Analyse

Chapitre 2 : Étude autour des fonctions continues sur un compact

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

$\mathcal{C}(X,F)$ où X métrique compact et F métrique.

Propriété 1 (Rappel)

- Si X métrique compact, F est métrique. On munit $\mathcal{C}(X,F)$ de la distance :

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} \; d_F(f(x),g(x))$$

- Si F est complet, d rend $\mathcal{C}(X,F)$ complet.
- Si F est un Banach, alors $\mathcal{C}(X,F)$ est un Banach pour $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X}\|f(x)\|_F$

1 Compacts de $\mathcal{C}(X,F)$

Définition 1 (équicontinuité)

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,F)$.

- $\mathcal{A}$ est équicontinue en $x \in X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X,\; d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}, d(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

- $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,y \in X,\; d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}, d(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Exercice 1.

E,F espaces métriques

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ finie, alors $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ ne contient que des fonctions $k-$lipschitziennes, $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

3. Montrer que si $\mathcal{A}$ est équicontinue sur un compact X, $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue sur X.

Solution 1.

1. Soit $x \in X$, $\mathcal{A} = \{f_1, ..., f_n\} \subset \mathcal{C}(X, F)$. Si $\varepsilon > 0, \exists \eta_1, ..., \eta_n$ tels que :
$$d(x,y) < \eta_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$
On prend alors $\eta = \min \eta_i$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors si :
$$d(x,y) \leqslant \eta,\ d(f(x), f(y)) < kd(x,y) \leqslant k\eta \leqslant \varepsilon$$

3. Par l'absurde.
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n > 0,\ \exists (x_n, y_n) \in X^2, \quad d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ et } \exists f_n \in \mathcal{A},\ d(f_n(x_n), f_n(y_n)) > \varepsilon$$
Par compacité, $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ alors $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Mais $\mathcal{A}$ équicontinue en x donc :
$$\exists \alpha > 0,\ \forall u, v \in X,\ d(x,u) < \alpha \text{ et } d(y,u) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d(f(u), f(v)) < \varepsilon\ \forall f \in \mathcal{A}$$
Or $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ donc à partir d'un certain rang N :
$$d(x, x_{\varphi(N)}) < \alpha \text{ et } d(x, y_{\varphi(N)}) < \alpha \quad \text{mais} \quad d(f_{\varphi(N)}(x_{\varphi(N)}), f_{\varphi(N)}(y_{\varphi(N)})) > \varepsilon$$
Absurde. Donc $\mathcal{A}$ uniformément équicontinue.

Théorème 1 (Ascoli)

Soit X métrique compact et F métrique complet. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, F)$. Sont équivalents :
1. $\mathcal{A}$ est relativement compact (d'adhérence compacte).
2. $\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point et $\forall x \in X, \mathcal{A}_x = \{f(x),\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact.

Remarque. Sert à :

- Montrer la compacité d'un opérateur
- Extraire des sous-suites convergentes

Preuve.
(2) $\Rightarrow$ (1) :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On va montrer que l'on peut extraire une sous-suite de (f_n) convergente.

- Comme X est métrique compact, X est séparable. En effet :
$$X = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{B}\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right)$$
(cf. poly)

Soit $D = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable, dense dans X.

1. x_1. $\mathcal{A}_{x_1} = \{f(x_1), f \in \mathcal{A}\}$ relativement compact. Donc de $(f_n(x_1))_n$ on peut extraire une sous-suite convergente : $f_{\varphi_1(n)}(x_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_1)$.
2. De même de $(f_{\varphi_1(n)}(x_2))_n$ on extrait une sous-suite convergente : $f_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(x_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_2)$
3. Pour x_p. $(f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{p-1}(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est relativemen compact. On extrait $f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_p)$. On pose $\psi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$ (procédé d'extraction diagonale).

   On vérifie que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_{\psi(n)}(x_p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_p)$$

- On veut prolonger f sur X grâce au théorème de prolongement vu au TD1. $\to$ montrons que f est uniformément continue sur D.

  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{A}$ est équicontinue sur X compact, elle est uniformément équicontinue. Donc $\exists \eta > 0,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soit $x_k, x_l \in D$ tels que $d(x_k, x_l) < \eta$:
$$\begin{aligned} d(f(x_k), f(x_l)) &\leqslant d(f(x_k), f_{\psi(n)}(x_k)) + d(f_{\psi(n)}(x_k), f_{\psi(n)}(x_l)) + d(f_{\psi(n)}(x_l), f(x_l)) \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

  Donc f est uniformément continue sur D. Donc par théorème de prolongement, f se prolonge en une fonction uniformément continue pour tout X.

