Optimisation et optimisation numérique

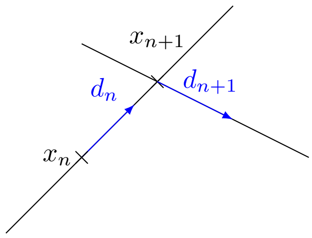
Chapitre 2 : Méthodes de descente et gradient à pas optimal

Lucie Le Briquer

4 février 2018

Table des matières

Principe. (x_n), on cherche $\rho \geqslant 0$ tel que $f(x_n + \rho d_n) < f(x_n)$, *du* est la direction.



On veut $f'(x_n)d_n > 0$, $\langle \nabla f(x_n), d_n\rangle > 0$. Par exemple si $d_n = -\nabla f(x_n)$ alors :

$$\langle \nabla f(x_n), d_n\rangle = -|\nabla f(x_n)|^2 < 0 \text{ si } \nabla f(x_n) \neq 0$$

$\rightarrow$ recherche de ρ pour optimiser la descente.

Remarque. Le choix de $d_n = -\nabla f(x_n)$ est *arbitraire* car le gradient dépend complètement du produit scalaire choisi.

Pas invariant. Pour $\tilde{f}(x) = f(Ax)$ avec A inversible, étudier ∇f et $\nabla \tilde{f}$ ne revient pas du tout au même.

1 Gradient à pas optimal

```
require: x_0, f,\nabla f, crit_arrêt
  x <- x_0
  while crit_arrêt
    d <- -\nabla f(x)
    \rho <- argmin f(x+td) pour t>0
    x <- x+\rho d
  end while
```

Théorème 1 (convergence de GPO)

Si $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est elliptique (fortement convexe), alors (x_n) définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$$

avec $\rho_n = \arg\min f(x_n - \rho\nabla f(x_n))$, converge vers l'unique minimum global e f.

Preuve. L'existence et l'unicité du minimum global de f sont laissées en exercice.

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geqslant \alpha |x-y|^2$$

$$\begin{aligned} |\nabla f(x)||x - x_*| &\geqslant \langle \nabla f(x) - \nabla f(x_*), x - x_*\rangle \\ &\geqslant \alpha |x - x_*|^2 \end{aligned}$$

Alors, pour $x \neq x_*$,

$$|x - x_*| \leqslant \frac{|\nabla f(x)|}{\alpha}$$

Il suffit de montrer que $\nabla f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or on a :

$$\langle d_{n+1}, d_n\rangle = \langle \nabla f(x_{n+1}), \nabla f(x_n)\rangle = 0$$

car $\langle \nabla f(x_n + \rho d_n), d_n\rangle = 0$.
Les directions successives de descente sont donc orthogonales par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$.

f est elliptique. Comme $f(x_n)$ est décroissante et f minorée on a que $f(x_n)$ converge.

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geqslant \langle \nabla f(x_{n+1}), x_n - x_{n+1} \rangle + \alpha \frac{|x_n - x_{n+1}|^2}{2}$$

Or $\rangle \nabla f(x_{n+1}), x_n - x_{n+1} \rangle = 0$ (recherche exacte). Ainsi :

$$\underbrace{f(x_n) - f(x_{n+1})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \geqslant \alpha \frac{|x_n - x_{n+1}|^2}{2}$$

Donc $|x_n - x_{n+1}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ (elliptique) et la suite (x_n) reste dans un compact (f est coercive car elliptique). Par suite, ∇f est uniformément continue sur ce compact donc $|\nabla f(x_n) - \nabla f(x_{n+1})| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Enfin, $0 \xleftarrow[n\to+\infty]{} |\nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n)| \geqslant |\nabla f(x_n)|$. D'où $\nabla f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On conclut que (x_n) converge.

$\square$

Théorème 2 (vitesse de convergence, cas quadratique)

Soit $A \subset M_n(\mathbb{R})$, symétrique définie positive.

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$$

Alors pour toute donnée initiale x_0 le GPO converge et de plus on a :

$$|x_n - x_*| \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k \sqrt{\frac{M}{m}} |x_n - x_0|$$

et

$$|x_n - x_*|_A \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k |x_0 - x_*|_A$$

où M et m sont les plus grande et plus petite valeurs propres de A et $|u|_A = \langle Au, u\rangle$.

Lemme 1 (de Kantorovitch)

$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2 |x|^4$$

Preuve.

$$4ab = \int_{t>0} \left(\frac{a}{t} + tb\right)^2$$

Par suite,

$$\begin{aligned}4\langle Ax,x\rangle\langle A^{-1}x,x\rangle &\leqslant \inf_t \left(t\langle Ax,x\rangle + \frac{\langle A^{-1}x,x\rangle}{t}\right)^2\\ &= \inf_t \left(\langle tA + \frac{A^{-1}}{t}x,x\rangle\right)^2\\ &\leqslant \inf_t \sup_i \left(t\lambda_i + \frac{1}{t\lambda_i}\right)^2 |x|^4\end{aligned}$$

