

Analyse complexe

TD3

Lucie Le Briquer

Exercice 8.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

Sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. On a $\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

1. $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n 1_{[0, n]}$. Donc par TCD :

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt &= \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{1}{s} t^s \right]_0^n - \frac{1}{s} \int_0^n t^s (-1) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^n t^s \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \frac{n-1}{n} \int_0^n t^{s+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt \\ &= \frac{1}{s(s+1) \dots (s+n-1)} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{1}{n} \times \underbrace{\int_0^n t^{s+n-1} dt}_{\frac{1}{s+n} n^{s+n}} \end{aligned}$$

3. En couplant 1 et 2 il vient :

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \dots (s+n)}$$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+n)}{n! n^s}$$

Fixons $s \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \frac{s(s+1)\dots(s+n)}{n!n^s} &= \left[s \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{i} \right) \right] n^{-s} \\ &= \left[s \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{i} \right) \right] e^{-s \ln n} \\ &= \left[s \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{i} \right) \right] e^{-s(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \gamma + o(1))} \\ &= \left[s \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{i} \right) \right] e^{-s\gamma} e^{-o(1)} \end{aligned}$$

Soit :

$$f_N(s) = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-s/n}$$

$f_N \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$f_N(s) = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^N e^{-s/n + \log(1+s/n)} = se^{\gamma s} \exp \left(\sum_{n=1}^N \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$$

→ Faux à priori

Soit K un compact de \mathbb{C} . Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_0, \forall s \in K$, on ait $\frac{s}{n} \in \mathcal{D}(s, 1/2)$. On peut prendre la détermination principale du log sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (i.e. $\log(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$)

$\forall s \in K$

$$\begin{aligned} f_N(s) &= \underbrace{\left[se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{N_0-1} \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-s/n} \right]}_{=g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})} \prod_{n=N_0}^N \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-s/n} \\ &= g(s) \prod_{n=N_0}^N \exp \left(\log \left(1 + \frac{s}{n} \right) - \frac{s}{n} \right) \\ &= g(s) \exp \left(\sum_{n=N_0}^N \left(\log \left(1 + \frac{s}{n} \right) - \frac{s}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Montrons que $\sum_{n \geq N_0} (\log(1+s/n) - s/n)$ CVN sur K . C'est le cas (en utilisant la détermination principale du log) puisque :

$$\left| \log \left(1 + \frac{s}{n} \right) - \frac{s}{n} \right| \leq C \frac{|s|^2}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$$

$\forall K$ compact de \mathbb{C} , f_N converge uniformément. La limite $\left(s \rightarrow se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-s/n} \right)$ est donc entière.

4. Question : quels sont les zéros de $\frac{1}{\Gamma}$?

Exercice 10.

Soit $a \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1 et $\theta \in \mathbb{R}$; on pose :

$$h(z) = h_{a,\theta}(z) = e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

$$h_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(0,1)$

1. Modification de la question : montrer que $h_a \in \text{Aut}(\mathcal{D})$

$$\forall z \in \mathcal{D}, |h_a(z)| < 1 :$$

Comme $h_a \in \mathcal{H}(\mathcal{D}) \cup \mathcal{C}(\overline{\mathcal{D}})$, principe du maximum :

$$\sup_{z \in \mathcal{D}} |h_a(z)| = \sup_{z \in \partial \mathcal{D}} |h_a(z)|$$

$$\forall |z| = 1,$$

$$\begin{aligned} |h_a(z)| &= \left| \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \right| \\ &= \left| \frac{a\bar{z} - z\bar{z}}{1-\bar{a}z} \right| \quad (\times |\bar{z}| = 1) \\ &= \left| \frac{a\bar{z} - 1}{1-\bar{a}z} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\forall z \in \mathcal{D}, |h_a(z)| \leq 1$. Alors par le principe du maximum si $\exists z \in \mathcal{D}$ tq $|h_a(z)| = 1$ alors h_a constant. Absurde. Donc $\forall z \in \mathcal{D}, |h_a(z)| < 1$.

On remarque que $h_a(0) = a$ et $h_a(a) = 0$. On montre que $\forall z \in \mathcal{D}$ on a $h_a \circ h_a(z) = z$ donc $h_a \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ et $h_a^{-1} = h_a$.

2.

