Théorie Spectrale

Chapitre 1 : Introduction à la théorie spectrale

Lucie Le Briquer

Table des matières

1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (complexe).

Définition 1 (produit scalaire)

Un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ est une forme sesquilinéaire (1+2) hermitienne définie positive. $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ telle que :

1. $\forall x, x',\ y \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C}\ B(x + \lambda x', y) = B(x, y) + \lambda B(x', y)$
2. $\forall x, y, y' \in \mathcal{H},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ B(x, y + \lambda y') = B(x, y) + \bar{\lambda} B(x, y')$
3. $\forall x, y \in \mathcal{H}\ B(y, x) = B(x, y)$
4. $\forall x \in \mathcal{H}, B(x, x) \geqslant 0,\ B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On note $B(x, y) = \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}$.

La norme associée est $\|x\| = \sqrt{B(x, x)} = \|x\|_{\mathcal{H}}$.
$x, y \in \mathcal{H}$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. Et si E sev de $\mathcal{H}$ on note :

$$E^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} \mid \langle x, y\rangle = 0\ \forall x \in E\}$$

Remarque.

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle$
- $\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (identité de la médiane)
- $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\Re\langle x, y\rangle$

Propriété 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

$x \to \|x\|$ est une norme et

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Définition 2 (Espace de Hilbert, norme préhilbertienne et hilbertienne)

- Une norme préhilbertienne est une norme associée à un produit scalaire.
- Elle dite hilbertienne si complète.
- Un espace de Hilbert est un espace vectoriel (complexe) muni d'un produit scalaire de norme associée hilbertienne.
- Un isomorphisme d'espaces préhilbertiens (ou de Hilbert) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ est $\varphi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ isomorphisme linéaire préservant les produits scalaires ($\forall x, y \in \mathcal{H}_1\ \langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_1}$) $\Leftrightarrow$ préservant les normes associées ($\forall x \in \mathcal{H}_2\ \|\varphi(x)\|_{\mathcal{H}_2} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}$) $\Leftrightarrow$ préservant les normes associées (isométrique)

Exemple.

1. Espace hermitien standard de dim $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$
2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré non vide.

$$\mathbb{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mesurables tq } |f|^2 \text{ intégrable}\}$$

   muni de $\langle f, g\rangle = \int_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$

Théorème 1 (complété)

Pour tout $\mathcal{H}$ espace préhilbertien, $\exists\ \hat{\mathcal{H}}$ espace de Hilbert et $i : \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ linéaire, isométrique, d'image dense. Si $(\hat{\mathcal{H}}^\#, i^\#)$ est un autre tel couple, alors $\exists! j : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}^\#$ isomorphisme d'espaces de Hilbert tq $j \circ i = i^\#$.

Remarque. $\hat{\mathcal{H}}$ = le *complété* de $\mathcal{H}$, on identifie $\mathcal{H}$ avec son image dans $\hat{\mathcal{H}}$ et deux tels complétés par l'unique isomorphisme ci-dessus.

1.1 Projection sur un convexe

Théorème 2

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé non vide. $\forall x \in \mathcal{H}\ \exists! y = p_C(x) \in C$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{z\in C} \|x - y\| \Leftrightarrow d(x, y) = d(x, C)$$

De plus $p_C : \mathcal{H} \to C$ est 1-lipschitzienne, c'est la *projection orthogonale* sur C. Et $y = p_C(x)$ est l'unique point de C tq :

$$\forall z \in C,\ \Re\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0 \quad \text{(angle obtus)}$$

Si C est un sev, alors p_C est linéaire et $y = p_C(x)$ est l'unique point de C tq $x - y \in C^\perp$

Corollaire 1

Soit E sev de $\mathcal{H}$.

1. E fermé $\Rightarrow E^\perp$ supplémentaire de $E \quad \mathcal{H} = E \oplus E^\perp$
2. E dense $\Leftrightarrow E^\perp = \{0\}$

1.2 Dualité

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Le *dual topologique* de E est l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $E^* = E' = \{l : E \to \mathbb{K} \text{ forme linéaire continue}\}$ muni de la *norme duale*

$$\|l\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|l(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |l(x)|$$

Le *bidual topologique* est E^{**}

Proposition 1

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \max_{l \in E^*,\ \|l\| \leqslant 1} |l(x)|$$

Remarque. Il y a suffisamment de formes linéaires pour mesurer la norme du vecteur.

Corollaire 2

$$\begin{cases} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \{ev_x : l \mapsto l(x)\} \end{cases}$$

est linéaire isométrique. Son image est fermée si E est de Banach.
On identifie souvent E avec son image dans E^{**}

Preuve.
$\forall x \in E,\ ev_x : E \to \mathbb{K}$ linéaire, de norme égale à $\|x\|$ par la proposition précédente. $x \mapsto ev_x$ est linéaire, isométrique, donc son image est complète si E Banach. Une partie complète d'un evn est fermée. $\square$

Définition 3 (application duale)

$\forall u \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$^t u : \begin{cases} F^* & \to & E^* \\ l & \mapsto & l \circ u \end{cases}$$

est appelée l'application duale de u. ($\mathcal{L}$ notation pour les linéaires continues)

Remarques.

- si E, F de dim finie, si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ bases de E, F. Si $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_j^*)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ bases duales de E^*, F^*, si M matrice de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases (e_i) et (f_j), alors M^T est la matrice de $^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ dans les bases (f_j^*) et (e_i^*)

- $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{L}(F^*, E^*) \\ u & \mapsto & ^t u \end{cases}$ est linéaire et isométrique car :

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \underset{\text{prop}}{=} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} |l(u(x))| \\ &= \sup_{\|l\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |^t u(l)(x)| = \sup_{\|l\| \leqslant 1} \|^t u(l)\| \\ &= \|^t u\| \end{aligned}$$

- $^t(^t u)|_E = u$ car $^t(^t u) \in \mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$, $\forall x \in E, \forall l \in F^*$

$$\begin{aligned} ^t(^t u)(ev_x)(l) &= ev_x(^t u(l)) = ev_x(l \circ u) \\ &= ev_{u(x)}(l) \end{aligned}$$

Définition 4 (espace vectoriel conjugué)

Soit E un ev complexe. Son *espace vectoriel conjugué* $\overline{E}$ est le groupe additif E muni de la multiplication externe :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda, x) & \longmapsto & \bar{\lambda}x \\ \mathbb{C} \times \overline{E} & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array} \right.$$

Remarques.

- norme de $E \leftrightarrow$ norme de $\bar{E}$
- forme sesquilinéaire sur $E \leftrightarrow$ forme bilinéaire

Théorème 3 (Riesz-Fréchet)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $\overline{\mathcal{H}}^*$ le dual topologique du conjugué de $\mathcal{H}$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}}^* \\ x & \longmapsto & \{y \mapsto \langle x, y \rangle\} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme linéaire isométrique pour les normes de $\mathcal{H}$ et la norme duale de $\overline{\mathcal{H}}^*$

Corollaire 3

$\forall a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ forme sesquilinéaire continue :

$$\exists!\ u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ tel que } \forall x, y \in \mathcal{H} \quad \langle u(x), y \rangle = a(x, y)$$

De plus, a hermitienne $\Rightarrow u$ *auto-adjoint* ($\forall x, y \in \mathcal{H}\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$).

Preuve.

$\forall x \in \mathcal{H}$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & a(x, y) \end{array} \right.$ est linéaire, continue. Donc, par Riesz-Fréchet, il existe un unique $u(x) \in \mathcal{H}$ tel que $\forall y \in \mathcal{H}\ \langle u(x), y \rangle = a(x, y)$. Par unicité, u est linéaire. Comme :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = a(x, u(x)) \\ &\leqslant \|x\| \|u(x)\| \|a\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|u(x)\| \leqslant \|a\| \|x\|$. u est donc continue. □

Définition 5 (coercive)

Une forme sesquilinéaire $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est *coercive* si :

$$\exists c' > 0,\ \forall x \in \mathcal{H} \quad a(x, x) \geqslant c' \|x\|^2$$

Théorème 4 (Lax-Milgram)

Soit $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilinéaire, continue, coercive.

$$\forall l \in \overline{\mathcal{H}}^*,\ \exists! u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{H} \quad a(u,v) = l(v)$$

De plus, si a hermitienne, alors u est l'unique élément de $\mathcal{H}$ tel que :

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \Re(l(u)) = \min_{v \in \mathcal{H}} \left(\frac{1}{2}a(v,v) - \Re(l(v)) \right)$$

1.3 Bases hilbertiennes

Définition 6 (somme hilbertienne)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de sev fermés de $\mathcal{H}$. On dit que $\mathcal{H}$ est une *somme hilbertienne de* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :

1. les E_n sont 2 à 2 orthogonaux
2. le sev engendré par les E_n est dense dans $\mathcal{H}$

On note $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} E_n$

Remarque. (important) somme hilbertienne $\neq$ somme directe

Exercice. Soit $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Hilbert. Posons :

$$\mathcal{H} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n \mid \sum \|x_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < +\infty\}$$

et $< x, y >= \sum_{n\in\mathbb{N}} < x_n, y_n >_{\mathcal{H}_n}$.

