Analyse - TD4

Lucie Le Briquer

19 octobre 2017

Exercice 1 - Espaces de Baire

1. E espace de Baire. Soit $O \subset E$ ouvert de E. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ouverts denses dans O. Définissons $V_n = O_n \cup (\overline{O})^C$ ouvert de E. $O \cap (\overline{O})^C$ car O ouvert. V_n denses dans E donc comme E de Baire $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dense dans E i.e. $\cap(O_n \cup (\overline{O})^C) = (\cap O_n) \cup (\overline{O})^C$ dense dans E. Donc $O \cap [(\cap O_n) \cup (\overline{O})^C] = \cap O_n$ dense dans O.

2. Pour $x \in E$, on note $(V_i(x))_{i\in I_x}$ un système fondamental de voisinages compacts. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses et V un ouvert de E. Montrons que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ non vide.

   – $V \cap O_1$ non-vide par densité, $\exists x_1 \in V \cap O_1$. $V \cap O_1$ est un voisinage de x_1. Donc $\exists K_1 \subset V \cap O_1$ voisinage compact de x_1 qui contient un ouvert V_1 contenant x_1.
   – $V_1 \cap O_2$ non-vide par densité, $\exists x_2 \in V_1 \cap O_2$. $V_1 \cap O_2$ est un voisinage de x_2. Donc $\exists K_2 \subset V_1 \cap O_2$ voisinage compact de x_2 qui contient un ouvert V_2 contenant x_2.

   On construit ainsi $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts qui vérifient :

   $$x_n \in V_n \subset K_n \subset V_{n-1} \qquad K_{n+1} \subset K_n \qquad V_{n+1} \subset V_n$$

   $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^{\mathbb{N}}$, donc admet une sous-suite convergente $(*)$ $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Donc $x \in V$.

   Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, pour $n \geq N$, $x_n \in K_n \subset O_n$. Donc comme K_N fermé, $x \in K_N$ i.e. $x \in O_N$. Donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$

   Plus simplement, on aurait pu dire que (K_n) est une suite décroissante de compacts non vides dans K_1 compact, donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

   Remarque. $(*)$ On est pas dans un espace métrique mais la compacité $\Rightarrow$ recouvrement $\Rightarrow$ sous-suite convergente. Mais en revanche on a pas la caractérisation de la compacité par cette propriété.

Exercice 4 - Normes équivalentes

1. $\Rightarrow$: Supposons que $\exists k, K$ tels que $k\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq K\|.\|_1$

   $$\left\{\begin{array}{ccc} (E, \|.\|_1) & \longrightarrow & (E, \|.\|_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right. \text{ homéomorphisme de } E \text{ dans } E$$

$\Leftarrow$: Supposons $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Il existe $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}_{\|.\|_2}(0,r)} \subseteq \overline{\mathcal{B}_{\|.\|_1}(0,1)}$. Donc $\|x\|_2 \leq r \Rightarrow \|x\|_1 \leq 1$.
Soit $x \in E$, $x \neq 0$, on a :

$$\frac{rx}{\|x\|_2} \in \overline{\mathcal{B}_{\|.\|_2}(0,r)} \quad \text{donc} \quad \left\| \frac{rx}{\|x\|_2} \right\|_1 \leq 1$$

Donc $\|x\|_1 \leq \frac{\|x\|_2}{r}$ et par symétrie on obtient l'autre domination. Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

2. On cherche $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$ tel que $\|.\|_1 \leq \|.\|_2$ mais non équivalentes.
Prenons $E = \mathcal{C}([0,1])$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_2 = \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On a bien $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. Prenons $f_n \colon x \mapsto x^n$, on a $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\|f_n\|_2 = 1$, donc les normes ne sont pas équivalentes.

