Analyse complexe
Chapitre 3

Lucie Le Briquer

Sommaire

1 Complément : groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arc

On a défini une relation d'équivalence "homotope à" entre chemins de mêmes extrémités. On note $\Pi_1(X, a, b)$ les classes de chemins de a vers b.

$$\Pi_1(X, a, b) \times \Pi_1(X, b, c) \longrightarrow \Pi_1(X, a, c)$$

Si $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$, $\gamma_2(1) = c$, alors on définit :

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Remarque.
$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \neq \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ mais les chemins ne diffèrent que par la paramétrisation.

Lemme 1

$$\begin{cases} \gamma_1 \sim \gamma_1' \\ \gamma_2 \sim \gamma_2' \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_1' * \gamma_2'$$

Remarque.
On note $\Pi_1(X,x_0) = \Pi_1(X,x_0,x_0)$ la classe de chemins fermés démarrant en x_0.

Théorème 2

$(\Pi_1(X,x_0),*)$ est un groupe (appelé le *groupe fondamental de X*)

1. X simplement connexe ssi $\Pi_1(X)$ est trivial (implicitement : $\Pi_1(X) = \Pi_1(X,x)\forall x \in X$)
2. $\Pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$

Remarque.
Plus précisement, on a un isomorphisme explicite :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathbb{C}^*) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (\gamma) & \longmapsto & \text{Ind}\ (\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} \end{array} \right.$$

On a vu que cela est “bien défini, sujectif, à valeurs dans $\mathbb{Z}$”. Noyau : $\{0\}$
Remarquons que si $X = \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Pi_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (\gamma) & \longmapsto & (\text{Ind}\ (\gamma,a), \text{Ind}\ (\gamma,b)) \end{array} \right.$$

est bien défini, surjectif, mais pas injectif puisque $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \in \text{Ker}$

Cours du 14 mars 2017

2 Séries et produits de fonctions holomorphes

Question. $\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est-il définissable ?

Idée. Passage au log : on se ramène à l'étude de $\sum \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ce qui s'avère être une bien meilleure définition que de passer directement par le produit. Plus généralement :

$$\text{“}\prod_n u_n \text{ est convergent si } \sum_n \log u_n \text{ est convergente”}$$

Proposition 3 (condition nécessaire pour la convergence du produit)

Condition nécessaire pour que $\prod u_n$ converge : $\lim_n u_n = 1$

Définition 1 (convergence du produit)

Le produit $\prod u_n$ est convergent (absolument, uniformément) si $\sum_{n\geq n_0} \log u_n$ est convergente (absolument, uniformément). Avec n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - 1| \leq 1$

Théorème 4

Soit $P(z) = \prod_{n\geq 1} f_n(z)$ produit uniformément convergent sur tout compact de fonctions holomorphes sur U. Alors :

1. $P(z)$ est holomorphe
2. $P(z) = 0 \equiv \exists n, f_n(z) = 0$
   De plus, $\mathrm{ord}_{z_0}(P(z)) = \sum \mathrm{ord}_{z_0} f_n(z)$

Proposition 5

Soit $g(z) = \sum_{n\geq 1} g_n(z)$ avec $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U et uniformément convergente sur tout compact inclus dans U. Alors : g est holomorphe sur U.

Exemple.
Formule du produit d'Euler.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$$

La série et le produit sont :

- absolument convergents
- uniformément convergents si $\Re(s) \geq 1+\varepsilon$

Convergences. $\sigma = \Re(s), t = \Im(s)$, alors $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{-\sigma} < \infty \equiv \sigma > 1$$

Comparaison avec l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} t^{-\sigma} dt = \left[\frac{t^{-\sigma+1}}{-\sigma+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\sigma-1}$$

Uniforme pour $\sigma \geq \sigma_0 > 1$

$$|\log(1-p^{-s})^{-1}| = \left|\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{p^{-m\sigma}}{m}\right| \leq p^{-\sigma} + Cp^{-2\sigma}$$

