Analyse
Chapitre 5 : Convolution

Lucie Le Briquer

30 novembre 2017

Table des matières

1 Introduction

Théorème 1 (Young)

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$. Alors :

- L'intégrale $(f * g)(x) \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ converge pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- $\|f * g\|_{\mathcal{L}^r} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$

Remarque. Pour $p = 1$, $\|f * g\|_{\mathcal{L}^q} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^p}$

Preuve.

1. $r = +\infty \Rightarrow \; q = p'$ le conjugué de p, on conclut par Hölder.
2. $r = 1 \;\Rightarrow\; p = q = 1$. On observe que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dydx \underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|dy \right) = \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

3. $1 < r < +\infty$, on pose r' tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ (exposant conjugué). Si $f = 0$ ou $g = 0$, c'est trivial. On peut supposer que $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|g\|_{\mathcal{L}^q} = 1$. Écrivons :

$$|f(x-y)||g(y)| = \varphi_x(y)\psi_x(y) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_x(y) = |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r} \\ \psi_x(y) = |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}}|g(y)|^{1-\frac{q}{r}} \end{cases}$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\varphi_x(y)|}_{=\varphi_x(y)\geqslant 0}{}^r dydx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p|g(y)|^q dydx = \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p\|g\|_{\mathcal{L}^q}^q = 1$$

et,

$$|\psi_x(y)|^{r'} = |f(x-y)|^{pr'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}|g(y)|^{qr'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}$$

Soient $s, t > 0$ tels que $\frac{1}{s} = r'\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)$ et $\frac{1}{t} = r'\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)$. Alors :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = r'\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2\frac{1}{r}\right) = r'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 1$$

i.e. t est l'exposant conjugué de s. On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder à x fixé :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\psi_x(y)|}_{=\psi_x(y)\geqslant 0}{}^{r'} &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{pr'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)s}dy\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^{qr'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)t}dy\right) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p dy\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q dy\right) \qquad \text{car } r'\left(\frac{1}{p|q} - \frac{1}{r}\right)(s|t) = 1 \\
&\leqslant \underbrace{\|f\|_{\mathcal{L}^p}^{p/s}}_{=1}\underbrace{\|g\|_{\mathcal{L}^q}^{q/t}}_{=1} = 1
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_x(y)\psi_x(y)dy \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_x(y)^r dt\right)^{1/r} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_x(y)^{r'} dy\right)^{1/r'}}_{\leqslant 1}$$

$\Rightarrow \ |(f*g)(x)|^r \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_x(y)^r dy$. Ainsi :

$$\|f*g\|_{\mathcal{L}^r}^r \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_x(y)^r dydx \leqslant 1 = \|f\|_{\mathcal{L}^p}^r\|g\|_{\mathcal{L}^q}^r$$

$\square$

Définition 1 (approximation de l'identité)

Une approximation de l'identité est une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ telle que :

1. $\rho_n \geqslant 0$
2. $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n dx = 1$
3. $\text{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{\mathcal{B}(0, 1/n)}$
4. $\rho_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Exemple.

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

$\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On pose alors $\rho_n(x) = Cn^d\rho(nx)$, où $C = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx}$.

Théorème 2

1. Supposons que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$. Alors $\rho_n * f$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
2. Si $1 \leqslant p < +\infty$, alors $\rho_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

Remarque. Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $\rho_n * f = \int \rho_n(x-y)f(y)dy$ est $\mathcal{C}^\infty$ (théorème de dérivation de Lebesgue, on choisit $f \in \mathcal{L}^\infty$ pour avoir la convergence dominée mais on pourrait prendre autre chose). Donc $\rho_n * f \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$, $\Rightarrow$ f est $\mathcal{C}^0$.

Preuve.

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, f est uniformément continue sur K, d'où :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ y \in \mathcal{B}(0,\delta),\ x \in K,\ |f(x-y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big|(\rho_n * f)(x)f(x)\Big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\rho_n(x-y)f(y)dy - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\rho_n(y)f(x-y)dy - f(x)\right| && \text{car } * \text{ commutatif} \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\rho_n(x)(f(x-y) - f(x))dy\right| && \text{car } \int_{\mathbb{R}^d}\rho_n(x)dx = 1 \\
&\leqslant \int_{\overline{\mathcal{B}(0,1/n)}}\rho_n(x)|f(x-y) - f(x)|dy && \text{car } \rho_n \geqslant 0,\ \text{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{\mathcal{B}(0,1/n)}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\forall n \geqslant \frac{1}{\delta},\ \Big|(\rho_n * f)(x) - f(x)\Big| \leqslant \int_{\overline{\mathcal{B}(0,1/n)}}\varepsilon\rho_n(y)dy = \varepsilon$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$. On rappelle que $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leqslant p < +\infty$). Soit $\varepsilon > 0$, $\tilde{f} \in \mathcal{C}_0^0$ telle que $\|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant \varepsilon$.

