Théorie spectrale
Chapitre 2 : De quelques thèmes d'analyse harmonique

Lucie Le Briquer

12 décembre 2017

Table des matières

1 Noyau et intégrale de Poisson sur le cercle

1.1 La mesure de Lebesgue du cercle unité

1.2 Le noyau de Poisson

1.3 L'intégrale de Poisson

1.4 Analycité des applications harmoniques

1.5 Inégalités de Harnack et théorème de Harnack

2 Introduction la théorie du potentiel dans le plan

2.1 Problème de Dirichlet sur les domaines de Jordan

2.2 Fonctions harmoniques positives et frontière de Martin

Théorème 1

$$\left\{\begin{array}{ccc} \text{mes. borélienne positive finie sur } \mathbb{S}_1 & \longrightarrow & \{\text{fonction harmoniques positives sur } \mathbb{D}\} \\ \mu & \longmapsto & P_\mu : z \mapsto \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta) d\mu(\zeta) \end{array}\right.$$

est une bijection.

Preuve.

Surjectivité. Soit $h \colon \mathbb{D} \longrightarrow [0, +\infty[$ harmonique positive.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ l_n \colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} \int_{\xi \in \mathbb{S}_1} h\left(\frac{n-1}{n}\zeta\right) f(\zeta) d\sigma(\zeta) \end{array}\right.$$

Alors l_n est une forme linéaire, positive ($f \geqslant 0, \Rightarrow l_n(f) \geqslant 0$ par positivité de la fonction harmonique h), de norme :

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_1} h\left(\frac{n-1}{n}\zeta\right) d\sigma(\zeta) \underset{\text{formule de la moy}}{=} h(0)$$

Par le théorème de Banach-Alaoglu, $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ extraction, $\exists l \colon \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire positive telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}) \quad l(f) = \lim_{n_k \to +\infty} l_{n_k}(f)$$

Par le théorème de représentation de Riesz, $\exists ! \mu$ mesure borélienne positive finie sur les compacts (donc finie sur $\mathbb{S}_1$) telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}) \quad l(f) = \int_{\mathbb{S}_1} f d\mu$$

Si $r_k = \frac{n_k - 1}{n_k}$, alors $\forall z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} P_\mu(z) &= \int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_1} P_z(\zeta) h(r_k) d\sigma(\zeta) \\ &= \lim_{k \to +\infty} h(r_k z) \qquad \text{formule de Poisson appliquée à } \left\{\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{D}} & \to & \mathbb{C} \\ \omega & \mapsto & h(r_k \omega) \end{array}\right. \\ &= h(z) \end{aligned}$$

□

2.3 Fonctions harmoniques bornées et frontière de Poisson

Théorème 2 (de Fatou)

$\forall h \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ harmonique, bornée, pour $\sigma-$presque tout $\zeta \in \mathbb{S}_1$, on a :

$$\mathrm{limrad}_h(\zeta) := \lim_{r \to 1^-} h(r\zeta) \text{ existe}$$

Et,

$$\forall f \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}),\ \mathrm{limrad}_{Pf} = f \quad \sigma - \text{presque partout}$$

Preuve.
Admis □

Nous allons essayer de caractériser les fonctions harmoniques bornées sur $\mathbb{D}$.

Théorème 3

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \Big(\{\text{fonctions harmoniques bornées sur } \mathbb{D}\}, \|h\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |h(z)| \Big) \\ f & \longmapsto & Pf \end{array} \right.$$

est un isomorphisme linéaire isométrique.

Preuve.
Par finitude de σ, $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}) \subset \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$ donc $f \mapsto Pf$ est bien définie, linéaire, et :

$$\|Pf\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta) \right| \leqslant \|f\|_\infty \times 1$$

Montrons la surjectivité. Soit $h \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ harmonique bornée, alors $\mathrm{limrad}_h \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}_1, \mathbb{C})$ et $\|\mathrm{limrad}_h\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty$ par définition.
Montrons que $P[\mathrm{limrad}_h] = h$. $\forall r < 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$:

$$h(rz) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta) h(r\zeta) d\sigma(\zeta) \qquad \text{par le théorème de Poisson}$$

et quand $r \to 1^-$, par le théorème de Fatou :

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \mathbb{S}_1} P_z(\zeta) \mathrm{limrad}_h(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

(par convergence dominée de Lebesgue puisque toutes les fonctions sont bornées).
Donc $f \mapsto P_f$ est surjective, et isométrique. □

3 Spectre du laplacien des ouverts bornés de $\mathbb{R}^m$.

3.1 Les espaces de Sobolev $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ et $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$

Soient $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1 ($\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$)

Notons $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \quad \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{L}^2}$$

muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{W}^{1,2}} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}^2} + \sum_{i=1}^{m} \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{L}^2}$$

Remarques.

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est unique, appelée *$i-$ème dérivée partielle au sens des distributions de f*. On note :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \in \mathbb{L}^1(\Omega)^m$$

  le *gradient de f au sens des distributions*.

- $\langle ., . \rangle_{\mathcal{W}^{1,2}}$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$, de norme :

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{1,2}} = \sqrt{\|f\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2}^2}$$

Propriété 1

L'espace préhilbertien (complexe) $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ est séparable et complet.

Preuve.

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{W}^{1,2}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(\Omega)^{m+1} \\ f & \longmapsto & \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \end{array} \right.$$

est linéaire, isométrique, par construction il suffit de montrer que son image est fermée (car alors on utilise qu'un sev fermé d'un evn complet est complet et que tout sous-espace d'un espace topologique séparable est séparable).

