Logique

Logique intuitionniste et sémantique de Kripke

Lucie Le Briquer

1 Déduction naturelle intuitionniste

Précedemment : on a montré la correction de la *déduction naturelle*, i.e. si un jugement est prouvable, il est valide.

Remarque.
Déduction naturelle NK_0 diffère de NJ_0 (intuitionniste) qui correspond à $NK_0 - (\text{Abs}) + (\perp E)$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}(\perp E) \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}(\text{Abs})$$

Théorème 1 (correction)
Si $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable dans NK_0 alors $\Gamma \vdash \varphi$ est valide

Théorème 2 (complétude)
Si $\Gamma \vdash \varphi$ est valide dans NK_0 alors $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable

Lemme 3
Soit $\Gamma \vdash \varphi$ valide tel que $\forall$ var prop A de $\Gamma \vdash \varphi$, $\{A, \neg A\} \cap \Gamma \neq \emptyset$
Alors $\Gamma \neg\varphi$ est prouvable dans NJ_0

Preuve.
Par récurrence sur $(|\Gamma|, |\varphi|)$ où
$|\Gamma|$ = nombre de formules dans Γ
$|\varphi|$ = taille (= nombre de connecteurs logiques dans φ)

- $\varphi = T$
- $\varphi = \perp$
  - Cas 1 : ..

- Cas 2 : $\exists \psi \in \Gamma - Lit(P)$ On pose $\Gamma' = \Gamma - \{\psi\}$
  $\Gamma' \vdash \neg\psi$ est valide alors par récurrence il est prouvable

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma' \vdash \neg\psi}{\Gamma', \psi \vdash \neg\psi}(\text{Aff}) \quad \dfrac{}{\Gamma', \psi \vdash \psi}(\text{Ax})}{\Gamma', \psi \vdash \bot}(\neg E)$$

- $\varphi \in Lit(P)$
- $\varphi = \neg T$
- $\varphi = \neg\bot$
- $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$: $\Gamma \vdash \psi_1$ et $\Gamma \vdash \psi_2$ sont valides donc par réc prouvables + $(\wedge I)$
- $\varphi = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$: $\Gamma \vdash \neg\psi_1$ ou $\Gamma \vdash \neg\psi_2$ est valide
  supposons par symétrie $\Gamma \vdash \neg\psi_1$ est valide donc prouvable par récurrence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \psi_1 \wedge \psi_2 \vdash \psi_1 \wedge \psi_2}(\text{Ax})}{\Gamma, \psi_1 \wedge \psi_2 \vdash \psi_1}(\wedge E_1) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\psi_1}{\Gamma, \psi_1 \wedge \psi_2 \vdash \neg\psi_1}(\text{Aff})}{\Gamma, \psi_1 \wedge \psi_2 \vdash \bot}(\neg E)}{\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)}(\neg I)$$

- etc.

Lemme 4

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}(\neg L)$$

est dérivable dans NJ_0

Preuve.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi}(\text{Aff}) \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}(\text{Ax})}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}(\neg E)$$

Remarque.
On note :

$$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}(\text{Abs})$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}(\text{DN})$$

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\neg\varphi}(\text{TE})$$

Lemme 5

$NJ_0 + (\text{Abs}), NJ_0 + (\text{DN}), NJ_0 + (\text{TE})$ sont équivalents

Preuve.
(du théorème)
On suppose $\Gamma \vdash \varphi$ valide.
On montre par récurrence sur $\mathcal{A}(\Gamma \vdash \varphi) = |\{A | A$ apparaît dans $\Gamma \vdash \varphi$ et $\{A, \neg A\} \cap \Gamma = \emptyset\}|$

- si $\mathcal{A}(\Gamma \vdash \varphi) = 0$: lemme précédent
- sinon soit A tq $\{A, \neg A\} \cap \Gamma = \emptyset$
  $\Gamma, A \vdash \varphi$ et $\Gamma, \neg A \vdash \varphi$ sont valides, par rec sont prouvables

