Images
TD1

Lucie Le Briquer

15 janvier 2018

Exercice 1
Pour $f \in \mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t)dt$$

système $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\rangle$$

Inégalité de Bessel :

$$\forall f \in H,\ \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_i\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2_{\mathcal{L}^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Donc $c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2
$f_n, f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant \varepsilon$. Montrons que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leqslant \varepsilon$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$:

$$|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))e^{-i\xi x}dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|dx = \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \varepsilon$$

Exercice 3
$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{iky} = \begin{cases} 2N+1 & \text{si } y = 0[2\pi] \\ \frac{e^{-iNy} - e^{i(N+1)y}}{1-e^{iy}} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 2N+1 & \text{si } y = 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\frac{y}{2}} = f(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z})$, et prolongeable pour $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ par $f(2k\pi) = 2N+1$.

- $f(y + 2k\pi) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y + k\pi\right)}{\sin\left(\frac{y}{2} + k\pi\right)} = f(y)$
- f pair
- $f(\pi) = (-1)^N$ et $f(y) = 0 \iff y = \frac{2k\pi}{N+\frac{1}{2}}$

Exercice 4

Si $f \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$, on pose :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikx} dx$$

Rappelons le lemme de Riemann-Lebesgue : si $I \subseteq$ est un intervalle et $g \in \mathcal{L}^1(I)$ alors,

$$\int_I g(x) e^{i\lambda x} dx \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0$$

On en déduit que $c_k(f) \xrightarrow[|k| \to +\infty]{} 0$.

1. On a $g \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ où :

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1} \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

$f \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$, car $|f| \leqslant 2|g|$. f et g admettent des coefficients de Fourier car $2\pi-$périodiques et $\mathcal{L}^1(0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g((x)(e^{ix} - 1) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(g(x) e^{-i(k-1)x} - g(x) e^{-ikx} \right) dx \end{aligned}$$

On peut bien séparer cette intégrale en 2, car g est $\mathcal{L}^1$ donc admet des coefficients de Fouier. On a donc finalement $c_k = \gamma_{k-1} - \gamma_k$. Alors :

$$\sum_{k=N}^{M} c_k = \sum_{k=N}^{M} (\gamma_{k-1} - \gamma_k) = \gamma_{N-1} - \gamma_M \xrightarrow[N,M \to +\infty]{} 0$$

2. (a) On pose pour $y \in]0, 2\pi[$, $\forall x \in [0, 2\pi] \backslash \{y\}$:

$$h \colon x \longmapsto \left| \frac{x - y}{e^{i(x-y)} - 1} \right|$$

qui est continue sur $[0, 2\pi] \backslash \{y\}$. Or $\frac{e^{iz}-1}{z} \xrightarrow[z \to 0]{} i$, donc $h(x) \xrightarrow[x \to y]{} 1$. On peut prolonger h par continuité. h est donc bornée car continue sur un compact.

(b)

$$\left| \frac{f(x) - c}{e^{i(x-y)} - 1} \right| = \underbrace{\left| \frac{x - y}{e^{i(x-y)} - 1} \right|}_{\leqslant M} \underbrace{\left| \frac{f(x) - c}{x - y} \right|}_{\in \mathcal{L}^1(0,2\pi)}$$

Donc :

$$\left| \frac{f(x) - c}{e^{i(x-y)} - 1} \right| \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$$

(c) Appliquer (i) à $x \mapsto f(x+y)-c$ ($2\pi-$périodique).

$$\frac{f(x+y)-c}{e^{ix}-1} = \frac{f(x+y)-c}{e^{i((x-y)+y)}-1} \in \mathcal{L}^1(0,2\pi)$$

car c'est le translaté d'une fonction $\mathcal{L}^1(0,2\pi)$. On a par (i) :

$$s_{N,M}(f(0+y)-c) \xrightarrow[N,M\to+\infty]{} 0$$

Pour N et M suffisamment grands, $s_{N,M}(f(y)-c) = s_{N,M}(f(y)) - c$. On a alors $f(y) \xrightarrow[N,M\to+\infty]{} c$.

