Analyse

Chapitre 4 : Espace des distributions tempérées

Lucie Le Briquer

13 novembre 2018

Table des matières

1 Rappels

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta, \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| = 0\}$

Exemple. $u(x) = e^{-|x|^2}$

$$P_{k,l}(u) = \sum_{|\alpha|=k, |\beta|=l} \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)|$$

$\mathcal{S}$ est un espace de Fréchet. Pour $u \in \mathcal{S}$,

$$\mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx$$

$\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ est continue.

Proposition 1

Posons :

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi d\xi$$

Alors $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$.

Exercice. $\lambda > 0$ $u(x) = e^{-\lambda|x|^2} \in \mathcal{S}$ alors :

$$\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/(4\lambda)}$$

Correction.

$$\hat{u}(\xi) = \in e^{-ix\cdot\xi} e^{-\lambda|x|^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j\xi_j} e^{-\lambda x_j^2} dx_j$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int e^{-ix\xi} e^{-\lambda x^2} dx \\ &= -i \int e^{-ix\xi} x e^{-\lambda x^2} dx \\ &= \frac{i}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} e^{-\lambda x^2} dx \end{aligned}$$

$$F'(\xi) = -\frac{i}{2\lambda} \int \left(\frac{d}{dx} e^{-ix\xi}\right) e^{-\lambda x^2} dx = -\frac{1}{2\lambda} \xi F(\xi)$$

Or,

$$F(0) = \int e^{-\lambda x^2} dx \underset{y=\sqrt{\lambda}x}{=} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

Alors,

$$F(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{-\xi^2/(4\lambda)} \qquad \prod_{j=1}^n F_j = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/(4\lambda)}$$

Ainsi,

$$\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/(4\lambda)}$$

Preuve. (de la proposition)
Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\lim_{\xi\to 0}\int \underbrace{e^{\ln\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)}_{|.|=e^{-\varepsilon|\xi|^2}|\hat{\varphi}(\xi)|\leqslant|\hat{\varphi}(\xi)|}\ d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon
\end{aligned}$$

$$I_\varepsilon(x) = \int e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}\left(\int e^{-iy\xi}\varphi(y)dy\right)d\xi$$

$(y,\xi)\mapsto e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}e^{-iy\xi}\varphi(y)\in L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)\to$ Fubini

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n_y}\varphi(y)e^{-i(y-x)\cdot\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2}d\xi dy \\
&= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^n\int e^{-frac|y-x|^2 4\varepsilon}\varphi(y)dy \\
&\underset{y-x=\sqrt{4\varepsilon}z}{=} (\sqrt{\pi})^n 2^n\int e^{-|z|^2}\varphi(x+\sqrt{4\varepsilon}z)dz
\end{aligned}$$

$$\lim I_\varepsilon = 2^n(\sqrt{\pi})^n\underbrace{\int e^{-|z|^2}dz}_{(\sqrt{\pi})^n}\varphi(x)$$

Donc $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi)(x) = (2\pi)^{-n}(2\pi)^n\varphi(x) = \varphi(x)$. ∎

2 Espace des distributions tempérées

Définition 1

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des formes linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{C}$. On l'appelle l'espace des "ditributions tempérées". $T \in \mathcal{S}'$ signifie que :

$$T\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ linéaire et } \exists k, l \in \mathbb{N}, C > 0 : \ \langle T, \varphi \rangle \leqslant C \sum_{|\alpha|=k, |\beta|=l} \sup |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)| \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Exemples.

1. δ_{x_0} distribution de Dirac en $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \qquad |\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| \leqslant \sup \ |\varphi|$$

Donc $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'$.

2. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. $f \mapsto T_f$ fonction d'évaluation.

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant \int |f(x)||\varphi(x)|dx \leqslant \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \left(\int |\varphi|^{p'} \right)^{1/p'}$$

(a) Si $p = 1$, $\leqslant \left(\int |f| \right) \sup |\varphi|$

(b) si $p > 1$, $p' < +\infty$, Hölder donne :

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p} \int (1 + |x|)$$

...

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ f & \longmapsto & T_f \end{array} \right. \quad \text{surjective}$$

$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{S}'$ à travers cette surjection.

$T_f \equiv 0 \Rightarrow f = 0$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{S} \ \Rightarrow \ f = 0 \text{ p.p.}$$

Soit $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\rho \geqslant 0$, $\int \rho(x)dx = 1$ posons :

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$$

Pour y fixé, $x \mapsto \rho(x + y) \in \mathcal{S}$.

$$\langle T_f, \rho_\varepsilon(-x + y) \rangle = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Or,

$$\int f(x)\rho_\varepsilon(-x + y)dx = (f * \rho_\varepsilon)(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(y) \text{ p.p}$$

Donc $f = 0$ p.p.

