que si $\|f-g\|<2$ alors $\deg f = \deg g$. Soit $u \in \mathcal{S}^1$, $\|f(u)-g(u)\| = 2$ est impossible donc $f(u)$ n'est jamais opposé à $g(u)$. Soit θ un relevé de f et φ un relevé de g. On peut supposer $\theta(0)$ et $\varphi(0) \in [-\pi, \pi[$.



$$\|\theta(0)-\varphi(0)| < \pi$$

$\varphi(0)$ dans l'intervalle $]\theta(0)-\pi, \theta(0)+\pi[$. On a toujours $|\theta(t)-\varphi(t)| < \pi$ pour tout t, car $|\theta(t)-\varphi(t)| = \pi$ interdit puisque $g(t) \neq -f(t)$.

Ainsi :

$$|\deg f - \deg g| = \left|\frac{\theta(2\pi)-\theta(0)}{2\pi} - \frac{\varphi(2\pi)-\varphi(0)}{2\pi}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\big(|\theta(2\pi)-\varphi(2\pi)| + |\theta(0)-\varphi(0)|\big) < 1$$

□

2 Groupe fondamental

2.1 Définitions

Définition 4 (chemin)

Soit X un espace topologique. Un chemin est une fonction $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow X$ continue. C'est un chemin de x à y si $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$.

Définition 5 (lacet)

Un lacet est un chemin fermé i.e. $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow$ continue avec $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Définition 6 (composition des chemins)

Si on a deux chemins α de x à y et β de y à z, on peut définir $\gamma = \alpha\beta$ un chemin de x à z qui enchaîne les deux chemins.

$$\gamma(t) = \alpha(2t) \text{ pour } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \qquad \gamma(t) = \beta(2t-1) \text{ pour } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Définition 7 (inverse d'un chemin)

Soit α un chemin. On note α^{-1} le chemin parcouru en sens inverse i.e. $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

Définition 8 (homotopie de chemin)

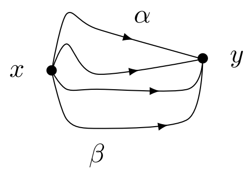
α est homotope à β (noté $\alpha \sim \beta$) s'il existe :

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

continue telle que :

$$H(0,t) = \alpha(t) \qquad H(1,t) = \beta(t)$$

$$H(s,0) = x \qquad H(s,1) = y$$



Propriété 6

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Preuve.

1. réflexif : $\alpha \sim \alpha$
2. symétrique : $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ en prenant $H(s,t) = H(1-s,t)$.
3. transitif : si $\alpha \sim \beta$ et $\beta \sim \gamma$ (H,K). On définit :

$$L(s,t) = H(2s,t) \text{ pour } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \qquad L(s,t) = K(2s-1,t) \text{ pour } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1$$

On a alors la continuité sur $\left[0,\frac{1}{2}\right] \times [0,1]$ et sur $\left[\frac{1}{2},1\right] \times [0,1]$ donc sur $[0,1] \times [0,1]$.

□

Définition 9 (groupe fondamental)

$$\begin{aligned} \pi_1(X,x) &= \{\text{classes d'homotopie de lacets basés en } x\} \\ &= \{[\gamma],\ \gamma\colon [0,1] \longrightarrow X \text{ continue avec } \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \end{aligned}$$

Proposition 2

$\pi_1(X,x)$ est un groupe pour la composition des lacets.

Preuve.

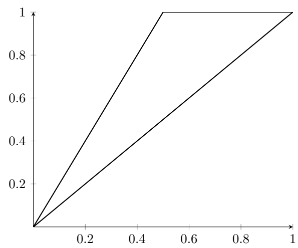
Soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ des lacets en x avec $\alpha \overset{H}{\sim} \alpha'$ et $\beta \overset{K}{\sim} \beta'$. Montrons que $\alpha\beta \sim \alpha\beta'$. On pose :

$$L(s,t) = H(s,2t) \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \qquad L(s,t) = K(s,2t-1) \text{ pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$$

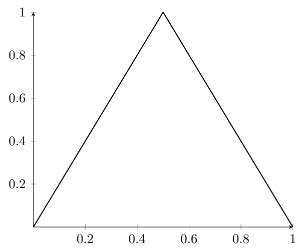
L est continue sur $[0,1] \times [0,1]$. C'est bien cohérent en $\frac{1}{2}$ car cela vaut x. On a bien une loi :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) \times \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(X,x) \\ ([\alpha],[\beta]) & \longmapsto & [\alpha\beta] \end{array} \right.$$

Élément neutre. x lacet constant en x. Montrons que $\alpha x \sim \alpha$. $\alpha x = \alpha \circ \varphi$ avec $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue décrit par le graphe de φ :



Ori $\varphi \sim \mathrm{id}$. Posons $H(s,t) = \alpha((1-s)\varphi(t) + st)$: $\alpha x \overset{H}{\sim} \alpha$.
Inverse. $[\alpha]$ dans $\pi_1(X,x)$ a un inverse qui est $[\alpha^{-1}]$. En effet $\alpha\alpha^{-1} = \alpha \circ \varphi$ avec φ décrit par le graphe suivant :



Alors $\alpha\alpha^{-1} \overset{H}{\sim} x$ avec $H(x,t) = \alpha((1-s)\varphi(t))$.
Associativité. Soient α, β, γ trois lacets en x. Montrons que

$$(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$$

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \circ \varphi$

$\varphi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continu, décrit par le graphe suivant : On pose :

$$H(s,t) = \alpha(\beta\gamma)((1-s)\varphi(t) + st)$$

Conclusion : $\pi_1(X,x)$ est un groupe pour la composition des chemins. $\square$

Remarque. Si X est connexe par arcs alors $\pi_1(x,x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,y)$.
Raison :

$$\begin{cases} \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(X,y) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\alpha^{-1}\gamma\alpha] \end{cases}$$

est un morphisme bien défini. Si $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \alpha^{-1}\gamma\alpha \sim \alpha^{-1}\gamma'\alpha$
L'image de $\gamma\gamma'$ est l'image de γ enchaînée avec l'image de γ'.

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha\alpha^{-1}\gamma'\alpha \sim \alpha^{-1}\gamma\gamma'\alpha$$

car $\alpha\alpha^{-1} \sim x$.

Morphisme inverse.
$$\left\{\begin{array}{ccc} \pi_1(X,y) & \longrightarrow & \pi_1(X,x) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\alpha\gamma\alpha^{-1}] \end{array}\right.$$
C'est un inverse car la composée des 2 est $[\gamma] \mapsto [\alpha\alpha^{-1}\gamma\alpha\alpha^{-1}]$ et $\alpha\alpha^{-1}\gamma\alpha\alpha^{-1} \sim \gamma$ puisque $\alpha\alpha^{-1} \sim x$.

Remarque. Pour X connexe par arcs on peut donc parler de $\pi_1(X)$.

Définition 10 (simple connexité)

X est simplement connexe si X et connexe par arcs et $\pi_1(X) = \{1\}$.

