# Probabilités
## Chapitre 11 : Chaînes de Markov

Lucie Le Briquer

8 décembre 2017

## Table des matières

**1 Premiers exemples** **1**

**2 Formalisation** **2**
- 2.1 Définitions . . . 2
- 2.2 Exemples . . . 3
- 2.3 Renforcement . . . 4
- 2.4 Plusieurs pas . . . 6

**3 Existence de chaînes de Markov à $\mu_0$, $\mathbb{Q}$ fixé** **8**

**4 Comportement asymptotique des chaînes de Markov** **19**
- 4.1 Existence de mesures invariantes . . . 23
- 4.2 Exemples . . . 27
- 4.3 Comportement asymptotique . . . 30

# 1 Premiers exemples

Une filtration canonique $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ structure le temps : pour un instant $n$, le présent, on a $\mathcal{F}_n$=événements du passé, $X_{n+1}$ dans le futur.

**Idée.** Une chaîne de Markov est un processus tel que le futur ne dépend du passé qu'au travers du présent.

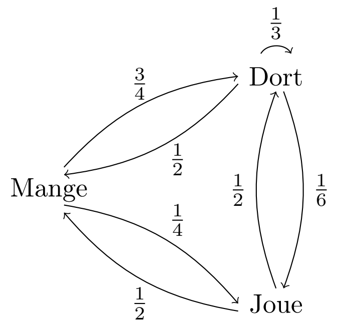
**Exemple.** Par exemple on veut modéliser la vie d'un hamster. Chaque il est dans un des trois états $\{$dormir, manger, faire de la roue$\}$.

- Après avoir mangé, il dort avec probabilité $\frac{3}{4}$, il joue avec probabilité $\frac{1}{4}$.
- Après avoir dormi, il mange avec probabilité $\frac{1}{2}$, il dort à nouveau avec probabilité $\frac{1}{3}$, il joue avec probabilité $\frac{1}{6}$.
- Après avoir joué, il mange avec probabilité $\frac{1}{2}$, il dort avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Et ce, indépendamment du passé.

Soit $X_n$ l'état du hamster dans la $n-$ième heure. $X_n \in \{\text{Mange, Dort, Joue}\}$. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera une chaîne de Markov.

*Représentation graphique.*




Si on numérote les états Mange= 1, Dort= 2, Joue= 3 ; toutes les données sont codées dans la matrice $3 \times 3$ :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(\text{passer de } i \text{ à } j) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

appelé *noyau (ou matrice) de transition.*

**But.** Quelle proportion de temps passe-t-il à manger ?

$$\text{Que vaut} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_i = 1} \quad ?$$

# 2 Formalisation

## 2.1 Définitions

**Définition 1** (noyau de transition)

Soit $E$ un ensemble fini ou infini dénombrable qu'on appelera *espace d'état.* $\mathbb{Q}$ est un *noyau de transition* sur $E$ (ou matrice de transition) si $\mathbb{Q} \colon E \times E \longrightarrow [0,1]$ et tel que :

$$\forall x \in E, \ \sum_{y \in E} \mathbb{Q}(x,y) = 1$$

**Remarque.** Si $E$ fini, on identifie $E$ à $\{1, ..., n\}$. Alors un noyau de transition sur $E$ s'identifie à la matrice $(\mathbb{Q}(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. C'est une "matrice stochastique", i.e. coefficients dans $[0,1]$ et somme sur les lignes $= 1$.

**Remarque.** $\mathbb{Q}(x, .)$ est une suite de nombre positifs de somme 1, s'identifie à une mesure de probabilité. On veut que ce soit la loi de $X_{n+1}$ si $X_n = x$.

**Définition 2** (chaîne de Markov homogène)

Si $\mathbb{Q}$ est un noyau de transition sur l'espace d'état $E$ (fini ou infini dénombrable) et $\mu_0$ une mesure de probabilité sur $E$. Alors $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est la chaîne de Markov de mesure initiale $\mu_0$ et de noyau de transition $\mathbb{Q}$ si :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = \mathbb{Q}(x_n, y)$$

pour tout $x_0, ..., x_n, y$ tels que $\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) \neq 0$. Et $X_0 \sim \mu_0$.

**Remarque.**

- Martingales $\longrightarrow$ processus à valeurs dans $\mathbb{R}$
- Chaînes de Markov $\longrightarrow$ processus à valeurs dans un espace discret (graphe)

**Remarque.** Cette définition correspond aux chaînes de Markov *homogènes*. En toute généralité, on demande :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid ..., X_n = x_n) = Q_n(x_n, y)$$

avec $(Q_n)$ une famille de noyau de transition. On supposera toujours nos chaînes homogènes.

## 2.2 Exemples

**Exemple.** Soit $S_n^x = x + X_1 + ... + X_n$ marche aléatoire où $x \in \mathbb{Z}^d$ et $(X_i)_{i\geqslant 1}$ v.a. indépendantes dans $\mathbb{Z}^d$ de même loi $\mu$. Alors :

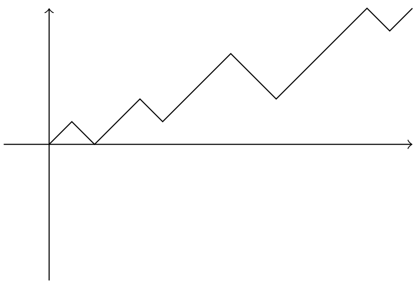
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1}^x = y \mid (S_0^x, ..., S_n^x) = x_0, ..., x_n) &= \mathbb{P}(S_n^x + X_{n+1} = y \mid (S_0^x, ..., S_n^x) = x_0, .., x_n) \\
&= \mathbb{P}(x_n + X_{n+1} = y \mid (S_0^x, ..., S_n^x) = x_0, .., x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = y - x_n) \qquad \text{par indépendance} \\
&= \mu(\{y - x_n\})
\end{aligned}$$

(si $\mathbb{P}(S_0^x, ..., S_n^x = x_0, ..., x_n)\perp$). Donc $S^x$ est une chaîne de Markov de mesure initiale $\delta_x$ et de noyau de transition $\mathbb{Q}(x, y) = \mu(\{y - x\})$.

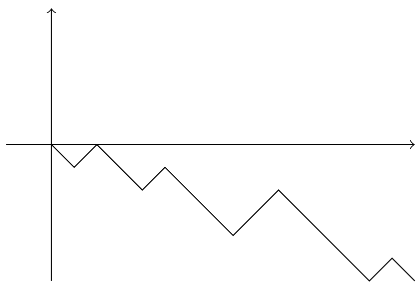
**Contre-exemple.** Regardons :

- $(S_n^0)_{n\geqslant 1}$ la marche aléatoire simple issue de 0 avec $S_n^0 = X_1 + ... + X_n$ et $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.
- Soit $Z$ indépendant de $S$ tel que $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$.

Considérons $Y_n = Z|S_n^0|$. Alors au temps $n$ on a :



avec une probabilité $\frac{1}{2}$



avec une probabilité $\frac{1}{2}$

$Y_n$ n'est pas une chaîne de Markov, on a bien $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{P}(Y_{n+1} = x \pm 1 \mid Y_n = x) = \frac{1}{2}$ si $\mathbb{P}(Y_n = x) \neq 0$.
Mais :

$$\mathbb{P}(Y_3 = 1 \mid \underbrace{(Y_0, Y_1, Y_2) = (0,1,0)}_{\text{implique } Z=1}) = 1$$

$$\mathbb{P}(Y_3 = 1 \mid \underbrace{(Y_0, Y_1, Y_2) = (0,-1,0)}_{\text{implique } Z=-1}) = 0$$

**Contre-exemple.** (autre contre-exemple)
$S_n^0$ marche simple issue de 0. Considérer $V_n = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k^0$. Montrer que $V_n$ n'est pas une chaîne de Markov.

**Exemple.** (processus de Galton-Watson)

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = 1 \\ Z_n = X_1^n + ... + X_{Z_{n-1}}^n \end{array} \right. \qquad \text{où } (X_j^n)_{n \geqslant 1,\ j \geqslant 1} \text{ v.a.i. de loi } \mu \text{ probabilité sur } \mathbb{N}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Z_{n+1} = y \mid (Z_0, ..., Z_n) = x_0, ..., x_n) \\ & = \mathbb{P}(X_1^{n+1} + ... + X_{x_n}^{n+1} = y \mid (Z_0, ..., Z_n) = x_0, ..., x_n) \\ & \underset{\text{idp}}{=} \mathbb{P}(\underbrace{X_1^{n+1} + ... + X_{x_n}^{n+1}}_{\sim \mu^{*x_n}} = y) \\ & = \mu^{*s_n}(\{y\}) \end{aligned}$$

Donc $Z$ est une chaîne de Markov de noyau de transition $\mu^{*x}(\{y\})$.

**Exemple.** (marche aléatoire sur un graphe)
Si $\mathcal{G} = (S, A)$ où $S$ est un ensemble non vide de sommets, et $A$ un ensemble de $(x, y, p)$ arêtes orientées pondérées avec pour $x$ fixé $\sum_{y,(x,y,p) \in A} p = 1$. Alors la marche aléatoire sur ce graphe est la chaîne de Markov de noyau de transition :

$$\mathbb{Q}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{si } (x, y, p) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Reste à montrer l'existence. Toute chaîne de Markov se représente par un graphe avec $S$ = espace d'état.

## 2.3 Renforcement

*On veut renforcer "ne dépend du passé qu'au travers du présent".*

**Propriété 1**

$E$ espace d'état, $\mathbb{Q}$ noyau de transition.

$X$ C.M. (chaîne de Markov) de noyau de transition $\mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall (y_1, \ldots, y_p) \in E^p,\ \forall x_n \in E,\ \forall A \in \mathcal{F}_n^X,\ $ si $\mathbb{P}(X_n = x_n, A) \neq 0$,

alors $\mathbb{P}\Big((X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}) = (y_1, \ldots, y_p) \mid X_n = x_n, A\Big) = \mathbb{Q}(x_n, y_1) \times \mathbb{Q}(y_1, y_2) \times \ldots \times \mathbb{Q}(y_{p-1}, y_p)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_0, \ldots, x_n \in E^{n+1},\ \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \times \mathbb{Q}(x_0, x_1) \times \ldots \times \mathbb{Q}(x_{n-1}, x_n)$

**Preuve.**

- $(i) \Rightarrow (ii)$ : récurrence sur $p$
  - si $p = 1$ : $A \in \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ donc $\exists \Gamma \subset E^{n+1}$ tel que $A = \{X_0, \ldots, X_n \in \Gamma\}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = y_1 \mid X_n = x_n, A) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = x_n, A)} \mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, X_n = x_n, A) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n, x_n, A)} \sum_{z_0, \ldots, z_n \in \Gamma} \mathbb{P}\Big(X_{n+1} = y, X_n = x_n, (X_0, ..., X_n) = (z_0, ..., z_n)\Big) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = x_n, A)} \sum_{z_0, \ldots, z_{n-1} \in \Gamma(x_n)} \underbrace{\mathbb{P}\Big(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n,\ (X_0, \ldots, X_{n-1}) = z_0, \ldots, z_{n-1}\Big)}_{\mathbb{Q}(x_n, y)} \\
&\quad \times \mathbb{P}(X_n = x_n,\ (X_0, \ldots, X_{n-1}) = z_0, \ldots, z_{n-1}) \\
&\quad (\text{où } \Gamma(x_n) = \{z_0, \ldots, z_{n-1} \mid z_0, \ldots, z_{n-1}, x_n \in \Gamma\}) \\
&= \frac{\mathbb{Q}(x_n, y)}{\mathbb{P}(X_n = x_n, A)} \sum_{z_0, \ldots z_n \in \Gamma} \mathbb{P}(X_n, x_n,\ (X_0, \ldots X_n) = z_0, \ldots z_n) \\
&= \mathbb{Q}(x_n, y)
\end{aligned}
$$

  - $p \Rightarrow p + 1$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p+1} = y_1, \ldots, y_{p+1} \mid X_n = x_n, A) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+p+1} = y_{p+1} \mid X_{n+1}, \ldots, X_{n+1} = y_1, \ldots, y_p,\ X_n = x_n, A)}_{p=1} \\
&\quad \times \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} \ldots, X_{n+p} = y_1, \ldots, y_p \mid X_n = x_n, A)}_{\text{H.R.}} \\
&= \mathbb{Q}(y_p, y_{p+1}) \times \mathbb{Q}(x_0, y_1) \times \ldots \times \mathbb{Q}(y_{p-1}, y_p)
\end{aligned}
$$

