Analyse
Chapitre 1 : Calcul différentiel et théorèmes de point fixe

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

Table des matières

1 Rappels de compacité

Nous allons nous intéresser dans ce cours à la résolution d'équations du type $\phi(x) = 0$.

Théorème 1 (Riesz)
Soit E un evn. Si la boule unité fermée est compacte, alors E est de dimension finie.

Lemme 1
Soit F un sous-espace fermé de E, différent de E. Alors pour tout réel $r \in]0,1[$, il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geqslant r$.

Preuve.
Soit $x \in E \backslash F$. On a $r \in]0,1[$ donc $\frac{1}{r} d(x, F) > d(x, F)$. Alors $\exists\ y \in F$ tel que $\|x - y\| \leqslant \frac{d(x,F)}{r}$.
Posons $u = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$.
On a bien $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geqslant r$ car pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned} \|u - z\| &= \left\| \frac{1}{\|x - y\|}(x - y) - z \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - y\|} \|x - y - \|x - y\| z\| \\ &\geqslant \frac{1}{\|x - y\|} d(x, F) \quad \text{puisque } y + \|x - y\| z \in F \end{aligned}$$

Donc $\|u - z\| \geqslant r$. □

Preuve. (du théorème de Riesz)
Par contraposition, supposons E de dimension infinie. On cherche à construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bornée, sans valeur d'adhérence. On en déduira le théorème. On construit (u_n) telle que :

1. $\forall n,\ \|u_n\| = 1$
2. $\forall n, m,\ n \neq m \Rightarrow \|u_n - u_m\| \geqslant \frac{1}{2}$

On choisit u_0 de norme 1, puis par récurrence on définit u_{n+1} grâce au lemme appliqué à F_n le sev engendré par $u_0, ..., u_n$. □

2 Schémas itératifs

Soit X un espace de Banach (evn complet pour la distance induite de sa norme) et $\phi \colon X \to X$. On veut résoudre $\phi(x) = 0$.

2.1 Schéma de Picard

Définition 1
Soit (E, d) un espace métrique et $k \in]0,1[$. Une application F est k-contractante si

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ d(F(x), F(y)) \leqslant k d(x, y)$$

Théorème 2 (Picard)

Soit (E, d) un espace métrique complet et F une application k-contractante, $k \in]0, 1[$. Alors F admet un unique point fixe.

$$\exists!\ x_* \in E\ F(x_*) = x_*$$

Preuve.

Soit $x_0 \in E$. Définissons (x_n) par $x_{n+1} = F(x_n)$. Alors $d(x_{N+1}, x_N) \leqslant kd(x_N, x_{N-1})$ donc on a :

$$d(x_{N+1}, x_N) \leqslant k^N d(x_1, x_0)$$

et

$$d(x_{N+P}, x_N) \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} k^{N+k} d(x_1, x_0) \leqslant \frac{k^N}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy. Sa limite vérifie $F(x_*) = x_*$. □

2.2 Schéma de Newton

Théorème 3

Soit E un espace de Banach et posons :

$$B = \{u \in E,\ \|u\| \leqslant 1\},\ 5B = \{u \in E,\ \|u\| \leqslant 5\}$$

Soit $\phi\colon 5B \to 5B$ une application de classe C^2. Supposons que $u_0 \in B$ est tel que $\phi(u_0) \in B$ et que :

1. La différentielle seconde de ϕ est bornée sur $5B$ par c_1
2. $\forall u \in 5F,\ \phi'(u)$ est inversible et $\phi'(u)^{-1}$ est bornée sur $5B$ par c_2

Alors si $\varepsilon_0 = \|\phi(u_0)\|$ est assez petit, la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = u_n - \phi'(u_n)^{-1}\phi(u_n)$$

converge vers une solution de $\phi(u) = 0$.

Remarque. Attention, il existe $F\colon E \to E$ continue et non bornée sur la boule unité fermée. Soit (u_n) donnée par la démonstration du théorème de Riesz. Définissons :

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \times \max\left\{0, \frac{1}{10} - \|x - u_n\|\right\}.u_E$$

(avec u_E un vecteur quelconque de E) Pour x fixé au plus un terme est non nul. F est continue et $F(u_n) = \frac{n}{10}$, donc F n'est pas bornée sur la boule unité fermée.