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ telle que $(f_k, \frac{\partial f_k}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f_k}{\partial x_m})_{k\in\mathbb{N}}$ converge $\xrightarrow[k\to+\infty]{}$ $(f, g_1, ..., g_m)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)^{m+1}$. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle g_i, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{L}^2} &= \lim_{k\to+\infty} \langle \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle f_k, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{L}^2} \qquad \text{par convergence faible} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ et $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ par unicité. □

Remarque. Par intégration par partie, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ et alors les dérivées partielles de f sont les dérivées partielles au sens des distributions.

Définition 2 ($\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$)

On note $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert séparable (complexe).

Théorème 4 (inégalité de Poincaré)

Si Ω est borné, $\exists c_\Omega > 0$ tel que $\forall u \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2} \leqslant c_\Omega \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}$$

Preuve.
Admis (démonstration dans les notes de cours). $\square$

Théorème 5 (de Rellich-Kondrachov)

Si Ω est borné, alors toute suite bornée dans $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Ce théorème nous dit que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega) & \underset{\text{inclusion}}{\longrightarrow} & \mathbb{L}^2(\Omega) \\ f & \longmapsto & f \end{array} \right. \qquad \text{est un opérateur compact}$$

Remarque. Version $\mathbb{L}^2$ de Arzela-Ascoli.

4 Introduction à l'analyse harmonique des sphères

4.1 Mesure de Lebesgue des sphères

Espace de Hilbert $\mathbb{L}^1(\mathbb{S}_n) = \mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n, \sigma_n)$ + opérateur linéaire partiellement défini, le laplacien sphérique :

$$\Delta_S f = (\Delta \underline{f})|_{\mathbb{S}_n}$$

4.2 Décomposition spectrale du laplacien sphérique

$$\forall \underline{i} = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \qquad \text{multi-entier}$$
$$\forall x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Posons $|\underline{i}| = i_0 + \ldots + i_n$ la longueur totale, $\underline{i}! = i_0! \ldots i_n!$ et :

$$x^{\underline{i}} = x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$$

Notons $\mathcal{P}$ l'algèbre des pôlynômes à $n+1$ variables réelles à coefficients complexes et $\forall m \in \mathbb{N}$, et

$$\mathcal{P}_m = \left\{ p = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^{n+1}, |\underline{i}| = m} P_{\underline{i}} x^{\underline{i}} \mid P_{\underline{i}} \in \mathbb{C} \right\}$$

le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m.

Remarque. $\mathcal{P} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_m$ et $\forall p \in \mathcal{P}_m$, $\forall q \in \mathcal{P}_l$, $pq \in \mathcal{P}_{m+l}$.
Notons :

$$\mathcal{H}_m = \{p \in \mathcal{P}_m \mid \Delta p = 0\}$$

sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_m$ des polynômes harmoniques, et :

$$\mathcal{HS}_m = \{P|_{\mathbb{S}_n} \mid p \in \mathcal{H}_m\}$$

espace vectoriel des *harmoniques sphériques de degré m.*

Remarque. La restriction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_m & \longrightarrow & \mathcal{HS}_m \\ p & \longmapsto & P|_{\mathbb{S}_n} \end{array} \right.$ est un isomorphisme linéaire.

$$\forall x \neq 0, \; p(x) = \|x\|^m p\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Le polynôme p est donc entièrement déterminé par sa restriction à la sphère, d'où l'injectivité.

Propriété 2

Si $Q = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, alors $\forall p \in \mathcal{P}_m$, $\forall 0 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $\exists h_k \in \mathcal{H}_{m-2k}$ tel que :

$$p = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} Q^k h_k$$

Preuve.

Considérons un produit scalaire auxiliaire sur les polynômes :

$$\ll p, q \gg = \sum \underline{i}! p_{\underline{i}} \overline{q_{\underline{i}}}$$

C'est clairement un produit scalaire sur $\mathcal{P}$. Montrons que l'adjoint de Δ est la multiplication par Q. C'est-à-dire :

$$\forall p, q \in \mathcal{P}, \ \ll \Delta p, q \gg = \ll p, Qq \gg$$

Il suffit de montrer que l'adjoint de $\frac{\partial}{\partial x_k}$ est la multiplication par x_k par itération et linéarité, ce qui se vérifie sur les monômes.

Montrons que $\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus Q\mathcal{P}_{m-2}$ si $m \geqslant 2$, le résultat en découle par récurrence (en remarquant que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{P}_0$ et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_1$).

Il suffit de montrer que $(Q\mathcal{P}_{m-2})^{\perp_{\mathcal{P}_m}} = \mathcal{H}_m$. Or $\forall p \in \mathcal{P}_m$:

$$\forall q \in \mathcal{P}_{m-2}, \ \ll p, Qq \gg = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall q \in \mathcal{P}_{m-2} \ \ll \Delta p, q \gg = 0 \ \Leftrightarrow \ \Delta p = 0$$

□

Théorème 6 (de décomposition spectrale du laplacien sphérique)

$\mathcal{L}^2(\mathbb{S}_n)$ est somme hilbertienne des $\mathcal{HS}_m$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $\forall f \in \mathcal{HS}_m$,

$$-\Delta_S f = m(m+n-1)f$$

Preuve.

