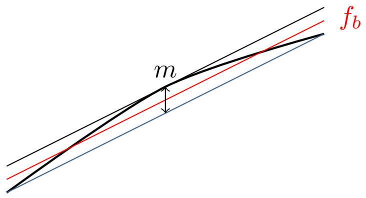
Images - TD3

Lucie Le Briquer

5 février 2018

Exercice 4.0

1. On prend γ assez grand, $\gamma < 256$ de sorte que $\ln_2$ ressemble à une droite sur $]\gamma, 256[$. Prenons :
$$a = \frac{\ln_2(256) - \ln_2(\gamma)}{256 - \gamma}$$



et considérons $f(x) = ax + c$ où $c = \ln_2 \gamma - a\gamma$. Soit $m = \| \ln_2 - f\|_{\infty,]\gamma, 256[}$ et $b = c + \frac{m}{2}$. On pose alors $f_b(x) = ax + b$.

2. $d = \ln_2 - f$, $d'(x) = \frac{1}{\ln(2)x} - a$ alors $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(2)a} = x_m$ $(m = d(x_m))$. Pour $\gamma = 128$:
$$\alpha(\gamma) = \frac{m/2}{\ln_2(256) - \ln_2(128)} \simeq 4.3\%$$

Exercice 4.1

1. $G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$. $G_\sigma \geqslant 0$ donc pour intégrer on pourra faire un changement de variable et utiliser Fubini. Soit :
$$I = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x, y) dx dy$$
Faisons le changement de variable $(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$.
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[-\sigma^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{-(-\sigma^2)}{\sigma^2} = 1 \end{aligned}$$

2. G_σ est intégrable, on pourra donc utiliser Fubini dans les prochains calculs.

$$\begin{aligned}\hat{G_\sigma}(\xi,\eta) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)-ix\xi-iy\eta}dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-ix\xi}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}-iy\eta}dy\right)\end{aligned}$$

On a juste à étudier le cas 1D. Posons :

$$I(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-ix\xi}dx\right)$$

Écrivons :

$$\frac{x^2}{2\sigma^2} + ix\xi = \frac{1}{2\sigma^2}\left[(x+i\sigma^2\xi)^2 + \sigma^4\xi^2\right]$$

Ainsi,

$$I(\xi) = e^{-\xi^2\sigma^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+i\sigma^2\xi)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Soit :

$$J(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+i\sigma^2\xi)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Si $\xi \in i\mathbb{R}$, $i\xi \in \mathbb{R}$ donc on va pouvoir faire une translation (changement de variable affine) qui donnera $J(\xi) = \sqrt{2\pi\sigma^2}$. J est holomorphe et $J - \sqrt{2\pi\sigma^2} = 0$ sur $i\mathbb{R}$ donc par le théorème des zéros isolés des fonctions holomorphes $J - \sqrt{2\pi\sigma^2} = 0$ sur $\mathbb{C}$. Donc :

$$\hat{G_\sigma}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}I(\xi)I(\eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)\sigma^2/2}$$

3.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)dy$$

$$\begin{aligned}f*(g*h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)(g*h)(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)h(x-y-z)dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y-t)d(t)dtdy \quad \text{par } t = x-y-z \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y-t)h(t)dydt \quad \text{par Fubini-Lebesgue} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(t)(f*g)(x-t)dt \\ &= (f*g)*h(x)\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
G_\sigma * G_\tau &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\tau^2}}}{(2\pi)^2\sigma^2\tau^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)+\frac{\langle x,y\rangle}{\tau^2}-\frac{\|x\|^2}{2\tau^2}\right)}{(2\pi)^2\sigma^2\tau^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\exp\left(-\left\|y-\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}x\right\|^2 \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\sigma^2\tau^2}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\frac{\|x\|^2}{2\tau^2}-\frac{\|x^2\|}{2\tau^2}\right)}{(2\pi)^2\sigma^2\tau^2} dy \\
&\underset{\text{Q1}}{=} \frac{\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\tau^2}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}\right)\right)}{2\pi(\sigma^2+\tau^2)} \\
&= G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}(x)
\end{aligned}
$$

Exercice 4.2

Soit $p > 0$

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^{-p/2} = \|X\|_2^{-p}$$

F est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, positive.

1. Sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)$, on effectue le changement de variable $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\int_0^1 \int_0^1 F(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 rr^{-p}drd\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{p-1}}dr$$

$< +\infty \;\Leftrightarrow\; p-1 < 1 \;\Leftrightarrow\; p < 2.$

2. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)$.

$$\int_{\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} F(x,y)dxdy = \int_1^{+\infty}\int_0^{2\pi} rr^{-p}drd\theta = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{p-1}}dr$$

$< +\infty \;\Leftrightarrow\; p-1 > 1 \;\Leftrightarrow\; p > 2.$

Exercice 4.y

$$R_{HSR_i}(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \log I(x,y) - F_n * \log(I(x,y))$$

où $F(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma_n^2}\right)$. $\sigma_1 = 15, \sigma_2 = 80, \sigma_3 = 250$. On considère :

$$F_1(x,y) + F_2(x,y) + F_3(x,y)$$

la somme de ces trois gaussiennes.

