Analyse - TD3

Lucie Le Briquer

5 octobre 2017

Exercice 1 - Applications du théorème de Stone-Weierstrass

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{A} = \{\text{fonctions polynômes à } d \text{ variables}\}$. $\mathcal{A}$ est bien une sous-algèbre unitaire séparante puisque :
   - sev de $\mathcal{C}(K)$
   - stabilité par multiplication
   - contient 1
   - séparante car si $x \neq y$, $\exists i \in [\![1, d]\!]$ tel que $x_i \neq y_i$. En prenant $P(X_1, ..., X_d) = X_i$, on a bien $P(x) \neq P(y)$

   Donc par Stone-Weierstrass, $\mathcal{A}$ est denses dans $\mathcal{C}(K)$.

2. Soit K un espace métrique compact. K est donc séparable. On peut alors considérer une partie dénombrable dense $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\theta_n : x \mapsto d(x, x_n)$. Posons :

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{P(\theta_1, ...\theta_k) \mid P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_k]\}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{P(\theta_1, ...\theta_k) \mid P \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_k]\}$$

   On prend les coefficients dans $\mathbb{Q}$ pour avoir la dénombrabilité de $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$. Montrons que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$est dense par Stone-Weierstrass.

   Soit $x, y \in K$, $x \neq y$, donc $d = d(x, y) > 0$. Par densité, on dispose de x_n tel que $\theta_n(x) = d(x, x_n) < \frac{d}{3}$. On va montrer que $\theta_n(y) > \frac{d}{3}$.

$$d(x,y) \leq d(x,x_n)+d(y,y_n) = \theta_n(x)+d(y,y_n) \quad \Rightarrow \quad d(y,y_n) \geq d(x,y)-d(x,x_n) > \frac{2d}{3} > \frac{d}{3}$$

   Donc $\theta_n(x) \neq \theta_n(y)$. Alors par Stone-Weierstrass, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$. Or $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ don dans $\mathcal{C}(K)$. Finalement, $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ est une partie dénombrable dense de $\mathcal{C}(K)$ donc $\mathcal{C}(K)$ est séparable.

Exercice 2 - Convolution et régularisation

1. $\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha(y)dy$

$$\int |f(x-y)||\alpha(y)|dy \leq \int \|f\|_\infty |\alpha(y)|dy < +\infty$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha * f(x)$ est bien définie.

Soit (α_n) une approxmation de l'unité :

$$\begin{cases} \alpha_n \geq 0 \\ \int \alpha_n = 1 \\ \int_{|y|<\delta} \alpha_n(y)dy \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \end{cases}$$

Soit K un compact.

$$\begin{aligned} |\alpha_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha_n(y)dy \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\alpha_n(y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\alpha_n(y)dy \\ &\leq \underbrace{\int_{|y|<\delta} |f(x-y) - f(x)|\alpha_n(y)dy}_{(1)} + \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|\alpha_n(y)dy}_{(2)} \end{aligned}$$

– Pour (2), $\leq 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geq\delta \alpha_n(y)dy} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

– Pour (1), K compact donc $K_\delta\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,K) \leq \delta\}$ est compact et $\exists R > 0$ tel que $K \subset \mathcal{B}(0,R)$. Donc si $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $K_\delta \subset \overline{\mathcal{B}(0,R)}$. f uniformément continue sur $\overline{\mathcal{B}(0,R)}$. Donc si $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ associé à l'uniforme continuité.

  Soit K compact, $K \subset \overline{\mathcal{B}(0,R)}$, $\varepsilon > 0$, δ associé à l'uniforme continuité de f sur $\mathcal{B}(0,R)$. On reprend la majoration :

$$(1) \leq \varepsilon \int_{|y|<\delta} \alpha_n(y)dy \leq \varepsilon$$

  (indépendamment de $x \in K$)
  Donc $\alpha_n * f \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} f$ uniformément sur K.

2. $\alpha \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^d)$ (à support compact). Montrons que $\alpha * f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} \alpha * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\alpha(y)dy \quad \text{on pose } z = x-y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\alpha(x-z)dz \quad \text{pas de changement de signe |jacobien|} \end{aligned}$$

Comme :

– $z \mapsto f(z)\alpha(x-z)$ mesurable
– $x \mapsto f(z)\alpha(x-z)\ \mathcal{C}^1$

– soit $x \in K$ compact de $\mathbb{R}^d$, $\exists K'$ compact tel que $\forall x \in K$, $\forall z \in \operatorname{supp}(\alpha)$ $x - z \in K'$.

