Probabilités

Chapitre 4 : Graphes aléatoires et expansion

Lucie Le Briquer

Sommaire

1 Introduction

Exemples de questions étudiées sur les graphes :

- Voyageur de commerce (Traveling salesman)
- Détection de communautés
- Google pagerank
- Bâtir un bon réseau

On va s'intéresser dans ce chapitre au dernier point.

Définition 1 (graphe)

Un graphe est la donnée d'une paire d'ensembles (V, E) où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes.

Remarque.
Dans ce cours :

- on considère les graphes simples (au plus une arête entre 2 sommets)
- on considère les graphes non dirigés
- pas de boucle (un sommet n'est pas connecté à lui-même)

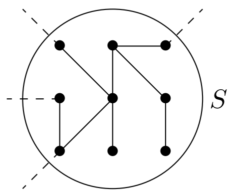
On regarde des graphes finis en ayant toujours en tête qu'on s'intéresse à faire tendre le nombre de sommets vers l'infini. On écrira :

$$V = \{1, ..., n\} \quad \text{ainsi } E \subseteq [n] \times [n] \; \text{ couples non ordonnés}$$

Définition 2 (frontière)
On définit la frontière d'un ensemble de sommmets $S \subseteq \{1, ..., n\}$ par :

$$\partial S = \{\{i, j\} \in E | i \in S, j \notin S\}$$

Exemple.



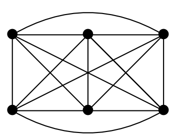
L'ensemble des arêtes en pointillé constitue la frontière de S.

Définition 3 (constante d'expansion)
La constante d'expansion d'un graphe G est :

$$h(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial S|}{|S|}, S \subset [n], |S| \leq n/2 \right\}$$

Exemples.

1. Graphe complet : tous les sommets sont connectés.



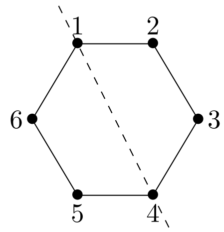
$$E = \{\{i,j\}, i \neq j \in [n]\}$$

$S \subseteq [n], |S| \leq n/2$

$$|\partial S| = |S| \times |S^C| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\partial S|}{|S|} = |S^C| \quad \Rightarrow \quad h(G) = \inf_{|S| \leq n/2} |S^C| = \frac{n}{2}$$

$h(G)$ est immense et G est très bien connecté.

2. Considérons le cycle :



Si $S = \{1, ..., n/2\}$,

$$|\partial S| = 2 \quad \Rightarrow \quad h(G) \leq \frac{2}{n/2} = \frac{4}{n}$$

$h(G)$ devient très petit et G n'est pas bien connecté.

Définition 4 (graphes expanseurs)

Une famille de graphe $G_n = ([n], E_n)$ est une famille d'expanseurs si :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, h(G_n) \geq \delta$$

Remarque.

Ainsi une famille de graphes complets est une famille d'expanseurs contrairement à une famille de cycles.

Définition 5 (graphes réguliers)

$d, n \in \mathbb{N}$. Un graphe $G = ([n], E)$ est $d-$régulier si chaque sommet a d voisins i.e :

$$\forall i \in [n], \quad |\{j \in [n] | \{i,j\} \in E\}| = d$$

Remarque.
Le graphe complet est $(n-1)-$régulier. Le cycle est $2-$régulier.

Définition 6 (matrice d'adjacence)

On appelle matrice d'adjacence d'un graphe G sur n sommets la matrice $n \times n$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leftrightarrow j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarques.

- Graphes non-dirigés $\Rightarrow$ matrice d'adjacence symétrique
- pas de boucle $\Rightarrow$ diagonale nulle
- Graphe $d-$régulier $\Rightarrow$ matrice $d-$stochastique, i.e. dans chaque ligne il y a d entrées égales à 1
- Graphes non dirigés $d-$réguliers $\leftrightarrow$ Matrice 0/1 $d-$stochastique à diagonale nulle

On notera $\lambda_1 \geq \lambda_2 ... \geq \lambda_n$ le spectre de G

Proposition 1

Si G est $d-$régulier sur n sommets alors $\lambda_1 = d$ et $\forall i, |\lambda_i| \leq d$

Preuve.
Soit M la matrice d'adjacence de G

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ . \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d \text{ est une valeur propre}$$

Soit v_i le vecteur propre associé à λ_i. $Mv_i = \lambda_i v_i$.

$$\begin{pmatrix} ... \\ \sum_{j=1}^n M_{k,j} < v_i, e_j > \\ ... \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} ... \\ < v_i, e_k > \\ ... \end{pmatrix}$$

Soit k_0 tq $< v_i, e_{k_0} >= \|v_i\|_\infty = \max_i < v_i, e_j >$

$$\lambda_i < v_i, e_{k_0} >= \sum_{j=1}^n M_{k_0,j} < v_i, e_j >$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\lambda_i|. < v_i, e_{k_0} > &= \left| \sum_{j=1}^{n} M_{k_0,j} < v_i, e_j > \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} M_{k_0,j} | < v_i, e_j > | \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} M_{k_0,k}. < v_i, e_{k_0} >= d. < v_i, e_{k_0} > \end{aligned}$$

□

Exemples.

