Probabilités

Chapitre 6 : Limites presque sûres

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

Objectif des probas. (entre autre) On observe plein d'aléas et on essaye d'identifier des évènements qui ont lieu tout le temps. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1 Lemme de Borel-Cantelli

Si on a une suite d'évènements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ on définit sa $\limsup$ par :

$$\begin{aligned}\overline{\lim} A_n &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ est dans une infinité de } A_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \forall n \geqslant 1,\ \exists\, p \geqslant n \ :\ \omega \in A_p\} \\ &= \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{p\geqslant n} A_p\end{aligned}$$

Donc $\overline{\lim} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarque.

$$\overline{\lim} A_n = \left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\omega \in A_n} = +\infty\right\} = \left\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\right\}$$

Lemme 1 (de Borel-Cantelli)

1. Si $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$
2. Si les (A_n) sont indépendants et $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$

Preuve.

1. $$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right] \underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

   Donc $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n}$ est une variable alétoire positive d'espérance finie donc est finie p.s.

   Donc $\underbrace{\sum_{n\geqslant 1} < +\infty}_{\text{complémentaire de } \overline{\lim}}$ p.s. Ainsi $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$.

2.
- $1-\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{p\geqslant n}\overline{A_p})$
- $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geqslant n}\overline{A_p}\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^{k}\overline{A_p}\right) \quad \forall k\geqslant n\\ &\underset{\text{idp}}{=} \prod_{p=n}^{k}\mathbb{P}\left(\overline{A_p}\right)\\ &= \exp\sum_{p=n}^{k}\ln(1-\mathbb{P}(A_p)) \quad \text{décroissante en } k\end{aligned}$$

  Donc :

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n}\overline{A_p}\right) &\leqslant \exp\sum_{p=n}^{+\infty}\ln(1-\mathbb{P}(A_p))\\ &\leqslant \exp\left(-\sum_{p=n}^{+\infty}\mathbb{P}(A_p)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc $\mathbb{P}\left(\cup_{n\geqslant 1}\cap_{p\geqslant n}\overline{A_p}\right)\leqslant \sum_{n\geqslant 1}0 = 0$. Donc on a bien $\overline{\lim} A_n$ p.s.

□

Application. (nombre univers)
Soit $b\in\mathbb{N}, b\geqslant 2$ et $x\in\mathbb{R}$. On regarde la décomposition de x en base b.

$$x = \underset{\in\mathbb{Z}}{x_0} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{x_i}{b^i} \qquad x_i\in\{0,...,b-1\}$$

x_i non tous égaux à $b-1$ à partir d'un certain rang.
Si $l\geqslant 1, l\in\mathbb{N}, m\in\{0,...,b-1\}^l$ est un mot de longueur l. On regarde :

$$N_m(x) = \mathrm{Card}\{i\geqslant 1 \mid (x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+l-1}) = m\}$$

le nombre d'occurence de m dans x.
On dit qu'un nombre x est univers en base b si pour tout l, m on a $N_m(x) = +\infty$.

Propriété 1

Soit $X\sim\mathcal{U}([0,1])$ alors ($\forall b\geqslant 2, X$ est univers en base b p.s)

Remarque. Ce résultat dit que tout nombre assez générique est univers mais il est très difficile d'en exhiber.

Remarque. Cela reste vrai pour n'importe quelle loi à densité par rapport à Lebesgue. Soit :

$$A = \{x \mid x \text{ n'est pas univers en toute base}\}$$

Alors $\text{Leb}(A \cap [0,1]) = 0$ et de même $\text{Leb}(A) = 0$.
Si μ probabilité de densité f,

$$\mu(\{\text{univers en toute base}\}) = 1 - \mu(A) = 1 - \int_A f(x)dx = 1$$

Preuve.
Il suffit de prouver que :