3. Corollaire du théorème de Baire vu en cours.

Exercice 6 - Densité des fonctions continues nulle part dérivables $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$

1. *Ouvert.* Montrons que le complémentaire de $U_{\varepsilon,n}^C$ est fermé.

$$U_{\varepsilon,n}^C = \left\{ f \in E \mid \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], 0 < |y-x| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq n \right\}$$

Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $f_p \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f \in E$.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists x_p \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ 0 < |y-x| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f_p(y) - f_p(x_p)}{y - x_p} \right| \leq n$$

Quitte à extraire on peut supposer que $x_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in [0,1]$. Soit $y \in [0,1]$ tel que $|y-x| < \varepsilon$. Par convergence, $\exists P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq P$ donc $\|x_p - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$, donc :

$$\forall p \geq P \quad \left| \frac{f_p(x_p) - f_p(y)}{x_p - y} \right| \leq n$$

Donc par passage à la limite, comme $x_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, $f_p(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ et $f_p(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, on obtient :

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq n$$

Densité. Montrons que $U_{\varepsilon,n}$ est dense. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $\delta > 0$ $\|f-g\|_\infty \leq \delta$. $[0,1]$ est compact donc f est uniformément continue sur $[0,1]$.

$$\exists \alpha \in]0, \varepsilon[,\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\delta}{4}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > 2\pi$, $\frac{4\pi}{N} < \alpha$ et $\frac{\delta N}{8\pi} > n$ .Pososn $g(x) = f(x) + \delta \sin(Nx)$.

Soit $x \in [0,1]$.

$$\exists y \in [0,1],\ 2\pi \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi \quad \frac{2\pi}{N} \leq |x-y| \leq \frac{4\pi}{N}, \quad |\sin Nx - \sin Ny| \geq 1$$

Donc si $|x-y| < \alpha$:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < \frac{\delta}{4}\frac{N}{2\pi} = \frac{\delta N}{8\pi}$$

De plus,

$$\left|\frac{\delta \sin Ny - \delta \sin Nx}{y-x}\right| \geq \frac{\delta}{|y-x|} \geq \frac{\delta N}{4\pi}$$

Donc :

$$\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| = \frac{\delta N}{8\pi} > n$$

Donc $g \in U_{\varepsilon,n}$ et $\|f-g\|_\infty < \alpha$.

Remarque. Plus simplement on aurait pu prendre des fonctions affines par morceaux. Par exemple la fonction g telle que $g(x) = 1$ si $x = \frac{k}{2p}$ avec k pair et $g(x) = 0$ si $x = \frac{k}{2p}$ avec k impair. $[0,1] = \cup_{k=0}^{2p-1}\left[\frac{k}{2p}, \frac{k+1}{2p}\right]$. Le taux d'accroissement est donc plus simple.

2. Posons $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{n},n}$, O est dense par le théorème de Baire.

   Soit $f \in O$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f \in U_{\frac{1}{n},n}$ donc :

   $$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in [0,1] \quad 0 < |x - x_n| < \frac{1}{n} \text{ et } f \text{ est nulle part dérivable}$$

Exercice 5 - Un espace métrique non complet qui n'est pas de Baire

$E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de $\|.\|_1$. $\mathcal{B} = \{f \in E \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$.

1. Montrons que $\mathcal{B}^C$ est couvert. Soit $f \in \mathcal{B}$. $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $|f(x_0)| > 1$. On peut supposer que $x_0 \notin \{0,1\}$. Alors $\exists \alpha > 0$ tel que :

   $$\forall x \in I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad |f(x)| > \frac{1 + |f(x_0)|}{2}$$

   Soit $g \in \mathcal{B}$,

   $$\begin{aligned}\int_0^1 |g(x) - f(x)|dx \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} |g(x)-f(x)|dx &\geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} |f(x)| - |g(x)|dx \\ &\geq 2\alpha\frac{|f(x_0)|-1}{2} = \alpha(|f(x_0)|-1)\end{aligned}$$

   Ainsi si $\|g - f\|_1 < \alpha(|f(x_0| - 1)$, $y \in \mathcal{B}^C$. Donc $\mathcal{B}^C$ est ouvert.

