Probabilités

Chapitre 7 : Convergence de variables aléatoires

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

Définition 1 (modes de convergence d'une v.a.)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. et X une v.a., toutes à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

- On dit que la suite X_n tend presque sûrement vers X et on le note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$ si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ p.s. ($\mathbb{P}(X_n \to X) = 1$)
- Si $p \geqslant 1$, on dit que X_n tend dans L^p vers X et on le note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p}$ si les X_n et X sont dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- On dit que X_n tend en probabilité verx X et on le note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- (convergence très différente)
  On dit que X_n tend en loi vers X et on le note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X$ si

$$\forall f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ continue bornée } \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

Remarque. Les 2 plus importantes sont la convergence p.s. et la convergence en loi.

Remarque. On peut définir ces convergences sur des espaces plus exotiques.

- $\xrightarrow{\text{p.s.}}$ peut être définie pour des v.a. à valeurs dans (E, ξ) quelconque.
- $\xrightarrow{L^p}$ peut être définie sur n'importe quel espace normé
- $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ peut être définie sur n'importe quel espace métrique, on remplace par :

$$\mathbb{P}(d(X_n, X)\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- $\xrightarrow{(\mathcal{L})}$ est définie sur n'importe quel espace topologique X,

$$\forall f\colon X \to \mathbb{R} \text{ continue bornée } \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

Remarque. Attention à la convergence en loi $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X$ ne dit pas que X_n est proche de X mais seulement que μ_{X_n} proche de μ_X. En effet :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)] \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)d\mu_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f(x)d\mu_X$$

ne dépend de la v.a. qu'à travers sa loi.

Exemple. Soit $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ alors $1-X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Si on pose $X_n = X$ alors,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \frac{f(0)+f(1)}{2} = \int f d\mu_{\mathcal{B}(1/2)} = \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(1-X)]$$

Donc $X = X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} 1-X$ mais $|X_n-(1-X)| = 1$ p.s. (les variables aléatoires ne s'approchent pas). On a aussi $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X$. Donc on a pas non plus unicité de la limite.

Remarque. Les propriétés usuelles échouent.

- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} X+Y$ vrai pour $L^p, \mathbb{P}$,p.s.
- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} Y \Rightarrow X_nY_n \xrightarrow[n\to+\infty]{*} XY$ vrai pour $\mathbb{P}$ et p.s.
  Faux pour $\mathcal{L}$: $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} 1-X$ et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X \not\Rightarrow 2X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} 1$
- $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Y \not\Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} (X,Y)$

Propriété 1

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X des v.a. dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

$$\begin{tikzcd}
 & & X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^q} X \arrow[d, "q>p"] \\
X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X \arrow[dr, "(3)"'] & & X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} X \arrow[u, dotted, bend left, "(1)"] \arrow[dl, "(2)"] \\
 & X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \arrow[ul, dotted, bend left] \arrow[ur, dotted, bend right] \arrow[d, "(4)"] & \\
 & X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X &
\end{tikzcd}$$

$\cdots\cdots$ suites extraites

Preuve.

1. $q > p$, soit r tel que $\frac{1}{q/p} + \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow r = \frac{q}{q-p}$:

   $$\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] = \mathbb{E}[\|X_n - X\|^p \times 1] \underset{\text{Hölder}}{=} \mathbb{E}\left[\|X_n - X\|^{pq/p}\right]^{p/q} \mathbb{E}[1^r]^{1/r} = \mathbb{E}\left[\|X_n - X\|^q\right]^{p/q} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   Remarques.

   - $q > p$: $x \to |x|^{p/q}$ convexe, par Jensen $\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \leqslant \mathbb{E}[\|X_n - X\|^q]^{p/q}$
   - La réciproque est fausse. Soit $Y_n \sim \mathcal{B}(1/n)$. $X_n = n^\alpha Y_n$. Alors $\mathbb{E}[|X_n|^p] = n^{\alpha p - 1}$ donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}^p} 0 \iff \alpha < \frac{1}{p}$ pour $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$. $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}^p} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{L^q} 0$.
   - $\xrightarrow{L^1}$ est la plus faible des convergences L^p.

2. Montrons que $X_n \xrightarrow{L^1} \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$.

   $$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \underset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{E[\|X_n - X\|]}{\varepsilon} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3. $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} X$ alors :

   $$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \varepsilon}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} 0 \text{ et } |.| \leqslant 1} \Big] \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{TCD}} 0$$

   La réciproque est fausse.

   Contre-exemple 1. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$

   $$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0$. Mais :

   $$\sum_{n \geqslant 1} \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 1)}_{\text{evt idp}} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

   Donc par le Lemme de Borel-Cantelli $\overline{\lim}\{X_n = 1\}$ p.s. Donc $X_n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} 0$.

