Probabilités
Chapitre 10 : Martingales

Lucie Le Briquer

28 novembre 2017

1 Théorie générale des processus

Définition 1 (processus)

Un processus X sur l'espace de temps $\mathcal{T}$ à valeurs dans l'espace $(E, \mathcal{E})$ est une v.a. $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ à valeurs dans $(E^{\mathcal{T}}, \text{cylindrique})$. C'est donc une fonction $\mathcal{T} \to E$ aléatoire.

Remarque. Souvent $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$. Dans ce cours on considérera uniquement $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ et la tribu cylindrique engendrée par les événements du type :

$$\Big\{x\colon \mathcal{T} \to E \mid x(t_1) \in A_1, ..., x(t_n) \in A_n\Big\} \quad \text{où } t_1, ..., t_n \in \mathcal{T} \text{ et } A_1, ..., A_n \in \mathcal{E} \text{ sont fixés}$$

Intérêt. X mesurable pour cette tribu $\Leftrightarrow \forall t,\ X_t$ est une v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Exemple.

$$\begin{cases} S_n^x = x + X_1 + ... + X_n \\ S_0^x = x \end{cases} \qquad \text{avec } (X_i)_{i\geqslant 1} \text{ v.a. idp de même loi à valeurs dans } (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

La marche aléatoire issue de x est un processus.

Exemple. Si $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ sont des v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{E}(1)$,

$$Y_i = \text{“temps d'apparition d'une panne”}$$

On pose pour $t \geqslant 0$,

$$N_t = \text{“nombre de pannes avant t”} = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid Y_1 + ... + Y_n \leqslant t\}$$

N est un processus sur $\mathbb{R}_+$ appelé *processus de Poisson* (car $N_t \sim \mathcal{P}(t)$).

Exemple. Il existe une v.a. $B = (B_t)_{t\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ telle que :

$$\begin{cases} B_0 \text{ p.s.} & \\ B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) & \text{(“accroissements stationnaires”)} \\ \text{Si } t_0 < t_1 < ... < t_n,\ B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_0} \text{ sont idp} & \text{(“accroissements indépendants”)} \\ (t \mapsto B_t \text{ est continue }) \text{ p.s.} & \end{cases}$$

On l'appelle le *mouvement brownien.* Son existence est compliquée, surtout pour la propriété de continuité, qui n'est pas une propriété de la loi de B sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \text{cylindrique})$

Désormais, $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{N}^*$.

Définition 2 (filtration)

1. Une *filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de tribus.
   ($\forall n,\ \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq ... \subseteq \mathcal{A}$)
2. Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus, on dit qu'il est *adapté à la filtration* $\mathcal{F}$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n$ est $\mathcal{F}_n-$mesurable.
3. Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus, sa *filtration canonique* est :

$$\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\sigma(X_0, ..., X_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

   C'est la plus petite filtration adaptée à X.

Exemple. Marche aléatoire $S_n^x = x + X_1 + ... + X_n$ adaptée à $\mathcal{F}_n^S = \mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, ..., X_n)$
$\longrightarrow S_n = x + X_1 + ... + X_n$ est $\sigma(X_1, ..., X_n)-$mesurable donc $\mathcal{F}^S \subseteq \mathcal{F}^X$
$\longrightarrow X_n = S_n - S_{n-1}$ est $\sigma(S_0, ..., S_n)-$mesurable donc $\mathcal{F}^X \subseteq \mathcal{F}^S$

Exemple. Processus de Galton-Watson

$$(X_j^i) \text{ indépendants de même loi } \mu \text{ probabilité sur } \mathbb{N}$$

$$\text{On pose} \quad \begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_n = X_n^1 + ... + X_n^{Z_{n-1}} \end{cases}$$

Z est adapté à la filtration définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_j^i \mid i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n)$ (ce n'est pas forcément sa filtration canonique, mais celle-ci marche bien).

Intérêt. Structure le temps :

- être $\mathcal{F}_n-$mesurable = être une fonction du passé
- être $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable = être prévisible (on pouvait deviner la valeur avant)

2 Définition des martingales

Définition 3 (martingale, sous-martingale et sur-martingale)

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $\mathcal{F}$ avec $M_n \in L^1\ \forall n$.
On dit que :

- M est une $\mathcal{F}-$martingale si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ p.s.
- M est une $\mathcal{F}-$sous-martingale si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant M_n$ p.s.
- M est une $\mathcal{F}-$sur-martingale si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant M_n$ p.s.

Interprétations.

1. $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ est la meilleure prédiction sur le processus au temps $n+1$ sachant ce qu'il s'est passé jusqu'au temps présent n.
   Pour une martingale, en moyenne il n'y a pas d'évolution prévisible au temps n.

2. On imagine un joueur dans un casino et M_n sa fortune après n parties. À la $(n+1)-$ème partie, ses gains sont $M_{n+1} - M_n$. Au temps présent n, il peut estimer ce gain à :

$$\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) - M_n$$

   Si le casino est équilibré, M est une martingale.

Exemple. $S_n^x = x + X_1 + ... + X_n$ où les X_i sont indépendantes de même loi et $\in L^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$.

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^x|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n^x + X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n^x + \mathbb{E}(\underbrace{X_{n+1}|\mathcal{F}_n}_{\text{idp}}) = S_n^x + \mathbb{E}(X_{n+1}) \begin{cases} = S_n^x & \text{si } \mathbb{E}[X_i] = 0 \\ > S_n^x & \text{si } \mathbb{E}[X_i] > 0 \\ < S_n^x & \text{si } \mathbb{E}[X_i] < 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (S_n^x) \begin{cases} \text{martingale si } \mathbb{E}[X] = 0 \\ \text{sous-martingale si } \mathbb{E}[X] > 0 \\ \text{sur-martingale si } \mathbb{E}[X] < 0 \end{cases}$$

Remarque.

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas la filtration et on dit martingale au lieu de $\mathcal{F}-$martingale.
- Si la filtration n'est pas précisée, on prend la canonique.

Trivialités.

$$\begin{cases} \text{martingale} \Leftrightarrow \text{sous-martingale et sur-martingale} \\ M \text{ sur-martingale} \Rightarrow -M \text{ sous-martingale} \\ \text{ces notions sont stables par somme} \end{cases}$$

Propriété 1

M processus, $M_n \in L^1$, M adapté à $\mathcal{F}$.

$$M \text{ martingale} \Leftrightarrow \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{E}(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) = M_n \text{ p.s.} \quad (1)$$

$$M \text{ sous-martingale} \Leftrightarrow \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{E}(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) \geqslant M_n \text{ p.s.} \quad (2)$$

$$M \text{ sur-martingale} \Leftrightarrow \forall k \geqslant 0,\ \mathbb{E}(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) \leqslant M_n \text{ p.s.} \quad (3)$$

Preuve. (de (2))
$\Leftarrow$: trivial

$\Rightarrow$: Par récurrence sur k. Pour $k = 0$, $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n \geqslant M_n$ p.s.
Pour $k \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}(M_{n+k+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{\mathbb{E}(M_{n+k+1}|\mathcal{F}_{n+k})}_{\geqslant M_{n+k} \text{ p.s.}}\Big| \underbrace{\mathcal{F}_n}_{\subseteq \mathcal{F}_{n+k}}\Big) \underset{\text{croissance de } \mathbb{E}[.|\mathcal{F}_n]}{\geqslant} \mathbb{E}(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) \underset{\text{H.R.}}{\geqslant} M_n \text{ p.s.}$$

□

Exemple. Processus de Galton-Watson : $(X_n^j)_{n,j\geqslant 1}$ indépendantes de loi μ.

