Analyse
Chapitre 1 : Espaces vectoriels topologiques

Lucie Le Briquer

5 novembre 2018

Table des matières

1 Espaces vectoriels normés **2**

2 Parties convexes, bornées, équilibrées **5**

3 Espaces de dimension finie **6**
3.1 Compacité et dimension finie 6
3.2 Unicité de la topologie en dimension finie 7

4 Théorème de Baire **8**

5 Théorèmes de Banach **9**

6 L'espace des fonctions continues **13**
6.1 Théorème d'Arzela-Ascoli 13
6.2 Théorème de Stone-Weierstrass 15
6.3 Continuité et convergence simple 17

Définition 1 (espace vectoriel topologique)

E un $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un espace vectoriel topologique s'il est muni d'une topologie compatible avec sa structure algébrique i.e. si l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ et la dilatation $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ sont continues.

1 Espaces vectoriels normés

Définition 2 (semi-norme)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. $\rho\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si

1. $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$
2. $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$

Si de plus $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, alors ρ est une norme.

On note $\|.\|$ une norme. Si $\|.\|$ est une norme sur E alors $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance. En effet :

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$
3. $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$

Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n. on munit E de la topologie induite par la distance. Une base de voisinages est :

$$\{\mathcal{B}(x, r),\ x \in E,\ r > 0\} \quad \text{où} \quad \mathcal{B}(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\}$$

Remarque. Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

Propriété 1

Un e.v.n. est un e.v.t.

Preuve.
Soit $A\colon \begin{cases} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{cases}$.

Montrons que A est continue, i.e. montrons que $A^{-1}(U)$ est un ouvert pour U ouvert.
Soit $(x, y) \in A^{-1}(U)$. $x + y \in U$ donc $\exists\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}(x + y, \delta) \subset U$. Ainsi :

$$\mathcal{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) + \mathcal{B}\left(y, \frac{\delta}{2}\right) \subset U$$

En effet si $\|x' - x\| < \frac{\delta}{2}$ et $\|y' - y\| < \frac{\delta}{2}$ alors $\|x' + y' - (x + y)\| < \delta$, donc :

$$\mathcal{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \times \mathcal{B}\left(y, \frac{\delta}{2}\right) \subset A^{-1}(U)$$

Or $\mathcal{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \times \mathcal{B}\left(y, \frac{\delta}{2}\right)$ est un ouvert de la topologie produit.

Remarque. Rappel, la topologie produit est définie comme suit : $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$, $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, $\pi_\alpha\colon X \longrightarrow X_\alpha$, c'est la topologie minimale qui rend ces applications continues.

Idem pour $B\colon (\lambda, x) \mapsto \lambda x$. ■

Corollaire 1

Les translations $x \mapsto x + u$ et les homothéties $x \mapsto \lambda x$ ($\lambda \neq 0$) sont des homéomorphismes (i.e. des bijections continues, de réciproque continue).

Preuve.

$T_u\colon x \mapsto u + x$ est continue car $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & u + x \end{array} \right.$ est continue.

$(T_u)^{-1} = T_{-u}$ est aussi continue. Idem pour $x \mapsto \lambda x$. ■

Définition 3 (normes équivalents)

Deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que :

$$c_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2 \|x\|_1$$

Remarque. Cela revient à dire que les deux topologies coïncident.

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n. Soit $T\colon E \mapsto F$ linéaire.

Propriété 2

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est continue
2. T est continue à l'origine
3. T est bornée sur un voisinage de l'origine
4. T est bornée, au sens où $\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|T(x)\|_F < +\infty$

Preuve.

(4) $\Rightarrow$ (3) : trivial

(3) $\Rightarrow$ (2) : $T(0) = 0$. On veut montrer que $\forall \rho > 0,\ T^{-1}(\mathcal{B}_F(0, \rho))$ contient une boule $\mathcal{B}_E(0, r)$. $\exists R > 0$, $\exists M > 0$ tels que $\|x\|_E \leqslant R \ \Rightarrow\ \|T(x)\|_F \leqslant M$ par (3). Posons alors $r = \frac{\rho R}{2M}$. Si $\|u\|_E < r$ alors $x = \frac{2M}{\rho} u \in \mathcal{B}_E(0, R)$ donc $\|T(x)\|_F \leqslant M$. $\left\| \frac{2M}{\rho} T(u) \right\|_F \leqslant M$, ainsi $\|T(u)\|_F \leqslant \frac{\rho}{2} < \rho$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : trivial

(2) $\Rightarrow$ (1) : car les translations sont des homéomorphismes donc T continue en tout point, donc (pas trivial) T continue.

(2) $\Rightarrow$ (4) : idem. ■

Définition 4

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'e.v. des applications linéaires continues de $E \longrightarrow F$. C'est un e.v.n. pour la norme :

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \quad \text{notée } \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Remarque. Si $F = E$, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, E)$ alors $T_1 T_2 \in \mathcal{L}(E, E)$ et $\|T_1 T_2\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|T_2\|$.

