Analyse complexe
Chapitre 2

Lucie Le Briquer

Sommaire

1 Dérivabilité complexe

Définition 1 (dérivable)
Soit $z_0 \in U \underset{f}{\rightarrow} \mathbb{C}$. f est *dérivable* en z_0 (au sens complexe) si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \text{ existe et on la note} f'(z_0)$$

On appelle *fonction holomorphe* une fonction à valeurs complexes, définie et dérivable en tout point de U ouvert de $\mathbb{C}$.

f est dérivable sur U si elle est dérivable en tout $z_0 \in U$

Variante.
Si on pose $\varepsilon(h) = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0)$ si $h \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$
ε continue (et définie) sur $\mathcal{D}(0, \delta) \in U$
$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Remarque.
Si on écrit $z = x + iy$ comme identification de U avec un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = f(x + iy) = (u(x, y), v(x, y)) \text{ où } f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

alors f dérivable complexe $\Rightarrow$ F différentiable avec comme différentielle une similitude directe ou l'application nulle

$$Df(z_0) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longrightarrow & f'(z_0)h \end{array} \right.$$

$$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\text{Matrice : } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$h_1 + ih_2 \rightarrow (a + ib)(h_1 + ih_2) = (ah_1 - bh_2) + i(bh_1 + ah_2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On obtient les relation de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
Réciproque : F différentiable et vérifie CR $\Rightarrow$ f dérivable au sens complexe

$$F(x + h_1, y + h_2) = F(x, y) + DF(x, y)(h1, h2) + \eta(h) \|h\|$$

Formules et exemples.

- $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$

$f(z + h) = f(z) + hf'(z) + h\varepsilon(h) \quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

Notons $f(z) = w$
$$g(w+k) = g(w) + kg'(w) + k\eta(k)$$
Alors
$$\begin{aligned} g \circ f(z+h) - g \circ f(z) &= (hf'(a) + h\varepsilon(h))g'(w) + h(f'(z) + h\varepsilon(h))\eta(...) \\ &= hf'(z)g'(w) + h \times (...) \end{aligned}$$

où ... $\to 0$

2 Fonctions analytiques

Définition 2 (série entière et RCV)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad R \in [0, +\infty] \quad \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

DV pour $|z| > R$ CV pour $|z| < R$

Définition 3 (fonction analytique)

$f : z_0 \in U \to \mathbb{C}$ f est *analytique* en z_0 si :

$$\exists r > 0,\ \mathcal{D}(z_0, r) \subset U \text{ et sur ce disque } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Théorème 1

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $\mathcal{D}(z_0, R)$ alors f est différentiable au sens complexe et

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

On a même le fait que f est C^∞, analytique et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$

Théorème 2

Si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $\exists\ R \in [0; +\infty]$ tel que :

1. La série converge dès que $|z| < R$
2. La série diverge dès que $|z| > R$

De plus, la convergence est absolue dans $\mathcal{D}(0, R)$ et uniforme sur $\mathcal{D}(0, R')$ $\forall R' < R$
Et :
$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

Preuve.
Si $S(z)$ converge pour $z \neq 0$ alors $|a_n z_0^n \leq M|$. Si maintenant $|z| < |z_0|$ alors $|a_n z^n| \leq M(\frac{z}{z_0})^n$.
Donc la série converge absolument (et uniformément si $|\frac{z}{z_0}| \leq 1 - \varepsilon$)
Notons $R = \sup\{|z_0| \mid S(z_0) \text{ convergente}\}$

Appelons $T = \limsup |a_n|^{1/n}$ disons $0 < T < +\infty$

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n|^{1/n} \leq T + \varepsilon \quad \text{donc} \quad |a_n||z|^n \leq ((T+\varepsilon)|z|)^n$$

Ce qui implique la convergence si $|z| < \frac{1}{T+\varepsilon}$. Donc, convergence sur $\mathcal{D}(0, \frac{1}{T})$, d'où $R \geq \frac{1}{T}$

Il existe une infinité de n avec $|a_n|^{1/n} \geq T - \varepsilon$, donc $|a_n||z|^n \geq ((T-\varepsilon)|z|)^n$
Donc dès que $|z| \geq \frac{1}{T-\varepsilon}$, la série diverge. Donc $R \leq \frac{1}{T}$
D'où $R = \frac{1}{T}$

□

Théorème 3

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $R > 0$.

