Analyse
Chapitre 6 : Transformée de Fourier

Lucie Le Briquer

30 novembre 2017

Table des matières

Lien entre transformée de Fourier et régularité : séries de Fourier. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ (i.e. f est $\mathcal{C}^1$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique). On a :

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t)\partial_t\left(-\frac{1}{in}e^{-int}\right)dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt$. Donc $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}'(n)$.
De plus $|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{2\pi}{n}\|f'\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}$ pour $n \neq 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, on a $|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{C}{n^2}$, d'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. On en déduit que :

$$S_N(f)\colon x \longmapsto \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} \quad \text{converge uniformément vers } f$$

car $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$ est complet.

Propriété 1

$\exists f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ tel que $S_N(f)(0)$ ne converge pas vers $f(0)$.

Preuve.

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}dy$$

Posons $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{int}}{2\pi}$ appelé *noyau de Dirichlet*. Alors $S_N(f) = f * D_N$. On a :

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Introduisons :

$$\Lambda_n\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & S_N(f)(0) \end{array}\right.$$

C'est une forme linéaire continue. Par Banach-Steinhauss, si $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement bornée, alors elle est bornée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})^*$. Montrons donc que $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})^*$. Ceci impliquera qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $(\Lambda_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ non-bornée, i.e. que $(S_n(f)(0))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
On a

$$|\lambda_N(f)| = \left|\int_0^{2\pi} f(y)D_N(-y)dy\right| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})}\|D_N\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$$

Donc,

$$\|\Lambda_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{C}))} \leqslant \|D_N\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$$

Montrons qu'il y a égalité. Si on avait $D_N \geqslant 0$, on prendrait $f = 1$ pour avoir $\Lambda_1 = \int_0^{2\pi} D_N(-y)dy = \|D_N\|_{\mathcal{L}^1}\underbrace{\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}}_{=1}$. Dans l'idée on veut donc poser $f(y) = \mathrm{sgn}(D_N(-y))$ mais pas continu ! Soit :

$$f_\varepsilon(y) = \frac{D_N(y)}{|D_N(y)| + \varepsilon},\ \varepsilon > 0,\ f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$$

Alors,

$$\Lambda_N(f_\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{D_N(y)^2}{|D_N(y)| + \varepsilon} dy \quad \text{et} \quad \Lambda_N(f_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \|D_N\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})} \text{ par TCD}$$

On en déduit que $\|\Lambda_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{T},\mathbb{C}))} = \|D_N\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})}$ et on rappelle que :

$$\|D_N\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{T})} \geqslant \int_0^N \left| \frac{\sin(u)}{du} \right| du \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

□

Propriété 2

Supposons que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ vérifie, pour $\alpha > 0$:

$$[f]_{0,\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty \qquad (f \text{ est } \alpha\text{−hölderienne})$$

Alors $S_N(f)$ converge simplement vers f.

Remarque.

- $1-$hölderienne : lipschitzienne
- $\alpha-$hölderienne : constante pour $\alpha > 1$
- Le cas intéressant est $0 < \alpha < 1$

Preuve.

$$(f - S_N(f))(x) = f(x) - \int_0^{2\pi} f(x-y) D_N(y) dy = \int_0^{2\pi} (f(x) - f(x-y)) D_N(y) dy$$

car

$$\int_0^{2\pi} D_N(y) dy = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{iny}}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i0y}}{2\pi} dy = 1$$

$$(f - S_N(f))(x) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f(x) - f(x-y)}{2\pi \sin(y/2)}}_{h_\alpha(y) \in \mathcal{L}^1} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) y\right) dy$$

$\frac{|y|^\alpha}{|y|} = |y|^{\alpha - 1} \in \mathcal{L}^1_{textloc}$.

Rappel. (théorème de Riemann-Lebesgue)

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{pour } f \text{ continue}$$

Par Riemann-Lebesgue, $(f - S_N(f))(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. □

Lien entre décroissance en Fourier et régularité höldérienne.

Proposition 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, $\alpha-$höldérienne pour $\alpha \in]0,1]$, alors :

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{\pi^{1+\alpha}}{n^\alpha}[f]_{0,\alpha}$$

Preuve.

$$\hat{f}(n) = \int f(x)e^{-inx}dx = -\int f(x)e^{-in\left(x+\frac{\pi}{n}\right)}dx = -\int f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)e^{-inx}dx$$

Ainsi,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2}\int \left(f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)e^{-inx}dx$$

Donc,

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2}\int \left|f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right|dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha [f]_{0,\alpha}\int dx = \frac{\pi^{\alpha+1}}{n^\alpha}[f]_{0,\alpha}$$

□

Théorème 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $[f]_{0,\alpha} < +\infty$ avec $\alpha \in]0,1]$, alors :

$$\|f - S_N(f)\|_{\mathcal{L}^\infty} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Preuve.

$$f(x) - S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-y))D_N(y)dy = A + B$$

où $A = \int_{|y|<\delta}$ et $B = \int_{\delta<|y|<r}$

$$|A| \leqslant \int_{|y|<\delta} C|y|^{\alpha-1}dy \text{ (pour } \delta \text{ assez petit)} \leqslant C\delta^\alpha$$