Définition 5 (dual topologique)

On note E^* (ou E') le dual topologique de E, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 6 (suite de Cauchy)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un e.v.n. E. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \geqslant N,\ \|u_m - u_n\| < \varepsilon$$

Remarque. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Définition 7 (complet)

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Remarque. On a la même définition pour les espaces métriques.

Définition 8 (Banach)

Un espace de Banach est un e.v.n. complet.

Proposition 1

Soit E un e.v.n. quelconque et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Remarque. E^* est de Banach pour tout e.v.n. E car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des Banach.

Preuve.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $x \in E$. On a :

$$\|T_m(x) - T_n(x)\|_F \leqslant \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|_E$$

Donc $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc converge. On note $T(x)$ sa limite. $T\colon x \mapsto T(x)$ est linéaire. Montrons maintenant que T est continue. On utilise le fait que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car de Cauchy, car $\|.\|$-Lipschitz).
$\exists M > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|T_n(x)\| \leqslant M\|x\|$. D'où $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ puis T continue car bornée. Puis, par critère de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall m, n \geqslant N,\ \|T_m(x) - T_n(x)\|_F \leqslant \varepsilon \|x\|_E$$

En faisant tendre $m \longrightarrow +\infty$:

$$\|T(x) - T_n(x)\|_F \leqslant \varepsilon \|x\|_E \quad \Rightarrow \quad \|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$$

■

2 Parties convexes, bornées, équilibrées

Définition 9 (convexe, borné, équilibré)

Soit E e.v.t., $A \subset E$. On dit que :

1. A est convexe si $[x,y] \subset A \ \forall x,y \in A$ où $[x,y] = \{(1-t)x + ty,\ t \in [0,1]\}$
2. A est borné si pour tout voisinage V de 0, $\exists t > 0$ tel que $\forall s \geqslant t \ A \subset sV$
3. A est équilibré si $\forall |\lambda| \leqslant 1 \ \lambda A \subset A$

Définition 10 (normable)

$(E, \mathcal{T})$ e.v.t. est normable s'il existe une norme telle que $\mathcal{T}_{\|.\|} = \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}_{\|.\|}$ est la topologie induite par $\|.\|$.

Proposition 2

Un e.v.t. E est normable ssi il existe un voisinage convexe et borné de l'origine.

Preuve.

Si E est normable avec $\|.\|$ alors $\{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ est convexe borné et voisinage de 0.

Réciproquement, soit C un convexe borné voisinage de l'origine dans E. On veut définir une norme.

Lemme 1

Il existe un convexe équilibré borné U inclus dans C, contenant 0.

Preuve.

Posons

$$\tilde{C} = \bigcap_{|\lambda| \leqslant 1} \lambda C$$

Alors $U = \overset{\circ}{\tilde{C}}$ convient (exercice). ■

On introduit la fonctionnelle de Minkowski :

$$\mu \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \inf\{t > 0 \mid x \in tU\} \end{array} \right.$$

Idée : si $\|.\|$ est une norme alors $\|x\| = \inf\{t > 0 \mid x \in t\mathcal{B}_E(0,1)\}$

Lemme 2

μ est une norme.

Preuve.

$x \in E$. Soit $I(x) = \{t > 0 \mid x \in tU\}$.

- $I(x) \neq \emptyset$ car $\varepsilon x \in U$ pour $|\varepsilon|$ assez petit par continuité, a fortiori $x \in \varepsilon^{-1} U$

- Si $t \in I(x)$ alors $\forall s \geqslant t$, $s \in I(x)$. $x = tu$, $u \in U$:
$$x = s\frac{t}{s}u = s\left[\underbrace{\left(1-\frac{t}{s}\right)0 + \frac{t}{s}u}_{\in U}\right] \in sU$$
Donc $I(x) = [\mu(x), \infty[$ ou $]\mu(x), \infty[$.
- Montrons que $\mu(x+y) \leqslant \mu(x) + \mu(y)$; Soient $t > \mu(x)$ $s > \mu(y)$ alors $x \in tU$ et $y \in sU$. Maintenant :
$$x + y = (s+t)\left[\frac{t}{s+t}(t^{-1}x) + \frac{s}{s+t}(s^{-1}y)\right] \in (s+t)U$$
Ainsi $s + t \in I(x+y)$ donc $\mu(x+y) \leqslant \mu(x) + \mu(y)$.
- $\mu(\lambda x) = \lambda\mu(x)$ $\forall \lambda > 0$ par définition de μ. Puis $\mu(\lambda x) = |\lambda|\mu(x)$ car U est équilibré.
- $\mu(0) = 0$
- $\mu(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. En effet, si $x \neq 0$, comme $\{0\}$ est fermé, il existe un voisinage V de x avec $0 \notin V$, et comme U est borné, il existe $r > 0$ tel que $U \subset rV$. $x \notin r^{-1}U$ et $\mu(x) \geqslant r^{-1}$ par définition de μ.