On va utiliser $\rho_n * \tilde{f} \longrightarrow \tilde{f}$ uniformément sur K, avec K compact, bien choisi.

$$\text{supp}(\rho_n * \tilde{f}) = \underbrace{\text{supp}(\rho_n)}_{\subseteq\overline{\mathcal{B}(0,1)}} + \text{supp}(\tilde{f})$$

On prend $K = \overline{\mathcal{B}(0,1)} + \text{supp}(\tilde{f})$. Or :

$$\rho_n * f - f = \rho_n * \tilde{f} - \tilde{f} + \tilde{f} - f + \rho_n * (\tilde{f} - f)$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\|\rho_n * f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|\tilde{f} - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_n * (f - \tilde{f})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} + 2\|\tilde{f} - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

car l'inégalité de Young donne $\|\rho_n * (f - \tilde{f})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \underbrace{\|\rho_n\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}}_{=1}$. De plus,

$$\|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} = \|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(K)} \leqslant |K|^{1/p} \|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^\infty(K)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

□

Corollaire 1

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert. Alors $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$.

Preuve.
On pose :

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{array} \right. \quad \text{et} \quad K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leqslant n \text{ et } \operatorname{dist}(x, \Omega^C) \geqslant \frac{2}{n} \right\}$$

$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts (i.e. $K_n \subseteq \overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$)
On pose $g_n = \mathbb{1}_{K_n}\tilde{f}$, $f_n = \rho_n * g_n$. Alors :

1. $\operatorname{supp}(f_n) \subset \overline{\mathcal{B}(0, 1/n)} + K_n \subset \Omega$
2. $f_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \|f_n - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} &= \|\rho_n * g_n - \tilde{f}\|_{(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \|\rho_n * (g_n - \tilde{f})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \|g_n - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

car par Young $\|\rho_n * (g_n - \tilde{f})\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\rho_n\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} \|g_n - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}$.
Par le point 2 du théorème précédent, $\|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. De plus $\|g_n - \tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} = \|(\mathbb{1}_{K_n} - \mathbb{1}_\Omega)\tilde{f}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par convergence dominée. □

Corollaire 2

Soit Ω un ouvert et $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors :

$$\left[\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \int u f dx = 0 \right] \Rightarrow u = 0$$

Preuve.

On a montré que $\int ugdx = 0$ pour $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, avec $\text{supp}(g) \subset K$ compact $\subset \Omega$. On pose $g_n = f_n * g$, alors $g_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ donc $\int ug_ndx = 0$. $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ car $\mathcal{L}^\infty$, à support compact, alors $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. Donc il existe une sous-suite qui converge presque partout vers g. Par convergence dominée $\int ugdx = 0$.

On applique avec $g_K = \text{sgn}(u)$ sur K, 0 sinon, où K compact quelconque inclus dans Ω. On a donc $\int_K |u|dx = 0$ $\forall K$, d'où $u = 0$. $\square$