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_b^j \mid 1 \leqslant j,\ 1 \leqslant b \leqslant n)$$

Supposons que les X_n^j sont L^1.

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_n = X_n^1 + ... + X_n^{Z_{n-1}} \in \mathbb{N} \text{ p.s.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k\geqslant 0} Z_n \mathbb{1}_{Z_{n-1}=k}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geqslant 0}(X_n^1 + ... + X_n^k) \underbrace{\mathbb{1}_{Z_{n-1}=k}}_{\mathcal{F}_{n-1}-\text{mesurable}}\right) \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}\Big((X_n^1 + ... + X_n^k)\mathbb{1}_{Z_{n-1}=k}\Big) \\
&\underset{\text{idp}}{=} \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}(X_n^1 + ... + X_n^k)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Z_{n-1}=k}) \\
&\underset{\text{idp}}{=} \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}(X_n^1 + ... + X_n^k)\mathbb{P}(Z_{n-1}=k) \\
&= \Big(\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(Z_{n-1}=k)\Big)\mathbb{E}(X_1^1) = \mathbb{E}(Z_{n-1})m \qquad \text{où } m = \mathbb{E}(X_1^1)
\end{aligned}$$

Remarque.

$$\begin{cases} M \text{ martingale } \Rightarrow (\mathbb{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ constante} \\ M \text{ sous-martingale } \Rightarrow (\mathbb{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante} \\ M \text{ sur-martingale } \Rightarrow (\mathbb{E}(M_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante} \end{cases}$$

On suppose $m \neq 0$, posons $Y_n = \frac{Z_n}{m^n}$. On a alors $\mathbb{E}(Y_n) = 1\ \forall n$.

Propriété 2

Y est une martingale.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \frac{1}{m^{n+1}}\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{m^{n+1}}\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geqslant 0}(X_n^1 + ... + X_n^k) \underbrace{\mathbb{1}_{Z_n=k}}_{\mathcal{F}_n-\text{mesurable}} |\mathcal{F}_n\Big) \\
&= \frac{1}{m^{n+1}}\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geqslant 0} X_n^1 + ... + X_n^k|\mathcal{F}_n\Big)\mathbb{1}_{Z_n=k} \\
&= \frac{1}{m^{n+1}}\sum_{k\geqslant 0} km\mathbb{1}_{Z_n=k} \\
&= \frac{1}{m^n}\underbrace{\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{1}_{Z_n=k}}_{=Z_n} \\
&= Y_n
\end{aligned}$$

$\square$

Construction de martingale en pariant.

On a une $\mathcal{F}-$martingale M : $M_{n+1} - M_n$ représente le gain si on joue à la $(n+1)-$ème partie dans un casino. Maintenant, un autre joueur parie sur le résultat de cette partie ; il parie la quantité H_{n+1}. Ses gains lors de cette partie sont $H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)$.

$$\text{Si } H_{n+1} = \begin{cases} -1 & \text{il gagne les gains normaux} \\ 2 & \text{il double les gains/pertes} \\ 0 & \text{il ne joue pas} \\ -1 & \text{il joue du côté du casino} \end{cases}$$

Les gain cumulés au bout de n parties sont :

$$H_1(M_1 - M_0) + H_2(M_2 - M_1) + ... + H_n(M_n - M_{n-1})$$

Il ne voit pas le résultat de la partie à l'avance, donc on demande à ce que H_n soit $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable.

Définition 4 (prévisible, processus adapté)

Si $\mathcal{F}$ est une filtration :

1. $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est prévisible si $\forall n,\ H_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}-$mesurable.
2. Si $H = (H_n) = n \in \mathbb{N}^*$ est prévisible et $M = (M_n)$ adapté, on définit le processus adapté $(H \circ M)$ par :

$$\begin{cases} (H \circ M)_0 = 0 \\ (H \circ M)_{n+1} = H_1(M_1 - M_0) + ... + H_n(M_n - M_{n-1}) + H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \end{cases}$$

Théorème 1

Soit $\mathcal{F}$ une filtration.

- H prévisible, borné (i.e. $\forall n, \exists c_n, |H_n| \leqslant c_n$ p.s.) et M martingale $\Rightarrow$ $(H \circ M)$ martingale.
- H prévisible, borné, $\geqslant 0$, M sous/sur-martingale $\Rightarrow$ $(H \circ M)$ sous/sur-martingale.

Remarque. Si on revient au casino, s'il est équilibré, M est une martingale. Ceci signifie que quelque soit la stratégie de mide (H_n peut être n'importe quelle fonction $f_n(M_0, .., M_{n-1})$), $(H \circ M)$ est une martingale et $\mathbb{E}((H \circ M)_n) = \mathbb{E}((H \circ M)_0) = 0$. Pas de gains > 0 en moyenne.

Remarque. Si M adapté et $\forall H$ prévisible, $\mathbb{E}((H \circ M)_n) = 0$, alors M martingale.

Preuve.

H borné et $M \in L^1$ alors $(H \circ M) = \sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1})$ est L^1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((H \circ M)_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\Big(\underbrace{(H \circ M)_n}_{\mathcal{F}_n-\text{mesurable}} + \underbrace{H_{n+1}}_{\mathcal{F}_n-\text{mes car prév}} (M_{n+1} - M_n) \Big| \mathcal{F}_n \Big) \\ &= (H \circ M)_n + H_{n+1}\Big(\underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) - M_n}_{=0 \text{ car } M \text{ martingale}} \Big) \end{aligned}$$

Idem pour les autres points. $\square$

3 Temps d'arrêt

Notons utile hors du cadre des martingales.

Définition 5 (temps d'arrêt)

$\mathcal{F}$ filtration. $T\colon \Omega \to \mathbb{N}$ est un temps d'arrêt si $\forall n,\ \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Remarque. Un joueur peut jouer jusqu'à l'instant T qu'il décide. On veut que la décision de s'arrêter ne dépende que de ce qui s'est passé jusque là, donc $\in \mathcal{F}_n$.

Remarque.

$$\begin{array}{rcll} T \text{ temps d'arrêt} & \Leftrightarrow & (i) & \forall n\ \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \\ & \Leftrightarrow & (ii) & \forall n\ \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n \\ & \Leftrightarrow & (iii) & \forall n\ \{T > n\} \in \mathcal{F}_n \end{array}$$

car $(i) \Rightarrow (ii)$ puisque $\{T \leqslant n\} = \{T = 0\} \cup ... \cup \{T = n\}$ et $(ii) \Rightarrow (iii)$ par stabilité par passage au complémentaire dans les tribus $\mathcal{F}_n$. Et on a $(ii) \Rightarrow (i)$ car $\{T = n\} = \{T \leqslant n\} \backslash \{T \leqslant n-1\}$.

Exemple. Si X est adapté (à $\mathcal{F}$) est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $T_A =$ "temps d'atteinte de A" $= \inf\{n | X_n \in A\}$ est un temps d'arrêt, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.
$\{T_A > n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \ldots, X_n \notin A\} \in \mathcal{F}_n$ car X adapté.
Pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $L \in \mathbb{N}$, on sait que $T_L < +\infty$ p.s. car $\overline{\lim} S_n = 0$. $\mathbb{E}[T_L] =$?

Exemple.

$$\begin{aligned} T &= \text{“premier passage} < 0 \text{ après un passage} > 10\text{”} \\ &= \inf\Big\{n \mid \exists 0 \leqslant p \leqslant n-1,\ X_p > 10, X_n < 0\Big\} \end{aligned}$$

$$\{T > n\} = \bigcup_{p=0}^{n-1} \Big\{X_p > 10, X_{p+1} \geqslant 0, \ldots, X_n \geqslant 0\Big\} \in \mathcal{F}_n$$

Propriété 3

Si S et T sont deux temps d'arrêt, $\min(S,T)$ et $\max(S,T)$ sont des temps d'arrêt.
Si $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêts, $\sup T_n,\ \inf T_n$ sont des temps d'arrêt.