Preuve.
On montre :

- $P_n \qquad u_n \in 2B$
- $Q_n \qquad \varepsilon_n = \|\phi(u_n)\| \leqslant \frac{(A\varepsilon_0)^{2^n}}{A}$ où $A = c_1 c_2^2$

On a $\|\phi'(u_n)^{-1}\phi(u_n)\| \leqslant c_2 u_n$ par hypothèse. Donc :

$$\|u_{n+1}\| = \left\|\sum u_{k+1} - u_k\right\| + \|u_0\| \leqslant c_2 \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k + \|u_0\| \leqslant 2 \quad \text{si } Q_n$$

Pour démontrer Q_{n+1} on va utiliser :

$$\|\phi(u+v) - \phi(u) - \phi'(u)v\| \leqslant c_1 \|v\|^2$$

On applique Taylor à l'ordre 2 à $g(t) = \phi(u+tv)$, on a :

$$\phi(u+v) = \phi(u) + \phi'(u)v + \int_0^1 (1-t) d^2\phi(u+tv)(v,v)dt$$

Posons $v_n = -\phi'(u_n)^{-1}\phi(u_n)$, $(u_{n+1} = u_n + v_n)$, alors :

$$\begin{aligned}
\|\phi(u_n + v_n) - \phi(u_n) + \phi'(u_n)v_n\| &\leqslant c_1 \|v_n\|^2 \\
\|\phi(u_{n+1}) - (\phi(u_n) - \phi(u_n))\| &\leqslant c_1 \|v_n\|^2 \\
\varepsilon_{n+1} &\leqslant c_1 c_2^2 \varepsilon_n^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant A \left(\frac{(A\varepsilon_0)^{2^n}}{A} \right)^2 \leqslant \frac{(A\varepsilon_0)^{2^{n+1}}}{A}$$

□

3 Théorème d'inversion locale

Définition 2 ($\mathcal{C}^k-$difféomorphisme)

Soient B_1, B_2 deux espaces normés, $U_1 \subset B_1$, $U_2 \subset B_2$ des ouverts. $F\colon U_1 \to U_2$ est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme ($1 \leqslant k \leqslant +\infty$) si c'est une fonction $F \in \mathcal{C}^k(U_1)$ telle que $F\colon U_1 \to U_2$ est une bijection et F^{-1} est $\mathcal{C}^k$.

Remarque. $x \longmapsto x^3$ est $\mathcal{C}^\infty$ mais $\sqrt[3]{\cdot}$ n'est pas $\mathcal{C}^\infty$

Lemme 2 (séries de Neumann)

Soit B un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(B)$ vérifiant $\|T\|_{\mathcal{L}(B)} < 1$. Alors $\mathrm{id} - T$ est inversible et :

$$(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$$

Théorème 4

Soit $f\colon U \to B_2$ où U est un ouvert de B et où B_1 et B_2 sont des espaces de Banach. Si $df(x_0)$ est un isomorphisme de B_1 sur B_2 et si $f \in \mathcal{C}^1(U)$, alors f est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme d'un voisinage de x_0 vers un voisinage de $f(x_0)$.

Preuve.

On peut supposer $B_1 = B_2$, $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ et $df(x_0) = \mathrm{id}$ quitte à travailler avec $\tilde{f}(x) = (df(x_0))^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))$. Soit $\varphi(x) = f(x) - x$. Alors $d\varphi(0) = 0$ et il existe $r > 0$ tel que $\|d\varphi(x)\|_{\mathcal{L}(B)} \leqslant \frac{1}{2}$ $\forall x \in B(0, r)$ par continuité.
Posons $W = B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, $V = B(0, r) \cap f^{-1}(W)$. Montrons que $f\colon V \to W$ est bijective. L'inégalité des accroissements finis implique que :

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - y\| \quad \forall x, y \in B(0, r)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|f(x) - \varphi(x) - f(y) + \varphi(y)\| \\ &\leqslant \|f(x) - f(y)\| + \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \\ &\leqslant \|f(x) - f(y)\| + \frac{1}{2}\|x - y\|\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x - y\| \leqslant 2\|f(x) - f(y)\|$ $\forall x, y \in V$.
Donc $f|_V$ est injective. Il reste à montrer la surjectivité. Soit $y \in W = B(0, \frac{r}{2})$. Montrons que $\exists\, x \in V$ tel que $f(x) = y$. Posons $h(x) = y + x - f(x)$. On cherche alors $x \in V$ tel que $h(x) = x$.

