Optimisation et optimisation numérique
TD2

Lucie Le Briquer

16 janvier 2018

Exercice 1 (condition suffisante d'ordre 2)

$J\colon U\subset E\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable en x telle que $J'(x)=0$.

1. Supposons que $J''(x)$ existe et qu'il existe $\alpha>0$ tel que $J''(x)(v,v)\geqslant\alpha|v|^2\ \forall v\in E$.

$$J(x+v)=J(x)+J''(x)(v,v)+|v|^2\varepsilon(v)\geqslant J(x)+\left(\frac{1}{2}\alpha+\varepsilon(v)\right)|v|^2$$

   $\exists r>0$, tel que pour $v\in\mathcal{B}(0,r)$: $\frac{1}{2}\alpha+\varepsilon(v)>0$.

2. Soit C une boule ouverte de centre x telle que $C\subset B$. Soit $y\in C$. Posons :

$$\varphi\colon\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & J((1-t)x+ty)\end{array}\right.$$

   $J(y)=\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\int_0^1(1-t)\varphi''(t)dt$

$$\varphi'(t)=J'((1-t)x+ty)(y-x)\qquad\varphi''(t)=J''((1-t)x+ty)(y-x,y-x)$$

   Donc $J(y)=J(x)+\int_0^1(1-t)J''((1-t)x+ty)(y-x,y-x)dt\geqslant J(x)$ car $\forall t\in[0,1],\ (1-t)x+ty\in C$ puisque C est convexe.

Exercice 2 (minima d'une fonction convexe)

1. Soient $x_1,x_2\in S$ et $t\in[0,1]$.

$$J(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tJ(x_1)+(1-t)J(x_2)=\inf J$$

   donc $x_0=tx_1+(1-t)x_2$ est un minimum global de J, i.e. $x_0\in S$. S est donc convexe.

   Montrons que $x_*\in S$. Par l'absurde, si $x_*\notin S$, il existe $y_*\in C$ tel que $J(y_*)<J(x_*)$. Alors $\forall t\in]0,1[$,

$$J(tx_*+(1-t)y_*)\leqslant tJ(x_*)+(1-t)J(y_*)<J(x_*)$$

   Pour t suffisamment petit, on obtient un voisinage de x_* tel que J prenne une valeur strictement inférieure à $J(x_*)$. Absurde.

2. Par l'absurde, supposons qu'il existe $y_*\in S$ avec $y_*\neq x_*$. Par convexité de S, on a $[x_*,y_*]\subset S$, donc J est constante sur ce segment. Absurde par stricte convexité.

Exercice 3 (normes matricielles)

1. $$\|A\|_1 = \sup_{v, \|v\|_1=1} \|Av\|_1 = \sup_{v, \sum |v_k|=1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right|$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 \leqslant \sup_{v, \sum |v_k|=1} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}||v_j| &\leqslant \sup_{v, \|v\|=1} \sum_{j=1}^n |v_j| \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \\ &\leqslant \sup_{v, \|v\|=1} \sum_{j=1}^n |v_j| \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \end{aligned}$$

   On atteint le maximum pour $v = (v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ avec :

$$v_j = \mathbb{1}_{j = \mathrm{argmin}_i \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|}$$

2. On a $\langle Av, Av \rangle = \bar{v}^T A^* A v$ avec $A^* A$ symétrique réelle donc diagonalisable dans une b.o.n. Ainsi :

$$\|A\|_2^2 = \sup_{v \in \mathcal{C}, \|v\|_2=1} \bar{v}^T D v = \sup_{v, \|v\|_2=1} \sum_i \lambda_i |v_i|^2$$

   Donc $\|A\|_2^2 \leqslant \sup_i \lambda_i = \rho(A^* A)$. Et pour $v = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec :

$$v_i = \mathbb{1}_{i = \mathrm{argmin}_j \sup \lambda_i}$$

   on atteint cette borne.

3. À faire.

4. $U \in O_n(\mathbb{C})$ i.e. $U^* U = I$. Alors :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{C}} \frac{\|AUx\|}{\|Ux\|} = \sup_{x \in \mathbb{C}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|_2$$

5. À faire.

6. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $v \in E_\lambda(A)$.

$$\frac{\|Av\|}{\|v\|} = |\lambda| \leqslant \mathrm{Sp}(A)$$

   En particulier pour $|\lambda| = \rho(A)$. Donc $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

Exercice 4 (conditionnement de systèmes linéaires)

On a $b = Au$, $\delta b = A \delta u$, $A^{-1} \delta b = \delta u$. Ainsi :

$$\|b\| \leqslant \|A\| \|u\| \qquad \|\delta u\| \leqslant \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

Ainsi :

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\|\delta u\| \|A\|}{\|b\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$