

Équations aux dérivées partielles

Chapitre 5 : La méthode des éléments finis pour le laplacien

Lucie Le Briquer

Sommaire

1	Formulation variationnelle	1
2	La méthode des éléments finis	3
2.1	Triangulation d'un ouvert polygonal	3
3	Existence de solution pour le problème continu	4
4	Estimation d'erreur	6

On se donne un ouvert borné et polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et on s'intéresse à la résolution du problème suivant :

Trouver $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Ici, f (à valeurs réelles) est donnée.

1 Formulation variationnelle

Théorème 1 (Green)

Étant donné deux fonctions régulières ϕ et ψ sur \mathbb{R}^n et Ω un ouvert régulier (i.e. ouvert dont la frontière est une fonction régulière) de \mathbb{R}^n , on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \int_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx_i = \int_{\partial\Omega} \phi \psi n_i d\Gamma$$

- Plaçons nous à la frontière de Ω . On se place au voisinage d'un point. On définit alors \vec{n} le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur (de la surface) : $\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$.
- $d\Gamma$ est un élément de surface infinitésimal (exemple du cercle en dimension 2 en coordonnées polaires : $d\Gamma = R d\theta$)

Ce que l'on va faire ici, c'est considérer la surface parallèle à la frontière translatée d'une épaisseur $d\xi$ (vers l'extérieur). L'idée est de factoriser la mesure de Lebesgue en deux facteurs : $dx_1 \dots dx_n = d\Gamma d\xi$ (en dimension 3, $d\Gamma$ serait un élément de surface infinitésimal et $d\xi$ un élément de longueur caractérisant l'épaisseur).

Preuve.

Dans le cas $n = 1$ et $\Omega =]a, b[$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx &= [\phi \psi]_a^b \\ &= (\phi \psi)(a) - (\phi \psi)(b) \\ &= (\phi \psi)(a)n(a) + (\phi \psi)(b)n(b) \end{aligned}$$

On peut alors voir le théorème de Green comme la généralisation de l'IPP aux dimensions supérieures. \square

Remarque.

Le théorème de Green-Ostrogradski vu en spé à savoir :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} U dx = \int_{\partial \Omega} U \cdot n d\Gamma$$

est un corollaire de la formule de Green dans le cas $\phi = 1$.

Exemple.

Soit $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. On étudie :

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

(c'est le problème (1) multiplié par v et intégré).

Si $v = 0$ sur $\partial \Omega$, alors par la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega} \left(u' \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u'}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

En appliquant la formule ci-dessus avec $u' = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ pour tout i , on fait réapparaître (en sommant sur i) le laplacien et on obtient :

$\forall v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $v = 0$ sur $\partial \Omega$, on a :

$$\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

L'équation ci-dessus est une *formulation variationnelle* de (1).

2 La méthode des éléments finis

On considère à nouveau :

$$\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla h) dx = \int_{\Omega} f h dx$$

pour h nulle sur $\partial\Omega$.

Cette équation est d'inconnue u et de données (Ω, f) . h est dans un espace vectoriel de dimension infinie. On va construire un espace vectoriel V_h de dimension finie ($M = \dim V_h$) formé de fonctions définies sur Ω et nulles sur le bord de Ω .

On prend $(v_m)_{1 \leq m \leq M}$ une base de V_h . On étudie alors le problème suivant :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } \forall m, \int_{\Omega} (\nabla u_h)(\nabla v_m) dx = \int_{\Omega} f v_m dx \quad (2)$$

C'est la *méthode de Galerkin*. On appelle les (v_m) les fonctions test.

Exemple.

Si on étudie $L^2(0, 2\pi)$, on pose, si l'on veut obtenir les coefficients de Fourier :

$$\forall m, \quad v_m(x) = e^{imx}$$

La base de V_h se trouve bien sur un segment, sur le carré, mais ça devient beaucoup plus compliqué sur le triangle. On remarque que le système de M équations que l'on obtient peut se mettre sous la forme d'une équation matricielle $Ax = b$.