- Graphe complet :
$$\begin{pmatrix} 0 & . & 1 & 1 \\ 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 \end{pmatrix} - I_n$$
$\lambda_1 = n-1$, $\lambda_2, ..., \lambda_n = -1$. Il y a une grande différence entre les deux plus grandes valeurs propres et G est bien connecté.
- Cycle :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 2\cos\left(\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)$. Les deux plus grandes valeurs propres sont très proches pour n grand et G n'est pas bien connecté.

2 Lien entre expansion et spectre

Montrons le lien entre la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ et $h(G)$.

Théorème 2 (Alon-Milman)

$G = ([n], E)$ $d-$régulier. Alors :

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}$$

Remarques.
Si λ_1 et λ_2 sont bien espacés $\rightarrow h$ est grande $\rightarrow$ bon expanseur. Et l'inverse est aussi vrai.
On appelle trou spectral l'espace séparant les 2 plus grandes valeurs propres.

Lemme 3

$G = ([n], E)$ graphe $d-$régulier. $\forall S \subset [n]$ avec $|S| \leq n/2$, on a :

$$\frac{|\partial S|}{|S|} \geq (d - \lambda_2)\left(1 - \frac{|S|}{n}\right)$$

Preuve.
$S \subseteq [n], |S| \leq n/2$

$$|\partial S| = \sum_{i \in S, j \in S^C} a_{ij}$$

En notant $1_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 sur S). On peut écrire :

$$\begin{aligned} |\partial S| &=< A1_{S^C}, 1_S > \\ &=< A(1 - 1_S), 1_S > \\ &=< d1, 1_S > - < A1_S, 1_S > \quad \text{car } A1 = d1 \\ &= d|S| - < A1_S, 1_S > \end{aligned}$$

Par le théorème spectral $\Rightarrow \quad A = \frac{d}{n}1.1^t + \lambda_2 v_2 v_2^t + ... + \lambda_n v_n v_n^t$ où v_i est le vecteur propre associé à λ_i. Donc :

$$\begin{aligned} < A1_S, 1_S > &= \frac{d}{n}|S|^2 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i < v_i, 1_S >^2 \\ &\leq \frac{d}{n}|S|^2 + \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} < v_i, 1_S >^2 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} < v_i, 1_S >^2 &= \sum_{i=1}^{n} < v_i, 1_S >^2 - < v_1, 1_S >^2 \\ &= \|1_S\|_2^2 - \frac{|S|^2}{n} \\ &= |S|\left(1 - \frac{|S|}{n}\right) \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}|\partial S| &\geq d|S| - \frac{d}{n}|S|^2 - \lambda_2|S|\left(1-\frac{|S|}{n}\right)\\ &= d|S|\left(1-\frac{|S|}{n}\right) - \lambda_2|S|\left(1-\frac{|S|}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{|\partial S|}{|S|} \geq (d-\lambda_2)\left(1-\frac{|S|}{n}\right)$$

$\square$

Preuve.
(Preuve du théorème)

D'après le lemme :

$$h(G) \geq \inf_{|S|\leq n/2}\left\{(d-\lambda_2)\left(1-\frac{|S|}{n}\right)\right\} = \frac{d-\lambda_2}{2}$$

Pour la majoration, on doit trouver S, $|S| \leq n/2$ tel que $\frac{|\partial S|}{|S|} \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}$

Cours du 28 avril

Soit v_2 le vecteur propre normalisé associé à λ_2 ; $Av_2 = \lambda_2 v_2$ où A est la matrice d'adjacence de G. On peut supposer que le nombre de coordonnées positives de v_2 est $\leq n/2$. Soit u_2 la restriction de v_2 aux coordonnées positives i.e. :

$$\forall\ i \leq n, \quad \begin{cases} u_i =< u_2, e_i >=< v_2, e_i > & \text{si } < v_2, e_i >> 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique.
Soit γ uniforme sur $[0,1]$. Soit $S = \{i \leq n | u_i^2 \geq \gamma\}$. S est de taille $\leq n/2$ p.s.

$$|\partial S| = \sum_{i\in S, j\notin S} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ij}\mathbb{1}_{\{i\in S, j\notin S\}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\partial S|) &= \sum_{i,j} A_{ij}\mathbb{P}(i\in S, j\notin S) \\
&= \sum_{i,j|u_i\geq u_j} A_{ij}\mathbb{P}(u_j^2 \leq \gamma \leq u_i^2) \\
&= \sum_{i,j|u_i\geq u_j} A_{ij}(u_i^2 - u_j^2) \qquad \text{(car loi uniforme)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j|u_i\geq u_j} A_{ij}(u_i^2-u_j^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,j|u_j\geq u_i} \underbrace{A_{ji}}_{=A_{ij}}(u_j^2-u_i^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}|u_i^2-u_j^2| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}|u_i-u_j|(u_i+u_j) \\
&\underset{\text{CS}}{\leq} \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} A_{ij}(u_i-u_j)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j} A_{ij}(u_i+u_j)^2\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{i,j} A_{ij}u_i^2 - 2\sum_{ij} A_{ij}u_iu_j\right)^{1/2}\left(2\sum_{i,j} A_{ij}u_i^2 + 2\sum_{ij} A_{ij}u_iu_j\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{ij} A_{ij}u_i^2 = \sum_{i\in \mathrm{Supp}(u)}\left(\sum_{j\in \mathrm{Supp}(u)} A_{ij}\right)u_i^2 \leq d\sum_{i\in\mathrm{Supp}(u)} u_i^2 = d\|u\|_2^2$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} A_{ij}u_iu_j &= < Au, u > \\
&= < A(u-v_2), u > + < Av_2, u > \\
&= < A(u-v_2), u > + \lambda_2\underbrace{< v_2, u >}_{=\|u\|_2^2}
\end{aligned}$$

