Analyse complexe
TD4

Lucie Le Briquer

Exercice 4.
$f(z) = u(z) + iv(z)$
Par les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

+ lemme de Schwarz pour les fonctions $\mathcal{C}^2$
Or u et v sont $\mathcal{C}^\infty$ car f est holomorphe donc $\mathcal{C}^\infty$
$\Rightarrow$ u et v sont harmoniques.

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$\log f(z) = \ln|f(z)| + i\arg(f(z)) \quad \text{a priori faux sur } \Omega \backslash \{\text{zéros de } f\}$$

Par contre, si $z_0 \mid f(z_0) \neq 0$ alors f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}(z_0, r)$ pour r suffisamment petit. $f|_{\mathcal{D}(z_0,r)}$ est holomorphe sur un ouvert simplement connexe et ne s'annule pas. Donc il existe une détermination du $\log f$ sur $\mathcal{D}(z_0, r)$ et $\Re(\log f) = \ln f$ donc $\ln f$ est harmonique sur $\mathcal{D}(z_0, r)$.

Exercice 5. (noyau de Poisson) On définit la fonction suivante pour $z = re^{i\theta}$ dans le disque unité :

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} =$$

$$\begin{aligned} P(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((re^{i\theta})^n + (re^{-i\theta})^n)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[1 + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[1 + \frac{2r\cos\theta - 2r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{aligned}$$

1. $P(r,\theta) \geq 0$ par la seconde égalité
2. $\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$ par la première égalité (et CVN de la série)
3.

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} P(r,\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}d\theta \xrightarrow[r\to 1]{} 0
\end{aligned}$$

4. $P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ donc P est harmonique sur $\mathcal{D}(0,1)$
5. Soit $u_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le cercle unité. On définit :

$$u(r,\theta) = P_r * u_1(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)u_1(e^{it})dt$$

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) - u_1(e^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)u_1(e^{it})dt - \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)u_1(e^{i\theta})d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)(u_1(e^{it}) - u_1(e^{i\theta}))dt
\end{aligned}$$

Il y a deux comportements : t proche de θ et t loin de $theta$.

Soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists\delta > 0, \forall t \in [\theta-\delta, \theta+\delta], \quad |u_1(e^{it}) - u_1(e^{i\theta})| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|u(r,\theta) - u_1(e^{i\theta})| &\leq \int_{[-\pi,\pi]\setminus[\theta-\delta,\theta+\delta]} |P(r,\theta-t)||(u_1(e^{it}) - u_1(e^{i\theta}))|dt \quad (*) \\
&+ \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} |P(r,\theta-t)|\underbrace{|(u_1(e^{it}) - u_1(e^{i\theta}))|}_{\leq\varepsilon}dt \\
&\leq (*) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Et $(*) \leq \int_{[-\pi,\pi]\setminus[\theta-\delta,\theta+\delta]} P(r,\theta-t)2\left\|u_1\right\|_\infty dt \quad \xrightarrow[r\to 1]{} 0$ par la question 3.

Montrons que u est harmonique sur $\mathcal{D}(0,1)$. Pour cela, montrons que $u = \Re(f)$ avec $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(0,1))$.

$$P(r,\theta-t) = \frac{1}{2\pi}\Re\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i\theta-t}}\right) = \frac{1}{2\pi}\Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right)u(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\Re\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right)u(e^{it})dt \\
&\ldots
\end{aligned}$$

À terminer avec un changement de variable