- pour b fixé $\geqslant 2$
- pour l fixé $\geqslant 1$
- pour m fixé $\in \{0, ..., b-1\}^l$

on a $N_m(x) = +\infty$ p.s.
En effet :

$$(X \text{ est univers en toute base}) \sim \left[\bigcap_{b \geqslant 2} \bigcap_{l \geqslant 1} \bigcap_{m \in \{0,...,b-1\}^l} \{N_m(x) = +\infty\}\right]$$

est donc p.s. comme intersection dénombrable de p.s.
Rappel. $X_i = \lfloor bX \rfloor - b\lfloor b^{i-1}X \rfloor \quad X = \sum \frac{X_i}{b^i}$
Alors les (X_i) sont indépendants de loi $\mathcal{U}(\{0, ..., b-1\})$.
Posons :

$$A_p = \{(X_{pl+1}, X_{pl+2}, ..., X_{pl+l} = m)\}$$

Les X_i sont indépendants donc par regroupement, les A_p sont indépendants et A_p correspond à l'évènement "le mot m apparaît en position $pl+1$". Donc $\overline{\lim} A_p \subseteq \{N_m(x) = +\infty\}$.
Calculons : $\mathbb{P}(A_p) = \mathbb{P}\Big((X_{pl+1}, ..., X_{pl+l} = m)\Big) = \frac{1}{b^l}$. Donc $\sum_{p \geqslant 1} \mathbb{P}(A_p) = \sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{b^l} = +\infty$.
Ils sont indépendantss. Par Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_p) = 1$. Donc $N_m(X) = +\infty$ est p.s. □

2 Loi du 0-1 de Kolmogorov

Si (X_i) est une suite de variables aléatoires, définissons :

$$\tau_k = \sigma(X_k, X_{k+1}, ...) \quad \text{et} \quad \tau = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \tau_k \text{ appelée tribu terminale ou tribu de queue}$$

C'est bien une tribu en tant qu'intersection de tribus. C'est la tribu des événements ne dépendant pas d'un nombre fini de X_i.

Théorème 1 (loi du 0-1 de Kolmogorov)
Si les $(X_i)_{i \geqslant 1}$ sont indépendants alors :

$$\forall A \in \tau, \ \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$$

Exemple. Si les A_i sont indépendants, on pose $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ et alors la loi du 0-1 s'applique et $\{\overline{\lim} A_n\} = \{\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\} = \{\sum_{n\geqslant k} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\}\ \forall k$. Donc $\overline{\lim} A_n \in \tau$ et $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) \in \{0,1\}$.

Exemples. (d'événements dans τ)

- $\{\overline{\lim} X_i \leqslant 0\}$
- $\Big\{\text{Card } \{i \geqslant 1 \mid X_i \in A\} = +\infty\Big\}$
- $\sum_{i\geqslant 1} \frac{X_i}{2^i} < +\infty$

Preuve.
Soit $A \in \tau$ et soit $\eta = \{B \in \mathcal{A} \mid B, A \text{ indépendants}\}$. η est une classe monotone :

- Soient $B, C \in \eta$ avec $B \subset C$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((C\backslash B) \cap A) &= \mathbb{P}((C \cap A)|(B \cap A))\\ &= \mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(B \cap A)\\ &= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)\\ &= [\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)]\mathbb{P}(A)\\ &= \mathbb{P}(C\backslash B)\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

  donc $C\backslash B \in \eta$

- Soit (B_n) une suite croissante de η :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_n B_n\right) \cap A\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_n (B_n \cap A)\right)\\ &= \lim \uparrow \mathbb{P}(B_n \cap A)\\ &= \lim \uparrow [\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A)]\\ &= \mathbb{P}(A)[\lim \uparrow \mathbb{P}(B_n)]\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

  Donc $\bigcup_n B_n \in \eta$

Par regroupement, $\sigma(X_1, ..., X_{n-1})$ est indépendant de $\tau_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, $A \in \tau_n$. Donc $\sigma(X_1, ..., X_{n-1}) \subseteq \eta$. Donc $\mathcal{C} = \bigcup_{n\geqslant 1} \uparrow \sigma(X_1, ..., X_m) \subseteq \eta$. Or $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. Donc :

$$\sigma(X_1, X_2, ...) = \sigma(\mathcal{C}) \underset{\text{classes monotones}}{=} \eta(\mathcal{C}) \subseteq \eta$$

Comme $\tau \subset \sigma(X_1, X_2, ...)$.
Donc $A \in \tau \subset \eta$, ainsi A est indépendant de lui-même :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

D'où $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

Application. (récurrence de la Marche Aléatoire Simple sur $\mathbb{Z}$)