■

Il reste à justifier que μ est une norme qui convient. Considérons $B = \{rU, r > 0\}$. $\forall V$ voisinage de 0, $\exists \rho > 0$ tel que $\rho U \subset V$. Tout voisinage de 0 contient un élément de B donc B est une base de voisinages de 0. Par ailleurs $rU = B_\mu(0, r)$. □

3 Espaces de dimension finie

3.1 Compacité et dimension finie

Théorème 1 (Riesz)

Soit E un e.v.n. La boule unité fermée est compacte ssi E est de dimension finie.

Lemme 3

Soit F un sous-espace fermé de E, différent de E. Alors pour tout réel $r \in]0, 1[$, il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geqslant r$.

Preuve.
Soit $x \in E \backslash F$. On a $r \in]0, 1[$ donc $\frac{1}{r}d(x, F) > d(x, F)$. Alors $\exists\; y \in F$ tel que $\|x - y\| \leqslant \frac{d(x,F)}{r}$. Posons $u = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$.
On a bien $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geqslant r$ car pour tout $z \in F$:
$$\begin{aligned}\|u - z\| &= \left\|\frac{1}{\|x-y\|}(x-y) - z\right\| \\ &= \frac{1}{\|x-y\|}\,\|x - y - \|x-y\|z\| \\ &\geqslant \frac{1}{\|x-y\|}d(x, F) \quad \text{puisque } y + \|x-y\|z \in F\end{aligned}$$

Donc $\|u - z\| \geqslant r$. ■

Preuve. (du théorème de Riesz)
Par contraposition, supposons E de dimension infinie. On cherche à construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bornée, sans valeur d'adhérence. On en déduira le théorème. On construit (u_n) telle que :

1. $\forall n,\ \|u_n\| = 1$
2. $\forall n, m,\ n \neq m \Rightarrow \|u_n - u_m\| \geqslant \frac{1}{2}$

On choisit u_0 de norme 1, puis par récurrence on définit u_{n+1} grâce au lemme appliqué à F_n le sev engendré par $u_0, ..., u_n$. ■

3.2 Unicité de la topologie en dimension finie

Théorème 2

Soit E un e.v. de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Il existe une unique topologie séparée qui munisse E d'une structure d'e.v.t.

Preuve.
$d = \dim E$, $(e_1, \ldots, e_d)$ base de E.

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

On note $E_c = (E, \|.\|)$. Soit $\mathcal{T}$ une topologie séparée telle que $(E, \mathcal{T})$ est un e.v.t. Montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\|.\|}$. Il suffit de montrer que id est un homéomorphisme.

1. id est continue de (E_c) dans $(E, \mathcal{T})$. Soit $U \in \mathcal{T}$ avec $0 \in U$.

   $$\text{L'application } \left\{ \begin{array}{ccc} E \times \ldots \times E & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_d) & \longmapsto & x_1 + \ldots + x_d \end{array} \right. \text{ étant continue,}$$

   $\exists\ V_1, \ldots, V_d \in \mathcal{T}$ tels que $V_1 + \ldots + V_d \subset U$. Posons alors :

   $$V = \bigcap_{i=1}^{d} V_i \in \mathcal{T} \quad \text{(car intersection finie d'ouverts)}$$

   Par continuité de la dilatation, il existe $r_1, \ldots, r_d > 0$ tels que $|\lambda| \leqslant r_i \ \Rightarrow\ \lambda e_i \in V$. Maintenant si $\|x\| < r = \min r_i$ alors $|x_i| < r$ puis $x_i e_i \in V$. Donc $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \in V + \ldots + V \subset U$. Donc $\mathcal{B}_{\|.\|}(0, r) \subset \mathrm{id}^{-1}(U)$.
2. id est continue de $(E, \mathcal{T})$ dans E_c. Soit V voisinage de 0 dans E_c. Soit $\rho > 0$ tel que $\mathcal{B}_{\|.\|}(0, \rho) \subset V$ et soit $S = \partial\mathcal{B}_{\|.\|}(0, \rho) = \{x \in E \mid \|x\| = \rho\}$. S est fermée bornée, et comme la dimension de $E < +\infty$, S est compacte.

   $\mathrm{id}\colon (E, \|.\|) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ est continue, donc S est compaccte dans $(E, \mathcal{T})$ donc fermée car $\mathcal{T}$ séparée. Donc $E \backslash S \in \mathcal{T}$. Par ailleurs $0 \notin S$ donc $\exists W$ voisinage ouvert de 0 avec $W \cap S = \emptyset$. En fait il existe U ouvert équilibré, $U \subset W$, $0 \in U$.

   $$U := \bigcup_{|\lambda| \leqslant \varepsilon} \lambda W \quad \text{avec } \varepsilon \text{ assez petit}$$

Alors $U \subset V$. Montrons ceci par l'absurde. S'il existe $u \in U \backslash V$, alors $u \notin \mathcal{B}(0,\rho)$ donc $\|u\| \geqslant \rho$. Posons $v = \frac{\rho}{\|u\|}.u$. Alors $v = \lambda u$, $|\lambda| \leqslant 1$ et U équilibré donc $v \in U$. Mais $\|v\| = \rho$ donc $v \in S$ puis $U \cap S \neq \emptyset$.