1. Montrer que $(\mathcal{H}, <,>_{\mathcal{H}})$ est un espace de Hilbert, séparable (admet un sous ensemble dénombrable dense) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est séparable.
2. Soit $\mathbb{E}_n =$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ dont tous les termes sont nuls sauf le $n^{\text{ème}}$. Montrer que E_n est un sev fermé de $\mathcal{H}$ isomorphe à $\mathcal{H}_n$ et que $\mathcal{H}$ est somme hilbertienne des E_n.

Théorème 5 (égalité de Parseval)

Supposons $\mathcal{H}$ somme hilbertienne de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\forall x \in \mathcal{H}$ posons $x_n = p_{E_n}(x)$. Alors $\forall x \in \mathcal{H}$, les séries $\sum x_n$ et $\sum \|x_n\|^2$ convergent et $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ et $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$.
Réciproquement, $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in E_n$ tel que $\sum \|x_n\|^2$ converge. Alors $\sum x_n$ converge et si $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ alors $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$

Remarques.

- $\sum \|x_n\|$ n'est pas toujours convergente
- D'une convergence de série en dimension 1 on en déduit une convergence en dimension infinie.

Définition 7 (base hilbertienne)

Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, une *base hilbertienne* de $\mathcal{H}$ est une base orthogonale. Sinon, une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ est une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}$ engendrant un sev dense. $\|e_n\| = 1$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$ et $\overline{\text{Vect}(e_n | n \in \mathbb{N})} = \mathcal{H}$

Remarques.

- $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne $\Leftrightarrow$ e_n unitaire et $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} e_n$
- base hilbertienne $\neq$ base vectorielle
- si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de $\mathcal{H}$ alors $\forall x \in \mathcal{H}, \exists! (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (coordonnées hilbertiennes) dans $\mathbb{C}$ tel que $\sum \lambda_n e_n$ et $\sum |\lambda_n|^2$ convergent et $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2$ avec $\lambda_n = \langle x, e_n\rangle$

Exemple. $(e_n : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ base hilbertienne de $\mathbb{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.
Coordonnées hilbertiennes :

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Ce sont les coefficients de Fourier.
Transformation de Fourier inverse :

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$$

Formule de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Théorème 6

$$\mathcal{H} \text{ admet une base hilbertienne } \Leftrightarrow \mathcal{H} \text{ est séparable}$$

Théorème 7

Deux espaces de Hilbert séparables sont isomorphes.

1.4 Convergence faible

Définition 8 (convergence faible)

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}$ *converge faiblement* vers $f \in \mathcal{H}$ si :

$$\forall g \in \mathcal{H} \quad \langle f_n, g\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, g\rangle \text{ dans } \mathbb{C}$$

et on note $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$

Remarque. (attention) convergence forte $\Rightarrow$ convergence faible. En revanche la réciproque n'est vraie qu'en dimension finie.

- convergence forte :
$$f_n \to f \ \Leftrightarrow\ \|f_n - f\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- convergence faible :
$$f_n \rightharpoonup f \ \Leftrightarrow\ \forall g\ \langle f_n, g\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, g\rangle$$

Propriété 2 (propriétés sur la convergence faible)

1. Toute suite faiblement convergente est bornée
2. si E, F sont des espaces de Hilbert, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors l'image par u d'une suite faiblement convergente est faiblement convergente

Théorème 8 (Théorème de compacité faible de la boule unité fermée d'un Hilbert)

Toute suite bornée dans $\mathcal{H}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

Propriété 3

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans $\mathcal{H}$ et $\|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x\|$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x.

Preuve.
$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re < x_n, x >$$

□

Exemple. (suite faiblement convergente mais pas fortement)
(e_n) une base hilbertienne $e_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ mais $e_n \not\to 0$.

2 Spectre des opérateurs continus

Soient E espace de Banach complexe et $u \in \mathcal{L}(E)$ un *opérateur continu* de E.

Définition 9 (définitions importantes)

- *valeur régulière* de u : $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{id}$ soit inversible dans $\mathcal{L}(E)$
- *ensemble résolvant* de u : $\{$valeurs régulière de $u\} \subset \mathbb{C}$
- *valeur spectrale* de u : $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{id}$ non inversible dans $\mathcal{L}(E)$
- *spectre* de u : $\mathrm{Sp}(u) = \{$valeurs spectrales de $u\}$
- *application résolvante* :

$$R_u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(u) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \lambda & \longmapsto & (u - \lambda \mathrm{id})^{-1} \end{array} \right.$$

- *rayon spectral* : $\rho(u) = \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$
- *valeur propre* de u : $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{id}$ non injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$
- son *espace propre associé* : $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id})$
- sa *multiplicité* : $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- un *vecteur propre associé* : un élément non nul de son espace propre
- le *spectre poncutel* : $\mathrm{Vp}(u) = \{$valeurs propres de $u\}$
- le *spectre résiduel* : $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \mathrm{Vp}(u) \text{ et } \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}) \text{ non dense dans } E\}$

Exemple. Si $E \neq \{0\}$, si $u = 0$ alors :

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Vp}(u) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$$

si $u = \mathrm{id}$

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Vp}(u) = \{1\} \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$$

Remarques.

1. Si $\dim E < +\infty$, alors $\forall u : E \to E$ linéaire :

$$u - \lambda \mathrm{id} \text{ inversible } \Leftrightarrow u - \lambda \mathrm{id} \text{ surjective } \Leftrightarrow u - \lambda \mathrm{id} \text{ surjective}$$

   donc $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Vp}(u) = \{\text{racines de } \det(u - \lambda \mathrm{id})\}$, $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Vp}(u)} |\lambda|$

2. *Théorème de Banach.* Soient E, F espaces de Banach, $f : E \to F$ linéaire, continue, bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est continue. Donc :

$$u - \lambda \mathrm{id} \text{ non inversible} \Leftrightarrow u - \lambda \mathrm{id} \text{ non bijectif}$$

3. bijectif $\Rightarrow$ injectif donc $\mathrm{Vp}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)$

4. bijectif $\Rightarrow$ surjectif donc $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)$

5. Soient E_1, E_2 espaces de Banach, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$. u_1 et u_2 sont *conjugués* si $\exists v : E_1 \to E_2$ homéo linéaire tel que : $u_2 = v \circ u_1 \circ v^{-1}$.

   Dans ce cas : $\mathrm{Sp}(u_1) = \mathrm{Sp}(u_2)$, $\mathrm{Vp}(u_1) = \mathrm{Vp}(u_2)$, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u_1) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u_2)$
   car $(u_2 - \lambda\mathrm{id}) = v \circ (u_1 - \lambda\mathrm{id}) \circ v^{-1}$

   Méthodologie. Aide au calcul du spectre, conjuguer à partir d'exemples de spectres connus

Exercice. $\forall \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \forall \beta \in \mathbb{C}$ on a :

$$\mathrm{Sp}(\alpha u + \beta\mathrm{id}) = \alpha\mathrm{Sp}(u) + \beta$$

$$\mathrm{Vp}(\alpha u + \beta\mathrm{id}) = \alpha\mathrm{Vp}(u) + \beta$$

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(\alpha u + \beta\mathrm{id}) = \alpha\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) + \beta$$

Exercice. Si $E = E_1 \oplus E_2$ où E_i sev fermés et $u(E_i) \subset E_i$

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u|_{E_1}) \cup \mathrm{Sp}(u|_{E_2})$$

$$\mathrm{Vp}(u) = \mathrm{Vp}(u|_{E_1}) \cup \mathrm{Vp}(u|_{E_2})$$

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u|_{E_1}) \cup \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u|_{E_2})$$

Remarque. (attention) ce résultat est faux pour une somme hilbertienne, valable que pour un nombre fini

Théorème 9

Soient E espace de Banach complexes et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{C}$ est compact et $\rho(u) \leqslant \|u\|$

2. $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset \Leftrightarrow E \neq \{0\}$

3. si $E \neq \emptyset$, alors :
$$\rho(u) = \lim_{n \to +\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Remarque. Pour 1. on a pas toujours l'égalité, par exemple :

$$\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{0\} \text{ mais } \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\| = 1 \neq 0$$

Exercice 1.