1. La série $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ a le même RCV
2. La fonction S est dérivable (holomorphe) en tout point $z \in \mathcal{D}(0, R)$ et $S'(z) = T(z)$

Corollaire 4

S est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1) z^{n-k}$$

Preuve.

1. Clair car $\limsup |a_n(n+1)|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}$
2. On veut montrer que :
$$\lim_{h \to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - T(z) = 0$$
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n - h \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \leq |h|^2 \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| Q_n(|z|, |h|)$$
Avec les Q_n tels que par le binôme de Newton on ait :
$$(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1} = h^2 Q_n(z, h)$$
Les séries considérées sont absolument convergentes si $|z| < R$, $|z+h| < R$ (ce qui est acquis si $|h| < R - |z|$)

$\square$

Théorème 4

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $R > 0$.
Alors S est analytique sur $\mathcal{D}(0, R)$. De plus, le RCV de

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{est au moins} \quad R(z_0) \geq R - |z_0|$$

Exemple.

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Alors $R(z_0) = |z_0 - 1| > |z_0|$ en général.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m \geq n} a_m m(m-1)...(m-n+1) z_0^{m-n} \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} a_m z_0^{m-n} (z - z_0)^n \right) \quad ? \end{aligned}$$

Pour avoir la dernière égalité, il suffit de montrer que la double série est absolument convergente, on saura alors que l'interversion est justifiée et que la première série est convergente.

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} |z_0|^{m-n} |z - z_0|^n = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| (|z_0| + |z - z_0|)^m$$

Cette quantité converge dès que $|z_0| + |z - z_0| < R$ ou encore $|z - z_0| < R - |z_0|$

3 Quelques propriétés des fonctions analytiques

Théorème 5

Soit U un ouvert connexe, f une fonction analytique non identiquement nulle.
Alors l'ensemble des ses zéros :

$$Z(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\} \quad \text{est discret dans } U$$

Remarque.
Voyons que $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$ alors :

$$\exists\ r>0 \text{ tel que } Z(f)\cap\mathcal{D}(0,r)\subset\{0\}$$

Supposons que $a_0=a_1=...=a_{m-1}=0$ et $a_m\neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n \sum_{n\geq m} a_n z^{n-m} \qquad\qquad \text{si } |z|<r \\ &= z^n\left(a_m+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right) \end{aligned}$$

Corollaire 6 (unicité du prolongement analytique)
Soit U connexe, soient f, g analytiques sur U.
S'il existe des $(z_n)\in U$ convergeant vers $l\in U$ tels que $\forall\ n,\ \ f(z_n)=g(z_n)$ alors $f=g$.

Corollaire 7 (variante de l'unicité du prolongement analytique)
U ouvert connexe, $\mathcal{D}(z_0,r)\subset U$. Soit f analytique sur $\mathcal{D}(z_0,r)$, alors il existe *au plus* une fonction analytique $\bar{f}:U\longrightarrow\mathbb{C}$ telle que $\bar{f}|_{\mathcal{D}(z_0,r)}=f$

Exemple.

$$S(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}???? \quad \text{absolument convergente pour } Re(s)>1$$

Il existe un unique prolongement analytique à $\mathbb{C}-\{1\}$

Propriété 8 (principe du maximum)
Soit $f:\mathcal{D}(0,r)\subset U\longrightarrow\mathbb{C}$ analytique. Alors :

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

4 Intégrales sur les chemins

Rappel. Un chemin est une application $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ continue. Un chemin est :

- *fermé* si $\gamma(0)=\gamma(1)$
- *dérivable* (par morceaux) si $\gamma'(t)$ existe

Définition 4 (intégrale sur un chemin)

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et γ est $\mathcal{C}^1$. Alors on pose :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Exemple.

