Équations aux dérivées partielles

Chapitre 4 : Différences finies en 2D

Lucie Le Briquer

1 Introduction

$$u_{xx} + u_{yy} = f \tag{1}$$
$$-\Delta u = f \tag{2}$$

où $\Delta u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
Notons :

$$v_{l,m} = u(lh, mh)$$

Schéma approchant (1) :

$$\frac{v_{l+1,m} + v_{l-1,m} - 2v_{l,m}}{h^2} + \frac{v_{l,m+1} + v_{l,m-1} - 2v_{l,m}}{h^2} = f_{l,m}$$

C'est un schéma à 5 points. On note $(\Delta_h v)_{l,m} = \frac{v_{l+1,m}+v_{l-1,m}-2v_{l,m}}{k^2} + \frac{v_{l,m+1}+v_{l,m-1}-2v_{l,m}}{h^2}$.

Théorème 1

Si $\Delta_h v \geq 0$ sur une région bornée de $\mathbb{Z}^2$ alors le maximum de v est atteint sur la frontière de cette région.

Corollaire 2

Si $\Delta_h v \leq 0$ le minimum de v est atteint sur la frontière.

Preuve.
Preuve du corollaire : il suffit de changer v et $-v$ dans le théorème. $\square$

Preuve.
Preuve du théorème : Soit $\mathcal{R} \subset [-N, N]^2$

$$(l,m) \in \mathring{\mathcal{R}} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (l+1,m), (l-1,m), (l,m+1), (l,m-1) \in \mathcal{R}$$

On note $\partial\mathcal{R} = \mathcal{R} \backslash \mathring{\mathcal{R}}$.

Soit v_{l_0,m_0} le maximum de v sur $\mathcal{R}$.

$$v_{l_0,m_0} \leq \frac{v_{l_0+1,m_0} + v_{l_0-1,m_0} + v_{l_0,m_0+1} + v_{l_0,m_0-1}}{4}$$

1. $(l_0, m_0) \in \partial\mathcal{R}$
2. $(l_0, m_0) \notin \overset{\circ}{\mathcal{R}} \Rightarrow v_{l_0+1,m_0} = v_{l_0-1,m_0} = v_{l_0,m_0+1} = v_{l_0,m_0-1}$

□

Théorème 3

Si $v_{l,m} = 0$ sur $\partial[0,N]^2$ avec $L = Nh$, alors :

$$\|v\|_\infty \leq \frac{L^2}{8}\|\Delta_h v\|_\infty \tag{3}$$

Preuve.

$$\|v\|_\infty = \max_{(l,m)\in[0,N]^2} |v_{l,m}| \quad \text{et} \quad \|\Delta_h v\|_\infty = \max_{(l,m)\in\overset{\circ}{[0,N]^2}} |(\Delta_h v)_{l,m}|$$

Soit :

$$w(x,y) = \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{L}{2}\right)^2\right] \qquad (\Delta w = 1)$$

Notons $w_{l,m} = w(lh, mh)$. Alors $(\Delta_h w)_{l,m} = 1$

$$-(\Delta_h w)(\|\Delta_h v\|_\infty) \leq (\Delta_h v)_{l,m} \leq \|\Delta_h v\|_\infty(\Delta_h w)$$

$$\Delta_h(v + \|\Delta_h v\|_\infty w) \geq 0$$

D'après le théorème 1 :

$$v + \|\Delta_h v\|_\infty w \leq \|\Delta_h v\|_\infty \underbrace{\max_{\partial[0,N]^2} w}_{\leq L^2/8}$$

Donc $v \leq \frac{L^2}{8}\|\Delta_h v\|_\infty$ et $-v \leq \frac{L^2}{8}\|\Delta_h v\|_\infty$ □

Théorème 4

Soit u tel que $+\Delta u = f$ sur $Q = [0,L]^2$. Soit v tel que $(\Delta_h v)_{l,m} = (f)_{l,m}$ avec $v_{l,m} = u(lh, mh)$ sur ∂Q. Alors $\exists C$ tq :

$$\|u - v\|_\infty \leq Ch^2\|\nabla^4 u\|_\infty \tag{4}$$

où :

$$\|\nabla^4 u\|_\infty = \sup_{\alpha+\beta=4}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right\|_{\infty,Q}$$

Preuve.
$u = u(x,y)$ et $\bar{u} = u(lh, mh)$, on a $\Delta_h \bar{u} = \bar{f} + O(h^2)$. Par le théorème 3 on a :

$$\|\Delta_h \bar{u} - \bar{f}\|_\infty \leq Ch^2 \|\Delta^4 u\|_\infty$$

Or :
$$\frac{u((l+1)h, mh) + u((l-1)h, mh) - 2u(lh, mh)}{h^2} = \int_0^2 \theta^m \frac{\partial^4 u}{\partial X^4}(lh + \theta h, mh) d\theta$$

On a :

- $\bar{u} - u = 0$ sur ∂Q
- $\bar{f} = \Delta_h v$

$\|\Delta_h(\bar{u} - v)\|_\infty \leq Ch^2 \|\nabla^4 u\|_\infty$ et $\bar{u} - v = 0$ sur ∂Q $\square$

2 Matrice Bande

On appelle *matrice pleine* une matrice contenant “peu” de coefficients nuls, une matrice *creuse* le contraire.

Exemple.
Exemple le plus simple de matrices creuses :
Matrice bande : $\exists p \geq 1$ tq $|i-j| \geq p \Rightarrow a_{ij} = 0$. La largeur de bande est $2p+1$.

Rappel. (décomposition LU)
$A(n,n)$ $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ inversible. Alors $\exists L$ triangulaire inférieure (n,n), $L_{i,i} = 1$, $\exists U$ triangulaire supérieur (n,n) telles que $A = LU$. Si de plus A est de largeur de bande $2p-1$ on peut assurer que L et U le sont aussi.
cf. Schatzman interéditions
$Ax = b$

- $\frac{2n^3}{3}$ opérations pour factoriser A sous forme LU
- $L(Ux) = b \Leftrightarrow Ly = b$ et $Ux = y$ en $2n^2$ opérations

Donc $\frac{2n^3}{3} + 2n^2$ opérations au total.
Pour une matrice *bande* $2p-1$:

- $A = LU$ en $(2(p-1)^2 + p - 1)n$ opérations
- $LUx = b$ en $(4p-3)n$ opérations

D’où $(2(p-1)^2 + 5p - 4)n$ opérations.