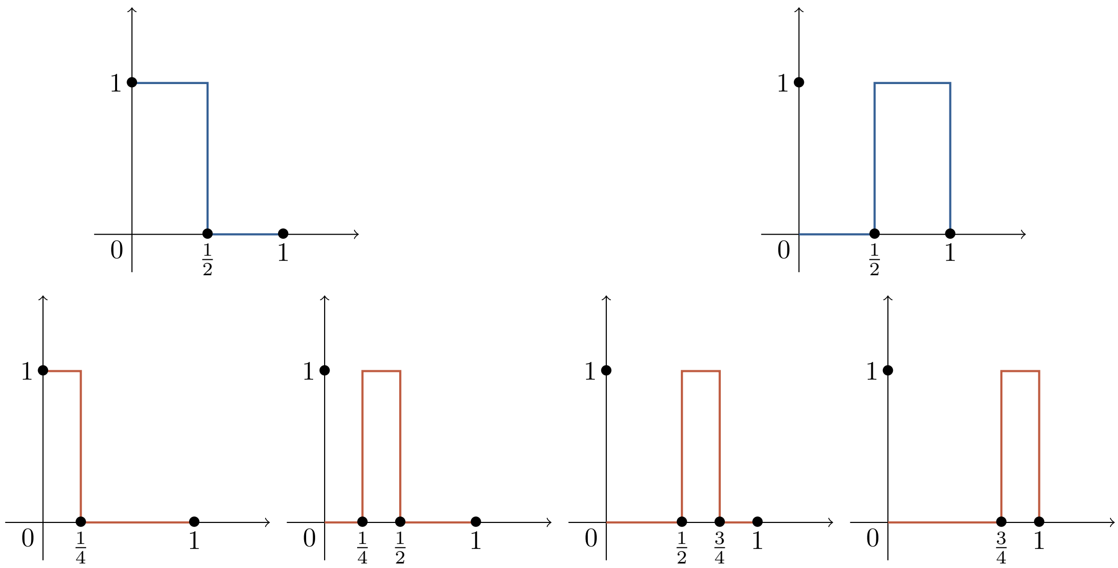
2 Fonction maximale et applications

2.1 Deux théorèmes fondamentaux

Premier théorème. Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'identité et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty[$. On a vu que $\rho_n * f \to f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. *Question.* convergence ponctuelle ? On peut converger dans $\mathcal{L}^p$ mais pas simplement, on a par contre une sous-suite convergeant presque partout.

Bosses glissantes :



Théorème 3

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(\rho_n * f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Second théorème.

Théorème 4

Soit $d \geqslant 1$. Soient trois réels $p, q, \alpha > 0$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{d}$, avec $1 < p < \frac{d}{\alpha}$. Alors :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \quad I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy \quad \text{vérifie } \|I_\alpha f\|_{\mathcal{L}^q} \leqslant C \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

Remarque. Si on avait $|x|^{-d} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors $x^{\alpha-d} \in \mathcal{L}^{d/(d-\alpha)}(\mathbb{R}^d)$ et ce théorème serait conséquence de Young. Mais on a une divergence logarithmique : $\int_{R>|x|>\varepsilon} |x|^{-d} dx$ diverge comme $\sum^N \frac{1}{n}$ ("cas critique").

Remarque.

- Principale difficulté : $|x|^{-d} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$
- Principaux outils : fonction maximale d'Hardy-Littlewood, espaces $\mathcal{L}^p$ faibles

Définition 2 (fonction maximale d'Hardy-Littlewood)

Soif $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^d$. On définit la fonction maximale d'Hardy-Littlewood par :

$$M(f)(x) = \sum_{r>0} \frac{1}{|\mathcal{B}(x,r)|} \int_{\mathcal{B}(x,r)} |f(y)|dy$$

Remarque. On verra que $\|M(f)\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant C_p \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ pour $p \in]1, +\infty]$.

- Trivial si $p = +\infty$
- Faux si $p = 1$, en revanche $\|M(f)\|_{\mathcal{L}^1_w} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}^1}$ pour un certain espace $\mathcal{L}^1_w$ appelé "$\mathcal{L}^1$ faible".

2.2 Espaces $\mathcal{L}^p$ faibles

Idée. Pour étudier f, on peut étudier ses ensembles de niveaux.

Notations. Pour $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\{|f| > \lambda\} &:= \{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| > \lambda\} \\
\Big|\{|f| > \lambda\}\Big| &:= \text{mesure de Lebesgue de } \{|f| > \lambda\} \\
F(\lambda) &:= \Big|\{|f| > \lambda\}\Big|
\end{aligned}$$

Lemme 1

$$\|f\|_p^p = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} F(\lambda) d\lambda$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{|f|>\lambda} p\lambda^{p-1} dx d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} \Big|\{|f| > \lambda\}\Big|
\end{aligned}$$

□

Lemme 2 (Chebyshev)

$$\forall p \in [1, +\infty[,\ \forall \lambda > 0,\ F(\lambda) \leqslant \lambda^{-p} \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

Preuve.