- $\mathcal{HS}_m \perp \mathcal{HS}_l$ si $m \neq l$.
  Formule de Green : $\forall u, v \colon \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^2$, $\forall x \in \mathbb{S}_n$, notons $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = du_x(x)$ la dérivée radiale, alors :

  $$\int_{\mathcal{B}_{n+1}} (u\Delta v - v\Delta u) d\lambda_{n+1} = \underbrace{\omega_{n+1}}_{\lambda_{n+1}(\mathcal{B}_{n+1})} \int_{\mathbb{S}_n} u \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma_n$$

  Formule d'Euler : $\forall p \in \mathcal{P}_m$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $dp_x(x) = mp(x)$ (dériver en $t = 1$, $p(tx) = t^m p(x)$ car $t \in \mathbb{R}$).

  $\forall p \in \mathcal{H}_m$, $\forall q \in \mathcal{H}_l$:

  $$\begin{aligned} (m-l)\langle p|_{\mathbb{S}_n}, q|_{\mathbb{S}_n} \rangle_{\mathbb{L}^2} &= \int_{\mathbb{S}_n} \big((mp)\overline{q} - p(\overline{lq}) \big) d\sigma_n \\ &\underset{\text{Euler}}{=} \int_{\mathbb{S}_n} \left(\overline{q} \frac{\partial p}{\partial \nu} - p \frac{\partial \overline{q}}{\partial \nu} \right) d\sigma_n \\ &\underset{\text{Green}}{=} \frac{1}{\omega_{n+1}} \int_{\mathcal{B}_{n+1}} (\overline{q}\Delta p - p\overline{\Delta q}) d\lambda_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

- $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{HS}_m$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$. Par densité de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_n,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{S}_n)$, puisque convergence uniforme implique convergence $\mathbb{L}^2$, il suffit de montrer que $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{HS}_m$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_n,\mathbb{C})$ pour la norme uniforme. Puisque $\mathcal{P}|_{\mathbb{S}_n}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_n,\mathbb{C})$ par Stone-Weirtrass, il suffit de montrer que tout élément de $\mathcal{P}_m$ coïncide sur $\mathbb{S}_n$ avec une somme finie de polynômes harmoniques, OK par la proposition initiale.

- $\forall f \in \mathcal{HS}_m$, f est un vecteur propre de $-\Delta_S$ de valeur propre $m(m+n-1)$.
Formule de Leibniz. $\forall u, v\colon U \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^2$,

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + 2\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(\Delta v)$$

Posons $r = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$, $u\colon x \mapsto \frac{1}{r^m}$, $v = p \in \mathcal{H}_m$ tel que $p|_{\mathbb{S}_n} = f$. Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{n} -\frac{mx_i}{r^{m+2}}\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\frac{m}{r^{m+2}}\sum_{i=0}^{n} x_i\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{m}{r^{m+2}}dp_x(x) \underset{\text{Euler}}{=} -\frac{m^2}{r^{m+2}}p(x)$$

De plus,

$$\Delta u = \frac{m(m+1-n)}{r^{m+2}} \qquad \text{et} \qquad \underline{f}(x) = p\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{p(x)}{r^m} = u(x)v(x)$$

Donc :

$$-\Delta\underline{f} \underset{\text{Leibniz}}{=} \left(\frac{-m(m+1-n)+2m^2}{r^{m+2}}\right)p(x)$$

D'où,

$$-\Delta_S f = m(m+n-1)f$$

□

4.3 Description des harmoniques sphériques

Soit $m \in \mathbb{N}$. Le but de cette partie est de décrire :

$$\mathcal{HS}_m = \{p|_{\mathbb{S}_n} \mid p \text{ polynôme en } n+1 \text{ variables réelles, à coefficient complexes, homogène de degré } m\text{, harmonique}\}$$

Définition 3 (invariance par sous-groupe de $O(n+1)$)
$\forall G$ sous-groupe de $O(n+1)$, $f\colon \mathbb{S}_n(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est *invariante* par G si $\forall g \in G\ f\circ g = f$. Un ensemble de telles applications est *invariant* par G si $\forall f \in E,\ \forall g \in G,\ f\circ g \in E$.

Exemples.

1. Soit :

$$K = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid A \in O(n)\right\}$$

C'est un sous-groupe de $O(n+1)$. Alors $f\colon \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}\\ \mathbb{S}_n\end{array}\right.$ est invariante par $K \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}_n\ f(x)$ ne dépend que de la dernière coordonnée de x.

2. $\forall p \in \mathcal{P}_m$, p invariant par $O(n+1) \Leftrightarrow p|_{\mathbb{S}_n}$ invariant par $O(n+1)$.

Propriété 3

$\exists$ unique mesure de probabilité μ_K sur K invariante à droite à K i.e. $\forall f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, $\forall k_0 \in K$,

$$\int_K f(kk_0) d\mu_K(k) = \int_K f(k) d\mu_K(k)$$

Définition 4

$$q_m \colon \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & (x_n + ix_0)^m \end{cases} \in \mathcal{P}_m \qquad p_m \colon \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_K q_m(kx) d\mu_K(k) \end{cases}$$

$$\Pi_m \colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & p_m(te_n) \end{cases}$$

Théorème 7

1. $p_m \in \mathcal{H}_m$, invariant par K et $p_m(e_n) = 1$. En particulier $\Pi_m \in \mathbb{C}[X]$ et $p_m(x) = \Pi_m(x_n)$.
2. Si $\mathcal{HS}_m^K = \{f \in \mathcal{HS}_m \mid f \text{ invariante par } K\}$ alors :
$$\mathcal{HS}_m^K = \mathbb{C} p_m|_{\mathbb{S}_m}$$
3. Si E sev de $\mathcal{HS}_m$ invariant par $O(n+1)$ alors $E = \{0\}$ ou $E = \mathcal{HS}_m$. En particulier,
$$\mathcal{HS}_m = \left\{ \sum_{\text{finie}} \lambda_i p_m \circ g_i|_{\mathbb{S}_n} \text{ où } g_i \in O(n+1),\ \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}$$
4. *Formule de Rodriguez*
$$\Pi_m(t) = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^m \Gamma\left(\frac{n}{2} + m\right)} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}} \frac{d^m}{dt^m} (1-t^2)^{\frac{n}{2}-1+m}$$
où Γ est la célébrissime fonction *Gamma* d'euler $\forall x > 0\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ qui vérifie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Lemme 1 (invariance du laplacien par les rotations)