   Ceci implique que X_n n'a pas de limite p.s. puisque si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} Z$ alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} Z$ et par unicité des limites $\xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}}$ on aurait $Z = 0$ p.s.

   Contre-exemple 2. Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et :

   $$X_{2^n + k} = \mathbb{1}_{\frac{k}{2^n}} \leqslant U < \frac{k+1}{2^n}$$

pour $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ $n \geqslant 0$. Pour tout $i \geqslant 1$, $\exists!(n_i, k_i)$ tq $i = 2^{n_i} + k_i \leqslant 2 \times 2^{n_i}$ donc $n_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(|X_i| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2^{n_i}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\forall x \in [0,1[,\ \forall n \geqslant 1,\ \exists k$ tel que $x \in \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right] = I_{n,k}$. $\forall \omega,\ \forall n \geqslant 1,\ \exists b$ tel que $X_{2^n+k} = 1$ (n et b tels que $U(\omega) \in I_{n,k}$). Donc :

$$(X_i = 1 \text{ une infinité de fois}) \text{ p.s.} \quad \text{donc} \quad (X_i \not\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0)$$

On peut remonter un peu : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors $\exists n_k$ suite extrate telle que $x_{n_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$. En effet :

$$\forall k, \exists n_k, \forall n \geqslant n_k \quad \mathbb{P}\left(\|X_n - X\| > \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

(car $\mathbb{P}(|X_n - X|) > 1/k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0)$. Alors,

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(\|X_n - X\|\right) < +\infty$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli on a (pour k assez grand $\|X_{n_k} - X\| \leqslant \frac{1}{k}$) p.s. donc $(\overline{\lim}\|X_{n_k} - X\| = 0)$ p.s. Ainsi $X_{n_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$

$\square$

Applications

1. $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et $C = \sup_n \mathbb{E}[\|X_n\|^p] < +\infty \Rightarrow X \in L^p$ et $\mathbb{E}[\|X\|] \leqslant X$.

   Preuve.

   $\exists n_k$ $X_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{p.s.}} X$ et alors

   $$\mathbb{E}[\|X\|^p] = \mathbb{E}[\liminf \|X_n\|^p] \underset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf \mathbb{E}[\|X_{n_k}\|^p] \leqslant C < +\infty$$

   $\square$

2. $$\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid \text{mesurable}\}\backslash_{f=g \text{ si } f(x)=g(x)\text{Lebp.p.}}$$

   alors $\nexists$ d métrique sur $\mathcal{F}$ tel que :

   $$f_n \xrightarrow{\text{p.p}} \quad \Leftrightarrow \quad d(f_n, f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Preuve.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. de $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mathrm{Leb})$ dans $[0,1]$ telles que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ mais $X_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$. Donc $d(X_n,X) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\exists\varepsilon>0$, $\exists n_k$ suite d'entiers strictement croissants tel que $\forall k,\ d(X_{n_k},X)>\varepsilon$ X_{n_k}extrait de $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ donc $X_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ donc il exists $k(r)$ une suite d'entiers strictement croissants tels que $X_{n_{k(r)}} \xrightarrow[r\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ alors $\varepsilon < d(X_{n_{k(r)}},X) \xrightarrow[r\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$. Absurde donc d n'existe pas. $\square$

Remarque. Pareil pour l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'obstruction vient même si on ne demande pas à d de vérifier l'inégalité triangulaire.

Remarque. $\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \not\Rightarrow \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1}$. En effet soit $U\sim\mathcal{U}([0,1])$ et $X_n = n\mathbb{1}_{U\leqslant\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$.
$\mathbb{E}[|X_n|]=1$ donc $X_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} 0$

Propriété 2

Soit $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$, $r>p>1$ et $\sup_{\mathbb{N}}\mathbb{E}[\|X_n\|^r]<+\infty$ alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} X$$

Preuve.
Soit $\varepsilon>0$. On suppose que $X\subset L^p$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|X_n-X\|^p\right] &= \mathbb{E}\left[\|X_n-X\|\|\mathbb{X}-\mathbb{X}\|\leqslant\varepsilon\right]+\mathbb{E}\left[\|X_n-X\|^p\mathbb{1}_{\|X_n-X\|>\varepsilon}\right]\\
&\leqslant \varepsilon^p \underset{\text{Hölder}}{+} \mathbb{E}\left[\|X_n-X\|^{pr/p}\right]^{\frac{p}{r}}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\|X_n-X\|>\varepsilon}\right]^{1/\alpha}\\
&\leqslant \varepsilon^p+\left(\underbrace{\mathbb{E}\left[\|X_n-X\|^p\right]}_{\|X_n-X\|_r\leqslant\|X_n\|_r+\|X\|_r\leqslant C}\ {}^{\frac{1}{r}}\right)^p \underbrace{\mathbb{P}(\|X_n-X\|>\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{r}+\frac{1}{\alpha}=1$. Donc $\overline{\lim}\,\mathbb{E}[\|X_n-X\|^p]\leqslant\varepsilon^p$ donc $\varepsilon\to0$ $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^p} X$. $\square$