Exemple. $\mathbb{C}$ est simplement connexe. $\mathcal{S}^1, \mathbb{C}^*$ ne le sont pas.

Exemples. X convexe dans $\mathbb{R}^n \Rightarrow X$ simplement connexe.
Raison : si X est convexe $\forall x, y \in X$ alors $[x, y] \subset X$. de plus, pour γ un lacet en x, par définition $\gamma(t) \in X$ pour $t \in [0,1]$. Par convexité, $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sx \in X$ pour $t \in [0,1]$. H est continue sur $[0,1] \times [0,1]$ donc $\gamma \sim x$.

Propriété 7

$$\left\{\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{S}^1, 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \alpha & \longmapsto & \deg\alpha \end{array}\right.$$

est un homéomorphisme. $\pi(\mathcal{S}^1, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$

Preuve.
Montrons que $\alpha \overset{H}{\sim} \beta \Rightarrow \deg\alpha = \deg\beta$. γs est continue en s. $\gamma_{\frac{i}{n}}$ $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour n assez grand $\|\gamma_{\frac{i}{n}} - \gamma_{\frac{i+1}{n}}\| < 2$. D'où $\deg\alpha = \deg\gamma_0 = \deg\gamma_{\frac{1}{n}} = \ldots = \deg\gamma_1 = \deg_\beta$.

Surjectivité. $\deg(z \mapsto z^n) = n$

Injectivité. Soit α tel que $\deg\alpha = 0$. Montrons que α est homotope à une constante. $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{S}^1$ avec $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$. On considère un relèvement :
$$\alpha(t) = e^{i\theta(t)}$$
θ est continue, $\theta(0) = 0$ et on a $\deg\alpha = \frac{\theta(1)}{2\pi}$. Or $\deg\alpha = 0$ donc $\theta(1) = 0$. $\theta\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\theta(0) = \theta(1) = 0$, θ est homotope à 0.
$$H(s,t) = e^{i(1-s)\theta(t)}$$

Morphisme. Montrons que $[\alpha] \mapsto \deg\alpha$ est un morphisme. Soit α, β et θ, φ leur relevé. $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 2\pi\deg\alpha$, $\varphi(0) = 2\pi(\deg\alpha)$, $\varphi(1) = 2\pi(\deg\alpha + \deg\beta)$
$$\frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = \deg\beta$$
$\alpha\beta$ a comme relèvement démarrant à 0 : $\theta\varphi$. Donc :
$$\deg(\alpha\beta) = \frac{\theta\varphi(1) - \theta\varphi(0)}{2\pi} = \frac{2\pi(\deg\alpha + \deg\beta) - 0}{2\pi} = \deg\alpha + \deg\beta$$
$\square$

Proposition 3

Soient X,Y deux espaces topologiques.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \pi_1(X\times Y,(x,y)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X,x)\times\pi_1(Y,y) \\ [\gamma=(\alpha,\beta)] & \longmapsto & ([\alpha],[\beta]) \end{array}\right.$$

Preuve. À faire en exercice. □

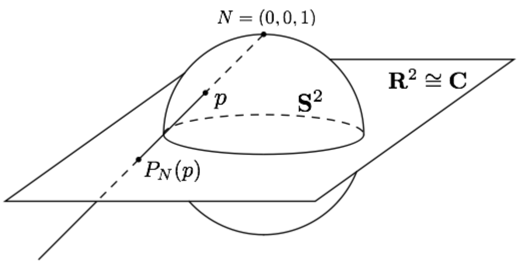
2.2 Exemples

Exemple. $T^2=\mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^1$. $\pi_1(\mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^1)=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^2$.

$$\mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^1=[0,1]\times[0,1]/_{(x,0)\sim(x,1)\ \ (0,y)\sim(1,y)}$$

$\mathcal{S}^1=[0,1]/_{0\sim 1}$

Exemple. $\mathcal{S}^n$ $n\geqslant 2$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est simplement connexe $\pi_1(\mathcal{S}^n)=\{1\}$.
Projection stéréographique π (N le pôle nord) homéomorphisme entre $\mathcal{S}^2\backslash\{N\}$ et $\mathbb{R}^2$. Idem pour $\mathcal{S}^n\backslash\{N\}$ et $\mathbb{R}^n$.



Soit γ un lacet dans $\mathcal{S}^n\backslash\{N\}$, alors $\pi(\gamma)\overset{H}{\sim}x$ dans $\mathbb{R}^n$. $\gamma^{-1}\circ H$ est une homotopie entre γ et $\pi^{-1}(x)$. Si γ chemin dans $\mathcal{S}^n\backslash\{N\}$ alors γ est homotope à un arc de cercle.
Pour γ n'évitant aucun point de $\mathcal{S}^n$, on pose $\gamma=\gamma_1\ldots\gamma_{n-1}$ avec $\gamma_i(t)=\gamma|_{[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]}$. Pour n assez grand, $\gamma_1\ldots\gamma_n$ évitent un point. $\gamma_i\sim\gamma_i'$ un arc de cercle. Alors $\gamma\sim\gamma_1'\ldots\gamma_n'$ une réunion finie d'arcs de cercles. $\gamma\sim\gamma'$ avec γ' non surjectif, $\gamma'\sim$ constante.

2.3 Applications

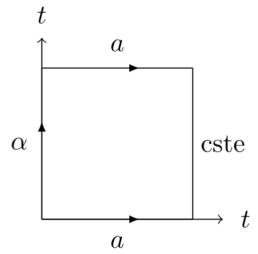
Proposition 4

X espace topologique, α lacet de X ($\alpha\colon[0,1]\longrightarrow X$ continue $\alpha(0)=\alpha(1)$ ou $f\colon\mathcal{S}^1\longrightarrow X$ continue, il suffit d'identifier les extrémités $f(e^{2\pi it})=\alpha(t)$).

$$\alpha\sim\text{cste}\ \Leftrightarrow\ f\text{ s'étend continûment en }F\colon D^2\longrightarrow X$$

Preuve.

$\Leftarrow$: supposons que f s'étende continûement à $F\colon D^2 \longrightarrow X$, $F|_{\mathcal{S}^1} = f$. $\mathcal{S}^1$ est un lacet dans D^2 qui est simplement connexe, alors $\mathcal{S}^1 \overset{H}{\sim}$ cste dans $\mathcal{D}^2$. $F \circ H$ donne une homotopie entre f et une constante dans X.
$\Rightarrow$: inversement si $\alpha \overset{H}{\sim}$ cste, alors $H(0,t) = \alpha(t)$, $H(1,t)$ =cste, $H(s,0) = H(s,1)$.



f est le passage au quotient de α sur $[0,1]/_{0\sim 1}$, F le passage au quotient de H sur $[0,1] \times [0,1]/_{(s,0)\sim(s,1)\ \ (1,t)\sim(1,t')}$, formellement :

$$F((1-s)e^{2\pi i t}) = H(s,t)$$

$\square$

Théorème 2 (Brouwer)

Soit $f\colon D^2 \longrightarrow D^2$ continue, alors f a un point fixe.