Soient $\mathcal{H}$ espace de Hilbert complexe (séparable de dimension infinie), $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. C compact de $\mathbb{C}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dense dans C.

1. Montrer que $\exists! u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ \forall n \in \mathbb{N}\ u(e_n) = \lambda_n e_n$

2. Montrer que $\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et que $\mathrm{Sp}(u) = C$, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$. En déduire que tout compact de $\mathbb{C}$ est le spectre d'un opérateur continu.

Solution 1.

1. Montrons que $\exists! u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, u(e_n) = \lambda_n e_n$

   Existence. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coordonnées hilbertiennes de x dans $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. Définissons :

   $$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \lambda_n e_n \end{array} \right.$$

   On a :

   $$\sum |x_n \lambda_n|^2 < M \sum |x_n|^2 < +\infty$$

   car les λ_n sont bornés car dans un compact, et $(x_n) \in \mathcal{L}^2$ Alors, par la réciproque de Parseval, $\sum x_n \lambda_n e_n$ converge. Donc u est bien définie.

   Cette application est clairement linéaire par la linéarité des coordonnées hilbertiennes.

   Montrons la continuité. $\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| < K$:

   $$\|u_n\|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n|^2 \leqslant K^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \leqslant K^2 \|x\|^2$$

   Donc u est continue.

   Unicité. Soit $x \in \mathcal{H}$. Pour un certain $N \in \mathbb{N}$,

   $$u(x) = u\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\right) \underset{\text{cont + lin}}{=} u(x_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \lambda_n e_n$$

2. Montrons que $\mathrm{Vp}(u) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$:

   - $\supset$: $\forall n, \lambda_n \in \mathrm{Vp}(u)$ car $u(e_n) = \lambda_n e_n, e_n \neq 0$
   - $\subset$: $\lambda \in \mathrm{Vp}(u) \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{H}, x \neq 0, u(x) = \lambda x$.

     Soit $x = \sum_{n\geqslant 0} x_n e_n \in \mathcal{H}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, x_{n_0} \neq 0$

     $$u(x) - \lambda x = \sum_n (\lambda_n - \lambda) x_n e_n = 0 \underset{\text{unicité}}{\Leftrightarrow} \forall n (\lambda_n - \lambda) x_n = 0$$

     Comme $x_{n_0} \neq 0$, $\Rightarrow \lambda = \lambda_{n_0}$. Donc $\lambda \in \mathrm{Vp}(u) \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$.

   Montrons que $\mathrm{Sp}(u) = C$.

   - Montrons que $C \subset \mathrm{Sp}(u)$

     $$\mathrm{Vp}(u) \subset \mathrm{Sp}(u) \text{ et } \mathrm{Sp}(u) \text{ fermé, donc } \overline{\mathrm{Vp}(u)} = C \subset \mathrm{Sp}(u)$$

   - Montrons que $\mathrm{Sp}(U) \subset C$

     Soit $\lambda \notin C$. Montrons que $u - \lambda\mathrm{id}$ est inversible. Il suffit de montrer que $u - \lambda\mathrm{id}$ est surjective. Soit $y \in \mathcal{H}$. Remarquons que par compacité de C, $d(\lambda, C) = d > 0$. Posons $\forall i \geqslant 0, x_i = \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}$.

     $|\sum x_i e_i|$ converge car :

     $$\sum \left| \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda} \right|^2 \leqslant \frac{1}{d^2} \|y\|^2$$

     Donc $u(x) - \lambda x = y$. $u - \lambda\mathrm{id}$ est bien surjective.

Montrons que $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$. Soit $\lambda \notin V_p$. Montrons que $\overline{\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})} = \mathcal{H}$.

$$e_n = (u - \lambda \mathrm{id}) \left(\frac{e_n}{\lambda_n - \lambda} \right) \in \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})$$

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C} e_n \subset \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})$$

Donc en passant à l'adhérence :

$$\mathcal{H} \subset \overline{\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id})}$$

Soit $K \in \mathbb{C}$ un compact non-vide. Montrons que c'est le spectre d'un opérateur continu. Pour tout $N \geqslant 1$, on peut recouvrir K par un nombre fini (précompacité) de boules de rayon $\frac{1}{N}$. $\{\lambda_n\}$ = l'union des centres de ces boules pour $N \geqslant 1$ convient.

Exercice 2.
Soient $\mathcal{H}$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme ci-dessus.

1. Montrer que $\exists!\ u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\ \forall n \in \mathbb{N}\ u(e_n) = e_{n+1}$
2. Montrer que $\mathrm{Vp}(u) = \emptyset$, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\mathrm{Sp}(u) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$

Solution 2.

1. *Unicité.* Soit $x \in \mathcal{H}$, notons $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$. Comme u est linéaire et continue on doit poser $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n u(e_n)$. Donc $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_{n+1}$.
   Existence.
   $$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 = \|x\|^2 \text{ qui est finie}$$
   Donc par la réciproque du théorème de Parseval, $\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} x_{i-1} e_i$ converge, on la note $u(x)$. Donc $u(x)$ existe. Par le calcul précédent on a $\|u(x)\| = \|x\|$, donc u est un opérateur continu (isométrique).

   Linéarité. La linéarité est immédiate par la linéarité des coordonnées hilbertiennes.

Propriété 4

Soient E, F espaces de Banach.

1. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite dans E, si $\sum x_n$ converge normalement (i.e. $\sum \|x_n\|$ converge), alors $\sum x_n$ converge dans E.
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, si $\|u\| < 1$ alors $\mathrm{id} - u$ est bijective d'inverse $\sum_{n \in \mathbb{N}} u^n$ (continue)
3. si $\mathcal{GL}(E, F) = \{f : E \to F$ isomorphisme linéaire continu d'inverse continu$\}$ alors $\mathcal{GL}(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$ et
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{GL}(F,E) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{array} \right.$$
   est continue.

Preuve.

1. ok
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} u^k$ est normalement convergente car $\|u^k\| \leqslant \|u\|^k$ donc converge par 1 vers $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = v - \mathrm{id}$
3. $\forall u \in \mathcal{GL}(E,F),\ \forall\ u \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}(E,F)}\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right)$ posons $v = \mathrm{id} - u_0^{-1} \circ u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\|v\| \leqslant \|u_0^{-1}\|\|(u_0 - u)\| < 1$. Par 2, $\mathrm{id} - v = u_0^{-1} \circ u$ est inversible, donc u aussi. Et $u^{-1} = (\mathrm{id} - v)^{-1} \circ u_0^{-1}$. Donc $\mathcal{GL}(E,F)$ est ouvert.

$$\begin{aligned}
\|u^{-1} - u_0^{-1}\| &= \|(\mathrm{id} - v)^{-1} - \mathrm{id}\|\|u_0^{-1}\| \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} v^n\right\| \|u_0^{-1}\| \\
&\leqslant \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}\|u_0^{-1}\| \xrightarrow[u\to u_0]{} 0
\end{aligned}$$

□

2.1 Rappels étendus d'analyse complexe I

Soient E espace de Banach complexe et U ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 10 (fonction analytique complexe)

$f : U \to E$ est analytique complexe si $\forall z_0 \in U, \exists r > 0, \exists (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans E tq $\mathcal{B}(z_0, r) \subset U$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (z - z_0)^n c_n \text{ converge normalement sur } \mathcal{B}(z_0, r) \text{ de somme égale à } f(z)$$

Remarque. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique, analytique complexe $\Rightarrow$ continue.

Théorème 10 (de Liouville)

Si $f : \mathbb{C} \to E$ analytique complexe est bornée, alors f est constante.

Propriété 5 (application résolvante analytique complexe)

$$R_u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(u) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \lambda & \longmapsto & (u - \lambda\mathrm{id})^{-1} \end{array}\right. \quad \text{est analytique complexe}$$

Preuve.
Soit λ_0 un valeur régulière de u et $v_0 = (u - \lambda_0\mathrm{id})^{-1}$. $\forall \lambda \in \mathcal{B}\left(\lambda_0, \frac{1}{\|v_0\|}\right)$:

$$\begin{aligned}
(u - \lambda\mathrm{id})^{-1} &= \left((u - \lambda_0\mathrm{id})(\mathrm{id} - (\lambda - \lambda_0)v_0)\right)^{-1} = (\mathrm{id} - (\lambda - \lambda_0)v_0)^{-1} \circ v_0 \\
&\underset{\text{Prop 2}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda - \lambda_0)^n v_0^{n+1}
\end{aligned}$$

qui converge normalement. □

2.2 Rappels étendus d'analyse complexe II

Soient E espace de Banach complexe et $f : \mathcal{B}(0,r)\backslash\{0\} \to E$ analytique complexe.

