Probabilités

Chapitre 5 : Constructions de suites de variables aléatoires

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

Objectif. Si on se donne $\mu_1, \mu_2, ...$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Peut on trouver sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de v.a. $X_1, X_2, ...$ indépendantes telles que $X_i \sim \mu_i$?

Moralement. $X = (X_1, X_2, ...) \sim \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ...$

1 Cas 1 : Construction de X_1 de loi μ_1

Réalisation canonique :

$$X_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_1) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

On veut quelque chose de plus constructif avec comme espace de départ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$.

Définition 1 (fonction de répartition)

Si X est une v.a. à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit :

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leqslant t) \end{array} \right. = \mu_X(]-\infty, t])$$

Remarque. F_X ne dépend que de la loi de X, on définit pour une probabilité $F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t])$.

Propriété 1

$$F_\mu = F_\nu \ \Rightarrow \ \mu = \nu$$

Preuve.

F_μ caractérise μ sur $C = \{]-\infty, t] | t \in \mathbb{R}\}$ qui est une classe stable par intersection finie qui engendre la tribu. $\square$

Propriété 2

La fonction de répartition vérifie :

- fonction croissante
- continue à droite
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$

Preuve.

- soit $s < t$, $]-\infty, s] \subset]-\infty, t] \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(X \leqslant s) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant t)$
- Si $x_n \to 0$, $\cap]-\infty, t + x_n] =]-\infty, t]$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant t) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant t + x_n) \to \mathbb{P}(X \leqslant t)$
- $\cup]-\infty, n] = \mathbb{R}$
- $\cap]-\infty, -n] = \emptyset$

$\square$

Propriété 3 (une sorte de réciproque)

Si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que F croissante, continue à droite, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, et $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Alors, en posant $F^{<-1>}(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} | F(t) \geqslant u\}$ pour $0 < u < 1$, on a $F^{<-1>}(U)$ qui a pour fonction de répartition F.

Application. $F_\mu^{<-1>}(U) \sim \mu$. $\left(F_\mu^{<-1>}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Leb}) \to \mathbb{R} \text{ est une v.a. de loi } \mu\right)$.

Exemple. $\mu = \mathcal{E}(\lambda)$,

$$F_\mu(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{t \geqslant 0}$$

$$F_\mu^{<-1>}(u) = \frac{\ln(1-u)}{\lambda}$$

Alors $\frac{\ln(1-U)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad$ si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Preuve.

Si $0 < u < 1$, on pose $A_u = \{t | \Gamma(t) \geqslant u\}$

- $\lim\limits_{+\infty} F = 1 > u$ donc $A_u \neq \emptyset$
- F croissante, donc si $t \in A_u$ on a $[t, +\infty[\subset A_u$ donc $A_u = [a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$
- $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ donc $A_u \neq \mathbb{R}$
- $a + \frac{1}{n} \in A_u \forall n \Rightarrow F(a + \frac{1}{n}) \geqslant u \underset{\text{cont à droite}}{\Rightarrow} F(a) \geqslant u \Rightarrow a \in A_u$

Donc A_u est de la forme $[a, +\infty[= [F^{<-1>}(u), +\infty[$.

$$\begin{aligned} F_{F^{<-1>}(U)}(t) &= \mathbb{P}(F^{<-1>}(U) \leqslant t \cap 0 < U < 1) \\ &= \mathbb{P}(t \in A_u) \\ &= \mathbb{P}(F(t) \geqslant U) \\ &= \int_0^1 \mathbb{1}_{u \leqslant F(t)} du = F(t) \end{aligned}$$

□

Remarque. Ceci caractérise les fonctions de répartitions.

2 Cas 2 : Construire $X_1, X_2, ...$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$

Propriété 4

Soient Z et $X_1, ..., X_n, ...$ des v.a. telles que :

- $Z \in [0, 1]$ p.s.
- $X_i \in \{0, 1\}$ p.s.
- $Z = \sum_{i=1}^n \frac{X^i}{2^i}$ p.s.

Alors $Z \sim \mathcal{U}([0, 1]) \Leftrightarrow X_1, X_2, ...$ est une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Remarque. Cela résout le problème car on se donne $Z \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et on pose X_i le i-ème indice du développement diadique de Z, $X_i = \lfloor 2^i Z \rfloor - 2\lfloor 2^{i-1} Z \rfloor$. Alors, $Z = \sum_{i \geqslant 1} \frac{X_i}{2^i}$ p.s. et donc les X_i ont la loi voulue.

Preuve.

Soit $A =$ "le développement est propre$''$ $= \{\nexists n$ tel qu $\forall i \geqslant n, X_i = 1\}$. Faisons comme si A p.s.

$$\begin{aligned} & X_1, ..., X_n \text{ v.a. indépendantes de loi } \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall (x_1, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n \ \mathbb{P}((X_1, ..., X_n) = x_1, ...x_n) = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1, ..., X_n = x_1, ..., x_n) &= \mathbb{P}\left((X_1, ..., X_n) = x_1, ...x_n, Z = \sum_{i \geqslant 1} \frac{X_i}{2^i}, A\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{X_i}{2^i}, Z = \sum_{i=1}^{+\infty}, A\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \in \left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \frac{1}{2^n}\right[\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\Leftrightarrow \forall n \forall x_1, ..., x_n \in \{0,1\}^n \quad \mathbb{P}\left(Z \in \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}\frac{1}{2^n}\right[\right) = \frac{1}{2^n}$$
$$\Leftrightarrow Z \sim \mathcal{U}([0,1])$$

On a bien A p.s. quelle que soit le côté de l'équivalence dont on part. En effet, si les X_i sont des v.a.i.i.d. $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$,

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \bigcap_{i \geqslant n} X_i = 1\right) \leqslant \sum_n \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \geqslant n} X_i = 1\right) = \sum_n \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \leqslant i \leqslant n+k-1} X_i = 1\right)}_{\frac{1}{2^k}} = \sum_n 0 = 0$$

Si $Z \sim \mathcal{U}([0,1])$,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap Z = \sum_{i \geqslant 1} \frac{X_i}{2^i}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}}_{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant \mathbb{P}(Z \in \mathbb{Q}) = 0$$

$\square$

Théorème 1 (généralisation)

Soit $Z \in [0,1]$ p.s., si X_i dans $\{0, ..., b-1\}$ p.s. $Z = \sum_{i \geqslant 1} \frac{X_i}{b^i}$

$$Z \sim \mathcal{U}([0,1]) \;\Leftrightarrow\; (X_i)_{i \geqslant 1} \text{ vaiid} \sim \mathcal{U}(\{0, ..., b-1\})$$

3 Construction de $U_1, U_2, ...$ v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
$((i,j) \to 2^{i-1}(2j+1)$ est une bijection de $(\mathbb{N}^*)^2 \to \mathbb{N})$
On pose $Y_{i,j} = X_{2^i(2j+1)}$, alors $(Y_{i,j})_{i,j \geqslant 1}$ est une famille de v.a. indépendantes. Par le lemme de regroupement $\mathcal{B}_j = \sigma(Y_{i,j} | i \geqslant 1)$ est une famille de tribus indépendantes et donc on pose $U_j = \sum_{i \geqslant 1} Y_{i,j}/2$ qui est $\mathcal{B}_j$-mesurable. Les U_j sont indépendants donc d'après le théorème précédent, $U_j \sim \mathcal{U}([0,1])$.