Preuve.
Par l'absurde. Pour $x \in D^2$ on a $f(x) \neq x$. On construit la demi-droite issue 0 passant par x : elle intersecte $\mathcal{S}^1$ en un unique point $r(x) \in \mathcal{S}^1$. On construit ainsi $r\colon D^2 \longrightarrow \mathcal{S}^1$ une rétraction, r est continue et vérifie $r|_{\mathcal{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}^1}$.
On a vu précedemment que si $f\colon \mathcal{S}^1 \longrightarrow X = \mathcal{S}^1$ s'étend continûement alors $\sim$ cste. Ici on a $r|\mathcal{S}^1 = \mathrm{id}$ qui s'étend continûement en $F = r$. Alors le lacet $z \mapsto z$ dans $\mathcal{S}^1$ est équivalent à une constante, ce qui est impossible pour une raison de degré. $\square$

Théorème 3 (D'alembert)

P polynôme de degré > 0, alors il a un zéro unitaire.

Preuve.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

$n > 0$. Par l'absurde si P n'a pas de zéro, posons :

$$f_R(z) = \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

$f_R\colon D^2 \longrightarrow \mathcal{S}^1$ est continue. Prenons z dans $\mathcal{S}^1$. On a :

$$P(Rz) = (Rz)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) \quad \text{et} \quad |P(Rz)| = R^n \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right)$$

Ainsi :
$$f_R(z) = \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|} = z^n + O\left(\frac{1}{R}\right)$$
Pour R suffisamment grand, f_R est proche de $z \mapsto z^n$ ainsi $\deg f_R|_{\mathcal{S}^1} = n$, ce qui est impossible car $f_R|_{\mathcal{S}^1}$ s'étend continûement à $D^2 \longrightarrow \mathcal{S}^1$. □

2.4 Invariance

Définition 11 (naturalité)

$f\colon X \longrightarrow Y$ continue, X, Y espaces topologiques, f induit :
$$f_*\colon \begin{cases} \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x)) \\ [\gamma] & \mapsto & [f\circ\gamma] \end{cases}$$
bien définie :
$$\gamma \overset{H}{\sim} \gamma' \ \Rightarrow\ f\circ\gamma \overset{f\circ H}{\sim} f\circ\gamma'$$
morphisme : $f\circ(\gamma\gamma') = (f\circ\gamma)(f\circ\gamma')$

Remarque. (conséquence) si X et Y sont connexes par arcs $X \approx Y$ homéomorphe $\Rightarrow \pi_1(X) \approx \pi_1(Y)$ isomorphe. En effet :
$$X \underset{\underset{\varphi^{-1}}{\longleftarrow}}{\overset{\varphi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}} Y \qquad \pi_1(X,x) \underset{\underset{(\varphi^{-1})_*}{\longleftarrow}}{\overset{\varphi_*}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}} \pi_1(Y, \varphi(x))$$

Définition 12 (homotopie d'applications)

Soient $f, g\colon X \longrightarrow Y$ continues, X et Y des espaces topologiques. $f \sim g$ homotopie s'il existe $H\colon [0,1]\times X \longrightarrow Y$ continue telle que :
$$H(0,x) = f(x) \qquad H(1,x) = g(x)$$
C'est une relation d'équivalence.

Définition 13 (type d'homotopie)

X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe $f\colon X \longrightarrow Y$ et $g\colon Y \longrightarrow X$ continues telles que $g\circ f\colon X \longrightarrow X$, $g\circ f \sim \mathrm{id}_X$ et $f\circ g\colon Y \longrightarrow Y$, $f\circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Proposition 5

Si X, Y sont connexes par arcs, de même type d'homotopie alors :
$$\pi_1(X) \approx \pi_1(Y) \quad \text{(isomorphisme)}$$

Preuve.

Soient $f\colon X \longrightarrow Y$ et $g\colon Y \longrightarrow X$ issues de la définition précédente. On définit :

$$f_*\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x)) \qquad g_*\colon \pi_1(Y,g(f(x))=x') \longrightarrow \pi_1(X,x)$$

$$(g\circ f)_*\colon \left\{\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(X,x') \\ [\gamma] & \longmapsto & [g\circ f\circ\gamma] \end{array}\right. \qquad \text{est un isomorphisme}$$

$g\circ f \overset{H}{\sim} \mathrm{id}_X$
$H(s,x) = \alpha(s)$, où $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin tel que $\alpha(0) = g\circ f(x) = x'$ et $\alpha(1) = x$. Montrons que $g\circ f\circ\gamma \sim \alpha\gamma\alpha^{-1}$, ce sera alors terminé puisque $[\gamma] \mapsto [\alpha\gamma\alpha^{-1}]$ est un isomorphisme. Explicitons cette homotopie sous une forme de famille à 1 paramètre de lacets. $x_s = \alpha(s) = H(s,x)$, $\gamma_s = H(s,\gamma)$ lacet en x. α_s correspond à la position de α entre x' et x_s, $\alpha_s(t) = \alpha(st)$. On définit alors $K(s,.) = \alpha_s\gamma_s\alpha_s^{-1}$ qui et une homotopie entre $g\circ f\circ\gamma$ et $\alpha\gamma\alpha^{-1}$. $\square$

Définition 14 (contractile)

X est contractile s'il a le type d'homotopie d'un point.

Exemple. Un convexe est contractile.

Remarque. N'importe quel espace contractile est simplement connexe.

Propriété 8

Si X et X' ont le même type d'homotopie alors $X\times Y$ et $X'\times Y$ ont le même type d'homotopie.

Définition 15 (rétraction par déformation)

$Y \subset X$ des espaces topologiques. X se retracte par déformation sur Y si :

- il existe $r\colon X \longrightarrow Y$ une rétraction (continue et $r|_Y = \mathrm{id}_Y$)
- $j\circ r \underset{H}{\sim} \mathrm{id}_X$ où $j\colon \left\{\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & y \end{array}\right.$
- L'homotopie est en plus parmi les applications qui valent id_Y sur Y

$$H\colon [0,1]\times X \longrightarrow X \qquad H|_{[0,1]\times Y} = \mathrm{id}_Y$$

Remarque. Le troisième point ne fait pas forcément partie de la définition.

Remarque. Si X se rétracte par déformation sur Y, alors X et Y ont même type d'homotopie. En effet, $X \overset{r}{\to} Y$ et $Y \overset{j}{\to} X$ sont continues, et on a $j\circ r \sim \mathrm{id}_X$ et $r\circ j = \mathrm{id}_Y$.

Exemple. Par exemple, $\mathbb{C}^*$ se rétracte sur $\mathcal{S}^1$ par $z \mapsto \frac{z}{|z|} = r(z)$. Et H l'homotopie entre $j\circ r$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ est :

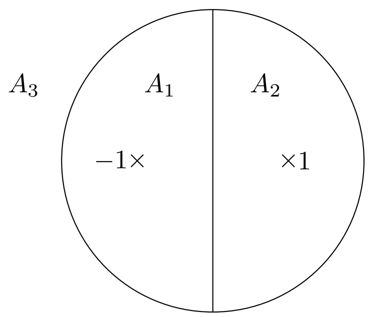
$$H(s,z) = \left((1-s)\frac{1}{|z|} + s\right)z$$

Remarque. (conséquence de l'exemple) $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = \mathbb{Z}$

Exemples.