Théorème 11 (de développement de Laurent)

$\exists!(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ suite dans E telle que :

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n c_n$ converge $\forall z \in \mathcal{B}(0,r)$
- $\sum_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} z^{-n} c_{-n}$ converge $\forall z \neq 0$
- $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n c_n$ $\forall z \in \mathcal{B}(0,r)\backslash\{0\}$ appelé développement de Laurent

Définition 11 (rayon de convergence)

$\forall(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans E, le *rayon de convergence* de $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n a_n$ est

$$R = \sup\left\{r > 0 \mid \forall z \in \mathcal{B}(0,r), \sum z^n a_n \text{ converge}\right\} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}}$$

Propriété 6

$$\rho(u) = \limsup_{n\to+\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Preuve.

Posons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B}\left(0, \frac{1}{\rho(u)}\right)\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ z & \longmapsto & -\frac{1}{z} R_u\left(\frac{1}{z}\right) \end{array} \right.$$

Par la formule $(**)$ (cf preuve du théorème 9) avec $\lambda = \frac{1}{z}$, f coïncide sur $\mathcal{B}\left(0, \frac{1}{\|u\|}\right)\backslash\{0\}$ avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n u^n$. Par unicité, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n u^n$ est le développement de Laurent de f sur $\mathcal{B}\left(0, \frac{1}{\|u\|}\right)\backslash\{0\}$.

Or f est définie et analytique complexe sur $\mathcal{B}\left(0, \frac{1}{\|u\|}\right)$ et $\frac{1}{\rho(u)} \geqslant \frac{1}{\|u\|}$.

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n u^n$ converge pour $z \in \mathcal{B}\left(0, \frac{1}{\rho(u)}\right)$ par le théorème de Laurent. D'où :

$$\frac{1}{\rho(u)} \leqslant R = \text{ rayon de convergence de } \sum z^n u^n = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}}$$

Réciproquement, si $|\lambda| > \frac{1}{R}$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} u^n$ converge. Donc $u - \lambda\mathrm{id}$ est inversible (car d'inverse $-\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} u^n$), donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$ d'où $\rho(u) = \sup\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |\lambda| \leqslant \frac{1}{R}$. $\square$

Lemme 1 (propriété d'une suite réelle sous-additive)

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle sous-additive ($\forall n, m \in \mathbb{N},\ a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$) alors :

$$\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} \frac{a_n}{n}$$

2.3 Preuve du théorème 9

Preuve. (du théorème 9)

1. $\rho(u) \leqslant \|u\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > \|u\|$, posons $v = \frac{1}{\lambda}u$. Alors $\|v\| < 1$, donc $\mathrm{id} - v$ est inversible $\Rightarrow\ u - \lambda\mathrm{id} = -\lambda(\mathrm{id} - v)$ inversible. λ est une valeur régulière.

   $\mathrm{Sp}(u)$ est fermé. Montrons que $\mathbb{C}\backslash\mathcal{L}(E)$ est ouvert $\mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$ et continue, donc par 3 si λ proche de λ_0 tq $u - \lambda_0\mathrm{id}$ inversible, alors $u - \lambda\mathrm{id}$ aussi. Donc $\mathrm{Sp}(u)$ fermé, borné et compact.

2. $E \neq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$

   Par l'absurde, si $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$ alors $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}(u) = \mathbb{C}$ et R_u est analytique complexe sur tout $\mathbb{C}$. Notons que $u = u - 0\mathrm{id}$ est inversible, donc $\|u\| \neq 0$. Montrons que R_u est bornée.

   Si $|\lambda| > \|u\|$ alors

   $$(u - \lambda\mathrm{id})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{id} - \frac{u}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n}u^n \qquad (**)$$

   Si $|\lambda| > 2\|u\|$ alors

   $$\left\|(u - \lambda\mathrm{id})^{-1}\right\| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|u\|}{|\lambda|}\right)^n = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \frac{1}{1 - \frac{\|u\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|u\|} < \frac{1}{\|u\|} < +\infty$$

   Donc R_u est bornée en dehors de $\bar{B}(0, 2\|u\|)$, ainsi que dans cette boule compacte car R_u est continue. Par le théorème de Liouville, R_u est constante, donc $\lambda \longmapsto R_u(\lambda)^{-1} = u - \lambda\mathrm{id}$ est constante, impossible car $E \neq \{0\} \Rightarrow \mathrm{id}_E \neq 0 \Rightarrow u - 1\mathrm{id} \neq u - 0\mathrm{id}$.

   Réciproquement, si $E = \{0\}$ alors $\mathrm{Card}\mathcal{L}(E) = 1$ donc $\forall\lambda \in \mathbb{C}, u - \lambda\mathrm{id} = \mathrm{id}_E$ est inversible $\Rightarrow \mathrm{Sp}(u) = \emptyset$.

3. Comme $\forall n, m \in \mathbb{N}, \|u^{n+m}\| \leqslant \|u^n\|\|u^m\|$ (norme d'opérateur) le résultat découle du lemme 1.

□

3 Opérateurs compacts

Soient E, F des espaces vectoriels normés (réels ou complexes) et $\overline{B}_E = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de E, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 12 (opérateur compact)

u est compact s'il satisfait l'une des conditions suivantes :

1. $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte dans F
2. l'image par u de tout borné de E est d'adhérence compacte dans F
3. $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans E telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n\| \leqslant 1$, $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente

Preuve. (équivalence entre les définitions)

- (2) $\Rightarrow$ (1) et (1) $\Rightarrow$ (3) : ok
- (1) $\Rightarrow$ (2) : $\forall B$ borné de E, $\exists r > 0$ tel que $B \subset \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ donc $u(B) \subset u(\overline{\mathcal{B}}(0, r)) = ru(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte car les homothéties sont des homéomorphismes. Donc $\overline{u(B)}$ est compacte, car fermée et contenue dans un compact.
- (3) $\Rightarrow$ (1) : Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{u(\overline{B}_E)}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in \overline{B}_E$ tel que $d(u(x_n), y_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Par (3) il existe une sous-suite $(u(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge, alors $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aussi, par adjacence.

□

Théorème 12 (Riesz)

E evn (réel ou complexe)

$$\begin{aligned} E \text{ est localement compact } &\Leftrightarrow \overline{B}_E \text{ est compacte} \\ &\Leftrightarrow \text{ les compacts de } E \text{ sont les fermés bornées} \\ &\Leftrightarrow E \text{ est de dim finie} \end{aligned}$$

Exemple. (d'opérateurs compacts)

1. $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de *rang fini* si $\dim u(E)$ est fini. Par le théorème de Riesz de rang fini $\Rightarrow$ compact
2. $\forall (X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaces mesurés $\sigma-$finis. $\forall N \in \mathbb{L}^2\Big((X, \mathcal{A}, \mu) \times (Y, \mathcal{B}, \nu)\Big)$, notons $\forall f \in \mathbb{L}^2(\nu)$,
$$K_f : x \longmapsto \int_{y\in Y} N(x, y) f(y) d\nu(y)$$
Alors $K = K_N \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\nu), \mathbb{L}^2(\mu))$ et K compact (*appelé opérateur à noyau de type Hilbert-Schmidt, de noyau N*)

Preuve.

Posons $E = \mathbb{L}^2(\nu)$ et $F = \mathbb{L}^2(\mu)$. Par le théorème de Fubini, $N_x : y \longmapsto N(x, y)$ est dans E pour $\mu-$presque tout $x \in X$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall f \in E \ K_f(x) \text{ existe et } |K_f(x)|^2 \leqslant \|N_x\|_2^2 \|f\|_2^2 \text{ pour } \mu \text{ p.t. } x$$

De plus, par Fubini $\|K_f\|_2 \leqslant \|N\|_2 \|f\|_2$. Donc $K_f \in F$ et $K = K_N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ f & \mapsto & K_f \end{array} \right.$ est bien défini, clairement linéaire et continue (puisque de norme $\leqslant \|N\|_2$).

Montrons que K est un opérateur compact.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite dans $\overline{B}_E$. Montrons que, quitte à extraire, $(K_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F (pour la norme hilbertienne $\Leftrightarrow$ fortement). Par le théorème de compacité faible, nous pouvons supposer quitte à extraire que $f_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} f \in E$.

Donc $K_{f_n}(x) =< f_n, \overline{N_x} >_E$ pour μ p.t. x. Comme $\|K_{f_n}(x)\|^2 \leqslant \|N_x\|_2^2 \times 1$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $\|K_{f_n}\|_2 \leqslant \|K_f\|_2$.

Comme K est linéaire continue (donc faiblement continue), $K_{f_n} \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} K_f$. Par le critère de convergence forte dans les espaces de Hilbert ; $K_{f_n} \longrightarrow K_f$ dans F $\square$

Propriété 7

Soient E, F, G_1, G_2 des evn (réels ou complexes).