Donc convergence uniforme sur $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ *Égalité "formelle".*

$$(1-p^{-s}) = \sum_{m=0}^{+\infty} p^{-ms}$$

Donc :

$$\prod_{p\leq T} (1-p^{-s})^{-1} = \prod \sum_{m_p=0}^{+\infty} p^{-m_p s} = \sum_{m_p=0}^{+\infty} \left(\prod_{p\leq T} p^{m_p}\right)^{-s} = \sum_{n\in\mathcal{N}(T)} n^{-s}$$

Observation : $[1, T] \subset \mathcal{N}(T)$.
Donc :

$$\left| \mathcal{S}(s) - \prod_{p \leq T} (1 - p^{-s})^{-1} \right| = \left| \sum_{n \in \mathcal{N}(T)} n^{-s} \right| \leq \sum_{n > T} n^{-T} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0$$

Théorème 6 (dit de l'image ouverte)

Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et non constante. Alors f est ouverte.

Remarque.
En particulier :

$$\text{si } \mathcal{D}(z_0, r) \subset U, \exists \varepsilon > 0, \quad \mathcal{D}(f(z_0), \varepsilon) \subset f(\mathcal{D}(z_0, r))$$

Théorème 7 (dit de l'isomorphisme local)

Soit $z_0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si $f'(z_0) \neq 0$ alors il existe $\mathcal{D}(z_0, r) \subset U$ et W voisinage ouvert de $f(z_0)$ tel que :

$$f : \mathcal{D}(z_0, r) \longrightarrow W \quad \text{ est un isomorphisme analytique}$$

i.e. il existe $g : W \longrightarrow \mathcal{D}(z_0, r)$ holomorphe et bijection réciproque de $f|_{\mathcal{D}(z_0, r)}$

Théorème 8 (lemme de Schwarz)

Soit $f : \mathcal{D}(0, 1) \longrightarrow \mathcal{D}(0, 1)$ holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors :

$$\forall z \neq 0 \in \mathcal{D}(0, 1), |f(z)| \leq |z| \text{ et} |f'(0)| \leq 1$$

De plus s'il existe $z_0 \in \mathcal{D}(0, 1) \backslash \{0\}$ avec $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors :

$$f \text{ est de la forme } z \longrightarrow e^{i\theta} z$$

3 Théorème de l'application conforme de Riemann

Définition 2 (conformément équivalent)

U est conformément équivalent à W s'il existe $f : U \longrightarrow W$ analytique, bijective, de réciproque analytique.

Remarque.
La fonction f de la définition précédente est telle que f' ne s'annule pas.

- $f' \neq 0$ et f injective $\Rightarrow U$ est conformément équivalent à $f(U)$.
- (Liouville) $\mathbb{C}$ n'est pas conformément équivalent à $\mathcal{D}$ (disque unité) car une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{D}$ est bornée, donc constante.
- si U est conformément équivalent à $\mathcal{D}$, alors U est simplement connexe.

Cours du 21 mars 2017

Théorème 9 (théorème de l'application conforme)
U non vide ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$, alors

$$\exists f : U \xrightarrow[\text{analytique}]{\sim} \mathcal{D} = \mathcal{D}(0,1)$$

Exemple.

$$\begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

Principe.
$z_0 \in U$. Soit $F = \{f : U \longrightarrow \mathcal{D}$ holomorphe, injective avec $f(z_0) = 0\}$

1. $F \neq \emptyset$
2. $\sup\limits_{f \in F} |f'(z_0)| = \mu < +\infty$
3. "compacité" : $\exists f_n \in F$ telle que $\lim |f_n'(z_0)| = \mu$ avec $f_n \xrightarrow{\text{CVU sur tout K}} f$

   Lemme. f_n injective, $f = \lim f_n$ est ou bien injective ou bien constante
4. Si $f : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ ($\hookrightarrow$ signifie injective, $f \in F$) non surjective alors il existe $g : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ ($g \in F$) avec $|f'(z_0)| < |g'(z_0)|$

Donc la fonction $f = \lim f_n$ avec $|f'(z_0)| = \sup\limits_{\varphi \in F} |\varphi'(z_0)|$ est donc la transfomation recherchée.

Preuve.

