Géométrie
TD1 : Topologie générale

Lucie Le Briquer

11 janvier 2018

Exercice 1 (Quelques espaces topologiques homéomorphes (ou non))

1.
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x, y)\|_\infty \leqslant 1\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x, y)\|_2 \leqslant 1\}$$

   On cherche $f\colon C \longrightarrow D$ de la forme $f(x, y) = a(x, y).(x, y)$. On prend :
$$a(x, y) = \frac{\|(x, y)\|_\infty}{\|(x, y)\|_2}$$

   Ainsi :
$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\|(x,y)\|_\infty}{\|(x,y)\|_2}(x, y) \\ (0, 0) & \longmapsto & (0, 0) \end{array} \right.$$

   f est continue sur $C\backslash\{(0, 0)\}$. Or $\|f(x, y)\|_2 = \|(x, y)\|_\infty \leqslant \|(x, y)\|_2$, donc f est aussi continue en 0.
$$f^{-1}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\|(x,y)\|_2}{\|(x,y)\|_\infty}(x, y) \\ (0, 0) & \longmapsto & (0, 0) \end{array} \right. \qquad \text{continue}$$

   $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_D$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_C$ donc f est bijective.

2.
$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-\|x\|} \end{array} \right. \qquad \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathcal{B}$$
$$g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ y & \longmapsto & \frac{y}{1+\|y\|} \end{array} \right. \qquad \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

   Et on a bien $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(y) = y$. f est un homéomorphisme.

3. $\mathcal{S}^1$ et $\mathbb{R}$. $\mathcal{S}^1$ est compact donc si f homéomorphisme de $\mathcal{S}^1$ dans $\mathbb{R}$ on aurait par continuité que $f(\mathcal{S}^1) = \mathbb{R}$ est compact. Absurde.

Remarque. Des propriétés de connexité peuvent aussi servir à montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes. Par exemple on aurait pu dire qu'en enlevant un point de $\mathcal{S}^1$ on garde la connexité, en enlevant un point à $\mathbb{R}$ on a deux composantes connexes.

4. $$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longrightarrow & \exp(t) \end{array}\right. \quad \text{convient}$$

5. Si on retire 0 à $\mathbb{R}_+$ on a une seule composante connexe, en revanche $\mathbb{R}\backslash\{f(0)\}$ a deux composantes connexes.

6. $$f\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \\ re^{i\theta} & \longmapsto & (\theta, \ln r) \end{array}\right.$$
$$f\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 \times \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \left(\frac{z}{|z|}, \ln|z|\right) \end{array}\right.$$

7. $(0,1)$ et $(0,1) \cup (2,3)$ ne sont pas homéomorphes puisque $(0,1)$ est connexe et l'autre ne l'est pas.

8. $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes. Supposons qu'il existe un homéomorphisme, $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ reste connexe tandis que $\mathbb{R}\backslash\{h(0,0)\}$ n'est pas connexe. Contradiction.

Exercice 2 (Deux lemmes de topologie générale)

1. Fait en cours.

2. Il suffit de montrer que f est fermée. Soit $F \subset X$ un fermé, F est donc compact. Or $f(F) \subset Y$ est séparé, donc $f(F)$ est compacte. De plus en prenant $F = X$, on a Y compact. Donc $f(F)$ est fermé dans Y. Donc f est fermée.

Lemme 1 (utile)

Soient X, Y deux espaces topologiques avec X localement compact et Y séparé. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ continue, bijective, propre ($f^{-1}(K)$ compact $\forall K$ compact). Alors f et un homéomorphisme.

Exercice. On pose $X = [0,1]^2/_\sim$ où $\sim$ est engendrée par $(0,y) \sim (1,y)$ $\forall y$.

$$Y = \{z \in \mathcal{C} \ :\ 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$$

Montrer que X et Y sont homéomorphes.

A espace topologique, $\sim$ d'équivalence sur A, $B = A/_\sim$. Pour tout espace topologique C, pour toute $f\colon A \longrightarrow C$ constante sur les classes d'équivalence, il existe $\bar{f}\colon B \longrightarrow C$ continue tel que $f = \bar{f} \circ \pi$.