Sauf si $\{X_{n+1}, \ldots, X_{n+p} = y_1, \ldots, y_p\}$ incompatible avec $\{X_n = x_n, A\}$, dans ce cas les termes $= 0$ donc ok.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$ : ok

- $(iii) \Rightarrow (i)$ :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \underbrace{X_0, \ldots, X_n = x_0, \ldots, x_n}_{\text{si } \mathbb{P}(.)\neq 0})\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0, \ldots, X_{n+1} = x_0, \ldots, x_n, y)}{\mathbb{P}(X_0, \ldots, X_n = x_0, \ldots, x_n)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0, x_0) \times \mathbb{Q}(x_0, x_1) \times \mathbb{Q}(x_{n-1}, x_n) \times \mathbb{Q}(x_n, y)}{\mathbb{P}(X_0, x_0) \times \mathbb{Q}(x_0, x_1) \times \mathbb{Q}(x_{n-1}, x_n)}\\
&= \mathbb{Q}(x_n, y)
\end{aligned}$$

□

**Remarque.** La loi d'une C.M $X$ est déterminée par la mesure initiale $\mu_0$ et la matrice de transition $\mathbb{Q}$. La loi de $X$ correspond à la probabilité sur $\mathcal{C}$ la tribu cylindrique, elle est déterminée par ses valeurs :

$$\mathbb{P}((X_0, \ldots, X_n) \in A) \quad \text{avec } A \subseteq E^{n+1}$$

Or,

$$\mathbb{P}((X_0, \ldots, X_n) \in A) = \sum_{x_0, \ldots, x_n \in A} \mu_0(\{x_0\}) \times \mathbb{Q}(x_0, x_1) \times \ldots \times \mathbb{Q}(x_{n-1}, x_n)$$

Interprétation de $\mathbb{Q}$ : $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$.

## 2.4 Plusieurs pas

*Comment faire d'un coup plusieurs pas ?*

**Définition 3** (produit de chaînes de Markov)

Si $\mathbb{S}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux noyaux de transitions sur $E$. On définit :

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{Q} \colon x, y \longmapsto \sum_{y \in E} \mathbb{S}(x, y)\mathbb{Q}(y, z)$$

**Remarque.** Tout est positif. C'est un noyau de transition :

$$\sum_z (\mathbb{S} \cdot \mathbb{Q})(x, z) = \sum_{y,z} \mathbb{S}(s, y)\mathbb{Q}(y, z) = \sum_y \mathbb{S}(x, y) \underbrace{\left(\sum_z \mathbb{Q}(y, z)\right)}_{=1} = 1$$

Donc $(\mathbb{S} \cdot \mathbb{Q})(x, z) \in [0, 1]$.

**Définition 4**

Si $\mathbb{Q}$ est un noyau de transition on note $\mathbb{Q}^1 = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^{n-1} = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q}^n$.

**Remarque.** Par convention, $\mathbb{Q}^0(x, y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}}$.

**Remarque.** $\mathbb{S},\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{S}\cdot\mathbb{Q}$ est associative :

$$((\mathbb{S}\cdot\mathbb{Q})\cdot\mathbb{R})(x,y) = \sum_{(z,t)\in E^2} \mathbb{S}(x,z)\mathbb{Q}(z,t)\mathbb{R}(t,y)$$

**Remarque.** Si $E$ est fini et qu'on identifie la matrice de transition avec de vraies matrices alors cette opération est le vrai produit matriciel.

**Propriété 2**

Si $X$ C.M. de transition $\mathbb{Q}$, $\forall n,p,\ \forall A \in \mathcal{F}_n^X$ :

$$\mathbb{P}(X_{n+p} = y \mid X_n = x_n, A) = \mathbb{Q}^p(x_n, y)$$

**Remarque.** Une conséquence est que $(X_{np})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de noyau de transition $\mathbb{Q}^p$. $\mathbb{Q}^p$ transition de $p$ pas de la chaîne.

**Preuve.**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+p} = y \mid X_n = x_n, A)\\
=& \sum_{y_1,\dots,y_{p-1}\in E^{p-1}} \mathbb{P}(X_{n+1},\dots,X_{n+p} = y_1,\dots,y_{p-1},y \mid X_n = x_n, A)\\
=& \sum_{y_1,\dots y_{p-1}\in E^{p-1}} \mathbb{Q}(x_n,y_1)\mathbb{Q}(y_1,y_2)\dots\mathbb{Q}(y_{p-1},y)\\
=& \mathbb{Q}^p(x_n,y)
\end{aligned}$$

$\square$

**Exemple.** (revenons au hamster)
Si initialement il mange (1), quelle est la probabilité que 7 heures plus tard il dorme (2) ?

$$\mathbb{P}(X_7 = 2 \mid X_0 = 1 = (\mathbb{Q}^7)_{1,2}$$

$\mathbb{Q}$ est explicite donc c'est du calcul matriciel. Pour de grandes puissances on aura intérêt à diagonaliser la matrice.
Quelle est la probabilité que jusqu'au jour 7 il ne dorme pas ?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \neq 2,\ \forall 1 \leqslant n \leqslant 7 \mid X_0 = 1) &= \mathbb{P}((X_1,\dots,X_7) = (3,1,3,1,3,1,3) \mid X_0 = 1)\\
&= \mathbb{Q}(1,2)^4\mathbb{Q}(2,1)^3\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\\
&= \frac{1}{2048}
\end{aligned}$$

## 3 Existence de chaînes de Markov à $\mu_0$, $\mathbb{Q}$ fixé

**Théorème 1** (réalisation canonique des C.M.)

Soit $\mathbb{Q}$ noyau de transition sur $E$. Soit $\Omega_0 = E^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{C}$ la tribu cylindrique. $\exists (\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ une famille de probabilités telle que si $X : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_0$ est l'identité alors la loi de $X$ sur $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P}_x)$ est celle d'une C.M. de transition $\mathbb{Q}$ et de mesure initiale $\delta_x$.

**Preuve.**
Soient $(Z_y^n)_{n\in\mathbb{N},\ y\in E}$ des v.a. indépendantes et $Z_y^n \sim \mathbb{Q}(y,\cdot)$, $Z_y^n \in E$.
Soit $X_0 = x$ et pour $n \geqslant 1$ $X_n = Z^n_{X_{n-1}}$. $X_0 \sim \delta_x$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n = x_0, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(Z^{n+1}_{X_n} = x_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n = x_0, \dots, x_n) \\
&= \mathbb{P}(Z^{n+1}_{x_n} = x_{n+1} \mid \underbrace{X_0, \dots, X_n = x_0, \dots, x_n}_{\in \sigma(Z_y^k \ \mid\ k \leqslant n)}) \\
&\underset{\text{idp}}{=} \mathbb{Q}(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

On définit $\mathbb{P}_x$= la loi de $X$, identité sur $\Omega_0, \mathcal{C}, \mu_X = \mathbb{P}_x$ a même loi que $X$ donc ok. $\square$

**Remarque.** $X \sim \mathbb{P}_x \Leftrightarrow X$ C.M. de transition $\mathbb{Q}$ et $X_0 = x$ p.s. On peut changer le point de départ en cageant $\mathbb{P}_x$.

**Définition 5**

Si $\mu$ est une probabilité sur $E$, on définit :

$$P_\mu = \sum_{x\in E} \mu(\{x\})\mathbb{P}_x$$

qui est une probabilité sur $E^{\mathbb{N}}$.

**Remarque.** Si sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \mathbb{P}_\mu)$ $X$ est l'identité alors $X$ est une CM de transition $\mathbb{Q}$ et $X_0 \sim \mu$. Car :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu((X_0, \dots, X_n) = x_0, \dots, x_n) &= \sum_{x\in E} \mu(\{x\}) \underbrace{\mathbb{P}_x((X_0, \dots, X_n) = x_0, \dots, x_n)}_{0 \text{ si } x_0 \neq x} \\
&= \mu(\{x_0\})\mathbb{P}_{x_0}((X_1, \dots, X_n) = x_1, \dots x_n) \\
&= \mu(\{x_0\})\mathbb{Q}(x_1, x_2) \dots \mathbb{Q}(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

caractérise bien CM $\mathbb{Q}, \mu_0$.

**Remarque.** Différence avec ce qu'on a fait jusque là lorsqu'on travaille avec la réalisation canonique :

- on travaille avec un espace de probabilité fixé $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \mathbb{P}_\mu)$ ($\mathbb{P}_\mu$ une famile de probabilités)
- notations :
  - $\mathbb{E}_x$ espérance sous $\mathbb{P}_x$
  - $\mathbb{E}_\mu$ espérance sous $\mathbb{P}_\mu$

  On y gagne en souplesse en permettant de changer le point de départ.

**Remarque.** Si on prouve pour un certain événement $A$, $\forall \mu$, $X \in A$ $\mathbb{P}_\mu$ p.s. (propriété de la réalisation canonique), alors on a prouvé que pour toute CM $Y$ de transition $\mathbb{Q}$, $Y \in A$ p.s.

**Intérêt de la réalisation canonique.** Pouvoir renforcer la propriété que le futur ne dépend du passé qu'au travers du présent. On a deux énoncés traduisant cela : les propriétés de Markov simple et forte.

**Définition 6** (shift)

$$\theta\colon \begin{cases} E^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & E^{\mathbb{N}} \\ (x_0, x_1, \ldots) & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots) \end{cases}$$

**Remarque.** On a si $x = (x_0, x_1, \ldots)$, $\theta^n x = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$. Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un procesus, on voir $\theta^n X = (X_n, X_{n+1}, \ldots)$ comme le futur.

**Propriété 3** (de Markov simple)

$\mathbb{Q}$ transition sur $E$, sous la réalisation canonique. $\forall B \in \mathcal{C}$, $\forall A \in \mathcal{F}_n^X$, $\forall x \in E$, $\forall \mu$ probabilité sur $E$ :

$$\mathbb{P}_\mu(\theta^n X \in B \mid X_n = x, A) = \mathbb{P}_x(X \in B)$$

(si $\mathbb{P}_\mu(X_n = x, A) \neq 0$

**Remarque.** $\Leftrightarrow \mathbb{P}_\mu(\theta^n X \in B, X_n = x, A) = \mathbb{P}_x(X \in B)\mathbb{P}_\mu(X_n = x, A)$

**Preuve.**

On veut identifier la loi de $\theta^n X\colon (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \mathbb{P}_\mu(.|A, X_n = x)) \longrightarrow E^{\mathbb{N}}$ et celle de $X\colon (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \mathbb{P}_x) \longrightarrow E^{\mathbb{N}}$. Donc il suffit de le vérifier sur une classe génératrice stable par $\cap$ finie.

Soit $B = \{(x_0, x_1, \ldots) | x_0 = b_0, \ldots x_p = b_p\}$ où $b_0, \ldots, b_p$ sont des éléments de $E$ fixés. Cela forme une classe stable par $\cap$ finie qui engendre tout.

$$\mathbb{P}_\mu((X_n, \ldots, X_{n+p} = (b_0, \ldots, b_p) \mid X_n = x, A) \underset{?}{=} \mathbb{P}_x((X_0, \ldots, X_p) = b_0, \ldots, b_p)$$

C'est le cas puisque l'on sait que les deux valent $\mathbb{1}_{b_0=x}\mathbb{Q}(b_0, b_1)\ldots\mathbb{Q}(b_{p-1}, b_p)$. □

**Remarque.** (reformulations)
Sous les mêmes hypothèses $\forall f$ mesurable borné :

$$\mathbb{E}_\mu[f(\theta^n X)|\mathcal{F}_n^X]\mathbb{1}_{X_n=x} = \mathbb{E}_x[f(X)]\mathbb{1}_{X_n=x} \quad \mathbb{P}_\mu \text{ p.s.}$$

Autre reformulation qui en découle :

$$\mathbb{E}_\mu[f(\theta^n X)|\mathcal{F}_n^X] = \underbrace{\mathbb{E}_{X_n}[f(X)]}_{(*)} \quad \mathbb{P}_\mu \text{ p.s.}$$

où $(*)$ est la v.a. qui vaut $\sum_x \mathbb{E}_x[f(X)]\mathbb{1}_{X_n=x}$

*Preuve.* $\mathbb{E}_x[f(X)]$ est $\mathcal{F}_n-$mesurable. Il suffit de montrer le résultat pour $f = \mathbb{1}_B$ on l'aura alors pour tous les $f$ étagées par linéarité puis pour tout $f$ par TCM. Alors pour $A \in \mathcal{F}_n^X$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu[\underbrace{\mathbb{1}_{\theta^n X \in B}}_{f(\theta^n X)}\mathbb{1}_A] &= \sum_{x \in E} \mathbb{P}_\mu(\theta^n X \in B, A, X_n = x) \\
&= \sum_{x \in E} \mathbb{P}_x(X \in B)\mathbb{P}_\mu(A, X_n = x) \\
&= \mathbb{E}_\mu\Big[\underbrace{\sum_{x \in E} \mathbb{P}_x(X \in B)\mathbb{1}_{X_n = x}}_{\mathcal{F}_n-\text{mesurable}}\mathbb{1}_A\Big]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_\mu[f(\theta^n X)|\mathcal{F}_n^X] = \sum_{x \in E} \mathbb{E}_x[f(X)]\mathbb{1}_{X_n = x} \quad \mathbb{P}_\mu \text{ p.s.}$$

On multiplie alors des deux côtés par $\mathbb{1}_{X_n = x}$.

