Analyse Complexe
Devoir maison

Lev-Arcady Sellem & Lucie Le Briquer

1 Calcul d'intégrales via le théorème de Cauchy et résidus

Annexe. (intégrale de Gauss)
Posons :
$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;+\infty[\times[0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \end{array} \right.$$
Et :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 F(x,t)dt \end{array} \right.$$
On a :
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$$
Comme :

- $\forall x \in [0;+\infty[\quad t \mapsto F(x,t)$ continue et intégrable sur $[0;1]$
- $\forall x \in [0;+\infty[\quad t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ continue sur $[0;1]$
- $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$ continue sur $[0;+\infty[$
- on a bien la domination sur tout segment $[a;b] \subset [0;+\infty[$ puisque l'intégration se fait sur un segment où $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue

Alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral :
$$f'(x) = \int_0^1 -2xe^{-(1+t^2)x^2} = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}dt$$
Avec le changement de variable $y = tx$ on obtient :
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} \times \frac{1}{x}\int_0^x e^{-y^2}dy \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}dy \\ &= -2u'(x)u(x) \end{aligned}$$
en notant $u(x) = \int_0^x e^{-y^2}dy$

Alors en intégrant :
$$-u^2(x) = f(x) + c$$
Comme $u(0) = 0$ et $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$, on obtient :
$$f(x) = \frac{\pi}{4} - u^2(x)$$

Or :

$$\begin{aligned}
0 \leq f(x) &= \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt \\
&= e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-(tx)^2}}{1+t^2} dt \\
&\leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\
&\leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

D'où $u(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ i.e. $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Alors par parité on obtient le résultat annoncé :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Exercice 1.

Soit f holomorphe sur un ouvert U contenant le disque unité fermé.

1. Montrons que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \pi \left(f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right)$$

   Calculons $\int_\gamma (2 + z + z^{-1}) f(z) z^{-1} dz$ pour $\gamma(t) = e^{it}$ avec $t \in [0; 2\pi]$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz &\underset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} (2 + e^{it} + e^{-it}) \frac{f(e^{it})}{e^{it}} \times ie^{it} dt \\
&= i \int_0^{2\pi} (2 + e^{it} + e^{-it}) f(e^{it}) dt \\
&= i \int_0^{2\pi} (e^{it/2} + e^{-it/2})^2 f(e^{it}) dt \\
&= 4i \int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) f(e^{it}) dt \quad (0)
\end{aligned}$$

   Or γ évite $0_{\mathbb{C}}$ ($e^{it} \neq 0_{\mathbb{C}}\ \forall\ t \in [0; 2\pi]$) et f est holomorphe sur $\overline{\mathcal{D}(0,1)}$, alors d'après un corollaire de la formule de Cauchy, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

   Donc en particulier :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dt \quad (1) \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dt \quad (2)$$

   Et par la formule de Cauchy on a directement comme f holomorphe sur U et γ fermé à valeurs dans U:

$$\int_\gamma f(z) dz = 0 \quad (3)$$

   D'où :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz &= 2 \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz + \int_\gamma f(z) dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz \\
&= 2 \times 2\pi i f(0) + 0 + 2\pi i f'(0) \\
&= 4\pi i f(0) + 2\pi i f'(0)
\end{aligned}$$

Donc d'après (0) :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) f(e^{it})dt &= \frac{1}{4i} \times (4\pi i f(0) + 2\pi i f'(0)) \\ &= \pi\left(f(0) + \frac{f'(0)}{2}\right)\end{aligned}$$

2. De la même façon calculons pour le même chemin γ :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z} - 2\right)\frac{f(z)}{z}dz &= i\int_0^{2\pi} (e^{it/2} - e^{-it/2})^2 f(e^{it})dt \\ &= 4i\int_0^{2\pi} sin^2\left(\frac{t}{2}\right) f(e^{it})dt\end{aligned}$$

On a toujours les formules de Cauchy précédentes. Alors :