Remarque. On pouvait aussi montrer directement $\mathcal{B}$ fermé, preuve similaire. Soit $f_n \in \mathcal{B}$ tel que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ pour $\|.\|_1$ $f \in E$. Montrons que $f \in \mathcal{B}$. Par l'absurde, si $f \in \mathcal{B}^C$, $\exists x_0 \in [0,1]$, $f(x_0) > 1$. Donc par continuité $\forall x \in I_\alpha$ $|f(x)| > 1+\eta$.

$$\int_0^1 |f_n - f| \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} |f_n - f| \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} |f| - |f_n| \geq 2\eta\alpha$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_\infty(0,n) = n\mathcal{B}$ est fermé. On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathcal{B} = E$. E est supposé de Baire, alors, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\overset{\circ}{\widehat{n\mathcal{B}}} \neq \emptyset$.
$$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists f \in E,\ \exists \alpha > 0,\ \mathcal{B}_1(f,\alpha) \subseteq \mathcal{B}(0,n)$$
Soit $h \in E$, $\|h\| \leq 1$, soit $g = f + \alpha h$, $\|g - f\|_1 \leq \alpha$ d'où $\|g\|_\infty \leq n$.
$$h = \frac{g-f}{\alpha} \qquad \|h\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}(\|g\|_\infty + \|f\|_\infty) \leq \frac{1}{\alpha}(n + \|f\|_\infty)$$
On a donc montrer que :
$$\mathcal{B}_1(0,1) \subseteq \mathcal{B}_\infty\left(0, \frac{n+\|f\|_\infty}{\alpha}\right)$$
Donc en posant $r = \frac{\alpha}{n+\|f\|_\infty}$ on a le résultat $\mathcal{B}_1(0,r) \subseteq \mathcal{B}_\infty(0,1)$.

3. Si $f \in E$, $f \neq 0$, on a $\frac{r}{2}\frac{f}{\|f\|_1} \in \mathcal{B}_1(0,r) \subset \mathcal{B}_\infty(0,1)$. Donc :
$$\left\|\frac{r}{2}\frac{f}{\|f\|_1}\right\|_\infty \leq 1$$
Donc $\|f\|_\infty \leq \frac{2}{r}\|f\|_1$. Absurde en considérant $f_n \colon x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$ puisque $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 5 - Un espace métrique non complet qui n'est pas de Baire $F \subset (\mathcal{C}([0,1], \|.\|_\infty)$. On suppose F fermé pour $\|.\|_\infty$ et $F \subset \mathcal{C}^1([0,1])$.

1. Regardons :
$$T\colon \left\{\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$$
F et E sont des Banach. Si T est continue, on obtient la majoration demandée. Montrons que T est continue par le théorème du graphe fermé.
$$G = \{(f, Tf),\ f \in F\}$$
Soit $(f_n, Tf_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f \in F$ et $f_n' = Tf_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} g \in E$. On a donc :
$$\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \|g - f_n'\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par convergence uniforme des dérivées et convergence ponctuelle des (f_n) on a bien $g = f'$. Donc $g = Tf$ et G est fermé. Donc T est continue de F dans E, ainsi :
$$\exists C > 0,\ \forall f \in F, \quad \|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$$

2. Montrons que $\mathcal{B}_F(0,1)$ est relativement compacte.

   – $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in \mathcal{B}_F(0,1) = \mathcal{B}_\infty(0,1) \cap F$, $\|f\|_\infty \leq 1$ donc $|f(x)| \leq 1$. Donc $\mathcal{B}_F(0,1)(x)$. Ainsi $\mathcal{B}_F(0,1)(x)$ est borné.
   – $\forall f \in \mathcal{B}_F(0,1)$, $\forall x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\overset{\text{TAF}}{\leq} \|f'\|_\infty |x-y| \\ &\leq C\|f\|_\infty |x-y| \\ &\leq C|x-y| \end{aligned}$$

   C est bien indépendant de f.

   Donc $\mathcal{B}_F(0,1)$ est uniformément équicontinue.

   Donc par Ascoli, $\overline{\mathcal{B}_F(0,1)}$ est compacte.

3. On sait désormais que $(\overline{\mathcal{B}_F(0,1)}, \|.\|_\infty)$ est compacte. Donc par Riesz, F est de dimension finie.