(la valeur de C peut changer, C signifie juste "une constante"). Considérons :

$$h_x(y) = \frac{f(x) - f(x-y)}{2\pi\sin(y/2)}$$

On a :

$$B = \int_{\delta<|y|<r} h_x(y)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)dy = -\int_{\delta<|y|<r} h_x(y)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(y+y_n)\right)dy$$

où $y_n = \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
B &= \int_{r \geqslant |y-y_n| \geqslant \delta} (h_x(y) - h_x(y-y_n)) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) y\right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{r \geqslant |y| \geqslant \delta} (h_x(y) - h_x(y-y_n)) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) y\right) dy \\
&\quad + \int_{A_n} h_x(y-y_n) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) y\right) \mu(y) dy
\end{aligned}$$

avec $|\mu(y)| = 1$.
$h_x(y) = \frac{f(x)-f(y)}{2\pi \sin \frac{y}{2}}$; pour $|y| \geqslant \delta$, on a :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad |h_x(y) - h_x(y+\tau)| \leqslant C \frac{|\tau|^\alpha}{\delta} [f]_{C^{0,\alpha}} + \frac{||f||_{L^\infty}}{\delta^2} |\tau| \\
&(2) \quad |h_x(y)| \leqslant \frac{C||f||_{L^\infty}}{\delta}
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$|B| \leqslant \frac{C}{\delta} |y_n|^\alpha + \frac{C}{\delta^2} |y_n| + \frac{C}{\delta} |A_n|$$

Or, $|A_n| \leqslant C|y_n|$. Donc $|A| + |B| \leqslant C(\delta^\alpha + \delta^{-1} n^{-\alpha} + \delta^{-2} n^{-1})$. On choisit $\delta = n^{-\frac{\alpha}{3}}$ $(n = N \ ...)$
On a donc $|A| + |B| \to 0$ uniformément pour $N \to +\infty$. $\square$

Remarque. On a utilisé le lemme suivant avec $u(y) = f(x) - f(x-y)$, $v(y) = \frac{1}{\sin(y/2)}$:

Lemme 1

$$\forall \alpha \in]0,1] : [uv]_{0,\alpha} \leqslant ||u||_{L^\infty} [v]_{0,\alpha} + ||v||_{0,\alpha} ||u||_{L^\infty}$$

(un peu différent dans la preuve plus haut car on a utilisé v lipschitzienne au lieu de v α-hölderienne).

1 Introduction à la transformée de Fourier

Fourier : f = somme d'exponentielles oscillantes, où une exponentielle oscillante est une fonction de la forme $e(x) = \exp(i\xi \cdot x)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

- Pour f 2π-périodique, $f = \sum \hat{f}_n \exp(inx)$: naturel, on décompose juste sur une base.
- Pour f quelconque, on pose :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a $f = \tilde{f}|_{Q_T}$, où $Q_T =]-T, +T[^n$, $\tilde{f}$ $2T$-périodique. Or :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k \exp\left(\frac{i\pi k \cdot x}{T}\right)$$

où $f_k = c_T \int_{Q_T} \tilde{f} \bar{e}_k dx$, $e_k = e^{i\frac{\pi k \cdot x}{T}}$, $c_T = \frac{1}{|Q_T|} = \frac{1}{(2T)^n}$.

Donc :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(2T)^n} \int_{Q_T} f(y) e^{i\frac{\pi}{T}k\cdot(x-y)} dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{T^n} F_x\left(\frac{k}{T}\right)$$

où $F_x(\xi) = \frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\pi\xi(x-y)}dy$.
Pour $T \to +\infty$,

$$f = \frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\pi\xi(x-y)}dyd\xi$$

Alors, pour $x\xi \to \xi$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\xi\cdot y}dy\right)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

Définition 1 (transformée de Fourier)

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. On définit sa transformée de Fourier par :

$$\hat{f}(\xi) = \int f(y)e^{-i\xi\cdot y}dy$$

Théorème 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

2 Transformée de Fourier sur la classe de Schwartz

Transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^1$ trop restrictif.

Propriété 3

Si $f \in \mathcal{L}^1$ et $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$, alors f est continue et de limite nulle à l'infini.

Preuve.
On montre que $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \hat{f}$ continue et de limite nulle à l'infini. $\hat{f}$ continue par les théorèmes généraux.

1. Si $f \in \mathcal{C}_0^2$:

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)\frac{-1}{|\xi|^2}\Delta_x(e^{-ix\cdot\xi})dx$$

avec $\Delta_x = \sum \delta_{x_j}^2$

$$\Delta_x(e^{-ix\cdot\xi}) = \sum(i\xi_j)^2 = -|\xi|^2 \text{ et } \int f\Delta_x g = \int(\Delta_x f)g$$

2. Si $f \in \mathcal{L}^1$, on utilise la densité de $\mathcal{C}_0^\infty$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

□

Les fonctions de limite nulle à l'infini forment un espace trop petit à notre goût : on veut définir $\hat{f}$ pour f vivant dans un espace plus gros.

Propriété 4

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que f et $\hat{f}$ sont à support compact, alors $f \equiv 0$.

Preuve.

Soit $F\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \int e^{-izx} f(x)dx$. $F|_{\mathbb{R}} = \hat{f}$, donc F s'annule sur un intervalle non-trivial ; impossible par analycité. $\square$

Définition 2 (classe de Schwartz)

La classe de Schwartz est l'espace noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telles que, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$:

$$x^\alpha \partial_x^\beta f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n} f \text{ est bornée.}$$

Remarque. On a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mais $x \mapsto \exp(-|x|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3 Espaces vectoriels topologiques

Définition 3 (espace vectoriel topologique)

Un espace vectoriel topologique est un $\mathbb{K}-$ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une topologie telle que :

1. $\{x\}$ est fermé pour tout x
2. $(x, y) \longmapsto x + y$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$ sont continues

Exemple. Un e.v.n.