Preuve.
Par exemple, $\{\sup T_k \leqslant n\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{T_k \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$. □

Pour T un temps d'arrêt, on définit $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty | A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$, avec $\mathcal{F}_\infty = \cup \uparrow \mathcal{F}_n$.
Soit un joueur dont la fortune lorsqu'il va dans un casino est modélisée par le processus X, s'il joue jusqu'au temps d'arrêt T, ses gains sont donnés par le "processus arrêté" $(X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ et sa fortune finale sera, si $T < +\infty$ p.s., X_T $(n \wedge T = \min(n,T))$.

Propriété 4

X adapté, T temps d'arrêt. Alors T et X_T sont $\mathcal{F}_T$-mesurables.

Preuve.
$\sigma(T) = \sigma(\{T = k\})$. $\{T = k\} \cap \{T = n\} = (\{T = n\}$ si $k = n$, $\emptyset$ sinon$) \in \mathcal{F}_n$.
Et, $\sigma(X_T) = \{\{X_T \in A\} \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

$$\{X_T \in A\} \cap \{T = n\} = \underbrace{\{X_n \in A\}}_{\in \mathcal{F}_n \text{ car adapté}} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n}$$

Lemme 1

Si S, T temps d'arrêts, $S \leqslant T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Preuve.
Soit $A \in \mathcal{F}_S$, $A \cap \{T = n\} = \bigcup_{p=0}^{n} \underbrace{(A \cap \{S = p\})}_{\in \mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$. □

Remarque. Si $T = n$ est un temps d'arrêt, on a bien $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$.

Remarque. Si (X_i) v.a.i.i.d. dans $\mathcal{L}^1$, avec $\mathbb{E}[X_i] \geqslant 0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[X_i] > 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} +\infty$$

$T = \sup\{n \mid X_1 + \ldots + X_n < 0\}$ fini p.s. mais *pas* un temps d'arrêt en général.

Théorème 2 (d'arrêt (faible))

Soient $\mathcal{F}$ une filtration, M une martingale et T un temps d'arrêt, alors :
- La "martingale arrêtée" (très utile) $(M_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale
- Si $\exists C < +\infty$ tel que $T < C$ p.s. alors $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ (utile si on vérifie l'hypothèse sur T, ce qui est rare).

Preuve.
Soit $H_n = \mathbb{1}_{n \leqslant T}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, car $\{n \leqslant T\} = \{T > n - 1\}$, donc H est prévisible borné, donc $(H \circ M)$ est une martingale. $(H \circ M)_n = \sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i - M_{i-1} = M$ blablabla il manque un bout là !!!!!

$M_{n \wedge T}$ est une martingale donc $\mathbb{E}[M_{n \wedge T}] = \mathbb{E}[M_{0 \wedge T}] = \mathbb{E}[M_0]$. Pour $n \geqslant C$, $n \wedge T = T$ donc $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$. □

Application. (ruine du joueur dans un casino équilibré)
Soient $(X_i)_{i \geqslant 1}$ v.a.i.i.d., $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$, représentant le gain lors de la $i-$ème partie. Un joueur qui commence avec la somme $x \in \mathbb{N}^*$, s'arrête s'il obtient $L \in \mathbb{N} > x$ ou s'il est ruiné, i.e. s'il arrive à 0. Sa fortune au temps n est :

$$S_n^x = x + X_1 + \ldots + X_n \quad \text{s'il ne s'arrête pas}$$

Soit $T_{\{0,L\}} = \inf\{n \mid S_n = 0 \text{ ou } S_n = L\}$ le temps d'arrêt. On veut :

- $\mathbb{P}$("faire fortune")
- Combien de temps le jeu dure-t-il ?

Puisque $\limsup S = +\infty$ et $\liminf S = -\inf$ p.s., on a $T_{\{0,L\}} < +\infty$ p.s.
Soit $A =$ "faire fortune" $= \{S_{T_{\{0,L\}}} = L\}$, on sait que $S^x_{n\wedge T_{\{0,L\}}}$ est une martingale, donc

$$\mathbb{E}[\underbrace{S^x_{n\wedge T_{\{0,L\}}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} S^x_{T_{\{0,L\}}}}] = \mathbb{E}[S^x_{0\wedge T_{\{0,L\}}}] = x$$

et $|.| \leqslant L$. Donc par TCD quand $n \to +\infty$, $\mathbb{E}[S^x_{T_{\{0,L\}}}] = x$.

$$x = \mathbb{E}[S^x_{T_{\{0,L\}}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A L + \mathbb{1}_A 0] = L\mathbb{P}(A)$$

D'où, $\mathbb{P}$("faire fortune") $= \frac{x}{L}$, intuitif car croissant avec x, tend vers 1 pour x s'approchant de L et vers 0 pour x s'approchant de 0.

Remarque. On utilise très peu de choses sur S.

Cela reste vrai si on autorise des paris $H : M_n = x + (H \circ S)_n$, où H prévisible, entier, $|H_n| \leqslant \min(M_n, L - M_n)$, et H prend une infinité de fois des valeurs $\neq 0$ p.s.

Que vaut $\mathbb{E}[T_{\{0,L\}}]$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S^x_{n+1} = S^x_n + X_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(S^x_n)^2 + 2X_{n+1}S^x_n \text{ et } X^2_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= (S^x_n)^2 + 2\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]S^x_n + 1 \\
&= (S^x_n)^2 + 1
\end{aligned}$$

Soit $Y_n = (S^x_n)^2 - n$.

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S^x_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] - n - 1 = (S^x_n)^2 - n = Y_n$$

$Y_{n\wedge T_{\{0,l\}}}$ est une martingale, donc $\mathbb{E}[Y_{0\wedge T_{\{0,l\}}}] = \mathbb{E}[Y_{n\wedge T_{\{0,l\}}}]$. Or,

$$\mathbb{E}[Y_{0\wedge T_{\{0,l\}}}] = \mathbb{E}[(S^x_0)^2 - 0] = x^2 \quad \text{ et } \quad \mathbb{E}[Y_{n\wedge T_{\{0,l\}}}] = \mathbb{E}[(S_{n\wedge T_{\{0,L\}}})^2] - \mathbb{E}[n \wedge T_{\{0,L\}}]$$

avec $(S_{n\wedge T_{\{0,L\}}})^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} (S^x_{T_{\{0,L\}}})^2$ et $n \wedge T_{\{0,L\}} \uparrow T_{\{0,L\}}, T \subset M$.

Bilan. $x^2 = \mathbb{E}[(S^x_0)^2 - 0] - \mathbb{E}[T_{\{0,L\}}] \leqslant L^2$ par TCD.

4 Convergence de martingales

On veut des hypothèses faibles sous lesquelles $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M_\infty$ p.s., L^1 ?