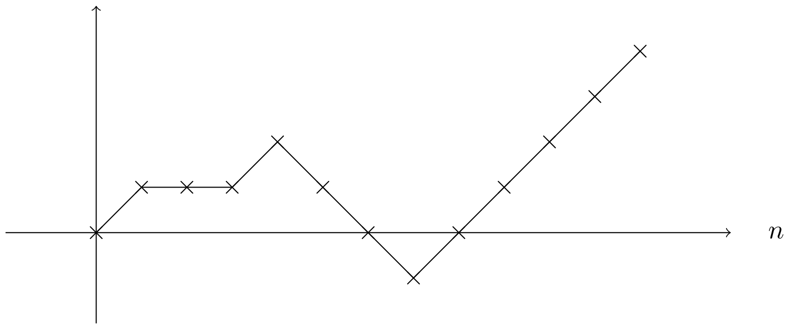
- Une marche aléatoire se construit à partir d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi μ : $X_1, X_2, ...$ (incréments de la marche). La marche alétoire issue de x, d'incréments (X_i) est $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} S_0 = x \\ S_n = x + X_2 + ... + X_n \end{cases}$$

- On parle de MAS sur $\mathbb{Z}$ si les (X_i) sont des variables aléatoires iid de loi : $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Soit S la marche issue de 0 :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = X_1 + ... + X_n \end{cases}$$

Objetcif. Comportement de la marche S en temps long. Que dire du nombre de passages en 0 de S ? Est-il infini ou non ?



Propriété 2

$$\left(\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} S_n = +\infty ; \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} S_n = -\infty\right) \quad \text{p.s.}$$

("la marche oscille")

Corollaire 1

$$(\forall x \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = x\} = +\infty) \quad \text{p.s.}$$

On dit que la marche est "récurrente".

Preuve. (du corollaire)
D'après la proposition, S_n passe une infinité de fois de valeurs $> x$ à des valeurs $< x$ et à chaque fois passe par x. $\square$

Preuve. (de la proposition)
Soit :

$$B := \text{“la marche est bornée''} = \text{“}\overline{\lim}\ S \text{ est finie et la } \underline{\lim} \text{ aussi''} = \bigcup_{p \geqslant 1} \uparrow \{\forall n,\ -p \leqslant S_n \leqslant p\}$$

Montrons que $\mathbb{P}(B) = 0$. Soit $p \geqslant 1$:

$\{\forall n,\ -p \leqslant S_n \leqslant p\} \subseteq \{\forall n, \forall m,\ S_n - S_m \leqslant 2p\} \subseteq \{\forall n,\ S_{n+2p+1} - S_n \neq 2p+1\} = \{\forall n,\ X_n+1, ..., X_{n+2p+1} \neq 1\}$

Mais les $(X_i)_{i \geqslant 1}$ sont des v.a. indépendantes valant ± 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi en posant :

$$A_l = \left\{ \left(X_{l(2p+1)+1}, ..., X_{l(2p+1)+2p+1} \right) = (1, ..., 1) \right\}$$

on définit des événements de probabilité $\frac{1}{2^{2p+1}}$ donc $\sum \mathbb{P}(A_l) = +\infty$.
Ainsi par Borel-Cantelli $\overline{\lim} A_l$ est p.s. Or :

$$\{\forall n,\ (X_{n+1}, ..., X_{n+2p+1}) \neq (1, ..., 1)\} \subseteq (\overline{\lim} A_n)^C$$

Ainsi $\mathbb{P}(\forall n,\ -p \leqslant S_n \leqslant p) = 0$, donc $\mathbb{P}(B) = 0$.

Soit :

$$\begin{aligned} A_+ &:= \left(\overline{\lim_{n \geqslant 1}} S_n = +\infty \right) = \left(\overline{\lim_{n \geqslant k}} S_n = +\infty \right) \\ &= \left(\overline{\lim_{n \geqslant k}} (S_n - S_k) = +\infty \right) \\ &= \left(\lim_{n \geqslant k} (X_{k+1} + ... + X_n) = +\infty \right) \quad \in \tau_k \quad \forall k \end{aligned}$$

Donc $A_+ \in \tau$ et par la loi du 0-1, $\mathbb{P}(A_+) \in \{0, 1\}$.
Supposons par l'absurde que $\mathbb{P}(\overline{\lim} S_n = +\infty) = 0$. $(X_i)_{i \geqslant 1}$ a même loi que $(-X_i)_{i \geqslant 1}$ donc S et $-S$ ont même loi. D'où :

$$\mathbb{P}(\underline{\lim}\ S = -\infty) = \mathbb{P}(\underline{\lim}\ \ -S = -\infty) = \mathbb{P}(\overline{\lim}\ S_n = +\infty) = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}(\overline{B}) &= \mathbb{P}(\overline{\lim}\ S = +\infty \text{ ou } \underline{\lim}\ S = -\infty) \\ &\leqslant \mathbb{P}(\overline{\lim}\ S = +\infty) + \mathbb{P}(\underline{\lim}\ S = -\infty) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Absurde. Donc $\mathbb{P}(\overline{\lim}\ S = +\infty) = 1$. $\square$