1. $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ se rétracte par déformation sur $\mathcal{S}^n$. $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}) = \{1\}$ pour $n \geqslant 2$.

2. $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ se rétracte par déformation.



Sur $2\mathcal{S}^1 \cup [-2i, 2i]$. On note A_1 le demi-cercle privé de -1, A_2 celui privé de 1. Posons $A_1 \underset{r_1}{\longrightarrow} \partial A_1$ la projection radiale à partir de -1, $r_2\colon A_2 \underset{r_2}{\longrightarrow} \partial A_2$ celle à partir de -1.
$j_1 \circ r_1 \overset{H_1}{\sim} \mathrm{id}_{A_1}$ (parmi les applications $= \mathrm{id}_{\partial A_1}$),
$j_2 \circ r_2 \overset{H_2}{\sim} \mathrm{id}_{A_2}$ (parmi les applications $= \mathrm{id}_{\partial A_2}$),
$j_3 \circ r_3 \overset{H_3}{\sim} \mathrm{id}_{A_3}$ (parmi les applications $= \mathrm{id}_{\partial A_3}$),

$$r = r_1|_{A_1} = r_2|_{A_2} = r_3|_{A_3}$$

est continue et $= \mathrm{id}_{2\mathcal{S}^1 \cup [-2i,2i]}$.

$$H = H_1|_{A_1} = H_2|_{A_2} = H_3|_{A_3}$$

3. $T^2 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$. $T^2\backslash\{(1,0)\}$ se rétracte sur le bord du carré.

On identifie les bords a puis b.

correspond à un bouquet de deux cercles.

Définition 16 (graphe connexe)

Un graphe connexe Γ est un compact connexe avec un nombre fini de points spécifiés S, l'ensemble des sommets.

$$\Gamma\backslash S = \bigsqcup_{\text{finie}} \text{arêtes } a \quad (\sim_{\text{homéo}}]0,1[)$$

∂a est un point ou deux points dans S.

Propriété 9

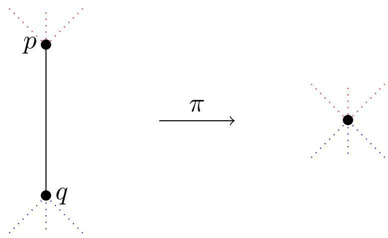
Γ a le même type d'homotopie qu'un bouquet de cercles.

Idée.

Lemme 1

Soit a une arête à deux sommets de Γ. Notons $\Gamma' = \Gamma/_{a\sim \mathrm{pt}}$. Γ' est un graphe connexe et Γ et Γ' ont le même type d'homotopie.

Remarque. Alors par récurrence on obtient un graphe connexe à un seul sommet $\sim$ bouquet de cercles.



Inversement $\pi' \colon \Gamma' \longrightarrow \Gamma$: on recolle entre eux les démarrages d'arêtes provenant de p, idem pour q.

3 Van Kampen

X espace topologique connexe par arcs. $X = U_1 \cup U_2$ avec U_1, U_2 deux ouverts connexes par arcs $\neq \emptyset$ tels que $U_0 = U_1 \cap U_2$ soit connexe par arcs $\neq \emptyset$.
On va chercher à déterminer $\pi_1(X)$ en fonction de $G_i = \pi_1(U_i)$.

Propriété 10

$\pi_1(X)$ est engendré par G_1 et G_2.

Remarque. On a $U_k \underset{i_k}{\longrightarrow} X$

$$\left\{\begin{array}{ccc} G_1 & \overset{i_1^*}{\longrightarrow} & \pi_1(X) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\gamma] \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} G_2 & \overset{i_2^*}{\longrightarrow} & \pi_1(X) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\gamma] \end{array}\right.$$

L'énoncé veut donc dire que $i_1^*(G_1)$ et $i_2^*(G_2)$ engendrent $\pi_1(X)$.

Contre-exemple. Le cercle en considérant U_1 et U_2 les deux demi-cercles.

Preuve.
Soit x_0 dans U_0 et γ un lacet dans X basé en x_0. $X = U_1 \cup U_2$. $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ est continue et $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. $\gamma^{-1}(U_1), \gamma^{-1}(U_2)$ est un recouvrement par des ouverts de $[0,1]$.
Nombre de Lebesgue $\rightarrow$ pour n assez grand :

$$\gamma\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subset U_1 \text{ ou } U_2$$

On peut donc écrire $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$ avec $\gamma_i \subset U_1$ ou U_2.

Considérons un chemin α_i dans U_0 de x_0 à $\gamma\left(\frac{i}{n}\right)$ lorsque $\gamma\left(\frac{i}{n}\right)$ appartient à U_0 (correspond à un changement de U_1/U_2 ou U_2/U_1), sinon on le considère dans U_k tel que $\gamma\left(\frac{i}{n}\right) \in U_k$. Alors :

$$\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n \sim \underbrace{(\gamma_1 \alpha_1^{-1})}_{\text{lacet en } x_0 \text{ dans } G_1} \underbrace{(\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1})}_{\text{lacet en } x_0 \text{ dans } G_2} \underbrace{(\dots \alpha_{n-1} \gamma_n)}_{\text{lacet en } x_0}$$

□

Remarque. (cas particulier)
$X = U_1 \cup U_2$ avec U_1 et U_2 simplement connexes. Alors X est simplement connexe.

3.1 Produit libre

Soit $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = U_0$, tout connexe par arcs. Soit $G_i = \pi_1(U_i)$. Définissons le produit libre de G_1 et G_2.

Définition 17 (mot)

$g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k$ est un mot de longueur k avec les $g_i \in G_1$ ou G_2. Le mot de longueur 0 est le mot vide.

Définition 18 (mot réduit)

À partir d'un mot on lui applique les règles suivantes :

1. $g_i \cdot g_{i+1} \longrightarrow g_i g_{i+1}$ si g_i et g_{i+1} sont dans le même groupe.
2. si g_i est l'élement neutre de G_1 ou G_2, on le supprime.

Exemple. $G_1 = \mathbb{Z}_a = \{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $G_2 = \mathbb{Z}_b = \{b^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, considérons le mot :

$$a^2 \cdot b^3 \cdot a \cdot a^{-1} \cdot a^5 \cdot b \cdot b^{-1} = \ldots = a^2 \cdot b^3 \cdot a^5$$

Définition 19 (produit libre)

Le produit libre de G_1 et G_2 est noté $G_1 * G_2$ et est définit par :

$$G_1 * G_2 = \{\text{mots réduits à lettres dans } G_1, G_2\}$$

Il est muni de la loi de concaténation (puis réduction) :

$$m, m' \text{ réduits } \longmapsto m \cdot m' \longmapsto \text{ réduction}$$

L'élément neutre est le mot vide. Et l'inverse d'un mot $g_1 \cdot \ldots \cdot g_k$ est $g_k^{-1} \cdot \ldots \cdot g_1^{-1}$.