Or $u - v_2$ a toutes ses coordonnées positives, $A(u-v_2)$ aussi et u aussi. Donc $< A(u-v_2), u > \geq 0$.
Donc :

$$\sum_{i,j} A_{ij}u_iu_j \geq \lambda_2\|u\|_2^2$$

D'autre part :

$$\sum_{i,j} A_{ij}u_iu_j = < Au, u > \leq \|A\|.\|u\|_2^2 = d\|u\|_2^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\partial S|) &\leq \frac{1}{2}(2d\|u\|_2^2 - 2\lambda_2\|u\|_2^2)^{1/2}(2d\|u\|_2^2 + 2d\|u\|_2^2)^{1/2} \\
&= \sqrt{2d(d-\lambda_2)}\|u\|_2^2
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S|) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i\leq n} \mathbb{1}_{\{i\in S\}}\right)\\ &= \sum_{i\leq n} \mathbb{P}(\gamma \leq u_i^2)\\ &= \sum_{i\leq n} u_i^2 = \|u\|_2^2\end{aligned}$$

En conclusion, on a montré que $\mathbb{E}(|\partial S|) \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}\mathbb{E}(|S|)$. Il existe donc une réalisation de S telle que :

$$\begin{aligned}&|\partial S| \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}|S|\\ \Rightarrow\ &h(G) \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}\end{aligned}$$

□

Remarque.
On a vu que si le trou spectral est grand alors il en est de même pour l'expansion. À quel point le trou spectral peut-il être grand ?

On regarde souvent la deuxième plus grande valeur propre en valeur absolue au lieu de λ_2.

Théorème 4 (Alon-Boppana)
Pour tout graphe d-régulier sur n sommets, on a :

$$\lambda = \max(|\lambda_2|, ..., |\lambda_n|) \geq 2\sqrt{d-1}\left(1 - \frac{C\ln^2(d)}{\ln^2(n)}\right)$$

où $C =$ cste universelle

Proposition 5
Pour tout graphe d-régulier, on a :

$$\lambda \geq \sqrt{d\left(1 - \frac{d-1}{n-1}\right)}$$

Preuve.

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{ij} A_{ij}^2 = nd$$

D'autre part :

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq d^2 + \lambda^2(n-1)$$

car les valeurs propres de A^2 sont les valeurs propres de A au carré. □

Définition 7 (graphes Ramanujan)

Un graphe $d-$régulier est Ramanujan si $\lambda \leq 2\sqrt{d-1}$. En d'autres termes, les graphes Ramanujan sont les meilleurs graphes expanseurs (spectraux).

Remarque.
Est-ce que ces graphes existent ?

- Lubotzky-Philips-Sarnak (1988) : oui pour $d = p+1$ avec p premier (construction basée sur la théorie des nombres)
  cf. Davidoff, Sarnak, Valette : Elementary number theory, group theory, Ramanujan graphs
- Marcus-Spielman-Srivastava (2013) : oui pour tout d

3 Graphes aléatoires

Le but ici est d'investiguer l'expansion de modèles aléatoires. Qu'est-ce qu'un graphe aléatoire ? On fixe n sommets et l'aléatoire se fera dans la façon d'assigner les connexions.

On regarde le graphe d'Erdös-Renyi qu'on note $\mathcal{G}(n,p)$ où on décide de mettre une arête entre 2 sommets indépendamment avec une probabilité p. La matrice d'adjacence associée est une matrice de diagonale nulle dont les entrées au-dessus de la diagonale sont des Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Le but est de voir si ce modèle est proche d'être Ramanujan ou non. I.e. est-ce qu'avec une grande probabilité, le trou spectral est "maximal".

Réponse. Oui, presque. On montrera que $\lambda \leq 2\sqrt{d-1}+\varepsilon$, où $d = np$, avec une grande probabilité. Et on montrera que $\lambda \leq C\sqrt{d}$ où C est une grande constante. On notera $\mathcal{G}(n, d/n)$ à la place de $\mathcal{G}(n,p)$. Étant donné un graphe G, on a :

$$\forall i \leq n, \quad \deg(i) = |\{j \leq n | (i,j) \in E\}|$$

Pour $\mathcal{G}(n,p)$, pour tout i, $\mathbb{E}(\deg(i)) = (n-1)p$

Proposition 5

On fixe $\varepsilon \in [0,1]$ tel que $d \leq \ln(\varepsilon n)$. Alors :

$$\mathbb{P}(\text{“Il existe un sommet isolé”}) \geq 1-\varepsilon$$

où un sommet isolé est un sommet de degré nul.