On cherche un critère pour rendre équivalent $\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}$ *et* $\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1}$ *(très utile pour les martingales).*

Définition 2 (uniformément intégrable)

On dit qu'une suite de v.a. réelles L^1 $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{L\to+\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>L}\right]=0$$

On notera $(X_i)_{i\in I}$ U.I.

Exemple. Si $X \in L^1$, $\{X\}$ est U.Y. puisque

$$\left\| \mathbb{E}\Big[\underbrace{|X|\mathbb{1}_{|X|>L}}_{\xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \text{ et } |.|\leqslant L^1} \Big] \right\| \xrightarrow[L\to+\infty]{\text{TCD}} 0$$

Exemple. Si $\exists Y \in L$ telle que $\forall i$, $|X_i| \leqslant Y$ p.s. alors $(X_i)_{i\in I}$ est U.I. car :

$$\mathbb{E}\left[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>\varepsilon}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[|Y|\mathbb{1}_{|Y|>L}\right]$$

Exemple. Si I est fini est les X_i sont L^1, (X_i) est U.I. (prendre $Y = |X_1| + ... + |X_n|$).

Propriété 3 (caractérisation)

$$(X_i)_{i\in I} \text{ U.I.} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C = \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|] < +\infty \\ \text{et } \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{A|\mathbb{P}(A)\leqslant\delta\}, i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] = 0 \end{cases}$$

Preuve.
$\Rightarrow$:

- $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[[X_i[\mathbb{1}_{|X_i>L}]$ est une fonction décroissante de L qui tend ves 0 donc $\leqslant 1$ pour un certain L et alors $\forall i \in I$:

$$\mathbb{E}[|X_i|] = \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\leqslant L}] + \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>L}] \leqslant L + 1$$

- Si $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$,

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[|X_i\mathbb{1}_{|X_i|\leqslant L}\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>L}\mathbb{1}_A]$$

  Donc :

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] = L\mathbb{P}(A) + \sup_{i\in I} \underbrace{\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>L}]}_{\leqslant\varepsilon\ \forall L\geqslant L_\varepsilon}$$

  Donc $L = L_\varepsilon$ et $\delta = \frac{\varepsilon}{L_\varepsilon}$:

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|Y_i|\mathbb{1}_A] \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \text{vrai } \forall A\ \mathbb{P}(A) \leqslant \delta$$

$\Leftarrow$: $C = \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|] < +\infty$. On se donne $\varepsilon > 0$, $\exists\delta$ tel que :

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] \leqslant \varepsilon\ \forall i \in I$$

$$\mathbb{P}(|X_i| > L) \underset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{E[|X_i|]}{L} \leqslant \frac{C}{L}$$

On pose $L_\varepsilon = \frac{C}{\delta}$, alors pour $L > L_\varepsilon$, $\mathbb{P}(|X_i| > L) \leqslant \delta$, alors :

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\underbrace{|X_i| > L}_{A \text{ tq } \mathbb{P}(A)\leqslant\delta}}] \leqslant \varepsilon \quad \forall i \in I$$

$\square$

Propriété 4

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite de v.a.L^1 et X une v.a., on a :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} X \quad \Leftrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ et } (X_n)_{n\geqslant 1} \text{ U.I.}$$

Preuve.

$\Rightarrow$:

$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^1} \Rightarrow \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}$ déjà vu.

$$\mathbb{E}[|X_n|] \leqslant \underbrace{\mathbb{E}[|X_n - X|]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \mathbb{E}[|X|]$$

Donc X_n est bornée dans L^1 et :

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] \leqslant \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X_n - X\mathbb{1}_A|]$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\mathbb{E}[|X_n - X|] \leqslant \varepsilon$

$$\{X_1, ..., X_{n_0-1}\} \text{ U.I. car famille finie de v.a.} L^1$$

donc $\exists \delta$ tel que pour une v.a. Y de cette famille $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|Y|\mathbb{1}_A] \leqslant \varepsilon$. Alors, si $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$:

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_A] \leqslant \begin{cases} \varepsilon \quad \text{si } n \leqslant n_0 - 1 \text{ car c'est une v.a. de cette famille} \\ \underbrace{\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A]}_{\leqslant \varepsilon \text{ car } X \text{ dans la famille}} + \underbrace{\mathbb{E}[|X_n - X|]}_{\leqslant \varepsilon} \quad \text{si } n \geqslant n_0 \end{cases} \leqslant 2\varepsilon$$

□

$\Leftarrow$: $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$, X_n borné dans $L^1 \to X \in L^1$. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $\{X\}$ sot 2 familles UI donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ tel que $\forall \mathbb{P}(A) \leqslant \delta$ on a $\mathbb{E}[[X_n|\mathbb{1}_A] \leqslant \varepsilon \; \forall n$ et $\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] \leqslant \varepsilon$.