Exemple.

$$\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b = \{1, a^n, b^n, a^{n_1} \cdot b^{n_2}, b^{n_1} \cdot a^{n_2}, a^{n_1} \cdot b^{n_2} \cdot a^{n_3}, \ldots\}$$

avec les n_i dans $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. $\mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b$ correspond aux mônomes de Laurent non cummutatifs en deux variables.

$$\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b = \{a^{n_1} b^{n_2},\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

correspond aux monômes de Laurent commutatifs en deux variables.

Propriété 11 (universelle de $G_1 * G_2$)

Si on a deux morphismes $G_1 \xrightarrow{f_1} H$ et $G_2 \xrightarrow{f_2} H$, alors il existe un unique morphisme de $G_1 * G_2$ dans H vérifiant :

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[dr] \arrow[drr, "f_1"] & & \\ & G_1 * G_2 \arrow[r, "f"] & H \\ G_2 \arrow[ur] \arrow[urr, "f_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Application. $\pi_1(X)$ est engendré par $\pi_1(U_1) = G_1$ et $\pi_2(U_2) = G_2$, traduction :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_2) \arrow[dr] \arrow[drr, "i_1^*"] & & \\ & G_1 * G_2 \arrow[r, "i"] & \pi_1(X) \\ \pi_1(U_2) \arrow[ur] \arrow[urr, "i_2^*"'] & & \end{tikzcd}$$

Définition 20 (somme amalgamée de G_1, G_2 sur $G_1 * G_2$)

Notons $G_0 = G_1 * G_2$. La somme amalgamée de G_1, G_2 sur G_0 est définie par :

$$G_0 \xrightarrow{j_1} G_1 \quad G_0 \xrightarrow{j_2} G_2 \text{ morphismes}$$

$$G_1 *_{G_0} G_2 = G_1 * G_2/_N$$

où N est le sous-groupe distingué engendré par $(j_1(g)) \cdot (j_2(g))^{-1}$ dans $G_1 * G_2$.

Exemple. $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \{1\} \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$

Définition 21 (groupe libre à g générateurs)

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$ est le groupe libre à deux générateurs, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est le groupe abélien libre à deux générateurs. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z} = F_g$ (g fois) est le groupe libre à g générateurs.

Remarque. (générateurs et relations)

$$\langle a_1, \ldots, a_k \mid r_1, \ldots r_l = \mathbb{Z}_{a_1} * \ldots * \mathbb{Z}_{a_k}/_N$$

$r_1, \ldots, r_l$ sont des mots en $a_1, \ldots, a_k$, et N est le sous-groupe distingué engendré par $r_1, \ldots, r_l$.

Exemple. $Z^2 = \langle a, b \mid [a,b] \rangle = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b/_N$ ($\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ dans le quotient)

Théorème 4 (Van Kampen)

$X = U_1 \cup U_2$, $U_0 = U_1 \cap U_2$, U_0, U_1, U_2 ouverts connexes par arcs non vides. Soit $G_i = \pi_1(U_i)$. Alors :

$$\pi_1(X) \simeq G_1 *_{G_0} G_2$$

$j_1 \colon U_0 \hookrightarrow U_1$, $j_2 \colon U_0 \hookrightarrow U_2$.

$$\begin{tikzcd} & G_1 \\ G_0 \arrow[ur, "j_1^*"] \arrow[dr, "j_1^*"'] & \\ & G_2 \end{tikzcd}$$

$$i(j_1^*(g)(j_2^*(g))^{-1}) = 1$$

i est induit par i_1^* et i_2^*, $i_k \colon U_k \hookrightarrow X$.

$$i_1^* j_1^*(g)(i_2^* j_2^*(g))^{-1} = (i_1 j_1)^*(g)((i_2 j_2)^*(g))^{-1} = 1$$

$\ker i \subset N$: en effet soit g dans $G_1 * G_2$ tel que $i(g) = 1$. $i(g) = \gamma$ lacet en x_0 $\gamma \overset{H}{\sim} x_0$. $i(g) = \gamma$ lacet en x_0 $\gamma \overset{H}{\sim} x_0$. On considère la décomposition de γ en succession de lacets dans U_1 ou dans U_2 puis on étend cette décomposition à l'homotopie.

$$H \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

$H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)$ est alors un recouvrement de $[0,1] \times [0,1]$. On considère le nombre de Lebregue assocé à ce recouvrement. Alors pour n entier assez grand :

$$H\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right) \in U_1 \text{ ou } U_2$$

$$\underset{G_1}{(\gamma_1 \alpha_1^{-1})} \underset{G_2}{(\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1})} \underset{G_1}{(\alpha_2 \gamma_3 \alpha_3^{-1})} \underset{G_2}{(\alpha_3 \gamma_4)}$$

$$\underset{G_1}{(\gamma_1' {\alpha_1'}^{-1})} \underset{G_2}{(\alpha_1' \gamma_2' {\alpha_2'}^{-1})} \underset{G_1}{(\alpha_2' \gamma_3' {\alpha_3'}^{-1})} \underset{G_2}{(\alpha_3' \gamma_4')}$$

Lemme 2

Ces deux éléments de $G_1 * G_2$ sont identiques dans $G_1 * G_2/_N$

Preuve. (du Théorème 4à partir du lemme)

De proche en proche. γ vu dans $G_1 * G_2$ se projette sur le neutre dans $G_1 * G_2/_N$ d'où γ vu dans $G_1 * G_2$ est dans N. $\square$

Preuve. (du Lemme 2)

$$\gamma \sim \underset{G_1}{(\gamma_1 \alpha^{-1})}\underset{G_2}{(\alpha\gamma_2)} \qquad \gamma \sim \underset{G_1}{(\gamma_1' {\alpha'}^{-1})}\underset{G_2}{(\alpha'\gamma_2')}$$

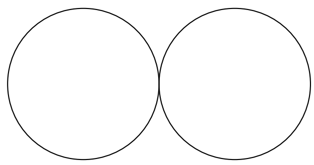
ne diffèrent que de N. $\alpha, \alpha', \beta \subset U_0$, $\delta = \alpha'\beta^{-1}\alpha^{-1}$ est un lacet dans U_0. $\gamma_1\alpha^{-1} \sim \gamma_1'\beta^{-1}\alpha^{-1}$ grâce à H. Et $\alpha\gamma_2 \sim \alpha\beta\gamma_2'$ grâce à H. $(\gamma_1\alpha^{-1})(\alpha\gamma_2)(\alpha\gamma_2) \sim (\gamma_1'\beta^{-1}\alpha^{-1})(\alpha\beta\gamma_2')$ égale dans $G_1 * G_2$.

$$\begin{aligned}
&\sim \underset{G_1}{(\gamma_1'{\alpha'}^{-1}\alpha'\beta^{-1}\alpha^{-1})}\underset{G_2}{(\alpha\beta(\alpha')^{-1}\alpha'\gamma_2')} \\
\underset{\text{dans } G_1 * G_2}{=}\, &(\gamma_1'{\alpha'}^{-1})(j_1^*(\delta))(j_2^*(\delta))^{-1}(\alpha'\gamma_2') \\
=&(\gamma_1'{\alpha'}^{-1})(j_1^*(\delta)j_2^*(\delta)^{-1})(\alpha'\gamma_2') \\
=&(\gamma_1'{\alpha'}^{-1})(\alpha'\gamma_2') \quad \mod N
\end{aligned}$$

Exemples.

