Analyse
Chapitre 4 : Espaces de Sobolev

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

Table des matières

1 Dérivation au sens faible

$\mathcal{C}_0^1$: ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact.

Définition 1 (dérivée au sens faible)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $u \in L^p(\Omega)$. On dit que u admet une dérivée au sens faible par rapport à x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, ssi $\exists v \in L^p(\Omega)$ tel que :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega u(x)\partial_{x_j}\phi(x)dx = -\int_\Omega v(x)\phi(x)dx$$

On note $v = \partial_{x_j}u$ (ou $\partial_j u,\ \partial u/\partial x_j$), appelée dérivée au sens faible.

L'espace $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ qui admettent des dérivées au sens faible dans toutes les directions.

Remarques.

- Bonne notion
- Ω ouvert borné, $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ (veut dire $u|_\Omega$ avec $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$) alors :

$$\int_\Omega u\partial_j\phi dx = -\int_\Omega (\partial_j u)\phi dx$$

  dérivable au sens "classique" $\Rightarrow$ dérivable au sens faible
- $p \in [1, +\infty]$, $\Omega =]0,1[$, $u(x) = \frac{1}{x}$. $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ mais $u \notin L^p(\Omega)$. A fortiori $u \notin \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

- $u(x) = |x|$, $x \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u\partial_j \phi dx &= \int_0^1 x\partial_j\phi dx - \int_{-1}^{0} x\partial_j\phi \\ &= -\int_{-1}^{1} H\phi dx, \quad H \in L^p\end{aligned}$$

Donc $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ mais n'est pas dérivable au sens classique.

Dans ce cours $p = 2$.

Notation. $\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$

Propriété 1

$\mathcal{H}^1(\Omega)$ est un *espace de Hilbert* pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} dx + \int u\overline{v} dx$$

où $\nabla u \overline{\nabla v} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u \overline{\partial_j v}$.

Preuve. Sera vue en TD. □

On notera $u(x) \in \mathbb{R}$ ou $u(x) \in \mathbb{C}$ dans la suite.

But. (résoudre l'équation de Laplace)

$$\begin{cases} -\Delta u = F \quad \text{dans } \Omega \\ u = f \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Définition 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $F \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est une solution faible de $-\Delta u = F$ dans Ω ssi :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^1_0(\Omega), \ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx = \int_\Omega F\phi dx$$

Remarques.

- $$\int_\Omega \text{div} X dx = \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma \quad \text{formule de la divergence de Stokes}$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\Omega} \phi\partial_n u d\sigma &= \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma \qquad X = \phi\nabla u \\ &= \int_\Omega \text{div} X dx = \int_\Omega \text{div}(\phi\nabla u) \\ &= \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla u + \int \phi\Delta u \end{aligned}$$

Car :

$$\mathrm{div}X = \mathrm{div}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X_j$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\phi\nabla u) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(\phi \partial_{x_j} u) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}\phi \partial_{x_j} u + \sum_{j=1}^{n} \phi \partial_{x_j}^2 u \\ &= \nabla\phi \cdot \nabla u + \phi \Delta u \end{aligned}$$

Donc solution classique $\Rightarrow$ solution faible.

- La fonction $u(x) = x|x| = \mathrm{sgn}(x)x^2$ vérifie :

$$u'(x) = 2|x| \qquad u''(x) = 2\mathrm{sgn}(x) \qquad (\Delta u = F)$$

- $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\int_\Omega F\phi$ a donc un sens.
  La définition est équivalente avec ϕ ou $\overline{\phi}$.

2 Inégalité de Poincaré

Théorème 1 (bases hilbertiennes)

Considérons une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un Hilbert $\mathcal{H}$ vérifiant $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_n^m$. On a équivalence entre :

1. L'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense.
2. $\forall f \in \mathcal{H}$, $\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, e_n \rangle|^2$
3. $\forall f \in \mathcal{H}$, la série $\sum \langle f, e_n \rangle . e_n$ converge vers f.
4. Si $\langle e_n, f \rangle = 0 \ \forall n$ alors $f = 0$.