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \geqslant \lambda^p \int_{|f|>\lambda} dx = \lambda^p F(\lambda)$$

□

Définition 3 (espace $\mathcal{L}^p_w$)

Soit $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{L}^p_w$ ($\mathcal{L}^p$ faible) est l'ensemble des fonctions telles que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p_w} := \sup_{\lambda>0} \lambda f(\lambda)^{1/p} < +\infty$$

Remarque. Alors $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}^p_\omega(\mathbb{R}^d)$ par Chebyshev. En revanche $\mathcal{L}^p_w \neq \mathcal{L}^p$ car $\frac{1}{|x|} \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbb{R})$ puique $\lambda \left| \left\{ \frac{1}{|x|} > \lambda \right\} \right| = \lambda \frac{2}{\lambda} < +\infty$.

Théorème 5 (Hardy-Littlewood)

1. Il existe une constante C_1 telle que :
$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), \quad \|M(f)\|_{\mathcal{L}^1_w} \leqslant C_1 \|f\|_{\mathcal{L}^1}$$
2. $\forall p \in]1, +\infty]$, $\exists C_p > 0$ telle que :
$$\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d), \quad \|M(f)\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant C_p \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

Remarque. Si $M(f) \in \mathcal{L}^1$, alors $f = 0$. En effet, supposons $\int_{\mathcal{B}(0,1)} |f| dx > 0$ et soit $|x| \geqslant 1$, alors :

$$M(f)(x) \geqslant \frac{1}{|\mathcal{B}(x, 2x)|} \int_{\mathcal{B}(x,2x)} |f| \geqslant \frac{1}{\mathcal{B}(x, 2x)} \int_{\mathcal{B}(0,1)} |f| dx \geqslant \frac{C}{x^d} \notin \mathcal{L}^1$$

Preuve. (du théorème d'Hardy-Littlewood)
Se décompose en trois étapes :

1. $p = +\infty$
2. le point 1) : $\mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^1_w$
3. interpolation

En détails,

1. $p = +\infty$: trivial car $M(f)(x) \leqslant \|f\|_\infty$
2. On a le lemme suivant :

Lemme 3 (Vitali)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, de mesure finie. Supposons que $E \subseteq \bigcup_{a\in A} B_a$, B_a boules ouvertes. Alors, il existe $J \subseteq A$ fini tel que $(B_a)_{a\in J}$ disjointes deux-à-deux, et :

$$\left|\bigcup_{a\in J} B_a\right| \geqslant \frac{|E|}{2\times 3^d}$$

On veut montrer que $\forall\lambda > 0$, $\lambda\Big|\{M(f) > \lambda\}\Big| \leqslant C_1\|f\|_{\mathcal{L}^1}$. Fixons $\lambda > 0$. Introduisons $E \subset \{M(f) > \lambda\}$ mesurable, de mesure finie. Si $x \in E$:

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathcal{B}(x,r)|}\int_{\mathcal{B}(x,r)} |f(y)|dy > \lambda$$

Donc $\exists r_x$ tel que $\frac{1}{|\mathcal{B}(x,r_x)|}\int_{\mathcal{B}(x,r_x)} |f(y)|dy > \lambda$. Alors $E \subset \bigcup_{x\in E}\mathcal{B}(x,r_x)$ donc par Vitali, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_N \in E$ tels que :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} \underbrace{\mathcal{B}(x_i, r_{x_i})}_{\text{disjointes}}\right| \geqslant \frac{3^{-d}}{2}|E|$$

Or,

$$|\mathcal{B}(x_i, r_{x_i})| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\mathcal{B}(x_i,r_{x_i})} |f(y)|dy$$

Donc,

$$\frac{3^{-d}}{2}|E| \underset{\text{disj.}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda}\int_{\mathcal{B}(x_i,r_{x_i})} |f(y)|dy \underset{\text{disj.}}{\leqslant} \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f|dy$$

On prend le sup sur E :

$$\Big|\{M(f) > \lambda\}\Big| \leqslant \frac{2\times 3^d}{\lambda}\|f\|_{\mathcal{L}^1}$$

Preuve. (de Vitali)

Soit K compact, $\subset E$ tel que $|K| > \frac{1}{2}|E|$ (existe par régularité de la mesure de Lebesgue). Par compactié, $\exists I_1 \subset A$ fini tel $(B_a)_{a\in I_1}$ recouvre K. Soit B_1 une boule de rayon maximal parmi les $(B_a)_{a\in I_1}$, on pose alors :

$$I_2 = \{a \in I_1 \mid B_a \cap B_1 = \emptyset\}$$

Soit B_2 de rayon maximal parmi B_a, $a \in I_2$, etc..

