Équations aux dérivées partielles
Chapitre 6 : Méthode des Volumes finis

Lucie Le Briquer

Sommaire

1 Introduction

Part du ppe suivant : les modèles (équations) de la physique s'énoncent essentiellement à partir de lois de conservation.

- Se conservent : masse, quantité de mouvement, énergie totale, charge électrique, ...
- Ne se conservent pas : température, pression, vitesse
- "ça se négocie" : lois de comportement $\rho = \mathcal{R}(p, T)$ thermodynamique

1.1 Lois de conservation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$S : \Omega \times]t_1, t_2[\longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F : \Omega \times]t_1, t_2[\longrightarrow \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$$

$$\mathrm{Div}_{x,t} F = S \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i^j}{\partial x_j}(x,t) + \frac{\partial F_i^0}{\partial t}(x,t) = S_i(x,t) \quad i = 1, ..., m$$

Exemple.

Le dromadaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$m = 1$

$$\begin{cases} F_1^0 = u \\ F_1^1 = cu \\ S_1 = 0 \end{cases}$$

puisque (1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(cu) + \frac{\partial}{\partial t}(u) = 0$$

si c n'était pas constant, $0 \longrightarrow \frac{\partial c}{\partial x}u$

1.2 Le système des équations d'Euler en mécanique des fluides

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho g$$

Énergie totale :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho H u) = \rho g u$$

$$\mathrm{div}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

où :

$$\begin{cases} E = e + \frac{1}{2}|u|^2 \\ H = E + \frac{p}{\rho} = h + \frac{1}{2}|u|^2 \\ h = e + \frac{p}{\rho} \end{cases}$$

Remarque.

Pour f et g discontinues, le produit :

$$f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}$$

n'a pas de sens connu à ce jour.

Ici, $m = n + 2$:

$$\begin{pmatrix} F_1^0 & F_1^1 & . & F_1^n \\ F_2^0 & F_1^1 & . & F_2^n \\ . & . & . & . \\ F_{n+1}^0 & F_{n+1}^1 & . & F_{n+1}^n \\ F_1^0 & F_1^1 & . & F_{n+2}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \rho u_1 & . & \rho u_n \\ \rho u_1 & \rho u_1 u_2 & . & \rho u_1 u_n \\ . & . & . & . \\ \rho u_n & \rho u_1 u_n & . & \rho u_n u_n \\ \rho E & g u_1 H & . & \rho u_n H \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_1 \\ . \\ \rho g_n \\ \rho u g \end{pmatrix}$$

F, S fonctions de $V = (\rho, \rho u, \rho E)$ si on a la loi d'état.

On s'est bien ramenés à une EDP pour V.

2 La méthode des volumes finis

Système d'edp de lois de conservation.

–
$$G\left(x, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{3}$$

(3) est un problème ouvert. On appelle variable indépendante x et variable dépendante φ. Un changement de variables dépendantes est alors $\varphi = \Phi(\psi)$ (on obtient une équation sur ψ).

–
$$\mathrm{div}_{x,t} F = S \tag{4}$$

$\longrightarrow$ théorie mathématique (existence/unicité des solutions) plus accessible, quand on a (1) essayer de se ramener à (2) si possible

Remarque fondamentale. (1) est invariant par changement de variables dépendantes, contrairement à (2)

Exemples.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (cu)}{\partial x} = 0, \quad c \text{ constante}$$

$$\text{Euler : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

2.1 Deux exemples en 2D

$x \in \mathbb{R}$. Sous la forme (3) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c \text{ constante} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = s, \quad \nu > 0 \text{ constante} \tag{6}$$

On passe les deux exemples sous forme (4) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (cu)}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x} u = 0 \tag{7}$$

$$F = \begin{pmatrix} u \\ cu \end{pmatrix}, \quad S = \frac{\partial c}{\partial x} u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{8}$$

$$F = \begin{pmatrix} u \\ -\dfrac{\nu \partial u}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad S = c - \frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Remarque.
On est bien dans le cadre car ici l'EDP est d'ordre 2 donc l'inconnue est $(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$ et pas seulement u. S fait donc apparaître uniquement l'inconnue et pas sa dérivée.

Définition 1 (stratégie volumes finis)

$$(4) \;\Leftrightarrow\; \forall K, \int_K S dx = \int_{\partial K} F.n d\sigma$$

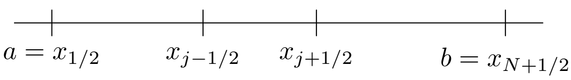
Remarque.
On va restreindre la recherche dans (4) à $u = u(x)$ stationnaire, $s = s(x)$; on cherche donc $u(x)$ tel que $-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = s(x)$.
Jusque là on a utilisé les *différences finies* pour (3) et les *éléments finis P1* pour (4) : "$-\Delta u = f$"

On va maintenant appliquer les VF à (4) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) = s$$

2.2 Maillage 1D et flux

$\Omega =]a, b[$, avec $-\infty < a < x < b < +\infty$



$$K_j = \left[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\right] \qquad \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} \qquad \Omega = \bigcup_{j=1}^{N} K_j \qquad h = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j (\longrightarrow 0)$$

Remarque.
En 1D, la seule différence avec les EF au niveau du maillage est que la numération utilise des demi-entiers, car tous les maillages 1D sont conformes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) = 0 \tag{9}$$
$$u(x, t_0) = u_0(x) \tag{10}$$
$$\text{(des conditions en } a \text{ et } b\text{)} \tag{11}$$

Pour l'instant, on ignore (13), on peut par exemple considérer que $\Omega = \mathbb{T}^1$ le tore i.e. $a = b$
On subdivise le temps : $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$ différences finies à pas variable en temps. On pose $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$.

