Analyse

Chapitre 3 : Analyse de Fourier

Lucie Le Briquer

9 novembre 2018

Table des matières

1 Séries de Fourier

Théorème 1 (théorie L^2)

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $2\pi-$périodique par rapport à chaque variable et de carré intégrable sur $[-\pi,\pi]^n$ ($f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$). On a :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_k e^{ik\cdot x}$$

au sens où :

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} \|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = 0$$

avec

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx \qquad S_N f = \sum_{|k|\leqslant N} \hat{f}_k e^{ik\cdot x}$$

De plus,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}_k|^2$$

Rappel. Une démonstration repose sur :

1. $e_k\colon x \mapsto \frac{e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^n}$ est une famille orthonormée dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ pour le produit scalaire :

$$(f,g) = \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

2. Cette famille est totale car $\mathrm{Vect}(e_k)$ est dense par Stone-Weierstrass.

Regardons plusieurs corollaires de Plancherel.

Lemme 1 (Poincaré-Wirtinger)

soit $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $T-$périodique ($T > 0$). Alors, si $\int_0^T u(t)dt = 0$, on a :

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |u'(t)|^2 dt$$

Remarque. Si u est une constante, cette inégalité est fausse, d'où la nécessité de $\int_0^T u(t)dt = 0$.

Preuve.
Décomposition de Fourier d'une fonction $T-$périodique. On introduit sur $L^2(0,T)$ le produit scalaire :

$$(f,g) = \int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$$

et on introduit la famille orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où

$$e_k(t) = C_k \exp\left(i\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

avec C_k de sorte que $\|e_k\|_{L^2(0,T)} = 1$. On trouve $C_k = \frac{1}{\sqrt{T}}$. Alors $u = \sum_{\mathbb{Z}} \hat{u}_k e_k$ où $\hat{u}_k = (u, e_k)$. Donc :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad \text{et} \quad \int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2$$

De même,

$$\|u'\|^2_{L^2(0,T)} = \sum_{\mathbb{Z}} |(\hat{u'})_k|^2$$

Or,

$$\begin{aligned}
(\hat{u'})_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T u'(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \partial_t(\ldots) dt + \frac{2i\pi}{T\sqrt{T}} k \int_0^T u(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt
\end{aligned}$$

Donc $(\hat{u'})_k = \frac{2i\pi}{T} k \hat{u}_k$. Par ailleurs $\int_0^T u(t) dt = 0 \Rightarrow \hat{u}_0 = 0$. On peut alors conclure :

$$\begin{aligned}
\int_0^T |u(t)|^2 dt &= \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{\mathbb{Z}^*} |\hat{u}_k|^2 \\
&\leqslant \sum_{\mathbb{Z}} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 \\
&\leqslant \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{\mathbb{Z}} \left| \frac{2i\pi}{T} k \hat{u}_k \right|^2 \\
&\leqslant \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{\mathbb{Z}} |(\hat{u'})_k|^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |u'|^2 dt
\end{aligned}$$

■

Propriété 1

Soit $\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$ $2\pi-$périodique et C^∞. Soit $u \in C^\infty_{2\pi\text{-per }x}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{(équation de la chaleur)}$$

Si $\int_0^{2\pi} u(0, x) dx = 0$, alors :

$$\int_0^{2\pi} u(t, x)^2 dx \leqslant e^{-2t} \int_0^{2\pi} u(0, x)^2 dx$$

Preuve.

- $\gamma = 1 \Rightarrow$ séries de Fourier (exercice)

- γ générale. On utilise une estimation d'énergie.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} u(t,x)^2 dx &= \int_0^{2\pi} u\partial_t u dx \\
&= \int_0^{2\pi} u\partial_x(\gamma\partial_x u) dx \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \partial_x(u\gamma\partial_x u) dx}_{\text{0 par per}} - \int_0^{2\pi} \gamma(\partial_x u)^2 dx \\
&= -\int_0^{2\pi} \gamma(\partial_x u)^2 dx \\
&\leqslant -\int_0^{2\pi} (\partial_x u)^2 dx \quad \text{car } \gamma \geqslant 1
\end{aligned}$$

Or $\int_0^{2\pi}(\partial_x u)^2 dx \geqslant \int_0^{2\pi} u^2 dx$ par Poincaré-Wirtinger avec $T = 2\pi$ car $\int_0^{2\pi} u(t,x)dx = 0\ \forall t$, en effet :

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} u dx = \int_0^{2\pi} \partial_x(\gamma\partial_x u) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} u(0,x) dx = 0$$

On conclut :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} u(t,x)^2 dx + \int_0^{2\pi} u(t,x)^2 dx \leqslant 0$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} u(t,x)^2 dx \leqslant e^{-2t}\int_0^{2\pi} u(0,x)^2 dx$$

■

Propriété 2

Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $2\pi-$périodique et $\alpha-$Hölderienne ($\alpha \in]0,1]$) i.e. :

$$\exists K > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant K|y,x|^\alpha$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Preuve.