3 Opérations sur $\mathcal{S}'$

3.1 Multiplication par une fonction à croissance lente

$$f \in \mathcal{C}^\infty \quad \partial_x^\alpha f(x) \leqslant C(1+|x|)^m$$

Si f est à croissance lente, $T \in \mathcal{S}'$, $fT \in \mathcal{S}'$

$$\langle f \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f \cdot \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

$$|\langle fT, \varphi \rangle| = |\langle T, f\varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant l} \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta (f \cdot \varphi)|$$

On a :

$$\partial^\beta (f\varphi) = \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \binom{\beta}{\beta_1} \partial_x^{\beta_1} f \partial^{\beta_2} \varphi$$

Donc en particulier,

$$|x^\alpha \partial_x^\beta (f\varphi)| \leqslant \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \binom{\beta}{\beta_1} |\partial_x^{\beta_1} f| |x|^\alpha |\partial_x^{\beta_2} \varphi \leqslant C_{\beta_1} (1+|x|)^{m_{\beta_2}}$$

Conséquence. $f(x) = \mathbb{1} \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{S}'$. Si P est un polynôme en x alors $P(x) \cdot \mathbb{1} \in \mathcal{S}'$.

3.2 Dérivation

Soit $T \in \mathcal{S}'$.

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

$$\left| \langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle \right| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant l} \sup \left| x^\alpha \partial_x^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|$$

Exemples.

1. $f(x) = e^x e^{ie^x} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (\underbrace{e^{ie^x}}_{\in \mathcal{L}^\infty}) \in \mathcal{S}'$

2. $f(x) = e^{x^2} \notin \mathcal{S}'$. En effet, soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\psi \geqslant 0$ telle que supp$\psi \subset [0,2]$ et $\psi = 1$ sur $[1/2, 1]$. Posons :

$$\varphi_j(x) = \psi(x/j) e^{-x}$$

Alors,

$$\langle T_f, \varphi_j \rangle = \int_0^{2j} e^{x^2} e^{-x} \psi(x/j) dx \geqslant \int_{j/2}^{j} e^{x^2} e^{-x} dx \geqslant e^{j^2/4 - j} \frac{j}{2} \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$$

Et on a bien φ_j dans $\mathcal{S}'$ car :

$$x^\alpha \partial_x^\beta \varphi_j = x^\alpha \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} C_{\beta \beta_1} \frac{1}{j |\beta_1|} \left(\partial_x^{\beta_1} \psi \right) \left(\frac{x}{j} \right) e^{-x}$$

Ainsi,

$$\sup |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi_j| \leqslant C_\beta \sum_{\beta = \beta_1 + \beta_2} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^{\beta_1} \psi| \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha e^{-x}| = C_{\alpha, \beta}$$

3. Idem pour $f(x) = e^{|x|} \notin \mathcal{S}'$

Remarque. Pour $f \in \mathcal{C}^1$, f' au sens des distributions correspond au f' usuel. Au sens des distributions :

$$\langle f', \varphi' \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = \int f(x)\varphi'(x)dx$$

3.3 Convergence des suites

Définition 2

Soit (T_j) une suite de $\mathcal{S}'$ et $T \in \mathcal{S}'$. On dit que $T_j \longrightarrow T$ dans $\mathcal{S}'$ si :

$$\lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Théorème 1

Soit (T_j) une suite de $\mathcal{S}'$. Supposons que $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ $(\langle T_j, \varphi \rangle)$ converge dans $\mathbb{C}$. Alors, $\exists T \in \mathcal{S}'$ tel que $T_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} T$ dans $\mathcal{S}'$ (convergence simple, topologie faible-$*$).

C'est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus dans les espaces "localement convexes"

3.4 Fourier

$T \in \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ où :

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$|\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle| = |\langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle| = C \sum_{|\alpha|\leqslant k, |\beta|\leqslant l} \sup |x^\alpha \partial_x^\beta \mathcal{F}\varphi(x)| \leqslant C' \sum_{|\alpha|\leqslant k', |\beta|\leqslant l'} \sup |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi|$$

Proposition 2

1. $\mathcal{F} \colon \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ est continue sur les suites
2. Posons $\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$ alors :
$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}'}$$
3. Notons $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, alors :
$$\mathcal{F}(D_j T) = \xi_j \mathcal{F}T \quad \forall T \in \mathcal{S}'$$
4. $\mathcal{F}(x_j T) = -D_j \mathcal{F}T \ \forall T \in \mathcal{S}'$

Preuve.

1. $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}$:
$$\langle \mathcal{F}T_j, \varphi \rangle = \langle T_j, \mathcal{F}\varphi \rangle \xrightarrow[j\to+\infty]{} \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle$$
2. $\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

3.

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(D_jT), \varphi\rangle &= \langle D_jT, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, -D_j\mathcal{F}\varphi\rangle \\
&= -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\int e^{-ix\xi}\varphi(\xi)d\xi = \int e^{-ix\xi}\xi_j\varphi(\xi)d\xi \\
&= \langle T, \mathcal{F}(\xi_j\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}T, \xi_j\varphi\rangle \\
&= \langle \xi_j\mathcal{F}T, \varphi\rangle
\end{aligned}
$$

■

Fourier et convolution

Définition 3 (convolution)

Pour $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ on note :

$$T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x - .)\rangle$$

Théorème 2

1. $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'$
2. $\mathcal{F}(T * \varphi) = \mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}\varphi$

Corollaire 1

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3.5 Opérations et rotations

Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}'$ on a $T \circ A \in \mathcal{S}'$ où :

$$\langle T \circ A, \varphi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle T, \varphi \circ A^{-1}\rangle$$

On dit que T est invariant par rotation si $T \circ A = T$ $\forall A \in O(n)$.