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu)\right] dx = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,t)dx + cu(x_{j+1/2}, t) - cu(x_{j-1/2}, t) = 0$$

En intégrant entre t_n et t_{n+1} et en divisant tout par Δx_j :

$$\bar{u}_j(t_{n+1}) = \bar{u}_j(t_n) - \Delta t_n \frac{\bar{f}^n_{j+1/2} - \bar{f}^n_{j-1/2}}{\Delta x_j} \tag{12}$$

où :

$$\bar{u}_j(t_n) = \frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n)dt \qquad \bar{f}^n_{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (cu)(x_{j+1/2}, t)dt$$

Remarque.
L'équation (12) est *exacte* et ressemble fortement à un schéma différences finies.

2.3 Stratégie volumes finis.

Approcher $\bar{u}^n_j$ par v^n_j vérifiant :

$$(S1) \qquad v^{n+1}_j = v^n_j - \Delta t_n \frac{f^n_{j+1/2} - f^n_{j-1/2}}{\Delta x_j} \qquad \text{schéma VF}$$

où $f^n_{j+1/2}$ est une fonction de $(v^n_l)_{1\le l\le N}$ et $(v^{j+1}_l)_{1\le l\le N}$. Notons $V^n = (v^n_l)_{1\le l\le N}$. On se ramène à $H(V^{n+1}, V^n) = 0$.

Remarque.
Le choix naturel pour v^0_j serait :

$$\frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)dt$$

mais ce n'est pas forcément le meilleur choix.

Intuitivement, pour une EDP linéaire, on s'attend à avoir H linéaire. En pratique non $\longrightarrow$ on se cantonnera ici à un schéma d'ordre 1 pour avoir H linéaire.

Définition 2 (schéma explicite)

Un schéma volumes finis est explicite si $f^n_{j+1/2}$ ne sont fonction que des $(v^n_l)_{1\leq l\leq N}$ et de j et n ; il est implicite sinon.

Exemple.
Schéma VF à 3 points :

$$(S2) \qquad f^n_{j+1/2} = F(\Delta t_n, (\Delta x_l)_{1\leq l\leq N}, v^n_j, v^n_{j+1}) \qquad \text{avec } F : \mathbb{R}^*_+ \times (\mathbb{R}^*_+)^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Théorème 1

Sous l'hypothèse :

$$(C) \qquad F(k, \Delta, v, v) = 0$$

Le schéma $(S1)-(S2)$ est consistant avec l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu) = 0$, lorsque $\Delta x_j = h \quad \forall j = 1, \ldots, N$. Et en général il n'est pas consistant sans cette dernière hypothèse.

Remarque.
VF, un monde de paradoxes :

1. Équation linéaire (hyperbolique), schéma "précis" est forcément non linéaire (théorème de Godounov)
2. SVF "vrai" i.e. Δx_j non constant n'est pas consistant en général

Rappel. Thm de LF (DF) : si le schéma est consistant alors convergence $\Leftrightarrow$ stabilité
Donc il nous faut une théorie au delà de LR pour les VF, on peut avoir non consistance et convergence.

Preuve.

$$\Delta x_j = h_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} \qquad x_j = \frac{x_{j+1/2} + x_{j-1/2}}{2}$$

$$E^n_j = \frac{v^{n+1}_j - v^n_j}{\Delta t_n} + \frac{F_j(v^n_j, v^n_{j+1}) - F_{j-1}(v^n_{j-1}, v^n_j)}{\Delta x_j} = 0$$

On remplace $v^n_j \longleftarrow \varphi(x_j, t_n)$ avec φ régulière en x, t

Définition 2 (consistance)

On définit alors la consistance pour un schéma VF de la forme ci-dessus comme :

$$\forall \varphi \text{ suffisamment régulière,} \quad E^n_j - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (c\varphi)}{\partial x}\right)(x_j, t_n) \xrightarrow[\Delta t_n, h \longrightarrow 0]{} 0$$

On note :

$$G_j^n = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_j, t_n) = O(\Delta t_n)$$

$$H_j^n = \frac{\big(F(v_j^n, v_j^{n+1}) - F(v_j^n, v_j^n)\big) - \big(F(v_{j+1}^n, v_j^n) - F(v_j^n, v_j^n)\big)}{\Delta x_j} - \frac{\partial}{\partial x}(c\varphi)(x_j, t_n)$$