- Montrons que $(f_{\psi(n)})$ converge uniformément vers f sur X.
  Soit $\varepsilon > 0$, $x \in X$ $d(f(x), f_{\psi(n)}(x)) \leqslant \varepsilon$.

  Idée. $d(f(x), f_{\psi(n)}(x)) \leqslant d(f(x), f(x_k)) + d(f(x_k), f_{\psi(n)}(x_k)) + d(f_{\psi(n)}(x_k), f_{\psi(n)}(x))$.
  Soit η associé à l'uniforme équicontinuité de $\mathcal{A}$. On sait que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(x_k, \eta)$ (où $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sous-ensemble dense à partir duquel f est construite). Par compacité,
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_{k_i}, \eta)$$

  Soit i, $d(x, x_{k_i}) < \eta$.
$$d(f(x), f_{\psi(n)}(x)) \leqslant \underbrace{d(f(x), f(x_{k_i}))}_{\leqslant\varepsilon \text{ (UF)}} + \underbrace{d(f(x_{k_i}), f_{\psi(n)}(x_{k_i}))}_{\leqslant\varepsilon \text{ (APCR idp de } x)} + \underbrace{d(f_{\psi(n)}(x_{k_i}), f_{\psi(n)}(x))}_{\leqslant\varepsilon}$$

(1) $\Rightarrow$ (2) :
$\mathcal{A}$ relativement compact. En particulier, $\mathcal{A}$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$, $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(f_i, \varepsilon)$.
Soit $\eta_1, \ldots, \eta_n$ associés à l'uniforme continuité des f_i. Posons $\eta = \min \eta_i$.
Soient $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$. Soit $f \in \mathcal{A}$, $\exists i$ tel que $d(f, f_i) < \varepsilon$.
$$d(f(x), f(y)) \leqslant \underbrace{d(f(x), f_i(x))}_{\leqslant\varepsilon} + \underbrace{d(f_i(x), f_i(y))}_{\leqslant\varepsilon \text{ (UF de } f_i)} + \underbrace{d(f_i(y), f(y))}_{\leqslant\varepsilon} \leqslant 3\varepsilon$$

Donc $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue. De plus, $\forall x,\ \mathcal{A}_x$ est relativement compact puisque $\mathcal{A}$ est relativement compact. D'où l'équivalence. □

Remarque. Même équivalence sans l'hypothèse F complet.

Contre-exemples.

- Si $\mathcal{A}_x$ n'est pas relativement compact. Sur $\mathcal{C}([0,1])$, $f_n(x) = n \ \forall x \in [0,1]$.
- Si $\mathcal{A}$ n'est pas équicontinue en tout point. $f_n(x) = \sin(nx)$ si $f_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ uniformément.
  On a :
  $$\forall \varphi \in \mathcal{C}([0,\pi]) \qquad \int_0^\pi \varphi(x)\sin(nx)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
  Alors
  $$\forall \varphi \in \mathcal{C}([0,\pi]) \qquad \int_0^\pi \varphi(x)f(x)dx = 0$$
  et donc $\int_0^\pi f(x)^2dx = 0$

Exercice 2.
On munit $\mathcal{C}^1([a,b])$ de la norme $\|f\| = \|f\|_{+\infty} + \|f'\|_{+\infty}$.

$$i\colon (\mathcal{C}^1([a,b]), \|.\|) \longrightarrow (\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty) \quad \text{(l'identité)}$$

Montrer que i est une application continue compacte.
Solution 2.

- *Continuité.* $\forall f \in \mathcal{C}^1([a,b])$,
  $$\underbrace{\|i(f)\|_\infty}_{=\|f\|_\infty} \leqslant \|f\| \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
- *Compacité.* Montrons que i est compacte. Soit $B = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$ pour $\|.\|$ dans $\mathcal{C}^1([a,b])$. Montrons que $i(B) = B$ (d'un point de vue ensembliste) est relativement compact dans $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$.

  Si $x \in [a,b]$, $\mathcal{A}_x = \{f(x),\ f \in B\}$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\| \leqslant 1$. Donc $\forall x$, $\mathcal{A}_x$ est borné dans $\mathbb{R}$ donc relativement compact.
- Montrons que B est équicontinue. Par les inégalités des accroissements finis :
  $$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\|_\infty |x-y| \quad \text{comme} \quad \|f'\|_\infty \leqslant 1 \text{ car } f \in B$$
  alors $\forall x, y,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$.
  Donc B est composée de fonctions $1-$lipschitzienne. Donc B est uniformémen équicontinue.
  Donc par Ascoli, B est relativement compact dans $\mathcal{C}([a,b])$.