3 Loi forte des grands nombres

Théorème 2 (loi forte des grands nombres)

$X_1, X_2, ...$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi L^1 (i.e. $\mathbb{E}[|X_i|] = \int |x| d\mu_{X_i}(x) < +\infty$). Alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[X_1] \quad \text{p.s.}$$

Remarque. On dit que la moyenne empirique tend vers la moyenne théorique.

Remarque. Vrai dans $\mathbb{R}^d$, il suffit de l'appliquer sur chaque coordonnée.

Remarque. On peut supposer que pour tout i : $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Si on a le résultat dans ce cas alors si on prend des Y_i non centrées :

$$\frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} = \mathbb{E}[Y_1] + \underbrace{\frac{(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]) + ... + (Y_n - \mathbb{E}[Y_n])}{n}}_{\text{indépendantes centrées de même loi } L^1}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Y_1] + \underbrace{\mathbb{E}[Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]]}_{\text{LFGN}} = \mathbb{E}[Y_1]$$

Remarque. Démontrons le résultat dans une version plus faible et plus simple. Supposons que la loi fait que les variables sont L^4. On suppose $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma_2$ et $\mathbb{E}[X_i^4] = m_4$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n \in L^4$.

$$\mathbb{E}[S_n^4] = \mathbb{E}\left[(X_1 + ... + X_n)^4\right] = \sum_{1 \leqslant i_1 ... i_4 \leqslant n} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}]$$

Si l'un des indices n'apparaît qu'une fois, par exemple i_1 :

$$\mathbb{E}[\underbrace{X_{i_1}} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}] \underset{\text{idp}}{=} \underbrace{\mathbb{E}[X_{i_1}]}_{0} \mathbb{E}[X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}] = 0$$

Les seuls termes restant sont donc ceux où :

- $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$
- il y a deux paires

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^4] &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{E}[X_i^4] + 3 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{E}[X_i^4] + 3 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[X_j^2] \\
&= nm^4 + 3n(n-1)(\sigma^2)^2 \\
&\leqslant Cn^2
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \underset{\text{Fubini} \geqslant 0}{=} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4} \mathbb{E}[S_n^4] \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{C}{n^2} < +\infty$$

$\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{S_n}{n}\right)^4$ est une v.a. positive d'espérance finie donc $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{S_n}{n}\right)^4$ finie p.s. C'est une série convergente donc le terme générique $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ p.s. $\square$

Preuve.
$X_1, X_2, ...$ $\mathbb{E}[X_i] = 0$, même loi, L^1, indépendants. On veut $\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit de montrer que $X_1 + ... + X_n$ ne croît pas linéairement.
Pour $a > 0$, soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} (X_1 + ... + X_n - na)$.

Étape 1. Montrons qu'il suffit de prouver que $\mathbb{P}(M < +\infty) > 0$. Si $\mathbb{P}(M < +\infty) > 0$.

$$\begin{aligned}
\{M < +\infty\} &= \left\{ \sup_{n \geqslant 0} (X_1 + ... + X_n - na) < +\infty \right\} \\
&= \left\{ \sup_{n \geqslant k} (X_1 + ... + X_n - na) - (X_1 + ... + X_k) < +\infty \right\} \\
&= \left\{ \sup_{n \geqslant k} (X_{k+1} + ... + X_n - na) < +\infty \right\} \quad \in \tau_k
\end{aligned}$$

Vrai pour tout k, donc $\{M < +\infty\} \in \tau$ la tribu terminale des X_i.
Mais les X_i sont indépendants donc la loi du 0-1 de Kolmogorov s'applique :

$$\mathbb{P}(M < +\infty) \in \{0, 1\} \qquad \text{donc} \quad M < +\infty \text{ p.s.}$$

$M = \sup_{n \geqslant 1}(X_1 + ... + X_n - na)$, donc $X_1 + ... + X_n - na \leqslant M < +\infty$ p.s. Donc :