**Propriété 4** (de Markov forte)

$\mathbb{Q}$ noyau de transition sur $E$, $T$ temps d'arrêt par rapport à $\mathcal{F}^X$, $A \in \mathcal{F}_T$, $B$ quelconque. Alors :

$$\mathbb{P}_\mu(\theta^T X \in B \mid T < +\infty, X_T = x, A) = \mathbb{P}_x(X \in B)$$

(si $\mathbb{P}_x(T < +\infty, X_T = x, A) \neq 0$)

**Remarque.** plus utile :

$$\mathbb{P}_\mu(\theta^T X \in B, X_T = x, T < +\infty, A) = \mathbb{P}_x(X \in B)\mathbb{P}_\mu(X_T = x, T < +\infty, A)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(\theta^T X \in B, X_T = x, \underbrace{T < +\infty}_{=\sqcup_{n \in \mathbb{N}}\{T = n\}}, A) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_\mu(\theta^n X \in B, X_n = x, \underbrace{(T = n \cap A)}_{\in \mathcal{F}_n^X}) \\
&\underset{\text{Markov simple}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_x(x \in B)\mathbb{P}_\mu(X_n = x, T = n, A) \\
&= \mathbb{P}_x(x \in B) \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_\mu(X_n = x, T = n, A) \\
&= \mathbb{P}_x(X \in B)\mathbb{P}_\mu(X_T = x, T < +\infty, A)
\end{aligned}$$

□

**Remarque.** (reformulation)
$\forall f$ mesurable borné :

$$\mathbb{E}_\mu[f(\theta^T X) \mid \mathcal{F}_T]\mathbb{1}_{T < +\infty, X_T = x} = \mathbb{E}_x[f(X)]\mathbb{1}_{X_T = x, T < +\infty} \quad \mathbb{P}_\mu \text{ p.s.}$$

*Preuve.* Soit $A \in \mathcal{F}_T$.

$$\mathbb{E}_\mu[f(\theta^T X) \underbrace{\mathbb{1}_{T<+\infty, X_T=x}}_{=\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{T=n,X_n=x}} \mathbb{1}_A] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_\mu[f(\theta^n X)\mathbb{1}_{T=n,A}\mathbb{1}_{X_n=x}]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_\mu\left[\mathbb{E}_\mu[f(\theta^n X) \mid \mathcal{F}_n]\mathbb{1}_{T=n,A}\mathbb{1}_{X_n=x}\right]$$

$$\underset{\text{Markov simple}}{=} \mathbb{E}_x[f(X)]\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_\mu[\mathbb{1}_{T=n,A}\mathbb{1}_{X_n=x}]}_{\mathbb{E}_\mu[\mathbb{1}_{T<+\infty}\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{X_T=x}]}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_\mu[f(\theta^T X)\underbrace{\mathbb{1}_{X_T=x}\mathbb{1}_{T<+\infty}}_{\mathcal{F}_n-\text{mesurable}}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_x[f(X)]\mathbb{1}_{T<+\infty}\mathbb{1}_{X_T=x} \quad \mathbb{P}_\mu \text{ p.s.}$$

D'où le résultat.

*Objectif* Savoir si un CM $X$ passe souvent en un point ou non.

**Définition 7**

Soit $\tilde{T}_x$ ="premier retour en $x$"$= \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n = x\}$

**Remarque.** $\tilde{T}_x \neq$ la première atteinte de $x$. Si $X_0 = x$ on a quand même $\tilde{T}_x > 0$.

**Définition 8**

$$N_x = \text{“nombre de passage en } x\text{”} = \text{Card}\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = x\} = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{X_n=x}$$

**Exemple.** On a vu que si $X$ est la MAS sur $\mathbb{Z}$ alors elle passe une infinité de fois sur chaque site : $\forall x, y$ $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. et $\tilde{T}_y < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. (partant de $x$ je passe en $y$ et même une infinité de fois).

**Propriété 5** (récurrentn transitoire)

$\mathbb{Q}$ noyau de transition sur $E$, si $x \in E$, il y a deux possibilités :

- $\tilde{T}_x < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. (on revient toujours en $x$), alors $N_x = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s., on dit alors que $x$ est *récurrent*
- ou bien $\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = x) > 0$ alors $N_x < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s., on dit que $x$ est *transitoire* (et même $N_x \sim \mathcal{G}(\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = +\infty))$, $\mathbb{E}_x[N_x] = \frac{1}{\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x=+\infty)}$)

**Preuve.**

Les deux conditions s'excluent, $X_0 = x$ $\mathbb{P}_x$ p.s. donc $N_x \geqslant 1$ $\mathbb{P}_x$ p.s. Calculons pour $k \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(N_x \geqslant k+1) &= \mathbb{P}_x(N_x \geqslant k+1, \tilde{T}_x < +\infty) + \underbrace{\mathbb{P}_x(N_x \geqslant k+1, \tilde{T}_x = +\infty)}_{=0\ (\tilde{T}_x = +\infty \Rightarrow N_x = 1)} \\
&= \mathbb{P}_x(N_x \geqslant k+1, \tilde{T}_x < +\infty) \\
&= \mathbb{P}_x\Big(\underbrace{n_x(X)}_{1+n_x(\theta^{\tilde{T}_x}X)\ \text{car}\ X_0 = x} \geqslant k+1, \tilde{T}_x < +\infty, X_{\tilde{T}_x} = x\Big) \\
&= \mathbb{P}_x\Big(n_x(\theta^{\tilde{T}_x}X) \geqslant k, \tilde{T}_x < +\infty, X_{\tilde{T}_x} = x\Big) \\
&\underset{\text{Markov fort}}{=} \mathbb{P}_x(n_x(X) \geqslant k)\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x < +\infty, X_{\tilde{T}_x} = x)
\end{aligned}$$

où $N_x = n_x(X)$ avec $n_x(y_0, y_1, \ldots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{y_n = x}$. Donc :

$$\mathbb{P}_x(N_x \geqslant k+1) = \mathbb{P}_x(N_x \geqslant k)\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x < +\infty)$$

Donc puisque $\mathbb{P}_x(N_x \geqslant 1) = 1$ :

$$\mathbb{P}_x(N_x \geqslant k) = \mathbb{P}_x(\tilde{T}_x < +\infty)^{k-1}$$

- Si $\tilde{T}_x < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. alors $\mathbb{P}_x(N_x \geqslant k) = 1$ donc $N_x = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s.
- Si $\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x < +\infty) < 1$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(N_x = k) &= \mathbb{P}_x(N_x \geqslant k) - \mathbb{P}_x(N_x \geqslant k+1) \\
&= \mathbb{P}_x(\tilde{T}_x < +\infty)^{k-1}\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = +\infty) \\
&= (1 - \mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = +\infty))^{k-1}\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = +\infty)
\end{aligned}$$

□

$\mathbb{E}[f(\theta^T X)|\mathcal{F}_T]\mathbb{1}_{T<+\infty, X_T = x}$.

$\mathbb{P}_\mu(\theta^T X \in B, A, X_T = x, T < +\infty) = \mathbb{E}_\mu[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\theta^T X \in B}|\mathcal{F}_T]\mathbb{1}_{X_T = x}\mathbb{1}_{T<+\infty}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_\mu[\underbrace{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{X\in B}]}_{\mathbb{P}_x(X\in B)}\mathbb{1}_{X_T = x, T<+\infty, A}]$

**Remarque.** On a proué :

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = \mathbb{P}_x(\tilde{T}_x < +\infty)^{k-1}\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = +\infty)$$

signifie $\mathbb{P}(k$ passages en $x) = \mathbb{P}($on revient $k-1$ fois puis on s'échappe$)$. La propriété de Markov permet de découper dans le temps en événements indépendants.

*Cas peu intéressant.*

$$\text{Si } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'étude se ramène à 2 chaînes de Markov disjointes.

*Autre cas.* Partant de $x$ on va avec 1 chance sur 2 en hat et on ne va jamais vers le bas. On voudrait une notion qui dise si 2 sites peuvent communiquer entre eux.

**Définition 9**

$\mathbb{Q}$ fixé. On définit le potentiel de la marche par $U\colon E\times E \longrightarrow E$ :

$$U(x,y) = \mathbb{E}_x[\underbrace{N_y}_{=\sum \mathbb{1}_{X_n=y}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q^n(x,y)$$

On a une équivalence pour $x \neq y$ dans $E$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tilde{T}_y < +\infty) > 0 &\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(\exists n \geqslant 0, X_n = y) > 0\\ &\Leftrightarrow \exists n \geqslant 0,\ \mathbb{P}_x(X_n = y) \neq 0\\ &\Leftrightarrow \exists n \geqslant 0,\ Q^n(x,y) \neq 0\\ &\Leftrightarrow U(x,y) \neq 0\end{aligned}$$

Si c'est vrai on note $x \rightsquigarrow y$ "$x$ communique avec $y$" (dans la représentation graphique, il existe un chamine de $x$ à $y$). On note $\leftrightsquigarrow$ la relation d'équivalence engendrée.

On dit que $\mathbb{Q}$ est *irréductible* s'il y a une seule classe pour cette relation.

**Propriété 6**

$$k \text{ récurrent } \Leftrightarrow U(x,x) = +\infty$$

**Preuve.**

$x$ récurrent $\Rightarrow$ $N_x = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{E}_x[N_x]}_{=U(x,x)} = +\infty$

$x$ transitoire $\Rightarrow U(x,x) = \mathbb{E}_x[N_x] = \frac{1}{\mathbb{P}_x(\tilde{T}_x = +\infty)} < +\infty$ $\square$

**Applications.** (MAS sur $\mathbb{Z}^d$)

- $d = 1$ : $S = x + Y_1 + \ldots + Y_n$ avec $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ indépendant de loi $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$ est une CM sur $\mathbb{Z}$ de transition :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(i, i+1) = \frac{1}{2}\\ \mathbb{Q}(i, i-1) = \frac{1}{2}\\ Q(i,j) = 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Calculons $U(y,y)$.

$$U(y,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_y(X_n = y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\underbrace{Y_1 + \ldots + Y_n = 0}_{\emptyset \text{ si } n \text{ impair}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n}^0 = 0)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2n}^0 = 0) &= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant 2n \mid Y_i = 1\}}_{\sim \mathcal{B}(2n,1/2)} = n\Big) \\
&= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{2n!}{n!n!} \frac{1}{4^n} \\
&\underset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{2}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n \left(\frac{n}{2}\right)^n \sqrt{2\pi n}\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

Ainsi $U(y,y) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)) = +\infty$. On retrouve bien que tous les sites sont récurrents.