Cet algorithme finit, et génère $B_1, ..., B_N$ disjointes deux-à-deux. Soit $a \in I_1$ quelconque, ou bien $B_a \in \{B_1 ... B_N\}$, ou bien il existe i_0 minimal tel que $B_a \cap B_{i_0} \neq \emptyset$. Par construction, rayon$(B_a) \leqslant$ rayon(B_{i_0}). Donc $B_a \subseteq 3B_{i_0}$ (boule de même centre que B_{i_0} et de rayon trois fois celui de B_{i_0}). D'où :

$$\frac{1}{2}|E| \leqslant |K| \leqslant \left|\bigcup_{a\in I_1} B_a\right| \leqslant \left|\bigcup_{i=1}^{N} 3B_i\right| \leqslant 3^d\left|\sum_{i=1}^{N} B_i\right| \underset{\text{disj.}}{=} 3^d\left|\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right|$$

$\square$

3. Cours suivant.

$\square$

3 Rappels du cours précédent

3.1 Définitions et théorème d'Hardy-Littlewood

$f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C},\ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d),\ x \in \mathbb{R}^d$

1.
$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{B}(x,r)|} \int_{\mathcal{B}(x,r)} |f(y)| dy \right\}$$

$M(f)\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$. A-t-on $M\colon L^p \longrightarrow L^p$? $f \mapsto M(f)$ pas linéaire.

Analyse harmonique. 3 cas : $p = 1$, $1 < p < +\infty$, $p = +\infty$

2. $\lambda > 0$,
$$\Big|\{|f| > \lambda\}\Big| = \text{ mesure}\Big\{x \in \mathbb{R}^d,\ |f(x)| > \lambda\Big\}$$
$$\|f\|^p_{L^p} = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \Big|\{|f| > \lambda\}\Big| d\lambda$$

$(\|f\|^p_{L^p} = \int |f|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda dx + \text{ Fubini})$

3.
$$\Big|\{|f| > \lambda\}\Big| \leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}$$
$$\|f\|_{L^1_{\mathcal{W}}} = \sup_{\lambda>0} \lambda \Big|\{|f(x)| > \lambda\}\Big|$$

$|x|^{-d} \in L^1_{\mathcal{W}}(\mathbb{R}^d)$

Analyse harmonique : divergence log.

4.
$$\|M(f)\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty}$$
$$\|M(f)\|_{L^1} \leqslant C_1 \|f\|_{L^1} \quad \text{Vitali}$$

Théorème 6 (Hardy-Littlewood)

$\forall p \in]1, +\infty],\ \exists C_p > 0$ tel que $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,
$$\|M(f)\|_{L^p} \leqslant C_p \|f\|_{L^p}$$

Preuve.
$p = \infty$ ok, $L^1 \longrightarrow L^1_{\mathcal{W}}$.
(i) Procédons par interpolation. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Décomposons $f = \underset{\in L^1}{f_1} + \underset{\in L^\infty}{f_2}$. On a une famille de décomposition : soit $\lambda > 0$,

$$f = \underbrace{f \times \mathbb{1}_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}}}_{= f^\lambda} + \underbrace{f \times \mathbb{1}_{\{|f| \leqslant \frac{\lambda}{2}\}}}_{= f_\lambda}$$

On a $f_\lambda \in L^\infty$ et $f^\lambda \in L^1$. En effet :

$$\|f^\lambda\|_{L^1} = \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1-p} dx$$

(ii) $f \mapsto M(f)$ n'est pas linéaire. Mais sous-additif :

$$M(f_1 + f_2) \leqslant M(f_1) + M(f_2)$$

(iii) :

$$\|M(f)\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \Big|\{|M(f)| > \lambda\}\Big| d\lambda$$

Or $|M(f)| = M(f)$ donc :

$$\|M(f)\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \Big|\{M(f^\lambda + f_\lambda) > \lambda\}\Big| d\lambda$$

Or,

$$\Big\{M(f^\lambda + f_\lambda) > \lambda\Big\} \subset \Big\{M(f^\lambda) > \frac{\lambda}{2}\Big\}$$

car $|f_\lambda \leqslant \frac{\lambda}{2}|$ et $M(f^\lambda + f_\lambda) \leqslant M(f^\lambda) + M(f_\lambda)$.