■

Corollaire 2

En dimension finie on a l'équivalence des normes.

Cours du 25 septembre.

Weierstrass formalise la notion de limites en 1850. + Bolzano $\Rightarrow$ de toute suite réele bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Cauchy (1821,royaliste) : introduit les suites de Cauchy ε, δ.

Dans ce cours on va étudier des résultats de Baire et de Banach.

4 Théorème de Baire

Définition 11 (espace de Baire)

Un espace de Baire est un espace topologique tel que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Proposition 3

Dans un espace de Baire, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Preuve.

$$\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p\right)^C = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p^C$$

F_p fermé donc F_p^C ouvert. F_p est d'intérieur vide donc il n'existe pas V ouvert tel que $V \subset F_p$, ainsi $\forall V$ ouvert $V \cap F_p^C \neq \emptyset$; alors par définition F_p^C est dense.

Donc $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p^C$ dense $\Rightarrow$ $\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p\right)$ est d'intérieur vide. ■

Remarque. $(\mathbb{Q}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$. $(\mathbb{Q}, d)$ n'est pas de Baire par $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$ est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide mais n'est pas d'intérieur vide.

Théorème 3

Tout espace métrique complet est de Baire.

Preuve.
Soit (X, d) un espace métrique complet. $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Montrons que $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense i.e. $\forall V$ ouvert $V \cap \Omega \neq \emptyset$. Soit V un ouvert.

- Ω_0 dense donc $\exists x_0 \in \Omega_0 \cap V$. De plus Ω_0 est ouvert donc $\Omega_0 \cap V$ est ouvert. Ainsi, $\exists \rho_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, \rho_0) \subset \Omega_0 \cap V$. Et donc $\overline{\mathcal{B}(x_0, \rho_0/2)} \subset \Omega_0 \cap V$.
- Ω_1 est dense donc $\Omega_1 \cap \mathcal{B}(x_0, \rho_0/2) \neq \emptyset$. Ainsi, comme précédemment, $\exists x_1 \in X,\ \exists \rho_1 > 0$ tels que :
$$\overline{\mathcal{B}(x_1, \rho_1/2)} \subset \Omega_1 \cap \mathcal{B}(x_0, \rho_0/2)$$
- On construit par récurrence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :
$$\overline{\mathcal{B}(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \mathcal{B}(x_n, r_n) \cap \Omega_{n+1},\ \ 0 < r_n < 2^{-n}$$

Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, si $n \geqslant N$, $p \geqslant N$, alors $x_p, x_n \in \mathcal{B}(x_N, r_N)$. Donc $d(x_n, x_p) \leqslant d(x_n, x_N) + d(x_p, x_N) \leqslant 2^{-N+1}$. Ainsi (x_n) est de Cauchy et converge vers un élément $x \in X$. $\overline{\mathcal{B}(x_N, r_N)}$ fermé et $x_n \in \mathcal{B}(x_N, r_N)$ $\forall n \geqslant N$, alors $x \in \overline{\mathcal{B}(x_N, r_N)}$ $\forall N$. Donc $x \in \Omega_N$ $\forall N \in \mathbb{N}$, ainsi $x \in \Omega$. De plus $x \in \mathcal{B}(x_0, r_0) \subset V$, alors $x \in \Omega \cap V$. ■

5 Théorèmes de Banach

"T linéaire, entre espaces de Banach, alors T est continue"

Définition 12 (espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.

Théorème 4 (Banach-Steinhaus)

Soit E un espace de Banach, soit F un espace vectoriel normé, soit $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille d'applications linéaire continues de E dans F simplement bornée i.e. :
$$\forall x \in A,\ \sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\|_F < +\infty$$
alors cette famille est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$:
$$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$$

Remarque. Bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$ revient à dire :
$$\exists c > 0,\ \forall x \in E, \forall \alpha \in A,\ \|T_\alpha x\|_F \leqslant c\|x\|_E$$

Remarque. Bornée dans $\mathcal{L}(E, F) \Rightarrow$ simplement bornée.

Preuve.