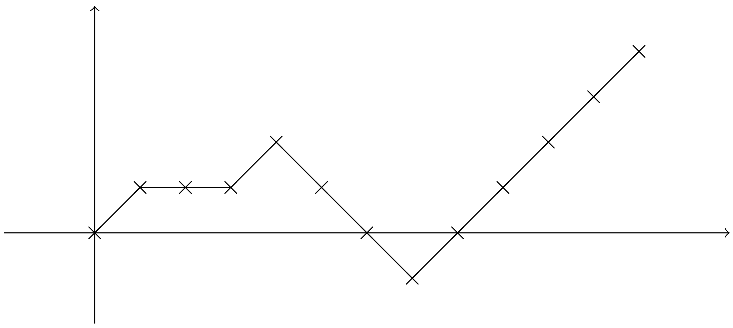
4.1 Exemples

1. $S_n^x = x + X_1 + ... + X_n$ avec X_n v.a. indépendantes et $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. $|S_{n+1}^x - S_n^x| = 1$ p.s. donc S_n^x ne converge pas p.s. Et d'après le TCL :

$$\frac{S_n^x}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} \mathcal{N}(0,1)$$

   $\mathbb{E}[|S_n^x|] = O(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2. $T_{\{0,L\}} = \inf\{n \mid S_n^x \in \{0,L\}\}$ x, L entiers $0 < x < L$. $S^x_{n\wedge T_{\{0,L\}}}$ est une martingale. $T_{\{0,L\}} < +\infty$ p.s. Donc $S^x_{n\wedge T_{\{0,L\}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S_{T_{\{0,L\}}}$ p.s. et dans L^1. On a la convergence dans L^1 par le TCD et $|S^x_{n\wedge T_{\{0,L\}}}| \leqslant L$.



3. $S^1_{n\wedge T_0}$ où $T_0 = \inf\{n \mid S_n^1 = 0\} < +\infty$ p.s. $S^1_{n\wedge T_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} S^1_{T_0}$ n'a pas lieu dans L^1 car :

$$\underbrace{\mathbb{E}[S^1_{n\wedge T_0}]}_{\underset{\text{mart}}{=} \mathbb{E}[S^1_{0\wedge T_0}]=1} \neq \underbrace{\mathbb{E}[S^1_{T_0}]}_{=0}$$

   On peut donc avoir pour T temps d'arrêt fini p.s. $\mathbb{E}[M_T] \neq \mathbb{E}[M_0]$.

4. Posons $H_1 = 1$ et :

$$H_n = \begin{cases} 2H_{n-1} & \text{si } X_{n-1} = -1 \\ 1 & \text{si } X_{n-1} = 1 \end{cases} \qquad \text{on double la mise si on perd}$$

   $M_n = (H.S)_n = \sum_{i=1}^n H_i X_i$ est une martingale.

$$\begin{array}{rcrrrr} X_i & = & -1 & -1 & -1 & 1 \\ H & = & 1 & 2 & 4 & 8 \\ (H.S) & = & -1 & -3 & -7 & 1 \end{array}$$

   Soit $T_1 = \inf\{n \mid X_n = 1\}$, $T_1 \sim \mathcal{G}(1/2)$, $T_{i+1} - T_i \sim \mathcal{G}(1/2)$.

$$(H.S)_{T_1} = -1 - 2 - 4 ... - 2^{T_1 - 2} + 2^{T_1 - 1} = 1$$

$T_{i+1} = \inf\{n > T_i \mid X_n = 1\}$ "temps de victoire". On aura :

$$(H.S)_{T_i} = i \text{ p.s.} \qquad (H.S)_{T_i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} +\infty \text{ p.s.}$$

5. Si $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ sont des v.a. indépendantes et $\mathbb{E}[Y_i] = 0$. Alors $(\sum_{i=1}^n Y_i)_{n\geqslant 0}$ martingale. Cas particulier :

$$M_n = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^{i+1}}$$

avec X_i indépendants $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. $\frac{X_i+1}{2} \sim \mathcal{B}(1/2)$. $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} M_\infty$ et $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty$ où :

$$M_\infty = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i+1}{2}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i+1}{2}\frac{1}{2^i} \sim \mathcal{U}([0,1])$$

6. Supposons que M est une martingale $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty$.

$$M_n = \underbrace{\mathbb{E}[M_{n+k}|\mathcal{F}_n]}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{L^1} \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n]} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

car $\mathbb{E}[.|\mathcal{B}]$ linéaire, contractante pour L^1 car $|\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]| \leqslant \mathbb{E}[|X||\mathcal{B}]$ donc continue pour L^1. Donc :

$$M_n = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n] \text{ p.s.}$$

Définition 6 (martingale fermée)

Si $Z \in L^1$ et $\mathcal{F}$ filtration. Alors $M_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ est une martingale. On appelle une telle martingale une *martingale fermée.*

Remarque. On vient de voir $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty \;\Rightarrow\; M_n$ fermée.

Preuve.

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_{n+1}]\Big|\mathcal{F}_n\Big] \underset{\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}_{n+1}}{=} \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n] = M_n \text{ p.s.}$$

□

Exemple. $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\frac{k}{2^n} \leqslant U < \frac{k+1}{2^n},\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration car $\mathcal{F}_n \uparrow$.

Soit $M_n = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_n]$ une martingale fermée.

$$U = \sum_{i \geqslant 1} \frac{U_i}{2^i} \text{ p.s. avec } U_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ indépendantes}$$

son développement dyadique.

$$\begin{aligned}
M_n = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{2^i}}_{\text{mes}} \Big| U_1, ..., U_n\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{U_i}{2^i}}_{\text{idp}} \Big| U_1, ..., U_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2U_i - 1}{2^{i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{2U_i - 1}{2^{i+1}}}_{\pm 1 \text{ avec proba } \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

même exemple que la série aléatoire.

4.2 Convergence presque sûre de martingales

Lemme 2

- M martingale, φ convexe, $\varphi(M_n) \in L^1\ \forall n \Rightarrow (\varphi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sous-martingale
- M sous-martingale, φ convexe et croissante, $\varphi(M_n) \in L^1\ \forall n \Rightarrow (\varphi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sous-martingale

Preuve.

- $\mathbb{E}[\varphi(M_{n+1})|\mathcal{F}_n] \underset{\text{Jensen}}{\geqslant} \varphi(\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \varphi(M_n)$
- $\mathbb{E}[\varphi(M_{n+1})|\mathcal{F}_n] \underset{\text{Jensen}}{\geqslant} \varphi(\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \geqslant \varphi(M_n)$

□

Deux obstacles pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

- $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $u_n = n$
- elle oscille, $u_n = (-1)^n$

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$, on note pour $a < b$:

$$S^1_{a,b}(u) = \inf\{n | u_n \leqslant a\}$$

$$T^1_{a,b}(u) = \inf\{n > S^1_{a,b}(u) | u_n \geqslant b\}$$

$$S^{i+1}_{a,b}(u) = \inf\{n > T^i_{a,b}(u) | u_n \leqslant a\}$$

$$T_{a,b}^{i+1}(u) = \inf\{n > S_{a,b}^{i+1}(u) | u_n \geqslant b\}$$

Soit :

$$\mathcal{N}_{a,b}^n(u) = \text{“nombre de montées avant } n\text{”} = \sup\{i | T_{a,b}^i(u) \leqslant n\} \qquad \text{(une montée } [S_i, T_i])$$

On contrôle les oscillations de a à b en regardant :

$$\mathcal{N}_{a,b}^\infty(u) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \mathcal{N}_{a,b}^\infty(u)$$

Lemme 3

$$(\forall a < b \in \mathbb{Q} \quad \mathcal{N}_{a,b}^\infty(u) < +\infty) \;\Leftrightarrow\; (u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \text{ pour } l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\})$$

Remarque. On peut remplace $\mathbb{Q}$ par un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

Preuve.
$\Leftarrow$: si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $a \neq l$ ou $b \neq l$. Si $b \neq l$ par exemple, $b > l$ alors pour un certain i_0, $\forall i \geqslant i_0,\ S^i = \infty$ et $\mathcal{N}_{a,b}^n \leqslant i_0 < +\infty$
$\Rightarrow$: si $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors u a deux points d'accumulations $l_1 < l_2$. Prenons $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $l_1 < a < b < l_2$. Alors $\mathcal{N}_{a,b}^n(u) = \infty$. $\square$

Lemme 4 (inégalité des montées de Doob)

X sous-martingale, $a < b$.