$\forall f \colon \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $\forall g \in O(n+1)$:

$$\Delta(f \circ g) = (\Delta f) \circ g$$

Preuve.
Soit $(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la marice de g dans la base $(e_0,\dots,e_n)$.

$$\forall i=0,\dots,n \quad \frac{\partial f\circ g}{\partial x_i}=\sum_{j=0}^{n}a_{j,i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\circ g$$

Donc :

$$\Delta(f\circ g)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{j,i}\sum_{k=0}^{n}a_{k,i}\frac{\partial f}{\partial x_k\partial x_j}\circ g=\sum_{k,j=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k\partial x_j}\circ g\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_{j,i}a_{k,i}}_{=\delta_{j,k}\text{ car } g\in O(n+1)}\Big)=(\Delta f)\circ g$$

□

5 Correction des exercices

5.1 Feuille I

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \Im(z) > 0\}$

$$\begin{cases} \mathbb{H} \times \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ (z,t) & \longrightarrow & Q_z(t) = \frac{\Im(z)}{|z-t|^2} \end{cases}$$

1. (a) Montrons que $Q_z(t)$ est continue, vérifie $\int_{t\in\mathbb{R}} Q_z(t)dt = \pi$ et

$$Q_z(t) = \Im\left(\frac{1+tz}{t-z}\right)\frac{1}{1+t^2}$$

En déduire que $(z,t) \mapsto Q_z(t)$ est harmonique, strictement positive.

$(z,t) \mapsto \Im(z)$ est continue sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, $(z,t) \mapsto |z-t|^2$ aussi, et $\Im(z-t) > 0$, donc $|z-t|^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ et $(z,t) \mapsto Q_z(t)$ est continue.

$$\begin{aligned} \int_{t\in\mathbb{R}} Q_z(t) &= \int_{t\in\mathbb{R}} \frac{\Im(z)}{\Re(z-t)^2 + \Im(z)^2} dt \\ &= \int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1/\Im(z)}{\left(\frac{\Re(z-t)}{\Im(z)}\right)^2 + 1} dt \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{\Re(z)-t}{\Im(z)}$, $du = -dt/\Im(z)$, on obtient :

$$\int_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

Comme,

$$\frac{1+tz}{t-z} = \frac{1+tz(t-\bar{z})}{|t-z|^2} = \frac{t - t|z|^2 - \bar{z} + t^2 z}{|t-z|^2}$$

On a :

$$\Im\left(\frac{1+tz}{t-z}\right) = \frac{-\Im(\bar{z}) + t^2\Im(z)}{|t-z|^2} = (1+t^2)\left(\frac{\Im(z)}{|t-z|^2}\right) = (1+t^2)Q_z(t)$$

L'application $z \mapsto \left(\frac{1+tz}{t-z}\right)$ est holomorphe $\forall t \in \mathbb{R}$. Et donc $Q_z(t)$ est harmonique comme partie imaginaire d'une fonction holomorphe. $\Im(z) > 0\ \forall z \in H$. Donc $Q_z(t) > 0\ \forall z \in \mathbb{H}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$.

(b) $(*)$ $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ montrer que $Q_z(t) \xrightarrow[z\to t_0 \neq t]{} 0$ uniformément pour t en dehors de tout voisinage de t_0.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t - t_0| > 2\varepsilon$. Alors pour z suffisamment proche de t_0, i.e. $|z - t_0| < \varepsilon$, on a $|z - t| > \varepsilon$ et donc $|Q_z(t)| \leqslant \frac{\Im(z)}{\varepsilon}$. Ainsi :

$$\sup_{t \text{ tq } |t-t_0|>2\varepsilon} |Q_z(t)| \leqslant \frac{\Im(z)}{\varepsilon} \xrightarrow[z\to t_0]{} 0 \qquad \text{par continuité de } z \mapsto \Im(z)$$

($*$) Montrer que $Q_z(t) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$ uniformément pour t dans un compact de $\mathbb{R}$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $\exists R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Soit $t \in K$.

$$Q_z(t) = \frac{\Im(z-t)}{|z-t|^2} \leqslant \frac{1}{|z-t|} \leqslant \frac{1}{|z|-R} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

2. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \lambda, \mathbb{C})$. Considérons :

$$P_{\mathbb{H}}f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{\pi}\int_{t\in\mathbb{R}} Q_z(t)f(t)dt \end{array} \right.$$

Montrons que $P_{\mathbb{H}}f$ est harmonique.