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}(\text{TE}) \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash \varphi}(HR) \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \varphi}(HR)}{\Gamma \vdash \varphi}(\vee E)$$

2 Calcul des séquents

Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ, Δ sont des multi-ensembles de formules
Pour $I \subseteq P$: $I \models \Gamma \vdash \Delta$ si ou bien $\exists \varphi \in T \; I \not\models \varphi$ ou bien $\exists \varphi \in \Delta \; I \models \varphi$
Définition des règles de LK_0

Théorème 6 (correction et complétude)

$\Gamma \vdash \Delta$ est valide ssi $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable en LK_0

Théorème 7 (élimination des coupures)

$\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK_0+cut ssi $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK_0
Où :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}(\text{cut})$$

Preuve.
Supposons $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK_0+cut. Par correction de LK_0+cut, $\Gamma \vdash \Delta$ est valide. Par complétude de LK_0, $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK_0.

Théorème 8 (propriété de la sous-formule)

Si Π est une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans LK_0 (sans cut) et si $\Gamma' \vdash \Delta'$ apparait dans Π alors $\forall \; \varphi' \in \Gamma' \cup \Delta'$, $\exists \; \varphi \in \Gamma \cup \Delta$ telle que φ' est une sous-formule de φ.

Preuve.
Dans LK_0, on ne fait que "casser" des formules. On fait apparaître une nouvelle φ avec la règle Cut.

$\square$

Remarque.
Ce théorème permet de montrer qu'on ne peut avoir de preuve de $\perp$.

Définition 1 (LJ_0)

$$\frac{}{\Gamma\varphi \vdash \varphi}(\text{Ax})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \psi}\ (\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \psi}(\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}(\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \vdash \psi}(\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}(\vee R_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \varphi_1 \to \varphi_2 \vdash \psi}(\Rightarrow L) \qquad \frac{\Gamma\varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \to \varphi_2}(\Rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}(\neg L) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi}(\neg R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}(\text{WL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}(\text{WR})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}(\text{CL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}(\text{cut})$$

Théorème 9

1. LJ_0+cut= LJ_0
2. LJ_0 a la propriété de la sous-formule

Exemples.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}(\text{Ax})}{A \vdash A \wedge B}(\wedge R_1)}{\neg(A \wedge B), A \vdash \perp}(\neg L)}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A}(\neg R) \quad \dfrac{}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}}{\dfrac{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}{\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)}(\Rightarrow R)}(\wedge R)$$

3 Modèles de Kripke

$K = (W, \leq_K, \alpha_K)$

- W est un ensemble de *mondes*
- $\leq_K$ est un ordre (partiel) sur les mondes
- $\alpha_K : W \longrightarrow 2^p$, α_K est croissante : si $W \leq_K W'$, alors $\alpha_K(W) \subset \alpha_K(W')$

Sémantique de Kripke.
$w \in W$, $K, w \Vdash \varphi$ est défini par récurrence sur φ

- $K, w \Vdash \bot$ jamais
- $K, w \Vdash \top$ toujours
- $K, w \Vdash A$ ssi $A \in \alpha_K(w)$
- $K, w \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ si $K, w \Vdash \varphi_1$ et $K, w \Vdash \varphi_2$
- $K, w \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ si $K, w \Vdash \varphi_1$ ou $K, w \Vdash \varphi_2$
- $K, w \Vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ si $\forall w' \geq_K w$ si $K, w' \Vdash \varphi_1$ alors $K, w' \Vdash \varphi_2$
- ... compléter
- $K, w \Vdash \Gamma$ si pour tout $\varphi \in \Gamma,\ K, w \Vdash \varphi$
- $K, w \Vdash (\Gamma \vdash \varphi)$ si ($K, w \Vdash \Gamma$ implique $K, w \vdash \varphi$)
- $\Gamma \vdash \varphi$ est valide si pour tout K, pour tout $w \in K$, $K, w \Vdash (\Gamma \vdash \varphi)$

Théorème 10 (correction)
si $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable en LJ_0 alors $\Gamma \vdash \varphi$ est valide.