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_{a,b}^n(X)] \leqslant \frac{1}{b-1}\mathbb{E}[(X_n - a)_+ - (X_0 - a)_+]$$

Preuve.
$Y_n = (X_n - a)_+$ sous-martingales car $(x-a)_+$ convexe, croissante. Soit :

$$H_n = \mathbb{1}_{\text{dans une montée}}(n) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{1}_{S_{a,b}^i(X) \leqslant n < T_{a,b}^i(X)}$$

Par construction, $S_{a,b}^1(X), T_{a,b}^1(X), S_{a,b}^2(X), \ldots$ est une suite croissante de temps d'arrêt. Et même strictement croissant jusqu') ce qu'ils valent éventuellement $+\infty$. $H_n \in \{0,1\}$ positif et prévisible.

$$\begin{aligned}
(H.Y)_n = \sum_{k=1}^{S_1} H_k(Y_k - Y_{k-1}) &+ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}^n}\left(\sum_{k=S^i+1}^{T^i} \underbrace{H_k}_{=1}(Y_k - Y_k - 1) + \sum_{k=T^i+1}^{S^{i+1}} \underbrace{H_k}_{=0}(Y_k - Y_k - 1)\right) \\
&+ \sum_{k=S^{N^n}+1}^{T^{N_n}} \underbrace{H_k}_{=1}(Y_k - Y_{k-1}) + R_n \\
&= \sum_{i=1}^{N^n} \underbrace{Y_{T^i}}_{\geqslant (b-a)_+} - \underbrace{Y_{S^i}}_{=0} + R_n \\
&\geqslant N_n(b-a) + R_n
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
R_n = \text{reste} &= \sum_{k=T^{N^n+1}}^{n} H_k(Y_k - Y_{k+1}) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } S_{N^n+1} \geqslant n \\ \sum_{k=S_{N^n+1}}^{n} (Y_k - Y_{k-1}) \text{ si } S_{N^n+1} < n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 \quad \text{ si } S_{N^n+1} \geqslant n \\ \underbrace{Y_n}_{\geqslant 0} - \underbrace{Y_{S_{N^n}}}_{=0} \quad \text{sinon} \end{cases} \qquad \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $R_n \geqslant 0$, ainsi :

$$(H.Y)_n \geqslant \mathcal{N}^n(b-a)$$

$1 - H_n$ borné positif prévisible, donc $((1-H).Y)$ sous-martingale donc :

$$\mathbb{E}[((1-H).Y)_n] \geqslant \mathbb{E}[((1-H).Y)_0] = 0$$

$$\mathbb{E}[(H.Y)_n] \geqslant (b-a)\mathbb{E}[\mathcal{N}^n]$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}[(1.Y)_n] \geqslant (b-a)\mathbb{E}[\mathcal{N}^n] \quad \text{par bilinéarité de } X, Y \to (X.Y)_n$$

Or $\mathbb{E}[(1.Y)_n] = \mathbb{E}[Y_n - Y_n] = \mathbb{E}[(X_n - a)_+ - (X_0 - a)_+]$. D'où le résultat. □

Théorème 3

Si X est une sous-martingale avec $\sup_{\mathbb{N}} E[(X_n)_+] < +\infty$. Alors :

$$\exists X_\infty \text{ v.a. } L^1 \text{ telle que } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$$

Remarque. Par forcément convergence L^1.

Remarque. Une suite croissante bornée est convergente. Une sous-martingale : la version croissante $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant M_n$. Il suffit de la bornée par le haut pour la rendre convergente.

Remarque. $\mathbb{E}[(X_n)_-] = \mathbb{E}[(X_n)_+] - \mathbb{E}[X_n] \leqslant \sup_{\mathbb{N}} \mathbb{E}[(X_n)_+] - \mathbb{E}[X_0]$. Donc :

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[(X_n)_+] + \mathbb{E}[(X_n)_-] \leqslant 2\sup \mathbb{E}[(X_n)_+] - \mathbb{E}[X_0]$$

Donc pour X sous martingale :

$$\begin{tikzcd}
\sup \mathbb{E}[(X_n)_+] < +\infty \arrow[dr] \arrow[dd, Leftrightarrow] & \\
& \exists X_\infty \in L_1,\ X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X_\infty \\
\sup \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Si X sur-martingale positive alors $\exists X_\infty \in L^1$ telle que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$. ($X$ positive $\Rightarrow \mathbb{E}[(X_n)_-] = 0$).

On en déduit plein de critères de convergence pour les martingales :

$$\text{Si } M \text{martingale} \quad \begin{array}{l} \text{bornée dans } L^1 \\ \text{ou majorée} \\ \text{ou positive} \end{array} \qquad \text{alors } M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} M_\infty \in L^1$$

Preuve.
Si X sous-martingale avec $c = \sup_{\mathbb{N}} \mathbb{E}[(X_n)_+] < +\infty$. Soient $a < b$ rationnels. D'après l'inégalité des montées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathcal{N}_{a,b}^n(X)] &\leqslant \frac{1}{b-1}\mathbb{E}[(X_n-a)_+ \underbrace{-(X_0-a)_+}_{\leqslant 0}] \\
&\leqslant \frac{1}{b-a}(\mathbb{E}[(X_n)_+] + |a|) \\
\text{TCM} \quad \mathbb{E}[\mathcal{N}_{a,b}^\infty(X)] &\leqslant \frac{c+|a|}{b-a}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{N}_{a,b}^\infty < +\infty$ p.s. donc :

$$(\forall a, b \in \mathbb{Q},\ \mathcal{N}_{a,b}^\infty(X) < +\infty) \text{ p.s.}$$

car une intersection dénombrable d'événements p.s. est p.s. Ainsi $\exists X_\infty \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ telle que :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$$

et,

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] = \mathbb{E}[\liminf |X_n|] \underset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$$

En particulier $X_\infty < \infty$ p.s. $\square$

Application.

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_n = X_1^n + ... + X_{Z_n - 1}^n \end{cases} \qquad \text{et } X_i^j \text{ v.a. indépendantes de loi } \mu \text{ proba sur } \mathbb{N}$$

Si $m = \sum k\mu(\{k\}) < +\infty$, alors $\frac{Z_n}{m^n}$ est une martingale positive donc $\exists Y_\infty \in L^1$ telle que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y\infty$.

- si $m < 1$:

$$\underbrace{m^{-n}}_{\to+\infty} Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y_\infty$$

  Donc $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$ et Z_n entier donc $Z_n = 0$ pour n assez grand p.s. Donc extinction p.s.

- si $m = 1$:

$$Y_n = Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y_\infty$$

  donc (Z_n constant pour n assez grand) p.s. Impossible sauf si ($Z_n = 0$ pour n assez grand) p.s. ou si $\mu = \delta_1$ ($\sim$ Borel-Cantelli à faire en exo).

- si $m > 1$:
$$\frac{1}{m^n} Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y_\infty$$
Si $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) > 0$, alors sur $\{Y_\infty > 0\}$, $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Et donc il y a survie avec probabilité > 0. (condition $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) > 0$ pas toujours vérifiée, restrictif)

Rappels. Il est très simple pour une martingale de converger p.s. : il faut garantir la non-explosion.

