# **Analyse -** TD5

Lucie Le Briquer

19 octobre 2017

**Exercice 1 - Espace $\mathcal{H}^1(\Omega)$**

$$u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad u \in L^2(\Omega) \text{ et } \exists v_i \in L^2(\Omega), \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),\ \int_\Omega u\partial_i\varphi = -\int_\Omega v_i\varphi$$

On note $v_i = \partial_i u$.

1. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \forall i \in [\![1,d]\!],\ \|\partial_i f_n - \partial_i f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

2. Montrons que $\mathcal{C}_c^1(\Omega) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$. Si $f \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ on a bien $f \in L^2(\Omega)$ puisque le support de $f$ est compact. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, en notant $\partial_i f$ les dérivées classiques de $f$, on a :

$$\int_\Omega (\partial_i f)\varphi = -\int_\Omega f(\partial_i\varphi) \quad \text{par IPP + pas de terme de bord}$$

Donc $(\partial_i f)$ est aussi la dérivée au sens faible. Et $\partial_i f \int \mathcal{C}_c(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Donc $f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$.

3. Montrons que $\mathcal{H}^1(\Omega)$ est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Comme :

$$\|f_n - f_m\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \|f_n - f_m\|_2^2 + \sum_{i=1}^d \|\partial_i f_n - \partial_i f_m\|_2^2$$

Donc $(f_n)$ de Cauchy dans $L^2$, et $(\partial_i f_n)$ de Cauchy dans $L^2$. Comme $L^2$ est complet, $\exists f \in L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \text{ dans } L^2 \qquad \partial_i f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_i \text{ dans } L^2$$

Il reste à vérifier que $\partial_i f = g_i$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega f_n\partial_i\varphi = -\int_\Omega (\partial_i f_n)\varphi$$

Or,

$$\int_\Omega f_n\partial_i\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega f\partial_i\varphi \quad \text{par continuité du produit scalaire}$$

$$\int_\Omega f_n\partial_i\varphi \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega g_i\varphi \quad \text{par continuité du produit scalaire}$$

(Cauchy-Schwarz : $|\int(f-f_n)\partial_i\varphi| \le \|f-f_n\|_2\|\partial_i\varphi\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

4. Soit $u\colon x \mapsto |x|$ sur $\mathcal{H}^1(]-1,1[)$. $u \in L^2(]-1,1|)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,1[)$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \quad \text{puisque les termes de bord s'annulent} \\ &= -\int_{-1}^{0} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

et $\operatorname{sgn} \in L^2(]-1,1[)$.

**Exercice 2 - Espaces de Sobolev en dimension 1**

1. Si $f \in \mathcal{C}^1(I) \cap L^p(I)$ et $f' \in L^p(I)$ (dérivée au sens fort). Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, en particulier $\varphi$ est à support compact $[c,d] \subset I$.

$$\int_I f\varphi' = \int_c^d f\varphi' = -\int_c^d f'\varphi = -\int_I f'\varphi$$

Comme $f' \in L^p(I)$, $f \in \mathcal{W}^{1,p}(I)$.

2. (a) $f(x) = x + |x|$ sur $]-1,1[$. $f \in L^p$ $\forall p \in [1,+\infty]$ et $f'(x) = 1 + \operatorname{sgn}(x)$ (dérivée faible, cf Exercice 1), donc $f' \in L^p$. Ainsi $\mathcal{W}^{1,p}(]-1,1[)$.

   (b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \varphi'(x)f'(x)dx &= \underbrace{\int_{-1}^{1} \varphi'(x)dx}_{=0 \text{ car supp cpct}} + \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\varphi'(x)dx \\ &= -2\varphi(0) = -2\delta_0(\varphi)\end{aligned}$$

A priori $f'' = 2\delta_0$. Mais $2\delta_0 \notin L^p$. Car, si $\exists g \in L^p$ tel que $g = 2\delta_0$, on aurait :

$$\forall \varphi \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_I g\varphi = 2\varphi(0)$$

En considérant $(\varphi_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ avec $\operatorname{supp}\varphi_n \in \mathcal{B}(0,1/n)$ ete $\varphi_n(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Par exemple $f(x) = \frac{1}{\exp(1)} \exp\left(\frac{1}{1-|t|^2}\right)$ et $\varphi_n(x) = f(nx)$, on a $\varphi_n(0) = 1 = \|\varphi_n\|_\infty$. Alors par le théorème de convergence dominée $\int_I g\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pourtant $\int_I g\varphi_n = \varphi_n(0) = 1$. Absurde. Donc $2\delta_0 \notin L^p$.

3. Soit $a \in I$. Posons $g(x) = \int_a^x f'(t)dt$. Montrons que $g$ est bien définie, continue et que $g'$ (dérivée au sens faible) est bien $f'$.

   – $x \in I$,

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &= \int_I f'(t)\mathbb{1}_{]a,x[}(t)dt \\ &\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f'\|_p \|\mathbb{1}_{]a,x[}\|_q \quad \text{pour } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

– Montrons que $g$ est continue.

$$\begin{aligned}
|g(x)-g(y)| &= \left|\int_x^y f'(t)dt\right| \\
&\leq \int_I |f'(t)|\mathbb{1}_{]x,y[}(t)dt \\
&\leq \|f'\|_p\|\mathbb{1}_{]x,y[}\|_q \qquad\qquad = \|f'\|_p\left(\int_x^y dt\right)^{1/q} \quad \text{avec } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\
&\leq \|f'\|_p|x-y|^{1/q}
\end{aligned}$$

Donc $g$ est $\frac{1}{q}$-Hölderienne, donc continue. Donc $g$ est continue sur $I$. Tout le raisonnement précédent reste vrai dans $\overline{I}$. Donc $g \in \mathcal{C}(\overline{I})$

– Montrons que la dérivée au sens faible de $g$ est $f'$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.

$$\begin{aligned}
\int_I g((x)\varphi'(x)dx &= \int_I \int_a^x f'(t)dt\varphi'(x)dx \\
&= \int_I \int_a^x f'(t)\varphi'(x)dtdx \\
&= \int_{I\cap]a;+\infty[} \int_{I\cap]a;+\infty[} f'(t)\varphi'(x)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)dtdx \\
&\quad - \int_{I\cap]-\infty;a[} \int_{I\cap]-\infty;a[} f'(t)\varphi'(x)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)dtdx \quad \text{Fubini} \\
&= \int_{I\cap]a;+\infty[} \left(\int_{I\cap]a;+\infty[} \varphi'(x)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)dx\right) f'(t)dt \\
&\quad - \int_{I\cap]-\infty;a[} \left(\int_{I\cap]-\infty;a[} \varphi'(x)\mathbb{1}_{[a,x]}(t)dx\right) f'(t)dt \quad \text{comme } \mathbb{1}_{[a,x]}(t) = \mathbb{1}_{[t,+\infty[}(x) \\
&= \int_{I\cap]a;+\infty[} \left(\int_{I\cap]t;+\infty[} \varphi'(x)dx\right) f'(t)dt \\
&\quad + \int_{I\cap]-\infty;a[} \left(\int_{I\cap]-\infty;t[} \varphi'(x)dx\right) f'(t)dt \\
&= -\int_{I\cap]a;+\infty[} \varphi(t)f'(t)dt - \int_{I\cap]-\infty;a[} \varphi(t)f'(t)dt
\end{aligned}$$

Donc $g = f'$. Or si deux fonctions on les mêmes dérivées faibles alors elles sont égales p.p. (lemme à montrer).