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z} - 2\right)\frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i f'(0) - 4\pi i f(0)$$

D'où :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} sin^2\left(\frac{t}{2}\right) f(e^{it})dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{4i}(2\pi i f'(0) - 4\pi i f(0)) = f'(0) - 2f(0)$$

Exercice 2. (transformée de Fourier)
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable on définit :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(2\pi itu)dt$$

1. Soit f réelle et paire, montrons que $\hat{f}$ est également réelle et paire.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(u) &\underset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\pi itu)^n}{n!}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\pi iu)^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)t^n dt}_{=0 \text{ si } n \text{ impair puisque } f \text{ paire}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2\pi iu)^{2k}}{(2k)!}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)t^{2k}dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2\pi u)^{2k}(-1)^k}{(2k)!}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)t^{2k}dt \quad \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

et on a $\hat{f}(-u) = \widehat{f}(u)$. Donc $\hat{f}$ est bien réelle et paire.

$(*)$ L'interversion se justifie par ...

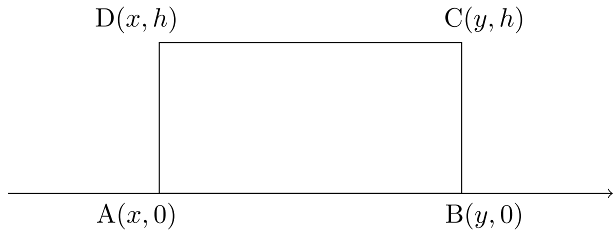
2. Soit :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(-az^2)\end{array}\right.$$

f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $\forall\gamma$ chemin fermé on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Considérons le rectangle $ABCD$ avec $A(x,0) = x + i.0$, $B(y,0) = y + i.0$, $C(y,h) = y + i.h$ et $D(x,h) = x + i.h$ où $x < y$ et $h > 0$.



Appliquons la formule de Cauchy au rectangle $A \to B \to C \to D$.

$$\int_{A \to B \to C \to D} f(z)dz = 0$$

En décomposant l'intégrale sur les 4 segments on obtient :

$$\int_{[A;B]} f(z)dz + \int_{[B;C]} f(z)dz + \int_{[C;D]} f(z)dz + \int_{[D;A]} f(z)dz = 0 \qquad (4)$$

– Paramétrisons $[A; B]$ par $z = t$ avec $t \in [x; y]$:

$$\int_{[A;B]} f(z)dz = \int_x^y e^{-at^2} dt$$

– $[C; D]$ par $z = t + ih$ avec $t \in [y; x]$:

$$\int_{[C;D]} f(z)dz = \int_y^x e^{-a(t+ih)^2} dt = -e^{ah^2} \int_x^y e^{-at^2} e^{-2iath} dt = -e^{ah^2} \widehat{f}\left(-\frac{ah}{\pi}\right)$$

– $[B; C]$ par $z = y + it$ avec $t \in [0; h]$:

$$\int_{[B;C]} f(z)dz = \int_0^h e^{-a(y+it)^2} dt = e^{-ay^2} \int_0^h e^{-at^2} e^{-2iayt} dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[B;C]} f(z)dz \right| &\leq e^{-ay^2} \int_0^h e^{-at^2} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-ay^2} \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

– $[D; A]$ par $z = x + it$ avec $t \in [h; 0]$:

$$\int_{[D;A]} f(z)dz = -\int_0^h e^{-a(xy+it)^2} dt = -e^{-ax^2} \int_0^h e^{-at^2} e^{-2iaxt} dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[D;A]} f(z)dz \right| &\leq e^{-ax^2} \int_0^h e^{-at^2} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-ax^2} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Alors en remplaçant chaque intégrale dans (4) et en faisant tendre $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt + -e^{ah^2} \widehat{f}\left(-\frac{ah}{\pi}\right) = 0$$

À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{a}t$ on établit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Alors $\widehat{f}\left(-\frac{ah}{\pi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-ah^2}$. D'où :