- $d = 2 : S_n^x = x + X_1 + \ldots + X_n \in \mathbb{Z}^2$ avec $X_i$ indépendants et $X_i \sim \mathcal{U}()\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$. rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et dilatation de $\sqrt{2}$ (opération noté $\varphi$, linéaire). On se déplace désormais selon les diagonales. On pose $\tilde{Y} = \varphi(\tilde{Y})$ et $\tilde{S}_n^0 = \tilde{Y}_1 + \ldots + \tilde{T}_n = \varphi(S_n^0)$. Désormais :

$$\tilde{Y}_i \sim \mathcal{U}\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\} = \left(\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})\right) \otimes \left(\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})\right)$$

Donc en notant $\tilde{S}_n^0 = (\tilde{S}_n^{0,1}, \tilde{S}_n^{0,2})$ et $\tilde{S}_n^{0,k} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i^k$ $(k \in \{1,2\})$, on a $\tilde{S}_n^{0,1}$ et $\tilde{S}_n^{0,2}$ indépendants et de loi la MAS sur $\mathbb{Z}$.

$$U(y,y) = \sum_{n \leqslant 0} \mathbb{P}(S_n^0 = 0_{\mathbb{Z}^2}) \underset{\text{parité}}{=} \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(S_{2n}^0 = 0) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\tilde{S}_{2n}^0 = 0_{\mathbb{Z}^2})$$

Donc :

$$U(y,y) \underset{\text{idp}}{=} \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\tilde{S}_{2n}^{0,1} = 0)\mathbb{P}(\tilde{S}_{2n}^{0,2} = 0) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1))\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1)) \sim \sum_n \frac{1}{n} = \infty$$

Donc tout site est récurrent pour la MAS dans $\mathbb{Z}^2$.

- $d \geqslant 3$ dans le cas de la MA sur les diagonales : on prend $(\tilde{Y}_i)_{i \geqslant 1}$ indépendant uniforme sur $\{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_i \in \{-1,1\}\}$. $\tilde{S}_n^x = x + \tilde{Y}_1 + \ldots + \tilde{T}_n$, ses coordonnées sont indépendantes et sont des MAS sur $\mathbb{Z}$. Alors comme précédemment :

$$\begin{aligned}
U(y,y) &= \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\tilde{S}_{2n}^0 = 0) \\
&\underset{\text{idp}}{=} \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\tilde{S}_{2n}^{0,1} = 0) \times \ldots \mathbb{P}(\tilde{S}_{2n}^{0,d} = 0) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1))\right)^d < +\infty \quad \text{pour } d \geqslant 3
\end{aligned}$$

Tout site est transitoire.

⚠ Cela ne permet pas de savoir si c'est aussi le cas pour la MAS sur $\mathbb{Z}^d$.

- $d$ quelconque pour la MAS : soient $(Y_i)$ indépendants dans $\mathbb{Z}^d$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ la base canonique. $Y_i \sim \mathcal{U}(\{e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d\})$.

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n \quad \text{MAS sur } \mathbb{Z}^d \text{ issur de } 0$$

on ne peut revenir en 0 qu'au bout d'un nombre pair de pas. Calculons $U(0,0)$ :

$$U(0,0) = \sum_{n\geqslant 0} = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

Calculons $\phi_{S_{2n}}$.

$$\begin{aligned}
\phi_{Y_1}(\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}^d}) &= \mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, Y_1\rangle}] \\
&= \frac{1}{2d}\Big(e^{i\langle\lambda|e_1\rangle} + e^{i\langle\lambda|-e_1\rangle} + \ldots + e^{i\langle\lambda|e_d\rangle} + e^{i\langle\lambda|-e_d\rangle}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\lambda_1) + \ldots + \cos(\lambda_d))
\end{aligned}$$

Donc par indépendance :

$$\phi_{S_{2n}}(\lambda) = \phi_{Y_1+\ldots Y_{2n}}(\lambda) = \left(\frac{\cos(\lambda_1) + \ldots \cos(\lambda_d)}{d}\right)^{2n}$$

Or :

$$\varphi_{S_{2n}}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\langle\lambda|S_{2n}\rangle}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{i\langle\lambda|k\rangle}\mathbb{P}(S_{2n} = k)$$

En intégrant :

$$\int_{\lambda\in[-\pi,\pi]^d} \varphi_{S_{2n}}(\lambda)d\lambda = (2\pi)^d\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
U(0,0) &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n\geqslant 0} \int_{[-\pi,\pi]^d} \phi_{S_{2n}}(\lambda)d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n\geqslant 0} \int_{[-\pi,\pi]^d} \underbrace{\Big(\frac{\cos(\lambda_1) + \ldots + \cos(\lambda_d)}{d}\Big)}_{\in[0,1]} d\lambda \\
&\underset{\text{Fub} \geqslant 0}{=} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \underbrace{\frac{1}{1 - \left(\frac{\cos(\lambda_1)+\ldots+\cos(\lambda_d)}{d}\right)^2}}_{(*)}
\end{aligned}$$

Problème : $(*) \longrightarrow +\infty$ lorsque les $\lambda_i \longrightarrow 0$ ou $\pi$. Restreignons les bornes de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
U(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\Bigg(&\int_{]-\varepsilon,\varepsilon[^d} \frac{1}{1 - \left(\frac{\cos(\lambda_1)+\ldots+\cos(\lambda_d)}{d}\right)^2}\lambda \\
&+ \int_{(\pi+]-\varepsilon,\varepsilon[)^d} \frac{1}{1 - \left(\frac{\cos(\lambda_1)+\ldots+\cos(\lambda_d)}{d}\right)^2}\lambda \\
&+ I\Bigg) \qquad \text{avec } I < +\infty
\end{aligned}$$

Par symétrie $\lambda \mapsto \pi - \lambda$ les deux premières intégrales sont égales. Alors :

$$U(0,0) < +\infty \ \Leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{]-\varepsilon,\varepsilon[^d} \frac{1}{1 - \left(\frac{\cos(\lambda_1)+\ldots+\cos(\lambda_d)}{d}\right)^2} \lambda < +\infty$$

Comme $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{\cos\lambda_1 + \ldots + \cos\lambda_d}{d}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{1 - \lambda_1^2/2 + \ldots + 1 - \lambda_d^2/2}{d} + o(\varepsilon^2)\right)^2 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_d^2}{2d} + o(\varepsilon^2)\right)^2 \\ &= \frac{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_d^2}{2d} + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$U(0,0) < +\infty \ \Leftrightarrow \ \int_{]-\varepsilon,\varepsilon[^d} \frac{1}{\|\lambda\|_2^2} d\lambda \ \Leftrightarrow \ \int_{\|\lambda\|<\varepsilon} \frac{1}{\|\lambda\|_2^2} d\lambda$$

Changement de coordonnée polaire dans $\mathbb{R}^n$, $f$ mesurable positif

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)dx = c_n \int_{r>0} f(r) r^{n-1} dr$$

Ici $U(0,0) < +\infty \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \int_0^\varepsilon n^{d-3} < +\infty \Leftrightarrow d \geqslant 3$

**Propriété 7**

- $x$ récurrent et $x \rightsquigarrow y \Rightarrow y$ récurent et $y \rightsquigarrow x$. De plus $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s.
- $y$ transitoire et $x \rightsquigarrow y \Rightarrow x$ transitoire. Et $\forall z,\ N_y < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.S.
- être transitoire ou récurrent est une propriété de classe :

$$\text{si } x \leftrightsquigarrow y \quad \text{alors} \quad x \text{ récurrent } \Leftrightarrow y \text{ récurrent}$$

**Preuve.**
$x \rightsquigarrow y$ donc $\exists n$ tel que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$, or $(X_n = y) \subseteq (\tilde{T}_y < +\infty)$, donc :

$$\begin{aligned} 0 < \mathbb{P}_x(\tilde{T}_y < +\infty) &= \mathbb{P}_x(\tilde{T}_y < +\infty, N_x = +\infty) \quad \text{car } x \text{ récurrent donc } N_x = +\infty \ \mathbb{P}_x \text{ p.s.} \\ &= \mathbb{P}_x(\tilde{T}_y < +\infty, n_x(\theta^{\tilde{T}_y}(X)) = +\infty, \underbrace{X_{\tilde{T}_y} = y}_{\text{gratuit}}) \\ &\underset{\text{Markov fort}}{=} \mathbb{P}_y(n_x(X) = +\infty)\mathbb{P}_x(\tilde{T}_y < +\infty, X_{\tilde{T}_y = y}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$0 < \mathbb{P}_x(\tilde{T}y < +\infty) = \mathbb{P}_y(N_x = +\infty)\mathbb{P}_x(\tilde{T}_y < +\infty)$$

Donc $N_x = +\infty$ $\mathbb{P}_y$ p.s. donc $U(y,x) = +\infty$ donc $y \rightsquigarrow x$.

On a $x \rightsquigarrow y$ donc $\exists l,\ \mathbb{Q}^l(x,y) > 0$ et $y \rightsquigarrow x$ donc $\exists p,\ \mathbb{Q}^p(y,x) > 0$. Calculons :

$$U(y,y) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{Q}^n(y,y) \geqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{Q}^{l+n+p}(y,y) \geqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{Q}^l(y,x)\mathbb{Q}^n(x,x)\mathbb{Q}^p(x,y)$$

Donc,

$$U(y,y) \geqslant \underbrace{\mathbb{Q}^l(y,x)}_{>0}\underbrace{U(x,x)}_{+\infty}\underbrace{\mathbb{Q}^p(x,y)}_{>0} = +\infty$$

Aisni $y$ est récurrent.
On a vu que $x$ récurrent et $x \rightsquigarrow y \Rightarrow\ N_x = +\infty\ \mathbb{P}_y$ p.s. On sait $y$ récuurent et $y \rightsquigarrow x$ donc $N_y = +\infty\ \mathbb{P}_x$ p.s.

Contraposée :

$$\begin{cases} x \rightsquigarrow y \\ y \text{ transitoire} \end{cases} \Rightarrow\ x \text{ transitoire}$$

Calculons si $y$ transitoire et $z \neq y$ :

$$\begin{aligned} U(z,y) &= \mathbb{E}_z[N_y] \\ &= \mathbb{E}_z[\mathbb{1}_{\tilde{T}_y<+\infty}N_y] + \underbrace{\mathbb{E}_z[\mathbb{1}_{\tilde{T}_y=+\infty}N_y]}_{=0} \\ &= \mathbb{E}_z\Big[\mathbb{E}_z\big[n_y(\theta^{\tilde{T}_y}X) \mid \mathcal{F}_{\tilde{T}_y}\big]\mathbb{1}_{\tilde{T}_y<+\infty, X_{\tilde{T}_y}=y}\Big] \\ &= \mathbb{E}_z\Big[\mathbb{E}_y[n_y(X)]\mathbb{1}_{\tilde{T}_y<+\infty, X_{\tilde{T}_y}=y}\Big] \\ &= \mathbb{E}_y[N_y]\mathbb{P}_z(\tilde{T}_y < +\infty) \end{aligned}$$

Bilan :

$$U(z,y) = \underbrace{U(y,y)}_{<+\infty \text{ car transitivte}} \mathbb{P}_z(\tilde{T}_y < +\infty) < +\infty$$

donc $\mathbb{E}_z[N_y] < +\infty$ donc $N_y < +\infty\ \mathbb{P}_z$ p.s. □

**Définition 10**

Soient $\mathbb{Q}, E$ fixés.

- On dit que $\mathbb{Q}$ est irréductible s'il n'y a qu'une seule classe dans $E$.
- On dit que $\mathbb{Q}$ est réccurent si en plus tous les points sont récurrents.
- Et sinon (tous les points sont transitoires) on dit que $\mathbb{Q}$ est transitoire.

**Remarque.** On attribue aussi les attributs irréductible, transitoire, récurrent au processus $X$.

**Application.** Les MAS sur $\mathbb{Z}^d$ sont irréductibles et elles sont récurrentes si $d = 1$ ou $2$ pour tout $x, y$ $N_y = +\infty\ \mathbb{P}_x$ p.s. Elles sont transitoires si $d \geqslant 3$, $N_y < +\infty\ \mathbb{P}_x$ p.s.
Alors :

$$\mathrm{Card}\{n \mid \|X_n\| \leqslant R\} = \sum_{\|y\|\leqslant R} N_y \quad \mathbb{P}_x \text{ p.s.}$$

$\underline{\lim}_n \|X_n\| \geqslant R\ \mathbb{P}_x$ p.s. Vrai pour tout $R$ donc :

$$\|X_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\ \mathbb{P}_x \text{ p.s.}$$

**Théorème 2** (décomposition d'une chaîne de Markov)

Si $\mathbb{Q}, E$ fixés. Soit :

$$\mathcal{T} = \{x \in E \mid x \text{ transitoire}\} \qquad \mathcal{R} = \{x \in E \mid x \text{ récurrent}\} = \mathcal{R}_1 \cup \dots \mathcal{R}_n \cup \dots$$

où les $\mathcal{R}_i$ sont les classes d'équivalence pour $\leftrightsquigarrow$.
Alors on a :

- $\forall n,\ X_n \in \mathcal{T}$ et $(N_y < +\infty,\ \forall y \in E)$, $(N_y == 0,\ \forall y \in \mathcal{R})$
- ou bien $T = \inf\{n | X_n \in \mathcal{R}\} < +\infty$, et si $i$ est tel que $X_T \in \mathcal{R}_i$ alors :
  - $N_y < +\infty\ \forall y \in \mathcal{T}$
  - $N_y = 0\ \forall y \in \mathcal{R} \backslash \mathcal{R}_i$
  - $N_y = +\infty\ \forall y \in \mathcal{R}_i$

$\mathbb{P}_x$ p.s. pour tout $x$.

