Probabilités

Correction TD4

Lucie Le Briquer

Exercice 1.

Exercice 2.

On suppose $f \in \mathcal{C}^2$ à support compact.

1. *Astuce.* Décomposer $\mathbb{E}_{X_1,\dots,X_n}\left[\left(Z-\mathbb{E}^{(i)}(Z)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{X_{j\neq i}}\Big[\underbrace{\mathbb{E}^{(i)}_{X_i}\Big((Z-\mathbb{E}^{(i)}(Z))^2\Big)}_{\mathrm{Var}^{(i)}(Z)}\Big]$

   $\mathrm{Var}^{(i)}(f(X))$ est une fonction de $X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n$. Soit g cette fonction.

   $$g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) = \mathrm{Var}(f(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n))$$

   On applique la propriété pour $n = 1$:

   $$\mathrm{Var}\Big(f_{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}(X_i)\Big) \leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial f_{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}}{\partial x_i}\right|^2(X_i)\right]$$

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{Var}(f(X)) &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[\mathrm{Var}^{(i)}(f(X))\Big] \\
   &\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{X_i}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2(X_i)\right)\right] \\
   &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2(X)\right] \\
   &= \mathbb{E}\Big[\,\|\nabla f(X)\|^2\,\Big]
   \end{aligned}$$

2. Soient $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \sim \mathcal{R}$. Posons $S_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Calculons $\mathrm{Var}^{(i)}(f(S_n))$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{(i)}(f(S_n)) &= \mathbb{E}^{(i)}(f(S_n)^2) - \mathbb{E}^{(i)}(f(S_n))^2 \\
&= \sum_{s_i \in \{-1,1\}} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j\neq i} \varepsilon_j + s_i\right)\right)^2 \underbrace{\mathbb{P}(\varepsilon_i = s_i)}_{1/2} \\
&- \left(\sum_{s_i \in \{-1,1\}} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j\neq i} \varepsilon_j + s_i\right)\right) \underbrace{\mathbb{P}(\varepsilon_i = s_i)}_{1/2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{4} f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

3. On applique le résultat de l'exercice 1 avec la 2.

4. On oublie le lim sup. Montrons que :

$$\lim_n \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)\right] = 4\mathbb{E}\left[f'(X)^2\right]$$

On a :

$$\begin{aligned}
f(x+h_1) - f(x-h_2) &= f(x) + h_1 f'(x) + \frac{h_1^2}{2} f''(x) + h_1^2 \alpha(h_1) \\
&- \left(f(x) - h_2 f'(x) + \frac{h_2^2}{2} f''(x) + h_2^2 \alpha(h_2)\right) \\
&= f'(x)(h_1 + h_2) + \frac{f''(x)}{2}(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) + h_1^2 \alpha(h_1) - h_2^2 \alpha(h_2)
\end{aligned}$$

Pour $x = S_n$, $h_1 = \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}$ et $h_2 = \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned}
f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{n}} f'(S_n) + \frac{(1-\varepsilon_i)^2}{n}\alpha\left(\frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(1+\varepsilon_i)^2}{n}\alpha\left(\frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) \\
&+ \frac{f''(x)}{2}\frac{2}{\sqrt{n}}\frac{-2\varepsilon_i}{\sqrt{n}} \\
\left(f\left(S_n + \frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - f\left(S_n - \frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{n}} f'(S_n) + \frac{(1-\varepsilon_i)^2}{n}\alpha\left(\frac{1-\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(1+\varepsilon_i)^2}{n}\alpha\left(\frac{1+\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)\right. \\
&\left. + \frac{f''(x)}{2}\frac{2}{\sqrt{n}}\frac{-2\varepsilon_i}{\sqrt{n}}\right)^2 \\
\left|()^2 - \frac{4}{n} f'(S_n)^2\right| &\leq \frac{M}{n\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}()^2 - 4f'(S_n)^2\right| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Les ε_i sont i.i.d. de carré intégrable, $\varepsilon_i^2 = 1$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = 1$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i)^2 = 0$. Donc d'après le TCL :

$$S_n \xrightarrow{\alpha} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Donc $\forall\, g$ continue bornée, $\mathbb{E}(g(S_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(g(X))$. En particulier pour $g = f'$:

$$\mathbb{E}(f'(S_n)^2) \longrightarrow \mathbb{E}(f'(X)^2)$$

Exercice 3.

1. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. On suppose f borné. $\varepsilon f \geq -1$

$$\mathbb{E}_\mu\Big[(1+\varepsilon f(X))^2\ln((1+\varepsilon f(X))^2)\Big] = 2\varepsilon\mathbb{E}[f] + 2\varepsilon^2\mathbb{E}[f^2] + O(\varepsilon^2) \tag{1}$$

$$\mathbb{E}\Big[(1+\varepsilon f)^2\Big]\ln(...) = 2\varepsilon\mathbb{E}[f] + \varepsilon^2\mathbb{E}[f^2] + 2\mathbb{E}[f]^2 + O(\varepsilon^2) \tag{2}$$

Donc par $(1)-(2)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_\mu((1+\varepsilon f)^2) &= 2\varepsilon^2\mathrm{Var}(f) + O(\varepsilon^3)\\ &\underset{\text{log sob}}{\leq} c\mathbb{E}[\left\|\nabla(1+\varepsilon f)^2(X)\right\|^2]\\ &= 2\varepsilon^2 c\mathbb{E}[\|\nabla f\|^2] + O(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

Il reste juste à $\varepsilon \longrightarrow 0$.

2. *Astuce.* Faire une IPP pour $\mathbb{E}[f(X)]$ (dans Poincaré), l'appliquer sur g^2 avec $g(x) = f(x) - f(0)$

La loi exponentielle n'est pas log sob car pas sous-gaussienne. Montrons qu'elle vérifie pourtant l'inégalité de Poincaré.

$$\int f(x)\lambda e^{-\lambda x}dx = [-f(x)e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-\lambda x}dx$$

$$\mathbb{E}[g^2(X)] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[2g'g(X)] \underset{\text{CS}}{\leq} \frac{2}{\lambda}\sqrt{\mathbb{E}[g'^2(X)]}\sqrt{\mathbb{E}[g^2(X)]}$$

$$\mathrm{Var}(f) = \mathrm{Var}(g) \leq \mathbb{E}[g^2(X)] \leq \frac{4}{\lambda^2}\mathbb{E}[\underbrace{g'}_{=f'}{}^2(X)]$$