Définition 4 (semi-norme, norme)

1. Une *semi-norme* est une application $\rho \colon E \longrightarrow [0, +\infty[$ telle que :
   (a) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$
   (b) $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$
2. Une *norme* est une semi-norme telle que $\rho(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.
3. $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une *famille graduée* de semi-normes si :
$$\rho_0 \leqslant \rho_1 \leqslant \ldots \leqslant \rho_n \leqslant \ldots$$
4. $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une *famille séparante* si :
$$x = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall n \in \mathbb{N},\; \rho_n(x) = 0$$

Exemples.

1. K compact de $\mathbb{R}^n$, $E = \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{C}^\infty$ à support dans K). Alors :
$$\rho_n(f) = \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_K \left|\partial^\alpha_x f(x)\right|$$
Ici, en fait, ρ_n est une norme $\forall n$.
2. Espaces locaux. $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$
$$l_K(f) = \|\mathbb{1}_K f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \quad \text{semi-norme mais pas norme}$$
$l_n = l_{K_n}$ où $K_n = \overline{\mathcal{B}(0, n)} \cap \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geqslant 1/n\}$
3. $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$: espace normé, Ω borné. $\mathcal{C}^1(\Omega)$: $\rho_n(f) = \sup_{K_n}\{|f(x)| + |\nabla f(x)|\}$

Définition 5 (base, base de voisinage)

Soit X muni d'une topologie $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$.

1. $\mathcal{B}$ est une *base* si tout ouvert ($U \in \mathcal{T}$) est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.
2. $\mathcal{B}$ est une *base de voisinage* d'un point $x \in X$ si, $\forall V$ voisinage de x (i.e. $\exists U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset V$), $\exists O \in \mathcal{B}$ tel que $x \in O \subset V$.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$, on dit que $\mathcal{T}$ *est induite* par $\mathcal{B}$.

$$\rho_n(f) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \sum_{|\beta| \leqslant n} \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

Proposition 2

Considérons un espace vectoriel E muni d'une famille séparante et graduée de semi-normes $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, on pose :

$$B_n(x, \varepsilon) = \{y \in E \mid \rho_n(y - x) < \varepsilon\}$$

On munit E de la topologie induite par :

$$\mathcal{B} = \{B_n(x, \varepsilon),\ x \in E,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0\}$$

Alors :

1. $\forall x_0 \in E$, $\mathcal{B}_{x_0} = \{\mathcal{B}_n(x_0, \varepsilon)\ :\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinages de x_0.
2. E est un e.v.t.
3. La convergence d'une suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vers x équivaut à :

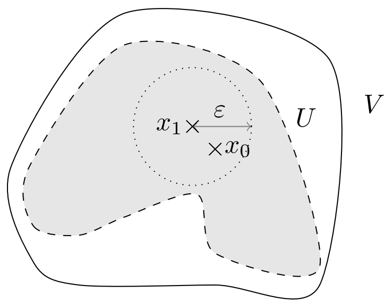
$$\rho_n(x_j - x) \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Cette topologie est métrisable et elle est induite par la distance :

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)} \qquad (*)$$

Preuve.

1. Soit $x_0 \in E$ et V un voisinage de x_0. $\exists U$ ouvert $\subset V$, $x_0 \in U$. U ouvert pour la topologie induite par $\mathcal{B}$ donc $\exists (n, x_1, \varepsilon) \mid x_0 \in B_n(x_1, \varepsilon) \subset V$. Donc $\rho_n(x_0 - x_1) < \varepsilon$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon - \rho_n(x_0 - x_1)}{2}$.



Si $x \in B_n(x_0, \delta)$, alors montrons que $x \in B_n(x_1, \varepsilon) \subset V$. On a :

$$\begin{aligned}\rho_n(x - x_1) &\leqslant \rho_n(x - x_0) + \rho_n(x_0 - x_1)\\ &\leqslant \delta + \rho_n(x_0 + x_1)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\rho_n(x_0 - x_1)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

2. Soit $x_0 \in E$, $y_0 \in E$ et soit V un voisinage de x_0+y_0. $\exists n,\ \exists \varepsilon > 0$ tel que $B_n(x_0+y_0, \varepsilon) \subset V$. Or par inégalité triangulaire :

$$\rho_n(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \rho_n(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow\ x + y \in B_n(x_0 + y_0, \varepsilon)$$

$$\phi\colon \left\{\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E\\ (x, y) & \longmapsto & x + y\end{array}\right. \qquad\qquad \phi^{-1}(V) \supset B_n(x_0, \varepsilon/2) \times B_n(x_0, \varepsilon/2)$$

3. $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$ signifie que $\forall V$ voisinage de x, $\exists J \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geqslant J,\ x_j \in V$. Donc $\rho_n(x_j - x) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$, $\forall n$, avec $V \in \{B_n(x, 1/k),\ k \in \mathbb{N}\}$. Réciproque en utilisant la base de voisinages.