- Pour une sous-martingale ("croissant en moyenne"), il suffit que :
  - M soit majorée : $\exists c,\ \forall n\ M_n \leqslant c$ p.s.
  - ou $\sup \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$
  - ou $\sup \mathbb{E}[(M_n)_+] < +\infty$
- Pour une sous-martingale ("décroissant en moyenne"), il suffit que :
  - M soit minrée : $\exists c,\ \forall n\ M_n \geqslant c$ p.s.
  - ou M soit positive
  - ou M bornée dans $\mathcal{L}^1$
- Pour une martingale, n'importe laquelle de ces conditions suffit.

4.3 Convergence dans $\mathcal{L}^1$

Propriété 5

Soit M une martingale.
$$M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty \quad \Rightarrow \quad M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} M_\infty$$

Remarque. La réciproque est fausse.
Contre-exemple. Soit (S_n^1) la marche aléatoire simple issue de 1. $X_i \sim \mathrm{Rd}(1/2)$
$$S_n^1 = 1 + X_1 + \ldots + X_n$$
On a :
$$T := \inf\{n \mid S_n^1 = 0\} < +\infty \text{ p.s.}$$
Alors la martingale $M_n = S^1_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$ mais $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc pas de convergence $\mathcal{L}^1$.

Preuve.
Si $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty$, alors :
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|M_n|] \leqslant \mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] + \mathbb{E}[|M_\infty|] \\
\Rightarrow\ &\sup \mathbb{E}[|M_n|] \leqslant \sup \Big(\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] + \mathbb{E}[|M_\infty|]\Big) < +\infty \text{ p.s.} \\
\Rightarrow\ &M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z_\infty \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

$M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty M_\infty$ donc $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} M_\infty$, et $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Z_\infty$ donc $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z_\infty$. Par unicité $M_\infty = Z_\infty$. $\square$

Notion pour obtenir la convergence $\mathcal{L}^1$: UI uniforme intégrabilité.
Rappel. (X_i) est UI si

$$\sup_I \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>L}] \xrightarrow[L\to+\infty]{} 0$$

Intérêt. Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X_\infty$ alors (X_n) est UI $\Leftrightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} X_\infty$

Lemme 5

Si X est $\mathcal{L}^1$ et $(B_i)_{i\in I}$ famille de tribus, alors $(\mathbb{E}(X_i|B_i))_{i\in I}$ est UI.

Preuve.
X est UI. Si on fixe $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall A,\ \mathbb{P}(A) \leqslant \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] < \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Big|\mathbb{E}[X|B_i]\Big| > L\right) &\underset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{\mathbb{E}\left(\Big|\mathbb{E}[X|B_i]\Big|\right)}{L} \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\left[|X|\Big|B_i\right]\Big)}{L} = \frac{\mathbb{E}[|X|]}{L}
\end{aligned}$$

Soit $L_0 := \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\delta}$. Alors $\forall i,\ \forall L \geqslant L_0$, $\mathbb{P}\left(\Big|\mathbb{E}[X|B_i]\Big| > L\right) \leqslant \delta$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Big|\mathbb{E}[X|B_i]\Big|\mathbb{1}_{|\mathbb{E}[X|B_i]|\geqslant L_0}\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|X|\Big|B_i\right]\mathbb{1}_{|\mathbb{E}[X|B_i]|\geqslant L_0}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_{|\mathbb{E}[X|B_i]|\geqslant L_0}\right] && \text{par la prop carac} \\
&\leqslant \varepsilon && \text{car } X \text{ est UI}
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 4

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale. On a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
&(i)\ (M_n) \text{ est UI} \\
\Leftrightarrow\ &(ii)\ \exists M_\infty \in \mathcal{L}^1\ M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} M_\infty \text{ et } M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty \\
\Leftrightarrow\ &(iii)\ M \text{ martingale fermée },\ \exists Z \in \mathcal{L}^1 \text{ tq } M_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]
\end{aligned}$$

Remarque. Lien entre Z et M_∞ :

- Si $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M_\infty$ p.s. et $\mathcal{L}^1$ alors $M_n = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n]$ et on peut choisir $M_\infty =: Z$
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ alors $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_\infty]$ p.s. et dans $\mathcal{L}^1$ avec $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup \uparrow \mathcal{F}_n)$

Preuve.

- $(iii) \Rightarrow (i)$: lemme précédent
- $(i) \Rightarrow (ii)$: M UI donc $\sup \mathbb{E}(|M_n|) < +\infty$, ainsi $\exists M_\infty \in \mathcal{L}^1$ telle que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} M_\infty$ donc $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} M_\infty$ et M UI alors $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty$.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: On a déjà vu $M_n = \mathbb{E}[M_{n+k}|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[k\to+\infty]{L^1} \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n]$ par continuité de $\mathbb{E}[.|\mathcal{F}_n]$ dans $\mathcal{L}^1$. Or M_n est constante en k donc est égale à sa limite : $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n]$. Reste à montrer :

$$\text{Si } M_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n] \text{ alors } M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[Z|\mathcal{F}_\infty] \text{ p.s. et } \mathcal{L}^1$$

  Comme $(iii) \Rightarrow (ii)$, $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M_\infty$ p.s. et $\mathcal{L}^1$. Montrons que $M_\infty = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_\infty]$.

  Soit $a \in \mathcal{F}_n$. Alors $A \in \mathcal{F}_k$ pour $k \geqslant n$. Calculons $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A]$,

$$\forall k \geqslant n,\ \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_k]\mathbb{1}_A\Big] = \mathbb{E}[M_k\mathbb{1}_A]$$

  Or $|\mathbb{E}[M_k\mathbb{1}_A] - \mathbb{E}[M_\infty\mathbb{1}_A]| \leqslant \mathbb{E}[|M_\infty - M_k|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $M_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} M_\infty$. Donc :

$$\mathbb{E}[M_k\mathbb{1}_A] \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{E}[M_\infty\mathbb{1}_A]$$

  Or, $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A]$ est constante et donc $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_\infty\mathbb{1}_A]$. Donc $\forall A \in \bigcup \mathcal{F}_n,\ \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_\infty\mathbb{1}_A]$. Posons $\mathcal{C} := \bigcup \uparrow \mathcal{F}_n$, $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

  $\mathcal{M} = \{A \mid \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_\infty\mathbb{1}_A]\}$ est une classe monotone :

  - $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$,
  - $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\bigcup\uparrow A_n}] \underset{\text{TCD}}{=} \lim \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_n}]$

  On vient de voir $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{C} \ \Rightarrow\ \mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_\infty$. Donc $\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_\infty\mathbb{1}_A]\ \forall A \in \mathcal{F}_\infty$. $M_\infty = \lim_{\text{p.s.}} M_n$ est $\mathcal{F}_\infty-$mesurable, donc $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_\infty] = M_\infty$.

□

Remarque. M borné dans $\mathcal{L}^1 \Rightarrow$ convergence p.s. $\not\Rightarrow$ convergence $\mathcal{L}^p$. Mais M bornée dans $\mathcal{L}^p$ $p > 1 \Rightarrow$ convergence $\mathcal{L}^p$.

Application. (urnes de Polya)
2 populations de bactéries initialement $R_0 = r$ (bactéries rouges) $B_0 = b$ (bactéries bleues). De n à $n+1$ une bactérie prise au hasard se divise en 2 : elle disparaît et se remplace par 2 bactéries de sa couleur. On se donne $(X_i)_i \sim \mathcal{U}[0,1]$, i.i.d.
R_n, B_n étant fixées, la probabilité qu'une bactérie rouge se divise est $\frac{B_n}{R_n+B_n}$. Posons :

$$\begin{cases} (R_0, B_0) = (r, b) \\ R_{n+1} = R_n + \mathbb{1}_{X_{n+1} \leqslant \frac{R_n}{R_n+B_n}} \\ B_{n+1} = B_n + \mathbb{1}_{X_{n+1} > \frac{R_n}{R_n+B_n}} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$. Si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ alors R et B processus adaptés.