Remarque. Si $\dim F < +\infty$, $\mathcal{A}_x$ est relativement compact $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}_x$ est borné.

Exercice 3.

Soit X, Y compact métrique de $\mathbb{R}^n$, $K \in \mathcal{C}(X \times Y)$. Pour $f \in \mathcal{C}(X)$, on définit :

$$Tf(y) = \int_X K(x,y)f(x)dx$$

1. Montrer que T est un opérateur de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathcal{C}(Y)$.
2. Montrer que T est compact.

Solution 3.

1. *Définition.* $Tf \in \mathcal{C}(Y)$ car $\forall x \in X,\ y \mapsto K(x,y)f(x) \in \mathcal{C}(Y)$, et :

   $$\forall y \in Y,\ \forall x \in X,\ |K(x,y)f(x)| \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_\infty \quad \text{intégrable sur } X$$

   Donc par théorème de continuité, $Tf \in \mathcal{C}(Y)$.

   Linéarité. Évident

   Continuité. On a :

   $$|Tf(y)| \leqslant \int_X |K(x,y)||f(x)|dx \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_\infty \mathrm{Vol}(X)$$

   Donc $\|Tf\|_\infty \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_\infty \mathrm{Vol}(X)$. Donc T est un opérateur.

2. Soit $B = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$ dans $(\mathcal{C}(X), \|.\|_\infty)$. Montrons que $T(B)$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}(Y), \|.\|_\infty)$.

   - $\mathcal{A}_y = \{Tf(y),\ f \in B\}$

     $$|Tf(y)| \leqslant \int_X |K(x,y)|\underbrace{|f(x)|}_{\leqslant 1}dx \leqslant \|K\|_\infty \mathrm{Vol}(X)$$

     Donc $\mathcal{A}_y$ est borné donc relativement compact.
   - Soit $\varepsilon > 0$, $y \in Y$, et η associé à l'uniforme continuité $(x,y) \mapsto K(x,y)$ ($|x - x'| + |y - y'| < \eta \Rightarrow |K(x,y) - K(x',y')| \leqslant \varepsilon$). Soit $y' \in Y$, $|y - y'| < \eta$ alors :

     $$|Tf(y) - Tf(x)| = \left| \int_X (K(x,y) - K(x',y'))f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon \int_X \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leqslant 1} dx \leqslant \varepsilon \mathrm{Vol}(X)$$

     Donc $(Tf)_{f \in B}$ est équicontinue en y. Par Ascoli, $T(B)$ est relativement compact.

2 Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 2 (Dini)

X espace métrique compact.

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X)^{\mathbb{N}} \text{ telle que } f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \text{ simplement, } f \text{ continue et } \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1} \geqslant f_n$$

Alors la convergence est uniforme.

Preuve.

$$\Omega_n = \{x \in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

Par continuité des f_n et de f, Ω_n est ouvert. Par croissance des (f_n), $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$. Par convergence simple, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Comme X est compact, $X = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{n_i} = \Omega_{n_m}$ (en supposant les n_i croissants).

Donc, $\forall n \geqslant n_m$, $\forall x \in X$, $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$. Et comme $f \geqslant f_n$ (par croissance des (f_n)),

$$\forall n \geqslant n_m,\ \forall x \in X,\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

D'où la convergence uniforme. □

Théorème 3 (Stone-Weierstrass)

Soit X métrique compact. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{A}$ sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$, unitaire et séparante.

$$\text{(séparante)} \quad \forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists f \in \mathcal{A} \text{ tq } f(x) \neq f(y)$$

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Lemme 1

$\exists (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}} \mid P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ |$ uniformément sur $[-1, 1]$

Preuve. (du lemme)

En effet en prenant :

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2) \ \forall x \in [-1, 1] \end{cases}$$

On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant |x|$ $\forall x \in [-1, 1]$.

Comme $(P_n(x))$ est croissante et majorée, $(P_n(x))$ converge vers $f(x)$ qui vérifie :

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f(x)^2)$$

donc $f(x)^2 = x^2$ et $f(x) \geqslant 0$. Donc $f(x) = |x|$. Donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ |$ simplement et (P_n) croissante. Donc par Dini on a la convergence uniforme. □

Preuve. (du théorème de Stone-Weierstrass)

On va utiliser les 2 arguments suivants :

1. Si $f, g \in \mathcal{A}$, montrons que $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont dans $\overline{\mathcal{A}}$.