4.
   - d bien définie
   - $d(x, x) = 0$
   - $d(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \rho_n(x - y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y$
   - $d(x, y) = d(y, x)$ car $\rho_n(z) = \rho_n(-z)$
   - d vérifie l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. En effet, il suffit de montrer que :

   $$\forall n,\ (x, y) \longmapsto \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)} \quad \text{vérifie la même propriété}$$

   Soit

   $$\kappa\colon t \mapsto \frac{t}{1 + t} \quad \text{on a} \quad \kappa'(t) = \frac{1}{1 + t} - \frac{t}{(1 + t)^2} \geqslant 0$$

   Donc par inégalité triangulaire sur ρ_n :

   $$\begin{aligned}\frac{\rho_n(x - z)}{1 + \rho_n(x - z)} &\leqslant \frac{\rho_n(x - y) + \rho_n(y - z)}{1 + \rho_n(x - y) + \rho_n(y - z)}\\ &\leqslant \frac{\rho_n(x - y)}{1 + \rho_n(x - y)} + \frac{\rho_n(y - z)}{1 + \rho_n(y - z)}\end{aligned}$$

   car

   $$\frac{a + b}{1 + a + b} = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \leqslant \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}$$

□

Propriété 5

Les espaces $\mathcal{L}^p_K(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont complets pour d.

Définition 6 (espace de Fréchet)

Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel topologique complet pour d.

Définition 7 (borné, équilibré)

E e.v.t et $A \subset E$.

1. On dit que A est *borné* si $\forall V$ voisinage de 0, $\exists s > 0$ tel que $\forall t \geqslant s$ on a $A \subset tV$.
2. On dit que A est *équilibré* (balanced) si :

$$\lambda A \subset A \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ avec } |\lambda| \leqslant 1$$

Exemple. $\mathcal{B}_{\|.\|}(0,1)$ est borné et équilibré. En revanche $\mathcal{B}_{\|.\|}(0,2) \backslash \mathcal{B}_{\|.\|}(0,1)$ n'est pas équilibré.

Propriété 6

Soit E un e.v.t., $A \subset E$. Alors :

1. $\overline{A} = \bigcap_V (A+V)$ avec V voisinage de 0
2. $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$
3. Tout voisinage de 0 contient un voisinage équilibré de 0.
4. Tout ouvert V contenant 0 contient un ouvert U équilibré tel que $\overline{U} + \overline{U} \subset V$.
5. Si A est borné alors $\overline{A}$ est borné.

Preuve.

1. $x \in \overline{A}$ ssi $\forall W$ voisinage de x, $W \cap A \neq \emptyset$.
   - Soit $x \in \overline{A}$ et V un voisinage de 0. Montrons que $x \in A + V$. $x - V$ est un voisinage de x car $y \mapsto x - y$ est un homéomorphisme $E \longrightarrow E$. Donc $(x - V) \cap A \neq \emptyset$, ainsi $x \in A + V$.
   - Réciproquement, supposons que $x \in \cap_{V \in \mathcal{V}(0)} (A + V)$. Soit $W \in \mathcal{V}(x)$, alors $x - W \in \mathcal{V}(0)$ donc :

$$\begin{aligned} x \in A + (x - W) &\Rightarrow \ \exists a \in A, \ \exists w \in W \text{ tel que } x = a + x - w \\ &\Rightarrow \ a = w \\ &\Rightarrow A \cap W \neq \emptyset \end{aligned}$$

     Ainsi $x \in \overline{A}$.

2. Soit $x \in \overline{A} + \overline{B}$. Montrons que $x \in A + B + V \ \forall V \in \mathcal{V}(0)$. Par continuité de l'addition, $\exists V_1 \in V(0)$, $\exists V_2 \in \mathcal{V}(0)$ tel que $V_1 + v_2 \subset V$. On a

$$x \in \underbrace{A + V_1}_{\supset \overline{A}} + \underbrace{B + V_2}_{\supset \overline{B}} = A + B + (V_1 + V_2) \subset A + B + V$$

   $\Rightarrow \ x \in \cap_{V \in \mathcal{V}(0)} (A + B + V) = \overline{A+B}$.

3. Soit $V \in \mathcal{V}(0)$. Par continuité de $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ en $(0,0)$, il existe $\delta > 0$ et $W \in \mathcal{V}(0)$ tels que $\forall \lambda \in]-\delta, \delta[$, $\forall x \in W$, $\lambda x \in V$. On pose $U = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \frac{\delta}{2}} \lambda W$, U est un ouvert équilibré contenu dans V.

4. D'après (3), il suffit de montrer qu'il existe Y ouvert voisinage de 0 tel que $\overline{U} + \overline{U} \subset V$. On a déjà vu que $\exists V_1, V_2 \in \mathcal{V}(0)$ tels que $V_1 + V_2 \subset V$. Posons $W = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(0)$, alors $W + W \subset V$. En appliquant ce raisonnement à W lui-même : $\exists U \in \mathcal{V}(0)$ tel que $U + U \subset W$. Alors :

$$\overline{U} + \overline{U} \underset{(2)}{\subset} \overline{U + U} \subset \overline{W} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(0)} (W + V) \underset{W \in \mathcal{V}(0)}{\subset} W + W \subset V$$

5. Soit A borné et $V \in \mathcal{V}(0)$, $\exists s > 0$, $A \subset tV$ pour $t \geqslant s$. Or,

$$\overline{A} \subset A + V \subset tV + V = (t+1)V$$

Donc $\overline{A} \subset tV$, $t \geqslant s + 1 \longrightarrow \overline{A}$ borné.