On utilise le théorème de Baire en cherchant à écrire $E = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p$, E_p fermé. Comme E est complet, Baire nous donne que $\exists P \in \mathbb{N}$ tel que E_P est d'intérieur non vide. Ici :

$$E_p = \left\{ x \in E \mid \forall \alpha \in A,\ \|T_\alpha x\|_F \leqslant p \right\}$$

On a bien $E = \bigcup_{p=0}^{+\infty} E_p$ car $\forall x$ on a $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_F < +\infty$.
E_p est fermé car intersection d'images réciproques par une application continue d'un fermé :

$$E_p = \bigcap \varphi_\alpha^{-1}([0,p]) \quad \text{où} \quad \varphi_\alpha \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|T_\alpha \cdot x\|_F \end{array} \right. \quad \text{continue}$$

Donc $\exists P$ tel que E_P est d'intérieur non vide (sinon E le serait). Donc $\exists x_0 \in E,\ \exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, r) \subset E_P$. Ainsi $\forall u \in \mathcal{B}(x_0, r),\ \|T_\alpha u\|_F \leqslant P$.
Soit $x \in E$, $u = x_0 + \frac{r}{2} \frac{1}{\|x\|_E} x \in \mathcal{B}(x_0, r)$. Donc :

$$\left\| T_\alpha \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leqslant P$$

Donc,

$$\left\| T_\alpha \left(\frac{r}{2\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leqslant P + \underbrace{\|T_\alpha x_0\|_F}_{\leqslant P \text{ car } x_0 \in \mathcal{B}(x_0, r)}$$

Finalement,

$$\|T_\alpha x\|_F \leqslant \frac{4P}{r} \|x\|_E \ \forall \alpha \in A$$

■

Corollaire 3

Soient E un espace de Banach et F un e.v.n. et (T_n) une suite d'applications linéaires continues qui converge simplement : $\forall x \in E$ la suite $(T_n x)$ converge vers une limite Tx. Alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Preuve.

- T linéaire par linéarité de la limite
- $\forall x \in E$, $\sup_n \|T_n x\| \mathcal{F} < +\infty$ alors

  $$\exists c > 0 \text{ tq } \forall x \in E,\ \|T_n x\|_F \leqslant c \|x\|_E$$

  d'après Banach-Steinhaus. En passant à la limite, $\|Tx\|_F \leqslant c\|x\|_E$ donc T est continue.

■

Théorème 5 (isomorphisme de Banach)

Soit E, F deux espaces de Banach et $T \colon E \longrightarrow F$ application linéaire continue et bijective. Alors T^{-1} est linéaire continue.

Preuve.
On veut montrer que $\exists c > 0$ tel que $\forall y \in F$, $\|T^{-1}y\|_E \leqslant c\|y\|_F$ i.e. :

$$\begin{aligned} & T^{-1}\big(\mathcal{B}_F(0,1)\big) \subset \mathcal{B}_E(0,c) \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{B}_F(0,1) \subset T\big(\mathcal{B}_E(0,c)\big) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists c' > 0, \mathcal{B}_F(0,c') \subset T\left(\mathcal{B}_E(0,1)\right) \end{aligned}$$

Montrons cette dernière équivalence.

Lemme 4

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(0,r) \subset \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$, alors :

$$\mathcal{B}_F(0,r/2) \subset T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big) \ (*)$$

Preuve.
Soit $y \in \mathcal{B}_F(0,r)$. Alors $y \in \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$, donc $\exists y_0 \in T(\mathcal{B}_E(0,1))$ tel que $\|y - y_0\|_F < r/2$.

Or $(*) \Rightarrow \mathcal{B}_F(0,r/2) \subset \overline{T\left(\mathcal{B}_E(0,1/2)\right)}$. En effet si $v \in \mathcal{B}_R(0,r/2)$, $2v \in \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$ donc $2v = \lim_n Tx_n$ avec $x_n \in \mathcal{B}(0,1)$ donc $v = \lim_n T\left(\frac{1}{2}x_n\right) \Rightarrow\ v \in \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1/2)\big)}$.

On en déduit qu'il existe $y_1 \in T\big(\mathcal{B}_E(0,1/2)\big)$ tel que :

$$\|y - y_0 - y_1\|_F \leqslant \frac{r}{4}$$

On construit par récurrence une suite y_n telle que :

1. $y_n \in T\big(\mathcal{B}_E(0,2^{-n})\big)$
2. $\|y - y_0 - \ldots - y_n\| \leqslant \frac{r}{2^{n+1}}$

Posons $x_n = T^{-1}y_n \in \mathcal{B}(0,2^{-n})$. On a :

$$\sum_N \|x_n\|_E \leqslant \sum_{\mathbb{N}} 2^{-n} < +\infty$$

Donc la série $\sum x_n$ converge normalement et donc converge car E est un espace de Banach. Posons $z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Alors $\|z\|_E < 2$ puisque $\sum 2^{-k} = 2$ et $\|x_k\| < 2^{-k}$, et $Tz = y$ car $\|y - TS_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par construction.