1. Bouquet de deux cercles :

X



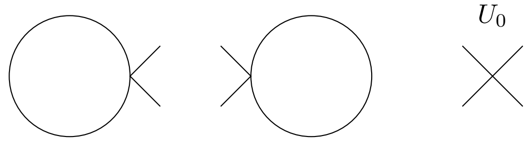
U_1 et U_2 se rétractent par déformation sur le cercle, U_0 se rétracte par déformation sur un point.

Donc :

$$\begin{aligned}
\pi_1(X) &= \pi_1(\text{cercle}) *_{\pi_1(.)} \pi_1(\text{cercle}) \\
&= \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2
\end{aligned}$$

où $\pi_1(.)$ est le groupe trivial.

U_1 $\quad U_2$ $\quad U_0$



On a de même : $\pi(\text{cercle} \cup [-i, i]) = F_2$ et $\pi_1(\mathcal{C}\backslash\{\pm 1\}) = F_2$

2. Si X est un bouquet de g cercles on a $\pi(X) = F_g = \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$ (g fois).
3. Si Γ est un graphe connexe (compact), on a $\pi(\Gamma) = F_g$ pour un g donné.
4. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ à partir de Van Kampen.

$$T^2 = T^2\backslash\{p\} \cup (\text{voisinage de } p)$$

$$\pi_1(T^2\backslash\{p\}) = \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b$$

on prend comme voisinage V le carré ouvert, comme il est simplement connexe, $\pi_1(\text{carré ouvert}) = \{1\}$. $T^2\backslash\{p\} \cup V$ correspond à un carré ouvert privé de 0. Or :

$$\pi_1(\text{carré ouvert}\backslash\{0\}) = \mathbb{Z}_c$$

Ainsi :

$$\pi_1(T^2) = (\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b) * 1/_N$$

où N est engendré par $[a, b]$, ainsi :

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}^2$$

5. Surface de genre 2 (bouquet de deux tores noté S_2). On note U_1 le premier tore + une partie de l'interface, U_2 le second.

$$U_1 \simeq T^2\backslash\{\text{pt}\} \qquad U_2 \simeq T^2\backslash\{\text{pt}\}$$

Donc $\pi_1(U_1) = \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b$ et $\pi_1(U_2) = \mathbb{Z}_c * \mathbb{Z}_d$. U_0 est un cylindre.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_e & \longrightarrow & \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b \\ e & \longmapsto & aba^{-1}b^{-1} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_e & \longrightarrow & \mathbb{Z}_c * \mathbb{Z}_d \\ e & \longmapsto & cdc^{-1}d^{-1} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \pi_1(S_2) &= \mathbb{Z}_a * \mathbb{Z}_b * \mathbb{Z}_c * \mathbb{Z}_d/_N \\ &= \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}dcd^{-1}c^{-1} \rangle \\ &= \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle \\ &= \langle a, b, c, d \mid [a, b][c, d] \rangle \end{aligned}$$

6. $P^2(\mathbb{R}) = \{\text{droites linéaires dans } \mathbb{R}^3\} = \mathcal{S}^2/_{x\sim -x}$ donne la topologie sur $P^2(\mathbb{R})$. Chaque classe a un représentant dans S^{2+}, la demi-sphère supérieure fermée. Donc :

$$P^2(\mathbb{R}) = S^{2+}/_{x\sim -x,\ x\in\text{équateur ou } \partial S^{2+}} = D^2/_{x\sim -x,\ x\in\partial D^2}$$

où D^2 est le disque fermé.

$$P^2(\mathbb{R}) = (P^2(\mathbb{R})\backslash\{p\}) \cup \underbrace{(\text{disque fermé}\backslash\{0\})}_{U_1} \cup \underbrace{(\text{disque ouvert})}_{U_2}$$

On a $\pi_1(U_2) = \{1\}$. Et $U_0 = \text{disque ouvert}\backslash\{0\}$, $\pi_1(U_0) = \mathbb{Z}_c$. Que vaut $\pi_1(U_1)$? Comme :

$$S^1/_{x\sim -x} = S^{1+}/_{x\sim -x,\ x\in\text{bord}} = S^1$$

U_1 se rétracte par déformation sur un cercle. $\pi_1(U_1) = \mathbb{Z}_a$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1) \\ c & \longmapsto & a^2 \end{array}\right.$$

Conclusion :

$$\pi_1(P^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_a/_N = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$$

(N engendré par a^2)

4 Revêtements

Revêtement : formalisme des propriétés de $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathcal{S}^1$ utile pour définir une détermination de l'angle, et du degré.

4.1 Définitions

Définition 22 (revêtement)

Soit $p \colon E \longrightarrow B$ continue surjective. E, B espaces topologiques. (E, B, p) est un revêtement si B est recouvert par des ouverts U tel que $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_i$ avec V_i ouverts et $p_i \colon V_i \xrightarrow{\sim} U$ homéomorphisme.
p projection, E espace total, B base, U ouverts de trivialisation du revêtement.

Définition 23 (fibre)

Pour un revêtement (E, B, p), la fibre en un point b est notée F_b et est définie par $F_b =^{-1} (b)$ qui est un espace discret.

Définition 24 (section locale du revêtement)

Une section locale du revêtement est $s \colon U \longrightarrow E$ continue telle que $p \circ s = \mathrm{id}_U$.

Exemple. $E = \mathbb{R} \xrightarrow{p=\exp} \mathcal{S}^1 = B$. (E, B, p) est un revêtement. $U = \mathcal{S}^1 \backslash \{1\}$, $U' = \mathcal{S}^1 \backslash \{-1\}$, $p^{-1}(U) = \mathbb{R} \backslash (2\pi\mathbb{Z})$.

Remarque. (revêtement trivial) $E = B \times F$, F espace discret.

Propriété 12

Si $p \colon E \longrightarrow B$ est un revêtement et $C \subset B$ alors $p \colon E|_C = p^{-1}(C) \longrightarrow C$ est un revêtement.

Remarque. $p \colon E \longrightarrow B$ revêtement. U ouvert de trivialisation de ce revêtement.

Propriété 13

Si $E \xrightarrow{p} B$ et $E' \xrightarrow{p'} B'$ sont deux revêtements alors :

$$E \times E' \xrightarrow{(p,p')} B \times B' \text{ est un revêtement}$$

Exemple. On a par exemple $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathcal{S}^1$ qui est un revêtement, alors $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\exp,\exp} \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 = T^2$ est un revêtement.