Théorème 2 (séries de Fourier)

Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, où $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}})^n$. Alors :

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = 0 \quad \text{où} \quad S_N f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|\leqslant N} \hat{f}_k e_k$$

avec $e_k(x) = e^{ik\cdot x}$ et $\hat{f}_k = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx$

Preuve.
Notons $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^n)$, espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} u(x)\overline{v(x)} dx$$

Soit $\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle$. Pour montrer que la série $\sum \hat{f}_k e_k$ converge vers f il suffit de montrer que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}^{\perp} = \{0\}$ (d'après (4) $\Rightarrow$ (3) du Théorème 1).

On a vu que $\hat{f}_k = 0 \; \forall k \Rightarrow \; f = 0$. $\square$

Propriété 2 (inégalité de Poincaré-Wirtinger)

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, L-périodique et telle que $\int_0^L u(x)dx = 0$. Alors :

$$\int_0^L u(x)^2 dx \leqslant \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L u'(x)^2 dx$$

Preuve.

Pour étudier une norme $\|.\|_{L^2}^2 \;\Rightarrow$ Parseval/Plancherel (point (2) du Théorème 1)

Soit $\mathcal{H} = L^2([0,L])$. Munissons-le du produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx$. Introduisons :

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(i\frac{2\pi k}{L}x\right)$$

On a $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, e_k \rangle e_k$, $\|u\|^2 = \sum |\langle u, e_k \rangle|^2$. Or $\langle u, e_0 \rangle = 0$ car $\langle u, e_0 \rangle = \int_0^L u(x)dx = 0$ par hypothèse. Donc :

$$\|u\|^2 = \sum_{k\neq 0} |\langle u, e_k \rangle|^2 \leqslant \sum_{k\neq 0} |k\langle u, e_k \rangle|^2$$

Or,

$$\begin{aligned}
\langle u', e_k \rangle &= \int_0^L u' \exp\left(-\frac{2i\pi}{L}kx\right)\frac{1}{\sqrt{L}}dx \\
&= + \int_0^L \frac{2i\pi}{L}ku \exp\left(-\frac{2i\pi}{L}kx\right)\frac{1}{\sqrt{L}}dx \\
&= \frac{2i\pi}{L}k\langle u, e_k \rangle
\end{aligned}$$

Donc $\|u\|^2 \leqslant \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \|u'\|$ car $\|u'\|^2 = \sum |\langle u', e_k \rangle|^2$. $\square$

Propriété 3

Soit $u = u(t,x)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et L-périodique en x, $\int_0^L u(0,x)dx = 0$, solution de $\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0$ $(*)$ où γ est $\mathcal{C}^\infty$, L-périodique et $\inf_{\mathbb{R}} \gamma \geqslant \underline{\gamma} > 0$. Alors $\exists c > 0$ tel que :

$$\int_0^L u(t,x)^2 dx \leqslant e^{-tc} \int_0^L u(0,x)^2 dx$$

Remarque. Sans le γ, $(*)$ correspond à l'équation de la chaleur.

Preuve.

1. $\gamma = 1$:
$$u_0(x) = \sum \hat{u}_{0_k} e^{\frac{2i\pi}{L}kx}$$
$$u(t,x) = \sum_{k\neq 0} \hat{u}_{0_k} \exp\left(\frac{2i\pi}{L}kx - k^2 t\right)$$
$e^{-tk^2} \leqslant e^{-tc}$ puis Plancherel.

2. γ quelconque. On cherche à estimer $\int_0^L u(t,x)^2 dx$.