Soit $h \in [0,1]$. On pose :

$$f_h(x) = f(x+h) - f(x-h)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_h(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x+h)e^{-inx} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x-h)e^{inx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_h^{2\pi+h} f(y)e^{-iny}e^{inh} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_h^{2\pi+h} f(y)e^{-iny}e^{-inh} dy \\
&= e^{inh}\hat{f}(n) - e^{-inh}\hat{f}(n) \\
&= 2i\sin(nh)\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\sin^2(nh)|\hat{f}(n)|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x-h)|^2 dx \leqslant \int_0^{2\pi} \left((2h)^\alpha\right)^2 dx$$

Donc, $\exists A>0$ tel que $\forall h\in[0,1]$,

$$\sum_{\mathbb{Z}} \sin(nh)^2|\hat{f}(n)|^2 \leqslant Ah^{2\alpha}$$

Digression. Si $h=\frac{1}{N}\frac{\pi}{2}$ on en déduit :

$$\sum_{\mathbb{Z}} \sin(nh)^2|\hat{f}(n)|^2 \geqslant \sum_{n=N} \sin(nh)^2|\hat{f}(n)|^2 = |\hat{f}(N)|^2$$

D'où,

$$|\hat{f}(N)| \leqslant \sqrt{A}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \frac{1}{N^\alpha}$$

Donc $\sum |\hat{f}(N)| < +\infty$ si $\alpha>1$ (cas qui ne nous intéresse pas).

Il faut en fait exploiter le fait que $\sin(nh)^2 \sim 1$ pour “beaucoup” d'indices n. On va effectuer une *décomposition dyadique.* Prenons $h=2^{-N}$ avec $N\in\mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{\mathbb{Z}} \sin(nh)^2|\hat{f}(n)|^2 \leqslant A2^{-2N\alpha}$$

Ainsi,

$$\sum_{|n|>2^{N-1}}^{2^N} \sin(nh)^2|\hat{f}(n)|^2 \leqslant A2^{-2N\alpha}$$

Or si $2^{N-1}<|n|\leqslant 2^N$ on a $\frac{1}{2}<|nh|\leqslant 1$, donc $\sin(nh)^2 \geqslant \sin(1/2)^2>0$. D'où,

$$\sum_{|n|>2^{N-1}}^{2^N} |\hat{f}(n)|^2 \leqslant A'2^{-2N\alpha}$$

Alors,

$$\sum_{|n|>2^{N-1}}^{2^N} |\hat{f}(n)| \leqslant \left(\sum_{2^{N-1}<|n|}^{2^N} 1\right)^{1/2} \left(\sum_{2^{N-1}<|n|}^{2^N} |\hat{f}(n)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant A''(2^N)^{1/2}2^{-2N\alpha}$$

Si $\alpha>\frac{1}{2}$, on a :

$$\sum_{2^{N-1}<|n|}^{2^N} |\hat{f}(n)| \leqslant A''2^{-N\varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon>0$$

Comme $\sum_{N=0}^{+\infty} 2^{-N\varepsilon}<+\infty$ on a bien :

$$\sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$$

■

Corollaire 1

Si $f \in C^1$, la série de Fourier converge uniformément et donc ponctuellement.

Théorème 2 (inégalité iso-périmétrique)

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier. Alors,

$$l(\partial\Omega)^2 \geqslant 4\pi|\Omega|$$

où $l(\partial\Omega)$ est la longueur du bord et $|\Omega|$ son volume.

Preuve.

On note X le champ de vecteurs $X \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y) \end{array} \right.$. Ω est régulier donc :

$$\int_\Omega \mathrm{div} X dxdy = \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma$$

Or,

$$\int_\Omega \mathrm{div} X dxdy = \int_\Omega \nabla \cdot X = \int_\Omega \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} dxdy = \int_\Omega \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} dxdy = 2|\Omega|$$

D'où $2|\Omega| = \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma$.

$$\begin{aligned} 2|\Omega| = \int_{\partial\Omega} X \cdot n d\sigma &\leqslant \int_{\partial\Omega} |X \cdot n| d\sigma \\ &\leqslant \int_{\partial\Omega} |X||n| d\sigma \leqslant \int_{\partial\Omega} |X| d\sigma \\ &\leqslant \left(\int_{\partial\Omega} 1 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |X|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leqslant l(\partial\Omega)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |X|^2 d\sigma \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Quitte à translater le problème, on peut supposer que $\int_{\partial\Omega} X ds = 0$. On paramètre le contour par u, qui est donc $T = l(\partial\Omega)$ périodique. Ainsi, par Poincaré-Wirtinger,

$$\int_{\partial\Omega} |X|^2 ds \leqslant \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \underbrace{\int_{\partial\Omega} |X'|^2 ds}_{\text{c.f. notes}} = \frac{T^2}{4\pi^2} T$$

Ainsi,

$$2|\Omega| \leqslant \sqrt{T} \left(\frac{T^3}{4\pi^2} \right)^{1/2} \leqslant \frac{T^2}{2\pi}$$

D'où, $T^2 \geqslant 4\pi|\Omega|$. ∎

Propriété 3

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ C^∞ à support compact. Alors on a :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} f(y) dy \right) d\xi$$

Preuve.