Définition 25 (degré)

Le degré d'un revêtement est le nombre de points dans la fibre.

Exemples.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^1 & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}\right. \quad \text{revêtement de degré } n$$

$\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement de degré infini.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}\right. \quad \text{revêtement de degré } n$$

Proposition 6

E compact, $p\colon E \longrightarrow B$ continue, surjective, homéomorphisme local alors $p\colon E \longrightarrow B$ révêtement.

Preuve.

Nous allons chercher à construire des U_i de trivialisation. Soit $b \in B$, $b \in U$? Tout d'abord, remarquons que $p^{-1}(b)$ est discrète. Donc si on a $e_i \in p^{-1}(b)$, il existe un voisinage de e_i ne contenant que e_i dans $p^{-1}(b)$. $p^{-1}(b)$ est de plus compacte, donc finie.

$$p^{-1}(b) = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Considérons W_i voisinage de e_i tel que $p\colon W_i \xrightarrow{\sim} p(W_i)$ soit un homéomorphisme. Considérons $U' = \bigcap_{i=1}^n p(W_i)$ voisinage de b et posons $W_i' = p^{-1}(U') \cap W_i$. On a $W_i' \xrightarrow{\sim} U'$. Il reste un problème pour conclure, on est pas sûr que :

$$p^{-1}(U') \subset \bigcup_{i=1}^n W_i'$$

On a :

$$p\left(E - \bigcup_{i=1}^n W_i'\right) \text{ compact dans } B \text{ évitant } b$$

$$B - p\left(E - \bigcup_{i=1}^n W_i'\right) = U \text{ ouvert contenant } b$$

On a $U \subset U'$. Si $c \in U$, $c = p(f)$ alors $f \in \bigcup_{i=1}^n W_i'$. Donc $p^{-1}(U) \subset \bigcup_{i=1}^n W_i'$, ainsi $U \subset U'$.

$\square$

Exemple. $\mathcal{S}^2 \xrightarrow{p} \mathcal{P}^2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^2/_{x\sim -x}$ est un revêtement.

Proposition 7

E espace localement compact. G groupe agissant sur E par homéomorphismes. G agit proprement et librement. $p\colon E \longrightarrow {}_G\backslash E$ est un revêtement.

Remarque. Une action de groupe est :

$$\left\{\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}\right.$$

$g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$, $e \cdot x = x$. On peut aussi le voir comme :

$$\text{un morphisme } \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Bij}(E,E) \\ g & \longmapsto & (x \mapsto g \cdot x) \end{array} \right.$$

Ici, une action par homéomorphismes est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{Homéo}(E,E) \\ g & \longmapsto & (x \mapsto g \cdot x) \end{array} \right.$$

On note aussi l'orbite de x : $G \cdot x = \{g \cdot x,\ g \in G\}$. Et le stabilisateur $\mathrm{Stab}_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.
On dit alors qu'une action est libre si $\forall x,\ \mathrm{Stab}_x = \{e\}$.
On dit qu'elle agit *proprement* si elle "bouge les compacts" i.e. si pour K compact $\subset E$ on a :

$$\{g \mid gK \cap K \neq \emptyset\} \text{ est fini}$$

Preuve.
On veut montrer que $\forall x \in E$, il existe V voisinage de x tel que $\{gV\ g \in G\}$ sont disjoints. Dans ${}_G\mathbb{E}$ en posant $p(V) = U$, U est un voisinage de $p(x)$.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{g \in G} gV \quad p \colon gV \xrightarrow{\sim} U$$

On sait déjà que les $g \cdot x$ sont distincts (action libre). Soit W voisinage compact de x.

$$\{g \mid gW \cap W \neq \emptyset\} \text{ est fini } = \{e = g_0, g_1, \ldots, d_n\}$$

On diminue W. $x, g_1x, \ldots, g_nx$ distincts, on considère $U_0, U_1, \ldots, U_n$ des voisinages de x respectifs, respectivement inclus dans $W, g_1W, \ldots, g_nW$.

$$V = U_0 \cap g_1^{-1}U_1 \cap g_2^{-1}U_2 \cap \ldots \cap g_n^{-1}U_n$$

$g_1V, \ldots, g_nV$ sont disjoints de V. Et gV est disjoint de V si $g \neq g_0, g_1, \ldots, g_n$.
Bilan. $\forall g \neq e$, $gV \cap V = \emptyset \ \Rightarrow\ gV \cap hV = \emptyset$ $g \neq h$ car :

$$h^{-1}(gV \cap hV) = \underbrace{h^{-1}g}_{\neq e}V \cap V = \emptyset$$

$\square$

Exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translations.

$$\mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto e^{2\pi i x}]{\text{revêtement}} \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \simeq [0,1]/_{0 \sim 1} \simeq \mathcal{S}^1$$

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}^2$ agit sur $\mathbb{R}^2$ par translations.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[(\exp,\exp)]{\text{revêtement}} \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2} \simeq [0,1] \times [0,1]/_{(x,0) \sim (x,1), (0,y) \sim (1,y)} \simeq T^2$$

4.2 Relèvements

On a un $E \xrightarrow{p} B$ un revêtement et $f\colon X \longrightarrow B$ continue. X topologique.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p \text{ revêtement}"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f \text{ continue}"'] & B \end{tikzcd}$$

Existe-t-il $\tilde{f}$ continue de $X \longrightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$?

On cherche une sélection continue dans $p^{-1}(f(x))$.

Unicité. Oui si X est connexe et qu'on a des “points bases”.

$$\begin{tikzcd} & (E,e) \arrow[d, "p \text{ revêtement}"] \\ (X,x) \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f \text{ continue}"'] & (B,b) \end{tikzcd}$$

$f(x) = b$, $p(e) = b$, on doit avoir $\tilde{f}(x) = e$. Montrons que $\tilde{f}$ est unique dans ses conditions. Soient $\tilde{f}$, $\tilde{f}'$ deux relevés de f.

$$\{x \mid \tilde{f}(x) = \tilde{f}'(x)\} = (\tilde{f} = \tilde{f}') \neq \emptyset$$

En effet, grâce aux points de bases $\tilde{f}(x) = \tilde{f}'(x) = e$. C'est aussi un fermé par séparation $\Rightarrow$ c'est donc tout X par connexité.

Soit y tel que $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$. Soit V un voisinage de $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$. Par continuité de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$, il existe W voisinage de Y tel que $\tilde{f}(W) \subset V$ et $\tilde{f}'(W) \subset V$. Soit $z \in W$, a-t-on $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(z)$? Oui car $p\tilde{f}(z) = f(z) = p\tilde{f}'(z)$ et $p|_V$ est injectif.

Proposition 8 (relèvement des chemins)

$$\begin{tikzcd} & (E,e) \arrow[d, "p \text{ revêtement}"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\substack{\alpha \text{ chemin continu} \\ \alpha(0) = b}"'] & (B,b) \end{tikzcd}$$

$\tilde{\alpha}$ relevé de α partant de e existe et est unique ($\tilde{\alpha}(0) = e$, $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$).

Preuve.