Montrons que $h(\overline{B}_r) \subset \overline{B}_r$ et h est $\frac{1}{2}-$contractante sur $\overline{B}_r$. Soit $x \in \overline{B}_r$.

$$\begin{aligned}\|h(x)\| &= \|y - \varphi(x)\| \\ &\leqslant \|y\| + \|\varphi(x)\| \\ &\leqslant \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\end{aligned}$$

car $\|y\| \leqslant \frac{r}{2}$ et $\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{r}{2}$.

De plus $h(x_1) - h(x_2) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ donc h est $\frac{1}{2}-$contractante. Alors $\exists!$ point fixe $x \in \overline{B}_r$. On a $x = h(x) \in B_r$ et $f(x) = y \in W$ donc $x \in V$.

Enfin, montrons que $f^{-1}\colon X \to V$ est $\mathcal{C}^1$. On a $df(x) = 1 - d\varphi(x)$ puisque $f(x) = x - \varphi(x)$ et $\|d\varphi(x)\| < \frac{1}{2}$ sur $B(0,r)$ donc $df(x)$ est inversible pour $x \in B(0,r)$ et $\|(df(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(B)} \leqslant 2$. On utilise ensuite le lemme.
Montrons que f^{-1} est différentiable. Soit $y \in W$. Notons $x = f^{-1}(y)$ et posons :

$$L = \left(df(f^{-1}(y))\right)^{-1} = (df(x))^{-1}$$

On veut montrer que :

$$\|f^{-1}(y+z) - f^{-1}(y) - Lz\| = o(\|z\|)$$

Introduisons h tel que $f(x+h) = y+z$. Alors :

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}(y+z) - f^{-1}(y) - Lz\| &= \|x + h - x - Lz\| \\
&= \|L(L^{-1}h - z)\| \\
&\leqslant 2\|L^{-1}h - z\| \\
&\leqslant \|df(x)h - f(x+h) + f(x)\|
\end{aligned}$$

car $\|L\| \leqslant 2$ et $z = f(x+h) - y = f(x+h) - f(x)$.
Or $f(x+h) - f(x) - df(x)h = \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \varepsilon(h) = 0$. On conclut car on a déjà vu que :

$$\|z\| = \|f(x+h) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|h\|$$

$\square$

Théorème 5 (fonctions implicites)

Soient B_0, B_1, B_2 trois espaces de Banach, U un voisinage (x_0, y_0) dans $B_0 \times B_1$ et $f\colon U \to B_2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'il existe une application linéaire continue $A\colon B_2 \to B_1$ telle que $f'_y(x_0, y_0) \circ A = \mathrm{id}$. Alors il existe $g \in \mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 telle que $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$. Si de plus $f'_y(x_0, y_0)$ est bijective, alors g est unique.

Preuve.
Théorème d'inversion locale pour $F(x,y) = (x, f(x,y))$ $\square$

4 Théorème de Cauchy-Lispchitz

Théorème 6 (de Cauchy-Lipschitz)

Soit $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe $T > 0$ tel que il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^1([-T,T], \mathbb{R}^n)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [-T,T] \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Preuve.

Soit $T > 0$. y est solution de (1) ssi la fonction $z(t) = y(Tt) - y_0$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t) = Tf(Tt, z(t) + y_0) \quad \forall t \in [-1,1] \\ z(0) = 0 \end{array} \right.$$

Posons $F(T,z) = z'(\cdot) - Tf(Tt, z(\cdot))$.

$$F\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathcal{C}^1_*([-1,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([-1,1]) \\ (T,z) & \longmapsto & F(T,z)(t) = z'(t) - Tf(Tt, z(t)) \end{array} \right.$$

F est une application $\mathcal{C}^1$ entre espaces de Banach où $\mathcal{C}^1_* = \{z \in \mathcal{C}^1, z(0) = 0\}$. On a :

$$F'_z(0,0) = \frac{d}{dt}$$

Soit

$$A\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([-1,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1_*([-1,1]) \\ u & \longmapsto & \int_0^t u(s)ds \end{array} \right.$$

Alors $F'_z(0,0) \circ A = \mathrm{id}$ et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. $\exists\, g$ définie sur un voisinage de $0_\mathbb{R}$ telle que $F(T, g(T)) = F(0,0) = 0$. Alors :

$$z = g(T) \quad \text{est solution de} \quad \left\{ \begin{array}{l} z' - Tf(Tt, z) = 0 \\ z(0) = 0 \end{array} \right.$$

$\square$

Théorème 7 (point fixe de Brouwer)

Soit $\psi\colon B \to B$ où $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ continue. Alors ψ admet un point fixe.