**Preuve.**
Si $x \in \mathcal{R}_i$, $\forall y \notin \mathcal{R}_i,\ x \not\rightsquigarrow y$ donc $N_y = 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s., mais si $y \in \mathcal{R}_i,\ x \rightsquigarrow y$ alors $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s.
Soit :

$$A_i = \Big\{\forall y \in \mathcal{R}_i,\ N_y = +\infty,\ \forall y \notin \mathcal{R}_i,\ N_y = 0\Big\}$$

On a $\forall x \in \mathcal{R}_i,\ \mathbb{P}_x(A_i) = 1$.
Si $x \in \mathcal{T}$, soit $T_i = \inf\{n \mid X_n \in \mathcal{R}_i\}$ ceux qui sont finis sont distincts, soit $T = \inf\{T_i\}$. Si $T = +\infty$ ok, sinon si $T < +\infty$, $\exists i$ tel que $T = T_i$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\Big(T < +\infty,\ \forall n \geqslant T,\ X_n \in \mathcal{R}_i, (N_y = +\infty, \forall y \in \mathcal{R}_i), (N_y = 0, \forall y \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{R}_i)\Big) \\
&= \mathbb{P}_x\Big(T < +\infty,\ \bigsqcup_{y \in \mathcal{R}_i} X_T = y,\ \theta^T X \in A_i\Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{R}_i} \mathbb{P}_x\Big(\theta^T X \in A_i,\ T < +\infty,\ X_T = y\Big) \\
&\underset{\text{Markov fort}}{=} \sup_{y \in \mathcal{R}_i} \underbrace{\mathbb{P}_y(A_i)}_{=1} \mathbb{P}(T < +\infty,\ X_T = y) \\
&= \mathbb{P}(T = T_i < +\infty)
\end{aligned}$$

$\square$

**Remarque.** Si $E$ fini, $\mathbb{Q}$ irréductible alors $\mathbb{Q}$ récurrent car :

$$\sum_{y \in E} N_y = \sum_{y \in E} \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{1}_{X_n = y} = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{y \in E} \mathbb{1}_{X_n = y} = +\infty$$

Si $\mathbb{Q}$ était transitoire elle serait finie $\mathbb{P}_x$ p.s.

# 4 Comportement asymptotique des chaînes de Markov

Que devient $X_n$ lorsque $n \to +\infty$ ?

- *Comportement p.s.* de $X_n$ peu intéressant, $E$ discret donc si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$ alors $X_n$ est constant à partir d'un certain rang donc $X_n$ s'arrête sur un site $x$ tel que $\mathbb{Q}(x,y) = \mathbb{1}_{y=X}$ ; un tel site est appelé *point absorbant*

  Par exemple dans le processus de Galton-Watson 0 est absorbant et si $\mathbb{E}[X_j] \leqslant 1$ et de loi $\neq \delta_1$ alors $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$

- *Convergence en loi.* $\mu_{X_n}$ loi sur $E$. A-t-elle une limite $\mu_\infty$ ?

- *Temps d'occupation.* Correspond à la proportion du temps passé en un site :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_n=y} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty(y)\ \mathbb{P}_x \text{ p.s. ?}$$

Désormais si $\nu$ est une mesure sur $E$, on notera $\nu(x) = \nu(\{x\})$.
Calculons $\mu_{X_{n+1}}$ à partir de $\mu_{X_n}$ :

$$\mu_{X_{n+1}}(y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \sum_{x\in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_n = x, X_{n+1} = y)}_{\mathbb{P}(X_{n+1}=y|X_n=x)\mathbb{P}(X_n=x)} = \sum_{x\in E} \mathbb{Q}(x,y)\mu_{X_n}(x) = \sum_{x\in E} \mu_{X_n}(x)\mathbb{Q}(x,y)$$

**Définition 11**

- Si $E$ est fini $= \{e_1, \dots, e_n\}$, on identifie une mesure $\nu$ sur $E$ et le vecteur ligne $(\nu(e_1), \dots, \nu(e_n))$.
- Pour $E$ quelconque, $\mathbb{Q}$ noyau de transition et $\nu$ mesure sur $E$ on définit la mesure $\nu\mathbb{Q}$ sur $E$ par :

$$(\nu\mathbb{Q})(y) = \sum_{x\in E} \nu(x)\mathbb{Q}(x,y)$$

**Remarque.** Ceci coïncide avec le calcul matriciel.

**Remarque.** On définit cela pour des $\nu$ mesures par forcément de probabilité mais telles que $\nu(y) < +\infty\ \forall y$ (mais éventuellement $\nu(E) = +\infty$).

On a $\mu_{X_{n+1}} = \mu_{X_n}\mathbb{Q}$, par récurrence immédiate $\mu_{X_n} = \mu_{X_0}\mathbb{Q}^n$. On s'attend à ce que $\mu_{X_n}$ converge vers un point fixe de $\mu \mapsto \mu\mathbb{Q}$.

**Définition 12** (mesure invariante)

$\mathbb{Q}$ fixé, $\mu$ mesure sur $E$ avec $\mu(y) < +\infty\ \forall y$ et $\mu(E) \neq 0$, est dite invariante si $\mu\mathbb{Q} = \mu$.

Ce sont les bons candidats pour les mesures limites.

**Propriété 8**

$\mathbb{Q}$ fixé, $X$ réalisation canonique, $\mu$ probabilité, alors :

$$\begin{aligned} &(i)\ \mu \text{ est invariante} \\ \Leftrightarrow\ &(ii)\ \exists \mu_0 \text{ tel que sous } \mathbb{P}_{\mu_0},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \text{ v.a.} \sim \mu \\ \Leftrightarrow\ &(iii)\ \text{Si } X_n \sim \mu \text{ alors } \forall k \geqslant n,\ X_k \sim \mu \end{aligned}$$

**Preuve.**

$(i) \Rightarrow (ii)$ : Soit $\mu_0 = \mu$, alors $\mu_{X_n} = \mu_{X_0}\mathbb{Q}^n = \mu$ donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mu$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ : On pose $\mu_0 = \mu$ donc $\forall n,\ \mu_{X_n} = \mu$

$(i) \Rightarrow (iii)$ : Si $X_n \sim \mu$, et $k \geqslant n$, $\mu_{X_k} = \mu_{X_n}\mathbb{Q}^{k-n} = \mu$

$(ii) \Rightarrow (i)$ : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mu,\ X_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z$. $\mu_{X_{n+1}}(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(y)$, or :

$$\mu_{X_{n+1}}(y) = (\mu_{X_n}\mathbb{Q})(y) = \sum_x \underbrace{\mu_{X_n}(x)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mu(x)} \mathbb{Q}(x,y)$$

Donc par Fatou :

$$\sum_{x\in E} \mu(x)\mathbb{Q}(x,y) = \sum_{x\in E} \underline{\lim}\mu_{X_n}(x)\mathbb{Q}(x,y) \leqslant \underline{\lim} \sum_{x\in E} \mu_{X_n}(x)\mathbb{Q}(x,y) = \mu(y)$$

En sommant en $y$ :

$$\underbrace{\sum_{y\in E}\sum_{x\in E} \mu(x)\mathbb{Q}(x,y)}_{=\sum_{x\in E}\mu(x)=1} \leqslant \sum_{y\in E} \mu(y) = 1$$

Si une des inégalités était stricte on aurait $1 < 1$ ce qui est absude. Ce sont donc des égalités. $\square$

*Désormais on cherche les mesures invariantes donc à résoudre $\mu\mathbb{Q} = \mu$. Donc on veut connaître les conditions d'existence et d'unicité de cette équation.*

**Application.**

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La somme sur les lignes vaut 1 donc :

$$\mathbb{Q}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc 1 est une valeur propre de $\mathbb{Q}$ donc aussi de $\mathbb{Q}^T$, ainsi $\exists \mu$ vecteur ligne telle que $\mathbb{Q}^T\mu^T = \mu^T$, donc $\mu\mathbb{Q} = \mu$. C'est bien une mesure invariante si les coefficients sont positifs.

*Réduction de* $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ a trois valeurs propres :

$$1,\ x = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3},\ y = \frac{-1-i\sqrt{2}}{3} \qquad |x|, |y| < 1$$

un vecteur propre associé à 1 pour $\mathbb{Q}^T$ est $(\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6})^T$ Donc $\mu = (\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6})$ est une mesure invariante.

$$\mathbb{Q}^T = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \text{avec } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{2} & * & \\ \frac{1}{6} & & \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{Q}^T)^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^n & 0 \\ 0 & 0 & y^n \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\mu_{X_n}^T = (\mathbb{Q}^T)^n \mu^T \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}\mu_0^T = \alpha\mu_0^T$$

Donc :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \mu_{X_n}(i)}_{1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \mu(i)}_{1}$$

Donc $\alpha = 1$, donc $\mu_{X_n}(i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(i)$.

Sur $E$, $\mathbb{Q}$ noyau de transition. $X$ C.M. de transition $\mathbb{Q}$. On sait que si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mu$ alors $\mu$ mesure invariante ($\mu\mathbb{Q} = \mu$) de probabilité.
*Objectifs.*

- existence et unicité des mesures invariantes
- comment les trouver ?

**Définition 13**

$\mathbb{Q}$, $E$ fixés. $\mu$ mesure sur $E$ est dite *symétrique, ou réversible* si :

$$\forall x, y,\ \mu(x)\mathbb{Q}(x,y) = \mu(y)\mathbb{Q}(y,x)$$

**Propriété 9**

$$\mu \text{ réversible } \Rightarrow \mu \text{ invariante}$$

*Intérêt.* Il est plus facile de trouver des mesures réversibles, mais il y a plein de cas sans mesures réversibles.

**Remarque.** Le nom vient du fait que si $\mu$ est une mesure réversible alors sous $\mathbb{P}_\mu$ :

$$(X_0, \ldots, X_n) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0)$$

**Preuve.**
Si $\mu$ est réversible alors :

$$\begin{aligned}(\mu\mathbb{Q})(y) &= \sum_z \mu(z)\mathbb{Q}(z,y)\\ &= \sum_z \mu(y)\mathbb{Q}(y,z)\\ &= \mu(y)\underbrace{\sum_z \mathbb{Q}(y,z)}_{=1} = \mu(y)\end{aligned}$$

$\square$

**Exemple.** Si $S$ est la M.A.S. sur $\mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{Q}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } \|x-y\|_1 = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cherchons les mesures symétriques. On doit avoir :

$$\forall x, y,\ \mu(x)\mathbb{Q}(x,y) = \mu(y)\mathbb{Q}(y,x)$$

Donc $\forall x, y$, tels que $\|x-y\|_1 = 1$ $\mu(x)\frac{1}{2d} = \mu(y)\frac{1}{2d}$ i.e. $\mu(x) = \mu(y)$. Par connexité on obtient :

$$\forall x,\ \mu(x) = \mu(0)$$

Donc $\mu = \alpha\mu_{\text{comptage}}$ qui n'est pas une probabilité.

**Exemple.** (urnes d'Ehrenfest)
Notons $N$ le nombre de boules et $X_n$ le nombre de boules rouges au bout de $n$ étapes. À chaque étape $n$ choisit une boule uniformément parmi les $N$ et on change sa couleur. $X$ C.M. sur $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(i,i+1) = \frac{N-i}{N} \\ Q(i,i-1) = \frac{i}{N} \\ Q(i,j) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cherchons $\mu$ réversible :

$$\mu(i)\mathbb{Q}(i,j) = \mu(j)\mathbb{Q}(j,i)$$

On doit donc avoir pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ :

$$\mu(i-1)\mathbb{Q}(i-1,i) = \mu(i)\mathbb{Q}(i,i-1) \quad \Rightarrow \quad \mu(i-1)\frac{N-i+1}{\cancel{N}} = \mu(i)\frac{i}{\cancel{N}}$$

$$\begin{aligned}\mu(i) &= \mu(i-1)\frac{N+1-i}{i}\\ &= \mu(i-2)\frac{N+1-(i-1)}{i-1}\frac{N+1-i}{i}\\ &= \ldots\\ &= \mu(0)\frac{N+1-1}{1}\frac{N+1-2}{2} \times \ldots \times \frac{N+1-i}{i}\\ &= \mu(0)\frac{N!}{(N-i)!i!}\end{aligned}$$

Les mesures symétriques sont les mesures $\mu$ telles que pour un certain $\alpha$, $\forall i,\ \mu(i) = \alpha \binom{N}{i}$. Il y a une probabilité réversible pour $\alpha = \frac{1}{2^N}$, $\mu = \mathcal{B}(N, 1/2)$.