□

Exemple d'application.

Théorème de Baire : tout espace métrique complet est de Baire (intersection dénombrable d'ouverts denses est dense). Dans les démonstrations on l'utilise sous la forme $\bigcup_{\mathbb{N}}$ fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Théorème de Banach-Steinhaus : $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famille d'applications linéaires continues, $T_\alpha \colon E \longrightarrow F$ où F est un e.v.n. et E de Banach, simplement bornée :

$$\forall x \in E, \ \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_F < +\infty$$

Alors,

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$$

Définition 8 (équicontinuité)

Soit X, Y e.v.t. et $\mathcal{F} = \{f \colon X \longrightarrow Y\}$ une famille d'applications linéaires continues. $\mathcal{F}$ est *équicontinue* si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(0), \ \exists U \in \mathcal{V}(0) \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{F}, \ f(U) \subset V$$

Théorème 3 (Banach-Steinhaus, Fréchet)

Soit X un espace de Fréchet et Y un e.v.t. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'application linéaire continues telle que $\forall x \in X$, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est bornée dans Y. Alors $\mathcal{F}$ est équicontinue.

Preuve.
Soit $V \in \mathcal{V}(0)$. Montrons que $\exists U \in \mathcal{V}(0)$ tel que $f(U) \subset V$ $\forall f \in \mathcal{F}$. On sait $\exists W$ équilibré tel que $\overline{W} + \overline{W} \subset V$. Posons :

$$F = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(\overline{W})$$

Alors F est fermé. Montrons que F est d'intérieur non vide. Montrons que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nF$. Vrai car $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ bornée. $\forall x \in X,\ \exists n_x,\ \{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subset n_x W$. Donc $f(x) \in n_x W$ $\forall f$. Donc $f\left(\frac{n}{n_x}\right) \in W$, donc $n_x^{-1}x \in f^{-1}(W) \Rightarrow x \in n_x f^{-1}(W) \Rightarrow x \in n_x F$.

Baire $\Rightarrow nF$ d'intérieur non vide pour un certain $n \Rightarrow F$ d'intérieur non vide.

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{F}}$ et posons $U = x_0 - \overset{\circ}{\widehat{F}}$ ouvert.

$$f(U) = f(x_0) - f\left(\overset{\circ}{\widehat{F}}\right) \in \overline{W} - \overline{W}$$

Or $-W = W$ car W équilibré, donc $\overline{W} - \overline{W} = \overline{W} + \overline{W} \subset V$ par définition de W. On a donc montré que $\forall f \in \mathcal{F},\ f(U) \subset V$ $\square$

Contre-exemple. *Théorème.* Soit $f\colon U \longrightarrow B_2 \in \mathcal{C}^1$ avec $U \subset B_1,\ B_1, B_2$ Banach. Si $df(x_0)$ est un isomorphisme alors f est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme local.

Extension aux espaces de Fréchet impossible.

Contre-exemple de Hamilton :

$$P\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty([-1,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty([-1,1]) \\ f & \longmapsto & f - xf\frac{df}{dx} \end{array} \right.$$

On a :

$$dP(f)g = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(P(f+\varepsilon g) - P(f)\Big)$$
$$dP(0)g = g$$

Donc $dP(0)$ isomorphisme. Si on avait l'inversion locale dans ce contexte, $P(\mathcal{C}^\infty)$ continue sur un voisinage de l'origine. Or Hamilton montre que $g_n = \frac{1}{n} + \frac{x^n}{n!}$ n'appartient pas à $P(\mathcal{C}^\infty([-1,1]))$. Or $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$. En effet,

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad \max_{0\leqslant k\leqslant j} \sup_{[-1,1]} \left|g_n^{(k)}(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1])$. Étudions l'équation $P(f) = g_n$. Supposons f solution. Développement de Taylor de f :

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots$$

Comme $P(f) = f - xff'$,

$$\begin{aligned} P(f) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots - x(_0 + a_1x + \ldots)(a_1 + 2a_2x + \ldots) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0a_1)x + (a_2 - 2a_0a_2 - a_1^2)x^2 + \ldots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \ldots + \alpha_mx^m + \ldots \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = a_0 \\
&\alpha_1 = a_1 - a_0 a_1 \\
&\alpha_2 = a_2 - 2a_0 a_2 - a_1^2 \\
&\dots \\
&\alpha_k = a_k - k a_0 a_k + Q_k(a_1, \dots, a_{k-1})
\end{aligned}$$

où Q_k polynôme tel que $Q_k(0) = 0$. Alors $P(f) = \frac{1}{n} + \frac{x_n}{n!}$, $\alpha_0 = \frac{1}{n} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_0 = \frac{1}{n} & \Rightarrow & a_0 = \frac{1}{n} \\
\alpha_1 = 0 & \Rightarrow & a_1 = 0 \\
& \dots & \\
\forall k < n,\ \alpha_k = 0 & \Rightarrow & a_k = 0
\end{array}$$

Alors $P(f) = \alpha_0 + \alpha_n x^n + \dots$ où $\alpha_n = a_n - n a_0 a_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{n!}$ n'est pas possible.