1. (Segment) $\quad [z_0, z_1] \qquad \gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ et

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz_1)(z_1 - z_0)dt$$

Pour $f(z) = z$ on obtient :

$$\int_{[z_0,z_1]} zdz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2)$$

2. (Arc de cercle) $\quad \gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$
Si $\alpha = 1$, le chemin est "le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique"

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi\alpha t})2i\pi r\alpha e^{2i\pi\alpha t}dt$$

Pour $f(z) = z$ on obtient :

$$\int_\gamma zdz = \int_0^1 (z_0 + re^{2i\pi\alpha t})2i\pi\alpha re^{2i\pi\alpha t}dt = 0$$

4.1 Formules de Cauchy

Proposition 9 (formule de Cauchy I)

U ouvert convexe ou étoilé (simplement connexe), $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ fermé, f holomorphe sur U. Alors :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Remarques. (sur l'intégrale sur un contour)
$\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend pas de la paramétrisation. Si $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ $\mathcal{C}^1$, $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \text{ où } \gamma_2(t) = \gamma_1(\phi(t))$$

En effet :

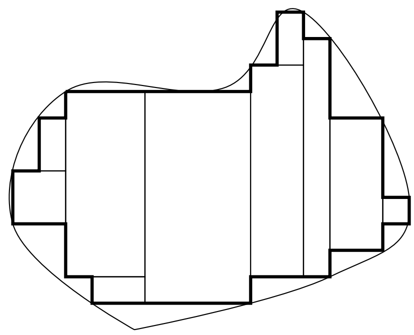
$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \overset{\text{DEF}}{=} \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_0^1 f\circ\gamma_1(\phi(t))\gamma_1'(\phi(t))\phi'(t)dt$$
$$\overset{\text{CDV}}{=} \int_0^1 f\circ\gamma_1(u)\gamma_1'(u)du = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Il a déjà été vu que :

$$\int_{\text{rectangle}} (az+b)dz = 0$$

$$\int_\gamma f(z)dz \leq \max_{t\in[0,1]} |f(\gamma(t))|L(\gamma)$$

où $L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$



$\mathcal{L}$ ligne polygonale (parcours fermé formé de lignes verticales ou horizontales) qui approche le chemin γ. L'intégrale d'une ligne polygonale est alors définie comme la somme des aires des rectangles contruits par prolongement de lignes simples qui forment $\mathcal{L}$. En passant à la limite sur la finesse de la représentation des chemins par des lignes polygonales, on peut définir l'intégrale pour tout chemin.

- $\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = 0$ car $\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = \sum_{\text{rectangles}R_i} \int_{R_i} f(z)dz$
- $\int_{\mathcal{L}} f(z)dz$ tend vers $\int_\gamma f(z)dz$

Preuve.

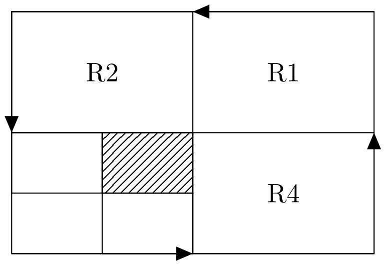
Il suffit de la faire par un rectangle. On se fixe un rectangle R, on le découpe en 4 de façon "équilibrée" (R_1, R_2, R_3, R_4).
On a alors :

$$\int_R f(z)dz = \int_{R_1} f(z)dz + \int_{R_2} f(z)dz + \int_{R_3} f(z)dz + \int_{R_4} f(z)dz$$

car les segments "intérieurs" sont parcourus deux fois dans un sens différent.

On choisit $i_1 \in \{1,2,3,4\}$ tel que $\left|\int_{R_{i_1}} f(z)dz\right|$ soit maximal. On a alors :

$$\left|\int_R f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{R_{i_1}} f(z)dz\right|$$



On redécoupe alors R_{i_1} en 4 sous-rectangles, etc... On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\int_R f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{R_{i_1,\dots,i_n}} f(z)dz\right|$$

Comme f est dérivable, on peut écrire $f(z) = az+b+\varepsilon(z)(z-z_0)$. En prenant $\{z_0\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} R_{i_1,\dots,i_n}$.
Donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_{R_{i_1,\dots,i_n}} f(z)dz\right| &= \left|\int_{R_{i_1,\dots,i_n}} [\cancel{az+b} + \varepsilon(z)(z-z_0)]dz\right| \\ &\leq \max_{z\in R_{i_1,\dots,i_n}} |\varepsilon(z)(z-z_0)|L(R_{i_1,\dots,i_n}) \\ &\leq \max_{z\in R_{i_1,\dots,i_n}} |\varepsilon(z)|2^{-n}\mathrm{diam}(R)2^{-n}L(R)\end{aligned}$$