Comme $Q_z(t) \leqslant \frac{1}{\Im(z)}$ (z fixé), on a l'existence de l'intégrale. L'application $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \lambda, \mathbb{C}) \mapsto P_{\mathcal{H}}f$ est linéaire, donc par linéarité, on peut supposer f réelle. $\forall z \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{H}}f(z) &= \frac{1}{\pi}\Im\left(\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right) \qquad \text{par la question 1.a)} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\Im\left(\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right) + \Im\left(z\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\frac{tf(t)}{1+t^2}dt\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\Im\left(\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}g_1(t)dt\right) + \Im\left(z\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}g_2(t)dt\right)\right] \end{aligned}$$

Puisque $g_1, g_2 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, les deux intégrales sont holomorphes en $x \in \mathbb{H}$ par un résultat du cours (proposition B.1). Alors

$$P_{\mathbb{H}}f(z) = \frac{1}{\pi}\Big[\Im\Big(\underbrace{\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}g_1(t)dt}_{\text{holomorphe}}\Big) + \Im\Big(\underbrace{z\int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}g_2(t)dt}_{\text{holomorphe}}\,dt\Big)\Big]$$

Donc $P_{\mathbb{H}}f$ est harmonique comme combinaison linéaire de parties imaginaires de fonctions holomorphes.

- Si f réelle, on a $P_{\mathbb{H}}f(z) = \int_{t\in\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\frac{f(t)}{1+t^2}dt \in \mathbb{R}$
- Si f positive, puisque $\forall z \in \mathbb{H},\ \forall t \in \mathbb{R},\ Q_z(t) \geqslant 0$, on a $P_{\mathbb{H}}f(z) \geqslant 0$
- Si f nulle, $P_{\mathbb{H}}f = 0$

3. $f \in \mathbb{L}^1 \cap \mathcal{C}^0$. Soit $u\colon \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui coïncide avec $P_{\mathbb{H}}f$ sur $\mathbb{H}$ et f sur $\mathbb{R}$. Montrons que $u \in \mathcal{C}^0$.

$$\begin{aligned} \psi(t) = Q_z(t)|f(t) - f(t_0)| &\leqslant Q_z(t)(|f(t)| + |f(t_0)|) \\ &\leqslant \frac{\Im(z-t_0)}{|(z-t_0)-(t-t_0)|^2}(|f(t)| + |f(t_0)|) \\ &\leqslant \frac{\frac{\delta}{2}(|f(t)| + |f(t_0)|)}{\left(|t-t_0|^2 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \qquad \text{si } |z-t_0| \leqslant \frac{\delta}{2} \quad \mathbb{L}^1 \text{ et idp de } z \end{aligned}$$

Donc $\int_{|t-t_0|>\delta} \psi \xrightarrow[z\to t_0]{} 0$ par convergence dominée de Lebesgue.

Montrons que si f nulle à l'infinie alors u est nulle à l'infini.

f nulle à l'infini $\Rightarrow \lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$,

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall \mathbb{H} \geqslant R\ |f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ tel que $|z| \geqslant R$.

- Si $z \in \mathbb{R}$, $|u(z)| = |f(z)| \leqslant \varepsilon$.
- Si $z \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}
|u(z)| = |P_{\mathbb{H}} f(z)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{t\in\mathbb{R}} Q_z(t) f(t) dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi} \int_{t\in[-R,R]} Q_z(t) f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t|\geqslant R} Q_z(t) f(t) dt \right| \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{t\in[-R,R]} Q_z(t) |f(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t|\geqslant R} Q_z(t) \varepsilon dt \\
&= \frac{M}{\pi} \int_{t\in[-R,R]} Q_z(t) dt + \varepsilon \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{|t|\geqslant R} Q_z(t) \varepsilon dt}_{\leqslant 1} \qquad \text{où } M = \sup_{[-R,R]} |f(t)|
\end{aligned}$$

Par la question 1.b), $Q_z(t) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$ uniformément pour t dans $[-R,R]$:

$$\exists R' > 0,\ \forall |z| \geqslant R',\ \forall t \in [-R,R] \quad |Q_z(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{RM}$$

Donc $\forall |z| \geqslant \max(R,R')$, $|u(z)| \leqslant \left(\frac{2}{\pi} + 1\right) \varepsilon$. Donc $u(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$.

4. On définit :

$$h = h_{z_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > -1\} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ z & \longmapsto & \left(\Im \frac{z-z_0}{(z+i)(z_0+i)}\right)^2 \end{array} \right.$$

$h(z) = (F(z))^2$ où $F(z) = \Im g(z)$ et $g(z) = \frac{z-z_0}{(z+i)(z_0+i)}$. On a g holomorphe $\Rightarrow \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \Rightarrow F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $z \to z^2$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$, on a donc $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Montrons que $\forall z \in \mathbb{H}$, $h(z) \leqslant 4$.

$$h(z) = |h(z)| \leqslant \left| \frac{z - z_0}{(z+i)(z_0+i)} \right|^2$$

Or :

$$\frac{|z - z_0|}{|z - z_0||z_0 + i|} \leqslant \frac{|z+i| + |z_0+i|}{|z+i||z_0+i|} \leqslant 2$$

Car comme $|z+i| > 1$ et $|z_0+i| > 1$ puisque $z, z_0 \in \mathbb{H}$ on a $|z_0+i| + |z+i| \leqslant 2|z+i||z_0+i|$.
D'où $h(z) \leqslant 4\ \forall z \in \mathbb{H}$

$$h(z) = |h(z)| \leqslant \frac{|z|^2 \underbrace{\left|1 - \frac{|z_0|}{|z|}\right|^2}_{\leqslant 1}}{|z+i|^2 \underbrace{|z_0+i|^2}_{\geqslant 1}} < 1$$

Alors :

$$\lim_{z\to+\infty}|h(z)| = \lim_{z\to+\infty}\left(\Im\left(\frac{1-\frac{z_0}{z}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)(z_0+i)}\right)\right)^2 = \Im\left(\frac{1}{z_0+i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{|z_0+i|^2} < 1$$