$\exists n_0$ tq pour $n \geqslant n_0$:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \delta$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n - X|] &= \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbb{1}_{|X_n - X| \leqslant \varepsilon}] + \mathbb{E}[|X_n - X|\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] \\ &\leqslant \varepsilon + \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\underbrace{|X_n - X| > \varepsilon}_{\mathbb{P}(.)\leqslant\delta}}] + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] \\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \to \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})}$ Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$:

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &= \left|\mathbb{E}\left[(f(X_n) - f(X))\mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[(f(X_n) - f(X))\mathbb{1}_{\|X_n - X\| \leqslant \varepsilon}\right]\right| \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) + \mathbb{E}\left[|f(X_n) - f(X)|\mathbb{1}_{\|X_n - X\| \leqslant \varepsilon}\left(\mathbb{1}_{\|X\| \leqslant A}\mathbb{1}_{\|X\| > A}\right)\right] \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) + \sup_{x,y:\ \|x\|,\|y\| \leqslant A+1, \|x-y\| \leqslant \varepsilon} |f(x) - f(y)| \\ &+ 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|X\| > A)\end{aligned}$$

D'où :

$$\underbrace{\overline{\lim}_n \left|\mathbb{E}\Big[f(X_n)-f(X)\Big]\right|}_{=0\ \varepsilon\to 0 \text{ puis } A\to 0} \leqslant \underbrace{\sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant A+1, \|x-y\|\leqslant\varepsilon} |f(x)-f(y)|}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \text{ car } f \text{ absolument sur } \{x | \|x\|\leqslant A+1\} \text{ compact}} + \underbrace{2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|X\|>A)}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0}$$

Contre-exemple. $X_n = X \sim \mathcal{B}(1/2)$, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} 1-X$ mais $X_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 1-X$.

$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X$ signifie inf $f(x)d\mu_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f(x)d\mu_X(x)$; a encore un sens si les X_n ne sont pas sur le même espace de probabilité.

À l'opposé on peut faire un "couplage" (trouver des v.a. Y_n qui ont les lois des X_n) et pour lesquels cette convergence est plus forte.

Théorème 1

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X v.a. réelles, n a l'équivalence :

$$(i)\ X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X \Leftrightarrow (ii)\ \forall t \text{ point de continuité de } F_X,\ F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(t)$$
$$\Leftrightarrow (iii)\ \exists (Y_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } Y \text{ v.a. réelles telles que } \mu_{Y_n} = \mu_{X_n}\ \forall n,\ \mu_Y = \mu_X$$
$$\text{et } Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y \text{ p.s.}$$

Remarque. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, Y sont un couplage qui renforce la convergence.

Remarque. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ est le théorème de représentation de Skorokhod.

Preuve.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Soit f continue bornée

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int f(x)d\mu_{X_n}(x) = \int f(x)d\mu_{Y_n}(x)$$
$$\underset{\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \to \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})}}{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} \int f(x)d\mu_Y(x) = \int f(x)d\mu_X(x) = \mathbb{E}[f(X)]$$

$(i) \Rightarrow (iii)$: Posons,

$$f_p(x) = \left(1 - p\left(x - \left(t - \frac{1}{p}\right)\right)_+\right)_+$$
$$g_p(x) = \big(1 - p\,(x-t)_+\big)_+$$

f_p et g_p sont continues bornées et $\forall x\ f_p(x) \leqslant \mathbb{1}_{x\leqslant t} \leqslant g_p(x)$.

$$\underbrace{\mathbb{E}[f_p(X_n)]}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}\mathbb{E}[f_p(X)]} \leqslant \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n\leqslant t}]}_{=F_{x_n}(t)} \leqslant \underbrace{\mathbb{E}[g_p(X_n)]}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}\mathbb{E}[g_p(X)]}$$

