Équations aux dérivées partielles

Chapitre 2 : Schémas aux différences finies, équation d'advection

Lucie Le Briquer

Sommaire

Exercice 1.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Montrons que $u_n \to \sqrt{2}$ et que le nombre de décimales de u_n double à chaque itération.

1 Méthode des différences finies

Dans le cadre de ce cours, on va discrétiser des problèmes continus. Néanmoins, en pratique dans la recherche, il est plus intéressant de rendre continu un problème discret.
Reprenons l'équation d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

On considère un maillage du plan caractérisé par Δx et Δt. Discrétisons les termes de (1)
Schéma aux différences finies (SDF) :

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + c\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} = 0 \qquad \text{(décentré à droite)} \tag{2}$$

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + c\frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad \text{(décentré à gauche)} \tag{3}$$

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + c\frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{(centré)} \tag{4}$$

La pire des trois méthodes ci-dessus est la méthode centrée : son exécution algorithmique se fait en $O(\Delta t + \Delta x^2)$ alors que les méthodes décentrées s'exécutent en $O(\Delta t + \Delta x)$.
En pratique, on utilisera :

- la décentrée à gauche (3) quand $c \leq 0$, appelée *décentrement amont* ou *upwind*
- la décentrée à droite (2) quand $c \geq 0$
- la centrée (4) quand $c = 0$

D'autres méthodes :

$$\text{Saute-Mouton (Leap Frog)} \qquad \frac{V_j^{n+1} - V_j^{n-1}}{\Delta t} + c\frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{5}$$

$$\text{Lax-Friedrichs} \qquad \frac{V_j^{n+1} - \frac{V_{j+1}^n + V_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c\frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{6}$$

Cette dernière méthode étant difficile en pratique.

Les schémas (3), (2), (4), (6) s'écrivent sous forme barycentrique :

$$V_j^{n+1} = \alpha V_{j-1}^n + \beta V_j^n + \gamma V_{j+1}^n \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

α, β, γ fonctions de $c, \Delta t, \Delta x$.

2 Convergence, consistance

Soit $u(t,x)$ solution d'une EDP linéaire et $P(T,X) = \sum_{i,j=0}^n T^i X^j$.
On s'intéresse à :

$$P(\partial t, \partial x)u = f \tag{7}$$

Si on reprend l'équation (1), on a $P(T,X) = T + cX$.

Définition 1 (schéma convergent)

Un schéma à un pas de temps approchant l'EDP (7) est *convergent* si pour tout u solution de (7) et (V_j^n) solution du schéma vérifiant :

$$V_j^0 \underset{jh \to x}{\longrightarrow} u(0,x)$$

On a

$$V_j^n \underset{nk \to t\ jh \to x}{\longrightarrow} u(t,x)$$

Rappels.

- $h \sim \Delta x$ et $k \sim \Delta t$
- schéma aux différences finies : $V_j^{n+1} = H((v_{j-m}^n)_{m \in \mathbb{Z}})$ où $\exists\ r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$V_j^{n+1} = H((v_{j-r}^n, ..., v_{j+r}^n))$$

Définition 2 (schéma consistant)

Soit une équation de type (7) et $P_{h,k}(v) = g$ un SDF. On dit que le schéma est *consistant* avec l'EDP si $\forall \phi$ fonction régulière de x et de t on a :

$$P(\partial t, \partial x)\phi - P_{h,k}\phi \longrightarrow 0$$

en chaque point de la grille lorsque $(h,k) \longrightarrow 0$

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{k} + c\frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{h} = f(jh, nk)$$

Supplément au chapitre 1.

On étudie les équations de Burgers généralisées :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Toutes les caractéristiques sont des droites, et la solution y est constante. Les droites peuvent néanmoins se croiser : cf TD1. On est dans une situation où, si l'on prend un point, on veut déterminer qui est le "père" de ce point (i.e. de quelle droite est issu ce point).

Pourtant, on ne peut pas choisir si facilement si on prend un point d'intersection de deux droites : *il n'y a pas de solution au sens classique.*

Que faire ? En pratique, on peut utiliser un SDF.

Exemple.

$$\begin{cases} \frac{d\xi(t)}{dt} = \sin(\xi(t)) \\ \xi(0) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Donc $\xi(t) = 1 + \int_0^t \sin(\xi(s))ds$

On pose alors $\Phi(\eta)(t) = 1 + \int_0^t \sin(\eta(s))ds$ et on se ramène à l'étude des points fixes de Φ, c'est-à-dire trouver $\eta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\Phi(\eta) = \eta$

On peut chercher une solution dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette méthode est pertinente car elle offre des solutions. Néanmoins :

- si l'espace est trop large, on perd
- si l'espace est trop restreint, on perd la solution

On peut penser à utiliser une suite d'itérées de Φ et se servir du critère de Cauchy pour montre une convergence simple sur la suite de fonctions (le critère de Cauchy apporte la *stabilité* pour obtenir la convergence).