Notons :

$$g(z) = (\Im(z))^2 \quad \Delta g = 2 \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{z-z_0}{(z+i)(z_0+i)}$$

f holomorphe de dérivée $f'(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$.

$$\text{Donc} \quad \Delta h = \Delta(g\circ f) = (\Delta g)\circ f \circ |f'|^2 = \frac{2}{|z+i|4} > 0$$

5. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{H}\cup\mathbb{R})$, harmonique et nulle à l'infini. On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{H}$,

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} Q_z(t)u(t)dt = P_{\mathbb{H}}u(z)$$

Remarque. $z \mapsto \Im(z)$ est un contre-exemple lorsqu'on enlève l'hypothèse *nulle à l'infini.*

Soit $f = u - P_{\mathbb{H}}u$. f est harmonique sur $\mathbb{H}$, par la question 3 continue sur $\mathbb{H}\cup\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}$ et à l'infini (car somme de fonctions nulles à l'infini question 3).

Montrons que $f = 0$. Par l'absurde, supposons que $\exists z \in \mathbb{H}$ tel que $f(z) \neq 0$ (on sait que sur $\mathbb{R}$ f est nulle). $\exists R > |z_0|$, $\forall |z| \geqslant R$, $|f(z)| \leqslant \frac{|f(z_0)|}{2}$.
$f|_{(\mathbb{H}\cup\mathbb{R})\cap\mathcal{B}(0,R)}$ est harmonique sur $\mathbb{H}\cap\mathcal{B}(0,R)$ et $\mathcal{C}^0$ sur $(\mathbb{H}\cup\mathbb{R})\cap\overline{\mathcal{B}}(0,R)$. Par le corollaire du principe du maximum f doit atteindre son maximum sur le bord de cet ensemble i.e. sur $[-R,R]\cup\partial\mathcal{B}_+(0,R)$ (demi-cercle supérieur).

Donc on sait que :

$$|\sup f|_{\mathbb{H}\cap\mathcal{B}(0,R)}| \leqslant \left|\frac{f(z)}{2}\right|$$

On doit avoir aussi $\sup|f|_{\mathbb{H}\cap\mathcal{B}(0,R)}| \geqslant f(z)$. Absurde.

5.2 Feuille II

$$u \in \mathcal{H}^1 \;\Leftrightarrow u \in \mathbb{L}^2,\; \exists u' \in \mathbb{L}^2 \text{ telle que } \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}),\; \langle u', \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle u, \varphi'\rangle_{\mathbb{L}^2}$$
$$\text{et } t \longrightarrow \sqrt{1+t^2}u(t) \in \mathbb{L}^2$$

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle u', v'\rangle_2 + \langle \beta u, \beta v\rangle_2$$

où $\beta(t) = \sqrt{t^2+1}$.

1. Montrons que $(\mathcal{H}_1, \langle ., .\rangle_{\mathcal{H}^1})$ est une espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On note :

$$\alpha \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1 & \longrightarrow & \mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2 \\ u & \longmapsto & (\beta u, u') \end{array} \right.$$

α est bien définie car u' (qui existe) est unique : en effet si u_1 et u_2 sont deux applications qui vérifie :

$$\langle u_1, \varphi\rangle_2 = -\langle u, \varphi'\rangle_2 = \langle u_2, \varphi\rangle_2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$$

alors $u_1 = u_2$ p.p. par densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathbb{L}^2$ et par continuité du produit scalaire.

Montrons que α est linéaire : $u \mapsto \beta u$ l'est, par unicité de la dérivée au sens des distributions et par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable on a que $u \mapsto u'$ est linéaire. De plus, α est injective car $\beta \neq 0$. Et par définition de $\|.\|_{\mathcal{H}^1}$, α est isométrique.

On plonge alors $\mathcal{H}^1$ dans un sous-espace de $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2$. Ainsi $\mathcal{H}^1$ est isométriquement isomorphe à $\mathrm{Im}(\alpha)$. Il reste à montrer que $\mathcal{H}^1$ est complet, i.e. $\mathrm{Im}(\alpha)$ est fermée.
Soit donc $(\beta u_n, u_n')_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(\alpha)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $(\beta w_1, w_2)$ dans $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2$. En particulier :

$$\|u_n - w_1\|_2 \leqslant \|\beta u_n - \beta w_1\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} w_1$ dans $\mathbb{L}^2$. Il reste à montrer que $w_2 = w_1'$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$,

$$\begin{array}{ccc} \langle u', \varphi\rangle_2 & = & -\langle u_n, \varphi'\rangle_2 \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle w_2, \varphi\rangle_2 & & \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\langle w_1, \varphi'\rangle_2 \quad \text{par continuité du p.s.} \end{array}$$

Par unicité, $w_2 = w_1'$. L'image est donc fermée.

Comm tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable, $\mathcal{H}^1$ est séparable. Par IPP $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{H}^1$ donc $\mathcal{H}^1$ est de dimension ∞.

Montrons que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$.

(a) Tout élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ est approchable par des fonctions de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ support compact.

(b) Tout élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ à support compact est approchable par des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

(a) Soit $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$. Soit $\chi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ plateau, valant 1 sur $[-n, n]$ et 0 en dehors de $[-n-1, n+1]$ avec :

$$\exists M \in \mathbb{R},\; \forall n,\; \|\chi_n'\|_\infty \leqslant M$$

Soit $u_n = u \times \chi_n$. $\chi_n \in \mathbb{L}^\infty$ et $u \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow\; u_n \in \mathbb{L}^2$. u_n est dérivable au sens des distributions et $u_n' = u'\chi_n + u\chi_n'$.

