Géométrie

TD 3 : Homotopie et théorème de Van Kampen

Lucie Le Briquer

1^{er} février 2018

Exercice 5 (cylindre et ruban de Möbius)

Rétractation par déformation. X espace topologique, $Y \subset X$. Une rétractation par déformation de X sur Y est $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$ tel que :

$$\forall x \in X,\ H(x,0) = x$$

$$\forall x \in X,\ H(x,1) \in Y$$

$$\forall y \in Y, \forall t \in [0,1]\ H(y,t) = y$$

1. $$\mathcal{S}^1 = [0,1] \times \{0\}/_{(0,0)\sim(1,0)}$$

   On a bien $\mathcal{S}^1 \subset C$. Soit :

   $$H\colon \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] \times C & \longrightarrow & C \\ (t,(c_1,c_2)) & \longmapsto & (c_1, tc_2) \end{array} \right.$$

   Alors $H(0,c) = (c_1,0) \in \mathcal{S}^1$, $H(1,c) = (c_1,c_2) = c$ et $H(t,(c_1,0)) = (c_1,0)$ $\forall c_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. H continue. Donc C se rétracte par déformation sur $\mathcal{S}^1$.

   $$\pi_1(C) = \pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$$

   Idem pour le ruban de Möbius.

2. En retirant un cercle à C on a deux composantes connexes alors que le ruban reste d'un seul tenant. Supposons qu'il existe $h\colon M \longrightarrow C$ homéomorphisme. Soit $Y := \{y = 0\}$ dans M, $Y \simeq \mathcal{S}_1$. Alors $h(Y) \subset C$ homéomorphe à $\mathcal{S}^1$ et $C\backslash h(Y)$ a deux composantes connexes (Jordan). Mais $C\backslash h(Y) = h(M\backslash Y)$ est connexe. Contradiction.

Exercice 1 (groupes topologiques)

Soit $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow G$ un lacet enraciné en e.

$$\gamma * e \sim \gamma$$

On pose :

$$\gamma_s(t) = \left\{ \begin{array}{cl} \gamma(s(2t) + (1-s)t) & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma(s + (1-s)t) & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$e * \sigma \sim \sigma$$

On pose $\tilde{\sigma}_s(t)$ de manière similaire. On pose alors :

$$H\colon \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \to & G \\ (t,s) & \longmapsto & \gamma_s(t)\tilde{\sigma}_s(t) \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} H(0,t) &= \gamma(t)\sigma(t) = (\gamma\sigma)(t) \\ H(1,t) &= (\gamma * e)(t)(e * \sigma)(t) \\ &= (\gamma * \sigma)(t) \end{aligned}$$

De même $\sigma\gamma \sim (e * \sigma)(\gamma * e) = \gamma * \sigma$. Donc :

$$[\gamma\sigma] = [\gamma * \sigma] = [\sigma\gamma] = [\sigma * \gamma]$$

Donc $[\gamma][\sigma] = [\sigma][\gamma]$ donc $\pi_1(G,e)$ est abélien.

Exercice 7 (présentations de groupes)
On se donne :

- un alphabet fini $\{a_1,\dots,a_n\} = \mathcal{A}$,
- une nombre fini de relations $\{w_1,\dots,w_m\}$ qui sont des mots en les $a_i^{\pm 1}$.

Exemple. Alphabet : $\{a,b\}$, Relations : $aba^{-1}b$. On pose :

$$A^* = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \{a_i^{\pm 1}\}^n \text{ l'ensemble des mots finis en les } a_i^{\pm 1}$$

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{A}^*$ définie par $u \sim v$ si on peut passer de u à v en échangeant $a_i a_i^{-1}$ et $\emptyset$ et w_j et $\emptyset$.
On peut alors écrire un mot sous la forme $a_{i_1}^{n_1}\dots a_{i_m}^{n_m}$, $n_k \in \mathbb{Z}$, $i_k \neq i_{k+1}$ $\forall k$.
Sur $\mathcal{A}^*$: on peut concaténer les mots. La concaténation passe au quotient en $\mathcal{A}^*/_\sim \times \mathcal{A}^*/_\sim \longrightarrow \mathcal{A}^*/_\sim$. Si $G = \mathcal{A}^*/\sim$ munit de cette loi, G est un groupe. On le note :

$$G = \langle a_1,\dots,a_n \mid w_1,\dots,w_m\rangle$$

Propriété universelle. Soit H un groupe engendré par $\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_n$. Supposons que $\tilde{a}_1,\dots\tilde{a}_n$ vérifient les relations $\tilde{w}_j$ (obtenues à partir de w_j en remplaçant a_i par $\tilde{a}_i$). Alors $\exists!\varphi\colon G \longrightarrow H$ morphisme surjectif tel que $\varphi(a_i) = \varphi(\tilde{a}_i)$ $\forall i$.

Exemple. $G = \langle a|\emptyset\rangle$, $H = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. $\exists!\varphi\colon G \longrightarrow H$ tel que $\varphi(1) = 1$.
Graphe de Cayley. Soit G un groupe, $S \subset G$ des générateurs, symétrique. Le graphe de Cayley est défini par :

- sommets : éléments de G
- $g - g' \Leftrightarrow \exists s \in S\ :\ g = sg'$

1.

2. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est engendré par 1 et $n-1=0[n]$. Donc $\exists\varphi\colon \langle a|a^n\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$ $\varphi(a)=1$. Soit $u\in\ker(\varphi)$. On écrit $u=a^m$. Alors $u\sim a^r$ pour un $r\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi(u)=r\varphi(a)=r[n]=0[n]$. Donc $r=0$. Donc $u\sim a^0=\emptyset$.