   Méthode.
$$\text{On a} \quad \partial_t u \quad \xrightarrow{\times u} \quad u\partial_t u \quad \xrightarrow{\int} \quad \int u\partial_t u \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int u^2 dx$$
   Ici,
$$\begin{aligned} & u\Big(\partial_t u - \partial_x(\gamma\partial_x u)\Big) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \int u\partial_t u - \int \Big(\partial_x(\gamma\partial_x u)\Big)u = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 dx + \int_0^L \gamma(x)(\partial_x u)^2 dx = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$
   Or $\int_0^L u(t,x)dx = 0 \ \forall t \geqslant 0$ car $\int_0^L u(0,x)dx = 0$ par hypothèse et :
$$\frac{d}{dt}\int_0^L u(t,x)dx = \int_0^L \partial_x(\gamma\partial_x u)dx = 0$$
   Donc :
$$\int_0^L \gamma(\partial_x u)^2 dx \geqslant \underline{\gamma}\int_0^L (\partial_x u)^2 du \geqslant \underline{\gamma}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \int_0^L u(t,x)^2 dx$$
   Alors $(*) \Rightarrow y(t) := \int_0^L u(t,x)^2 dx$ vérifie :
$$y'(t) + \underline{\gamma}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 y(t) \leqslant 0$$
   Donc $z(t) = e^{tc}y(t)$, $c := \underline{\gamma}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, vérifie :
$$z'(t) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) \leqslant e^{-tc}y(0)$$

□

Remarque.
$$\|u\|_{L^2} \leqslant c\|\partial_x u\|_{L^2}$$

Théorème 3 (Poincaré)

Soit $n \geqslant 1$. Il existe $c(n)$ telle que, $\forall r > 0$, $\forall$ boule $\mathcal{B}$ de rayon r dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $u \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$:

$$\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}\left|u(x) - \int_{\mathcal{B}} udx\right|^2\right)^{1/2} \leqslant c(n)r\left(\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}}|\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Preuve.

On peut supposer que $\int_{\mathcal{B}} udx = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} u^2(x)dx &= \frac{1}{2|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} u(x)^2dx + \frac{1}{2|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} u(y)^2dy \\ &= \frac{1}{2|\mathcal{B}|^2}\int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}}(u(x)-u(y))^2dxdy\end{aligned}$$

Or,

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \varphi'(t)dt \quad \text{où } \varphi(t) = u(tx + (1-t)y)$$

Donc :

$$\begin{aligned}(u(x)-u(y))^2 &= \left(\int_0^1 (x-y)(\nabla u)(tx+(1-t)y)dt\right)^2 \\ &\leqslant |x-y|^2\left(\int_0^1 |\nabla u|(tx+(1-t)y)dt\right)^2 \\ &\leqslant (2r)^2\int_0^1 |\nabla u|^2(tx+(1-t)y)dt\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathcal{B}|}\int_{\mathcal{B}} u^2(x)dx &\leqslant \frac{(2r)^2}{2|\mathcal{B}|^2}\int_0^1\int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}}|\nabla u|^2(tx+(1-t)y)dxdydt \\ &\leqslant \frac{(2r)^2}{2|\mathcal{B}|^2}\int_0^1\int_{\mathcal{B}}\int_{t\mathcal{B}+(1-t)y}|\nabla u|^2(\sigma)d\sigma dy\frac{dt}{t^n} \\ &\leqslant \frac{2r^2}{|\mathcal{B}|^2}\int_0^1\int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}}\mathbb{1}_{t\mathcal{B}+(1-t)y}(\sigma)|\nabla u|^2(\sigma)d\sigma dy\frac{dt}{t^n}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}}\mathbb{1}_{t\mathcal{B}+(1-t)y}(\sigma)dy &= \left|\mathcal{B}\cap\frac{1}{1-t}(\sigma - t\mathcal{B})\right| \\ &\leqslant \min\left\{1, \left(\frac{t}{1-t}\right)^n\right\}|\mathcal{B}|\end{aligned}$$

Donc Poincaré avec :

$$c(n)^2 = 2\int_0^1 t^{-n}\min\left\{1, \frac{t^n}{(1-t)^n}\right\}dt$$

$\square$

Définition 3

On définit $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Théorème 4

On suppose que $\Omega \subset \mathcal{R} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, |x_n| \leqslant R\}$ avec $R > 0$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 2R\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve.

