Équations aux dérivées partielles
Chapitre 1 : Équations hyperboliques en une dimension d'espace

Lucie Le Briquer

1 Méthode des caractéristiques

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f \tag{1}$$

où $u(t,x)$ est une fonction à valeurs réelles, $c(t,x,u)$ donnée, $f(t,x,u)$ donnée

Exemples.

- *équation d'advection ou du dromadaire* $c \in \mathbb{R}$ donnée

$$u_t + cu_x = 0 \tag{2}$$

- *équation du dromadaire qui s'évapore où se concentre* $c \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$u_t + cu_x + \alpha u = 0 \tag{3}$$

- *équation de Burgers non visqueuse* $f = 0$ et $c(t,x,u) = u$

$$u_t + uu_x = 0 \tag{4}$$

Contre-exemple.

- *équation de Burgers visqueuse* $\varepsilon > 0$

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \tag{5}$$

Remarque.
Problème : si u^ε est une solution de (5), est-ce que $u^\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u$ où u est solution de (4) ?
$\Rightarrow$ Théorie des distributions

1.1 Étude de (1)

Idée. Poser $U(t) = u(t, x(t))$ pour simplifier (1). Posons :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t) = c(t, x, u(t, x(t))) \qquad \textit{équation des caractéristiques} \tag{6}$$

Si on ajoute :

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{on obtient un } \textit{problème de Cauchy} \tag{7}$$

$$\frac{dU}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial x}{\partial t}(t)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t, x(t)) \overset{(1)}{=} f(t, x(t), u(t, x(t)))$$

$$\frac{dU}{dt}(t) = \phi(t, U(t)) \tag{8}$$

$$U(t) = u(t, x(t)) \tag{9}$$

$$\phi(t, V) = f(t, x(t), V) \tag{10}$$

$$U(t_0) = u(t_0, x_0) \tag{11}$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, si c, u sont $\mathcal{C}^0$, alors ϕ est $\mathcal{C}^0$ par rapport à t et $\mathcal{C}^1$ par rapport à V.

L'ensemble des équations (8) à (11) est un *problème de Cauchy* qui possède une solution locale en temps définie sur un intervalle I contenant t_0.

Définition 1 (équation des caractéristiques, caractéristique)

(1) étant donnée, (6) porte le nom d'équation des caractéristiques. La courbe $(t, x(t))$ est une *caractéristique* de (1)

1.2 Étude de l'équation (2)

$$\frac{dx}{dt} = c$$

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0 \qquad \text{solution globale} \tag{12}$$

Les caractéristiques sont des droites. L'équation (8) devient :

$$\frac{dU}{dt} = 0 \tag{13}$$

$$U(t) = u(t, x_0 + c(t - t_0)) = u(t_0, x_0) \tag{14}$$

Propriété 1

Si u est solution de (2) alors u est constant sur les caractéristiques.

Corollaire 2

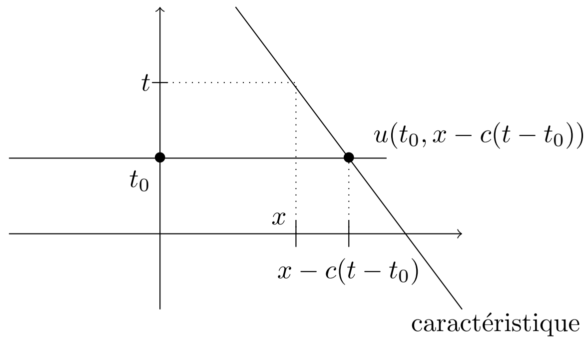
Si u est solution de (2) et si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t_0, x) = u_0(x) \tag{15}$$

alors :

$$u(t, x) = u_0(x - c(t - t_0)) \tag{16}$$

Preuve.



□

1.3 Étude de l'équation (3)

$$(8) \quad : \quad \frac{dU}{dt} = -\alpha U \qquad U(t_0) = u(t_0, x_0)$$

$$U(t) = u(t_0, x_0)e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Après calculs, on obtient :

$$u(t, x) = u_0(t_0, x - c(t - t_0))e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{17}$$

Exercice 1.
Montrer l'assertion (17)

Exercice 2.

$$v(t, x) = u(t, x)e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Montrer que si u vérifie (3) alors v vérifie (2) ($\Rightarrow$ (17))