Proposition 3

Soit $T \in \mathcal{S}'$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathcal{F}(T \circ A) = \frac{1}{|\det A|}(\mathcal{F}T) \circ {A^{-1}}^T$$

Corollaire 2

Si T est invariant par rotation alors $\mathcal{F}T$ aussi i.e. :

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}T \circ B \quad \forall B \in O(n)$$

4 Équation de Schrödinger

$$i\partial_t u + \Delta u = 0$$

4.1 Espaces de Sobolev

Soit $s \in \mathbb{R}$, on définit :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ : \ \hat{u} \text{ mesurable et } (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) \Big\}$$

H^s est un Hilbert pour :

$$(u,v)_s = \int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi \qquad \|u\|_{H_s} = \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

et H^s s'injecte continûement dans $H^{s'}$ pour $s \geqslant s'$.

Si $s = j \in \mathbb{N}$, notons :

$$\tilde{H}^k = \{ u \in \mathcal{L}^2 \ : \ D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| = k \}$$

$$\|u\|_{\tilde{H}^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u\|^2_{\mathcal{L}^2} \right)^{1/2}$$

alors $H^s = \tilde{H}^k$ algébriquement et topologiquement.

Théorème 3

Si $s > \frac{n}{2} + p$ alors $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûement dans :

$$\mathcal{C}^p_{\to 0}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n) \ : \ \lim_{|x| \to +\infty} |\partial^\alpha u(x)| = 0 \text{ pour } |\alpha| \leqslant p \Big\}$$

Preuve.
$\mathcal{F} \colon \mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^0_{\to 0}$. Soit $l \leqslant p$.

$$|\xi|^l |\hat{u}(\xi)| = \underbrace{\frac{\xi^l}{(1+|\xi|)^{s/2}}}_{\leqslant \frac{(1+|\xi|)^p}{(1+|\xi|)^s} \leqslant \frac{1}{(1+|\xi|)^{s-p}} \in \mathcal{L}^2} \quad \underbrace{(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi)|}_{\in \mathcal{L}^2} \in \mathcal{L}^1$$

D'où $|\xi|^l \hat{u} \in \mathcal{L}^1$ pour $l \leqslant p$.

$$|\widehat{D^\alpha u}| = |\xi^\alpha \hat{u}| \leqslant c(1+|\xi|)^p |\hat{u}| \in \mathcal{L}^1$$

$\widehat{D^\alpha u} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\widehat{D^\alpha u}) = D^\alpha u$ ∎

Théorème 4

Soit $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ alors il existe une unique $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$ avec $\partial_t u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{c} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{array} \right.$$

Preuve.

1. *Unicité.* Soit u_1 et u_2 vérifiant le système. Posons $u = u_1 - u_2$.

$$\left\{ \begin{array}{c} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

   $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s)$, $u_t \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s-2})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(t,.)\|^2_{H^{s-2}} &= \frac{d}{dt}(u(t,.), u(t,.))_{H^{s-2}} \\ &= 2\Re(\partial_t u(t,.), u(t,.))_{H^{s-2}} \\ &= 2\Re(i\Delta u(t,.), u(t,.))_{H^{s-2}} \end{aligned}$$

   Or,

$$\begin{aligned} (i\Delta u(t,.), u(t,.))_{H^{s-2}} &= i\int (1+|\xi|^2)^{s-2} \times \big(-|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi)\overline{\hat{u}(t,\xi)}\big) d\xi \\ &= i\int (1+|\xi|^2)^{s-2} \times \big(-|\xi|^2 |\hat{u}(t,\xi)|^2\big) d\xi \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

   D'où $\frac{d}{dt}\|u(t,.)\|^2_{H^{s-2}} = 0$ et donc :

$$\|u(t,.)\|^2_{H^{s-2}} = \|u(0,.)\|^2_{H^{s-2}} = 0$$

2. *Existence.* Posons :

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\underbrace{e^{it|\xi|^2}}_{\in \mathcal{S}'}\hat{u}_0)$$

   (a) u est bien défini i.e. $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t,.) \in \mathcal{S}'$

   (b)

$$\begin{aligned} \|u(t,.)\|^2_{H^s} &= \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \\ &= \int (1+|\xi|^2)^s \left| e^{it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \|u_0\|^2_{H^s} \end{aligned}$$

$$\|u(t,.) - u(t',.)\|^2_{H^s} = \int (1+|\xi|^2)^s \left| e^{it|\xi|^2} - e^{it'|\xi|^2}\right| |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi$$

   (c) $u(0,.) = u$

   (d) $i\partial_t u = -\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^2 e^{it|\xi|^2}\hat{u}_0\right) = \Delta u$

   (e) $\partial_t u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s-2})$

■