1. $\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u \text{ compact}\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E, F)$, et $\forall u \in \mathcal{K}(E, F), \forall v \in \mathcal{L}(G_1, E), \forall w \in \mathcal{L}(F, G_2)$:
$$w \circ u \circ v \in \mathcal{K}(G_1, G_2)$$
2. si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Preuve.

1. $\mathcal{K}(E, F)$ est stable par combinaisons linéaires par la définition (3).

   Si u, v, w sont comme ci-dessus, $v(\overline{B}_{G_1})$ est borné, car v continue, donc $u(v(\overline{B}_{G_1}))$ est d'adhérence K compacte, car u compact, donc $w \circ u \circ v(\overline{B}_{G_1}) \subset w(K)$ qui est un compact car w est continue. Donc $\overline{w \circ u \circ v(\overline{B}_{G_1})}$ est compacte, car fermée dans un compact.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{K}(E, F)$ qui converge vers $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrons que $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte. Puisque F est complet, par Bolzano-Weierstrass, il suffit de montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un recouvrement de $u(\overline{B}_E)$ par un nombre fini de boules de rayon ε.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\|u_n - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque u_n est compact, $\exists y_1, ..., y_k \in F$ tq :

$$u_n(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$u(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}(y_i, \varepsilon)$$

car $\forall x \in \overline{B}_E, \exists i \in \{1, ..., k\}$ tq $u_n(x) \in \mathcal{B}\left(y_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ donc $\|u(x) - y_i\| \leqslant \|u(x) - u_n(x)\| + \|u_n(x) - y_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Remarque. En particulier, toute limite d'opérateurs de rang fini est compacte.

Propriété 8

Si E est un evn compexe et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, alors tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.

Preuve.
$\forall \varepsilon > 0$, par compacité de $u(\overline{B}_E)$, $\exists y_1, ..., y_n \in \mathcal{H}$ tq $u(\overline{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Soit p la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $\mathrm{Vect}(y_1, ..., y_n)$ (qui est fermé dans $\mathcal{H}$) et $v = p \circ u$. Montrons que $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut.
$\forall x \in \overline{B}_E$, soit $i \in \{1, ..., n\}$ tq $u(x) \in \mathcal{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Puisque $p(y_i) = y_i$, p est 1-lipschitzienne, par l'inégalité triangulaire.

$$\|u(x) - v(x)\| \leqslant \|u(x) - y_i\| + \|p(y_i) - p(u(x))\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Théorème 13 (de Schauder)

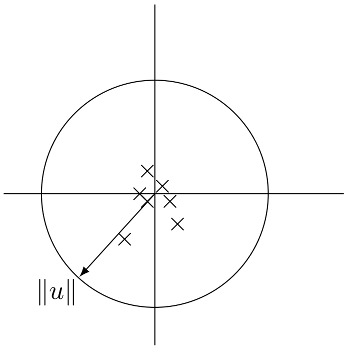
- $u \in \mathcal{K}(E, F) \Rightarrow u^T \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$
- Si F est un espace de Banach , $u \in \mathcal{K}(E, F) \Leftrightarrow u^T \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$

Preuve. Admis □

Propriété 9

Soient E espace de Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$ opérateur compact.

1. $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - u)$ est finie
2. $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - u)$ est fermée
3. $\mathrm{id} - u$ injective $\Rightarrow$ $\mathrm{id} - u$ est surjective
4. toute valeur spectrale non nulle de u est une valeur propre, de multiplicité finie, isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$
5. si E est de dimension infinie, alors $0 \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \mathrm{Vp}(u)$
   (attention, pas une union disjointe)
   Donc $\mathrm{Sp}(u)$ est ou bien fini, ou bien l'image d'une quite qui converge vers 0 en réunion avec $\{0\}$



Exercice 3.
Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne

1. Montrer que $\exists! u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tq $u(e_n) = \frac{1}{n+1}e_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Calculer $\|u\|$.
2. Montrer que u est compact.
3. Montrer que $\mathrm{Vp}(u) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \{0\}$

Solution 3.

Preuve. (du théorème)
On note $v = \mathrm{id} - u$ et $N = \ker v$

1. $\forall x \in N,\ x = u(x)$ donc $\overline{B}_N := \overline{B}_E \cap N \subset u(\overline{B}_E)$. u est un opérateur compact donc $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte, donc $\overline{B}_N$ aussi et par le théorème de Riesz, N est de dimension finie.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tel que $v(x_n) \to y \in E$. Montrons que $y \in \mathrm{Im}(v)$. Puisque N est de dimension finie, donc fermé, et toute application continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ atteint sa borne inf :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists z_n \in N \text{ tq } d(x_n, N) = d(x_n, z_n)$$
Par l'absurde supposons que $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, sinon, quitte à extraire, $d(x_n, z_n) = \|x_n - z_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Posons $w_n := \frac{x_n - z_n}{d(x_n,, N)}$. Puisque u est compact, quitte à extraire $u(w_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} w \in E$. Or :
$$w_n - u(w_n) = v(w_n) = \frac{v(x_n) - v(z_n)}{d(x_n, N)}$$
Comme $z_n \in N = \ker v$, $v(z_n) = 0$. D'où :
$$w_n - \underbrace{u(w_n)}_{\to w} = v(w_n) = \frac{\overbrace{v(x_n)}^{\to y}}{\underbrace{d(x_n, N)}_{\to+\infty}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} w$. Par continuité de v, $\underbrace{v(w_n)}_{\to 0} \to v(w)$. D'où $v(w) = 0 \Leftrightarrow w \in N$. N est un sev donc invariant par homothétie et translation. Or $d(w_n, N) = 1\ \forall n$ donc $d(w, N) = 1$. Contradiction. Donc $(x_n - z_n)$ est bornée.

Comme u est compact, quitte à extraire, $u(x_n - z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y' \in E$. Donc :

$$x_n - z_n = \underbrace{u(x_n - z_n)}_{\to y'} + \underbrace{v(x_n - z_n)}_{=v(x_n)\to y}$$

Ainsi $x_n - z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y' + y$. Par continuité, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} v(x_n - z_n) = v(y' - y)$. D'où $y \in \mathrm{Im}(v)$ qui est donc fermé.

3. Soit $E_0 := E$ et $E_1 = v(E_0)$.
Supposons par l'absurde que v est injective et $E_1 \neq E_0$. On regarde $u|_{E_1} : E_1 \longrightarrow E_1$ car u et v commutent, donc $u(E_1) = u(v(E_0)) = v(u(E_0)) \subset v(E_0) = E_1$. Comme u est compact, $E_1 = \mathrm{Im}(v)$ est fermé par (2). Alors $u|_{E_1}$ est encore compact ($\overline{u|_{E_1}(\overline{B_{E_1}})}$ est l'intersection de E_1, fermé, et de $u(\overline{B}_E)$ compact par compacité de u).

Posons $E_n := v^n(E_0)$. Par récurrence (E_n) est une suite de sev fermés, strictement décroissante (car v injective). Soit $x_n \in E_n \backslash E_{n+1}$, $x'_n \in E_{n+1}$ tel que $d(x_n, x'_n) \leqslant 2d(x_n, E_{n+1})$. Posons :

$$y = \frac{x_n - x'_n}{\|x_n - x'_n\|}$$

Soit $m > n$:

$$\|u(y_n) - u(y_m)\| = \|y_n - v(y_n) - (y_m - v(y_m)\| = \|y_n - \underbrace{[y_m - v(y_m) + v(y_m)]}_{\in E_{n+1}}\|$$

Donc :

$$\|u(y_n) - u(y_m)\| \geqslant d(y_n, E_{n+1}) = \frac{d(x_n, E_{n+1})}{\|x_n - x'_n\|} \geqslant \frac{1}{2}$$

Donc $(u(y_n))$ n'admet pas de sous-suite convergente, ce qui contredit u compact. Donc $\mathrm{id} - u$ injectif $\Rightarrow$ $\mathrm{id} - u$ surjectif.

4. Soit $\lambda \neq 0$ valeur spectrale. Par l'absurde on suppose $\lambda \notin \mathrm{Vp}(u)$. Comme u est compact, $\frac{u}{\lambda}$ est compact et $\mathrm{id} - \frac{u}{\lambda}$ est injectif ($\lambda \notin \mathrm{Vp}(u)$). Par (3), $\mathrm{id} - \frac{u}{\lambda}$ est aussi surjectif. Mais alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$. Contradiction. Donc $\lambda \in \mathrm{Vp}(u)$.