Or :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n \text{ tq } \max_{z\in R_{i_1,\dots,i_n}} |\varepsilon(z)| \leq \varepsilon$$

Donc :

$$\left|\int_{R_{i_1,\dots,i_n}} f(z)dz\right| \leq \varepsilon 4^{-n}\mathrm{diam}(R)L(R)$$

D'où :

$$\left|\int_R f(z)dz\right| \leq 4^n \times \varepsilon 4^{-n}\mathrm{diam}(R)L(R) \leq \varepsilon\mathrm{diam}(R)L(R)$$

$\square$

Exemple.
$f(z) = \frac{1}{z} \qquad \gamma(t) = re^{2\pi int} \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \frac{1}{re^{2\pi int}} \times 2\pi ine^{2\pi int}dt = 2\pi in$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = n$$

Lemme 10 (de l'indice)

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ fermé, si $a \in \mathbb{C} - \gamma([0,1])$ alors :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} \quad \in \mathbb{Z}$$

Correspond au *nombre de tours de γ autour de a*

Preuve.

Posons $\psi(t) = \exp \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-a} du$, on a $\psi(0) = \exp(0) = 1$, on veut montrer que $\psi(1) = 1$.

$$\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\psi(t) \qquad \text{donc} \quad \left(\frac{\psi(t)}{\gamma(t)-a}\right)' = \frac{\psi'(t)(\gamma(t)-a) - \psi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^2} = 0$$

$$\frac{\psi(1)}{\gamma(1)-a} = \frac{\psi(0)}{\gamma(0)-a} \qquad \text{donc} \quad \psi(1) = \psi(0) = 1$$

Alors :

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{dz}{z-a}\right) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-a} du\right) = \psi(1) = 1$$

Donc :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

□

Remarque.

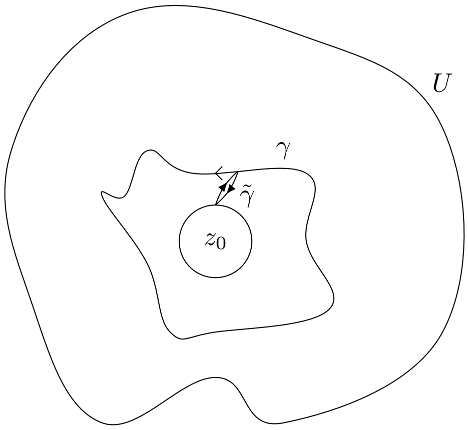
$\mathbb{C} - \gamma([0,1])$ ouvert de $\mathbb{C}$ donc $= \bigcup C_i$ où C_i ouvert connexe.

- $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ est constant sur chaque C_i
- il y a une unique composante non bornée et pour celle-ci $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = 0$

$z_0 \in U$ convexe, étoilé (ou simplement connexe), γ chemin fermé évitant z_0, f holomorphe sur U

Considérons $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

Alors g est holomorphe sur $U - \{z_0\}$, continue sur U. On en déduit $\int_\gamma g(z)dz = 0$



$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = 0$
$\int_{\tilde{\gamma}} g(z)dz - \int_{\gamma} g(z)dz = \int_{\mathcal{C}(z_0,\varepsilon)} g(z)dz$

Proposition 11 (formule de Cauchy II)

$z_0 \in U$ convexe, étoilé (ou simplement connexe), γ chemin fermé évitant z_0, f holomorphe sur U

$$\text{Ind}\ (\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \in \mathbb{Z}$$

Corollaire 12

Une fonction holomorphe est analytique. Plus précisément : si $\mathcal{D}(z_0, r) \subset U$ et f holomorphe sur U alors f s'écrit comme une série entière sur $\mathcal{D}(z_0, r)$

Preuve.
Soit $\gamma(t) = z_0 + Re^{2\pi i t} \quad \text{avec} R < r$
Soit $z \in \mathcal{D}(z_0, R)$, alors $\text{Ind}(\gamma, z) = \text{Ind}(\gamma, z_0) = 1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{s - z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(s)ds}{(s - z_0) - (z - z_0)}$$

s dans l'intégrale est $\gamma(t) = z_0 + Re^{2\pi i t}$ donc $|s - z_0| = R$ et $|z - z_0| < R$

$$\frac{1}{(s - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(s - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}}$$

Donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s - z_0)^{n+1}}}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z - z_0)^n$$

$\square$

Corollaire 13

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$$

Corollaire 14

f_n suite de fonctions holomorphes sur U, $\forall$ compact $K \subset U$ f_n, $f_n \xrightarrow[\text{CVU sur } K]{} f$

Alors :

- f est holomorphe (analytique)
- $\forall k \geq 1 :\ f_n^{(k)} \xrightarrow[\text{CVU sur } K]{} f^{(k)}$

Preuve.