Or $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leqslant t-\frac{1}{p}}] \leqslant \mathbb{E}[f_p(X)]$ et $\mathbb{E}[g_p(X)] \leqslant \mathbb{E}[\mathbb{X} \leqslant + \frac{\mathbb{1}}{}]$. Donc :

$$F_X\left(t-\frac{1}{p}\right) \leqslant \underline{\lim} F_{X_n}(t) \leqslant \overline{\lim} F_{X_n}(t) \leqslant F_X\left(t+\frac{1}{p}\right)$$

Donc si t est un point de continuité de F_X, on obtient $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(t)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: On sait que $F_{Y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X$ sur les points de continuité de F_X. On se donne $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ et on pose $Y_n = F_{X_n}^{<-1>}(U)$ $\forall n$ et $Y = F_X^{<-1>}(U)$. On a vu que $Y_n \underset{\text{loi}}{=} X_n$ et $Y \underset{\text{loi}}{=} Y$. On peut espérer :

$$F_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X \quad F_{X_n}^{<-1>} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X^{<-1>} \quad F_{X_n}(U)^{<-1>} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X^{<-1>}(U) \quad ??$$

Rappel.

$$F^{<-1>}(U) = \inf \underbrace{\{t \mid F(t) \geqslant u\}}_{[F^{<-1>}(u);+\infty[} \quad \text{pour } 0 < u < 1$$

$F(t) \geqslant u \Leftrightarrow t \geqslant F^{<-1>}(u)$ (contraposée $F(t) < u \Leftrightarrow t < F^{<-1>}(u)$)

Remarque. F est une fonction croissante vornée donc il y a un nombre au plus dénombrable de point de discontinuité.
Si $A_p = \left\{t \mid F(t) \geqslant F(t^-) + \frac{1}{p}\right\}$, alors

$$\text{Card}A_p \times \frac{1}{p} \leqslant \sum_{t\in A_p} F(t) - F(t^-) = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 1 - 0 = 1$$

Donc A_p est fini et

$$\bigcup_{p\geqslant 1} A_p = \{\text{points de discontinuités}\} \quad \text{est au plus dénombrable}$$

Donc on peut trouver Γ un ensemble dénombrable de points de continuité dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $f \in \Gamma$, regardons l'évènement :

$$\begin{aligned}\{Y > t\} = \{F_X^{<-1>}(U) > y\} &= \{U > \underbrace{F_X(t)}_{=\lim F_{X_n}(t)}\ \}\\ &\subseteq \{\text{pour } n \text{ assez grand } U > F_{X_n}(t)\}\\ &= \{\text{pour } n \text{ assez grand } \underbrace{F_{X_n}^{<-1>}(U)}_{Y_n} > t\}\\ &\subseteq \{\underline{\lim} Y_n \geqslant t\}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\{\underline{\lim} Y_n < Y\} &\underset{\Gamma \text{ dense}}{=} \bigcup_{t\in\Gamma} \{\underline{\lim} Y_n < t < Y\}\\ &= \bigcup_{t\in\Gamma} \{\underline{\lim} Y_n < t, \underbrace{t < Y}_{\subseteq\{\underline{\lim} Y_n \geqslant t\}}\ \} = \emptyset\end{aligned}$$

Donc $\underline{\lim} Y_n \geqslant Y$ p.s.

Regardons maintenant :

$$\begin{aligned}
\{Y \leqslant t\} &= \{F_X^{<-1>}(U) \leqslant t\} = \{U \leqslant F_X(t)\} \\
&= \{U = F_X(t)\} \cup \{U < F_X(t)\} \\
&= \{U = F_X(t)\} \cup \{\text{pour } n \text{ assez grand } U < F_{X_n}(t)\} \\
&\subseteq \{U = F_X(t)\} \cup \{\text{pour } n \text{ assez grand } \underbrace{U \leqslant F_{X_n}(t)}_{\{F_{X_n}^{<-1>}(U) \leqslant t\} = \{Y_n \leqslant t\}}\} \\
&\subseteq \{U = F_X(t)\} \cup \{\overline{\lim} Y_n \leqslant t\}
\end{aligned}$$

Regardons,

$$\begin{aligned}
\{\overline{\lim} Y_n > Y\} & \bigcup_{t \in \Gamma} \{\overline{\lim} Y_n > t\} \cap \{t \geqslant T\} \\
& \subseteq \{\overline{\lim} Y_n > t\} \cap \Big(\{U = F_X(t)\} \cup \{\overline{\lim} Y_n \leqslant t\}\Big) \\
& \subset \underbrace{\{U = F_X(t)\}}_{\text{de proba } 0} \cup \underbrace{\{\overline{\lim} Y_n > t, \overline{\lim} Y_n \leqslant t\}}_{=\emptyset}
\end{aligned}$$

Donc $\{Y \geqslant \overline{\lim} Y_n\}$ p.s. Ainsi :

$$Y \leqslant \underline{\lim}\, Y_n \leqslant \overline{\lim}\, Y_n \leqslant Y \quad \text{p.s.}$$

Finalement $Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} Y$ p.s. $\square$

Caractérisation de la convergence en loi.