1. $\exists f$ holomorphe, injective et bornée sur U, $\exists a \in \mathbb{C}, a \notin U$.

   On peut définir $\sqrt{z-a}$ sur U, c'est-à-dire une fonction $g(z)$ telle que g holomorphe sur U et $g(z)^2 = z - a$. On construit $\log z - a$ comme primitive de $\frac{1}{z-a}$. Alors $g(z) = \exp(1/2 \log(z-a))$.

   g est holomorphe et injective car $g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g(z_1)^2 = g(z_2)^2 \Rightarrow z_1 - a = z_2 - a \Rightarrow z_1 = z_2$

   – $\forall w, w$ ou $-w \notin g(U)$ car si $w = g(z_1)$ et $-w = g(z_2)$ alors $g(z_1)^2 = g(z_2)^2 \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w = -w$
   – image ouverte $g(U)$ ouvert donc contient $\mathcal{D}(w_0, r_0)$ donc $\mathcal{D}(-w_0, r_0) \cap g(U) = \emptyset$

   Si $U = \mathbb{C} \backslash]-\infty; 0] \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \Re z > 0$ alors $h(z) = \frac{1}{g(z)+w_0}$ est injective et bornée car $|g(z)+w_0| \geq r_0$

   $\exists f$ holomorphe, injective et bornée donc $F \neq \emptyset$.

   Si $a = f(z_0)$ ou $f : U \hookrightarrow \mathcal{D}$: $\varphi_a \circ f(z_0))0$ et $\varphi_a \circ f \hookrightarrow \mathcal{D}$

2. $\sup\limits_{f \in F} |f'(z_0)| < +\infty$

   Si $\overline{\mathcal{D}(z_0, r)} \subset U$, la formule de Cauchy pour le chemin $\gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$ nous donne :

   $$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} (2\pi)$$

   car $|f(s)| \leq 1$

3. *Analyse fonctionnelle.* K compact. $C = \{f$ continue de K dans $\mathbb{C}\}$ avec $\|.\|$ la norme sup. $F \subset C$ est quasi compacte $(*)$ si :

   (a) $\sup\limits_{x \in K} |f(x)| \leq M = M(F) \quad \forall f \in F$
   (b) (équicontinuité) :

   $$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall f \in F, x_1, x_2 \in K, \quad d(x_1, x_2) \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

   $(*)$ $\quad \forall f_n \in F, \exists f_{n_k} \longrightarrow f$ (on ne demande pas que $f \in F$)

   F est quasi-compacte i.e. pour toute suite $f_n \in F$, $\exists f_{n_k}$ qui converge uniformémet sur tout compact vers f (vers une fonction holomorphe).

   Théorème de Montel $F \subset \mathcal{H}(U)$. $\forall K$ compact $\subset U$ $\sup\limits_{f \in F} \sup\limits_{z \in K} |f(z)| = M_K < +\infty$ alors F est quasi-compacte.

Un peu de topologie.

On peut choisir K_n compact de U tels ue $\bigcup_{n\geq 1} K_n = U$ et tel que $K_n \subset \widehat{\overset{\circ}{K_{n+1}}}$

$$\forall n, \exists \varepsilon_n > 0 \qquad \bigcup_{x\in K_n} \mathcal{B}(x, \varepsilon_n) \subset K_{n+1}$$

Hypothèse du théorème d'Ascoli sur K_n :

(a) uniformément bornée (par hypothèse)
(b) équicontinuité

$z_1 \in K_n$, $d(z_1, z_2) < \frac{\varepsilon_n}{2}$ $\quad r_0 = \varepsilon_n$

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\left(\frac{1}{s-z_1} - \frac{1}{s-z_2}\right) ds \\ &= \frac{z_1 - z_2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_1)(s-z_2)} ds \\ &\leq C_{K_n}|z_1 - z_2| \end{aligned}$$

car $|s - z_1| = r_0$, $|s - z_2| \geq r_0 - |z_2 - z_1| \geq \frac{\varepsilon_n}{2}$

Ascoli. De toute suite $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ on peut extraire $f_{n,m} \xrightarrow{\text{CVU } K_m} h_m$. Alors :

$$f_{n,n} \xrightarrow{\forall K_n} h$$

Or $\forall K_n \Rightarrow \forall K \subset U$ compact.