   - Si $\lambda \neq 0$, sa multiplicité est $\dim\ker\left(\mathrm{id} - \frac{u}{\lambda}\right)$ finie âr (1)
   - Si λ non isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$, soit (λ_n) valeurs propres non nulles, 2 à 2 différentes convergent vers λ. Soit e_n des vecteurs propres non nuls pour λ_n et posons $E_n := \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_n)$.

   Alors $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (car les λ_i sont 2 à 2 distincts) de sev fermés (car de dimension finie), invariants par u. Par un raisonnement analogue à (2), il existe $y_n \in E_n$ unitaires tels que si $n \neq m$ alors :

$$\left\| u\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - u\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right\| \geqslant \frac{1}{2}$$

   ce qui contredit u compact.

5. Si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ alors u est inversible et $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Puisque u est compact :

$$\overline{B}_E = \underbrace{u^{-1}\left[\underbrace{u(\overline{B}_E)}_{\text{adh cpcte}}\right]}_{\mathcal{C}^0} \quad \text{est compacte}$$

D'après Riesz, E est de dimension infinie.

4 Opérateurs auto-adjoints

4.1 Adjoint, auto-adjoint et propriétés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Propriété 10

$\exists! u^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{H} \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

appelé *adjoint* de u. De plus :

1. $u^{**} = u$ (involutive)
2. $\|u^*\| = \|u\|$ (isométrique)
3. $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ (contravriante)
4. $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$
5. u^* est inversible $\Leftrightarrow$ u est inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.
6. $(u + \lambda v)^* = u^* + \bar{\lambda} v^*$ (anti-linéaire)
7. $\|u^* \circ u\| = \|u \circ u^*\| = \|u\|^2$ (propriété d'algèbre stellaire)

Preuve.

Unicité. Si u^* et $\widehat{u^*}$ vérifient les bonnes proprétés :

$$\forall x, y,\ \langle x, u^*(y)\rangle = \langle x, \widehat{u^*}\rangle = \langle u(x), y\rangle$$

Donc $\forall x, y,\ \langle x, u^*(y) - \widehat{u^*}(y)\rangle = 0$. Donc $\forall y,\ u^*(y) - \widehat{u^*}(y)$ est orthogonal à tout vecteur. Comme $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$, $u^*(y) = \widehat{u^*}(y)$.

Existence. Soit :

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}^*} \\ x & \longmapsto & \{y \mapsto \langle x, y\rangle\} \end{cases}$$

l'isomorphisme de Riesz-Frechet. Alors pour $u^* := \varphi^{-1} \circ u^T \circ \varphi$ convient.

1. Involution : ok par unicité
2. L'isomorphisme de Riesz-Frechet préserve la norme donc :

$$\|u^*\| = \|\varphi^{-1} \circ u^T \circ \varphi\| = \|u^T\| = \|u\|$$

3. ok par unicité
4. ok par unicité
5. ok par unicité
6. ok par unicité
7. D'un côté,
$$\|u^* \circ u\| \leqslant \|u^*\|\|u\| = \|u\|^2$$
On a aussi :
$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle u^* \circ u(x), x\rangle$$
Par Cauchy-Schwarz,
$$\|u(x)\|^2 \leqslant \|u^* \circ u(x)\|\|x\| \leqslant \|u^* \circ u\|\|x\|^2$$
D'où $\|u\|^2 \leqslant \|u^* \circ u\|$. Donc $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.
Par $u \to u^*$ et $u^{**} = u$ on a de même $\|u \circ u^*\| = \|u\|^2$

□

Définition 13 (auto-adjoint)
u est *auto-adjoint* si $u = u^*$. Il est *positif* si $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ $\forall x \in \mathcal{H}$.

Exemple.

- Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma-$fini
- Soit $N \in \mathcal{L}^2\Big((X, \mathcal{A}, \mu) \otimes (X, \mathcal{A}, \mu)\Big)$. L'adjoint de l'opérateur K_N de type Hilbert-Schmidt de noyau N est l'opératuer K_{N^*} de type Hilbert-Schmidt de noyau $N^*\colon (x, y) \mapsto \overline{N(y, x)}$.

$$\begin{aligned}
\langle K_N(f), g\rangle &= \int_X \left(\int_X N(x, y) f(y) dy\right) \overline{g(x)} dx \\
&= \int_X \int_X N(x, y) f(y) \overline{g(x)} dy dx \\
&= \int_X \int_X N(x, y) f(y) \overline{g(x)} dx dy
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\langle f, K_{N^*}(g)\rangle &= \int_X f(y) \int_X \overline{N^*(y, x) g(x)} dx dy \\
&= \int_X \int_X f(y) \overline{\overline{N(x, y)} g(x)} dx dy \\
&= \int_X \int_X N(x, y) f(y) \overline{g(x)} dx dy
\end{aligned}$$

D'où le résultat.
Si N est réel symétrique, K_N est auto-adjoint.

Remarque.

- Si u est auto-adjoint $(x,y) \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne, continue (et positive si u l'est).
- Positif $\Rightarrow$ auto-adjoint. Montrons que :

  $$\langle u(x), y\rangle \underset{?}{=} \langle x, u(y)\rangle \quad (1)$$

  Comme le produit scalaire est hermitien, $\langle u(x), y\rangle = \overline{\langle y, u(x)\rangle}$ (2). D'où :

  $$(1) = (2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Re\left(\langle u(x), y\rangle - \langle u(y), x\rangle\right) = 0 & (3) \\ \Im(\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle) = 0 & (4) \end{cases}$$

  Or,

  $$\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = \langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x), x\rangle - \langle u(y), y\rangle \in \mathbb{R}$$

  Donc (3) ok et (4) ok pour $y \to iy$.
- $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints positifs.
- En dimension finie, si u a pour matrice M alors u^* a pour matrice $\overline{M}^T$ (dans les mêmes bases).

Lemme 2

$\forall E, F$ espaces de Banach, $\forall v \in \mathcal{L}(E,F)$, si $\exists c > 0$, $\forall x \in E$ $\|v(x)\| \geqslant c\|x\|$ alors $v(E)$ est fermé et $v\colon E \to v(E)$ est un homéomorphisme.

Preuve.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tq $v(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \in F$. Montrons que $y \in v(E)$. $[v(x_n)]$ est de Cauchy donc par l'hypothèse (x_n) est de Cauchy. Par complétude $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in E$. Par continuité, $v(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} v(x)$. D'où $y = v(x) \in v(E)$.

Or, v est injectif par hypothèse, donc $v\colon E \longrightarrow v(E)$ est une bijection linéaire continue entre un Banach (E) et $v(E)$ qui est un fermé d'un Banach donc encore un Banach. Par le théorème de Banach, v est un homéomorphisme. $\square$

Propriété 11

1. $\mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u)$
2. $u(\mathcal{H})^\perp = \ker(u^*)$. En particulier, u est d'image dense ssi u^* est injectif.
3. u compact $\Leftrightarrow$ u^* compact

   Si de plus u est auto-adjoint :
4. $\forall E$ sev de $\mathcal{H}$, si $u(E) \subset E$ alors $u(E^\perp) \subset E^\perp$.
5. Si $\mathcal{H} \neq \{0\}$, soient $M = \sup_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$ et $m = \inf_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$. Alors :
   - $\mathrm{Sp}(u)$ est réel, contenu dans $[m, M]$.
   - $m, M \in \mathrm{Sp}(u)$
   - $\rho(u) = \|u\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \max\{M, -m\}$

   En particulier $\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \;\Rightarrow\; u = 0$.
6. $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$
7. *Critère de Weyl* : $\mathrm{Sp}(u) = \sigma(u)$ spectre de Weyl où :

$$\sigma(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in \mathcal{H} \text{ tq } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|u(x_n) - \lambda x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$$

Preuve.

1. $(u - \overline{\lambda}\mathrm{id})$ inversible $\Leftrightarrow$ $(u - \overline{\lambda}\mathrm{id})^* = u^* - \lambda\mathrm{id}$ inversible
2.

$$\begin{aligned} x \in u(\mathcal{H})^\perp &\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}\ \langle u(y), x\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}\ \langle y, u^*(x)\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow u^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u^* \end{aligned}$$

3. $u^* = \varphi^{-1} \circ u^T \circ \varphi \;\longrightarrow$ Schauder + Continuité de Riesz-Fréchet
4. u auto-adjoint. Soit $x \in E^\perp$.

$$\forall y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle \underset{\in E^T}{x}, \underset{\in E}{u(y)}\rangle = 0$$

   Donc $u(x) \in E^\perp$.
5. $\forall x \in \mathcal{H}\ \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\langle u(x), x\rangle}$, donc $\langle u(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.
   Si x est unitaire, $|\langle u(x), x\rangle| \leqslant \|u\|$ par Cauchy-Schwarz. Donc M, m bien définis. Montrons que $\mathrm{Sp}(u)$ est réel :

- Si $\lambda \in \mathrm{Vp}(u)$, si $x \neq 0$ est un vecteur propre non nul de λ :

$$\lambda \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\neq 0} = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\neq 0}$$

  Donc $\lambda = \bar{\lambda}$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ et $v := u - \lambda \mathrm{id}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{H} \quad |\Im(\lambda)| \|x\|^2 &= \Big| \Im\Big(\underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{\in \mathbb{R}} - \lambda \langle x, x\rangle \Big) \Big| \\ &= |\Im \langle v(x), x\rangle| \\ &\underset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|v(x)\| \times \|x\| \end{aligned}$$

  Donc $\underbrace{|\Im(\lambda)|}_{\neq 0} \|x\| \leqslant \|v(x)\|$.