   Si $f \in \mathcal{A}$, $f \neq 0$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. En effet, $\frac{f}{\|f\|_\infty}$ à valeurs dans $[-1, 1]$ et $P_n\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) \in \mathcal{A}$. Par convergence uniforme, $\left|\frac{f}{\|f\|_\infty}\right| \in \overline{\mathcal{A}}$. Donc $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Or :

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in \overline{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad \min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \in \overline{\mathcal{A}}$$

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq \beta$, et $x, y \in X$. Montrons qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$.

   En effet, il existe $v \in A$, $v(x) \neq v(y)$ et le système :

$$\begin{cases} \lambda v(x) + \mu = \alpha \\ \lambda v(y) + \mu = \beta \end{cases} \quad \text{est de Cramer}$$

$$\begin{pmatrix} v(x) & 1 \\ v(y) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

   D'où l'existence d'un tel u.

Soit $f \in \mathcal{C}(X)$, $\varepsilon > 0$. Soit $x \in X$. $\forall y \in X$, il existe $u_y \in \mathcal{A}$ tel que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$ par (2). On pose :

$$O_y = \{x' \in X \mid u_y(x') < f(x') + \varepsilon\}$$

u_y, $f \in \mathcal{C}(X)$ donc O_y est ouvert et $x, y \in O_y$.

$$X = \bigcup_{y \in X, y \neq x} O_y$$

Or X compact donc il existe $y_1, ..., y_n \in X$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^n O_{y_i}$.
On pose $v_x = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} u_{y_i} \in \overline{\mathcal{A}}$. Et, $\forall x' \in X$,

$$v_x(x') = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} u_{y_i}(x') < f(x') + \varepsilon$$

Posons :

$$\forall x \in X, \quad \Omega_x = \{x' \in X \mid v_x(x') > f(x') - \varepsilon\}$$

Ω_x est un ouvert, $x \in \Omega_x$ donc $X = \bigcup_{x \in X} \Omega_x$. Donc il exists $x_1, ..., x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^n \Omega_{x_i}$.

On pose alors $v = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} v_{x_i} \in \overline{\mathcal{A}}$.
Alors $\forall x \in X$, $v(x) \geqslant f(x) - \varepsilon$ et $v(x) < f(x) + \varepsilon$. Donc $|v(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$. Donc $v \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\|v - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X)$. □

Remarques. (conséquences)

- Stone-Weierstrass $\Rightarrow$ Weierstrass : les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([a, b])$, il suffit de vérifier que l'ensemble est bien une sous-algèbre.
- Les fonctions Lipschitziennes sont denses dans $\mathcal{C}([a, b])$.
- Les polynômes sont-ils denses dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ (X compact de $\mathbb{C}$) ?
  $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ Soit $f\colon z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$

  Si on a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ uniformément sur S^1 on aurait :

$$\int_{S^1} P_n(z)dz = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2i\pi \qquad \text{absurde}$$

- Si $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison, le théorème de Stone-Weierstrass reste vrai dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ pour X un compact de $\mathbb{C}$. (se montre juste avec $\Re(u) = \frac{u + \bar{u}}{2}$)
- Soit $T = \mathbb{R}_{/2\pi\mathbb{Z}}$, les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ (puis T vérifie bien la stabilité par conjugaison).

Exemple.

$$S = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \ ; \ c_n \in \mathbb{C} \right\}$$

S algèbre, unitaire, $T(x) \neq T(y)$ si $x \neq y$ avec $T(x) = e^{ix}$. Alors S est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

2.1 Transformée de Fourier

Soit $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $2\pi-$périodiques intégrables. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on peut définir :

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

La suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient $l^\infty(\mathbb{Z})$.
En fait $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$, l'espace des suites de limite nulle (lemme de Riemann-Lebesgue). En effet, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ (fonctions $\mathcal{C}^1$ $2\pi-$périodiques), alors :

$$\hat{f}(n) = \int \frac{1}{-in} \partial_X (e^{-inx}) f(x) dx \qquad \text{puis } O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ par IPP}$$

Notons :

$$\mathcal{F} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{T}) & \longrightarrow & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

Lemme 2

$\mathcal{F}$ est injective.

Preuve.
Si $\mathcal{F}(f) = 0$ alors $\int f(x)T(x)dx$ pour tout $T \in S$. Donc $\int f(x)g(x)dx = 0$ pour tout $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ par densité. On approche ensuite $\frac{\bar{f}}{|f|(+\varepsilon)}$ donc $f = 0$. □

Est-ce que $\mathcal{F}$ est surjective ? cf. Chapitre 3