Lemme 3

Soit $\theta\colon B \to \mathbb{R}^n$ continue telle que $\theta = \mathrm{id}$ sur S^{n-1}. Alors $B \subset \theta(B)$

Preuve. (du théorème à partir du lemme)

Par l'absurde : supposons $\psi(x) \neq x$ $\forall x \in B$. On peut tracer une droite de $\psi(x)$ vers x qui intersecte S^{n-1} en un point noté $\varphi(x)$. $\varphi\colon B \to S^{n-1}$ est continue et $\varphi|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$. On peut voir φ comme une fonction continue de B dans B qui vaut l'identité sur S^{n-1}. D'après le lemme 1, $B \subset \varphi(B)$. Or $\varphi(B) \subset S^{n-1}$. Contradiction. $\square$

Lemme 4

Soit f une fonction continue à support compact. Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi|_{\mathbb{R}^n\setminus B} = \mathrm{id}$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x))J(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$$

où $J = \left|\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)\right|$.

Preuve.

Introduisons $g(y) = \int_{-\infty}^{y_1} f(s, y_2, ..., y_n)ds$. Soit $Q = [-c, c]^n$ un cube tel que $\mathrm{supp} f \subset Q$. $f(\varphi(x)) = 0$ si $x \notin Q$ et $(c \geqslant 1)$.
Notons que $\int f(\varphi(x))J(x)dx = \int (\partial_{y_1} g)(\varphi(x))J(x)dx$.

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(\varphi(x)) \det(D\varphi_1, ..., D\varphi_n) = \det\left(D(g(\varphi(x)), D\varphi_2, ..., D\varphi_n)\right)$$

(en développant $D(g(\varphi)))$. On a :

$$\det(D(g(\varphi)), D\varphi_2, ..., D\varphi_n) = M_1\partial_{x_1}(g(\varphi)) + ... + M_n\partial_{x_n}(g(\varphi))$$

Donc,

$$\int f(\varphi)Jdx = -\int g(\varphi)\underbrace{(\partial_1 M_1 + ... + \partial_n M_n)}_{0} + \text{Bord}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\partial_1 M_1 + ... + \partial_n M_n &= \det(D, D\varphi_2, ..., D\varphi_n)\\
&= \det\begin{pmatrix}\partial_1 & \partial_1\varphi_2\\ \partial_2 & \partial_2\varphi_2\end{pmatrix} \quad \text{si } n = 2\\
&= \partial_1\partial_2\varphi_2 - \partial_2\partial_1\varphi_2 \quad \text{si } n = 2\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(D, D\varphi_2, ..., \varphi_n) &= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod a_{\sigma(j)j}\\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\partial_{\sigma(1)}\left(\prod_{j=2}^{n}\partial_{\sigma(j)}\varphi(j)\right)\\
&= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(\partial_{\sigma(1)}\partial_{\sigma(2)}\varphi_2)...(\partial_{\sigma(n)}\varphi_n) + ... + \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(\partial_{\sigma(2)}\varphi_2)...(\partial_{\sigma(1)}\partial_{\sigma(n)}\varphi_n)
\end{aligned}$$

Posons :

$$A = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(\partial_{\sigma(1)}\partial_{\sigma(2)}\varphi_2)...(\partial_{\sigma(n)}\varphi_n)$$

Soit τ une transposition :

$$A = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma\circ\tau)(\partial_{\sigma\circ\tau(1)}\partial_{\sigma\circ\tau(2)}\varphi_2)...(\partial_{\sigma\circ\tau(n)}\varphi_n) = -A$$

Donc $A = 0$. Et :

$$\int M_1 \partial_1(g(\varphi)) + ... + M_n \partial_n(g(\varphi)) = -\int [\partial_1 M_1 + ...\partial_n M_n]\, g(\varphi) + \text{Bord}$$

$\int_Q \partial_1(M_1 g \circ \varphi) + ... + \partial_n(M_n g \circ \varphi)$, or $\varphi(x) = x$ si $|x| \geqslant 1$ donc $g(\varphi(x)) = xg(x)$ si $|x| \geqslant 1$. Si $|x| \geqslant x \geqslant 1$, $|x_2| = c$, $g(\varphi(x)) = 0$:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{y_1} f(s, y_2, ..., y_n) ds$$

Il reste $\int g(c, x_2, ..., x_n) = \int \int f(s, x_2, ..., x_n) ds dx_2 ... dx_n$. □

Lemme 5

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(x) = x$ si $|x| \geqslant 1$. Alors $B \subset \varphi(B)$.