En effet, $f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(s)}{(s-z)^{n+1}}ds \longrightarrow \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)ds}{(s-z)^{n+1}} = f^{(k)}(z)$

$\square$

Corollaire 15

f holomorphe sur $\overline{\mathcal{D}(0,R)}$

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M_R}{R^n} \qquad \text{où } M_R = \max_{|z|=R}|f(z)|$$

Corollaire 16 (théorème de Liouville)

si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée alors f est constante

Preuve.

En effet $\forall R > 0,\ \forall n \geq 1 :\ \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M_R}{R^n} \leq \frac{M}{R^n} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. Donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(0)$$

$\square$

Théorème 17 (principe du maximum)

f holomorphe sur $\overline{\mathcal{D}(z_0, r)}$, $|f(z_0)| \leq \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$ et si de plus on a égalité alors f est constante.
Plus généralement U connexe, V ouvert avec $\bar{V} \subset U$: $\max\limits_{z\in\bar{V}} |f(z)| = \max\limits_{z\in\partial\bar{V}} |f(z)|$

Preuve.
On peut supposer que $z_0 = 0$. $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$$\max_{|z|=r} |f(z)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = |f(0)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

$\square$

Cours du 7 mars

4.2 Singularités isolées

Voici des exemples de comportements possibles de fonctions en 0 :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

On sait que :

$$\sin(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Ainsi :

- f est prolongeable par continuité en 0 tout en restant analytique
- $z^3 g(z)$ est analytique en 0 : c'est un pôle d'ordre 3
- h a un comportement très compliqué en 0

Théorème 18

Soit f holomorphe sur $\mathcal{D}(a,r)-\{a\}$. On est alors dans un des 3 cas suivants :

1. *Singularité artificielle* : f est bornée au voisinage de a et on peut alors la prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}(a,r)$
2. *Pôle d'ordre* $m \geq 1$: $\lim\limits_{z\to a} f(z)(z-a)^m = l \quad l \in \mathbb{C}^*$
3. *Singularité essentielle* : $\forall\ \varepsilon > 0$, $f(\mathcal{D}(a,\varepsilon)-\{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$

Preuve.

1. *Singularité artificielle* : se prouve en considérant la seconde formule de Cauchy et via un contour intelligent, on montre que cette forme de f de prolonge en a
2. *Pôle d'ordre* $m \geq 1$: supposons que 3 n'est pas vérifiée, alors $\exists\ \varepsilon > 0$, un disque $\mathcal{D}(b,\eta)$ tels que $f(\mathcal{D}(a,\varepsilon)-\{a\}) \subset \mathbb{C}-\mathcal{D}(b,\eta)$
   Introduisons :
   $$g(z) = \frac{1}{f(z)-b} \quad \text{holomorphe sur } \mathcal{D}(a,\varepsilon)-\{a\} = U$$
   Elle est aussi bornée sur ce disque épointé. En effet : $\forall\ z \in U$, $|g(z)| \leq \frac{1}{\eta}$
   Par le point 1, on peut prolonger f en fonction analytique sur $\mathcal{D}(a,\varepsilon)$
   $$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$
   $$g(z) = (z-a)^m(c_0 + c_1(z-a) + ...) = (z-a)^m h(z) \quad c_0 \neq 0$$
   Et h est holomorphe.

□

Définition 4 (fonction méromorphe)

Une fonction f est méromorphe sur U si elle est holomorphe sur $U\backslash Z$ avec Z discret et qu'elle a au plus un pôle d'ordre fini en chaque $z_0 \in Z$

Remarque.