## 4.1 Existence de mesures invariantes

Dans le cas fini chercher $\mu$ invariante correspond à résoudre $\mu\mathbb{Q} = \mu$ donc à chercher un vecteur propre à gauche pour la valeur propre 1.

**Propriété 10**

Si $E$ est fini, alors il existe une mesure invariante pour $\mathbb{Q}$.

**Preuve.**
Le somme des lignes vaut 1, donc :

$$\mathbb{Q}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$$

Donc 1 est une valeur propre de $\mathbb{Q}$, donc aussi de $\mathbb{Q}^T$. Ainsi, $\exists v = (v_1, \ldots, v_p)$ avec $p = \mathrm{Card}(E)$ tel que $v\mathbb{Q} = v$. Il reste à montrer qu'on peut trouver $w$ un vecteur à coefficients positifs tel que $w\mathbb{Q} = w$. Posons $w_i = |v_i|$. $w = (w_1, \ldots, w_p)$ est à coefficients positifs. Et on a :

$$\begin{aligned}A_i &= \sum_{j=1}^{p} w_j \mathbb{Q}_{j,i} - w_i \\ &= \sum_{j=1}^{p} |v_j| \mathbb{Q}_{j,i} - |v_i| \\ &\geqslant \left|\sum_{j=1}^{p} v_j \mathbb{Q}_{j,i}\right| - |v_i| \\ &= |v_i| - |v_i| = 0\end{aligned}$$

Donc $\forall i,\ A_i \geqslant 0$. Or :

$$\sum_{i=1}^{p} A_i = \sum_{i,j} w_j \mathbb{Q}_{j,i} - \sum_i w_i = \sum_j w_j - \sum_i w_i = 0$$

Alors $\forall i,\ A_i = 0$. Donc $w\mathbb{Q} - w = 0$. $w$ s'identifie alors à une mesure invariante. □

**Remarque.** Automatiquement sur un espace fini, si $\mu$ est une mesure invariante alors $\frac{\mu}{\mu(E)}$ est une probabilité invariante.

**Théorème 3**

$\mathbb{Q}, E$ fixés. Si $x \in E$ est un point récurrent, on définit :

$$\begin{aligned}\nu_x(y) &= \text{“nombre moyen de passages en } y \text{ lors d'une boucle de } x \text{ à } x\text{”} \\ &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\tilde{T}_x-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right]\end{aligned}$$

C'est une mesure invariante. Et $\nu_x(y) > 0 \;\Leftrightarrow\; y \leftrightsquigarrow x$.

**Remarque.**

$$\nu_x(x) = 1 \qquad\qquad \nu_x(y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{\tilde{T}_x} \mathbb{1}_{X_{n-1}=y}\right]$$

**Preuve.**

Calculons $\nu_x\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}\nu_x\mathbb{Q}(y) &= \sum_{z\in E} \nu_x(z)\mathbb{Q}(z,y) \\ &= \sum_{z\in E} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\tilde{T}_x-1} \mathbb{1}_{X_n=Z}\mathbb{Q}(z,y)\right] \\ &= \sum_{z\in E}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x\Big(\underbrace{\tilde{T}_x < n}_{\in\mathcal{F}_n^x},\ X_n = z\Big)\mathbb{Q}(z,y) \\ &= \sum_{z\in E}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x\Big(\tilde{T}_x < n,\ X_n = z,\ X_{n+1} = y\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x\Big(\tilde{T}_x > n,\ X_{n+1} = y\Big) \qquad \text{Fubini} \geqslant 0 \text{ puis } \bigsqcup\{X_n = z\} = \Omega \\ &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\tilde{T}_x\geqslant m+1}\mathbb{1}_{X_m=y}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{m=1}^{\tilde{T}_x} \mathbb{1}_{X_m=y}\right] \\ &= \nu_x(y)\end{aligned}$$

□

On sait $\nu_x(x) = 1 > 0$.

- si $x \not\rightsquigarrow y$ alors $\nu_x(y) = 0$ ($X_n \neq y\ \forall n\ \mathbb{P}_x$ p.s.)
- si $x \rightsquigarrow y$ alors $\exists n$ tel que $\mathbb{Q}^n(x,y) > 0$ alors :

$$\nu_x(y) = (\nu_x\mathbb{Q}^n)(y) = \sum_z \nu_x(z)\mathbb{Q}^n(z,y) \geqslant \nu_x(x)\mathbb{Q}^n(x,y) > 0$$

**Remarque.** Si $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left, "1"] & 2 \arrow[l, bend left, "1"] & & 3
\end{tikzcd}$$

Alors $\forall \alpha, \beta,\ \alpha+\beta = 1,\ \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \mu = \alpha(\frac{1}{\delta}{}_1 + \frac{1}{2}\delta_2) + \beta\delta_3$ est une probabilité invariante.

**Théorème 4**

Si $\mathbb{Q}$ irréductible et récurrente alors il existe une unique (à facteur multiplicatif près) mesure invariante.

**Preuve.**

Soit $\mu$ une mesure invariante et soit $x$ tel que $\mu(x) > 0$, on peut supposer quitte à la multiplier que $\mu(x) = 1$. Montrons que $\mu = \nu_x$.

Si c'est vrai alors comme $\forall y\ x \leftrightsquigarrow y$ on a $\mu(y) < 0\ \forall y$ donc pour n'importe quel $y$ $\mu = \mu(y)\nu_y$ : ils sont tous proportionnels.

Montrons par récurrence sur $k$ que $\forall y$ :

$$\mu(y) \geqslant \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{(\tilde{T}_x - 1)\wedge k} \mathbb{1}_{X_n = y}\right] \qquad (**)$$

Calculons pour $y \neq x$.

$$\begin{aligned}
(\mu\mathbb{Q})(y) &= \sum_z \mu(z)\mathbb{Q}(z,y) \\
&\underset{\text{H.R.}}{\geqslant} \sum_z \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_{\tilde{T}_x > n}\mathbb{1}_{X_n = z}\right]\mathbb{Q}(z,y) \\
&= \sum_{z\in E}\sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}_x\Big(\tilde{T}_x > 0,\ X_n = z\Big)\mathbb{Q}(z,y) \\
&= \sum_{z\in E}\sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}_x\Big(\tilde{T}_x > 0,\ X_n = z,\ X_{n+1} = y\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\tilde{T}_x > n}\mathbb{1}_{X_{n+1} = y}\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{m=1}^{k+1} \mathbb{1}_{\tilde{T}_x \geqslant m}\mathbb{1}_{X_m = y}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{m=1}^{\tilde{T}_x\wedge(k+1)} \underbrace{\mathbb{1}_{X_m = y}}_{*}\right] \qquad (*) = 0 \text{ si } m = 0 \text{ ou } \tilde{T}_x \text{ car } x \neq y \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sum_{m=0}^{\tilde{T}_x\wedge(k+1)} \mathbb{1}_{X_m = y}\right]
\end{aligned}$$

Donc $(**)$ est vrai, on prend sa limite $\uparrow$ en $k$. Par TCM $\mu(y) \geqslant \nu_x(y)$.

Soit $y \in E$, $y \rightsquigarrow x$ donc $\exists n$ tel que $\mathbb{Q}^n(y,x) > 0$. Calculons :

$$1 = \mu(x) = (\mu\mathbb{Q}^n)(x) = \sum_{z\in E} \mu(z)\mathbb{Q}^n(z,x) \geqslant \sum_{z\in E} \nu_x(z)\mathbb{Q}^n(z,x) = (\nu_x\mathbb{Q}^n)(x) = 1$$

Si pour un certain $z$ on avait $\mu(z)\mathbb{Q}^n(z,y) > \nu_x(z)\mathbb{Q}^n(z,y)$ alors on aurant $1 > 1$. Absurde. Donc il n'y que des égalités. Donc $\mu(y)\mathbb{Q}^n(z,y) = \nu_x(y)\mathbb{Q}^n(z,y)$, ainsi $\mu(y) = \nu_x(y)$. Ainsi $\mu = \nu_x$. □

**Remarque.** Application à la M.A.S. sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ : $\mu_{\text{comptage}}$ est invariante et la chaîne est irréductible récurrente donc il n'y a pas de probabilité invariante.

**Théorème 5** (classification des noyaux irréductibles)

$\mathbb{Q}$ irréductible. Il y a trois possibilités :

1. $\mathbb{Q}$ est irréductible transitoire. En particulier $\forall x, y,\ N_y < +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. Alors il n'y a pas de probabilité invariante.
2. $\mathbb{Q}$ est irréductible récurrent. En particulier $\forall x, y,\ N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s. Il existe des mesures invariantes (unique à un facteur près).
   (a) $\exists \nu$ une probabilité invariante. On dit que $\mathbb{Q}$ est *récurrent positif* et on a :
   $$\forall x,\ \mathbb{E}_x[\tilde{T}_x] = \frac{1}{\nu(x)}$$
   (b) Ces mesures invariantes vérifient $\mu(E) = +\infty$. On dit que $\mathbb{Q}$ est *récurrent nul.*
   $$\forall x,\ \mathbb{E}_x[\tilde{T}_x] = +\infty$$

**Preuve.**

1. Il n'y a pas de probabilité invariante dans le cas transitoire. En effet, si $\mu$ était une telle probabilité, sous $\mathbb{P}_\mu$, $X$ vérifie $\forall n,\ X_n \sim \mu$ :
   $$\underbrace{\mathbb{P}_\mu(X_n = y)}_{=\mu(y)} = \sum_x \mu(x)\mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_x \mu(x)\mathbb{E}_x[\underbrace{\mathbb{1}_{X_n=y}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0}] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{par TCD}$$
   Donc $\mu(y) = 0$ $\forall y$. Absurde.
2. Dans le cas récurrent, les mesures invariantes sont $\{\alpha\mu \mid \alpha > 0\}$ pour un certain $\mu$ qui vérifie $\mu(E) = +\infty$ (récurrent nul) ou $\mu(E) < +\infty$ (récurrent positif).

Soit $x \in E$, on sait que $\nu_x$ est invariante.

$$\begin{aligned}
\nu_x(E) &= \sum_{y \in E} \nu_x(y) \\
&= \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \left[ \sum_{n=0}^{\tilde{T}_x - 1} \mathbb{1}_{X_n = y} \right] \\
&\underset{\text{Fubini } \geqslant 0_x}{\mathbb{E}} \left[ \sum_{n=0}^{\tilde{T}_x - 1} 1 \right] \qquad \text{car } \sum_y \mathbb{1}_{X_n = y} = 1 \\
&= \mathbb{E}_x[\tilde{T}_x]
\end{aligned}$$

Si $\nu_x(E) = +\infty$ : cas récurrent nul, $\mathbb{E}_x[\tilde{T}_x] = +\infty$. Si $\nu_x(E) < +\infty$ : cas récurrent porifi, alors $\nu(y) = \frac{\nu_x(y)}{\nu_x(E)}$ est une probabilité invariante et :

$$\nu(x) = \frac{\nu_x(x)}{\nu_x(E)} = \frac{1}{\nu_x(E)} = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tilde{T}_x]}$$

$\square$

## 4.2 Exemples

**Exemple.** (urnes d'Ehrenfest)

$N$ particules entre deux pièces, $X_n$ est le nombre de particules à gauche à chaque étape, une particule prise au hasard change de pièce. Modèle équivalent venant de la physique $\nu = \mathcal{B}(N, 1/2)$ est une probabilité invariante, donc la chaîne est irréductible récurrente positive.