Preuve.
Par l'absurde. Supposons qu'il existe $y_0 \in B, y_0 \notin \varphi(B)$. $B = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$ donc $\varphi(B)$ est compact donc fermé. Donc $\mathbb{R}^n \backslash \varphi(B)$ est ouvert donc $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(y_0, r) \subset \mathbb{R}^n \backslash \varphi(B)$.
On applique alors la relation $\int f(\varphi(x)) J(x) dx = \int f(y) dy$ avec $f \in \mathcal{C}_0^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, supp$f \subset \mathcal{B}(y_0, r)$.
On trouve $\int f(\varphi(x)) J(x) dx = 0$. Absurde dès que $\int f \neq 0$. □

Preuve. (du Lemme 3, démonstration de *Peter Lax*)
On prolonge φ sur $\mathbb{R}^n$ par $\varphi(x) = x$ si $|x| \geqslant 1$. On approche φ par des fonctions $\mathcal{C}^2$, φ_n, avec $\varphi_n(x) = x$ si $|x| > 1 + \varepsilon_n$. Soit $y \in B$. Alors $\exists\ x_n \in \overline{\mathcal{B}(0, 1 + \varepsilon_n)}$ tel que $\varphi_n(x_n) = y$. Par compacité x_n a une sous-suite qui converge vers $x \in B$, avec $\varphi(x) = y$. □

Théorème 8 (invariance du domaine)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ continue et injective. Alors $f(U)$ est ouvert.

Corollaire 1

Si $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ alors $n = m$.

Remarque.

- Il existe $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ surjective et continue (courbe de Péano).
- Il existe $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ injective, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \longrightarrow & [0,1] \\ (0, d_1 d_2 ...;\ 0, d_1' d_2' ...) & \longmapsto & 0, d_1 d_1' d_2 d_2' ... \end{array} \right.$$

- Le résultat est faux en dimension infinie :

$$\tau \colon \left\{ \begin{array}{ccc} l^\infty(\mathbb{N}) & \to & l^\infty(\mathbb{N}) \\ (x_0, ..., x_n, ...) & \longmapsto & (0, x_0, ..., x_n, ...) \end{array} \right.$$

- $f \colon \tau \mapsto (t, 0)$ différence de dimension et l'image n'est pas ouverte.

Corollaire 2

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ une injection continue. Alors f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

Preuve.

Soit V un ouvert de U. Montrons que $g = f^{-1}$ vérifie $g^{-1}(V)$ est ouvert. Or $g^{-1}(V) = f(V)$, ouvert d'après le théorème. Donc f^{-1} est continue. f est un homéomorphisme. $\square$

Preuve. (du Corollaire 1)

Supposons $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et $m < n$. Posons $E_m = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ et $p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tel que $(x_1, ..., x_m) \mapsto (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homéomorphisme. Alors $F(x) = p(f(x))$ est continue et injective. Donc $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. Or $F(\mathbb{R}^n) \subset E_m$, absurde. $\square$

Lemme 6

Soit $f\colon B \to \mathbb{R}^n$ continue et injective. Alors $f(0)$ appartient à l'intérieur de $f(B)$ où $B = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$.

Preuve. (du Théorème 8 à partir du Lemme 6)

Soit $y_0 \in f(U)$, alors $\exists!\ x_0 \in U$ tel que $f(x_0) = y_0$. Posons $F(x) = f(x_0 + \varepsilon x)$, $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ pour ε assez petit. D'après le lemme, $y_0 \in \mathrm{Int}(F(B))$. Or $F(B) \subset f(U)$ donc $f(U)$ est un voisinage de y_0. Donc $f(U)$ est un ouvert. $\square$

Théorème 9 (Tietze)

On dit que X est normal si $\forall F_1, F_2 \subset X, F_1 \cap F_2 = \emptyset$ fermés, $\exists\ U_1, U_2$ ouverts disjoints tels que $F_1 \subset U_1$. Soit alors $f\colon A \to \mathbb{R}$ continue sur un fermé de X, $\exists\ \tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ continue telle que $\tilde{f}|_A = f$.