Théorème 4

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$u(x+y) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha (\partial^\alpha u)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{k}{\alpha!} y^\alpha \int_0^1 (1-t)^{k-1} (\partial^\alpha u)(x+ty)dt$$

Remarque. α multi-indice, on a

$$\begin{gathered}
\alpha! = \alpha_1! \times \dots \times \alpha_n! \\
\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \\
|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n
\end{gathered}$$

Preuve. (de Hörmander)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha (\partial^\alpha u)(x+ty) \right) &= \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \sum_{j=1}^n \partial^\alpha \partial_j u(x+ty) y_j \\
&= \sum_{|\beta|=k} \left(\sum_{\alpha \leqslant \beta,\ |\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} \right) y^\beta (\partial^\beta u)(x+ty) \\
&= \sum_{|\beta|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\beta!} y^\beta (\partial^\beta u)(x+ty)
\end{aligned}$$

Car $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de norme $k \Leftrightarrow (\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de norme $k-1$ (-1 sur un β_j quelconque) ; dans ce cas :

$$\frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha_1!} \cdots \frac{1}{\alpha_n!} = \frac{\beta_1!}{\beta!}$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha (\partial^\alpha u)(x+ty) \right) = \sum_{|\beta|=k} \frac{k}{\beta!} y^\beta (\partial^\beta u)(x+ty)$$

Si l'on pose

$$v(t) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{(1-t)^{|\alpha|}}{\alpha!} y^\alpha (\partial^\alpha y)(x+ty)$$

v vérifie $v(1) = u(x+y)$, $v(0)$=développement de Taylor, et :

$$\partial_t v = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k}{\alpha!} y^\alpha (1-t)^{k-1} (\partial^\alpha u)(x+ty)$$

□

4 Propriétés élémentaires de la transformée de Fourier sur la classe de Schwartz

Déjà vu : séries de Fourier
$\mathcal{H}$ Hilbert, $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathcal{T}^n) = \mathcal{L}^2_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$, (e_k) base hilbertienne ($e_k(x) = \exp(ik \cdot x)$), $f \in H$:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, e_k \rangle . e_k$$

$f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vue $(2T)-$périodique pour T grand $T \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i(x-y)\cdot\xi} f(y) dy d\xi$$

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} f(y) dy \qquad \text{transformée de Fourier}$$

On cherche E, petit, tel que $\hat{f} \in E$ si $f \in E$. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ne convient pas.
On introduit alors la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et :

$$N_p(f) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \sum_{|\beta| \leqslant p} \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Propriété 7

Soit $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une famille graduée séparante de semi-normes.

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un e.v.t. de Fréchet
- $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\chi\left(\frac{\cdot}{k}\right) f \xrightarrow[k \to +\infty]{} f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Propriété 8

1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; x^\alpha \partial_x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
2. $f \in \mathcal{S},\; g \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; fg \in \mathcal{S}$
3. $f \in \mathcal{S},\; g \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; f * g \in \mathcal{S}$
4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûement dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in [1+\infty]$
5. $f \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \hat{f} \in \mathcal{C}^1$ et $\partial_{\xi_j} \hat{f} = -i\widehat{x_j f}$
6. $f \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \xi_j \hat{f} = -i\widehat{\partial x_j f}$

Preuve.

1. direct
2. direct
3. Soit $f \in \mathcal{S}$, $g \in \mathcal{S}$. On a $f, g \in \mathcal{C}^\infty$. $f, g \in \mathcal{L}^1$ alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (récurrence avec le théorème de dérivation sous le signe somme).
4. Soit $f \in \mathcal{S}$. On a $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrons que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on aura $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ car :

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{p \in [1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$$

$$\int |f|^p d\mu \leqslant \int |f| \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}^{p-1} d\mu$$

$$\int |f| dx = \int \underbrace{(1+|x|)^{n+1}|f|}_{\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant N_{n+1}(f)} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} < +\infty$$

Montrons que $x^\alpha \partial_x^\beta (f * g) \in \mathcal{L}^\infty$ $\forall \alpha, \beta$. On a $\partial_x^\beta (f * g) = (\partial_x^\beta f) * g$. Il suffit de considérer $\beta = 0$. $x^\alpha f * g \in \mathcal{L}^\infty$? On a :

$$\begin{aligned} &|x| \leqslant |x-y| + |y| \\ &|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leqslant |x|^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}| = |x|^{|\alpha|} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |x|^\alpha &\leqslant \big(|x-y| + |y|\big)^{|\alpha|} \leqslant \big(2 \max\{|x-y|, |y|\}\big)^{|\alpha|} \\ &\leqslant 2^{|\alpha|} \max\left\{|x-y|^{|\alpha|}, |y|^{|\alpha|}\right\} \\ &\leqslant 2^{|\alpha|} \big(|x-y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|}\big) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|x^\alpha f * g(x)| \leqslant 2^{|\alpha|} \left(\int |x-y|^{|\alpha|} |f(x-y)| |g(y)| dy + \int |y|^{|\alpha|} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)$$

Or $|\xi|^{|\alpha|} |f(\xi)| \in \mathcal{L}^\infty$, $|f| \in \mathcal{L}^\infty$, $|g| \in \mathcal{L}^1$, $|y|^{|\alpha|} |g(y)| \in \mathcal{L}^1$. Donc $x^\alpha f * g \in \mathcal{L}^\infty$.