$u' \in \mathbb{L}^2,\ \chi_n \in \mathbb{L}^\infty \ \Rightarrow\ u'\chi_n \in \mathbb{L}^2$ et $u \in \mathbb{L}^2,\ \chi_n' \in \mathbb{L}^\infty \ \Rightarrow\ u\chi_n' \in \mathbb{L}^2$, ainsi $u_n' \in \mathbb{L}^2$.

$$\beta u_n = \underbrace{\beta u}_{\in \mathbb{L}^2} \underbrace{\chi_n}_{\in \mathbb{L}^\infty} \in \mathbb{L}^2$$

Donc $u_n \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$. Et $\mathrm{supp} u_n \subset \mathrm{supp}\chi_n$ compact.
Montrons que $\|u_n - u\|_{\mathcal{H}^1}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \|u_n' - u'\|_2^2 + \|\beta(u_n - u)\|_2^2$$

Terme 1.

$$\begin{aligned}\|u_n' - u'\|_2^2 &\leqslant \int |u'(\chi_n - 1) + u\chi_n'|^2 \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} 2|u'|^2 + 2|u|^2 M^2 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } u' \text{ et } u \text{ sont } \mathbb{L}^2\end{aligned}$$

Terme 2.

$$\begin{aligned}\|\beta(u_n - u)\|_2^2 &= \int (t^2 - 1)|u(t)|^2 \underbrace{|\chi_n(t) - 1|^2}_{\leqslant 2} dt \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} 2(t^2+1)|u(t)|^2 dt \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

(b) Soit $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, $\mathrm{supp}\varphi \subset [-1,1]$, $\int \varphi = 1$. $\forall n,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = 2^n \varphi(2^n t)$. $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\mathrm{supp}\varphi_n \subset \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$, $\int \varphi_n = 1$. Soit $u_n = u * \varphi_n$, on sait que $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty$. On vérifie que $u_n' = (u') * \varphi_n$. Montrons que $\|u_n' - u'\|_{\mathcal{H}^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrons que $\|u_n' - u'\|_2^2 + \|\beta(u_n - u)\|_2^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On sait que si $g \in \mathbb{L}^2$, $g * \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ dans $\mathbb{L}^2$, ce qui conclut pour le premier terme.
Pour le second terme, comme $\mathrm{supp}(u_n - u) \subset [-N, N]$, sur ce support $\beta \leqslant \sqrt{N^2+1}$, alors :

$$\|\beta(u_n - u)\|_2^2 \leqslant \beta^2 \|u_n - u\|_2^2 \leqslant (N^2+1)\|u_n - u\|_2^2$$

Montrons que l'inclusion de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ est compacte. $K_n = [-n, n]$ $f \in \mathcal{H}^1(K_n)$, $h(x) = \int_0^x f(t)dt$, on montrer que $h' = f'$ au sens des distributions. Alors :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ f(x) = c + h(x) \text{ p.p.}$$

$(f_n) \in \mathcal{H}^1(K_n)$ bornée.

$$\left| \int_y^x f_n'(t) dt \right| \leqslant \sqrt{x-y}\|f_n\|_{\mathbb{L}^2} \leqslant \sqrt{x-y} M \quad \text{par C.S.}$$

$\Rightarrow$ les f_n sont "équi-hölderiennes" et $\overline{(f_n(x))_n}$ compact $\forall n \Rightarrow$ Ascoli $\Rightarrow$ on peut extraire de (f_n) une suite qui converge sur le compact pour $\|.\|_\infty = \|.\|_{\mathbb{L}^\infty} \Rightarrow$ convergence pour $\|.\|_{\mathbb{L}^2}$.
$(f_i)_i \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ bornée, $\forall n, f_i|_{K_n} \in \mathcal{H}^1(K_n)$ et la suite est bornée.
$\exists f_1 \in \mathbb{L}^2([-1,1]),\ f_i|_{[-1,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} 2f_1$ etc. On effectue une extraction successive :

$$\phi_1 \dots \phi_n,\ f_{\phi_1\dots\phi_n(j)}|_{K_n} \xrightarrow[j\to+\infty]{} f_n \text{ dans } \mathbb{L}^2[K_n]$$

$f_{n+1}|_{K_n} = f_n$. Soit $f = f_n|K_n$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$\underbrace{f_{\phi_1\dots\phi_n(n)}}_{g_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \text{ dans } \mathbb{L}^2 \text{ sur tous les } [-n,n]$$

$$\int_{K_n} |f|^2 \leqslant \underbrace{\int_{K_n} |f-f_i|^2}_{\leqslant 1} + \underbrace{\int_{K_n} |f_i|^2}_{\leqslant M} \quad \forall i$$

$\exists i$ tel qu'on ait $\leqslant 1$ donc $\Rightarrow\ f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-i,i]} g_n^2 = \int_{\mathbb{R}\setminus[-i,i]} \frac{(t^2+1)|g_n|^2}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{i^2+1} \underbrace{\int (1+t^2)|g_n|^2}_{\leqslant M'}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists i$ tel que $\forall n$ $\int_{\mathbb{R}\setminus[-i,i]} |g_n|^2 \leqslant \varepsilon$ et $\int_{\mathbb{R}\setminus[-i,i]} |f|^2$.

