Optimisation et optimisation numérique
TD 1

Lucie Le Briquer

9 janvier 2018

Exercice 1 (conditions de convexité)

1. Si f est convexe, $\forall x, y \in C$, $\forall t \in [0,1]$:
$$\underbrace{f(ty+(1-t)x)}_{f(x+t(y-x))} \leqslant tf(y)+(1-t)f(x)$$
Donc pour $t \neq 0$:
$$\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t} \leqslant f(y)-f(x)$$
Alors en faisant tendre t vers 0 :
$$f'(x)(y-x) \leqslant f(y)-f(x)$$
par définition de la différentielle.

Réciproqueent, soient $x, y \in C$ et $\in [0,1]$.
$$\begin{aligned} f(x)-f(tx+(1-t)y) &\geqslant f'(tx+(1-t)(y))((1-t)(x-y)) \\ &= (1-t)f'(tx+(1-t)y)(x-y) \end{aligned}$$
$$f(y)-f(tx+(1-t)y) \geqslant -tf'(tx+(1-t)(y))(x-y)$$
Donc :
$$tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y) \geqslant 0$$

2. Supposons f strictement convexe. Soient $x, y \in C$. Posons $\gamma(t) = f((1-t)x+ty)$. γ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$:
$$\gamma'(t) = f'((1+t)x+ty)(y-x)$$
Donc on veut $\gamma(1) > \gamma(0)+\gamma'(0)$. Montrons que γ est strictement convexe. Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 \neq t_2$. Soient $u \in]0,,1[$.
$$\begin{aligned} \gamma(ut_1+(1-u)t_2) &= f\Big((1-ut_1+(1-u)t_2)x+(ut_1+(1-u)-t_2)y\Big) \\ &= f\Big(u(t_1y+(1-t_1)x)+(1-u)(t_2y+(1-t_2)x)\Big) \\ &< uf\big(t_1y+(1-t_1)x\big)+(1-u)f\big(t_2y+(1-t_2)x\big) \\ &= u\gamma(t_1)+(1-u)\gamma(t_2) \end{aligned}$$

Donc γ est strictement convexe. Ainsi :

$$\gamma(1)-\gamma(0)=\int_0^1 \gamma'(t)dt > \int_0^1 \gamma'(0)dt=\gamma'(0)$$

Exercice 2 (propriétés des convexes)

1. Supposons f convexe ; Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in \mathrm{epi}(f)$, $y_1 \geqslant f(x_1)$ et $y_2 \geqslant f(x_2)$.

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant (1-t)f(x_1)+tf(x_2)\leqslant (1-t)y_1+ty_2$$

Donc :

$$(1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)=\big((1-t)x_1+ty_2,(1-t)x_2+ty_2\big)\in \mathrm{epi}(f)$$

Réciproquement, soient $(x_1,x_2)\in E^2$. On a $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))\in \mathrm{epi}(f)$ qui est convexe, donc $\forall t\in[0,1]$:

$$\big((1-t)x_1+tx_2,(1-t)f(x_1)+tf(x_2))\in \mathrm{epi}(f)$$

ce qui donne l'inégalité de convexité.

2. Soient $(x,y)\in E^2,\ t\in[0,1]$, $\forall x\in I$:

$$\begin{aligned} f_i\big((1-t)x+ty\big) &\leqslant (1-t)f_i(x)tf_i(y)\\ &\leqslant (1-t)\sup_{i\in I} f_i(x)+t\sup_{i\in I} f_i(y)\end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{i\in I} f_i\big((1-t)x+ty\big)\leqslant (1-t)\sup_{i\in I} f_i(x)+t\sup_{i\in I} f_i(y)$$

Exercice 3 (fonctions semi-continues inférieurement)

$(a)\Rightarrow(b)$: f s.c.i., $\lambda\in\mathbb{R}$, $O=\{x\in E,\ f(x)>\lambda\}$. Soit $x\in O$, $f(x)>\lambda$, prenons $\varepsilon:=\frac{f(x)-\lambda}{2}$. f est s.c.i. donc il existe un ouvert U contenant x tel que :

$$\inf_U f\geqslant f(x)-\varepsilon=\frac{f(x)+\lambda}{2}>\lambda$$

Donc $\forall x'\in U,\ f(x')>\lambda$. $U\subset O$ donc O est ouvert.

$(b)\Rightarrow(c)$:

$$\mathrm{epi}(f)=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}\mid f(x)\leqslant y\}$$
$$O_y=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}\mid f(x)>y\}$$

Soient $x,y\in O,\ f(x)>y,\ \varepsilon:=\frac{f(x)-y}{2}$. $f(x)>y+\varepsilon=\frac{f(x)+y}{2}$ donc $x\in O_{y+\varepsilon}$. Il existe U ouvert contenant x, $U\subset O$. $\forall x'\in U,\ f(x')>y+\varepsilon$, $\forall(x',y')\in U\times]y-\varepsilon,y+\varepsilon[,\ f(x')>y$ donc :

$$U\times]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\subset\ O \text{ ouvert}$$

Donc $\mathrm{epi}(f)$ est un fermé.

$(c)\Rightarrow(a)$: soit $x\in E$, $y=f(x)$, $\varepsilon>0$ et $z=f(x)-\varepsilon=y-\varepsilon$. On a $f(x)>z$. Donc $(x,z)\in O=\mathrm{epi}(f)^C$. Il existe U ouvert de E et $\eta>0$ tel que $U\times]z-\eta,z+\eta[\subset O$. En particulier $U\times\{z\}\in O$. Donc $\forall x'\in U,\ f(x')>z=f(x)-\varepsilon$.

$$\inf_U f\geqslant f(x)-\varepsilon$$

Donc f s.c.i.