3. *Lemme.* Soit $h \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ tel que $h(0) = 0$, alors h est une rotation. Le lemme de Schwarz donne $\forall z \in \mathcal{D}, |h(z)| \leq |z|$ et le lemme de Schwarz sur h^{-1} donne $\forall z \in \mathcal{D}, |h^{-1}(z)| \leq |z|$ donc $|h^{-1}(h(z))| \leq |h(z)|$, soit $|z| \leq |h(z)|$

Donc $\forall z \in \mathcal{D}, |h(z)| = |z|$. On est dans le cas d'égalité de Schwarz, donc h est une rotation.

Soit $f \in \text{Aut}(\mathcal{D})$.

- Si $f(0) = 0$ alors f est une rotation par le lemme.
- Sinon, $a = f^{-1}(0), |a| < 1$.

$f \circ h_a \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ et $f \circ h_a(0) = 0$ alors par le lemme, $f \circ h_a$ est une rotation. Donc $f = e^{i\theta} h_a$.

Exercice 11.

1. $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $f \in \mathcal{H}(H)$.

Montrons que f est une bijection de $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ sur $\mathcal{D}(0, 1)$.

$\forall z \in H$:

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 \\ &= \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $y > 0$, $(y-1)^2 < (y+1)^2$. D'où $|f(z)| < 1$

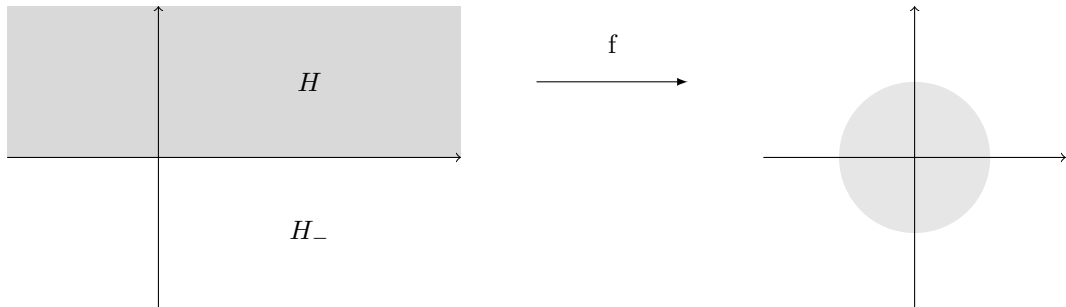
Que vaut f^{-1} ?

$$f^{-1}(z) = i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

et on vérifie que $\forall z \in \mathcal{D}$, $f^{-1}(z) \in H$

Donc f est bien une application conforme de H sur \mathcal{D} .

Autre preuve. $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{+1\}$ et f est holomorphe



$f(H)$ et $f(H_- \setminus \{-i\})$ sont des ouverts \rightarrow théorème de l'application ouverte.

$f(\mathbb{R}) = ?$ On a $f(H \cup (H_- \setminus \{-i\}) \cup \mathbb{R}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$f(\mathbb{R}) = \partial \mathcal{D} \setminus \{1\}$ et $f(\mathbb{R} \cup \infty) = \partial \mathcal{D}$.

On peut calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ et utiliser le fait que les homographies conservent les cercles-droites.

Donc $\underbrace{f(H)}_{\text{ouvert connexe}} \sqcup \underbrace{f(H_- \setminus \{-i\})}_{\text{ouvert connexe}} = \underbrace{\mathbb{C} \setminus \partial \mathcal{D}}_{2 \text{ composantes connexes}}$

donc $f(H) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$ ou \mathcal{D} (par connexité), en évaluant f en i , $f(i) \in \mathcal{D}$. Donc $f(H) = \mathcal{D}$

Théorème d'inversion globale. $f \in \mathbb{C}^1, f : U \rightarrow U, df(x)$ inversible $\forall x \in U, f$ injective

Dans \mathbb{C} :

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe, f non constante, $f'(z_0) = 0$

$$\exists l \geq 2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall 1 \leq k \leq l-1, f^{(k)}(z_0) = 0 \text{ et } f^{(l)}(z_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \sum_{n \geq l} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ f(z) - f(z_0) &= (z - z_0)^l \sum_{n \geq l} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-l} \\ &= (z - z_0)^l \varphi(z) \end{aligned}$$

avec $\varphi(z_0) \neq 0$

On peut prendre localement le log :

$$\varphi(z) = \exp \left(\frac{1}{l} \log(\varphi(z)) \right)^l = g(z)^l$$

D'où localement :

$$f(z) - f(z_0) = ((z - z_0)g(z))^l = (h(z))^l$$

De plus, $h'(z_0) \neq 0$, h holomorphisme local.

Localement, $f(z) = \omega$ admet l solutions : $f(z) - \omega = h(z)^l - \omega + f(z_0)$