Donc $\mathcal{B}_F(0,r) \subset T\big(\mathcal{B}_E(0,2)\big)$ donc $\mathcal{B}_F(0,r/2) \subset T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)$. ■

Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_F(0,c) \subset \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$$

On va utiliser le fait que F est un Banach et le théorème de Baire. On écrit $F = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$ avec F_p fermé, prenons :

$$F_p = \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,p)\big)} = p\overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$$

On a bien $F = \bigcup F_p$ car T surjective. D'après Baire on obtient que $\overline{T\big(\mathcal{B}(0,1)\big)}$ est d'intérieur non vide. Donc $\exists y_0 \in F$ et $r > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}(y_0, r) \subset \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$$

En particulier $y_0 = \lim Tx_n$ avec $x_n \in \mathcal{B}_E(0,1)$. D'où $-y_0 = \lim T(-x_n) \in \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)}$. Si $y \in \mathcal{B}_F(0,r)$, alors $y = -y_0 + (y_0 + y)$.

$$y \in \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)} + \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,1)\big)} \ \Rightarrow \ y \in \overline{T\big(\mathcal{B}_E(0,2)\big)}$$

□

Corollaire 4 (équivalence des normes)

Soit E un espace vectoriel muni de 2 normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ de Banach pour ces 2 normes. Si

$$\exists c > 0, \ \forall x \in E, \ \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \quad (*)$$

alors :

$$\exists c' > 0 \mid \forall x \in E, \ \|x\|_2 \leqslant c'\|x\|_1 \quad (**)$$

Preuve.
Considérons :

$$T\colon \left\{ \begin{array}{ccc} (E, \|.\|_2) & \longrightarrow & (E, \|.\|_1) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

$(*) \Rightarrow$ T continue. Théorème de l'application ouverte $\Rightarrow$ T^{-1} continue $\Rightarrow$ $(**)$. ■

Définition 13 (graphe)

Considérons deux espaces normés E et F, et $T\colon E \longrightarrow F$. Le graphe de T est un sous-ensemble de $E \times F$ définit comme :

$$G(T) = \big\{(x,y) \in E \times F, \ y = Tx\big\}$$

Théorème 6 (du graphe fermé)

Soit E, F deux espaces de Banach. Soit $T\colon E \longrightarrow F$ linéaire. Alors T est continue si et seulement si $G(T)$ est fermé.

Preuve.
$T \in \mathcal{L}(E,F) \Rightarrow G(T)$ fermé (exercice)

Réciproquement, supposons que $G(T)$ est fermé. Introduisons la norme du graphe :

$$N(x) = \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

- $N(0) = 0$
- $N(x) = 0 \;\Rightarrow\; \|x\|_E = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

Montrons que (E, N) est de Banach. Soit (x_n) une suite de Cauchy pour (E, N). Alors (x_n) est une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_E)$ et (Tx_n) est une suite de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$. Donc $\exists x, y$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $Tx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.

On veut montrer que $N(x_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme le graphe est fermé, (x_n, Tx_n) converge vers $(x, y) \in G(T)$ dans $(E \times F, \|.\|_E + \|.\|_F)$. Ainsi $y = Tx$. Donc $\|Tx_n - Tx\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement :

$$N(x_n - x) = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $(E, \|.\|_E)$ et (E, N) sont de Banach. Or $\|x\|_E \leqslant N(x)$. Par équivalence des normes $\exists c > 0$ tel que $N(x) \leqslant c\|x\|_E$.

$$\|x\|_E + \|Tx\|_E \leqslant c\|x\|_E \;\Rightarrow\; \|Tx\|_F \leqslant (c-1)\|x\|$$

Donc T est continue. ■

6 L'espace des fonctions continues

6.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 14 (famille équicontinue)

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et (Y, ρ) un espace métrique. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions $f\colon X \longrightarrow Y$. Pour $x \in X$ on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x (i.e. l'ensemble des parties qui continnent un élément de $\mathcal{T}$ contenant x). On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue dès que :

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists O \in \mathcal{V}(x),\ \mid \forall z \in O,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon$$

Théorème 7 (Arzela-Ascoli)

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparable et (Y, ρ) métrique. Soit $\mathcal{F}$ une famille équicontinue de fonctions $f_n\colon X \longrightarrow Y$. Si $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact $\forall x \in X$ alors

1. Il existe une sous-suite de $\mathcal{F}$ qui converge simplement vers une fonction f.
2. La convergence est uniforme sur tous les compacts.

Preuve.

$D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ dénombrable dense. $\overline{\{f_n(x_1)\}}_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte donc séquentiellement compacte. Soit alors $\{f_{\varphi_1(n)}(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. Par récurrence on construit une suite $\{f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{j+1}(n)}(x_{j+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $\{f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_j(n)}(x_{j+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Par extraction diagonale on considère $\{f_{\varphi(n)}(x_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$.

C'est une sous-suite de $\{f_{\varphi_1\circ\ldots\varphi_j(n)}(x_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donc elle converge. Pour alléger les notations on pose $g_n = f_{\varphi(n)}$. On a ainsi défini une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur D. Pour montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X tout entier il suffit de montrer que $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall x \in X$.