Pour notre famille $F = \{f : U \subset \text{holomorphe} \hookrightarrow \mathcal{D}, f(z_0) = 0\}$. Par définition du sup :

$$\exists f_n \in F \text{ telle que } \lim |f_n'(z_0)| = M (= \sup_{f\in F} |f'(z_0)|)$$

Le théorème de Montel :

$$\exists f_{n_k} \in F \text{ telle que} \lim |f_{n_k}'(z_0)| = M \text{ et } f_{n_k} \xrightarrow{\text{CVU } K} f \text{ holomorphe sur } U$$

Il est évident que $|f'(z_0)| = M$ et que $f(z_0) = 0$ mais pas que f est injective.

Lemme. Une limite uniforme de fonction holomorphes injectives est ou bien constante ou bien injective.

Hypothèse $\forall z \in \gamma([0,1])$ on a $f(z) \neq w$

$$\text{Card}\{z \in \mathcal{D}(z_0, r) | f(z) = w\} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

$$\operatorname*{Res}_{z\neq z_1}\left(\frac{f'(z)}{f(z)-w}\right) = \operatorname*{ord}_{z\neq z_1}(f(z) - w)$$

Si f non constante et $f(z_1) = f(z_2) = w_1$ (disons)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z) - f_n(z_1)} dz = \text{Card}\{a \in \mathcal{D}(z_2, \varepsilon) | f_n(z) = f_n(z_1)\} = 0$$

car f_n est injective et $z_1 \notin D(z_2, r)$. Remarquons que $f_n(z_1) \to w_1$. Donc pour n assez grand $= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z) - w_1}$ mais c'est un entier donc ≥ 1

En résumé : on construit $f : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ avec $f(z_0) = 0$ et $|f'(z_0)| = \sup_{\varphi \in F} |\varphi'(z_0)|$, on va montrer que $f(U) = \mathcal{D}$ et donc $f : U \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$

4. Lemme : si $f(U) \subsetneq \mathcal{D}, f \in F$ alors $\exists g \in F$, $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$.

   Soit $\varphi_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $a \in \mathcal{D}$, on a $\varphi_{-a} \circ \varphi_a = Id$

   Soit $a \in \mathcal{D} \backslash f(U)$, alors $\varphi_a \circ f$ ne s'annule pas sur U. U simplement connexe donc $\exists g$ holomorphe telle que :
   $$\forall z \in U, \quad g(z)^2 = (\varphi_a \circ f)(z)$$
   De plus g est injective et à valeurs dans $\mathcal{D}$. Si $g(z_0) = b$ on aura $\varphi_b \circ g \in F$. Introduisons $s(z) = z^2$, $h = \varphi_b \circ g$ $(g = \varphi_{-b} \circ h)$. Alors $s \circ g = \varphi_a \circ f$. Et $\psi = \varphi_{-a} \circ s \circ \varphi_{-b}$ donc $\psi \circ h = f$. D'où :
   $$f'(z_0) = h'(z_0)\psi'(0) \quad \text{donc} \quad |f'(z_0)| < |h'(z_0)|$$
   car $\psi(0) = 0$ et φ non-injective $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ donc par le lemme de Schwarz $|\psi'(0)| < 1$

$\square$

Cours du 28 mars 2017

4 Théorème de la progression arithmétique - Dirichlet

Théorème 10 (théorème de la progression arithmétique - Dirichlet)

Soit a et b tels que pgcd $(a, b) = 1$ alors $\{p \text{ premier} \mid p \equiv a \bmod b\}$ est infini.