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \leqslant \frac{M}{n} + a \quad \text{p.s.}$$

Comme $M < +\infty$ p.s :

$$\overline{\lim} \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \leqslant a \quad \text{p.s.}$$

Si c'et vraiment $\forall a > 0$ en particulier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $(a = \frac{1}{p})$:

$$\left(\underbrace{\forall p \in \mathbb{N}^*}_{\text{intersection dénombrable}} , \ \overline{\lim} \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \leqslant \frac{1}{p} \right) \text{ p.s}$$

Donc $\overline{\lim} \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \leqslant 0$ p.s. Le problème est symétrique donc on montre de même :

$$\overline{\lim} \frac{-X_1 - X_2 - ... - X_n}{n} \leqslant 0 \quad \text{p.s.}$$

Donc

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Étape 2. Montrons que $\forall a > 0$, $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_1 + ... + X_n - na$ est fini avec un probabilité > 0.
Moralement c'est vrai car :

$$X_1 + ... + X_n - na = (X_1 - a) + ... + (X_n - a)$$

à la $n-$ième étape on rajoute $X_n - a$ qui est une v.a. d'espérance $\mathbb{E}[X_n - a] = -a < 0$. Cette suite à tendance à partir vers $-\infty$.
Supposons, par l'absurde, que ça ne soit pas le cas. On aurait :

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_1 + ... + X_n - na = +\infty \quad \text{p.s.}$$

Posons :

$$M_k = \sup_{0 \leqslant n \leqslant k} (X_1 + ... + X_n - na)$$

M_k est une suite croissante donc $M_k \uparrow M(= +\infty)$ p.s. Essayons d'exprimer "$M_{k+1} = M_k + 1$ pas".

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \max(0, X_1 - a, X_1 + X_2 - 2a, ..., X_1 + ... + X_{k+1} - (k+1)a) \\ &= \max(0, (X_1 - a) + \sup_{0 \leqslant n \leqslant k} X_2 + ... + X_{1+n} - na) \quad \text{(deuxième terme nul pour } n = 0) \end{aligned}$$

Posons $\tilde{M}_k = \sup_{0 \leqslant n \leqslant k}(X_{1+1} + ... + X_{1+n} - na)$. $\tilde{M}_k$ s'obtient à partir de la suite $(X_2, X_3, ...)$ de la même manière que M_k s'obtient à partir de $(X_1, X_2, ...)$. Or $(X_2, X_3, ...) \underset{\text{loi}}{=} (X_1, X_2, ...)$. Alors $\tilde{M}_k \underset{\text{loi}}{=} M_k$.

On veut en déduire $\tilde{M} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{M}_k = +\infty$ p.s. Deux arguments possibles :

- La suite $(\tilde{M}_k)_{k \geqslant 0} = F((X_{1+i})_{i \geqslant 1})$ où F est tel que $(M_k) = F((X_i)_{i \geqslant 1})$. Donc $(\tilde{M}_k)_{k \geqslant 0} \underset{\text{loi}}{=} (M_k)_{k \geqslant 0}$. $\tilde{M} \underset{\text{loi}}{=} M$ donc $\tilde{M} = +\infty$ p.s.
- Ou bien :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{M} \leqslant t) &= \mathbb{P}(\sup_k \tilde{M}_k \leqslant t) \\ &= \lim_k \uparrow \mathbb{P}(\tilde{M}_k \leqslant t) \qquad \tilde{M}_k \text{ croissant} \\ &= \lim_k \uparrow \mathbb{P}(M_k \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\underbrace{\sup\ M_k}_{0} \leqslant t) = 0 \end{aligned}$$

  Donc $\tilde{M} > t$ p.s. $\forall t$. Ainsi $\tilde{M} = +\infty$ p.s.

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \max(0, (X_1 - a) + \tilde{M}_k) \\ M_{k+1} - \tilde{M}_k &= \max(-\tilde{M}_k, X_1 - a) \end{aligned}$$

Prenons l'espérance (tout estt L^1 puisque $\mathbb{E}[|M_k|] = \mathbb{E}[|\sup_{0 \leqslant n \leqslant k} X_1 + ... + X_n - na|] \leqslant \sup_{0 \leqslant n \leqslant k} \mathbb{E}[|X_1 + ... + X_n - na|] < +\infty$).