Preuve.
Pour tout $i \leq n$, on pose :
$$\varepsilon_i = \{\text{“le sommet i est isolé”}\}$$
Alors :
$$\mathbb{P}(\varepsilon_i) = (1-p)^{n-1}$$
Pour $i \neq j$:
$$\mathbb{P}(\varepsilon_i \cap \varepsilon_j) = (1-p)^{2n-3}$$
On pose η le nombre de sommets isolés. Le but est de montrer que $\mathbb{P}(\eta \geq 1) \geq s(1-\varepsilon)$. On a: $\eta = \sum_i \mathbb{1}_{\varepsilon_i}$. On va utiliser la *propriété de Paley-Zigmund* :
Si η est une variable aléatoire positive, alors :
$$\forall \theta \in [0,1], \quad \mathbb{P}(\eta \geq \theta \mathbb{E}(\eta)) \geq (1-\theta^2)\frac{\mathbb{E}(\eta)^2}{\mathbb{E}(\eta^2)}$$
On sait que $\mathbb{E}(\eta) = n(1-p)^{n-1}$ et que $\mathbb{E}(\eta^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$. Il ne reste qu'à appliquer la formule introduite ci-dessus :
$$\mathbb{P}(\eta \geq \theta n(1-p)^{n-1}) \geq (1-\theta^2)\frac{[n(1-p)^{n-1}]^2}{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}$$
Après calculs, on obtient :
$$\mathbb{P}(\eta \geq \theta n(1-p)^{n-1}) \geq \frac{(1-\theta^2)n(1-p)^{n-1}}{1+(n-1)(1-p)^{n-2}}$$
Si p est petit, alors $(1-p)^{n-1} \sim e^{-(n-1)p}$.

On prend $\theta \sim \varepsilon$ et on vérifie la proposition. □

Remarque.
Dans la suite, on s'intéressera au cas $np \gg \ln(n)$

Proposition 6

Soit $\varepsilon \in [0,1]$, $d \geq \frac{2\ln 2n}{H(\varepsilon)}$. Alors :
$$\mathcal{G}(n, \tfrac{d}{n}) \text{ est } \varepsilon\text{-presque } d\text{-régulier avec probabilité } \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

3.1 Preuve du théorème (7)

Cours du 5 mai

Dans la suite, on prend toujours $d \geq \ln n$, $\longrightarrow \mathcal{G}\left(n, \frac{d}{n}\right)$ est presque $d-$régulier. Ainsi $\lambda_1 \sim d$ avec une grande probabilité. Comme on a vu précédemment, le trou spectral maximal correspond à avoir $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ de l'ordre de $\sqrt{d}$.

Théorème 7

$\forall k > 0, \exists C = C(K) > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}\left(\lambda(G) \geq C\sqrt{d}\right) \leq \frac{1}{n^K}$$

Remarque.

Ceci nous montrera que le trou spectral maximal i.e. $\lambda \sim d$ alors que$\lambda \sim \sqrt{d}$.

On va s'intéresser dans tout ce cours à la démonstration de ce théorème.

Propriété 8

A $n \times n$ symétrique, soit λ sa deuxième plus grande valeur propre en valeur absolue. Alors :

$$\lambda = \min_{z \in S^{n-1}} \max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp z}} \|Ax\|_2 = \min_{z \in S^{n-1}} \max_{\substack{x,y \in S^{n-1} \\ x \perp z}} < Ax, y >$$

Preuve.

Supposons que $\lambda = |\lambda_2|$ (sinon la preuve est identique pour $\lambda = |\lambda_n|$). Montrons d'abord que :

$$\lambda \leq \min_{z \in S^{n-1}} \max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp z}} \|Ax\|_2$$

Soit $z \in S^{n-1}$. Par le théorème spectral :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^t \qquad \text{où } v_i \text{ vp associé à } \lambda_i$$

$x \in z^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^t x \right\|_2^2 \\ &= \|\lambda_1 < v_1, x > v_1 + \lambda_2 < v_2, x > v_2\|_2^2 \\ &= \lambda_1^2 < v_1, x >^2 + \lambda_2^2 < v_2, x >^2 \\ &\geq \lambda^2 (\underbrace{< v_1, x >^2 + < v_2, x >^2}_{= \|x\|_2^2 = 1}) \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $z = v_1$, on a l'égalité. $\square$

Conclusion. Notre but est ramené à montrer que :

$$\min_{z\in S^{n-1}} \max_{\substack{x\in S^{n-1}\\ x\perp z}} \|Bx\|_2 \geq \sqrt{d} \qquad \text{avec une probabilité faible}$$

où B est la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}\left(n, \frac{d}{n}\right)$

Prenons $z = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}$; il nous suffit de montrer :

$$\mathbb{P}\left(\max_{x\perp\mathbb{1}} \|Bx\| \geq \sqrt{d}\right) \qquad \text{est faible}$$