3. $\mathbb{Z}^n$ est engendré par les $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $e_i=(0,\dots,1,\dots,0)$. $[e_i,e_j]=0$ $\forall i,j$. Donc $\exists!\varphi\colon \langle (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|[a_i,a_j]\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ tel que $\varphi(a_i)=e_i$ $\forall i$. Soit $u\in\ker(\varphi)$. $u=a_{i_1}^{n_1}\dots a_{i_m}^{n_m}$. En utilisant les relations de commutation, on a $u\sim a_1^{p_1}\dots a_n^{p_n}$.

$$\varphi(0=\sum_{i=1}^n p_ie_i=0$$

Donc $p_i=0$ $\forall i$. Donc $\varphi(u)\sim a_1^0\dots a_n^0=\emptyset$.

$$\langle a,b \mid a^n=b^2=baba^{-1}=e\rangle \simeq D_n$$

$u\in\ker(\varphi)$ alors $u\sim b^\varepsilon a^r$ avec $\varepsilon\in\{0,1\}$ et $0\leqslant r\leqslant n-1$. $\varphi(u)=I\Rightarrow \varepsilon=0$ et $r=0$ donc $u\sim\emptyset$.

4. $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} * \mathbb{Z}\_2\mathbb{Z} \simeq D_\infty = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

Jeudi 01 février

Utiliser le théorème de Van Kampen. X connexe par arcs, U,V ouvert non vides de X, connexes par arcs tels que $U\cup V=X$. On suppose $U\cap V$ connexe par arcs, $x\in U\cap V$. On se donne :

$$\pi_1(U,x)=\langle a_i|x_i\rangle \quad \pi_1(V,x)=\langle b_j|w_j\rangle \quad \pi_1(U\cap V,x)=\langle c_k|t_k\rangle$$

Alors

$$\pi_1(X,x)\simeq\langle a_i,b_j|v_i,w_j,i_{U*}(c_k)=i_{V*}(c_k)\rangle$$

$i_{U*}(c_k)$: écrire c_k en concaténation de a_i dans U.

Exercice 4 (variétés topologiques)

En procédant par récurrence, il suffit de démontrer que $\pi_1(X,x)\simeq\pi_1(X\backslash\{a\},x)$ $\forall a\neq x\in X$. Posons :

$$U=\text{un voisinage de } a \text{ homéomorphe à } \mathbb{R}^d \qquad V=X\backslash\{a\}$$

Alors $X=U\cup V$, $U\cap V$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ qui est connexe par arcs. Soit $x\in X\cap V$. Par le théorème de Van Kampen :

$$\pi_1(X,x)=\pi_1(U,x) *_{\pi_1(U\cap V,x)} \pi_1(V,x)$$

$$\pi_1(U,x)=\pi_1(\mathbb{R}^d,0)\simeq\{e\} \qquad \pi_1(U\cap V,x)\simeq\pi_1(\mathbb{R}^d\backslash\{0\},y)\simeq\pi_1(\mathcal{S}_{d-1},y')=\{e\}$$

car $d\geqslant 3$. Donc $\pi_1(X,x)\pi_1(V,x)=\pi_1(X\backslash\{a\},x)$.

Exercice 9 (applications du théorème de Van Kampen)

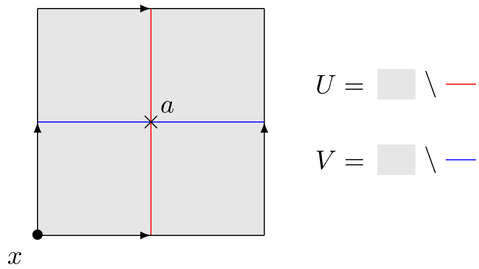
1. On démontre par récurrence que $\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{S}_1 \simeq F_n$
   - $n = 1$: ok
   - On suppose cette hypothèse au rang n. Soit $U = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon)$ et $V = (n+1)-$ème cercle$\cup\mathcal{B}(x, \varepsilon)$.
     - U se rétracte par déformation sur $\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{S}^1$ donc $\pi_1(U, x) \simeq F_n$ par hypothèse de récurrence.
     - V se rétracte par déformation sur $\mathcal{S}_1$: $\pi_1(V, x) = \mathbb{Z}$
     - $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $\{x\}$: $\pi_1(U \cap V, x) = \{e\}$

   Par le théorème de Van Kampen :

$$\pi_1\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} \mathcal{S}_1, x\right) \simeq F_n * \mathbb{Z} \simeq F_{n+1}$$

2.

3. Prenons les ouverts U et V suivants (correspondent à X privé d'un cercle) :



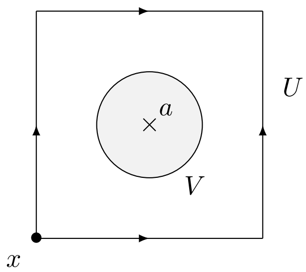
$U, V, U \cap V$ sont connexes par arcs. U et V sont des cylindres donc $U \cap V \simeq (0,1)^2$, ainsi :

$$\pi_1(U, x) \simeq \langle a|\emptyset\rangle \qquad \pi_1(V, x) \simeq \langle b|\emptyset\rangle \qquad \pi_1(U \cap V, x) \simeq \langle\emptyset|\emptyset\rangle$$

Alors, par Van Kampen :

$$\pi_1(\mathbb{T}^2 \backslash \{a\}, x) = \langle a, b|\emptyset\rangle \simeq F_2$$

4. Prenons $U = \mathbb{T}^2 \backslash \{a\}$ et $V = \mathcal{B}(a, \varepsilon)$.



$U, V, U \cap V$ sont connexes par arcs.

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x) = \langle a, b|i_{U*}(c)\rangle = \langle a, b|aba^{-1}b^{-1}\rangle \simeq \mathbb{Z}^2$$