Il suffit, par densité, de considérer $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Alors :

$$u(x', x_n) = \int_{-R}^{x_n} (\partial_{x_n} u)(x', y)dy \quad \text{car } u(x', -R) = 0$$

(on a $u \in \mathcal{C}_0^{+\infty}(\mathcal{R})$ où u est prolongée par 0).

Donc,

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)|^2 &\leqslant (x_n + R) \int_{-R}^{x_n} (\partial_{x_n} u)^2 dy \\ &\leqslant 2R \int_{-R}^{R} (\partial_{x_n} u)^2 dy \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathcal{R}} |u(x', x_n)|^2 dx' dx_n &\leqslant 2R \int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-R}^{R} |\partial_{x_n} u(x', y)|^2 dy dx' dx_n \\ &\leqslant (2R)^2 \int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_{x_n} u|^2 (x', y) dx' dy \end{aligned}$$

$\square$

Application au problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Propriété 4

$\forall F \in L^2(\Omega),\ \exists! u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla \phi dx = \int_\Omega F \phi dx$$

Preuve.

1. $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
2. Soit :
$$\Lambda\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \int_\Omega Fv dx \end{array} \right. \qquad \text{continue}$$
(on se place dans le cas réel quitte à considérer parties imaginaire et réelle séparément).
3. $a(f,g) = \int_\Omega \nabla f.\nabla g dx$ produit scalaire. On a par Poincaré :
$$c^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}^1}^2 \leqslant a(f,f) \leqslant c\|f\|_{\mathcal{H}^1}^2$$

Conséquence de Riesz :

$$\forall \Lambda \in \underbrace{\mathcal{H}'}_{\text{dual topologique}}, \ \exists ! u \in \mathcal{H} \text{ tq } \Lambda(v) = a(u,v) \ \forall v \in \mathcal{H}$$

□

3 Propriétés des espaces de Sobolev

Propriété 5

Soit Ω ouvert et soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ ssi, $\exists c > 0$ tel que $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega u \partial_j \phi dx \right| \leqslant c\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (*)$$

Preuve.

- si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, alors $\int u\partial_j \phi dx = -\int(\partial_j u)\phi dx$ avec $\partial_j u \in L^2(\Omega)$ donc $(*)$ d'après C.S.
- Réciproquement, supposons $(*)$, posons pour $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$:
$$\Lambda(\phi) = \int_\Omega u\partial_j\phi dx \quad \text{puis étendons } \Lambda \text{ à } L^2(\Omega)$$
Alors $\exists v \in L^2(\Omega)$ tel que $\Lambda(\phi) = \int \phi v dx$ (Riesz).
$\Rightarrow u$ dérivable au sens faible avec $\partial_j u = -v$.

□

Propriété 6

Si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ et $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ avec ∇v bornée et v bornée, alors $uv \in \mathcal{H}^1(\Omega)$.

Propriété 7

Ω_1, Ω_2 deux ouverts et $\theta\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega 2$ un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme avec $\nabla\theta$, $\nabla\theta^{-1}$ bornées. Si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega_2)$ alors $u \circ \theta \in \mathcal{H}^1(\Omega)$.

Preuve. (de la Propriété 6)

- Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega uv\partial_j\phi dx\right| &= \left|\int_\Omega u\partial_j(v\phi) - \int_\Omega u(\partial_j v)\phi\right| \\ &\leqslant \left|\int_\Omega u\partial_j(v\phi)\right| + \left|\int_\Omega u\partial_j v\phi\right| \\ &\leqslant \underbrace{C\|v\phi\|_{L^2}}_{\text{car } v\phi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)} + \underbrace{\|u\partial_j v\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}}_{\text{C.S.}}\end{aligned}$$

  Donc,

$$\left|\int_\Omega uv\partial_j\phi dx\right| \leqslant K\|\phi\|_{L^2}$$

  avec $K = C\|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^2}\|\partial_j v\|_{L^\infty}$.