On note :

$$S_0^{n-1} = \left\{x \in S^{n-1} | < x, \mathbb{1} >= \sum_{i=1}^n x_i = 0\right\}$$

Ainsi notre but est de montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\max_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} < Bx, y > \geq \sqrt{d}\right) \qquad \text{est petit}$$

Pour tout $(x, y) \in S_0^{n-1} \times S^{n-1}$, on note $\mathcal{E}_{x,y} = \left\{< Bx, y > \geq \sqrt{d}\right\}$

Conclusion. Notre but est ramené à montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} \mathcal{E}_{x,y}\right) \qquad \text{faible}$$

On a déjà appris comment discrétiser la sphère.
Soit $\varepsilon \in (0, 1/2)$ et N^0 un $\varepsilon-$réseau de S_0^{n-1}, N un $\varepsilon-$réseau de S^{n-1}. $|N^0|$ et $|N| \leq (1 + 2/\varepsilon)^n$
Montrons que l'on peut réduire l'étude de :

$$\bigcup_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} \mathcal{E}_{x,y} \qquad \text{à celle de} \qquad \bigcup_{(x,y)\in N^0\times N} \mathcal{E}_{x,y}$$

Lemme 9

Soit $\varepsilon \in (0, 1/2)$ et N^0 un $\varepsilon-$réseau de S_0^{n-1}, N un $\varepsilon-$réseau de S^{n-1}, et A $n \times n$.

$$| < Ax, y > | \leq \beta \quad \forall (x, y) \in N^0 \times N \quad \Rightarrow \quad | < Ax, y > | \leq \frac{\beta}{1 - 2\varepsilon} \quad \forall (x, y) \in S_0^{n-1} \times S^{n-1}$$

Corollaire 10

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} \mathcal{E}_{x,y}\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in N^0\times N} \tilde{\mathcal{E}}_{x,y}\right)$$

où :

$$\tilde{\mathcal{E}}_{x,y} = \left\{< Bx, y > \geq (1-2\varepsilon)\sqrt{d}\right\}$$

Preuve.

Preuve du corollaire.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} \mathcal{E}_{x,y}\right) &= \mathbb{P}\left(\exists (x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1} \mid < Bx, y > \geq \sqrt{d}\right) \\ &\underset{\beta=\sqrt{d}(1-2\varepsilon)}{\leq} \mathbb{P}\left(\exists (x,y)\in N^0\times N \mid < Bx, y > \geq \sqrt{d}\right)\end{aligned}$$

□

Preuve.

Preuve du lemme. On sait que $\forall (x,y)\in N^0\times N$, on a $|< Ax, y >| \leq \beta$. On doit montrer que $\forall (x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}$, on a $|< Ax, y >| \leq \frac{\beta}{1-2\varepsilon}$.

Soit $(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}$ tel que $< Ax, y >= \sup\limits_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} < Ax', y' >$.

Alors $\exists (\tilde{x},\tilde{y})\in N^0\times N$ tel que $\|x-\tilde{x}\|\leq\varepsilon$, $\|y-\tilde{y}\|\leq\varepsilon$.

$$< Ax, y >=< A(x-\tilde{x}), y > + < A\tilde{x}, y-\tilde{y} > + < A\tilde{x}, \tilde{y} >$$

En notant $a =< Ax, y >$, on a les majorations suivantes :

- comme $\frac{x-\tilde{x}}{\|x-\tilde{x}\|}\in S_0^{n-1}$, alors $< A(x-\tilde{x}) > \leq a\varepsilon$
- $< A\tilde{x}, y-\tilde{y} > \leq a\varepsilon$
- $< A\tilde{x}, \tilde{y} > \leq \beta$

Alors :

$$a =< Ax, y > \leq 2\varepsilon a + \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \leq \frac{\beta}{1-2\varepsilon}}$$

□

3.2 Stratégie incomplète

On a conclut qu'il nous suffisait de contrôler :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in N^0\times N} \tilde{\mathcal{E}}_{x,y}\right)$$

On utilise l'union bound, $\varepsilon = 1/4$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{(x,y)\in N^0\times N} \tilde{\mathcal{E}}_{x,y}\right) \leq |N^0||N| \max_{(x,y)\in N^0\times N} \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_{x,y}) \leq 81^n \max_{(x,y)\in N^0\times N} \mathbb{P}(\tilde{\mathcal{E}}_{x,y})$$

Si jamais on arrive à montrer que $\mathbb{P}(\tilde{\varepsilon}_{x,y}) \ll 81^{-n}$ alors c'est fini ! Mais est-ce possible ?

$$\tilde{\mathcal{E}}_{x,y} = \left\{< Bx, y > \geq \sqrt{d}\right\} = \left\{\sum_{i,j} B_{ij}x_iy_j \geq \sqrt{d}\right\} \subseteq \left\{\sum_{i<j} B_{ij}x_iy_j \geq \sqrt{d}/2\right\} \bigcup \left\{\sum_{i>j} B_{ij}x_iy_j \geq \sqrt{d}/2\right\}$$