$$\begin{aligned}
\|M(f)\|_{L^p}^p &\leqslant p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \Big|\{M(f^\lambda) > \frac{\lambda}{2}\}\Big| d\lambda \\
&\leqslant p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \frac{1}{\lambda/2} \|M(f^\lambda)\|_{L^1_{\mathcal{W}}} d\lambda \qquad \text{par déf de } \|.\|_{L^1_{\mathcal{W}}} \\
&\leqslant 2pC_1 \int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \|f^\lambda\|_{L^1} d\lambda \qquad \text{Hardy-Littlewood } L^1_{\mathcal{W}} \\
&\leqslant 2pC_1 \int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|(x) dx d\lambda \\
&\leqslant 2pC_1 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{2|f|} \lambda^{p-2} d\lambda\right) |f(x)| dx \\
&\leqslant \text{“}\left(2\frac{p}{p-1} C_1\right)\text{”} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \\
&= C_p^p \|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

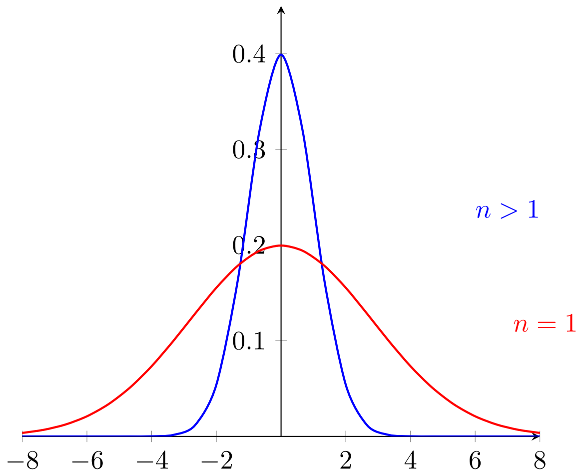
$\square$

3.2 Applications aux approximations de l'identité

Soit $\rho\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\text{supp}(\rho) \subset \mathcal{B}(0,1)$, $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}(0,1))$
2. radiale : $\rho(x) = \rho(y)$ si $|x| = |y|$
3. décroissante : $\rho(x) \leqslant \rho(y)$ si $x \leqslant y$
4. normalisée : $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$

On pose $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$.



On a vu que si $1 \leqslant p < +\infty$ alors :

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Théorème 7

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p > +\infty$. Alors :

$$\lim(\rho_n * f(x) - f(x)) = 0 \quad \text{pour presque tout } x$$

Preuve.

Déjà vu si $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d) \longrightarrow$ densité de $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 4 (clé)

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\rho_n * f(x)| \leqslant M(f)(x)$$

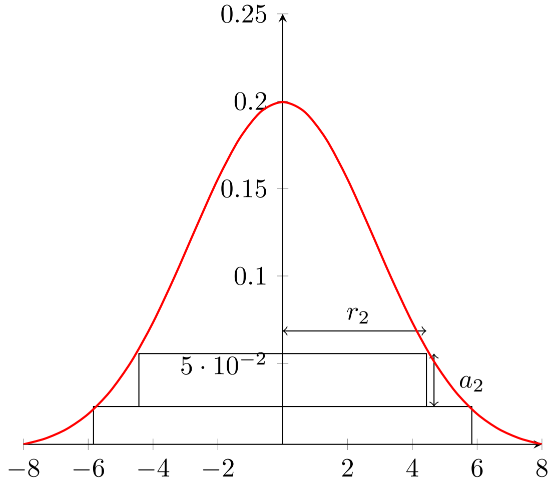
Preuve.
Notons que

1. $|\rho_n * f(x)| \leqslant \rho_n * |f|(x)$
2. $M(f) = M(|f|)$

On peut supposer que $f = |f| \geqslant 0$. On peut écrire :

$$\rho(x) = \lim_{N \to +\infty} \rho^{(N)}(x)$$

où $\rho^{(N)}$ est de la forme $\sum_{p=1}^{N} a_p \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,r_p)}$.