Pour $t_* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}$, on a :

$$4\langle Ax,x\rangle\langle A^{-1}x,x\rangle \leqslant \sup \left(t_*\lambda_i + \frac{1}{t_*\lambda_i}\right)$$

$u \mapsto u + \frac{1}{u}$ est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Le $\sup_i \left(t_*\lambda_i + \frac{1}{t_*\lambda_i}\right)$ est atteint pour $i = 1$ et $i = n$, et on obtient alors comme borne :

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right) = \left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)$$

□

Preuve. (du Théorème 2)
Soient $M = \lambda_1 > \ldots > \lambda_n = m$ les valeurs propres de A. Quitte à faire la translation $x \mapsto x - x_*$, on peut supposer $x_* = 0$ et $b = 0$, alors $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle$. Par suite $d_k = -\nabla J(x_k) = -Ax_k$. De plus,

$$\langle d_k, d_{k+1}\rangle = 0 = \langle d_k, x_{k+1}\rangle_A$$

De plus $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$ avec $d_k = -Ax_k$ et ρ_k solution de :

$$\langle A(x_k + \rho_k d_k), d_k\rangle = 0$$

i.e.

$$\rho_k = \frac{\langle Ax_k, d_k\rangle}{\langle Ad_k, d_k\rangle} = -\frac{|d_k|^2}{|d_k|_A^2}$$

$x_k = x_{k+1} - \rho_k d_k$.

$$|x_k|_A^2 = |x_{k+1}|_A^2 + \rho_k^2 |d_k|_A^2$$

Par suite,

$$|x_{k+1}|_A^2 = |x_k|_A^2 - \frac{|d_k|^4}{|d_k|_A^2}$$

$|x_k|_A^2 = \langle AA^{-1}d_k, A^{-1}d_k\rangle = |d_k|_{A^{-1}}^2$, d'où :

$$|x_{k+1}|_A^2 = |x_k|_A^2 \left(1 - \frac{|d_k|^2}{|d_k|_A^2 |d_k|_{A^{-1}}^2}\right)$$

$$\left(1 - \frac{|d_k|^4}{|d_k|_A^2 |d_k|_{A^{-1}}^2}\right) \leqslant 1 - \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2} \leqslant 1 - \frac{4M}{m\left(1 + \frac{M}{m}\right)} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$$

Par suite,

$$|x_{k+1}|_A^2 \leqslant \left(\frac{M+m}{M-m}\right)^{2k} |x_k|_A^2$$

Or $m|x|^2 \leqslant |x|_A^2 \leqslant M|x|^2$, d'où :

$$|x_{k+1}|^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2k} \frac{M}{m}|x_k|_A^2$$

$\square$

Remarque. $|x - x_*|_A^2 = 2(J(x) - J(x_*))$

$$(J(x_k) - J(x_*)) \leqslant \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k (J(x_0) - J(x_*)) \qquad (*)$$

Remarque. $(*)$ est vraie pour J m elliptique, de gradient $M-$lipschitzienne (preuve de de Klerk en 2017).

Remarque. Pas améliorable. Prenons $A = \mathrm{Diag}(M, \dots, m)$, $b = 0$, et $x_0 = (\frac{1}{M}, 0, \dots, 0, \frac{1}{m})$. Alors :

$$\nabla J(x_0) = Ax_0 = (1, 0, \dots, 0, 1)$$

$\rho_0 = \frac{2}{M+m}$.

$$x_1 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\left(-\frac{1}{M}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{m}\right)$$

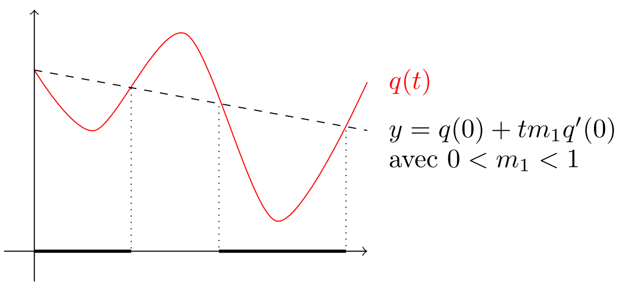
De même,

$$x_2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\left(\frac{1}{M}, 0, \dots, 0, \frac{1}{m}\right)$$

2 Recherche linéaire

2.1 Recherche linéaire de Wolfe

Soit d une direction de descente en x : $f'(x)d = \langle \nabla f(x), d\rangle < 0$. On pose $q(t) = f(x + td)$.
Condition d'Armijo.



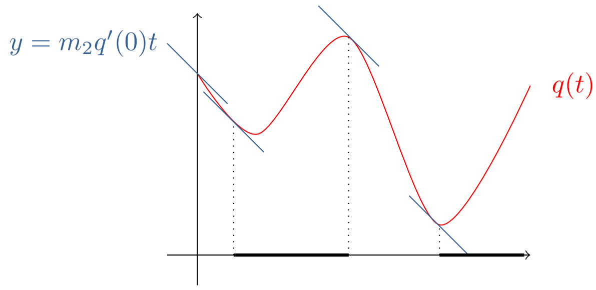
On trace une droite et on cherche un point en-dessous (par exemple, pour une droite horizontale cela revient à chercher un point plus bas que $q(0)$). Il ne faut pas descendre trop rapidement : si on descend plus vite que q on ne peut pas trouver de point. D'où le coefficient $0 < m_1 < 1$ qui assure une plus faible que $q'(0)$.