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n - f|^2 = \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus[-i,i]} |g_n - f|^2}_{\leqslant 4\varepsilon} + \int_{-i,i} |g_n - f|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} |g_n - g|^2 \leqslant 4\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$$

2. (a) Soit $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$, on a $1 \leqslant \beta$ donc :

$$\|u\|_2 \leqslant \|u\beta\|_2 \leqslant \|u\beta\|_2 + \|u'\|_2 = \|u\|_{\mathcal{H}^1}$$

(b) Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, posons :

$$Q_f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 - \Re(\langle f, u\rangle_2) \end{array} \right.$$

On pose :

$$a\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u, b\rangle_{\mathcal{H}^1} \end{array} \right.$$

a est sesquilinéaire et hermitienne, a continue par Cauchy-Schwarz et est trivialement cœrcive. On pose $\varphi(u) = \langle f, u\rangle_2$, φ antilinéaire, continue car :

$$|\varphi(u)| = |\langle f, u\rangle_2| \leqslant \|f\|_2 \times \|u\|_2 \leqslant \|f\|_2 \times \|u\|_{\mathcal{H}^1} \quad \text{par la question 2)}a.$$

$$Q_f(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \Re(\varphi(u))$$

Par Lax-Milgram $\Rightarrow Q_f$ admet un unique minimum.

(c) Montrons que $u \in \mathcal{H}^1$ minimum de $Q_f \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty,\ \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_2$. Supposons $u \in \mathcal{H}^1$ minimum de Q_f :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(Q_f(u+t\varphi)) = \Re(\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1}) + \Re(\langle f, \varphi\rangle_2) = 0$$

Quitte à remplacer φ ar $i\varphi$ on a le même résultat avec $\Im\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1}$.

Supposons que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty\ \langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} = \Re(\langle f, \varphi\rangle_2)$:

$$t \longmapsto Q_f(u+t\varphi) \quad \text{strictement convexe}$$

cf. argument du cours donc $t \mapsto Q_f(u+t\varphi)$ admet un unique minimum en $t=0$. Et comme les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ à support compact sont denses dans $\mathcal{H}^1$, u est l'unique minimum de Q_f, par 2)b..

3. Montrons que :

$$G\colon \begin{cases} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & G(f) = u \end{cases}$$

est l'unique minimum de Q_f.

(a) G est bien défini. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $G(f) = u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ de plus u est unique.

(b) Linéarité. Soient $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, montrons que $G(f+\lambda g) = G(g) + \lambda G(g)$. On pose $u = G(f)$ et $\theta = G(g)$. Et on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}),\ \langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}),\ \langle v, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle g, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$$

$$\Rightarrow\ \langle u+\lambda\theta, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle f+\lambda g, \varphi\rangle_{\mathbb{L}^2}$$

$$\Rightarrow\ \langle G(f)+\lambda G(g), \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle G(f+\lambda g), \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1},\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$$

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ et par unicité on a $G(f)+\lambda G(g) = G(f+\lambda g)$.

(c) Continuité de G. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\|G(f)\|_2^2 \leqslant \|G(f)\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \langle G(f), G(f)\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle f, G(f)\rangle_{\mathbb{L}^2} \leqslant \|f\|_2 \|G(f)\|_2$$

En simplifiant $\|G(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$

(d) G auto-adjoint. Soient $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\langle G(f), g\rangle_2 &= \overline{\langle g, \underbrace{G(f)}_{\in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})}\rangle_2} \\ &= \overline{\langle G(g), G(f)\rangle_{\mathcal{H}^1}} \\ &= \langle G(f), G(g)\rangle_{\mathcal{H}^1} \\ &= \langle f, G(g)\rangle_2\end{aligned}$$

(e) Montrons que G est positif. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\langle G(f), f\rangle_2 = \langle f, G(f)\rangle_2 = \langle G(f), G(f)\rangle_{\mathcal{H}^1} = \|G(f)\|_{\mathcal{H}^1}^2 \geqslant 0$$

(f) Montrons que G est compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. G continue $\Rightarrow$ $(G(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Montrons que $(G(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $\|.\|_{\mathcal{H}^1}$.

$$\|G(f_n)\|^2_{\mathcal{H}^1} = \langle G(f_n), G(f_n)\rangle_{\mathcal{H}^1} = \langle f_n, G(f_n)\rangle_2 \leqslant \|f_n\|_2 \|G(f_n)\|_2$$

Comme (f_n) et $(G(f_n))$ sont bornées sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ alors $(G(f_n))$ est bornée pour la norme $\mathcal{H}^1$. Par compacité $(G(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Et donc $(G(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ G compacte.

4. G auto-adjoint, (strictement) positif, compact $\Rightarrow \exists (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ base de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et (ε_i) tels que $\forall i,\ \varepsilon_i < 0,\ \varepsilon \downarrow 0$ tel que l'on ait $G(f_i) = \varepsilon_i f_i$. $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_i f_i, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} &= \langle f_i, \varphi\rangle_2 \\ \langle f_i, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} &= \frac{1}{\varepsilon_i}\langle f_i, \varphi\rangle_2\end{aligned}$$

On pose $\lambda_i = \frac{1}{\varepsilon_i}$. On a bien $\lambda_i > 0$ et $\lambda_i \uparrow +\infty$ donc :

$$\langle f_i, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} = \lambda_i \langle f_i, \varphi\rangle_2$$

Or,

$$\begin{aligned}\langle f_i, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^1} &= \langle f', \varphi'\rangle_2 + \langle \beta f, \beta\varphi\rangle_2 \\ &= \langle f, -\varphi''\rangle + \langle f, \beta^2\varphi\rangle_2 \\ &= \langle f, -\varphi'' + (t^2+1)\varphi\rangle\end{aligned}$$

On a bien :

$$\langle f, \varphi'' + (t^2+1)\varphi\rangle_2 = \lambda_i \langle f_i, \varphi\rangle_2$$