Alors :

$$\begin{aligned}
\rho_n^{(N)} * f(x) &= n^d \int_{\mathbb{R}^d} \sum_1^N a_p \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,r_p)}(n(x-y)) f(y)dy \\
&= n^d \sum_1^N a_p \int_{\mathcal{B}(x,r_p/n)} f(y)dy \\
&\leqslant n^d \sum_1^N a_p \left| \mathcal{B}\left(x, \frac{r_p}{n}\right) \right| \times M(f)(x) \\
&\leqslant \underbrace{\left(\sum_1^N a_p |\mathcal{B}(0,r_p)| \right)}_{\leqslant \int \rho dx = 1} M(f)(x) \\
&\leqslant M(f)(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Preuve. (du théorème)
On fait $p = 1$, $1 < p < +\infty$ est analogue. Introduisons :

$$\theta(f)(x) = \limsup_{n \to +\infty} |\rho_n * f(x) - f(x)|$$

On montre que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \Big|\{\theta(f) > \varepsilon\}\Big| = 0$$

$\Rightarrow \rho_n * f \longrightarrow f$ presque partout.

Soit $g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$. Alors $\theta(g) = 0$ et $\theta(f) = \theta(f - g)$.

$$\Big\{\theta(f-g) > \varepsilon\Big\} \subset \Big\{|f-g| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \bigcup \Big\{|\rho_n * (f-g)| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\Big|\{\theta(f-g) > \varepsilon\}\Big| &\leqslant \Big|\{|f-g| > \frac{\varepsilon}{2}\}\Big| + \Big\{M(f,g) > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \\
&\leqslant \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}\|f-g\|_{L^1}}_{\text{par Chebyshev}} + \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}\|M(f-g)\|_{L^1_{\mathcal{W}}}}_{\text{def de } \|.\|_{L^1_{\mathcal{W}}}} \\
&\leqslant \frac{c}{\varepsilon}\|f-g\|_{L^1} \qquad \text{par Hardy-Littlewood}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Big|\{\theta(f-g) > \varepsilon\}\Big| \leqslant \inf_{g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)} \frac{c}{\varepsilon}\|f-g\|_{L^1} = 0$$

□

Corollaire 3 (théorème de différentiation de Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|\mathcal{B}(x,t)|} \int_{\mathcal{B}(x,t)} f(y)dy$$

Preuve.

$$\rho(y) = \frac{1}{|\mathcal{B}(0,1)|} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,1)}(y)$$

□

3.3 Inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev

On a vu (Young) que si $f \in L^p$, si $g \in L^q$ alors $f * g \in L^r$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

On va traiter un cas singulier : $g(x) = \frac{1}{|x|^{d-\alpha}}$ et voir $g \in L^q$ avec q tel que $q(d-\alpha) = d$.

$$|g|^q = \frac{1}{|x|^d}$$

On a :

$$\int_{\mathcal{B}(0,\varepsilon)} \frac{dx}{|x|^d} = |\log \varepsilon|$$

Étant donné $0 < \alpha < d$ on pose :

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy$$

Théorème 8 (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Soient $p, q, \alpha > 0$ tels que :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{d}, \quad 1 < p < \frac{d}{\alpha}$$

Alors,

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^q} \leqslant C\|f\|_{L^p}$$

Remarque. Comme si Young vrai.

Preuve.
Singularité en 0 et $+\infty$ pour $|x|^{-d}$. On découpe :

$$I_\alpha(f) = I_\alpha^R(f) + I_{\alpha,R}(f), \ R > 0$$

On a, par définition,

$$I_\alpha^R(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-x}} dy$$

et

$$I_{\alpha,R}(f)(x) = \int_{\mathcal{B}(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-x}} dy$$

1. $I_{\alpha,R}(f)(x) = \psi_{\alpha,R} * f(x)$ où :

   $$\psi_{\alpha,R}(x) = |x|^{\alpha-d}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,R)}$$

   Soit $\rho = \frac{1}{\|\psi_{\alpha,R}\|_{L^1}}\psi_{\alpha,R}$. Alors :

   $$|\rho * f(x)| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |\rho_n * f(x)| \leqslant M(f)(x)$$

   Or,

   $$\begin{aligned} \|\psi_{\alpha,R}\|_{L^1} &= \int_{\mathcal{B}(0,R)} \frac{dx}{|x|^{d-\alpha}} = \int_0^R C_d \frac{r^{d-1}}{r^{d-\alpha}} dr \\ &= C'_d r^\alpha \end{aligned}$$

   Finalement,

   $$|I_{\alpha,R}(f)(x)| \leqslant CR^\alpha M(f)(x)$$

2. Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
I_\alpha^R(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-x}} dy \\
&\leqslant \|f\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(x,R)} \frac{dy}{|x-y|^{p'(d-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant \|f\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(0,R)} \frac{dy}{|y|^{p'(d-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant \|f\|_{L^p} \left(\int_R^{+\infty} r^{d-1+p'(\alpha-d)} dr \right)^{\frac{1}{p'}} C \\
&\leqslant C \|f\|_{L^p} \left(R^{d+p'(\alpha-d)} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant C \|f\|_{L^p} R^{\alpha - \frac{d}{p}}
\end{aligned}
$$