  Par le lemme, $v(\mathcal{H})$ est fermé $(*_1)$. De plus, $v(\mathcal{H})^{\perp} = \ker(v^*) = \ker(u - \bar{\lambda}\mathrm{id}) = \{0\}$ car $\bar{\lambda} \notin \mathrm{Vp}(u) \subset \mathbb{R}$. Donc $v(\mathcal{H})$ est dense $(*_2)$.

  Par $(*_1)$ et $(*_2)$, $v(\mathcal{H}) = F$. Par suite v est inversible $\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Sp}(u) \subset]-\infty, M]$. En faisant $u \leftrightarrow -u$ on aurait $\mathrm{Sp}(u) \subset [m, +\infty[$. D'où $\mathrm{Sp}(u) \subset [m, M]$.
Si $\lambda > M$, posons $v_\lambda := \lambda \mathrm{id} - u$ et :

$$a \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle v_\lambda(x), y\rangle \end{array} \right.$$

Alors a est sesquilinéaire, continue. De plus :

$$a(x, x) = \langle v_\lambda(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle - \langle u(x), x\rangle \geqslant \underbrace{(\lambda - M)}_{>0} \|x\|^2$$

Donc a est coercive. Donc v_λ est injective, surjective par Lax-Milgram.

$$\forall y \in \mathcal{H},\ \exists x \in \mathcal{H},\ \forall z \in \mathcal{H} \quad \langle v_\lambda(x), z\rangle = a(x, z) = \langle y, z\rangle$$

D'où $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$. Montrons que $M \in \mathrm{Sp}(u)$. En faisant $u \leftrightarrow -u$, on a $m \in \mathrm{Sp}(u)$. Supposons par l'absurde que $v := M\mathrm{id} - u$ est inversible. Alors :

$$a \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle v(x), y\rangle \end{array} \right.$$

est une forme sesquilinéaire, hermitienne, continue, positive (par définition de M).
Par Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |a(x, y)|^2 &\leqslant |a(x, x)||a(y, y)| \\ \text{i.e.} \quad |\langle v(x), y\rangle|^2 &\leqslant \langle v(x), x\rangle \langle v(y), y\rangle \end{aligned}$$

Donc :

$$\|v(x)\| \underset{\text{C.S.}}{=} \sup_{\|y\|=1} \langle v(x), y\rangle \underset{\text{C.S.}}{\leqslant} \sqrt{\langle v(x), x\rangle \|v\|}$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unitaire tel que $\langle u(x_n), x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$ (par définition de M).
Alors $\langle v(x_n), x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $v(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $x_n = v^{-1}(v(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Contradiction car $\|x_n\| = 1\ \forall n$.

Montrons que $K := \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| \geqslant \|u\|$. $\forall x, y \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}
|4\Re\langle u(x), y\rangle| &= |\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle| \\
&\leqslant \left|\langle \frac{u(x+y)}{\|x+y\|}, \frac{x+y}{\|x+y\|}\rangle\right| \|x+y\|^2 + \left|\langle \frac{u(x-y)}{\|x-y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|}\rangle\right| \|x-y\|^2 \\
&\leqslant K\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\
&= 2K\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\
&= 4K\|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

Alors,

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \Re\langle u(x), u(x)\rangle \leqslant K\|x\| \times \|u(x)\|$$

D'où $\|u(x)\| \leqslant K\|x\|$. Puis $\|u\| \leqslant K$. Alors :

$$\|u\| \geqslant \rho(u) \geqslant \max\{M, -m\} = K \geqslant \|u\|$$

Donc toutes ces inégalités sont des égalités.

6. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\backslash \mathrm{Vp}(u)$. $\lambda \in \mathbb{R}$ donc :

$$(u - \lambda\mathrm{id})^* = u^* - \bar{\lambda}\mathrm{id} = u - \lambda\mathrm{id}$$

Alors $\ker(u - \lambda\mathrm{id}) = \ker((u-\lambda\mathrm{id})^*) = \{0\}$ Par (2), $\Im(u - \lambda\mathrm{id})^\perp = \{0\}$. Donc $\Im(u-\lambda\mathrm{id})$ est dense et $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u)$. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(u) = \emptyset$.

7. Montrons tout d'abord que $\sigma(u) \subset \mathrm{Sp}(u)$ (vrai pour tout u, pas besoin de l'hypothèse auto-adjoint) :
Par contraposée : si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors,

$$x_n := (\underbrace{u - \lambda\mathrm{id}}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})^{-1}(u(x_n) - \lambda(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

quand $u(x_n) - \lambda x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier pour n assez grand, $\|x_n\| < 1$ et donc $\lambda \notin \sigma(u)$. Donc $\sigma(u) \subset \mathrm{Sp}(u)$.

Montrons que $\mathrm{Sp}(u) \subset \sigma(u)$:
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$ (car u est auto-adjoint).

- Si $\lambda \in \mathrm{Vp}(u)$ alors $A \in \sigma(u)$ (prendre pour x_n une suite constante égale à un vecteur propre unitaire pour λ)
- Sinon $v := u - \lambda\mathrm{id}$ est injective. Par (6) v est d'image dense. Par l'absurde, si $\lambda \notin \sigma(u)$ alors $\forall x \in \mathcal{H}$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|v(x)\| \geqslant \frac{1}{N}\|x\|$. Par le lemme, $\Im(v)$ est fermé. Donc égale à $\mathcal{H}$ et v est surjective, contredit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

□

Corollaire 4

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert, $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint. Alors :

$$u \text{ positif} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$$

4.2 Spectre essentiel

Soient $\mathcal{H}$ un Hilbert et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint.

Définition 14

Le spectre essentiel de u est :

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} \text{ tq } \|x_n\| = 1,\ u(x_n) - \lambda x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$\text{et } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'admet pas de sous-suite convergente}\Big\}$$

Propriété 12

$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) \cup \mathrm{Vp}(u)$

- L'union n'est pas nécessairement disjointe.
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \backslash \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$ est une valeur propre de multiplicité finie et isolée dans $\mathrm{Sp}(u)$.

Preuve.

- $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) \subset \sigma(u) = \mathrm{Sp}(u)$ Donc $\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u) \cup \mathrm{Vp}(u) \subset \mathrm{Sp}(u)$
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ n'est pas isolée, montrons que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ et $\forall n\ \lambda_n \neq \lambda$. Par le critère de Weyl, $\exists x_n \in \mathcal{H}$ unitaire tq $\|u(x_n) - \lambda_n x_n\| \leqslant \frac{|\lambda - \lambda_n|}{n}$. Alors :

$$\|u(x_n) - \lambda x_n\| \leqslant \underbrace{\|u(x_n) - \lambda_n x_n\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  Il suffit de montrer que x_n n'admet pas de sous-suite convergente. Par l'absurde, quitte à extraire, supposons $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in \mathcal{H}$ unitaire. Alors $u(x) = \lambda x$ par continuité. Calculons :

$$\begin{aligned}
|\lambda_n - \lambda||\langle x_n, x\rangle| &= |(\lambda - \lambda_n)\langle x_n, x\rangle + \langle x_n, (u - \lambda\mathrm{id})x\rangle| \\
&= |(\lambda - \lambda_n)\langle x_n, x\rangle + \langle (u - \lambda\mathrm{id})x_n, x\rangle| \\
&= |\langle u(x_n) - \lambda_n x_n, x\rangle| \\
&\underset{\text{C.S.}}{\leqslant} \|u(x_n) - \lambda_n x_n\| \underbrace{\|x\|}_{=1} \\
&\leqslant \frac{|\lambda_n - \lambda|}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi $|\langle x_n, x\rangle| \leqslant \frac{1}{n}$. Donc $\langle x_n, x\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ contredit $\langle x_n, x\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1$

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\backslash\mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$. Montrons que λ est une valeur propre. Par le critère de Weyl, $\exists (x_n) \in \mathcal{H}$ tel que $\|u(x_n) - \lambda x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$, quitte à extraire, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Mais alors $\|x\| = 1$ et $u(x) - \lambda x = 0$, donc $\lambda \in \mathrm{Vp}(u)$.
- Si $E_\lambda = \ker(u - \lambda\mathrm{id})$ est de dimension infinie, alors il existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée dans E_λ donc unitaires et $u(e_n) - \lambda e_n = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et n'admet pas de sous-suite convergente. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{ess}}(u)$.