Exemple.

Supposons que $n = 1$. On prend $\Omega =]a, b[$ et on découpe le segment en M points x_1, \dots, x_M . On prend alors pour $(v_i)_i$ les fonctions triangles.

$$v_i : \begin{cases}]a, b[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 1 \text{ en } x_i \\ \text{les pentes sont affines} \end{cases} \end{cases}$$

Les $(v_i)_i$ vérifient la condition (2) et les relations entre les $u_i = u_h(x_i)$ sont données par : pour i fixé on obtient u_i en fonction de u_{i-1} et u_{i+1} - ce qui assure sous forme matricielle l'obtention d'une matrice A tridiagonale (la plus simple des matrices bandes non diagonale).

2.1 Triangulation d'un ouvert polygonal

On note \mathcal{T} cet ouvert. $\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ et on impose $\text{Card } \mathcal{T} < +\infty$. Les T sont des triangles et $T_i \cap T_j$ ne peut être que :

- vide
- réduit à un des sommets de T_i et T_j

- réduit à une arête commune de T_i et T_j
- égale à $T_i = T_j$

On pose $(S_i)_{i \in I}$ l'ensemble des sommets. On définit I_0 comme suit :

$$i \in I_0 \Leftrightarrow S_i \in \partial\Omega$$

On pose aussi $J = I \setminus I_0$ et $N = \text{Card } J$.

Pour trouver les $(v_i)_i$ on s'appuie sur la propriété suivante.

Proposition 2

Pour tout $i \in I$, il existe un unique v_i tel que :

- $(v_i)|_T$ est affine
- pour tout $j : v_i(S_i) = 1$ et $v_i(S_j) = 0$ si $j \neq i$

Soit V_h l'espace vectoriel engendré par les $(v_i)_{i \in J}$ (trouvés par la proposition précédente).

Proposition 3

$$\dim V_h = N$$

On utilise alors la méthode de Galerkin avec V_h :

$$\forall v \in V_h, \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (\nabla u_h)(\nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (3)$$

v est affine par triangle (par morceaux). On prouve que $\nabla v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla v \nabla w \in L^1(\Omega)$.

Résoudre (3) revient à résoudre la même propriété uniquement pour les $(v_m)_m$. On aboutit à la résolution d'un système matriciel $Ax = b$. On a :

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla v_i \nabla v_j dx$$

Proposition 4

A est symétrique définie positive.

3 Existence de solution pour le problème continu

Ω ouvert borné régulier. Soit :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \text{Supp}(\varphi) \subset \Omega\}$$

Lemme 5

$\varphi \mapsto \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{D}(\Omega)$

Preuve.

On a clairement une semi-norme. Il reste à montrer que $\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p$, $p < +\infty$, les composantes connexes de Ω .

$\int_{\Omega_i} |\nabla \varphi|^2 dx = 0 \Rightarrow \varphi = C_i$ sur $\overline{\Omega_i}$. Donc $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega_i$. Or $\partial\Omega = \bigcup_i \partial\Omega_i$. Donc $C_i = 0 \forall i$. \square

Propriété 6

$\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas complet pour la norme :

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx}$$

Preuve.

Exercice classique inspiré de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $|\cdot|_0$ où :

$$|a|_0 = \left(\int_{\Omega} a^2 dx \right)^{1/2}$$

Définissons $H_0^1(\Omega)$ = le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|$. $\mathcal{D}(\Omega) \subset \overline{H_0^1(\Omega)}$ complet.