Soit $i \in [\![1, d]\!]$,

$$|f(z)\partial_i \alpha(x-z)| \leq \|f\|_\infty \|\partial_i \alpha\|_{\infty, K'} \mathbb{1}_{z \in \operatorname{supp}(\alpha)} \quad \text{intégrable sur } \mathbb{R}^d$$

Donc par théorème de dérivation sous le signe $\int$ $\alpha * \mathcal{C}^1$ et $\partial_i(\alpha * f) = \partial_i \alpha * f$.

Exercice 4 - Preuve du théorème de Cauchy-Peano-Arzela, version autonome

Remarque. (existence de tels (ρ_n)) En prenant $\varphi(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right)$ sur $\mathcal{B}(0,1)$ et 0 ailleurs. $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. En prenant $\rho = \frac{\varphi}{\int \varphi}$ on a bien $\int \rho = 1$. On pose alors $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{cases} x_n'(t) = (f * \rho_n)(x_n(t)) \\ x_n(0) = x^0 \end{cases} \tag{1}$$

   Montrons que $f * \rho_n$ est localement lipschitzienne. C'est bien le cas car $f * \rho_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ (donc dérivée bornée localement + TAF). Donc par Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution locale à (1).

   Pourquoi cette solution est-elle globale ?
   Si la solution maximale est définie sur $[0, b[$, $b < T$. Alors le théorème de sortie de tout compact nous assure que $x_n(t) \xrightarrow[t \to b]{} +\infty$.
   Montrons que ce cas n'est pas possible en montrant que la dérivée est bornée :

$$(f * \rho_n)(x) = f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\rho_n(y)dy$$

   Donc :
$$\|f * \rho_n\| \leq \|f\|_\infty \|\rho_n\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

   Par les accroissements finis :

$$|x_n(t) - x_n(0)| \leq \|x_n'\|_\infty t \leq \|f\|_\infty t \xrightarrow[t \to b]{} \|f\|_\infty b$$

   Ce qui contredit le théorème de sortie de tout compact. Alors x_n est bien définie sur $[0, T]$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$.

   – Chaque x_n est lipschitzienne de constante $\|f\|_\infty$. En particulier, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément équicontinues.
   – Comme précédemment, on montre que $\forall t \in [0,T],\ |x_n(t) - x_0| \leq \|f\|_\infty t \leq \|f\|_\infty T$.

   Donc par Ascoli on extrait de (x_n) :

$$x_{\psi(n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$$

3. Montrons que x est solution du problème sur $[0, T]$. Pour l'instant, on sait que :

   – $x_{\psi(n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x$ uniformément sur $[0, T]$

– $f * \rho_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$

$$\forall t \in [0,T] \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x^0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,T],\ x(t) = x^0 + \int_0^t f(x(s))ds$$

(on sait que $\forall t \in [0,T],\ x_{\psi(n)}(t) = x^0 + \int_0^t f * \rho_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}(s))ds$)

On veut donc montrer que $f * \rho_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f(x) \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$ uniformément.

$\|f * \rho_{\psi(n)}(x_{\psi(n)})(x_{\psi(n)} - f(x)\|_\infty \leq \|f * \rho_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) - f(x_{\psi(n)})\|_\infty + \|f(x_{\psi(n)}) - f(x)\|_\infty$

Soit $\varepsilon > 0$, η associé à l'uniforme continuité de f. À partir d'un certain rang N :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f * \rho_{\psi(n)} - f\|_\infty < \varepsilon \\ \|x_{\psi(n)} - x\|_\infty < \eta \end{array} \right.$$

Donc $\forall n \geq N$,

$$\|f * \rho_{\psi(n)}(x_{\psi(n)})(x_{\psi(n)} - f(x)\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

Donc $f * \rho_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} f(x)$. D'où :

$$\forall t \in [0,T],\ x(t) = x^0 + \int_0^t f(x(s))ds$$

Exercice 6 - Critère de compacité dans $\mathcal{C}(K)$

Par exemple, $K_j = \{x \in K,\ |x| \leq j, d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{j}\}$.

1.
2.
3.