La condition d'Armijo est :

$$q(t_*) \leqslant q(0) + t_* m_1 q'(0) \quad \text{avec } 0 < m_1 < 1$$

Condition de courbure.

$$q'(t_*) \geqslant m_2 \underbrace{q'(0)}_{<0} \quad \text{avec } 0 < m_2 < 1$$



Définition 1 (condition de Wolfe)

La condition de Wolfe est la réunion des conditions d'Armijo et de courbure. Pour que tout se passe bien on doit choisir $0 < m_1 < m_2 < 1$.

Théorème 3

On suppose que q est $\mathcal{C}^1$, $\inf(q) > -\infty$ et $q'(0) < 0$. Alors la recherche linéaire de Wolfe (algorithme 2 c.f. poly) termine en un nombre fini d'itérations.

Preuve.

Par l'absurde, supposons que la boucle while ne s'arrête pas. Si on a toujours $q(t) \leqslant q(0) + tm_1q'(0)$, on extrapole à chaque pas car t_d reste à 0. On a donc $t_n = a^n t_{\text{init}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et :

$$q(t_n) \leqslant q_0 + t_n \underbrace{m_1}_{>0} \underbrace{q'(0)}_{<0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

ce qui contredit $\inf(q) > -\infty$.

Donc on atteint en un nombre fini d'étapes un point t tel que $q(t) \geqslant q(0) + tm_1q'(0)$. t_d est alors affecté à ce point et ne peut plus revenir à 0, donc on arrête d'extrapoler. À ce moment, $t_q > t_g$ (car à chaque instant $t < at$). À partir de là, tant qu'une des conditions d'arrêt n'est pas vérifiée on interpole, i.e. :

$$\begin{cases} |t_{d,n+1} - t_{g,n+1}| = \frac{|t_{d,n} - t_{g,n}|}{2} \\ \forall n,\ t_{d,n} > t_{g,n} \end{cases}$$

Or, on a toujours :

$$\begin{cases} q(t_g^k) \leqslant q(0) + t_g^k m_1 q'(0) \\ q'(t_g^k) < m_2 q'(0) \\ q(t_d^k) > q(0) + t_d^k m_1 q'(0) \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{q(t_d^k) - q(t_g^k)}{t_d^k - t_g^k} > m_1 q'(0) \quad \text{en passant à la limite, } q'(t_*) \geqslant m_1 q'(0)$$

Or, $q'(t_g^k) < m_2 q'(0)$ donc en passant à la limite (car q est $\mathcal{C}^1$), $q'(t_*) \leqslant m_2 q'(0)$. Ceci est contradictoire car $m_1 < m_2$ et $q'(0) < 0$. □

2.2 Convergence des méthodes de descente avec recherche linéaire de Wolfe

On considère une suite $x_{k+1} = x_k + t_k dk$ où d_k est une direction de descente et t_k est obtenu par Wolfe.

Théorème 4

On suppose que f est $\mathcal{C}^1$, bornée inférieurement, et que ∇f est $L-$lipschitz sur l'ensemble de niveau $\{f \leqslant f(x_0)\}$. Alors :

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geqslant \frac{m_1(1-m_2)}{L} |\nabla f(x_k)|^2 c_k^2 \geqslant 0$$

où $c_k = -\frac{\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle}{|\nabla f(x_k)||d_k|}$i. De plus si $\sum c_k^2 = +\infty$ alors $\liminf |\nabla f(x_k)| = 0$.

Preuve.

Par la condition d'Armijo, $f(x_k) - f(x_{k+1}) \geqslant m_1 t_k \langle \nabla f(x_k), -d_k \rangle \geqslant 0$. Peut-on minorer t_k ? Par la condition de courbure, on a :

$$\langle \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k), d_k \rangle \geqslant (m_2 - 1) \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$$

Or, comme ∇f est $L-$Lipschitz, par Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\langle \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k), d_k \rangle \geqslant L |x_{k+1} - x_k||d_k|$$

Enfin,

$$t_k = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|d_k|} = \frac{L|x_{k+1} - x_k||d_k|}{L|d_k|^2} \geqslant \frac{m_2 - 1}{L|d_k|^2} \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$$

Par suite,

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geqslant \frac{m_1(1-m_2)}{L|d_k|^2} (\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle)^2 = \frac{m_1(1-m_2)}{L} c_k^2 |\nabla f(x_k)|^2$$

Supposons $\liminf |\nabla f(x_k)| > 0$, alors à partir d'un certain rang $|\nabla f(x_k)| \geqslant a$ pour un certain $a > 0$. En sommant l'inégalité précédente on obtient :

$$f(x_{k_0}) - f(x_k) \geqslant \frac{m_1(1-m_2)}{L} a^2 \sum_{i=k_0}^{k} c_i^2$$

Donc $f(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty$ ce qui contredit l'hypothèse de f bornée inférieurement. □