□

Preuve. (de la Propriété 7) On veut montrer que $\exists c > 0$ tel que $\forall j,\ \forall\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$:

$$\left|\int_{\Omega_1} u(\theta(x))\partial_j\phi(x)dx\right| \leqslant c\|\phi\|_{L^2(\Omega_1)}$$

On sait que $\exists c' > 0$ tel que :

$$\left|\int_{\Omega_2} u(y)\partial_j\varphi dy\right| \leqslant c'\|\varphi\|_{L^2(\Omega_2)}$$

On pose $\kappa = \theta^{-1}$. $y = \theta(x)$, $x = \kappa(y)$. $\Omega_1 = \kappa(\Omega_2)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_1} u(\theta(x))(\partial_j\phi)(x)dx\right| &= \left|\int_{\Omega_2} u(y)(\partial_j\phi)(\kappa(y))|J_\kappa(y)|dy\right| \\ &= \left|\int_{\Omega_2} u(y)(\partial_j\phi)(\kappa(y))J_\kappa(y)dy\right|\end{aligned}$$

où $J_\kappa(y) = \det(\nabla\kappa_1, ..., \nabla\kappa_n)$, de signe constant (car θ difféomorphisme $\Rightarrow$ κ difféomorphisme donc la différentielle ne peut pas s'annuler).
Il suffit de traiter le cas $j = 1$ pour simplifier les notations. On a :

$$(\partial_1\phi)(\kappa(y))J_\kappa(y) = \det(\nabla(\phi\circ\kappa), \nabla\kappa_2, ..., \nabla\kappa_n) = M_1\partial_1(\phi\circ\kappa) + ... + M_n\partial_n(\phi\circ\kappa)$$

De plus $\phi\circ\kappa \in \mathcal{C}_0^1(\Omega_2)$. On a :

$$\left|\int_{\Omega_2} u(y)M_k(y)\partial_k(\phi\circ\kappa)\right| \leqslant c\|\phi\circ\kappa\|_{L^2(\Omega_2)} \leqslant c'\|\phi\|_{L^2(\Omega_1)}$$

car $uM_k \in \mathcal{H}^1(\Omega_2)$ d'après Propriété 6 et $M_k \in \mathcal{C}_b^1(\Omega_2)$. □

Théorème 5 (Rellich)

Soit $n \geqslant 2$ et Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Pour toute suite bornée (u_n) dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, il existe une suite extraite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$.

Preuve.
$\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ Hilbert donc $\exists$ une sous-suite qui converge faiblement ($\langle u_n, v\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle u, v\rangle$ $\forall v \in \mathcal{H}$). On peut supposer que la limite faible est 0.

Lemme 1

On note $\tilde{u}_n = u_n(x)$ si $x \in \Omega$, 0 sinon. Alors $(\tilde{u}_n)$ est bornée dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. (du lemme) à faire en exercice avec $\left|\int \tilde{u}\partial_j\phi\right| \leqslant c\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ □

Posons $v_n = \chi\tilde{u}_n$ avec $\chi \in \mathcal{C}_0^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\chi \equiv 1$ sur Ω. $v_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit alors sa transformée de Fourier :

$$\hat{v}_n(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} v_n(x)dx = \langle \tilde{u}_n, \chi e^{-ix\cdot\xi}\rangle$$

Par la formule de Plancherel on a :

$$\begin{aligned}\|v_n\|_{L^2}^2 &= (2\pi)^\alpha \|\hat{v}_n\|_{L^2}^2 \\ &= \underbrace{\int_{|\xi|\leqslant R} |\hat{v}_n(\xi)|^2 d\xi}_{A_n} + \underbrace{\int_{|\xi|>R} |\hat{v}_n(\xi)|^2 d\xi}_{B_n} \quad \forall R\end{aligned}$$

$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\hat{v}_n(\xi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\forall\xi$ + convergence dominée.

$$\hat{v}_n(\xi) = \langle \tilde{u}_n, \chi e^{ix\cdot\xi}\rangle$$

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|>R} |\hat{v}_n(\xi)|^2 d\xi &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1+|\xi|^2}{1+R^2} |\hat{v}_n(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant \frac{1}{1+R^2}\|v_n\|_{\mathcal{H}^1}^2\end{aligned}$$

□