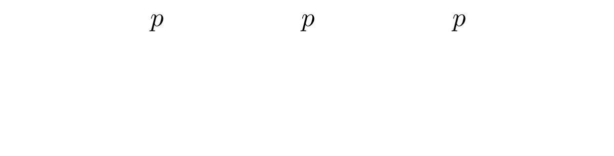
On retrouve l'idée que l'on ne verra jamais toutes les particules se rassembler dans la pièce de droite ($X_n = 0$). En effet le temps typique entre deux moments où la pièce de gauche est vide est :

$$\mathbb{E}_0[\tilde{T}_0] = \frac{1}{\nu(0)} = \frac{1}{\binom{N}{0}\frac{1}{2^N}} = 2^N$$

À comparer au temps typique qui sépare deux instants où il y a l'équilibre (supposons $N$ pair, $X_n = \frac{N}{2}$) :

$$\mathbb{E}_{\frac{N}{2}}[\tilde{T}_{\frac{N}{2}}] = \frac{1}{\nu\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{1}{\binom{N}{\frac{N}{2}}\frac{1}{2^N}} \sim \frac{\sqrt{\pi N}}{2} \ll 2^N$$

**Exemple.**



$E = \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(i, i+1) = p \\ \mathbb{Q}(i, i-1) = 1-p \\ \mathbb{Q}(i, j) = 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Si $0 < p < 1$, $\mathbb{Q}$ irréductible. Cherchons $\mu$ une mesure symétrique.

$$\mu(i)\mathbb{Q}(i, i+1) = \mu(i+1)\mathbb{Q}(i+1, i) \qquad \Rightarrow \qquad \mu(i)\frac{p}{1-p}\mu(i+1)$$

Donc :

$$\mu(i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \mu(0) \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z}$$

définit une solution. Le modèle étant invariant par translation on soupçonne que la mesure de comptage est invariante. Vérifions. On doit avoir $\mu_x(i) = \sum_j \mu_(j)\mathbb{Q}(j, i) = \mu_c(i-1)p + \mu_c(i+1)(1-p)$, ok puisque $1 = p + 1 - p$.

Pour $p \neq \frac{1}{2}$ on a donc deux mesures invariantes $\mu(i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i$ et $\mu_c$. Donc la chaîne est transitoire. On a donc pas toujours unicité des mesures invariantes.

**Exemple.**

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(i, i+1) = p_i \\ \mathbb{Q}(i, 0) = 1-p_i \\ \mathbb{Q}(i, j) = 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{Q}$ irréductible si $\forall i,\ 0 < p_i < 1$. Cherchons $\mu$ mesure invariante. Pour $i \geqslant 1$ on doit avoir $\mu(i) = \sum_j \mu(j)\mathbb{Q}(j, i) = \mu(i-1)p_{i-1}$. Donc :

$$\mu(i) = \mu(0) \times p_0 \times \ldots \times p_{i-1}$$

et pour $i = 0$ :

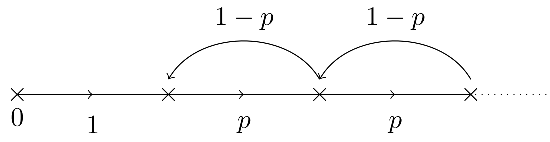
$$\begin{aligned} \mu(0) &= \sum_j \mu(j)\mathbb{Q}(j, 0) \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \mu(0) \times p_0 \times \ldots \times p_{i-1}(1-p_j) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \mu(0) \sum_{j=0}^{N} (p_0 \times \ldots \times p_{j-1} - p_0 \times \ldots \times p_j) \\ &= \mu(0) \lim_{N \to +\infty} (1 - p_0 \times \ldots \times p_N) \\ &= \mu(0) \left(1 - \prod_{i=0}^{+\infty} p_i\right) \end{aligned}$$

Si $\prod_{i=0}^{+\infty} p_i > 0$, par exemple $p_i = \exp\left(-\frac{1}{(1+i)^2}\right)$ ($\prod p_i = e^{-\frac{\pi^2}{6}} > 0$). Alors :

$$\mu(0) = \mu(0)\underbrace{\left(1 - \prod_0^{+\infty} p_i\right)}_{0 < \ . \ < 1}$$

Donc $\mu(0) = 0$, ainsi $\mu \equiv 0$. Donc il n'y a pas de mesure invariante, donc la chaîne est transitoire.

**Exemple.**




Marche biaisée avec un mur à gauche.

$$
\begin{cases}
\mathbb{Q}(0,1) = 1 \\
\mathbb{Q}(0,i) = 0 \text{ sinon} \\
\mathbb{Q}(i,i+1) = p \\
\mathbb{Q}(i,i-1) = 1-p \\
\mathbb{Q}(i,j) = 0 \text{ sinon}
\end{cases}
$$

Si $0 < p < 1$ $\mathbb{Q}$ est irréductible. Calculons les $\mu$ invariantes. Donc vérifient pour $i \geqslant 2$ :

$$(p + (1-p))\mu(i) = \mu(i-1)p + \mu(i+1)(1-p) \ \Rightarrow \ p(\mu(i) - \mu(i-1)) = (1-p)(\mu(i+1) - \mu(i))$$

donx $\mu(i+1) - \mu(i)$ suite géométrique de raison $\frac{p}{1-p}$. Alors :

$$\mu(i+1) - \mu(i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-1} (\mu(2) - \mu(1))$$

En $i = 0$ : $\mu(0) = (1-p)\mu(1)$. En $i = 1$ : $\mu(1) = \mu(0) + (1-p)\mu(2)$. En combinant on obtient :

$$\mu(2) - \mu(1) = \frac{\mu(1) - 2\mu(0)}{1-p}$$

Fixons $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \frac{1}{1-p}$.

$$
\begin{aligned}
\mu(i) &= \mu(1) + \sum_{j=1}^{i-1} \mu(j+1) - \mu(j) \\
&= \mu(1) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{j-1} (\mu(2) - \mu(1)) \\
&= \ldots = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i} \mu(0)
\end{aligned}
$$

- Si $p < \frac{1}{2}$, la géométrique (décalée de 1) de paramètre $\frac{p}{1-p}$ est invariante $\longrightarrow$ cas récurrent positif.
- Si $p = \frac{1}{2}$, la mesure de comptage est invariante, on est dans le cas récurrent nul car :

  $$(X_n)_n \overset{\mathcal{L}}{=} (|S_n|)_{n \in \mathbb{N}}$$

  où $S_n$ est la M.A.S. sur $\mathbb{Z}$.
- Si $p > \frac{1}{2}$ : cas transitoire. Tant qu'on ne trouve pas 0 la loi est la même que la marche biaisée sur $\mathbb{Z}$ qui a une probabilité $> 0$ de ne jamais toucher 0 et de partir à l'infini.

## 4.3 Comportement asymptotique

Comportement de $X_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Théorème 6** (limite des temps d'occupation)

$\mathbb{Q}$ irréductible récurrent (positif ou nul). Soit $\mu$ mesure invariante (unique à une constante multiplicative près). Soit $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors si $X$ est une C.M. de transition $\mathbb{Q}$ :

$$\frac{1}{n}\big(f(X_1)+\ldots+f(X_n)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \begin{cases} \int f(x)d\nu(x) & \text{si récurrent positif et } \nu \text{ proba invariante} \\ 0 & \text{si récurrent nul} \end{cases}$$

**Remarque.** Cas particulier : on se fixe $y \in E$ et $f(x) = \mathbb{1}_{x=y}$. Alors ce résultat dit :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{Card}\{1 \leqslant i \leqslant n \mid X_i = y\}}{n}}_{\text{“proportion du temps passsé en } y\text{”}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \begin{cases} \nu(y) & \text{si on est récurrent positif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque.** C'est une généralisation de la L.F.G.N. Si $\mu$ est une probabilité sur $\mathbb{R}$, $\mu$ discrète avec $\mu(\overline{A}) = 0$ pour $A$ dénombrable, avec $\int |x| d\mu(x) < +\infty$ et $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de v.a.i.i.d. $\sim \mu$. Alors $X = (X_i)_{i\geqslant 1}$ C.M. :

$$\mathbb{P}(X_1, \ldots, X_n = x_1, \ldots, x_n) = \prod \mu(\{x_i\})$$

donc c'est une C.M. de transition $\mathbb{Q}(x, y) = \mu(\{y\})$.
Le résultat sur cette chaîne de Markov et pour $f(x) = x$ redonne la L.F.G.N. On est dans le cas récurrent positif avec $\mu$ probabilité invariante.

**Remarques.**

- On peut supposer $f \geqslant 0$ dans un premier temps puis $f = (f_+ - f_-)$
- On va prouver le résultat sous la réalisation canonique et $\mathbb{P}_x$ p.s. Car si on a un événement $A$ qui est $\mathbb{P}_x$ p.s. $\forall x \in E$, on a :

$$\mathbb{P}_\mu(A) = \sum_x \mu(x) \underbrace{\mathbb{P}_x(A)}_{=1} = \sum_x \mu(x) = 1$$

  donc on aura $A$ $\mathbb{P}_\mu$ p.s. $\forall \mu$ probabilité sur $E$.

**Preuve.**
On travaille sous $\mathbb{P}_x$. On s'intéresse à :

$$\frac{1}{n}\Big(f(X_1) + \ldots + f(X_{\tilde{T}_x^n})\Big)$$

où $\tilde{T}_x^1 = \tilde{T}_x = \inf\{n > 0 \mid X_n = x\}$ et $\tilde{T}_x^p = \inf\{n > \tilde{T}_x^{p-1} \mid X_n = x\}$ le $p-$ième retour en $x$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\Big(f(X_1) + \ldots + f(X_{\tilde{T}_x^n})\Big) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=\tilde{T}_x^{k-1}+1}^{\tilde{T}_x^k} f(X_j)\right) \\ &= \frac{1}{n}\big(Y_1 + \ldots + Y_n\big) \end{aligned}$$

où $Y_k = \sum_{j=\tilde{T}_x^{k-1}+1}^{\tilde{T}_x^k} f(X_j)$ est la somme des valeurs de $f$ lors de la $k-$ième exploration.

Étudions la loi de $(Y_1, \ldots, Y_n, \ldots)$.
$E$ dénombrable, $f(E)$ dénombrable. $Y_i \in \Big\{ \sum$ finie d'éléments de $f(E) \Big\}$ dénombrable. On veut trouver $\mathbb{P}(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_x^1 &= t(X) \qquad \text{où } t(x_0, x_1, \ldots) = \inf\{n > 0 \mid x_n = x\} \\
\tilde{T}_x^p &= \inf\{n > \tilde{T}_x^{p-1} \mid X_n = x\} \\
&= \tilde{T}_x^{p-1} + \inf\{n > 0 \mid X_{\tilde{T}_x^{p-1}+n} = x\} \\
&= \tilde{T}_x^{p-1} + t(\theta^{\tilde{T}_x^{p-1}} X)
\end{aligned}$$

Et alors,

$$Y_1 = y(X) \qquad \text{où } y(x) = \sum_{j=1}^{t(x)} f(x_j)$$

$$Y_k = \sum_{j=\tilde{T}_x^{k-1}+1}^{\tilde{T}_x^k} f(X_j) = \sum_{j=\tilde{T}_x^{k-1}+1}^{\tilde{T}_x^{k-1}+t(\theta^{\tilde{T}_x^{k-1}} X)} f(X_j) \underset{j=\tilde{T}_x^{k-1}+j'}{=} \sum_{j'=1}^{t(\theta^{\tilde{T}_x^{k-1}} X)} f\big(\theta^{\tilde{T}_x^{k-1}} X\big) = y(\theta^{\tilde{T}_x^{k-1}} X)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\Big((Y_1, \ldots, Y_n) = y_1, \ldots, y_n\Big) \\
&= \mathbb{P}_x\left((Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_{n-1}),\ y(\theta^{\tilde{T}_x^{n-1}} X) = y_n,\ X_{\tilde{T}_x^{n-1}} = x,\ \tilde{T}_x^{n-1} < +\infty\right) \\
\text{Markov forte } &= \mathbb{P}_x\Big((Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_{n-1})\Big) \underbrace{\mathbb{P}_x\big(y(X) = y_n\big)}_{\mathbb{P}_x(Y_1 = y_n)} \\
\text{récurrence } &= \mathbb{P}_x(Y_1 = y_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_x(Y_1 = y_n)
\end{aligned}$$

Sous $\mathbb{P}_x$, les $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ sont des v.a. indépendantes et de même loi, elles sont de plus positives (car on a supposé $f \geqslant 0$). Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_1] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\tilde{T}_x} f(X_j)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{y \in E,\ 1 \leqslant j \leqslant \tilde{T}_x} \mathbb{1}_{X_j = y} f(y)\right] \\
&= \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\tilde{T}_x} \mathbb{1}_{X_j = y}\right]}_{\nu_x(y)} = \int f d\nu_x < +\infty \text{ car } f \in \mathcal{L}^1
\end{aligned}$$

Donc par la L.F.G.N. :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^n} f(X_j) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f d\nu_x \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

- Si on est dans le cas récurrent positif, on a en prenant $f = 1$ :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^n} 1}_{\frac{\tilde{T}_x^n}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int 1 d\nu_x = \nu(E) \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\exists N_p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\tilde{T}_x^{N_p-1} \leqslant p < \tilde{T}_x^{N_p}$$

Alors,

$$\frac{N_p - 1}{p} \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^{N_p-1}} f(X_j)}{N_p - 1}}_{\xrightarrow[N_p \to +\infty]{\mathbb{P}_x \text{ p.s.}} \int f d\nu_x} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} f(X_j) \leqslant \frac{N_p}{p} \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^{N_p}} f(X_j)}{N_p}}_{\xrightarrow[N_p \to +\infty]{\mathbb{P}_x \text{ p.s.}} \int f d\nu_x}$$

Comme $\frac{N_p}{p} \leqslant \frac{N_p}{N_p - 1} \frac{N_p - 1}{\tilde{T}_x^{N_p-1}} \sim \frac{1}{\nu_x(E)}$, on obtient que le membre de droite est $\sim \leqslant \int f d\nu$, idem à gauche. Par encadrement on a le résultat voulu.