Les séries de Fourier correspondent à une décomposition d'une fonction périodique sur une base Hilbertienne. Pour $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, pas forcément périodique, on voit f comme une limite de fonction $T-$périodiques avec $T \longrightarrow +\infty$.

Soit T suffisamment grand pour que $\mathrm{supp} f \subset]-T, T[^n = Q_T$. On muni $L^2(Q_T)$ du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{Q_T} f(x)\overline{g(x)} dx$$

et on pose $e_k(x) = \frac{1}{(2T)^{n/2}} e^{-i\frac{\pi}{T}k\cdot x}$. Alors (convergence normale $\Rightarrow$ ponctuelle)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\mathbb{Z}^n} \hat{f}_k e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(2T)^n} \left(\int_{Q_T} g(y) e^{-i\frac{\pi}{T}k\cdot y} dy \right) e^{i\frac{\pi}{T}k\cdot x} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{T}\right)^n F\left(\frac{1}{T}k\right) \end{aligned}$$

où,

$$F(\xi) = \frac{1}{2^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\pi\xi\cdot y} dy \right) e^{i\pi\xi\cdot x}$$

Alors (série de Riemann) :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{T^n} F\left(\frac{k}{T}\right) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \int F d\xi$$

d'où,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\pi\xi\cdot y} \right) e^{i\pi\xi\cdot x} d\xi$$

où plutôt :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\xi\cdot y} \right) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

$\blacksquare$

Définition 1 (transformée de Fourier)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ est définie par :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

But. Justifier dans un cadre général la formule :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

puis étudier certains espaces de fonctions.

2 Classe de Schwartz

Cadre très général : le dual topologique d'un espace très petit. Quel est le bon espace ?

2.1 Introduction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Propriété 4

Il n'existe pas de fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à support compact, non nulle dont la transformée de Fourier est à support compact.

Preuve.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ à support compact. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$F(z) = \int e^{-izx} f(x) dx$$

On peut dériver sous le signe somme et vérifier que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. F est entière et s'annule là où $\hat{f}$ s'annule. Si $\hat{f}$ s'annule sur un intervalle $\Rightarrow F = 0$. ∎

Remarque. L'espace des fonctions à support compact ne convient donc pas.

Définition 2 (décroissance rapide et classe de Schwartz)

1. On dit que f est à décroissance rapide si $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists K > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{K}{(1+|x|)^N}$$

2. On dit que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la classe de Schwartz si $\partial_x^\beta f$ est à décroissance rapide pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$.
3. On pose :

$$N_p(f) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant p} \sup_{\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial_x^\beta f \right|$$

où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ et $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$.

Exemples.

1. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
2. $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas à support compact

Nous démontrerons que :

Propriété 5

1. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$
2. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors :
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

Remarque. Donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est le bon espace.

2.2 Topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 3 (famille graduée)

Une famille graduée de semi-normes est une famille dénombrables $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de semi-normes telle que :
$$\rho_0(f) \leqslant \rho_1(f) \leqslant \dots$$

Définition 4 (famille séparante)

$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est séparante ssi :
$$x = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall n \in \mathbb{N},\; \rho_n(x) = 0$$

Exemples.

1. $(E, \|.\|_E)$ e.v.n. et $\rho_n(x) = \|x\|_E$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $K \subset \mathbb{R}^d$, K compact, on définit sur $C^\infty_K(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty : \text{supp} f \subset K\}$:
$$\rho_n(f) = \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_K |\partial^\alpha_x f(x)|$$
3. Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^d$ quelconque.
$$K_n = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{\mathcal{B}(0,n)}$$
K_n est compact et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (on dit que (K_n) est une suite exhaustive de compacts).
On définit :
$$\rho_n(f) = \max_{|\alpha|\leqslant 1} \sup_{K_n} |\partial^\alpha_x f(x)|$$
sur $C^1(\Omega)$.
4. Sur $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ on définit :
$$\rho_n(f) = \left(\int_{K_n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

5. Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\rho_p(f) = N_p(f)$.

Définition 5 (bases de voisinages)

1. $\mathcal{B}$ est une base de voisinages d'une topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ est une réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$.
2. $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de voisinage de x_0 ssi $\forall$ voisinage V de x_0, $\exists B \in \mathcal{B}_{x_0}$ tel que $x \in B \subset V$.

Propriété 6

Soit E un espace vectoriel muni d'une famille graduée de semi-normes $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est séparante. On pose :

$$\mathcal{B} = \{B_n(x,\varepsilon); n \in \mathbb{N}, x \in E, \varepsilon > 0\}$$

où $B_n(x,\varepsilon) = \{y \in E : \rho_n(x-y) < \varepsilon\}$.

Il existe une unique topologie dont $\mathcal{B}$ est une base de voisinage. On munit E de cette topologie. Alors :

1. $\{B_n(x_0,\varepsilon); n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinage de x_0 $\forall x_0 \in E$
2. E est un espace vectoriel topologie
3. $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ c.v. vers x ssi $\rho_n(x_j - x) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
4. Cette topologie est métrisable, induite par la distance :

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}$$