Analyse

Chapitre 3 : Théorème de Baire et de Banach

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

Définition 1 (espace de Baire)

Un espace topologique est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Théorème 1

Tout espace métrique complet est de Baire.

Preuve.
Soit (E,d) un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Posons :

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

$\overline{U} = E$ signifie que U rencontre tout ouvert : $\forall V$ ouvert $U \cap V \neq \emptyset$.

- U_0 est dense donc $U_0 \cap V \neq \emptyset$, ainsi $\exists x_0 \in U_0 \cap V$.
  U_0 ouvert et V ouvert, donc $U_0 \cap V$ ouvert. Ainsi, $\exists r_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$ et donc $\exists \rho_0 > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}(x_0,\rho_0)} \subset U_0 \cap V$.
- U_1 dense ainsi $U_1 \cap \mathcal{B}(x_0,\rho_0) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \rho_1 > 0, \exists x_1 \in U_1 \cap \mathcal{B}(x_0,\rho_0)$ tel que $\overline{\mathcal{B}(x_1,\rho_1)} \subset U_1 \cap \mathcal{B}(x_0,\rho_0)$. - ...

Par récurrence on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\overline{\mathcal{B}(x_{n+1}),\rho_{n+1}} \subset \mathcal{B}(x_n,\rho_n) \cap U_{n+1}$$

On peut de plus supposer que $\rho_n \leqslant 2^{-n}$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy puis que pour $p > n$ on a $x_n, x_p \in \mathcal{B}(x_n,\rho_n)$. Elle converge donc vers x.

$$\forall N, \forall n \geqslant N,\ x_n \in \overline{\mathcal{B}(x_N,\rho_N)} \quad \text{donc} \quad x \in \overline{\mathcal{B}(x_N,\rho_N)}$$

Valable $\forall N \;\Rightarrow\; x \in U_N\ \forall N$ et donc finalement $x \in U \cap V$. □

Corollaire 1

Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Preuve.
Si $F = \bigcup_p F_p$, alors $F^C = \bigcap_p F_p^C$ est dense. $\square$

Remarque. Cette forme est plus facile à utiliser.

> **Propriété 1**
> Un espace de Banach (qui n'est pas de dimension finie) n'admet pas de base dénombrable.

Preuve.
Soit E un espace de Banach. Par l'absurde, supposons que $(e_0, ..., e_n, ...)$ est une base. On pose $F_p = \text{Vect}(e_0, ..., e_p)$. Alors $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$. Si tous les F_p étaient d'intérieur vide, par le corollaire on aurait E d'intérieur vide ce qui est absurde.

Donc $\exists p_0$ tel que $\overset{\circ}{\widehat{F_p}} \neq \emptyset$: $\exists a, \exists r > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}(a, r) \subset \overset{\circ}{\widehat{F_{p_0}}} \subset F_{p_0}$$

Alors $\mathcal{B}(0, r) \subset F_{p_0}$ par linéarité. Alors $\lambda\mathcal{B}(0, r) \subset F_{p_0}$ $\forall\lambda > 0$. On obtient finalement $E \subset F_{p_0}$. Donc $E = F_{p_0}$, ainsi E est de dimension finie. $\square$

> **Théorème 2** (de Banach-Steinhauss)
> Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'applications linéaires continues, $T_\alpha \in \mathcal{L}(E, F)$, simplement bornées i.e. :
>
> $$\forall x \in E,\ \sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\|_F < +\infty$$
>
> Alors,
>
> $$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$$

Rappel.

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

$\mathcal{L}(E, F)$ est de Banach si F est de Banach.

Preuve.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et

$$F_p = \{x \in E \ ;\ \forall\alpha \in A, \|T_\alpha x\|_F \leqslant p\}$$

F_p est fermé car :

$$F_p = \bigcap_{\alpha\in A} \underbrace{\varphi_\alpha^{-1}}_{\text{continue}} (\underbrace{[0, p]}_{\text{fermé}})$$

où φ_α est l'application continue $\varphi_\alpha(x) = \|T_\alpha x\|_F$.

$$(T_\alpha) \text{ simplement borné} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N},\ x \in F_p$$

$$\text{Baire} \ + \ E = \bigcup F_p \quad \Rightarrow \quad \exists p_0 \in \mathbb{N} \mid \exists a \in E,\ \exists r > 0 \text{ tq } \mathcal{B}(a,r) \subset F_{p_0}$$