Si f est holomorphe sur $\mathcal{D}(a,r)\backslash\{a\}$ avec un pôle d'ordre m en a, alors $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ est holomorphe sur $\mathcal{D}(a,r)$.
Donc :
$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$
Ainsi :
$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^m} + \frac{c_1}{(z-a)^{m-1}} + ... + \frac{c_{m-1}}{z-a} + \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-m}$$

Définition 5 (résidu)

c_{m-1} est appelé le résidu de f en $z = a$ noté Res (f, a)

Théorème 19 (des résidus)

Soit U un ouvert convexe étoilé (simplement connexe) et f méromorphe sur U.
Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow U \backslash \underbrace{\{\text{pôles}\}}_{=\mathcal{P}}$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} \text{Ind } (\gamma, a) & \text{si } m = 1 \\ 0 \quad \text{si } m \geq 2 \end{cases}$$

Alors au voisinage de $a \in \mathcal{P}$:

$$f(z) = \text{ fonction holomorphe } + \sum_{i=1}^{r_j} \frac{\lambda_i^{(a)}}{(z-a)^i}$$

Alors :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in \mathcal{P}} \text{Res } (f, a) \text{Ind } (\gamma, a)$$

Et si γ est simple, orienté dans le sens trigonométrique :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in \mathring{\gamma}} \text{Res } (f, a)$$

Preuve.

Cas d'un contour simple : γ injectif sauf pour la jonction ($\gamma(0) = \gamma(1)$).
D'après le théorème de Jordan : $\mathbb{C} \backslash \gamma([0,1]) = \underset{\text{borné}}{U_0} \cup \underset{\text{non-borné}}{U_1}$
En terme d'indice :

- sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \backslash \gamma([0,1])$, Ind $(\Gamma, a) = 0$
- sur le reste Ind $(\gamma, a) = 1$

□

Exemple.

Calcul de :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Pour I, on va prendre pour contour γ_R le demi cercle centré en 0 de rayon R. Alors :

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} d\theta$$

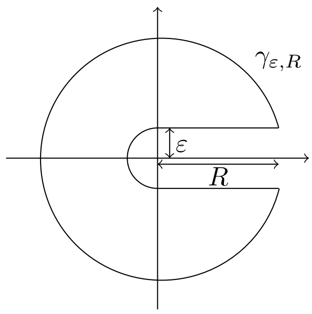
Par le théorème des résidus :

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \mathrm{Res}\ (f,i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

Exercice. Le faire pour J.

Exemple.

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)^k}{1+x^2} dx$$



Le chemin γ choisi va être le cercle de centre 0 et de rayon R auquel on va enlever une fine bande d'épaisseur 2ε autour de la demi-droite des réels positifs. On va tracer deux segments, un pour revenir en 0, un pour en repartir et la jonction entre les deux segments se fait par un arc de cercle de rayon ε. Ce faisant, il nous sera possible de définir le logarithme complexe : $\log(z) = \log(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$. Alors :

$$\int_\gamma \frac{\log(z)^k}{1+z^2} dz \underset{\text{Th. rés.}}{=} 2\pi i \left(\frac{(\log(i))^k}{2i} - \frac{(\log(-i))^k}{2i} \right)$$

Rappelons que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(x + \varepsilon i) = \log x$$

Mais :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(x - \varepsilon i) = \log x + 2\pi i$$

$$\int_\gamma \frac{\log(z)^k}{1+z^2} dz = \int_0^R \frac{\log(x)^k}{1+x^2} dx - \int_0^R \frac{\log(x+2\pi i)^k}{1+x^2} dx + 0 + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{(\log Re^{i\theta})^k}{1+R^2 e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta}_{\to 0 \text{ quand } R \to +\infty}$$

5 Existence de primitive holomorphe

Problème : f holomorphe sur U connexe, existe-t-il F holomorphe sur U avec $F'(z) = f(z)$?
En général non. Si $f(z) = F'(z)$, alors pour tout chemin fermé :

$$\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$$

Exemple.
$U = \mathbb{C}^*,\ f(z) = \frac{1}{z}$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \text{Ind}\ (\gamma, 0)$$

Donc il n'existe pas de primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{C}^*$.

Remarque.
Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur U (connexe) alors

$$\exists\ c \in \mathbb{C},\ F_2(z) = F_1(z) + c$$

Exemple.
Une détermination holomorphe du logarithme sur $U \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ... ?