Preuve.
Par récurrence sur la taille de la preuve de $\Gamma \vdash \varphi$. Autrement dit pour toute règle, si les prémisses sont valides alors la conclusion est valide.

- ($\Rightarrow$R) supposons $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2$ est valide, montrons que $\Gamma \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ est valide.
  Soit $K = (W, \leq, \alpha)$ un modèle de Kripke, soit $w \in W$.
  Supposons $K, w \Vdash \Gamma$, montrons que $K, w \Vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$
  Soit $w' \geq w$. Supposons $K, w' \Vdash \varphi_1$, montrons que $K, w \Vdash \varphi_2$
  $K, w' \Vdash (\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2)$ par hypothèse alors $K, w' \Vdash \Gamma$ par lemme de monotonie donc $K, w' \Vdash \varphi_2$

$\square$

Lemme 11 (de monotonie)
Si $w \leq w'$ et $K, w \Vdash \varphi$ alors $K, w' \Vdash \varphi$

Définition 2 ($LJ_0^{\Rightarrow}$)

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}(\text{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 \vdash \psi}(\Rightarrow L) \qquad \frac{\Gamma\varphi_1 \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2}$$

+ structurelles

Théorème 11 (complétude de $LJ_0^{\Rightarrow}$)

si $\Gamma \vdash \varphi$ est valide et Γ, φ ne comportent que $\Rightarrow$ alors $\Gamma \vdash \varphi$ est prouvable en $LJ_0^{\Rightarrow}$

Preuve.
Si $S \subset \mathcal{F}(P)$, on note $S^* = \{\varphi \mid \exists\ \Gamma \subseteq S\ \Gamma \vdash \varphi \text{ prouvable en } LJ_0^{\Rightarrow}\}$

- $S \subseteq S^*$ par (Ax)
- $(S^*)^* = S^*$ en utilisant (cut, WL)

On dit que S est saturé si $S = S^*$.
On pose $K_U = (W, \leq, \alpha)$ où :

- W est l'ensemble des ensembles de familles saturées
- $\leq = \subseteq$
- $\alpha(S) = S \cap P$

C'est un modèle de Kripke (α est monotone)

Lemme 12

$K_U, S \Vdash \varphi$ ssi $\varphi \in S$

Par récurrence sur φ :

- si $\varphi \in P$: $K_U, S \Vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \alpha(S) \;\Leftrightarrow\; \varphi \in S \cap P \;\Leftrightarrow\; \varphi \in S$
- si $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$
  $\Leftarrow$: supposons $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \in S$ montrons que $K_U, S \Vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$
  Soit $S' \supseteq S$, supposons $K_U, S' \Vdash \varphi_1$ montrons que $K_U, S' \Vdash \varphi_2$
  Par hypothèse de récurrence $\varphi_1 \in S'$
  Par monotonie $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \in S'$ $(S \subseteq S')$

  $$\frac{}{\varphi_1 \vdash \varphi_1}(\text{Ax}) \qquad \frac{}{\varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi_2}(\text{Ax}) \qquad \frac{}{\varphi_1, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \vdash \varphi_2}(\Rightarrow L)$$

  $\varphi_2 \in (S')^* = S'$, par hypothèse de récurrence $K_U, S' \Vdash \varphi_2$

Retour à la preuve du théorème :

Soit $\Gamma \vdash \varphi$ valide. $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, Γ^* est saturé.
Montrons que $K_U, \Gamma^* \Vdash \Gamma$. Soit $\varphi \in \Gamma \subseteq \Gamma^*$, par le lemme $K_U, \Gamma^* \Vdash \varphi$ donc $K_U, \Gamma^* \Vdash \varphi$.
Par le lemme $\varphi \in \Gamma^*$. Par définition, $\exists \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ tel que $\Gamma_1 \vdash \varphi$ est prouvable.

$\square$