Il nous faut également la *consistance* de la solution : on va se servir de Taylor pour cela.

Exemple.

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + c\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} = 0$$

$$\text{Si} \quad A = \frac{\Phi(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - \Phi(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + c\frac{\Phi((j+1)\Delta x, \Delta t) - \Phi(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x}$$

$$\text{Alors} \quad A = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta t) + c\frac{\partial \Phi}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta x)$$

Par développement de Taylor.
Donc la différence est en $O(k + ch)$. Et dans le cas du chemin centré on aura même un $O(k + h^2)$
On dit que le schéma de droite est d'ordre 1 en espace et en temps.
On dit que le schéma centré est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Remarque.
On n'a pas consistance $\Rightarrow$ convergence

Propriété 1

Prenons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad c > 0$$

Et le schéma :

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + c\frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta x} = 0$$

La schéma est consistant (d'ordre 1) avec l'EDP et non convergent.

Preuve.
On prend u^0 la fonction égale à 1 sur $[-1,0]$ et nulle ailleurs. On pose $V_j^0 = u^0(j\Delta x)$: la condition de définition de la convergence est satisfaite.
Lemme : $V_j^n = 0$ pour $j \geq 0$, $n \geq 0$ (se prouve par récurrence sur n)

$$u(x,t) = u^0(x-ct) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ -1 < x - ct < 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On n'a donc pas la convergence. Néanmoins, si on rajoute la stabilité, on peut aboutir à la convergence. □

3 Stabilité

Soit (v_j^n) une suite de suite. On pose $V^0 = (v_j^0)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $V^n = (v_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$. $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans un espace de suite, mettons L^2 par exemple (espace des suites $(a_n)_n$ telles que $\sum_n |a_n^2|$ converge). Cet espace est intéressant puisqu'on peut le munir d'un produit scalaire et en faire un espace de Hilbert.

Définition 3 (stabilité d'une équation du premier ordre en temps)

$P_{k,h}(v_j^n) = 0$ pour une équation du premier ordre en temps. Elle est *stable* si :

$$\exists M \in \mathbb{N},\ h_0 > 0,\ k_0 > 0 \text{ tq } \forall T > 0,\ \exists C, h \ : \sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j^n|^2 \leq Ch \sum_{m=0}^{M} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j^m|^2$$

Pour $h \leq h_0, k \leq k_0, nk \leq T$, on pose :

$$\|(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}\| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j|^2$$

Remarque.
On définit un *schéma* $P_{k,h}$ comme étant une application linéaire sur les suites.

$$P_{h,k}(\phi)_j^n = \phi(n\Delta t, j\Delta x)$$

Exemples.
$v_j^{n+1} = \alpha v_j^n + \beta v_{j+1}^n$
C'est un schéma décentré à droite : $\alpha = 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ et $\beta = -\frac{c\Delta t}{\Delta x}$

$$h \sum_j |v_j^{n+1}|^2 \leq h \left(|\alpha|^2 \sum_j |v_j^n|^2 + |\beta|^2 \sum_j |v_j^n|^2 + 2|\alpha\beta| \sum_j |v_j^n v_{j+1}^n| \right)$$

Donc,

$$h\sum_j |v_j^{n+1}|^2 \leq h(|\alpha|+|\beta|)^2 \sum_j |v_j^n|^2$$

- si $c>0$, $|\alpha|+|\beta|>1$
- si $c<0$, $|\alpha|+|\beta|<1$ ce qui équivaut à $-\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

4 Théorème de Lax-Richtmyer

Théorème 2 (Lax-Richtmyer)

Un SDF consistant avec une EDP dont le problème de Cauchy est bien posé est convergent si et seulement si il est stable

Corollaire 3

consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence

consistance + convergence $\Rightarrow$ stabilité

FAUX : consistance + stabilité $\Leftarrow$ convergence

Remarque.
Il existe des schémas convergents, stables et non consistants.

5 Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Cours du 27 février

Définition 4 (SDF linéaire)

- *explicite* :

$$\exists r \; v_j^{n+1} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{j+k,j} v_{j+k}^n$$

- *(pré-)schéma implicite* :

$$\sum_{l=-r}^{r} \beta_{j+l} v_{j+k,j}^{n+1} + \sum_{k=-r}^{r} \alpha_{j+k,j} v_{j+k}^n = 0$$

Remarque.
Appelé pré-schéma puisque rien ne garantit que la matrice est inversible, donc ni l'existence, ni l'unicité d'une solution pour les v_j^{n+1}. En effet, le pré-schéma implicite se réécrit :

$$V^n = (v_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$$

$$L_1 V^{n+1} + L_2 V^n = 0$$

L_1 inversible ? $\Rightarrow$ conditions sur les $B_{i,j}$.