Définition 3 (caractères de Dirichlet)

G abélien fini, $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ sont les *caractères* de G

Propriété 11

- $G \simeq \widehat{G}$
- si g est un élément d'ordre r alors $\chi(g) \in \mathbb{U}_r$ et si s est une racine $\in \mathbb{U}_r$ il y a $\frac{|G|}{r}$ caractères tels que $\chi(g) = s$

- si G cyclique $G = \mathbb{Z} \backslash n\mathbb{Z}$ alors $\widehat{G} = \mathbb{U}_n \simeq \mathbb{Z} \backslash n\mathbb{Z}$

  $\left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ \chi & \longmapsto & \chi(1) \end{array} \right.$ surjectif si $s \in \mathbb{U}_n$; posons $\chi(\bar{n}) = s^n$

- si $G = G_1 \times G_2$ alors $\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$

  $\left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G_1 \times G_2} & \longrightarrow & \widehat{G_1} \times \widehat{G_2} \\ \chi & \longmapsto & (\chi_1, \chi_2) \\ \{\chi(g_1, g_2) = (\chi_1(g_1), \chi_2(g_2))\} & \longleftarrow & (\chi_1, \chi_2) \end{array} \right.$ où $\chi_1(g_1) = \chi(g_1, e_2)$ et $\chi_2(g_2) = \chi(e_1, g_2)$

Posons $H =< g > \subseteq F$, $\{\chi \in \widehat{G}, \chi|_H = 1_H\} \simeq \widehat{G\backslash H}$

si $\varphi \in \widehat{G/H}$ et $s : G \longrightarrow G\backslash H$ alors $\varphi \circ s \in \widehat{G}$ et $\varphi \circ s$ trivial sur H

si $\chi \in \widehat{G}$ est trivial sur H (i.e. $H \subset \text{Ker } G$) alors :

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "s"'] & & \mathbb{C}^* \\
& G\backslash H \arrow[ur, dashed, "\tilde{\chi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

avec $\tilde{\chi} \in \widehat{G\backslash H}$.

$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{U}_r \\ \chi & \longmapsto & \chi(g) \end{array} \right.$ avec $g \in G$ d'ordre r ; Ker $\psi \simeq \widehat{G\backslash H}$ donc ψ surjectif.

Lemme 12

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} (1 - \chi(g)T) = \left(\prod_{s \in \mathbb{U}_r} (1 - sT) \right)^{|G|/r} = (1 - T^r)^{|G|/r}$$

Lemme 13

1. $\chi \in \widehat{G}$ $\quad \sum_{g \in G} \chi(g) = \left\{ \begin{array}{ll} |G| & \text{si } \chi = 1_G \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$
2. $g \in G$ $\quad \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \left\{ \begin{array}{ll} |\widehat{G}| = |G| & \text{si } g = e_G \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

Preuve.

1. $$\forall g' \in G \quad \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(gg') = \chi(g') \sum_{g \in G} \chi(g) \quad \Rightarrow \chi(g') = 1 \text{ si } \sum_{g \in G} \chi(g) \neq 0$$
2. Si $g \neq e_G, \exists \chi' \in \widehat{G}$ tel que $\chi'(g) \neq 1$

□

Corollaire 14

Soit $h \in G$:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi}(h)\chi(g) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Preuve.

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}}\overline{\chi}(h)\chi(g)=\sum_{\chi\in\widehat{G}}\chi(gh^{-1})=\begin{cases}|G| & \text{si } gh^{-1}=e_G\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

car $\chi(h)\chi(h^{-1})=1 \qquad \chi(h^{-1})=\overline{\chi}(h)$

$\square$

Remarque.

Idée du théorème de Dirichlet.

$$\sum_{p\equiv a \bmod b} f(p)$$

si $G=(\mathbb{Z}\backslash b\mathbb{Z})^*$ on peut étendre un caractère $\chi : G\longrightarrow\mathbb{C}^*$ en une fonction $\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}^*\cup\{0\}$

$$1(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\wedge b=1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\qquad \chi(n)=\begin{cases}\chi(n \bmod b) & \text{si pgcd }(n,b)=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Corollaire 15

Soit $x\in\mathbb{Z}$ et a inversible modulo b, $1\in\widehat{G}$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\overline{\chi}(a)\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\equiv a \bmod b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\sum_{p\equiv a \bmod b} f(p)=\frac{1}{\varphi(b)}\sum_p f(p)+\frac{1}{\varphi(b)}\sum_{\chi\neq 1}\overline{\chi}(a)\sum_p f(p)\chi(p)$$

Exemple.

$$\sum\frac{1}{p}=+\infty\Rightarrow\sum_{p\equiv a \bmod b}\frac{1}{p}=+\infty$$

Exemple.