Objectifs. Regarder l'évolution de la proportion de rouges dans la population.
Si on somme les 2 égalités, on a l'évolution de la population totale.

$$R_{n+1}+B_{n+1}=R_n+B_n+1 \longrightarrow R_n+B_n=r+b+n$$

Regardons la proportion de rouges dans la population.

$$Y_n=\frac{R_n}{R_n+B_n}=\frac{R_n}{r+b+n}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{R_n+\mathbb{1}_{X_{n+1}\leqslant Y_n}}{r+b+n+1}|\mathcal{F}_n\right] \quad X_{n+1}\perp,\ Y_n \text{ mes}\\
&= \frac{1}{r+b+n+1}(R_n+\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}\leqslant Y_n}|\mathcal{F}_n])\\
&= \frac{1}{r+b+n+1}\left(R_n+\int_0^1 \mathbb{1}_{x\leqslant Y_n}dx\right)\\
&= \frac{1}{r+b+n+1}(R_n+Y_n)\\
&= \frac{1}{n+b+r+1}\left(R_n+\frac{R_n}{r+b+n}\right)\\
&= \frac{1}{n+b+r+1}\left(1+\frac{1}{r+b+n}\right)R_n\\
&= \frac{1}{r+b+n}R_n=Y_n
\end{aligned}$$

Donc Y martingale. Par ailleurs, $0\leqslant Y_n\leqslant 1$ p.s. donc Y est UI. Donc $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y_\infty$ p.s. et $\mathcal{L}^1$.

Cas particulier :
$r=b=1$ montrons que $R_n\sim\mathcal{U}(\{1,\dots,n+1\})$:

- $R_0\sim\delta_1$ ok
- $\mathbb{P}(R_n=k)=\mathbb{P}\Big((R_{n-1}=k-1)\cap\{\text{un rouge se divise}\}\Big)+\mathbb{P}\Big(\{R_n=k\}\cap\{\text{un bleu se divise}\}\Big)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{R_{n-1}=k-1\}\cap\{\text{un rouge se divise}\}) &= \mathbb{P}\left(\{R_{n-1}=k-1\}\cap\left\{X_n\leqslant\frac{R_{n-1}}{R_{n-1}+B_{n-1}}\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(R_{n-1}=k-1, X_n\leqslant\frac{k-1}{1+1+n-1}\right)\\
&= \mathbb{P}\Big(\underbrace{R_{n-1}=k-1},\ \underbrace{X_n\leqslant\frac{k-1}{1+n}}\Big)\\
&\underset{\text{idp}}{=} \frac{1}{n}\frac{k-1}{1+n} \quad \text{car HR } R_{n+1}\sim\mathcal{U}(1,n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{P}(R_n=k) &= \frac{1}{n}\frac{k-1}{1+n}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{1+n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{k-1+n+1-k}{n+}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Le calcul reste vrai pour $k = 1$ ou $k = n+1$ avec les termes nuls. Alors :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant t) = \mathbb{P}(R_n \leqslant t(n+2)) = \frac{\lfloor t(n+2) \rfloor}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$$

Donc :

$$F_{Y_\infty}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{donc } Y_\infty \sim \mathcal{U}([0,1])$$

Résulat général :

$$Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}^1 \text{ et p.s.}} Y_\infty \sim c_{r,b} x^{r-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{0 \leqslant x \leqslant 1} dx$$

Si T est un temps d'arrêt $\Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et X un processus avec $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} X$ on définit :

$$X_T = \sum_n X_n \mathbb{1}_{T=n} + X_\infty \mathbb{1}_{T=\infty}$$

Théorème 5

Si M est une martingale UI alors on a :

$$M_T = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_T]$$

En particulier $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
($M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} M_\infty$ p.s. et $\mathcal{L}^1$ et $M_n = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_n]$)

Remarque. Ruine du joueur : $S^x_{n \wedge T_{\{0,L\}}}$ est borné $\in [0, L]$ donc est UI et on a donc $\mathbb{E}[S_{T\{0,L\}}] = \mathbb{E}[S^x_0]$.

Preuve.

$M_T \in \mathcal{L}^1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_T|] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[\underbrace{|M_n|}_{*} \mathbb{1}_{T=n}\big] + \mathbb{E}\big[|M_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}\big] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\big|\mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_n]\big| \mathbb{1}_{T=n}\right] + \mathbb{E}\big[|M_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}\big] \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[|M_\infty| | \mathcal{F}_n\big] \underbrace{\mathbb{1}_{T=n}}_{\mathcal{F}_n-\text{mesurable car } T \text{ TA}}\Big] + \mathbb{E}\big[|M_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}\big] \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[|M_\infty| \mathbb{1}_{T=n}\big] + \mathbb{E}\big[|M_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[|M_\infty|\big] < +\infty
\end{aligned}$$

Calculons pour $A \in \mathcal{F}_T$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_A] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T=n}] + \mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T=\infty}] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n]\underbrace{\mathbb{1}_{A\cap(T=n)}}_{*}\big] + \mathbb{E}[M_\infty \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T=\infty}] \quad * \in \mathcal{F}_n \text{ car } A \in \mathcal{F}_n \text{ et } T \text{ TA} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[M_\infty \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T=n}\big] + \mathbb{E}[M_\infty \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{T=\infty}] \\
&= \mathbb{E}[M_\infty \mathbb{1}_A]
\end{aligned}$$

M_T est $\mathcal{F}_T-$mesurable donc $M_T = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T]$. D'où :

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_n]$$

4.4 Convergence $\mathcal{L}^p$

Point délicat. Contrôler la trajection à partir de la loi. Pour $\mathcal{L}^1$ c'est l'inégalité des montées. Ici :

Propriété 6 (inégalité maximale)

Si X sous-martingale, $t > 0$ alors :

$$t\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k > t\right) \leqslant \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant t}\right] \leqslant \mathbb{E}[(X_n)_+]$$

Lemme 6

- Si $\exists c < +\infty$ tel que $S \leqslant T < c$ p.s. où S et T sont des temps d'arrêt
- Si X est une sous-martingale alors $\mathbb{E}[X_S] \leqslant \mathbb{E}[E_T]$

Preuve.

$H_n = \mathbb{1}_{S<n\leqslant T}$ prévisible, borné et positif. Donc $(H \cdot X)$ sous-martingale. $\mathbb{E}[(H\cdot X)_n]$ croissante donc $\mathbb{E}[\underbrace{(H\cdot X)_0}_{=0}] \leqslant \mathbb{E}[(H\cdot X)_c]$. Or,

$$\mathbb{E}[(H\cdot X)_c] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=s+1}^{T} (X_n - X_{n-1})\right] = \mathbb{E}[X_T - X_S] \qquad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_S] \leqslant \mathbb{E}[X_T]$$

□

Preuve. (de la propriété)

Posons $T = \inf\{n \mid X_n > t\}$. Alors $T \wedge n$ et n sont deux temps d'arrêt bornés ; $T \wedge n \leqslant n$. D'où :

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] \leqslant \mathbb{E}[X_n]$$
$$\mathbb{E}[\underbrace{X_T}_{>t} \mathbb{1}_{T\leqslant n}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{T>n}] \leqslant \mathbb{E}[X_n]$$

Donc $\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{T\leqslant n}] \geqslant t\mathbb{P}(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_t > t)$. Ainsi,

$$t\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k > t\right) + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{T>n}] \leqslant \mathbb{E}[X_n]$$
$$\Rightarrow \quad t\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k > t\right) \leqslant \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{T\leqslant n}]$$