- Cas récurrent nul. $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Fixons $l$. Prenons $f(x) = \mathbb{1}_{x \in \{e_1, \ldots, e_l\}} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^n} \mathbb{1}_{x \in \{e_1, \ldots, e_l\}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}_x \text{ p.s.}} \nu_x\big(\{e_1, \ldots, e_l\}\big)$$

Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g \geqslant 0$.

$$0 \leqslant \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} g(X_j) \leqslant \underbrace{\frac{N_p - 1}{p}}_{\leqslant \frac{N_p - 1}{\sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^{N_p-1}} f(X_j)} \sim \frac{1}{\int f d\nu_x}} \underbrace{\frac{N_p}{N_p - 1}}_{\sim 1} \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^{N_p}} g(X_j)}{N_p}}_{\xrightarrow[p \to +\infty]{} \int g d\nu_x}$$

car $\sum_{j=1}^{\tilde{T}_x^{N_p-1}} f(X_j) \leqslant \sum_{j=1}^{p} f(X_j) \leqslant p$ puisque $f \in \{0, 1\}$. Donc :

$$0 \leqslant \limsup \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} g(X_j) \leqslant \frac{\int g d\nu_x}{\nu_x\big(\{e_1, \ldots, e_l\}\big)} \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

Vrai pour tout $l$. En faisant tendre $l$ vers $+\infty$, $\nu_x\big(\{e_1, \ldots, e_l\}\big) \xrightarrow[l \to +\infty]{} \nu_x(E) = +\infty$. Donc le membre de droite $\xrightarrow[l \to +\infty]{} 0$. D'où le résultat.

□

**Limité en loi de** $X_n$. Problème :

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-q & 0 & q & 0 \\ 0 & 1-r & 0 & r \\ s & 0 & 1-s & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de convergence en loi $\mathbb{P}(X_n \in \{1, 3\}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$ .

**Définition 14** (période)

Si $\mathbb{Q}$ est irréductible. Si $x \in E$, les *périodes de* $x$ sont :

$$\mathcal{P}_x = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathbb{Q}^n(x,x) > 0\}$$

Comme $\mathbb{Q}^{n+m}(x,x) \geqslant \mathbb{Q}^n(x,x)\mathbb{Q}^m(x,x)$ on a :

$$\underbrace{\mathcal{P}_x + \mathcal{P}_x}_{\text{somme des éléments de } \mathcal{P}_x} \subset \mathcal{P}_x$$

$\mathcal{P}_x - \mathcal{P}_x$ est un groupe $= d_x\mathbb{Z}$ avec $d_x \in \mathbb{N}^*$. On appelle ce $d_x$ la *période* de $x$.

**Propriété 11**

- $d_x = \text{pgcd}(\mathcal{P}_x)$
- $d_x$ ne dépend pas de $x$
- si $d = d_x = 1$ on dit que la chaîne est *apériodique* et alors :

$$\forall x, y,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{Q}^n(x,y) > 0$$

**Preuve.**

- $d_x\mathbb{Z} = \mathcal{P}_x - \mathcal{P}_x$. Si $p \in \mathcal{P}_x,\ p + p \in \mathcal{P}_x$ donc $2p - p \in \mathcal{P}_x - \mathcal{P}_x$. Ainsi $\mathcal{P}_x \subseteq d_x\mathbb{Z}$. $d_x$ divise donc tous les éléments de $\mathcal{P}_x$. Et si $q$ divise tous les éléments de $\mathcal{P}_x$ alors il divise ceux de $\mathcal{P}_x - \mathcal{P}_x = d_x\mathbb{Z}$, donc $q|d_x$. Alors $d_x = \text{pgcd}(\mathcal{P}_x)$.
- $\forall x, y,\ x \leftrightsquigarrow y$ donc $\exists p, q$ tels que $\mathbb{Q}^p(x,y) > 0$ et $\mathbb{Q}^q(y,x) > 0$. Si $n \in \mathcal{P}_x$ : $\mathbb{Q}^n(x,x) > 0$.

$$0 < \mathbb{Q}^q(y,x)\mathbb{Q}^n(x,x)\mathbb{Q}^p(x,y) \leqslant \mathbb{Q}^{n+p+q}(y,y)$$

  Donc $n + p + q \in \mathcal{P}_y$. Donc $\mathcal{P}_x + p + q \subseteq \mathcal{P}_y$. Par différence, $d_x\mathbb{Z} \subseteq d_y\mathbb{Z}$ et donc $d_y|d_x$. Par symétrie $d_x = d_y$.
- 
  - Pour $x = y$. $d_x = 1 = p - q$ où $p, q \in \mathcal{P}_x$. Si $n \geqslant q^2$,

$$n = q^2 + \underbrace{\alpha q + r}_{\text{div euc par } q} = q^2 + \alpha q + r(p-q) = q\underbrace{(q-r)}_{\geqslant 0} + \alpha q + rp$$

    Alors :

$$\mathbb{Q}^n(x,x) \geqslant (\mathbb{Q}^q(x,x))^{q-r} \times (\mathbb{Q}^q(x,x))^{\alpha} \times (\mathbb{Q}^p(x,x))^r > 0$$

  - Pour $x \neq y$ :

$$\mathbb{Q}^n(x,y) \underset{\text{pour } n \geqslant p}{\geqslant} \underbrace{\mathbb{Q}^p(x,y)}_{>0 \text{ pour } p \text{ bien choisit}} \times \underbrace{\mathbb{Q}^{np}(y,y)}_{>0 \text{ pour } n \text{ assez grand}}$$

$\square$

**Théorème 7**

Si $\mathbb{Q}$ irréductible récurrent positif de probabilité invariante $\nu$ et $\mathbb{Q}$ apériodique, alors si $X$ C.M. de transition $\mathbb{Q}$ :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \nu \quad \text{et même} \sum_{y\in E} \left|\mathbb{P}(X_n = y) - \nu(y)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

**Preuve.**
On va définir $Z$ et $Y$ deux C.M. de transition $\mathbb{Q}$ telles que $Z$ a même loi que $X$ et $Y_n \sim \nu\ \forall n$ et si $T = \inf\{n \mid Z_n = Y_n\}$ alors $(Z_n = Y_n\ \forall n \geqslant T)$ p.s.

1. Montrons que si $T < +\infty$ p.s. alors c'est bon :

$$\begin{aligned}
&\sum_{y\in E} \left|\mathbb{P}(X_n = y) - \nu(y)\right| = \sum_{y\in E} \left|\mathbb{P}(Z_n = y) - \mathbb{P}(Y_n = y)\right| \\
&= \sum_{y\in E} \left|\mathbb{P}(Z_n = y, T \leqslant n) + \mathbb{P}(Z_n = y, T > n) - \mathbb{P}(Y_n = y, T \leqslant n) - \mathbb{P}(Y_n = y, T > n)\right| \\
&= \sum_{y\in E} \left|\mathbb{P}(Z_n = y, T > n) - \mathbb{P}(Y_n = y, T > n)\right| \\
&\leqslant \sum_{y\in E} \mathbb{P}(Z_n = y, T > n) + \mathbb{P}(Y_n = y, T > n) \\
&= 2\mathbb{P}(T > n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } T < +\infty \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

2. Construction de $Z, Y$.

Soient $(\xi^2_{n,y})_{y\in E, n\geqslant 1}$ et $(\xi^Y_{n,y})_{y\in E, n\geqslant 1}$, $\xi^2_0$, $\xi^Y_0$ v.a. indépendantes à valeurs dans $E$ avec :

$$\xi^Y_0 \sim \nu \qquad \text{et} \qquad \xi^Y_{x,y} \sim \mathbb{Q}(y,\cdot)$$
$$\xi^2_0 \sim \mu_{X_0} \qquad \text{et} \qquad \xi^Z_{x,y} \sim \mathbb{Q}(y,\cdot)$$

Posons :

$$\begin{cases} Y_0 = \xi^Y_0 \\ \\ Y_n = \xi^Y_{n,Y_{n-1}} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_0 = \xi^Z_0 \\ \\ Z_n = \begin{cases} \xi_{n,Z_{n-1}} & \text{si } Z_{n-1} \neq Y_{n-1} \\ \xi^Y_{n,Z_{n-1}} & \text{si } Z_{n-1} = Y_{n-1} \end{cases} \end{cases}$$

On a $Y$ C.M. de transition $\mathbb{Q}$ et de mesure initiale $\nu$. La définition de $Z$ force $Z_n = Y_n\ \forall n \geqslant T$. On montre (à faire en exercice) que $Z$ C.M. de transition $\mathbb{Q}$ qui a la même loi que $X$.

3. Montrons que $T < +\infty$ p.s. On doit montrer que deux C.M. de transition $\mathbb{Q}$ indépendantes $Y$ et $Z$ se rencontrent p.s. ($Y$ et $Z$ non indépendants mais ils le sont jusqu'à leur rencontre). Faisons comme s'ils étaient indépendants.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big((Z_0, Y_0), \dots, (Z_n, Y_n) = (x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)\big) \\
&= \mathbb{P}(Z_0, \dots, Z_n = x_0, \dots, x_n)\mathbb{P}(Y_0, \dots, Y_n = y_0, \dots, y_n) \\
&= \mathbb{P}\big((Z_0, Y_0) = (x_0, y_0)\big) \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{Q}(x_i, x_{i+1})\mathbb{Q}(y_i, y_{i+1})
\end{aligned}$$

Donc $(Z_n, Y_n)$ C.M. sur $E \times E$ de transition $\tilde{\mathbb{Q}}\big((x,y),(x',y')\big) = \mathbb{Q}(x,x')\mathbb{Q}(y,y')$. Pour $n$ assez grand :

$$\tilde{\mathbb{Q}}^n\big((x,y),(x',y')\big) = \underbrace{\mathbb{Q}^n(x,x')}_{>0 \text{ par apériodicité}} \underbrace{\mathbb{Q}^n(y,y')}_{\text{idem}} > 0$$

Donc $\tilde{Q}$ est irréductible.

$$\begin{aligned}
\big(\nu \otimes \nu \cdot \tilde{\mathbb{Q}}\big)(x,y) &= \sum_{x',y'} \nu(x')\nu(y')\tilde{\mathbb{Q}}\big((x',y'),(x,y)\big) \\
&= \sum_{x'} \nu(x')\mathbb{Q}(x',x) \sum_{y'} \nu(y')\mathbb{Q}(y',y) \\
&= \nu(x)\nu(y) = (\nu \otimes \nu)(x,y)
\end{aligned}$$

$\nu \otimes \nu$ probabilité qui est $\tilde{\mathbb{Q}}$ invariante donc $\tilde{\mathbb{Q}}$ récurrent positif donc si $x \in E$ $T = \inf\{n \mid Y_n = Z_n\} \leqslant \inf\{n \mid (Y_n, Z_n) = (x,x)\} < +\infty$ p.s. (car $\tilde{\mathbb{Q}}$ récurrent positif).

$\square$