Les $(B_{ij}x_iy_i)$ sont des v.a. indépendantes bornées par $\|x\|_\infty \|y\|_\infty$ et telles que :

$$\mathbb{E}(B_{ij}^2 x_i^2 y_j^2) = \frac{d}{n} x_j^2 y_i^2$$

Ainsi :

$$\sum_{i,j} \mathbb{E}(B_{ij}^2 x_i^2 y_j^2) \leq \frac{d}{n}$$

On veut appliquer Bernstein. On aurait une probabilité :

$$\leq \exp\left[-\frac{t^2}{\frac{d}{n} + t\|x\|_\infty \|y\|_\infty}\right]$$

Dans notre cas, on veut prendre $t \sim \sqrt{d}$ ainsi on aurait une probabilité :

$$\leq \exp\left[-\frac{d}{\frac{d}{n} + \sqrt{d}\|x\|_\infty \|y\|_\infty}\right]$$

Si $\|x\|_\infty \|y\|_\infty$ est grande, par exemple de l'ordre d'une constante, on aurait une probabilité de l'ordre de $\exp(-\sqrt{d})$ qui ne pourrait pas combattre le 81^n.

La stratégie n'est donc pas bonne, cependant cela marche pour les vecteurs de petites normes. Elle fonctionne tant que :

$$\|x\|_\infty \|y\|_\infty \leq \frac{\sqrt{d}}{n}$$

3.3 La bonne stratégie

Pour $x, y \in S^{n-1}$, on définit :

$$L(x,y) = \left\{ (i,j) \mid |x_i y_j| \leq \frac{\sqrt{d}}{n} \right\}$$

et :

$$H(x,y) = \left\{ (i,j) \mid |x_i y_j| > \frac{\sqrt{d}}{n} \right\}$$

Ainsi :

$$< Bx, y >= \sum_{i,j} B_{i,j} x_i y_j = \sum_{(i,j) \in L} B_{i,j} x_i y_j + \sum_{(i,j) \in H} B_{i,j} x_i y_j$$

Lemme 11

$(x, y) \in S_0^{n-1} \times S^{n-1}$. Alors $\forall t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{(i,j) \in L(x,y)} B_{ij} x_i y_j \right| \geq (1+t)\sqrt{d} \right) \leq 2 \exp[-nH(t)]$$

où H est la fonction définie dans Bennett

Lemme 12 (Kahn-Szemeredi)

$\forall K, \exists \beta = \beta(K)$ tel que si G est un graphe (de matrice d'adjacence A) qui satisfait :

$$\forall S, T \subset [n], \quad (*) \begin{cases} |\mathrm{Edg}(S,T)| \leq S\frac{d}{n}|S||T| \\ \\ |\mathrm{Edg}(S,T)| \ln\left(\frac{\mathrm{Edg}(S,T)}{\frac{d}{n}|S||T|}\right) \leq K \max(|S|,|T|) \ln\left(\frac{n}{\max(|S|,|T|)}\right) \end{cases}$$

Alors $\forall (x,y) \in S_0^{n-1} \times S^{n-1}$,, on a :

$$\left| \sum_{(i,j) \in H(x,y)} A_{ij} x_i y_j \right| \leq \beta\sqrt{d}$$

Remarque.

- $\mathrm{Edg}(S,T) = \{(i,j) | i \in S, j \in T\}$
- les propriétés citées sont souvent appelées "pseudo-aléatoires"
- pour $\mathcal{G}\left(n, \frac{d}{n}\right)$:

$$\mathbb{E}(|\mathrm{Edg}(S,T)|) = \mathbb{E}\left(\sum_{(i,j) \in S \times T} B_{ij} \right) = \frac{d}{n}|S||T|$$

Lemme 13

$\mathcal{G}\left(n, \frac{d}{n}\right)$ satisfait $(*)$ avec une probabilité $\geq 1 - \frac{1}{n^K}$

Remarque.

La preuve se fera plus tard.

Preuve.

Preuve du théorème principal.

On note $E = \{\lambda \geq \sqrt{d}\}$; $E^* = \{\mathcal{G}$ satisfait $(*)\}$. D'après le lemme précédent $\mathbb{P}(E^*) \geq 1 - \frac{1}{n^K}$.

$$\mathbb{P}(E|E^*) \leq 81^n \max_{(x,y)\in S_0^{n-1}\times S^{n-1}} \mathbb{P}(< Bx, y \geq \sqrt{d}|E^*)$$

$$< Bx, y >=< Bx, y >_L + < Bx, y >_H = \sum_{(i,j)\in L(x,y)} B_{ij}x_jy_i + \sum_{(i,j)\in H(x,y)} B_{ij}x_jy_i$$

Puisque $\mathcal{G} \in E^*$, par Kahn-Szémeredi, on a :

$$< Bx, y >_H \leq \beta\sqrt{d}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E|E^*) &\leq 81^n\mathbb{P}\left(< Bx, y >_L \geq \beta\sqrt{d} \mid E^*\right) \\
&\leq \frac{81^n\mathbb{P}(< Bx, y >_L \geq \beta\sqrt{d})}{\mathbb{P}(E^*)} \\
&\leq \frac{2 \times 81^n \exp(-nH(.))}{\mathbb{P}(E^*)}
\end{aligned}$$

Par un bon choix des paramètres (.), on aurait :

$$\mathbb{P}(E|E^*) \leq \frac{e^{-n}}{\mathbb{P}(E^*)}$$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|E^*)\mathbb{P}(E^*) + \underbrace{\mathbb{P}(E|E^*C)}_{\leq 1}\mathbb{P}(E^*)$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(E) \leq e^{-n} + \frac{1}{n^K}}$$

$\square$

4 Méthode des moments

Le but de cette partie est de capturer le “2”.