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha x\|_F &= \left\| T_\alpha \left(\frac{2\|x\|}{r} \left(\frac{r}{2\|x\|} x + a \right) - \frac{2\|x\|}{r} a \right) \right\|_F \\
&\leqslant \frac{2\|x\|}{r} \left\| T_\alpha \left(a + \frac{r}{2\|x\|} x \right) \right\| + \frac{2\|x\|}{r} \|T_\alpha a\|
\end{aligned}$$

Or $a \in \mathcal{B}(a,r)$, $a + \frac{r}{2\|x\|_E} \in \mathcal{B}(a,r)$, donc :

$$\|T_\alpha a\|_F \leqslant p_0, \qquad \left\| T_\alpha \left(a + \frac{r}{2\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leqslant p_0$$

car $\mathcal{B}(a,r) \subset F_{p_0}$. Donc :

$$\|T_\alpha x\|_F \leqslant \frac{4}{r} p_0 \|x\|_E \quad \forall \alpha \in A,\ \forall x \in E$$

Ainsi,

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$$

□

Théorème 3 (de l'application ouverte)

Soit E et F espaces de Banach et $T\colon E \to F$ linéaire et continue. Si T est bijective alors T^{-1} est continue.

Preuve.

Montrons que $\exists \delta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}_F(0,\delta) \subset T(\mathcal{B}_E(0,1)) \\
\Rightarrow \quad & T^{-1}(\mathcal{B}_F(0,\delta)) \subset T^{-1}(T(\mathcal{B}_E(0,1))) \\
\Rightarrow \quad & T^{-1}(\mathcal{B}_F(0,\delta)) \subset \mathcal{B}_E(0,1) \\
\Rightarrow \quad & \|y\|_F < \delta \Rightarrow \|T^{-1}y\|_E < 1 \\
\Rightarrow \quad & \|T^{-1}y\|_E \leqslant \frac{2}{\delta}\|y\|_F \qquad (\text{en prenant } \tilde{y} = \frac{\delta}{2\|y\|} y) \\
\Rightarrow \quad & T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)
\end{aligned}$$

Lemme 1

Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(0,c) \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,1))}$. Alors :

$$\mathcal{B}_F(0,c/2) \subset T(\mathcal{B}_E(0,1))$$

Preuve. (du lemme)
Soit $y \in \mathcal{B}_F(0,c)$. Montrons que $y \in T(\mathcal{B}_E(0,2))$. On a $y \in \overline{T(\mathcal{B}_E(0,1))}$, donc $\exists x_0 \in \mathcal{B}_E(0,1)$ tel que $\|y - Tx_0\|_F < \frac{c}{2}$. Donc $2(y - Tx_0) \in \mathcal{B}_F(0,c) \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,1))}$.

$$\Rightarrow \exists x_1 \in \mathcal{B}_E(0,1) \text{ tel que } \|2(y - Tx_0) - Tx_1\|_F < \frac{c}{2} \qquad \Rightarrow \left\| y - T\left(x_0 + \frac{1}{2}x_1\right)\right\|_F < \frac{c}{4}$$

Par récurrence on définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $x_n \in \mathcal{B}_E(0,1)$ telle que :

$$\left\| y - T\left(x_0 + \frac{1}{2}x_1 + ... + \frac{1}{2^n}x_n\right)\right\|_F < \frac{c}{2^{n+1}}$$

La série $\sum 2^{-n}x_n$ converge normalement donc converge car E est complet. Sa limite x appartient à $\mathcal{B}_E(0,2)$. De plus $y = Tx$ par passage à la limite dans l'expression précédente.
Donc $\mathcal{B}_F(0,c) \subset T(\mathcal{B}_E(0,2))$. $\square$

Alors pour montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}_F(0,\delta) \subset T(\mathcal{B}_E(0,1))$, il suffit de montrer que $\exists c > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_F(0,c) \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,1))}$$

Introduisons $F_p = \overline{T(\mathcal{B}_E(0,p))}$ alors $F = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$.

$$\begin{aligned} \text{Baire} \qquad & \Rightarrow \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \overset{\circ}{\widehat{F_{p_0}}} \neq \emptyset \\ & \Rightarrow \exists a \in F,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}(a,r) \subset F_{p_0} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(a,r) \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,p_0))} = p_0\overline{T(\mathcal{B}_E(0,1))}$$

En particulier, $a \in \overline{T(\mathcal{B}_E(0,p_0))}$. Donc $\exists x_n \in \mathcal{B}_E(0,p_0)$ tels que $a = \lim Tx_n$, alors $-a = \lim T(-x_n) \;\Rightarrow\; -a \in \overline{T(\mathcal{B}_E(0,p_0))}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{B}(a,r) - a \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,2p_0))} \\ &\Rightarrow \mathcal{B}(0,r) \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,2p_0))} \\ &\Rightarrow \mathcal{B}\left(0, \frac{r}{2p_0}\right) \subset \overline{T(\mathcal{B}_E(0,1))} \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 2