Choix $f(p)=p^{-s}$, il suffit de montrer :

1. $\sum_p p^{-s}$ convergente pour $\Re(s)>1$ diverge en $s=1$
2. $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ convergente pour $\Re(s)>1$ bornée quand $s\longrightarrow 1$

$$(1)+(2)\Rightarrow\sum_{p\equiv a \bmod b}\frac{1}{p^s}\text{ diverge en } s=1$$

Définition 4 (fonction ζ de Riemann, $L(\chi, s)$ de Dirichlet et série de Dirichlet F)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \qquad \Re(s) > 1$$

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \qquad \chi \neq 1$$

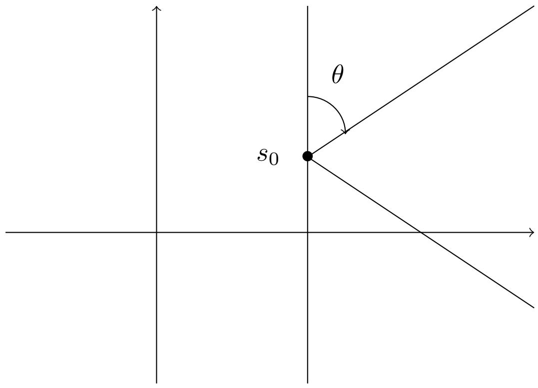
$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

Théorème 16

Si la série définissant $F(s)$ converge en s_0 alors elle converge uniformément sur le secteur :

$$\begin{cases} \sigma = \Re(s) \geq \Re(s_0) \\ \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \leq C \\ \text{ou } s = s_0 \end{cases}$$

Ceci pour tout $\theta > 0$



Remarque.
si $K \subset \{s \mid \Re(s) > \sigma_0\}$ on peut inclure K dans un tel secteur

Corollaire 17

$\exists\ \sigma_0 \in$ tel que la série converge si $\Re(s) > \sigma_0$, diverge si $\Re(s) < \sigma_0$ et la fonction obtenue est holomorphe dans $\{s \mid \Re(s) > \sigma_0\}$

Transformation d'Abel.

$$\text{posons } A(t) = \sum_{n \leq t} a_n$$

$$\sum_{X<n\leq Y} a_n f(n) = A(X)f(X) - A(Y)f(Y) - \underbrace{\int_X^Y A(t)f'(t)dt}_{\sum_{n=X}^{Y-1}\int_n^{n+1} A(n)f'(t)dt}$$

Choix : $A(t) = \sum_{n\leq t} a_n n^{-s_0}$ borné par M

$$\sum_{X<n\leq Y} (a_n n^{-s_0}) n^{-(s-s_0)} = \frac{A(X)}{X^{s-s_0}} - \frac{A(Y)}{Y^{s-s_0}} + (s-s_0)\int_X^Y A(t)t^{-(s-s_0)-1}dt$$

$$\begin{aligned}\left|\int_X^Y t^{-(s-s_0)-1}dt\right| &\leq \int_X^Y t^{-(s-s_0)-1}dt \\ &= \frac{M}{\sigma-\sigma_0}\left[t^{-(\sigma-\sigma_0)}\right]_X^Y\end{aligned}$$

$$\left|\sum_{X<n\leq Y} a_n n^{-s}\right| \leq \frac{2M}{X^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{M|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\frac{1}{X^{\sigma-\sigma_0}}$$

si $\sigma - \sigma_0 \geq \varepsilon$ et $\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0} \leq C$
En prenant $X = 1$ et $Y \longrightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = (s-s_0)\int_1^{+\infty} A(t)t^{-(s-s_0)-1}dt$$

Corollaire 18

si $A(t)$ est bornée, la série converge pour $\Re(s-s_0) > 0$

1. si $\chi \neq 1$, l'abscisse de convergence de $L(\chi, x)$ est 0 ; en effet :

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+b-1} \chi(n) = 0 \quad \text{donc} \quad \left|\sum_{X<n\leq Y} \chi(n)\right| \leq b$$

2.