5. $\partial_{\xi_j} \hat{f} = \partial_{\xi_j} \int e^{-ix\cdot\xi} f dx$

6. $$\widehat{\partial_{x_j} f} = \int e^{-ix\cdot\xi} \partial_{x_j} f dx = -\int \partial_{x_j}(e^{-ix\cdot\xi}) f dx = \int i\xi_j e^{-ix\cdot\xi} f dx = i\xi_j \hat{f}$$

□

Propriété 9

$f \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \hat{f} \in \mathcal{S}$ et $\forall p,\ \exists C_p$ tel que $\forall f \in \mathcal{S}$:

$$N_p(\hat{f}) \leqslant C_p N_{p+n+1}(f)$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)\right| = \left|\mathcal{F}\big(\partial_x^\alpha (x^\beta f)\big)\right|$$

Or $\|\mathcal{F}(g)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant \|g\|_{\mathcal{L}^1}$ donc :

$$\left\|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)\right\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant \left\|\partial_x^\alpha (x^\beta f)\right\|_{\mathcal{L}^1}$$

On a, si $|\alpha|, |\beta| \leqslant p$:

$$\left\|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)\right\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant \sum_{|\alpha'|\leqslant p} \sum_{|\beta'|\leqslant p} \left\|x^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} f\right\|_{\mathcal{L}^1}$$

Car $\partial_x^\alpha (x^\beta f)$ est combinaison linéaire de $x^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} f$, $|\alpha'|, |\beta'| \leqslant p$. Donc :

$$\left\|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)\right\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant C \sum_{|\alpha'|\leqslant p} \sum_{|\beta'|\leqslant p} \left\|(1+|x|)^{n+1} x^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} f\right\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

Donc si $|\alpha|, |\beta| \leqslant p$:

$$\left\|\xi^\alpha \partial_\xi^p \hat{f}(\xi)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_p N_{p+n+1}(f)$$

□

Propriété 10

Pour tout $a \in]0, +\infty[$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$$

Remarque. En Fourier l'équation de la chaleur est très simple : $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$, $\partial_t \hat{u} - \widehat{\partial_x^2 u} = 0$ donc $\partial_t \hat{u} + \xi^2 \hat{u} = 0$. Alors $\hat{u}(t,\xi) = e^{-t\xi^2} \hat{u}(0,\xi) = e^{-t\xi^2}$ (si $u_0 = \delta$, $\hat{u}_0 = 1$, $\hat{\delta} = 1$).

Preuve.
$\xi \longmapsto \mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi)$ vérifie une EDO, $n = 1$:

$$\partial_x e^{-ax^2} = -axe^{-ax^2}$$
$$\partial_x e^{-ix\cdot\xi} = -ixe^{-ix\cdot\xi}$$

□

Théorème 5

Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$$

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On pose :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} u(y) dy d\xi$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int u(y) \left(\int e^{-i(x-y)\cdot\xi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} d\xi \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int u(y) e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|x-y|^2} \left(\frac{2\pi}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int u(y) e^{-\frac{|x-y|}{2\xi^2}} \varepsilon^{-n} dy \end{aligned}$$

Donc u_ε s'écrit comme $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$.

$$\phi_\varepsilon(\zeta) = \frac{\varepsilon^{-n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\varepsilon^2}} = e^{-n} \phi\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\right)$$

$u_\varepsilon \longrightarrow u$ (approximation de l'identité) □

Théorème 6

Si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$\int f\overline{g} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}\hat{\overline{g}} d\xi$$

Donc :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \frac{1}{2\pi}^n \|\hat{f}\|_{L_2}^2$$

Preuve.

1. On montre que si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int \hat{\varphi}\psi = \int \varphi\hat{\psi} \qquad (*)$$

   En effet :

$$\begin{aligned}\int \hat{\phi}(x)\psi(x)dx &= \int \left(\int e^{-iyx}\varphi(y)dy\right)\psi(x)dx \\ &= \int \varphi(y)\left(\int e^{-iyx}\varphi(y)\psi(x)dx\right)dy \\ &= \int \varphi(y)\hat{\psi}(y)dy\end{aligned}$$

2. On applique $(*)$ avec $\varphi = f$, $g = \overline{\hat{\psi}} \Rightarrow \psi = \mathcal{F}^{-1}(\overline{g})$ où :

$$\mathcal{F}^{-1}(\theta)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\xi x}\theta(\xi)d\xi$$

Alors :

$$\int \hat{\varphi}\psi = \int \hat{f}\mathcal{F}^{-1}(\overline{g}) = \int \hat{f}\overline{\hat{g}}\frac{1}{(2\pi)^n}$$

car $\mathcal{F}^{-1}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}(\overline{u})}$ et $\int \varphi\hat{\psi} = \int f\overline{g}$ par définition. □

5 Distributions tempérées

Définition 9 (espace des distributions tempérées)

L'espace des distributions tempérées, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. $T\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire $\in \mathcal{S}'$ ssi $\exists C > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $|T(f)| \leqslant CN_p(f)$.

Exemples.

- Si $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit :

$$T\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & \int u(x)v(x)dx \end{array}\right.$$

  Alors $|T_u(x)| \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^\infty}\|v\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{L}^\infty}\|v\|N_{n+1}(v)$. Donc $T_u \in \mathcal{S}'$ (et $T_u = T_{\tilde{u}} \Rightarrow u = \tilde{u}$).
- De même, si $u \in \mathcal{L}^1_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$, $T_n\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C},\ v \longmapsto \int uvdx$
- Tous les $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}^p_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^n)$

Notation. Pour $T \in \mathcal{S}'$, $v \in \mathcal{S}$, on note $< T, v >_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} \in \mathbb{C}$.

