Analyse - TD2

Lucie Le Briquer

28 septembre 2017

Exercice 2 : Une caractérisation des compacts dans un espace de Banach

1. $\Rightarrow$: A compact donc précompact. A est fermé borné. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\{x_1, ..., x_n\}$ tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, \varepsilon)$. Donc en considérant $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$, pour tout $x \in A$, $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in \mathcal{B}(x_i, \varepsilon) \Rightarrow d(x, F) < \varepsilon$.

2. A fermé et E complet donc A complet. Il suffit donc de montrer que A est précompact. Soit $\varepsilon > 0$, A fermé donc $\exists r,\ A \subset \overline{\mathcal{B}(0, r)} \subset \overline{\mathcal{B}(0, r + \varepsilon)}$.

   $\overline{\mathcal{B}(0, r + \varepsilon)} \cap F_\varepsilon$ est fermé borné dans F et de dim finie. Donc précompact et :

   $$\overline{\mathcal{B}(0, r + \varepsilon)} \cap F_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, \varepsilon)$$

   Soit $y \in A$. $d(y, F_\varepsilon) < \varepsilon$, donc $\exists x \in F_\varepsilon$ tel que $d(y, x) < \varepsilon$.

   $$\begin{aligned} d(0, x) &\leq d(x, y) + d(y, 0) \\ &< \varepsilon + r \end{aligned}$$

   Donc $x \in \overline{\mathcal{B}(0, r + \varepsilon)}$. Alors $x \in \overline{\mathcal{B}(0, r + \varepsilon)} \cap F_\varepsilon$. Donc $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $d(x, x_i) < \varepsilon$. Ainsi $d(y, x_i) < 2\varepsilon$. Donc $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, 2\varepsilon)$.

Exercice 4 : Inversion locale et exponentielle

Soit A une algèbre de Banach unitaire : espace de Banach + loi multiplicative + neutre multiplicatif + $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$.

1. On a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|u^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|u\|^n}{n!} = e^{\|u\|}$$

   Donc exp est bien définie par CVN dans un Banach. CVU sur tout borné $\Rightarrow$ continue.

2.
   - $\exp(0) = 1$
   - exp est différentiable en 0 :

   $$\exp(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(h)^n}{n!} = 1 + h + \|h\|\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[\|h\| \to +\infty]{} 0$$

   $d\exp(0) = \text{id}$ est inversible. Par théorème d'inversion locale, exp est un difféomorphisme local entre 0 et 1.

Exercice 6 : Autour du théorème de Brouwer et du lemme de non-rétractation

1. (a) (lemme de rétractation) Soit $f\colon B \to S$ tq $f|_S = \mathrm{id}$. On pose $g = -f$. Si $x \in S$, $g(x) = -x$ et si $x \in B \backslash S$, $g(x) \in S$. Donc $g\colon B \to S$ est continue et n'admet pas de point fixe. Absurde par Brouwer.

   (b) On cherche $f\colon \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue telle qu'il n'existe pas de prolongement $g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue. Soit $f = \mathrm{id}|_{\mathbb{U}}$. Par l'absurde, si f se prolonge en $g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, considérons :

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & S \\ z & \longmapsto & \frac{g(z)}{|g(z)|} \end{array} \right.$$

   et $\varphi|_S = \mathrm{id}|_S$.

$$\forall z \in S,\ \varphi(z) = \frac{g(z)}{|g(z)|} = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{z}{|z|} = z$$

   donc $\varphi|_Z = \mathrm{id}$, $\varphi\colon B \longrightarrow S$ continue. Absurde par le lemme de non rétractation (Q1).

2. C compact, donc $\exists\ r > 0$ tel que $C \subset \mathcal{B}(0, r)$. Posons :

$$g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(0, r) & \to & \mathcal{B}(0, r) \\ x & \longmapsto & f \circ p_C(x) \end{array} \right.$$

   où p_C est la projecion orthogonale sur C (car C est convexe). Par Brouwer, $\exists\ x$ tel que $g(x) = x$. Donc $f \circ p_C(x) = x$. Comme $f\colon C \to C$, $x \in C$ donc $p_C(x) = x$. D'où $f(x) = x$.

Exercice 7 : Brouwer $\Rightarrow$ Schauder

1. Soit $\varepsilon > 0$

   (a) f continue, C compact donc $f(C)$ compact donc précompact.

   (b) $F = \mathrm{Vect}((a_i)_{1 \leq i \leq n})$, $C' = C \cap F$. C' convexe comme intersection de convexes. C' compact : c'est un fermé inclus dans un compact.

   (c) On cherche $\varphi_i\colon f(C) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, continues telles que $\varphi_i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{B}(a_i, \varepsilon)$. Prenons $\varphi_i(x) = \max(\varepsilon - \|x - a_i\|, 0)$. φ_i est continue.
   On pose $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(y)$ et $f(C) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(a_i, \varepsilon)$, donc il y a toujours un $\varphi_i(y) > 0$.
   Ainsi $\forall y \in f(C)$, $\varphi(y) > 0$. Il reste donc à normaliser : $\psi_i(y) = \frac{\varphi_i(y)}{\varphi(y)}$.

   (d) $p_\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(y) a_i$

   - p_ε est à valeurs dans C' : $a_i \in C'$ et $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$, donc par convexité, $p_\varepsilon(y) \in C'$
   - p_ε est continue comme somme d'applications continues.
   -

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon(y) - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \psi_i(y) a_i - y \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \psi_i(y) a_i - \sum_{i=1}^n \psi_i(y) y \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \psi_i(y)(a_i - y) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \psi_i(y) \|a_i - y\| \end{aligned}$$

Si $\psi_i(y) \neq 0,\ \|a_i - y\| \leq \varepsilon$. Donc :

$$\|p_\varepsilon(y) - y\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i(y)\right) \varepsilon \leq \varepsilon$$

(e) $f_\varepsilon = p_\varepsilon \circ f \colon C' \to C'$ est continue, et C' convexe compact dans un evn de dimension finie (F). Donc par Brouwer, f_ε admet un point fixe x_ε.

2. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on extrait de $x_{\frac{1}{n}}$ une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x$.

$$\left\| p_{\frac{1}{\varphi(n)}}\left(f(x_{\varphi(n)})\right) - f(x_{\varphi(n)}) \right\| \leq \frac{1}{\varphi(n)}$$