Théorème 2 (de Lévy, faible)

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a., et X une v.a., toutes dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Alors :

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{(\mathcal{L})} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d,\ \phi_{X_n}(\lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \phi_X(\lambda)$$

Théorème 3 (de Lévy, fort)

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Si $\exists \psi \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ continue en 0 telle que :

$$\forall \lambda,\ \phi_{X_n}(\lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \psi(\lambda)$$

Alors $\exists X$ v.a. telle que $\psi = \varphi_X$ et $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{(\mathcal{L})} X$.

Remarque. L'implication dans la version faible est trivial $e^{i\langle \lambda | x \rangle}$ continue bornée.

Outil pour se ramener à un compact

Lemme 1

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$.

$$\mu(\{x \mid |x| > A\}) \leqslant \frac{A}{2} \int_{-\frac{2}{A}}^{\frac{2}{A}} |1 - \phi_\mu(t)| dt$$

Preuve.

Soit $c > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{-c}^{c} (1 - \phi_\mu(t)) dt &= \int_{-c}^{c} \left(1 - \int e^{itx} d\mu(x)\right) dt \\
&= \int_{-c \leqslant t \leqslant c, x \in \mathbb{R}} \underbrace{(1 - e^{itx})}_{|.| \leqslant 2 \mathbb{1}_{-c \leqslant t \leqslant c}} d\mu(x) dt \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{-c}^{c} (1 - e^{itx}) dt d\mu(x) \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}} \left(2c - \left[\frac{e^{itx}}{ix}\right]_{-c}^{c}\right) \mathbb{1}_{x \neq 0} d\mu(x) \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}} \left(2c - \frac{e^{icx} - e^{-icx}}{ix}\right) \mathbb{1}_{x \neq 0} d\mu(x) \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}} 2c \left(1 - \frac{\sin(cx)}{cx}\right) \mathbb{1}_{x \neq 0} d\mu(x) \\
&= 2c \int_{x \in \mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(cx)}{cx}\right) d\mu(x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{-c}^{c} |1 - \phi_\mu(t)| dt &\geqslant \left| \int_{-c}^{c} (1 - \phi_\mu(t)) dt \right| \\
&= 2c \left| \int_{x \in \mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(cx)}{cx}\right) d\mu(x) \right| \\
&\geqslant 2c \int_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(1 - \left|\frac{\sin(cx)}{cx}\right|\right)}_{\geqslant \frac{1}{2} \text{ si } |cx \geqslant 2|} d\mu(x) \\
&\geqslant 2c \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{|cx| \geqslant 2} d\mu(x)
\end{aligned}$$

Donc $\mu(\{x \mid |cx| \geqslant 2\}) \leqslant \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} |1 - \phi_\mu(t)| dt$. Il reste à appliquer en $c = \frac{2}{A}$. $\square$

Preuve. (du théorème de Lévy, faible)

$\phi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_X$ simplement. $X_n = (X_n(1)...X_n(d))^T \in \mathbb{R}^d$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\underbrace{\|X_n\|_\infty > A}_{\cup_{i=1}^d |X_n(i)|>A}) &\leqslant \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(|X_n(i)| > A) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^d \frac{A}{2} \int_{-\frac{2}{A}}^{\frac{2}{A}} |1 - \phi_{X_n(i)}(t)| dt \quad (*) \quad \text{par le lemme}
\end{aligned}$$

$\exists A$ tel que $\phi_{X(i)}(t) \geqslant 1 - \varepsilon$ fonction cractéristique par continuité sous t $\forall i$ $\forall t \in \left[-\frac{2}{A}, \frac{2}{A}\right]$. $\mathbb{E}[e^{itx}]$ est continue en 0 de limite 1. Fixons ce A. Regardons la limite de $(*)$ lorsque $n \to +\infty$. Par TCD :

$$(*) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^d \frac{A}{2} \int_{-\frac{2}{A}}^{\frac{2}{A}} \underbrace{|1 - \phi_X(t)|}_{\leqslant\varepsilon} dt \leqslant 2d\varepsilon$$

En particulier pour n assez grand $(*) \leqslant 4d\varepsilon$. Donc pour n assez grand :

$$\mathbb{P}(\|X_n\|_\infty > A) \leqslant 4d\varepsilon \quad \text{ et on a } \mathbb{P}(\|X\|_\infty > A) \leqslant 2d\varepsilon$$