On combine :

$$\forall x,\ |I_\alpha(f)(x)| \leqslant C R^\alpha M(f)(x) + C R^{\alpha - \frac{d}{p}} \|f\|_{L^p}$$

$\longrightarrow$ On peut supposer que $\|f\|_{L^p} = 1$.

$$\forall x,\ |I_\alpha(f)(x)| \leqslant C R^\alpha M(f)(x) + C R^{\alpha - \frac{d}{p}}$$

On choisit R tel que :

$$M(f)(x) = R^{-\frac{d}{p}}$$

Alors :

$$|I_\alpha(f)(x)| \leqslant 2C(M(f)(x))^\beta$$

Donc,

$$|I_\alpha(f)(x)|^q \leqslant C' |M(f)(x)|^p$$

par hypothèse sur p, q, α, on a $q\beta = p$. □

3.4 Application aux injections de Sobolev

On a vu que si $\Omega \subset$ une bande alors :

$$\forall u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),\ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

On va étudier $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Propriété 1

$\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit :

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ est dense dans } \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$$

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$. On introduit :

$$u_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right)(\rho_n * u)(x) \qquad \chi = 1 \text{ sur } \mathcal{B}(0,1),\ \chi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

On sait que :

- $\rho_n * u \in \mathcal{C}^\infty$ (Lebesgue)
- $\rho_n * u \longrightarrow u$ dans L^2
- $\chi_n(\rho_n * u) \longrightarrow u$ dans L^2 (Lebesgue)

On a :

$$\begin{aligned}\int (\rho * u)\partial_j \varphi dx &= \int\int \rho(x-y)u(y)(\partial_j\varphi)(x)dydx \\ &= \int u(\theta * \partial_j\varphi)dy \qquad \text{avec } \theta(x) = \rho(-x)\end{aligned}$$

Or $\theta * \partial_j\varphi = \partial_j(\theta * \varphi)$.

$$\begin{aligned}\int (\rho * u)\partial_j\varphi dx &= \int u(\theta * \partial_j\varphi)dy \\ &= -\int (\partial_j u)(\theta * \varphi) \\ &= -\int (\rho * \partial_j u)\varphi \longrightarrow \rho * u \in \mathcal{H}^1\end{aligned}$$

et $\partial_j(\rho * u) = \rho * (\partial_j u)$. On veut montrer que :

$$\|\nabla(u_n - u)\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\partial_j(u_n - u) &= \partial_j\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\rho_n * u) - u\right) \\ &= ... + ... + ... \qquad \text{ok}\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Donc $\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ mais on n'a pas l'inégalité de Poincaré $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Introduisons $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$.
Supposons $\|u_\lambda\|_{L^q} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p}$ alors :

$$\|u_\lambda\|_{L^q}^q = \int |u(\lambda x)|^q dx = \lambda^{-d}\|u\|_{L^q}^q$$

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p}^p = \lambda^{p-d}\|u\|_{L^p}^p$$

Si c'est vrai alors $\lambda^{-\frac{d}{q}} \leqslant C\lambda^{\frac{p-d}{p}}$ $\forall\lambda$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{q} = \frac{p-d}{dp} \qquad \text{donc} \qquad q = \frac{pd}{d-p}$$

Ainsi $q \neq 2$ si $p = 2$.

Théorème 9 (Sobolev)

Soit $d \geqslant 2$, $1 < p < d$. Alors $\exists C_p > 0$, tel que $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\|u\|_{L^{\frac{pd}{d-p}}} = C_p \|\nabla u\|_{L^p}$$

Remarque. Vrai pour $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ par densité.

Preuve.
Comme pour l'inégalité de Poincaré dans une bande.

$$u(x', x_n) = \int_{-R}^{x_n} (\partial_{x_n} u)(x', y) dy$$

Formule de représentation :

$$u(x) = \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(x-y)}{|x-y|^d} . \nabla u(y) dy$$

cf Notes de cours.
Application de Hardy-Littlewood-Sobolev avec $\frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}}$ pour $\alpha = 1$. □