Remarque.
Schémas du $p^{\text{ième}}$ ordre en temps :

$$\sum_{q=0}^{p} L_q V^{n+q} = 0$$

Schéma explicite linéaire :

$$v_j^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{im} v_{m+j}^{n-i}$$

avec pour chaque i fixé $\{m | \alpha_{im} \neq 0\}$ est fini.

Théorème 4 (CFL)
Un schéma convergent pour $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ de la forme :

$$v_j^{n+1} = \alpha v_{j-1}^n + \beta v_j^n + \gamma v_{j+1}^n$$

avec $\frac{k}{h}$ constant n'est stable que si :

$$\left| a\frac{k}{h} \right| \leq 1$$

Dans notre schéma, on peut faire apparaître deux quantités : les cônes de dépendance physique et numérique. Le premier découle de l'équation différentielle étudiée : en un point $u(h\Delta x, k\Delta t)$ les pentes du cône (du triangle ici) sont $\frac{1}{|a|}, \frac{-1}{|a|}$.
Le second cône dépend des paramètres du maillage : en un point $u(h\Delta x, k\Delta t)$ les pentes du cône (du triangle ici) sont $\frac{k}{h}, \frac{-k}{h}$.

Lemme 5
Pour qu'il y ait convergence, il faut que le cône de dépendance physique soit inclus dans le cône de dépendance numérique.

6 Analyse de Von Neumann

On effectue les remplacements suivants dans notre schéma :

$$\begin{aligned}
v_j^n &\longrightarrow 1 \\
v_{j+1}^n &\longrightarrow e^{i\theta} \\
v_{j-1}^n &\longrightarrow e^{-i\theta} \\
v_j^{n+1} &\longrightarrow g \\
v_{j+j_0}^{n+n_0} &\longrightarrow e^{ij_0\theta} g^{n_0}
\end{aligned}$$

avec $g(\theta)$ une solution. On obtient une relation linéaire entre les puissances de g et θ.

Définition 5 (stabilité de Von Neumann)

Le schéma est stable au sens de Von Neumann si toutes les solutions vérifient :

$$|g(\theta)| \leq 1 \quad \forall \theta$$

7 Annexe : Transformée de Fourier

C'est une application qui transforme une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ en une autre fonction :

$$f \longrightarrow \widehat{f}$$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty$. Et alors :

$$f(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dx$$

La transformée de Fourier discrète d'une fonction périodique de période P f va associer une suite de points définis par :

$$\widehat{f_n} = \int_{-P/2}^{P/2} f(x) e^{-inx} dx$$

On peut songer avec nos SDF, à la transformation inverse :

$$(v_j)_{j\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \widehat{v}(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j e^{-ijh\xi}$$

Et alors, on a :

$$v_j = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{v}(\xi) e^{ijh\xi} d\xi$$

Propriété 6

- isométrie : $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$
- $\mathcal{F}(f)(x+a) = e^{iax}\mathcal{F}(f)(x)$

Remarque.
On note $f(x+a) = \tau_a f$

8 Théorie des polynômes de Schur

Cours du 6 mars

Définition 6 (polynôme de Schur/ de VN)

On pose $\phi = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$. ϕ est un polynôme :
- de Schur si toutes ses racines (notées r_l) vérifient $|r_l| < 1$
- de Von Neumann si toutes ses racines (notées r_l) vérifient $|r_l| \leq 1$
- de Von Neumann simple si toutes ses racines sur le cercle unité sont simples

On pose :

$$\phi^*(z) = z^d \overline{\phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \sum_{l=0}^{d} \overline{a_{d-l}} z^l$$

Posons ϕ_0 un polynôme. On définit alors la suite de Schur de ϕ_0 par :

$$\forall j, \quad \phi_{j+1} = \frac{\phi_j^*(0)\phi_j(z) - \phi_j(0)\phi_j^*(z)}{z}$$

Théorème 7

ϕ_j est un polynôme de Schur de degré exact d si et seulement si :

$$\phi_{j-1} \text{ est un polynôme de degré exact } d-1 \text{ et } |\phi_j(0)| \leq |\phi_j^*(0)|$$

Théorème 8

ϕ_j est un polynôme de Von Neumann simple si et seulement si :
- soit ϕ_{j-1} est un polynôme de Von Neumann simple et $|\phi_j(0)| < |\phi_j^*(0)|$
- soit ϕ_{j-1} est congru à 0 et ϕ_j' est un polynôme de Schur

Théorème 9

Soient ϕ et ψ deux fonctions analytiques à l'intérieur d'une courbe C telles que :

$$|\phi(z) - \psi(z)| < \psi(z) \quad \forall z \in C$$

Alors ϕ et ψ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.