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec comme produit scalaire :

$$((\varphi, \psi)) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \psi dx$$

Sur un espace de Hilbert H on a le *théorème de représentation de Riesz* :

$$\forall l \in H' = \mathcal{L}(H, R), \exists ! L \in H \quad \text{tq} \quad \forall v \in H, ((L, v)) = l(v)$$

Remarque.

$$\|l\|_{H'} = \|L\|_H$$

Revenons à notre preuve :

$$\forall f \in L^2(\Omega), \exists ! u \quad \text{tq} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), ((u, v)) = \int_{\Omega} f v dx$$

Si ? $v \longmapsto \int_{\Omega} f v dx$ lorsque $f \in L^2(\Omega)$, $\in H_0^1(\Omega)' = H'$ alors ok.

$$\exists c \text{ tq } \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

\square

Propriété 7 (inégalité de Poincaré) —

Soit $\Omega \subset]a, b[\times \mathbb{R}^{n-1}$ après rotation des coordonnées. Alors :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \leq (b-a) \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2}$$

Preuve.

Soit $a \leq x_1 \leq b$.

$$|\varphi(x_1, x')|^2 \leq \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(s, x') \right|^2 ds \leq \left(\int_a^{x_1} 1 ds \right) \left(\int_a^{x_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2(s, x') ds \right)$$

$$\int_{\Omega} \varphi^2(x_1, x') dx' \leq (b-a)^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2(s, x') ds dx' \leq (b-a)^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx$$

Finir la preuve. □

4 Estimation d'erreur

(i) u_h MEF P1

(ii) u analyse fonctionnelle

$$\|u - u_h\|?$$

$$((u_h, v)) = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in V_h$$

$$((u, v)) = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in V$$

$$\Rightarrow ((u - u_h, v)) = 0 \quad \forall v \in V_h \quad (*)$$

Théorème 8 (lemme de Céa) —

$$\|u - u_h\| = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= ((u - u_h, u - u_h)) \\ &= ((u - v_h + \underbrace{v_h - u_h}_{\in V_h \text{ donc } (*)}, u - u_h)) \\ &\leq \|u - u_h\| \|u - v_h\| \end{aligned}$$

□

La fin de l'histoire :

Interpolation. $w \in H_0^1(\Omega), \Pi_h w$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_h : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & V_h \\ x & \longmapsto & (\Pi_h w)(x) = \sum_{i \in I} w(s_i) v_{s_i}(x) \end{array}$$

Preuve.

Preuve incomplète.

$$\|u - u_h\| \leq \|u - \Pi_h u\| \leq C(u)h \quad \text{faux en dim 2}$$

Pour un triangle T , on note h_T la longueur du plus grand côté de T et ρ_T le diamètre du cercle inscrit dans T .

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \frac{2}{\sin \theta_T}$$

où θ_T est le plus petit angle. □

Définition 2 (famille de triangulation régulière)

On dit que la famille de triangulation (\mathcal{T}_h) de Ω est régulière si $\exists C$ tel que $\frac{h_T}{\rho_T} \leq C$ quand $h \rightarrow 0$

Théorème 9 (Raviant-Thomas Masson)

Soit (\mathcal{T}_h) une famille régulière de triangulation.

$$\exists c \text{ tq } \forall w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \left(\int_{\Omega} |\nabla(w - \Pi_h w)|^2 dx \right)^{1/2} \leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla^2 w|^2 dx \right)^{1/2} h$$

Corollaire 10

Si $u \in H^2(\Omega)$, $\exists C(u, \Omega)$ telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C(u, \Omega)h$$

Remarques.

- P1 est convergente d'ordre 1
- P2 est convergente d'ordre 2

Bonus.

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par FV on obtient :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy, \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Pour $v = u$, en notant $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, on se ramène à :

$$\int_{\Omega} (X^2 - XY + Y^2) dx dy \geq \frac{X^2 + Y^2}{2}$$

.

Notons :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

On a :

$$a(u, u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \text{coercivité}$$

Notations :

(i) H Hilbert, $((.,.)), \|\cdot\|$

(ii) $a : g.b.c., a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\exists c, |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| \quad \forall u, v$$

(iii) a est coercive si $\exists \alpha > 0$ tq :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

Théorème 11 (Lax-Milgram)

$$\forall l \in H', \exists ! u \in H \text{ tq } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H$$