- D'un côté,

$$\mathbb{E}[M_{k+1} - \tilde{M}_k] = \mathbb{E}[M_{k+1}] - \mathbb{E}[\tilde{M}_k] = \mathbb{E}[M_{k+1}] - \mathbb{E}[M_k] = \mathbb{E}[\underbrace{M_{k+1} - M_k}_{\geqslant 0 \text{ car croissant}}] \geqslant 0$$

- À droite,

$$\mathbb{E}[\max(X_1 - a), -\tilde{M}_k] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \max(X_1 - a, \underbrace{-\tilde{M}}_{-\infty}) = X_1 - a \quad \text{p.s.}$$

  Donc $|\max(X_1 - a, -\tilde{M}_k)| \leqslant |X_1 - a| \in L^2$ p.s. Donc par TCD :

$$\mathbb{P}[\max(X_1 - a, -\tilde{M}_k)] \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathbb{E}[X_1 - a] < 0$$

  Absurde car on a vu que l'espérance du terme de gauche est $\geqslant 0$. Donc $\mathbb{P}(M < +\infty) > 0$.

$\square$

Remarque. La LFGN dit que des observations répétées d'une expérience donne accès à des informations sur la loi.

- *en probabilités* : on a un espace de probabilité donné ou un modèle.
  Exemple : $X_1, X_2, ...$ v.a. indépendante $\mathcal{B}(\frac{3}{4})$ et on essaye d'en déduire des informations sur les X_i. On peut prouver que $\frac{X_1+...+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4}$ p.s.

- *en statistique* : la loi sur l'espace de probabilité est inconnue. Soit $X_1, X_2, ...$ v.a. indépendante de loi $\mathcal{B}(\theta)$ avec θ inconnu (on veut le retrouver).
  Par exemple $X_i = 1$ si le $i-$ème habitant veut voter "Oui" au référendum, 0 sinon. On connaît par contre un échantillon de taille n $(\hat{X}_1, ..., \hat{X}_n) \in \{0,1\}^n$. La LFGM nous dit que si on pose $\hat{\theta}_n = \frac{\hat{X}_1+...+\hat{X}_n}{n}$ alors $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta$ p.s. On dit que $\hat{\theta}_n$ est un *estimateur* de θ.

L'hypothèse L^1 est nécessaire.

Propriété 3

Si $X_1, ..., X_n$ v.a. indépendantes de même loi et $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\text{limite } \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \text{ existe dans } \mathbb{R}\right) = 0$$

Preuve.
Si $\frac{X_1+...+X_n}{n}$ converge dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\lim \underbrace{\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{X_1 + ... + X_{n-1}}{n-1} \times \frac{n-1}{n}}_{\frac{X_n}{n}} = 0$$

Donc $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
+\infty = \mathbb{E}[|X_1|] &\left(= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t\leqslant|X_1|}\right]\right) \\
&\underset{\text{Fubini } \geqslant 0}{=} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{t\leqslant|X_1|}\right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geqslant t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \underbrace{\mathbb{P}(|X_1| \geqslant t)}_{\leqslant \mathbb{P}(|X_1|\geqslant n)}dt \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geqslant n) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\underbrace{|X_n| \geqslant n}_{\text{evt idp de somme } +\infty}) \qquad \text{puisque les } X_i \text{ ont même loi}
\end{aligned}$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, $\overline{\lim}\ \{|X_n| \geqslant n\}$ p.s, donc "on a une infinité de n tels que $\frac{|X_n|}{n} \geqslant 1$" p.s, donc $\left(\overline{\lim}\ \frac{|X_n|}{n} \geqslant 1\right)$ p.s. Ainsi $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\square$

Application. (méthode d'intégration de Monte-Carlo)
Si on a $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et que l'on veut calculer $\int_0^1 f(x)dx$ juste à partir de valeurs de $f(x)$.
Algorithme. On simule $U_1, U_2, ...$ des v.a. uniformes sur $[0,1]$ indépendantes.
On renvoie $\frac{f(U_1)+...+f(U_n)}{n}$. La LFGN s'applique donc $\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(U_1)] = \int_0^1 f(x)dx$ p.s.