En effet $g_n(x) \in \overline{f_n(x)}_{n\in\mathbb{N}}$ qui est compact donc complet. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{F}$ est équicontinue $\exists O \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in O$, $\rho(g_n(x), g_n(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme D est dense dans X, $\exists x_j \in D$ tel que $x_j \in O$. Enfin par convergence de $(g_n(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geqslant N$, $\rho(g_m(x_j), g_n(x_j)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Cela permet de conclure à la convergence simple :

$$\begin{aligned}\rho(g_m(x), g_n(x)) &\leqslant \rho(g_m(x), g_m(x_j)) + \rho(g_m(x_j), g_n(x_j)) + \rho(g_n(x_j), g_n(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

On montre directement la continuité de la limite g en passant à la limite dans l'inégalité de l'équicontinuité.

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists O \in \mathcal{V}(x),\ \mid \forall z \in O,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \rho(g_n(x), g_n(z)) < \varepsilon$$

En $n \longrightarrow +\infty$: $\forall z \in O,\ \rho(g(x), g(z)) < \varepsilon$. Soit maintenant $K \subset X$ compact.

$$\forall x \in X\ \exists O_x \in \mathcal{V}(x) \mid \forall z \in O_x,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon$$

$K \subset \bigcup_{x\in K} O_x$: $\exists x_1, \ldots, x_k \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \rho(g_n(x_i), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall 1 \leqslant i \leqslant k$.

$$\begin{aligned}\forall x \in K, \rho(g(x), g_n(x)) &\leqslant \rho(g(x), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g_n(x_i)) + \rho(g_n(x_i), g_n(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

$\forall n \geqslant N$, d'où la convergence uniforme sur tout compact. ∎

6.2 Théorème de Stone-Weierstrass

Propriété 3

$A \subset \mathbb{R}$ non borné. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ limite uniforme de polynômes. Alors f est un polynôme.

Preuve.
$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de polynômes qui converge uniformément vers f. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$: $\sup_{x\in A} |P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$. $P_n - P_N$ est un polynôme borné sur A donc est constant : $P_n = P_N + \alpha_n$. Ainsi $(P_n - P_N)_{n\geqslant N}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. De là $(\alpha_n)_{n\geqslant N}$ est de Cauchy donc converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} P_n(x) = P_N(x) + \lim_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = P_N(x) + \alpha$$

f est un polynôme. ∎

Lemme 5

$\forall a > 0$, $\exists (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers $|.|$ sur $[-a, a]$.

Preuve.
On commence par $a = \frac{1}{2}$. Dans ce cas on écrit $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$ $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et on utilise le DSE de $u \mapsto \sqrt{1-u}$.

$$(1+u)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}u + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + \ldots$$

et cette série CN sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
$|x| = P_n(x) + R_n(x)$ où :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}(1-x^2)^k$$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, $|x| = 2a\left|\frac{x}{2a}\right| = 2aP_n\left(\frac{x}{2a}\right) + 2aR_n\left(\frac{x}{2a}\right)$ ce qui donne une approximation uniforme explicite de la valeur absolue sur $[-a, a]$. ∎

Théorème 8 (Weierstrass)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists P \in \mathbb{C}[X] \text{ tq } |f(x) - P(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a, b]$$

Lemme 6

Soit X un espace topologique compact qui contient au moins deux éléments. $H \subset C(X, \mathbb{R})$ tel que :

1. $\forall u, v \in H, \ \sup(u, v), \inf(u, v) \in H$
2. $\forall x_1 \neq x_2 \in X$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\exists u \in H$ tel que $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$

On dit que H est un treillis. Alors H est dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

Preuve.
Soient $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $x \in X$. $\forall y \neq x \in X$, $\exists u_y \in H$ tel que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$. Soit :

$$O_y = \{z \in X \mid u_y(z) > f(z) - \varepsilon\}$$

$\forall y \neq x \in X$, O_y est un ouvert qui contient y et x donc $X = \bigcup_{y \neq x \in X} O_y$. Par compacité :

$$X = \bigcup_{j=1}^{r} O_{y_j}, \ y_j \neq x \in X$$

Soit $v_x = \sup_{u_{y_1}, \ldots, u_{y_r}}$. $v_x \in H$ et $v_x(x) = f(x)$ et $\forall x' \in X$ $v_x(x') > f(x') - \varepsilon$. En effet $v_x(x') \geqslant u_{y_j}(x')$ $\forall 1 \leqslant j \leqslant r$. En particulier $x' \in O_{y_{j_0}}$, $v_x(x') \geqslant u_{y_{j_0}}(x') > f(x') - \varepsilon$.
On fait maintenant varier x et on pose, pour chaque $x \in X$,

$$\Omega_x = \{x' \in X \mid v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$$