Soit E, F des espaces de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$. Si $(T_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout x vers $T(x)$, alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Preuve.
$x \mapsto T(x)$ linéaire ok. De plus, $\forall x \in E,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_nx\|_F < +\infty$. Donc :

$$\sup_{\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$$

Donc $\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E, \quad \|T_nx\|_F \leqslant c\|x\|_E$ En passage à la limite :

$$\|Tx\|_F \leqslant c\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Donc $T \in \mathcal{L}(E,F)$. $\square$

Contre-exemple. Soit $T\colon f \mapsto f'$ de $E \to F$ avec $E = \Big(\mathcal{C}^1([0,1]), \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)\Big)$ et $F = \Big(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty\Big)$. T est linéaire mais pas continue. Prendre $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dans E mais $\|T\varphi_n\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Corollaire 3 (équivalence des normes)

Soit E un espace vectoriel muni de 2 normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ de Banach pour ces 2 normes. Si

$$\exists c > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \quad (*)$$

alors :

$$\exists c' > 0 \mid \forall x \in E,\ \|x\|_2 \leqslant c'\|x\|_1 \quad (**)$$

Preuve.
Considérons :

$$T\colon \begin{cases} (E, \|.\|_2) & \longrightarrow & (E, \|.\|_1) \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow$ T continue. Théorème de l'application ouverte $\Rightarrow$ T^{-1} continue $\Rightarrow$ $(**)$. $\square$

Exemple. Soit

$$T\colon \begin{cases} L^1(\mathbb{T}) & \longrightarrow & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

On a vu T linéaire continue, injective. Supposons T surjective. Alors T^{-1} serait continue :

$$\Rightarrow \quad \exists c > 0 \mid \|T^{-1}u\|_{L^1} \leqslant c\|u\|_{l^\infty}$$

Considérons $u_N = T(D_N)$ où $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$. On a :

$$u_N = (\dots, 0, \dots, 0, \underbrace{1, .., 1}_{\text{de } -N \text{ à } N}, 0, \dots, 0, \dots)$$

car $(u_N)_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ipx} D_N(x)dx$. Donc $\|u_N\|_{l^\infty} = 1$.
Or $T^{-1}(u_N) = D_N$ et $\|D_N\|_{L^1}$

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |D_N(x)|dx &\geqslant \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{\frac{x}{2}} \\ &\geqslant 2\int_0^{(2N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

Donc T n'est pas surjective.

Théorème 4 (du graphe fermé)

Soit E et F deux espaces de Banach et $T\colon E \longrightarrow F$ linéaire. Alors

$$T \text{ est continue} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}(T) = \{(x, Tx)\ :\ x \in E\} \quad \text{est fermé dans } E \times F$$

Preuve.

1. T continue $\Rightarrow \mathcal{G}(T)$ fermé.
   Soit $(x_n, t_n) \in \mathcal{G}(T)$, convergeant vers (x, y) Alors $y_n = Tx_n$. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et T continue $\Rightarrow$ $Tx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Tx$. Or $y_n = Tx_n$ converge vers y. Alors par unicité de la limite on a $y = Tx$, i.e. $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$. Donc $\mathcal{G}(T)$ est fermé.

2. $\mathcal{G}(T)$ fermé $\Rightarrow$ T continue.

   Introduisons $N(x) = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ (appelée *norme du graphe*).

   $$N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \qquad N(\lambda x) = |\lambda N(x)| \qquad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

   Montrons que $(E, N(.))$ est de Banach. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. Alors (x_n) est de Cauchy dans $(E, \|.\|_E)$. Or $(E, \|.\|_E)$ est complet donc $\exists x \in E$, $\|x_n - x\|_E \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De même $\exists y \in F$ tel que $\|Tx_n - y\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\mathcal{G}(T)$ est fermé dans $(E \times F)$ donc $y = Tx$. Donc :

   $$N(x_n - x) = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - y\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Donc $(E, N(.))$ de Banach.

   De plus, on a que $\|x\|_E \leqslant N(x)\ \forall x \in E$. Le corollaire sur l'équivalence des normes implique qu'il existe $c > 0$ tel que :

   $$N(x) \leqslant C\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \|x\|_E + \|Tx\|F \leqslant c\|x\|_E \\ &\Rightarrow \quad \|Tx\|_F \leqslant (c-1)\|x\|_E \\ &\Rightarrow \quad T \in \mathcal{L}(E, F) \end{aligned}$$

□