$\square$

Exercice. Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert séparable, F sev fermé de $\mathcal{H}$ de co-dimension infinie ; $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de $F^\perp$, (λ_n) suite dans $]0; +\infty[$ $\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\exists! u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint, positif, compact tel que $u|_F = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u(e_n) = \lambda_n e_n$.

5 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Théorème 14

Un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert séparable est diagonalisable en base Hilbertienne.

Plus précisément...

Théorème 15

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert, $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors $\exists(\lambda_n)_{0\leqslant n<N_+}$ et $(\nu_k)_{0\leqslant k<N_-}$ suites finies ou infinies qui convergent vers 0 si infinies telles que si $E_\mu = \ker(u-\mu\mathrm{id})$:

1. Les valeurs spectrales de u, non nulles, sont les λ_n et $-\nu_k$. Ce sont des valeurs propres de multiplicité finie.
2. $\|u\| = \max\{\lambda_0, \nu_0\}$ si $u \neq 0$
3. $\mathcal{H}$ est somme Hilbertienne de E_0, E_{λ_n} et $E_{-\nu_k}$ (donc $E_0^\perp$ est séparable).
4. (principe de Rayleigh) :

$$\lambda_n = \max_{x\in(E_0\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_{n-1}})^\perp, \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$$

$$-\nu_k = \min_{x\in(E_0\oplus E_{-\nu_0}\ldots\oplus E_{\nu_{k-1}})^\perp, \|x\|\leqslant 1} \langle u(x), x\rangle$$

Preuve.

1. découle des propriétés sur les opérateurs auto-adjoints et compacts
2. idem
3. Ces espaces (fermés) sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall x, y \in \mathcal{H},\ \text{si } u(x) = \lambda x,\ u(y) = \mu y \quad \text{avec } \lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$$

   Alors $\mu\langle x, y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. Ainsi $\langle x, y\rangle = 0$.

   Montrons maintenant que le sous-espace F qu'ils engendrent est dense. $u(F) \subset F \Rightarrow u(F^\perp) \subset F^\perp$ et $u|_{F^\perp}$ est auto-adjoint, compact, sans valeur propre non nulle. Donc $\mathrm{Sp}(u|_{F^\perp}) = \{0\}$ donc $u|_{F^\perp} = 0$ et $F^\perp \subset E_0 \subset F$. Donc $F^\perp = \{0\}$ et F est dense.

4. On applique à $u|_{(E_0\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_{n-1}})^\perp}$

□

Corollaire 5

Si u est un opérateur auto-adjoint, positif, compact alors :
$\exists \lambda_n \in]0;+\infty[$, λ_n décroissante $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que λ_n est une valeur propre de multiplicité finie et, en notant $E_{\lambda_n} = \ker(u - \lambda_n \mathrm{id})$,

- $\mathrm{Sp}(u) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{H} = \ker u \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_{\lambda_n}$ et $\lambda_0 = \sup_{x\in(\ker u)^\perp, \|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$

6 Calcul fonctionnel continu

Lorsque $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint, comment calculer le spectre de u^2, $\exp u$, etc. en fonction de u ?

6.1 Algèbre stellaires

Ici algèbre désigne des algèbres unifères complexes et un morphisme d'algèbres est un morphisme préservant les unités.

Définition 15 (algère involutive)

Une algèbre involutive est une algèbre A munie de $\left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ u & \longmapsto & u^* \end{array} \right.$ appelé *adjoint* telle que $\forall (u,v) \in A^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- (involutive) $(u^*)^* = u$
- (anti-linéaire) $(u + \lambda v)^* = u^* + \bar{\lambda} v^*$
- (anti-multiplicative) $(uv)^* = v^* u^*$

Remarque. $1^* = 1$ $\qquad (u^n)^* = (u^*)^n$ $\qquad u$ inversible $\Leftrightarrow u^*$ l'est et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

Définition 16 (auto-adjoint, unitaire, normal)

$u \in A$ est :

- auto-adjoint si $u = u^*$
- unitaire si $uu^* = u^*u = 1$
- normal si $uu^* = u^*u$

Remarque.

- 1 est auto-adjoint et unitaire
- $(u + u^*)$, $i(u + u^*)$, uu^* u^*u sont auto-adjoints

Définition 17

$\forall u \in A$,
$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_A(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid u - \lambda\mathrm{id} \text{ non inversible dans } A\}$$

Remarque. $\mathrm{Sp}(u^*) = \overline{\mathrm{Sp}(u)}$ car $(u - \lambda\mathrm{id})^* = u^* - \bar{\lambda}\mathrm{id}$. Si u est inversible on a aussi $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \mathrm{Sp}(u)^{-1}$ car $(u^{-1} - \lambda\mathrm{id}) = -\lambda u^{-1}\left(u - \frac{1}{\lambda}\mathrm{id}\right)$.

Définition 18 (morphisme d'algèbres involutives)

Si A, B sont deux algèbres involtives, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ est morphisme d'algèbres involutives si :

- φ est un morphisme d'algèbres
- $\forall u \in A \quad \varphi(u^*)\varphi(u)^*$

Remarque. $\forall u \in A$, $\mathrm{Sp}_B\varphi(u) \subset \mathrm{Sp}_A(u)$ car $\varphi(u - \lambda\mathrm{id}) = \varphi(u) - \lambda\mathrm{id}$.

Définition 19 (algèbre normée involutive)

Une algèbre normée involutive est une algèbre involutive A munie d'une norme $\|.\|$ telle que $\forall u, v \in A$:

- (sous-multiplicative) $\|uv\| \leqslant \|u\|\|v\|$
- (isométrie) $\|u^*\| = \|u\|$

Exemple.

- $\forall K$ compact de $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}^\infty(K) = \{f\colon K \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mes. bornées}\}$ avec les lois point par point
- $f \longmapsto \bar{f}$
- $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$

est une algèbre normée involutive.

Définition 20 (algèbre stellaire)

Une algèbre stellaire (ou $\mathbb{C}^*-$algèbre) est une algèbre normée involutive A qui vérifie :

- A est complète
- $\forall u \in A \ \|uu^*\| = \|u\|^2$

Exemples.

1. Si $\mathcal{H}$ est un Hilbert complexe, alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ muni de la composition, de $\{u \mapsto u^*\}$ et de la norme d'opérateurs est une algèbre stellaire.
2. $\forall X$ e.m. compact, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ avec les lois point par point, muni de $\{f \mapsto \bar{f}\}$ et de la norme $\|.\|_\infty$ est une algèbre stellaire.

Définition 21 (rayon spectral)

$\forall u \in A$ algèbre normée involutive, on définit le rayon spectral de u par :

$$\rho(u) := \lim_{n \to +\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Propriété 13

$\forall u \in A$ algèbre normée involutive.

1. $\rho(u^*) = \rho(u) \leqslant \|u\|$
2. Si A est complète, $\rho(u) = \min\{r \in [0, \|u\|] \mid \mathrm{Sp}(u) \subset \overline{\mathcal{B}(0,r)}\}$ et $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \{0\}$
3. Si A est stellaire, u auto-adjoint alors $\rho(u) = \|u\|$.
4. Si A, B sont des algèbres stellaires, et $\varphi \colon A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres involutives alors $\|\varphi\| \leqslant 1$

Preuve.

1. ok
2. même démonstration
3. $\|u\|^2 \underset{\text{auto-adj}}{=} \|uu^*\| \underset{\text{alg stellaire}}{=} \|u\|^2$. Ainsi $\|u^{2^n}\| = \|u\|^{2^n}$ et :

$$\rho(u) = \lim_{n \to +\infty} \|u^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \to +\infty} \|u\| = \|u\|$$

4. Montrons que $\|\varphi\| \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u)\|^2 &= \|\underbrace{\varphi(u)\varphi(u)^*}_{\text{auto-adjoint}}\| \quad \text{stellaire} \\
&= \rho\Big(\varphi(u)\varphi(u)^*\Big) \\
&= \rho(\varphi(uu^*)) \\
&\leqslant \rho(uu^*) \\
&= \|uu^*\| \\
&= \|u\|^2 \quad \text{par stellarité}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\varphi\| \leqslant 1$

$\square$