Ω_x est un ouvert de X par continuité de v et $x \in \Omega_x$. On peut utiliser à nouveau la compacité de X pour obtenir :

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} \Omega_{x_i}$$

Soit enfin $v = \inf(v_{x_1}, \ldots, v_{x_s})$. $v \in H$ et $\forall x \in X$ on a $v(x) > f(x) - \varepsilon$ et $v(x) \leqslant v_{x_i}(x)$ $\forall 1 \leqslant i \leqslant s$. En particulier $x \in \Omega_{x_i}$, $v(x) \leqslant v_{x_i}(x) < f(x) + \varepsilon$.
En définitive, $v \in H$ et $f(x) - \varepsilon < v(x) < f(x) + \varepsilon$. ■

Théorème 9 (Stone-Weierstrass)

Soit X métrique compact. Soit $A \subset C(X, \mathbb{R})$ sous-algèbre unitaire (i.e. qui contient les fonctions constantes et qui est stable par addition et multiplication). On suppose de plus que A sépare les points de X au sens où $\forall x \neq y \in X$, $\exists f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Alors A est dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

Preuve.
Notons que si X est réduit à un seul élément alors le résultat est trivial car $C(X, \mathbb{R})$ est alors constitué des fonctions constantes qui sont dans A par hypothèse. On suppose donc que X contient au moins deux éléments. La démonstration repose sur le lemme de densité précédent. Pour en déduire le théorème on montre que $\overline{A}$ est un treillis, ainsi $\overline{A}$ est dense, i.e. A est dense.
■

Exemple. (X, d), (X', d') des espaces métriques. $X \times X'$ muni de :

$$d_{X \times X'}((x, x'), (y, y')) = \max(d(x, y), d'(x', y'))$$

qui induit la topologie produit.

$$C(X, \mathbb{R}) \otimes C(X', \mathbb{R}) = \left\{ (x, x') \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) g_k(x') \right\}$$

dense dans $C(X \times X', \mathbb{R})$.
cf. corde de Melde et équation de la chaleur.

6.3 Continuité et convergence simple

Lemme 7

Soient (Y_1, d_1) et (Y_2, d_2) deux e.m. et $y \in Y_1$. $T\colon Y_1 \longrightarrow Y_2$ est continue au point y ssi elle est séquentiellement continue i.e. si $\forall y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \in Y_1,\ T(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(y) \in Y_2$.

Preuve.

$\Rightarrow$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(T(x), T(y)) < \varepsilon$

$\Leftarrow$: Réciproquement, si T n'est pas continue en y alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in \mathcal{B}_{d_1}(y, 2^n)$ tel que $d_2(T(y), T(x_n)) \geqslant 1$. T n'est pas séquentiellement continue. ■

Propriété 4

X e.t. compact. Toutes les normes sur $C(X, \mathbb{R})$ qui le rendent complet et entraînent la convergence simple sont équivalentes.

Preuve.

Soit $\|.\|$ qui rende $C(X, \mathbb{R})$ complet et qui entraîne la convergence simple. Posons $E = (C(X, \mathbb{R}), \|.\|)$ et :

$$\Lambda_x\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \Lambda_x(f) = f(x) \end{array} \right.$$

Montrons que Λ_x est continue $\forall x \in E$. Pour cela nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité donnée par le lemme précédent.

Si $\|f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par hypothèse et par définition de Λ_x, $\Lambda_x(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Notons ensuite $\mathcal{F} = \{\Lambda_x, x \in X\}$. La famille est simplement bornée :

$$\forall x \in X, \forall f \in E, \quad |\Lambda_x(f)| = |f(x)| \leqslant \sup_{y \in X} |f(y)| < +\infty$$

Ainsi le théorème de Banach-Steinhaus assure que $\mathcal{F}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ce qui se traduit par l'existence de $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \forall f \in E, \quad |f(x)| = |\Lambda_x(f)| \leqslant \|\Lambda_x\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \cdot \|f\| \leqslant c\|f\|$$

Alors $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \leqslant\ c\|f\|$. On termine la preuve en utilisant la complétude de E et le corollaire du théorème de l'application ouverte qui énonce que deux normes sur un espace de Banach sont équivalentes dès que l'une domine l'autre. ■

Théorème 10

Soit X un espace de Baire et (Y, d) métrique. Soit $f_n\colon X \longrightarrow Y$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $f\colon X \longrightarrow Y$. Alors f est continue sur un ensemble dense.

Remarque.

- $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'et pas limite simple de fonctions continues.
- f dérivable : f' est continue sur un ensemble dense.

Preuve.
Soient :

$$A_{N,k} = \bigcap_{m,n \geqslant N} \left\{ x \in X \mid d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \frac{1}{k} \right\}$$

fermés. Comme $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ simplement, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{N,k}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$\Omega_k = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{\widehat{A_{N,k}}}$ est un ouvert dense (à partir du théorème de Baire). On montre ensuite que f est continue sur $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$. ■