Par Taylor :

$$F(v_j^n, v_{j+1}^n) - F(v_j^n, v_j^n) = \frac{\partial F}{\partial w}(v_j^n, v_j^n) \times (v_{j+1}^n - v_j^n) + O((v_{j+1}^n - v_j^n)^2)$$

$$F(v_{j-1}^n, v_j^n) - F(v_j^n, v_j^n) = \frac{\partial F}{\partial v}(v_j^n, v_j^n) \times (v_{j-1}^n - v_j^n) + O((v_{j-1}^n - v_j^n)^2)$$

$$v_{j+1}^n = v_j^n + (x_{j+1} - x_j)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_j, t_n) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

$$v_j^n = v_{j-1}^n + (x_j - x_{j-1})\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_j, t_n) + O((x_j - x_{j-1})^2)$$

Or $x_{j+1} - x_j = (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})/2 \Rightarrow x_{j+1} - x_j \leq h$. Donc :

$$H_j^n = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j^n \left[\frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{2\Delta x_j} \times \frac{\partial F}{\partial w}(v_j^n, v_j^n) + \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta x_j} \times \frac{\partial F}{\partial v}(v_j^n, v_j^n)\right] - c\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_j, t_n) + O(h)$$

Or avec (C) on a :

$$F(v, v) = cv \quad \Rightarrow \quad (C')\frac{\partial F}{\partial v}(v, v) + \frac{\partial F}{\partial w}(v, v) = c$$

Si $\Delta x_j = h \forall j$, on donc $H_j^n = O(h)$. □

Remarque.
Différence entre DF et VF ici :

$$\begin{cases} \text{DF :} \quad v_j^n \longrightarrow u(x_{j+1/2}, t_n) \quad \text{on approche des valeurs} \\ \text{VF :} \quad v_j^n \longrightarrow \bar{u}_j(t_n) = \dfrac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n)dx \quad \text{on approche des moyennes} \end{cases}$$

$$\bar{u}_j(t_n) \simeq u\left(\frac{x_{j+1/2} + x_{j-1/2}}{2}, t_n\right) \quad ?$$

Oui pour u régulière mais les VF sont utilisées pour des EDP dont les solutions ne sont pas régulières.

Contre-exemple du théorème. si on retire $\Delta x_j = h, \forall j$

On pose :

$$\begin{cases} \Delta x_j = h & \text{si } h \text{ pair} \\ \Delta x_j = \frac{h}{2} & \text{si } h \text{impair} \end{cases}$$

et :

$$F(v, w) = \begin{cases} cv & \text{si } c \geq 0 \\ cw & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$$

On prend $c > 0 \Rightarrow F(v,w) = cv \Rightarrow F(v,v) = cv$. On a :

$$\frac{\partial F}{\partial v} = c \qquad \frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

Donc :

$$H_j^n = \begin{cases} \frac{3}{4}c\frac{\partial \varphi}{\partial x} - c\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4}c\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \text{pour } j \text{ impair} \\ \frac{3}{2}c\frac{\partial \varphi}{\partial x} - c\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2}c\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \text{pour } j \text{ pair} \end{cases}$$

$H_j^n \nrightarrow 0$

2.4 Conditions aux limites pour l'équation d'advection

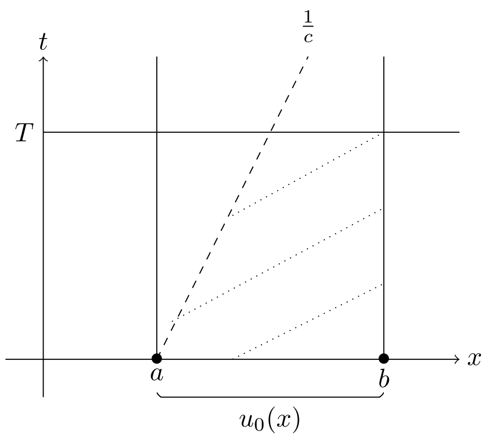
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a < x < b, t > t_0 \tag{13}$$

$$u(x,t_0) = u_0(x), \quad a < x < b \tag{14}$$

$$\text{dire quelque chose en } a \text{ et } b \tag{15}$$

Pourquoi a-t-on besoin de (15) ?

Prenons $c > 0$:



On veut déterminer u dans le rectangle ; avec u_0 ce n'est possible que dans la zone rouge. Pour les points à gauche de la droite ; la caractéristique tombe sur la droite $x = a \longrightarrow$ il faut connaître $u(a,t) = f(t)$. De la même façon pour $c < 0$, il faut connaître $u(b,t) = g(t)$.

Corollaire 2

$$\begin{cases} u_0, f, g \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, t_0) = u_0(x) \\ u(a, t) = f(t) \\ u(b, t) = g(t) \end{cases}$$

n'a pas de solutions pour presque tous les u_0, f, g.

Exercice.

CNS pour qu'il y ait une solution (par exemple $g(t) = u_0(b - c(t - t_0))$)