Nous avons déjà montré l'unicité. Montrons l'existence. Soit (U_i) un recouvrement d'ouverts de trivialisation de B, $(\alpha^{-1}(U_i))$ est un recouvrement d'ouverts de $[0,1]$ qui est compact. Considérons le nombre de Lebesgue de ce recouvrement, pour n assez grand on a :

$$\alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subset U_i \text{ ouvert de trivialisation}$$

On définit alors $\tilde{\alpha}$ de proche en proche. $\square$

4.2.1 Relèvement des homotopies

4.2.2 Relèvement des applications

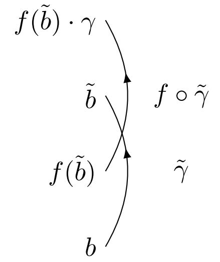
4.3 Classification des revêtements

Proposition 9

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(\tilde{B}) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(B,b) \\ f & \longleftarrow & \gamma \end{array}\right. \quad \text{bijection, isomorphisme}$$

où f est l'unique fonction telle que $f(\tilde{b}) = \tilde{b} \cdot \gamma$.

Preuve.
Compatibilité des deux actions : $f(\tilde{b} \cdot \gamma) = f(\tilde{b}) \cdot \gamma$. En effet :



$$f(\tilde{b} \cdot \gamma) = f(\tilde{\gamma}(1)) = f \circ \tilde{\gamma}(1)$$

Or, $f \circ \tilde{\gamma}$ relève γ, donc $\tilde{p} \circ f \circ \tilde{\gamma} = \tilde{p} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. $f \circ \tilde{\gamma}(0) = f(\tilde{\gamma}(0)) = f(\tilde{\gamma}(0)) = f(\tilde{b})$.
Morphisme :

$$\underbrace{\phi(\gamma\gamma')}_{g} = \underbrace{\phi(\gamma)}_{f}\underbrace{\phi(\gamma')}_{f'}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{b}) &= \tilde{b} \cdot \gamma\gamma' = (\tilde{b} \cdot \gamma) \cdot \gamma' = f(\tilde{b}) \cdot \gamma' \\ &= f(\tilde{b} \cdot \gamma') \quad \text{par compatibilité} \\ &= f(f'(\tilde{b})) = f \circ f'(\tilde{b}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g = f \circ f'$ car on a une action libre. $\square$

Exemple. $\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \simeq \mathcal{S}^1$. Revêtement universel de $\mathcal{S}^1$.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}) = \{x \mapsto x + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "x \mapsto x+n"] \arrow[dr] & \\ & \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ automorphismes de $\mathbb{Z}^2$.

Remarque. ${}_{\mathrm{Aut}(\tilde{B})}\backslash\tilde{B} = B$

4.3.1 Revêtements intermédiaires

Remarque.

$$\begin{tikzcd}
 & (E',e') \arrow[d, "p'"] \\
(E,e) \arrow[ur, "f", "\sim"'] \arrow[r, "p"'] & (B,b)
\end{tikzcd}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_*(\pi_1(E,e)) = p'_*(\pi_1(E',e'))$$

$\Rightarrow$: $p' \circ f = p$, $p'_* \circ f_* = p_*$.

$$p'_*(\pi_1(E',e')) \supset p_*(\pi_1(E,e))$$

en considérant f^{-1}.

$$p'_*(\pi_1(E',e')) = p_*(\pi_1(E,e))$$

$\Leftarrow$: on fabrique f, relever p à travers le revêtement p' est possible car $p_*(\pi_1(E,e)) \subset p'_*(\pi_1(E',e'))$.

$f(e) \in {p'}^{-1}(b) \quad \Leftrightarrow \quad p_*(\pi_1(E,e))$ est conjugué à $p'_*(\pi_1(E',e'))$. Considérons le cas où l'on a un unique revêtement $E, e \xrightarrow{p} B, b$. Le lien entre $\pi_1(E,e)$ et $\pi_1(E,e')$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \pi_1(E,e) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(E,e') \\ \beta & \longmapsto & \alpha^{-1}\beta\alpha \end{array} \right.$$

$$p_*(\pi_1(E,e')) = (p \circ \alpha)^{-1} p_*(\pi_1(E,e))(p \circ \alpha) = \gamma^{-1} p_*(\pi_1(E,e))\gamma$$

En général on a γ dans $\pi_1(B,b)$,

$$\gamma^{-1} p_*(\pi_1(E,e))\gamma = p_*(\pi_1(E, e \cdot \gamma))$$

$$\begin{tikzcd}
 & (E,e') \arrow[d, "p'"] \\
(E,e) \arrow[ur, "f", "\sim"'] \arrow[r, "p"'] & (B,b)
\end{tikzcd}$$

f qui envoie e sur e' existe

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & p_*(\pi_1(E,e)) = p_*(\pi_1(E,e')) = p_*(\pi_1(E, e \cdot \gamma)) \\ & = \gamma^{-1} p_*(\pi_1(E,e))\gamma \\ \Leftrightarrow \quad & \gamma \text{ dans la trivialisation de } p_*(\pi_1(E,e)) \end{aligned}$$

Conséquence. $E, e \xrightarrow{p} B, b$

$$\mathrm{Aut}(E) \text{ agit transitivement sur } p^{-1}(b) \;\Leftrightarrow\; p_*(\pi_1(E,e)) \text{ est distingué dans } \pi_1(B,b)$$

Définition 26

On appelle un tel revêtement un revêtement *galoisien*.

4.3.2 Existence des revêtements intermédiaires

$H \subset \pi_1(B,b)$. On cherche à créer E tel que $p_*(\pi_1(E,e)) = H$. On suppose que $\tilde{B}$ existe (revêtement universel), on va construire E comme quotient de $\tilde{B}$.

Proposition 10

${}_H\backslash\tilde{B}, [\tilde{b}] \xrightarrow{p} B, b$ un revêtement de B et $p_*\pi_1({}_H\backslash\tilde{B}, [\tilde{b}]) = H$. Alors :

$$H \subset \pi_1(B,b) \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{B})$$

Preuve.

$$\begin{tikzcd} & {}_H\backslash\tilde{B} \arrow[d, "p \text{ rev}"] \\ (\tilde{B},\tilde{b}) \arrow[ur, "q \text{ rev}"] \arrow[r, "\tilde{p}"'] & (B,b) \end{tikzcd}$$

$\square$

Conséquence. Si B, b est connexe et localement connexe par arcs et possède un revêtement universel alors :

$$\begin{cases} \{E \xrightarrow{p} B \text{ revêtement connexe}\}/_{\text{à isomph près}} & \underset{\text{bij}}{\xrightarrow{\sim}} & \{H \subset \pi_1(B,b)\}/_{\text{à conj près}} \\ E & \longmapsto & p_*(\pi_1(E,e)),\ e \in p^{-1}(b) \end{cases}$$

Exemple. $B = \mathcal{S}^1$, $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$. $n\mathbb{Z}$ pour n entier, on a la liste de revêtement $n > 0$ $\mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathcal{S}^1$ $z \mapsto z^n$.