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= s\int_1^{+\infty} \lfloor t \rfloor t^{-s-1}dt \\ &= s\int_1^{+\infty} t^{-s}dt + s\int_1^{+\infty} (\lfloor t \rfloor - t)t^{-s-1}dt \\ &= \frac{s}{s-1} + s\underbrace{\int_1^{+\infty} (\lfloor t \rfloor - t)t^{-s-1}dt}_{\in\mathcal{H}(\Re(s)>0)}\end{aligned}$$

a priori pour $\Re(s) > 1$

Théorème 19

La fonction $\zeta(s)$ se prolonge à $\Re(s) > 0$ en une fonction méromorphe avec un unique pôle en $s = 1$ (pôle simple de résidu $= 1$). $\zeta(z) = \frac{g(s)}{s-1}$ avec g holomorphe, $g(1) = 1$.

Preuve.

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

On peut poser :

$$\text{Log } \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}, n \geq 1} \frac{p^{-ns}}{n} = \sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s} + \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{P}, n \geq 2} \frac{p^{-ns}}{n}}_{\in \mathcal{H} \text{ si } \Re(s) > 1/2}$$

où $\text{Log } \zeta(s) = \log(s-1)^{-1} + O(1)$ au voisinage de 1. D'où :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s} \sim \log(s-1)^{-1}$$

$\square$

Conclusion. quand $s \to 1$ et s réel > 1 :

$$\begin{aligned} \text{Log } L(\chi, s) &= \text{Log } \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}, n \geq 1} \frac{\chi(p)^n p^{-ns}}{n} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \chi(p) p^{-s} + \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{P}, n \geq 2} \frac{\chi(p)^n p^{-ns}}{n}}_{\in \mathcal{H} \text{ si } \Re(s) > 1/2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Log } L(\chi, s) \xrightarrow[s \in \mathbb{R} \longrightarrow 1^+]{} \text{Log } L(\chi, 1)$$

Donc $L(\chi, 1) \neq 0$. Donc $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}$ bornée pour $s = 1$.

$$M(s) = \prod_\chi L(\chi, s) = L(1, s) \prod_{\chi \neq 1} L(\chi, 1)$$

Or :

$$L(1, s) = \left(\prod_{p | b} (1 - p^{-s}) \right) \zeta(s)$$

est holomorphe en $\Re(s) > 0$, sauf un pôle simple en $s = 1$ si $\prod_{\chi \neq 1} L(\chi, s) \neq 0$ et sans pôle sinon.

Donc $M(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \prod_{\chi} (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$; p a pour ordre modulo b un entier r_p ($r_p | \varphi(b)$).

$$\begin{aligned}
M(s) &= \prod_{p\in\mathcal{P}} (1-p^{-r_p s})^{-\varphi(b)/r_p} \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-r_p n s} \right)^{\varphi(b)/r_p} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}
\end{aligned}$$

avec $a_n \geq 0$ réels. C'est une série de Dirichlet à coefficients réels positifs, diverge en $1/\varphi(b)$

Lemme 20 (de Landau)

$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ avec $a_n \geq 0$

- L'abscisse de convergence est une singularité de F
- Si F se prolonge holomorphiquement au voisinage de $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ alors $\sigma_C < \sigma_0$

Par $F(s) = M(s)$ si elle n'a pas de pôle en $s = 1$ alors $\sigma_c \leq 0$ mais $\sigma_c \geq 1/\varphi(b)$
Montrons que la série converge en $\sigma < c$:

$$\begin{aligned}
F(\sigma) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(\sigma - c)^n \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(-\log n)^m n^{-c} \right) \frac{(\sigma - c)^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\log n)^m n^{-c} \right) \frac{(c - \sigma)^m}{m!} \\
&\underset{\text{tout positif}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-c} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\log n(c-\sigma))^m}{m!} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-c} e^{\log n(c-\sigma)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma}
\end{aligned}$$