Équations aux dérivées partielles
Chapitre 3 : Classification des EDP

Lucie Le Briquer

Cours du 13 mars

Définition 1 (EDP)
Une équation aux dérivées partielles est de la forme :

$$F\left(x, p(x), \frac{\partial p}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial p}{\partial x_d}, ..., \frac{\partial^m p}{\partial x_d^m}\right) = 0$$

Si $d = 1$ alors ce que l'on étudie est une EDO. On parle d'EDP pour $d \geq 2$.

Définition 2
On considère :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & a(x_0)X + < A(x_0), X \otimes X > + \alpha(x_0) \end{array} \right.$$

où :
- $A(x_0)$ est une matrice non nulle
- a, α sont des fonctions suffisamment régulières

Remarque.
Les surfaces de niveau de ϕ sont des coniques en dimension d.
- si A est définie positive/négative : elliptique
- si A est définie positive de rang $d-1$: parabolique
- si A est de signature $(-1, d-1)$ ou $(d-1, 1)$: hyperbolique

Rappel. Soit A une matrice, posons $A_S = \frac{A+A^t}{2}$. A_S est symétrique donc diagonalisable par le théorème spectral. On note alors :
- $r = \text{Card } \{\lambda \in \text{Sp}(A_S) \mid \lambda \geq 0\}$
- $s = \text{Card } \{\lambda \in \text{Sp}(A_S) \mid \lambda \leq 0\}$

Le couple (r, s) est alors appelé *signature* de A.

Cours du 20 mars

Fin de la classification.
$m = 2$, équation linéaire, $nd = 2$
$m = 2$ donc $A = A^T \Leftrightarrow A \neq 0$

$$A_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{yy}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_x\frac{\partial u}{\partial x} + a_y\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u = f$$

$$A_{xx}X^2 + 2A_{xy}XY + A_{yy}Y^2$$

La matrice de cette forme quadratique est : $\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{pmatrix}$
Le déterminant de la matrice $\Delta = A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2$ est appelé *discriminant de la forme quadratique.*
On a 3 cas :

1. $\Delta > 0$: elliptique
   $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
   On effectue un changement de repère orthonormé (ξ, ν)
   $\lambda_1 = \varepsilon\omega_1$ et $\lambda_2 = \varepsilon\omega_2$ avec $\varepsilon = \pm 1$

   $$\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\xi_2} = \tilde{f}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \varepsilon f$$

   On se ramène à la forme :

   $$-\Delta u = f$$

   La partie d'ordre 2 dans le cas elliptique peut toujours (modulo un changement de coordonnées) se ramener à un laplacien.

2. $\Delta < 0$: hyperbolique

3. $\Delta = 0$: parabolique

Exemples.

- équation de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$
- équation des ondes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta t = f$
- équation de Laplace : $-\Delta u = f$

Remarque.
On préfère mettre un $-$ Laplacien car c'est un opérateur *positif.* Sa positivité découle de la *Formule de Green* :

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u u dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq 0$$

Remarque.

L'exemple suivant est le contre-exemple d'une propriété du cours. Trouver laquelle.

Soit $u(x,y) = \text{Arctg } \frac{x}{y}$, on a :

- $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$