Théorème 20

Soit U convexe étoilé (simplement connexe) et f holomorphe sur U. Il existe F une primitive de f.

Preuve.
On pose $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(s)ds$ avec z_0 le point "étoilé" de U (dans le cas où U est étoilé). h petit + calcul de $F(z+h) - F(z) \to$ ok

□

Cours du 7 mars

6 Homotopie entre deux chemins

On fixe $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$ tels que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x_0$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = x_1$ On pose alors $H : [0,1]^2 \longrightarrow X$ telle que : $\quad H(0,t) = \gamma_0(t) \quad H(s,0) = x_0$
$H(1,t) = \gamma_1(t) \quad H(s,1) = x_1$
$H(s,t)$ à s fixé est un chemin de x_0 à x_1.

Théorème 21 (fondamental)

Si γ_0, γ_1 sont des chemins homotopes dans $U \subset \mathbb{C}$ et f holomorphe sur U, alors :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Définition 6 (simplement connexe)

X connexe par arcs est *simplement connexe* si deux chemins dans X (avec mêmes extrémités) sont toujours homotopes.

Remarque.
Grâce au théorème fondamental, si U est simplement connexe, et γ un chemin fermé dans U, alors :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Si on pose $a = \gamma(0) = \gamma(1)$:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma \\ \gamma_1 = a \end{cases} \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$$

6.1 Quelques propriétés des ouverts simplement connexes

Proposition 22

Soit U simplement connexe, f holomorphe sur U, il existe F holomorphe sur U telle que $F'(z) = f(z)$.

Preuve.
Idée. On pose :

$$F(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz \quad \text{où } \gamma_s \text{ est un chemin de 0 à } s$$

Il faut alors montrer que :

$$\frac{F(s+h) - F(s)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

On prend h suffisamment petit pour que ($|h| < r$), $s + h \in \mathcal{D}(s, r) \subset U$. Alors :

$$\int_{\gamma_{s+h}} f(z)dz - \int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_{[s,s+h]} f(z)dz = \int_{[s,s+h]} (f(s) + \varepsilon(z))dz$$

avec $\varepsilon(z) \to 0$ quand $h \to 0$. Ainsi :

$$\int_{\gamma_{s+h}} f(z)dz - \int_{\gamma_s} f(z)dz = hf(s) + |h|\varepsilon(z)$$

$\square$

Remarque.
Détermination du logarithme.
On prend $U \subset \mathbb{C}^*$ simplement connexe. Alors, il existe une détermination du logarithme sur U. On prend cste+primitive de $L(z) = 1/z$ telle que en un point $z_0 \in U$ on ait $\exp(L(z_0)) = z_0$.
Plus généralement sur U simplement connexe, avec f holomorphe sur U *sans zéros*, on peut définir :

$$L_f(z) = \log f(z) \quad \text{holomorphe sur } U \text{ et telle que } \exp(L_f(z)) = f(z)$$

Pour ce faire, il faut prendre une primitive de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ plus une constante adéquate. Soit L_f cette primitive. Considérons $g(z) = f(z)\exp(-L_f(z))$. Alors :

$$g'(z) = [f'(z) + f(z)\exp(-L'_f(z))]\exp(L_f(z)) = 0$$

Donc $\exp(L_f(z)) = c_0 f(z)$. Choisissons la primitive de sorte que $c_0 = 1$.

Variante. Détermination continue de $\arg f(z)$ avec f holomorphe sans zéros sur U simplement connexe. On pense au fait que :

$$\log f(z) = \log|f(z)| + i(\arg f)(z)$$

Études des fonctions $z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log } z)$ où Log est une détermination holomorphe du logarithme sur $U \subset \mathbb{C}^*$ est simplement connexe.

Exemple.
$U = \mathbb{C}\backslash[0;+\infty]$. On choisit Log tel que :

- $\arg z \in]0; 2\pi[$
- si $x > 0$, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \text{Log } (x + \varepsilon i) = \log x$
- $\text{Log } (-1) = i\pi$

Remarques.

1. $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \text{Log } (x - \varepsilon i) = \text{Log } x + 2\pi i$
2. $\text{Log } (-1) + \text{Log } (1) = 2i\pi$
   $\text{Log } (-i) + \text{Log } (-i) = 3i\pi$
   $\text{Log } (-i)^2 = i\pi$