□

Propriété 7

$p > 1$, X sous-martingale positive, bornée dans $\mathcal{L}^p$ (i.e. $\sup \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty$). Posons $\tilde{X}_n := \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k|$. Alors :

$$\mathbb{E}\big[|\tilde{X}_n|^p\big] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big]$$

Preuve.
On sait que $t\mathbb{P}(\tilde{X}_n > t) \leqslant \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\tilde{X}_n > t}\right]$ alors :

$$t^{p-2} t\mathbb{P}(\tilde{X}_n > t) \leqslant \mathbb{E}\left[X_n t^{p-2} \mathbb{1}_{\tilde{X}_n > t}\right]$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(\tilde{X}_n > t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[X_n t^{p-2} \mathbb{1}_{\tilde{X}_n > t}\right]$$

Or, on a classiquement que $\mathbb{E}[X^p] = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt$ puisque :

$$\begin{aligned}
p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt &= p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X>t}]dt \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{1}_{X>t}dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{X} pt^{p-1}dt\right] \\
&= \mathbb{E}[X^p]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[\tilde{X}_n^p]}{p} &\leqslant \mathbb{E}\left[X_n \int_0^{+\infty} t^{p-2}\mathbb{1}_{t\leqslant \tilde{X}_n} dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_n \frac{\tilde{X}_n^{p-1}}{p-1}\right] \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leqslant} \frac{1}{p-1}\mathbb{E}[X_n^p]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left[(\tilde{X}_n)^{\frac{(p-1)p}{n-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}[\tilde{X}_n^p] \leqslant \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[(X_n)^p]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}[(\tilde{X}_n)^p]^{1-\frac{1}{p}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{E}[\tilde{X}_n^p])^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[(X_n)^p]^{\frac{1}{p}}$$

□

Théorème 6

X martingale bornée dans $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, $\sup \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty$. Alors si $\tilde{X}_n = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k|$:

- $\tilde{X}_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |X_k| \in \mathcal{L}^p$
- $\exists X_\infty$ tel que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_\infty$ p.s. et $\mathcal{L}^p$ et :

$$\mathbb{E}\big[|\tilde{X}_n|^p\big] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] \qquad \mathbb{E}\big[|\tilde{X}_\infty|^p\big] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_\infty|^p\big]$$

Preuve.

- X_n est bornée dans $\mathcal{L}^1$ donc $\exists X_\infty$ tel que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_\infty$

$$\mathbb{E}\big[|X_\infty|^p\big] = \mathbb{E}\big[\liminf |X_n|^p\big] \underset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] < +\infty$$

  donc $X_\infty \in \mathcal{L}^p$

- $x \mapsto |x|$ convexe donc $(|X_n|)_{n\infty}$ est une sous-martingale > 0. Donc par le résultat précedent :

$$\mathbb{E}\left(|\tilde{X}_n|^p\right) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]$$

$\tilde{X}_\infty = \lim \uparrow \tilde{X}_n$ donc par TCM :

$$\mathbb{E}\big(|\tilde{X}_n|^p\big) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] \qquad (*)$$

Donc $\tilde{X}_\infty \in \mathcal{L}^p$. Par ailleurs :

$$\tilde{X}_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \geqslant X_n \forall n \text{ p.s.} \qquad \text{et donc } \tilde{X}_\infty \geqslant X_\infty \text{ p.s.}$$

Donc $\mathbb{E}\left[|X_n - X_\infty|^p\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$, et donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} X_\infty$.

- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X_\infty \Rightarrow |X_n - X_\infty| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ p.s.
- $|X_n - X_\infty|^p \leqslant |2\tilde{X}_\infty|^p = 2^p X_\infty^p$ intégrable

Enfin $x \mapsto |x|^p$ convexe donc $|X_n|^p$ est une sous-martingale donc $\mathbb{E}\big[|X_n|^p\big]$ croissant. Donc :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] = \lim_n \uparrow \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] = \mathbb{E}\big[|X_\infty|^p\big] \quad \text{car } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} X_\infty$$

D'après $(*)$:

$$\mathbb{E}\big[|\tilde{X}_\infty|^p\big] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_\infty|^p\big]$$

□

Application à Galton-Watson.

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_n = X_1^n + \ldots + X_{S_{n-1}}^n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$$

avec $(x_i^n)_{i\geqslant 1, n\geqslant 1}$ i.i.d. de loi μ probabilité sur $\mathbb{N}$. Si $m := \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mu(\{k\}) = \mathbb{E}[X_i^m] < +\infty$ alors $Y_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est une martingale positive.

$$\Rightarrow \ Y_n = \frac{Z_n}{m^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y_\infty$$

On en avait déduit que si $m \leqslant 1$ et $\mu \neq \delta_1$ alors ($Z_n = 0$ pour n assez grand) p.s.

Si $m > 1$, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y_\infty$. On veut prouver qu'il y a survie avec probabilité > 0, il faut montrer que $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) > 0$.

Problème : sous ces hypothèses ce n'est pas toujours vrai. Supposons cependant que $\sum k^2\mu(\{k\})$ est finie (ou de manière équivalente $\mathbb{E}\big[(X_1^0)^2\big] < +\infty$). Calculons $\mathbb{E}[Z_n^2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(X_1^n + \ldots + X_k^n)^2 \mathbb{1}_{Z_{n-1}=k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}(X_j^n)^2 + \sum_{1\leqslant j\neq j'\leqslant k} X_j^n X_{j'}^n\right)\mathbb{1}_{Z_{n-1}=k}\right] \\
&\underset{\text{idp}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k}(X_j^n)^2 + \sum_{1\leqslant j\neq j'\leqslant k} X_j^n X_{j'}^n\right]\mathbb{P}(Z_{n-1}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}\left[(X_j^n)^2\right] + \sum_{1\leqslant j\neq j'\leqslant k}\mathbb{E}[X_j^n]\mathbb{E}[X_{j'}^n]\right)\mathbb{P}(Z_{n-1}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(k\mathbb{E}\left[(X_1^n)^2\right] + k(k-1)m^2\right)\mathbb{P}(Z_{n-1}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(Z_{n-1}=k)\mathrm{Var}(X_1^n) + \sum_{k=0}^{+\infty}k^2m^2\mathbb{P}(Z_{n-1}=k) \\
&= \mathbb{E}[Z_{n-1}]\mathrm{Var}(X_1^n) + \mathbb{E}[Z_{n-1}^2]m^2
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[Z_n^2] = m^{n-1}\sigma^2 + m^2\mathbb{E}[Z_{n-1}^2]$ où $\sigma^2 = \mathbb{E}\big[(X_1^1)^2\big]$. Par récurrence, comme $\mathbb{E}[Z_0^2] = 1$, $Z_n \in \mathcal{L}^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n^2] = \frac{\mathbb{E}[Z_n^2]}{m^{2n}} &= \frac{\sigma^2}{m^{n+1}} + \mathbb{E}[Y_{n-1}^2] \\
&= \sigma^2\left(\frac{1}{m^{n+1}} + \frac{1}{m^n} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right) \\
&= \sigma^2\frac{\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{1 - \frac{1}{m}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2\frac{m}{m-1}
\end{aligned}$$

Donc Y_n est une martingale bornée dans $\mathcal{L}^2$. $Y_n \xrightarrow[2\to+\infty]{L^1} Y_\infty$, donc $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} Y_\infty$. Donc $\mathbb{E}[Y_\infty] = \mathbb{E}[Y_0] = 1$. Ainsi $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) > 0$. Sur cet événement $Z_n \sim m^nY_\infty$. Alors avec probabilité > 0 il y a explosion exponentielle de la population à vitesse m^n.