Exercice 4.3

Pour une image $(u_{m,n})$ avec $0 \leqslant m \leqslant M-1$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$. On définit les coefficients de Fourier discrets par :

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{m,n} e^{-\frac{2i\pi mk}{M}} e^{-\frac{2i\pi nl}{N}} \qquad \text{pour } (k,l) \in [\![0, M-1]\!] \times [\![0, N-1]\!]$$

Transformée inverse :

$$u_{m,n} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{u}_{k,l} e^{\frac{2i\pi mk}{M}} e^{\frac{2i\pi nl}{N}}$$

1.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{u}_{k,l} e^{\frac{2i\pi mk}{M}} e^{\frac{2i\pi nl}{N}} &= \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} u_{p,q} e^{-\frac{2i\pi pk}{M}} e^{\frac{2i\pi ql}{N}} e^{\frac{2i\pi mk}{M}} e^{\frac{2i\pi nl}{N}} \\
&= \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} \frac{u_{p,q}}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(m-p)k}{M}} e^{\frac{2i\pi(n-q)l}{N}} \\
&= \frac{u_{m,n}}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} 1 = u_{m,n}
\end{aligned}$$

   La définition de la transformée inverse est donc correcte, $\text{IDFT}(\text{DFT}(u_{m,n})) = u_{m,n}$ et de même $\text{DFT}(\text{IDFT}(u_{m,n})) = u_{m,n}$.

2.
$$\hat{u}_{m,n} = \tilde{u}_{m+\frac{M}{2}, n+\frac{N}{2}} e^{\frac{2i\pi \frac{M}{2}}{M}} e^{\frac{2i\pi \frac{N}{2}}{N}}$$

3. Par la formule précédente, on en déduit que les coefficients $(\hat{u}_{k,l})$ sont une discrétisation des coefficients de Fourier sur $[\![0, M-1]\!] \times [\![0, N-1]\!]$.

Exercice 4.4

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{u}_{k,m} \exp\left(\frac{2\pi ikx}{M}\right) \exp\left(\frac{2i\pi ly}{N}\right)$$

On a bien $u(m,n) = u_{m,n}$. On montre que :

$$\varphi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{NM} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{NM} \\ (\hat{u}_{k,nl}) & \longmapsto & (u(m,n))_{n,m} \end{array} \right.$$

est une application linéaire, surjective en dimension finie donc bijective. Ainsi u est unique.

Exercice 5.1

1. 5.3 avec $v = \nabla u$ donne 5.4
2. Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\varphi &= \int\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)v_1(x,y)dxdy + \int\int \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)v_2(x,y)dydx \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \int_c^d \left(\varphi(b,y)v_1(b,y) - \varphi(a,y)v_1(a,y) - \int_a^b \varphi(x,y)\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y)dx\right)dy \\
&\quad + \int_a^b \left(\varphi(x,d)v_2(x,d) - \varphi(x,c)v_2(x,c) - \int_c^d \varphi(x,y)\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)dy\right)dx \\
&= -\int_\Omega \varphi \div v + \int_{\partial\Omega} \varphi v.\vec{n}
\end{aligned}$$

3. φ, v définis sur le triangle inférieur, on les prolonge sur le rectangle via $\varphi(x)$
4. Soient Ω_1, Ω_2 ouverts disjoints. Sur Ω_1,

$$\int_{\Omega_1} \nabla\varphi.v = \int_{\partial\Omega_1} \varphi v\vec{n}_1 - \int_{\Omega_1} \varphi \text{div} v$$

Sur Ω_2,

$$\int_{\Omega_2} \nabla\varphi.v = \int_{\partial\Omega_2} \varphi v\vec{n}_2 - \int_{\Omega_1} \varphi \text{div} v$$

Ainsi,

$$\underbrace{\int_{\Omega_1} \nabla\varphi v \int_{\Omega_2} \nabla\varphi v}_{\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} \nabla\varphi v} = \underbrace{\int_{\partial\Omega_1} \varphi v\vec{n}_1 + \int_{\partial\Omega_2} \varphi v\vec{n}_2}_{A} \underbrace{- \int_{\Omega_1} \varphi\text{div} v - \int_{\Omega_2} \varphi\text{div} v}_{-\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} \varphi\text{div} v}$$

Or,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\partial\Omega_1\setminus(\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2)} \varphi v\vec{n}_1 + \int_{\partial\Omega_2\setminus(\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2)} \varphi v\vec{n}_2 \\
&\quad + \underbrace{\int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \varphi v\vec{n}_1 + \int_{\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \varphi v\vec{n}_2}_{=0 \text{ car } \vec{n}_1=-\vec{n}_2} \\
&= \int_{(\Omega_1\cup\partial\Omega_2)\setminus(\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2)} \varphi v\vec{n} \\
&= \int_{\partial(\Omega_1\cup\Omega_2)} \varphi v\vec{n}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\in_{\Omega_1\cup\Omega_2} \nabla\varphi v = \int_{\partial(\Omega_1\cup\Omega_2)} \varphi v\vec{n} - \int_{\Omega_1\cup\Omega_2} \varphi\text{div} v$$