Théorème 14 (2008)

$G = \mathcal{G}\left(n, \frac{d}{n}\right)$, c constante universelle

$$\mathbb{P}\left(\lambda(G) \leq 2\sqrt{d-1} + cd^{1/4}\ln n\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$$

Si $d \gg \ln^4 n$, on aurait $cd^{1/4}\ln n \ll 2\sqrt{d-1}$ et alors :

$$\mathbb{P}(\lambda(G) \leq (2+O(1))\sqrt{d-1}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$$

4.1 Généralités

Si B est une matrice symétrique $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ on définit la norme spectrale comme :

$$\|B\| = \sup_x < Bx, x >= \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

$\forall k, B^k$ a comme spectre $\lambda_1^k \ldots \lambda_n^k$. Or $\mathrm{Tr}(B^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$. Donc pour k pair $\|B\|^k \leq \mathrm{Tr}(B^k)$.

Soit A la matrice d'adjacenece de $\mathcal{G}\left(n, \frac{d}{n}\right)$. A a une diagonale de zéros, et au dessus de la diagonale des Bernouilli indépendantes de paramètre $\frac{d}{n}$.

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &\leq \left\|A - \frac{d}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^t\right\| \qquad \text{(Courant-Fischer)} \\
&\leq \left\|\begin{pmatrix} -\frac{d}{n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\frac{d}{n} \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ & 0 & \varepsilon_{ij} - \frac{d}{n} & . \\ & & \ddots & . \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right\| \\
&\leq \frac{d}{n} + \|B\| \qquad \text{en notant } B \text{ la seconde matrice} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Proposition 15

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k)) \leq 2n(2\sqrt{d-1})^k \qquad \forall k \qquad \text{(arnaque)}$$

Preuve (Proposition 15 $\Rightarrow$ Théorème 14).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lambda(G) \geq 2\sqrt{d-1} + c \ln n \ d^{1/4}) &\underset{(*)}{\leq} \mathbb{P}(\|B\| \geq 2\sqrt{d-1} + c' \ln n \ d^{1/4}) \\
&\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(\|B\|^k)}{\left(2\sqrt{d-1} + c' \ln n \ d^{1/4}\right)^k} \\
&\underset{k \text{ pair}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k))}{\left(2\sqrt{d-1} + c' \ln n \ d^{1/4}\right)^k} \\
&\underset{\text{prop}}{\leq} \frac{2n(2\sqrt{d-1})^k}{\left(2\sqrt{d-1} + c' \ln n \ d^{1/4}\right)^k} \\
&\leq 2n \left(1 + \frac{c' \ln n \ d^{1/4}}{2\sqrt{d-1} + c' \ln n \ d^{1/4}}\right)^k \\
&\leq 2n \exp\left(k \ln\left(1 + \frac{c' \ln n \ d^{1/4}}{2\sqrt{d-1} + c' \ln n \ d^{1/4}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$\square$

But. Comprendre $\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k))$

$$\mathrm{Tr}(B^k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} B_{i_1 i_2} \ldots B_{i_{k-1} i_k} B_{i_k i_1}$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k)) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \mathbb{E}(B_{i_1 i_2} \ldots B_{i_{k-1} i_k} B_{i_k i_1})$$

Or, les B_{ik} sont centrées et indépendantes.

Pour $1 \leq l \leq k$, on note $\mathbb{E}(n, k, l)$ la somme de tous les $\mathbb{E}(B_{i_1 i_2} \ldots B_{i_k i_1})$ tels que $|\{i_1, \ldots, i_k\}| = l$. En d'autres termes, on voit le terme $B_{i_1 i_2} \ldots B_{i_k i_1}$ comme un chemin de i_1 à lui-même traversant les arêtes $(i_1, i_2) \ldots (i_k, i_1)$. Les termes dans $\mathbb{E}(n, k, l)$ sont donc ceux où l'on rencontre l sommets.

Comme les B_{ij} sont indépendantes et centrées, dès qu'une arête n'apparaît pas plus d'une fois alors le terme est nul. Ainsi, on se restreint aux termes où chaque arête apparaît au moins 2 fois sur notre chemin.

Regardons un terme typique dans $\mathbb{E}(n, k, l)$. Il sera de la forme :

$$\prod_{i=1}^{s} \mathbb{E}(B_{a_i}^{m_i}) \qquad \text{où } s \text{ est le nombre d'arêtes distinctes traversées}$$

a_i est un arête, m_i sa multiplicité, $m_1 + \ldots + m_s = k$ et $l - 1 \leq s \leq k/2$ car on traverse k arêtes chacune répètée au moins 2 fois.