Soit f une fonction continue bornée, $\exists P_\varepsilon$ polynôme trigonométrique $2A-$périodique dans toutes les directions (dépendant de A) tel que $\|f - P_\varepsilon\|_\infty^{[-A,A]} \leqslant \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| = \Bigg| &\mathbb{E}\Big[\underbrace{(f - P_\varepsilon)(X_n)}_{\leqslant\varepsilon} \mathbb{1}_{\|X_n\|\leqslant A}\Big] + \mathbb{E}\Big[\underbrace{(f - P_\varepsilon)}_{\leqslant \|f\|_\infty + \|P_\varepsilon\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty + \varepsilon} (X_n) \mathbb{1}_{\|X_n\|>A}\Big] \\
&+ \underbrace{\underbrace{\mathbb{E}[P_\varepsilon(X_n)]}_{\sum_{\lambda_i} \phi_{X_n}(\lambda_i)} + \mathbb{E}[P_\varepsilon(X)]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \mathbb{E}\Big[\underbrace{(P_\varepsilon - f)}_{\leqslant 2\|f\|_\infty + \varepsilon}(X) \mathbb{1}_{\|X\|>A}\Big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[\underbrace{(P_\varepsilon - f)(X)}_{\leqslant\varepsilon} \mathbb{1}_{\|X\|\leqslant A}\Big] \Bigg|
\end{aligned}$$

Donc

$$\overline{\lim}_n |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leqslant 2\varepsilon + (2\|f\|_\infty + \varepsilon)(\underbrace{\overline{\lim}\mathbb{P}(\|X_n\|_\infty > A)}_{\leqslant 4d\varepsilon} + \underbrace{\mathbb{P}(\|X\|_\infty > A)}_{\leqslant 2d\varepsilon}) = O(\varepsilon)$$

□

Remarque. Pour la version forte il manque un théorème qui dit qu'on peut extraire une sous-suite convergente de la suite des μ_{X_n}.

Théorème 4 (Prokhorov)

Soit μ_n une suite de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

$$\mu_n \text{ est tendue } \left(\forall \varepsilon, \exists K_\varepsilon \text{ compact } \sup_{\mathbb{N}} \mu_n(\overline{K_\varepsilon}) \leqslant \varepsilon\right)$$

$\Leftrightarrow$ de toute sous-suite on peut extraire une suite convergente pour la topologie faible

Une des applications du théorème de Lévy.

Théorème 5 (Théorème Central Limite, T.C.L.)

Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ v.a. réelles indépendantes de même loi L^2 avec $\mathbb{E}[X_i] = m$ et $\mathrm{Var} X_i = \sigma^2$. Alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Preuve.

Si $Y \in L^2$ réelle. $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[\underbrace{e^iYt}_{\text{2 fois dvb}}]$. Donc on peut dériver 2 fois sous l'espérance. On obtient :

$$\phi_Y'(t) = \mathbb{E}[iYe^{iYt}] \quad \text{et} \quad \phi_Y''(y) = -\mathbb{E}[Y^2 e^{iYt}]$$

$$\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= \phi_Y(0) + t\phi_Y'(t)(0) + \frac{t^2}{2}\phi_Y''(0) + o(t^2) \\
&= 1 + it\mathbb{E}[Y] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[Y^2] + o(t^2)
\end{aligned}$$

Ici :

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{X_1+...+X_n-nm}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{(X_1-m)+...+(X_n-m)}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&\underset{\text{idp}}{=} \mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{X_1-m}{\sqrt{n}}\right)\right] \times ... \times \mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{X_n-m}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&\underset{\text{même loi}}{=} \left(\phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\underbrace{\mathbb{E}[X_i - m]}_{0} - \frac{t^2}{2n}\underbrace{\mathbb{E}[(X_1-m)^2]}_{\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t^2}{2n}\sigma^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}+o(1)} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} = \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)
\end{aligned}$$

Par le théorème de Lévy :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

□

Exemple. (application statistique)

On a une population de N individus. Une proportion p (inconnue, $0 < p < 1$) est “Pour”, le reste “Contre”. Pour estimer p, on interroge n personnes choisies de manière indépendante et uniforme. Et on note :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{−ème personne est “Pour”} \\ 0 & \text{si elle est “Contre”} \end{cases}$$

Ce sont de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

D’après la LFGN $\hat{p}_n := \frac{X_1+...+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p$ p.s. Quelle taille n d’échantillon choisir pour assurer que on fait un erreur de 3% sur p dans au plus 1 sondage sur 20. On vaut donc n tel que :

$$\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > 0.03) \leqslant \frac{1}{20}$$