Exercice 5

$$S(c)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

1. Montrons que $S(ab) = \frac{1}{2\pi} S(a) * S(b)$.

$$\begin{aligned}
2\pi c_k(S(a)*S(b)) &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} S(a)*S(b)(x)dx \\
&= 2\pi_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \int_{-\pi}^{\pi} S(a)(x-y)S(b)(y)dy \\
&\underset{*}{=} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} S(a)(x-y)e^{-ik(x-y)} \int_{-\pi}^{\pi} S(b)e^{-iky}dxdy \\
&= (2\pi)^2 c_k(S(a))c_k(S(b))
\end{aligned}$$

$*$: $(a,b) \in l^2(\mathbb{Z})$ donc $(x,y) \mapsto e^{-ikx}S(a)(x-y)S(b)(y) \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi]^2)$, puis Fubini-Lebesgue.
Donc :

$$c\left(\frac{1}{2\pi}S(a)*S(b)\right) = c(S(a))c(S(b)) = ab = c(S(ab))$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2\pi}S(a)*S(b) = S(ab)$$

Remarque. On aurait pu utiliser 1.5.

2.
$$f_k^N = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leqslant N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in l^2(\mathbb{Z})$$

$$S(b^N)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k^N e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

3. $S(c(f))(x) = f(x)$

$$S(b^N)(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 2\pi h_N(x)$$

$S(b^N c(f)) = h_N * g$. Or $S(b^N c(f))(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ikx}$. $S_N f = h_N * f$.

Exercice 6
On travaille dans $\mathcal{L}^2(0,T)$.
$$\frac{1}{\sqrt{T}}e^{ik\omega t} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}$$
Soit $f \in \mathcal{L}^2(0,T)$. Soit $\tilde{f}$ définit sur $[-T,T]$, impaire telle que $\tilde{f}|_{[0,T]} = f$. $\forall x \in [-T,T]$:
$$\tilde{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)e^{-\frac{ik\pi t}{T}}dt\, e^{\frac{ik\pi x}{T}}$$
Or $\tilde{f}$ est impaire, donc par $t \mapsto -t$ dans $c_k(\tilde{f})$ on a $c_k(\tilde{f}) = -c_{-k}(\tilde{f})$. Donc $\forall x \in [-T,T]$,
$$\tilde{f}(x) = \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)dt}_{=0} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)e^{-\frac{ik\pi t}{T}}dt\left(e^{\frac{ik\pi x}{T}} - e^{-\frac{ik\pi x}{T}}\right)$$
Or :
$$\int_{-T}^{T} \tilde{f}(t)e^{-\frac{ik\pi t}{T}}dt = \int_0^T f(t)\left(e^{-\frac{ik\pi t}{T}} - e^{\frac{ik\pi t}{T}}\right)dt$$
Donc $\forall x \in [-T,T]$:
$$\tilde{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2T}\int_0^T f(t)(-2i)\sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right)dt(-2i)\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)$$
$\forall x \in [0,T]$,
$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right)dt\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)$$
Comme $\left(\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\right)$ forme un système orthonormé de $\mathcal{L}^2(0,T)$, c'est donc une base de $\mathcal{L}^2(0,T)$.

Exercice 7
Si $f \in \mathcal{C}^k([0,2\pi])$, $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$. Si $f \in \mathcal{C}^1([0,2\pi])$, $\sum_{n\geqslant N}|c_n(f)|^2 = O\left(\frac{1}{N}\right)$. Montrons que $f \in \mathcal{C}^2([0,2\pi]^2)$, $c_{n,m}(f) = O\left(\frac{1}{nm}\right)$ et que :
$$\sum_{(n,m)\in[\![N,+\infty]\!]\times[\![M,+\infty]\!]} |c_{n,m}(f)|^2 = O\left(\frac{1}{NM}\right)$$
On pose $c_{n,m} = c_{n,m}(f)$.
$$c_{n,m} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2} f(x_1,x_2)e^{-inx_1} \times e^{-imx_2}dx_1dx_2$$

Par Fubini,

$$\begin{aligned}
c_{n,m} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} f(x_1,x_2) e^{-inx_1} e^{-imx_2} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx_1} \left(\int f(x_1,x_2) e^{-imx_2} dx_2 \right) dx_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left(\frac{1}{im} \int \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) e^{-imx_2} dx_2 \right) dx_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-imx_2} \left(\int \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) e^{-inx_1} dx_1 \right) dx_2 \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{1}{nm} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \exp\left(-i \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

(il manque des termes, mais on se ramène assez bien à ce cas).

On a $c_{n,m} = O\left(\frac{1}{nm}\right)$. $c_{n,m} = \frac{1}{nm} R_{n,m}$. $(R_{n,m})$ qui est bornée lorsque $n, m \longrightarrow +\infty$.

$$\sum_{n \geqslant N,\ m \geqslant M} |c_{n,m}|^2 = \sum_{n \geqslant N,\ m \geqslant M} \frac{1}{n^2} \frac{1}{m^2} (R_{n,m})^2 = O\left(\frac{1}{NM}\right)$$