Application. (nombres normaux)
Soit $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$ une base, $x \in \mathbb{R}$. $x = \underset{\in\mathbb{N}}{x_0} + \sum_{i\geqslant 1} \frac{x_i}{b^i}$ sa décomposition en base b.
Pour $l \in \mathbb{N}^*$, $m \in \{0, ..., b-1\}^l$, on regarde :

$$N_m^n(x) = \mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant n \mid (x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+l-1}) = m\}$$

qui correspond au nombre d'occurences de m dans x avant le rang n.
On dit que x est *normal* en base b si $\forall l, \forall m$, $\frac{N_m^n(x)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b^l}$ (le rapport correspond à la proportion d'occurences de m).

Propriété 4

Si $Z \sim \mathrm{Leb}|_{[0,1]}$ alors (Z est normal en toute base) p.s.

Remarque. Comme pour les nombres univers ceci implique que si μ_Z a une densité par rapport à Lebesgue alors (Z est normal en toute base) p.s.

Preuve.
Il suffit de prouver qu'à b, l, m fixés $\frac{N_m^n(Z)}{p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b^l}$ p.s. car alors on fait l'intersection dénombrable $\cap_{b\geqslant 2} \cap_{l\geqslant 1} \cap_{m\in\{0,...,b-1\}^l}$. Posons :

$$X_i = \mathbb{1}_{m \text{ apparaît en position } i} = \mathbb{1}_{(Z_i,...,Z_{i+l-1})=m}$$

où $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ est le développement $b-$adique de Z (ce sont des v.a. indépendantes de loi uniforme $\{0, ..., b-1\}$).

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}((Z_i, ..., Z_{i+l-1}) = m) = \frac{1}{b^l}$$

Donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{b^l}\right)$. Mais les $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ne sont pas indépendantes.

$$N_m^n(Z) = X_1 + ... + X_n$$

Posons :

$$N_m^{n,r}(Z) = X_r + X_{r+l} + ... + X_{r+l(n-1)} \quad \text{pour } 1 \leqslant r \leqslant l$$

On a :

$$N_m^{n,1}(Z) + ... + N_m^{n,l}(Z) = X_1 + ... + X_{l+l(n-1)} = N_m^{nl}(Z)$$

Intérêt :

$$N_m^{n,1}(Z) = \underset{\sigma(Z_1,...,Z_{r+l-1} \text{ mes})}{X_1} + \underset{\sigma(Z_{r+l},...,Z_{r+2l-1}) \text{ mes}}{X_{r+l}} + ... + X_{r+l(n-1)}$$

Par regroupement, ces X_i sont indépendants. Donc par la LFGN :

$$\frac{N_m^{n,r}(Z)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{b^l} \quad \text{p.s.}$$

Donc :

$$\frac{N_m^{nl}(Z)}{n} = \frac{N_m^{n,1}(Z)}{n} + ... + \frac{N_m^{n,l}(Z)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \times \frac{1}{b^l} \text{ p.s.}$$

Limite de $\frac{N_m^n(Z)}{n}$:

$$\underbrace{\frac{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor l}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}} \underbrace{\frac{N_m^{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor}(Z)}{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{l}{b^l}} \leqslant \frac{N_m^n(Z)}{n} \leqslant \underbrace{\frac{N_m^{(\lfloor \frac{n}{l} \rfloor+1)l}(Z)}{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor + 1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{l}{b^l}} \underbrace{\frac{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor + 1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}}$$

Donc $\frac{N_m^n(Z)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b^l}$. □

Application. (construction d'une mesure singulière)
On se donne $(X_i)_{i\geqslant 1}$ des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{3})$. On pose $X = \sum_{i\geqslant 1} \frac{X_i}{2^i} \in [0,1]$ p.s.

- sa loi n'a pas d'atomes : si $x = \sum_{i\geqslant 1} \frac{x_i}{2^i} \in [0,1]$

  $$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\forall i, X_i = x_i) \leqslant \mathbb{P}(\forall 1 \leqslant i \leqslant k, X_i = x_i) \underset{\text{idp}}{=} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = x_i) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

  Donc $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

- la loi n'a pas de densité par rapport à Lebesgue. Posons $N = \{x | x \text{ est normal en base } 2\}$

  $$\frac{N_1^l(X)}{n} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{LFGN}} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

  donc $\mu_X(N) = \mathbb{P}(X \in N) = 0$. Si $\mu_X \geqslant f.\text{Leb}$ alors $0 = \mu_X(N) \geqslant \int_N f(x)dx = \int f(x)dx$ puisque $\text{Leb}(\bar{N}) = 0$ donc $f = 0$ dx p.p.