On sait que (rappel : on a $\mathbb{E}[X_i] = p$ et $\mathrm{Var}X_i = p(1-p)$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > 0.03) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - p\right| > 0.03\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n - np}{n} > 0.03\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X_1 + ... + X_n - np}{\sqrt{n}}}_{\sim_\infty \mathcal{N}(0,p(1-p))} \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} > 0.03\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \qquad (*) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}\right| > \frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) \qquad (*_2)
\end{aligned}$$

Car $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$. Donc il suffit d’avoir le second terme $\leqslant 0.05$ pour avoir $(*) \leqslant 0.05$. Notons Y_n la v.a. du terme de gauche. D’après le TCL, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
(*_2) &= \mathbb{P}(|Y_n| > 0.06\sqrt{n}) \\
&= 1 - F_{\frac{1}{n}}(0.06\sqrt{n}) + F_{Y_n}(-0.06\sqrt{n}) \\
&\underset{n \text{ grand}}{\approx} 1 - F_Z(0.06\sqrt{n}) - F_Z(-0.06\sqrt{n}) \\
&= \mathbb{P}(|Z| > 0.06\sqrt{n}) \\
&= 2\mathbb{P}(Z > 0.06\sqrt{n})
\end{aligned}$$

On veut :

$$2(1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(0.06\sqrt{n})) \leqslant 0.05$$

Donc :

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}(0.06\sqrt{n}) \leqslant 0.975$$

À lire dans les tables : $0.06\sqrt{n} \geqslant 1.96$. Ce qui donne $n \geqslant 1067$.

Remarque. Cela ne dépend pas de la population N. La raison est que $n\hat{p}_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, la taille de la population n’intervient déjà pas dans la loi.

Corollaire 1 (TCL dans $\mathbb{R}^d$)

Soit $X_1, X_2, ...$ une suite de v.a. indépendantes, L^2, de même loi dans $\mathbb{R}^d$. On note :

$$X_i = \begin{pmatrix} X_i(1) \\ \vdots \\ X_i(d) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m = \mathbb{E}[X_1] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1(1)] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_1(d)] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Soit $\Gamma = \Big(\mathrm{Cov}(X_1(i), X_1(j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big)$. Alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, \Gamma)$$

Preuve.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

$$\phi_{\frac{X_1+...+X_n-n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n}}}(\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}^d}) = \phi_{\langle \lambda, \frac{X_1+...+X_n-n\mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{n}}\rangle}(1)$$

Or,

$$\langle \lambda, \frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \rangle = \frac{\langle \lambda, X_1 \rangle + ... + \langle \lambda, X_n \rangle - n\mathbb{E}[\langle \lambda, X_i \rangle]}{\sqrt{n}}$$

où $(\langle \lambda, X_i \rangle)_{i \geqslant 1}$ v.a. indépendantes de même loi et L^2.

D'après le TCL dans $\mathbb{R}$ avec :

$$\mathbb{E}[\langle \lambda, X_i \rangle] = \sum_{k=1}^{d} \lambda(k)\mathbb{E}[X_i(k)] \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[\langle \lambda, X_i \rangle] = \sum_{k,l=1}^{d} \lambda(k)\lambda(l)\underbrace{\mathrm{Cov}(X_i(k), X_i(l))}_{\Gamma_{k,l}} = \lambda^T\Gamma\lambda$$

On obtient que :

$$\langle \lambda, \frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z_\lambda \sim \mathcal{N}(0, \lambda^T\Gamma\lambda)$$

Donc

$$\forall \lambda,\ \phi_{\frac{X_1+...+X_n-nm}{\sqrt{n}}}(\lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi_{Z_\lambda}(1) = e^{-\frac{\lambda^T\Gamma\lambda}{2}} = \phi_{\mathcal{N}(0,\Gamma)}(\lambda)$$

Donc par le théorème de Lévy :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

□

Comportement de marches aléatoires.

Dans $\mathbb{R}^d$, $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes, de même loi, L^2. La marche issue de 0 est (S_n) définie par : $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + ... + X_n$. Quel est le comportement de S_n ?

- si $m \neq 0$, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ p.s. donc $S_n \sim nm$ p.s. (comportement ballistique) en particulier $\|S_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ p.s.

$$\forall R > 0,\ \mathrm{Card}\{n \mid \|S_n\| \leqslant R\} < +\infty \text{ p.s.}$$

- si $m = 0$, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ p.s. On a $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} Z \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$. Donc :

$$\left\| \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} \|Z\| \quad \text{car} \quad (X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} X \text{ et } f \text{ continue}) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathcal{L})} f(X)$$

L'ordre de grandeur de $\|S_n\|$ est $\sqrt{n}$ mais cela ne signifie pas $\|S_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ p.s.