Définition 10 (adjoint)

Soit $A \colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ linéaire continue. On dit que A admet un *adjoint continu sur* $\mathcal{S}$ s'il existe $A^* \colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ linéaire continue tel que :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A * v \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{S}$$

où $\langle f, g \rangle = \int f \overline{g} dx$.

Exemples.

1. $A = \partial_{x_j}$ $(N_p(Af) \leqslant N_{p+1}(f))$, $A^* = -\partial_{x_j}$
2. $c \in \mathcal{S}$, $Af = cf$, $A^* \theta = \overline{c} \theta$
3. A, B adjoints continus $\Rightarrow$ $A \cdot B$ adjoint continu et $(A \cdot B)^* = B^* \circ A^*$.
4. On combine 1,2,3 $\Rightarrow A = \sum_{\text{finie}} c_\alpha \partial_x^\alpha$ avec $c_\alpha \in \mathcal{S}$ a un adjoint continu.
5. $A = \mathcal{F}$ $A^* = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}$

Définition 11

Si $A \colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ a un adjoint continu A^*, on définit $\tilde{A} \colon \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ par :

$$\langle \tilde{A} u, v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \overline{A^* \overline{v}} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$$

Propriété 11

Soit :

$$\mathcal{T} \colon \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ u & \longmapsto & \mathcal{T}_u \colon \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ v & \longmapsto & \int uv dx \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors $\mathcal{T}$ linéaire, continue, **injective** et :

$$\tilde{A}(\mathcal{T}_u) = \mathcal{T}_{A(u)} \qquad (\tilde{A} \text{ prolonge } A)$$

Remarque. On peut étendre ∂_{x_j} à $\mathcal{S}'$, $\mathcal{F}$ à $\mathcal{S}'$. On peut définir $\tilde{\partial_{x_j}}$ étendu sur $\mathcal{S}'$; $\tilde{\partial_{x_j}} u$, $\forall u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Si $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\partial_{x_j}} u$ est la dérivée au sens faible. On ne met pas de $\sim$.

Théorème 7

La transformée de Fourier $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ donnée par :

$$\langle \mathcal{F}(u), v \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, \hat{v} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'}$$

est un isomorphisme (bij et $\mathcal{F}^{-1}$ continue) et :

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}(\overline{f})}$$

Preuve.
Construction et $\int \hat{\varphi}\psi = \int \varphi\hat{\psi}$. □

Propriété 12

Si $u \in \mathcal{L}^2$, alors $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{L}^2$ et :

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = (2\pi)^n \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

Remarque. $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{L}^2$ signifie $\exists h \in \mathcal{L}^2$ tel que $\mathcal{F}(u) = \mathcal{T}_h$.

Définition 12 (multiplicateur de Fourier)

Soit $m = m(\xi)$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et telle que $\exists c > 0$, $\exists N$ tels que $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ $|m(\xi)| \leqslant C + C|\xi|^N$.
On définit alors $m(D_x)\colon \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ par :

$$m(D_x)u = \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}u)$$

(on vérifie que $m\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'$ $\forall u \in \mathcal{S}'$). On a alors $\widehat{m(D_x)}u(\xi) = m(\xi)\hat{u}(\xi)$.

6 Décomposition de Littlewood-Paley

Idée. Introduire un paramètre.

Lemme 2 (décomposition de l'unité)

$\exists \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\exists \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ telles que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 1 = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(2^{-p}\xi)$$

Preuve.
$\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}(0,1))$, $\psi = 1$ sur $\mathcal{B}(0,1/2)$ radiale. On pose $\varphi(\xi) = \psi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \psi(\xi)$. $\square$
On introduit pour $p \geqslant 0$:

$$\Delta_p = m_p(D_x) \quad \text{avec } m_p(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)$$

et on note $\Delta_{-1} = \psi(D_x)$.

Propriété 13

On a :

$$\mathrm{id} = \sum_{p=-1}^{+\infty} \Delta_p \quad \text{au sens des distributions}$$

$\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la série $\sum_{-1}^{N} \Delta_p u$ converge vers u quand $N \longrightarrow +\infty$.

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{-1}^{N} \Delta_p &= \psi(D_x) + \sum \left(\psi(2^{-p-1}D_x - \psi(2^{-p}D_x)\right) \\ &= \psi(2^{-N-1}D_x)\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\left(\sum_{-1}^{N} \Delta_p u\right), \theta\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} &= \langle \mathcal{F}\left(\psi\left(2^{-N-1}D_x\right) u\right), \theta\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} \\ &= \langle \psi(2^{-N-1})\mathcal{F}u, \theta\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} \\ &= \langle \mathcal{F}u, \psi(2^{-N-1})\theta\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}\end{aligned}$$

Or $\chi(a_k\cdot)\theta \longrightarrow \theta$ dans $\mathcal{S}$ si $a_k \longrightarrow 0$. $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc :

$$\langle \mathcal{F}\left(\sum_{-1}^{N} \Delta_p u\right), \theta\rangle \xrightarrow[N\to+\infty]{} \langle \mathcal{F}u, \theta\rangle$$

Donc $\mathcal{F}\left(\sum_{-1}^{N} \Delta_p u\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathcal{F}u$ dans $\mathcal{S}'$. donc $\sum_{-1}^{1} \Delta_p u \xrightarrow[N\to+\infty]{} u$ dans $\mathcal{S}'$ car $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ continue. $\square$