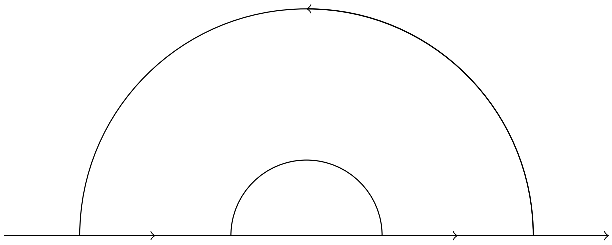
$$\widehat{f}(u) = \widehat{f}\left(\frac{-a}{\pi}\left(\frac{-u\pi}{a}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-a\left(\frac{u^2\pi^2}{a^2}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{u^2\pi^2}{a}\right)$$

3.

Exercice 3.
Soit :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{e^{iz}}{z} \end{array} \right.$$

Considérons le "petit cercle" dans le plan supérieur. Nous expliquerons par la suite pourquoi ce choix n'a pas d'importance.



g est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, et le chemin γ défini sur le schéma évite $0_{\mathbb{C}}$ alors d'après la formule de Cauchy :

$$\int_{\gamma} g(z)dz = 0$$

Découpons l'intégrale sur les deux segments et les deux demi-cercles notés Γ_{ε} et Γ_R :

$$\int_{[-R;-\varepsilon]} g(z)dz + + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} g(z)dz + \int_{[\varepsilon;R]} g(z)dz + \int_{\Gamma_R} g(z)dz = 0 \tag{5}$$

- Calculons la somme des deux intégrales sur les segments :

$$\begin{aligned}
\int_{[-R;-\varepsilon]} g(z)dz + \int_{[\varepsilon;R]} g(z)dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx \\
&= \int_{R}^{\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx \\
&= -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\
&= 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx
\end{aligned}$$

- Calculons l'intégrale sur le grand cercle $z = Re^{it}$ pour $t \in [0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} g(z)dz &= \int_0^{\pi} g(Re^{it}) \times Rie^{it} dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\exp(iRe^{it})}{Re^{it}} \times Rie^{it} dt \\
&= i \int_0^{\pi} \exp(iRe^{it}) dt
\end{aligned}$$

  Or $|\exp(iRe^{it})| = |\exp(-R\sin t + iR\cos t)| = \exp(-R\sin t) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
  Alors par convergence dominée :

$$\int_{\Gamma_R} g(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} i \int_0^{\pi} 0 dt = 0$$

– Calculons l'intégrale sur le petit cercle $z = \varepsilon e^{it}$ pour $t \in [\pi; 0]$:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)dz &= \int_\pi^0 g(\varepsilon e^{it}) \times \varepsilon i e^{it} dt \\ &= -\int_0^\pi \frac{\exp(i\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \times \varepsilon i e^{it} dt \\ &= -i\int_0^\pi \exp(i\varepsilon e^{it}) dt\end{aligned}$$

Or $\forall t \in \ [0;\pi], \ \exp(i\varepsilon e^{it}) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$. Alors par convergence dominée JUSTIFIER:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)dz \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -i\int_0^\pi 1dt = -i\pi$$

Par passage aux limites dans (5) ($R \longrightarrow +\infty$ et $\varepsilon \longrightarrow 0$), on obtient que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ et la relation :

$$2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} - i\pi = 0$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Remarque. Si on avait pris le demi-cercle dans le plan inférieur, on aurait eu :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon} g(z)dz &= \int_\pi^{2\pi} g(\varepsilon e^{it}) \times \varepsilon i e^{it} dt \\ &= -\int_0^\pi \frac{\exp(i\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \times \varepsilon i e^{it} dt \\ &= -i\int_0^\pi \exp(i\varepsilon e^{it}) dt\end{aligned}$$

2 Propriétés des fonctions holomorphes et analytiques

Exercice 4.

Exercice 5. (extension du principe du maximum, théorème de Phragmen-Lindelöf)

1.
2.
3.
4.
5.
6.