Estimons un terme type :

$$\mathbb{E}\left(B_{a_i}^{m_i}\right) = \left(-\frac{d}{n}\right)^{m_i} \times \left(1-\frac{d}{n}\right) + \frac{d}{n} \times \left(1-\frac{d}{n}\right)^{m_i}$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left(B_{a_i}^{m_i}\right) = \frac{d}{n} \underbrace{\left[\left(1-\frac{d}{n}\right)^{m_i-1} - \left(-\frac{d}{n}\right)^{m_i-1}\right]}_{\leq 1}$$

Ainsi un terme type dans $\mathbb{E}(n,k,l)$ est $\leq \left(\frac{d}{n}\right)^{l-1}$

Conclusion.

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k)) = \sum_{l=2}^{k/2} \mathbb{E}(n,k,l) \leq \sum_{l=2}^{k/2} \left(\frac{d}{n}\right)^{l-1} \#\mathbb{E}(n,k,l)$$

On a maintenant un problème purement combinatoire. Il s'agit d'estimer $\#\mathbb{E}(n,k,l)$. Ainsi il faut compter le nombre de chemins fermés à k arêtes, chacune traversée au moins 2 fois, et rencontrant l sommets. On note $W(n,k,l)$ le nombre de ces chemins (/marches).

Proposition 16

$$W(n,k,l) \leq A_n^l \binom{k}{2l-2} l^{2(k-2l+2)} 2^{2l-2}$$

Preuve (Proposition 16 ⇒ Proposition 15).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k)) &\leq \sum_{l=2}^{k/2+1} E(n,k,l) \\
&\leq \sum_{l=2}^{k/2+1} \left(\frac{d}{n}\right)^{l-1} W(n,k,l) \\
&\leq n \sum_{l=2}^{k/2+1} \underbrace{(4d)^{l-1} l^{2(k-2l+2)} \binom{k}{2l-2}}_{\alpha_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}} &= \frac{1}{4d} \times \frac{l^{2(k-2l+2)}}{(l+1)^{2(k-2l)}} \times \frac{(2l)!(k-2l)!}{(2l-2)!(k-2l-2)!} \\
&= \frac{1}{4d} \times \frac{2l(2l-1)}{(k-2l+2)(k-2l+1)} \left(1+\frac{k}{2}\right)^4 \\
&\leq \frac{k^2\left(1+\frac{k}{2}\right)^4}{4d} \\
&\leq \frac{1}{2} \qquad \text{si on prend } k = d^{1/6}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(B^k)) \leq 2n(2\sqrt{d})^k$$

□

But. Compter $W(n,k,l)$. On va associer à chaque chemin un code d'une manière injective puis on comptera les codes.

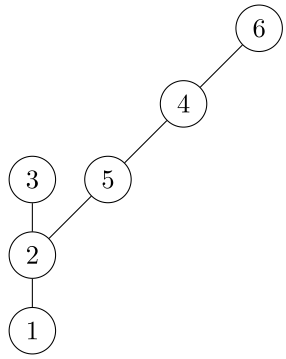
Code préliminaire.
On commence par ordonner les sommets par leur ordre d'apparition dans la marche (ceci nous coûtera A_n^l). Fixons $\{v_1, \dots v_l\}$ l sommets dans leur ordre d'apparition.
Soit W une marche rencontrant $v_1, \dots, v_l$ traversant k arêtes chacune au moins 2 fois. À W on va d'abord associer un arbre $T(W)$. Rappel : un arbre est un graphe où 2 sommets sont reliés par un chemin unique.

- v_1 est la racine de l'arbre
- si on marche sur une arête (u,v) et on découvre v pour la première fois alors on rajoute v à l'arbre et on relie u à v.

Exemple.
$l = 6$, $k = 14$

$$(1,2)(2,3)(3,2)(2,5)(5,4)(4,1)(1,2)(2,5)(5,4)(4,6)(6,4)(4,1)(1,2)(2,1)$$

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$



On associe à W le code préliminaire suivant :

- on marche, pour toute arête (u,v) que je vois sur T pour la première fois, on met un "+" à sa place
- si je marche sur une arête pour la deuxième fois, on met un "$-$"
- sinon on appelle l'arête "arête neutre" et on la marque par son point d'arrivée

Exemple.
Reprenons l'exemple, le code préliminaire associé est $++-++1---+-121$.

On a toujours $nb(+) = nb(-) =$ nb d'aêtes distinctes dans l'arbres $= l-1$. Du coup pour placer les + et les - cela nous coûte :

$$\binom{k}{2l-2} 2^{2l-2}$$

Décodage. $(1,2)(2,3)(3,2)(2,5)(5,4)(4,1)(1,2)\otimes$ quelle branche suivre en $\otimes$? Le code préliminaire est insuffisant.

Idée pour modifier. $+$,neutre on peut décoder. Pour chaque noeud on va associer la branche à suivre.