Preuve. (du Lemme 6)

Soit $f\colon B \to f(B)$ une bijection continue. On veut montrer que $f(0) \in \overset{\circ}{\widehat{f(B)}}$.

Notons que f^{-1} est continue. En effet si F est un fermé de B, alors $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un compact donc fermé. On utilise alors le théorème de Tietze.

Alors $\exists G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue qui prolonge $f^{-1}\colon f(B) \to B$. On a $G(f(0)) = f^{-1}(f(0)) = 0$. G s'annnule !

Montrons que si $\tilde{G}\colon f(B) \to B$ est telle que $|\tilde{G}(y) - G(y)| \leqslant 1\ \forall y \in f(B)$ alors $\exists\ y_0 \in f(B)$ tel que $\tilde{G}(y_0) = 0$.

En effet l'application $h(x) = G(f(x)) - \tilde{G}(f(x))$ vérifie : h est continue et $|h(x)| \leqslant 1\ \forall x \in B$. Donc $h\colon B \to B$ a un point fixe d'après Brouwer. Or $h(x) = x - \tilde{G}(f(x))$ car $G = f^{-1}$ sur $f(B)$. Donc $h(x) = x \ \Rightarrow\ \tilde{G}(f(x)) = 0$.

Supposons que $f(0) \notin \overset{\circ}{\widehat{f(B)}}$. Par continuité de G, $\exists\ \varepsilon > 0$ tel que $|G(y)| < \frac{1}{10}\ \forall y \in \mathcal{B}(f(0), 2\varepsilon)$. $\exists\ c \in \mathbb{R}^n,\ |c - f(0)| < \varepsilon$ et $c \notin f(B)$. On peut supposer $c = 0$.

Alors $|f(0)| < \varepsilon$ et $|G(y)| < \frac{1}{10}$ si $y \in \overline{\mathcal{B}(0,\varepsilon)}$. On pose :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \quad \text{avec } \Sigma_1 = \{y \in f(\overline{B}) \mid |y| \geqslant \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \partial\mathcal{B}(0,\varepsilon)$$

- G ne s'annule pas sur Σ_1 car si $y \in f(B)$, $G(y) = f^{-1}(y)$ et $G(f(0)) = 0$. G bijective, G s'annule en $f(0)$, $f(0) \notin \Sigma_1$ car $|f(0)| < \varepsilon$.

- Donc $\exists \delta > 0$ tel que $|G(y)| > \delta \ \forall y \in \Sigma_1$
- $\exists P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ polynôme tel que $|P(y) - G(y)| < \delta$. P ne s'annule pas sur Σ_1.
- Quitte à modifier P en ajoutant une constante arbitrairement petite, P ne s'annule pas sur σ_2. Soit
$$\tilde{G}(y) = P\left(\max\left\{\frac{\varepsilon}{|y|}, 1\right\} y\right)$$
  1. $\tilde{G}$ est continue sur $f(B)$ $(0 \notin f(B))$.
  2. $\max\left\{\frac{\varepsilon}{|y|}, 1\right\} \in \Sigma$ si $y \in f(B)$. Donc $\tilde{G}(y) \neq 0$.

  Donc $\tilde{G}(y) \neq 0 \ \forall y \in f(B)$.
- Si $y \in f(B)$ avec $|y| \geqslant \varepsilon$ alors :
$$|G(y) - \tilde{G}(y)| = |G(y) - P(y)| \leqslant \delta$$
- si $y \in f(B)$ et $|y| < \varepsilon$ alors $|G(y)| < \frac{1}{10}$ car $|G(z)| \leqslant \frac{1}{10} \ \forall z \in \overline{\mathcal{B}(0,\varepsilon)}$ et $\max\left\{\frac{\varepsilon}{|y|}, 1\right\} \in \partial\mathcal{B}(0,\varepsilon)$ donc :
$$\begin{aligned} |\tilde{G}(y)| &\leqslant |P(y) - G(y)| + |G(y)| \\ &\leqslant \delta + \frac{1}{10} \end{aligned}$$
  Donc :
$$|\tilde{G}(y) - G(y)| \leqslant |G(y)| + |\tilde{G}(y)| \leqslant \frac{2}{10} + \delta \leqslant 1$$
- Donc $|G - \tilde{G}| \leqslant 1$, $\tilde{G}$ continue, n'a pas de zéro. Absurde.

$\square$