Probabilités

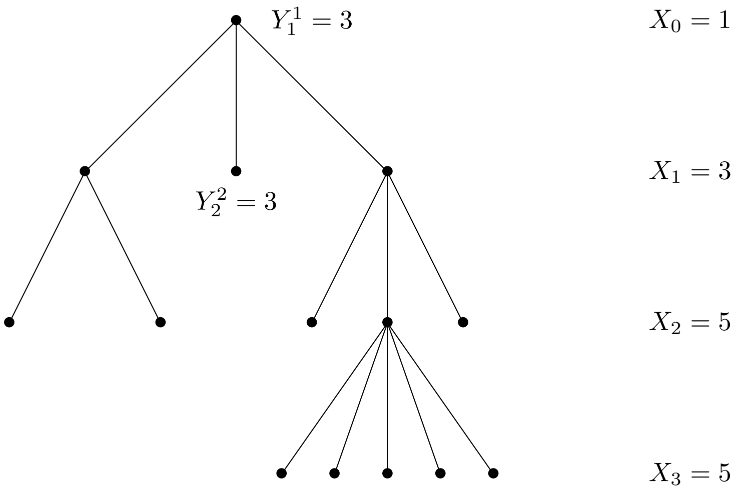
Chapitre 9 : Introduction au processus de branchement
Processus de Galton-Watson

Lucie Le Briquer

2 décembre 2017

But. modéliser la descendance d'un individu.

- des bactéries qui se multiplient par division
- survie des noms de Lord anglais (motivation initiale)



X_i : nombre d'individus.
Y_i^j : nombre d'enfants du i-ème individu de la génération $j-1$.

Modélisation. On se donne μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ appelée "loi de reproduction" qui représente le nombre d'enfants d'un individu. On se donne $(Y_i^j)_{i\geqslant 1, j\geqslant 1}$ v.a. indépendantes de loi μ. On pose :

$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_n = Y_1^n + \dots + Y_{X_{n-1}}^n \end{cases}$$

qui représente le nombre d'individus à la génération n.

Remarque. (Y_i^j) indépendants et de même loi sont des hypothèses très simplificatrices.

Remarques.

- $X_n = \sum_{i=1}^{+\infty} Y_i^n \mathbb{1}_{i \leqslant X_{n-1}}$ est bien défini.
- X_n est défini à partir de X_{n-1} :

$$\mathbb{E}\Big[\phi(X_n) \mid \underbrace{X_{n-1}}_{\in\mathbb{N} \text{ v.a. discrète}}\Big] \stackrel{?}{=} h(X_{n-1})$$

où :

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathbb{E}[\phi(X_n)|X_{n-1}=x] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{x} Y_i^n\right) \Big| \underbrace{X_{n-1}=x}_{\in\sigma(Y_i^k)_{i\geqslant 1, k\leqslant n-1}}\right] \quad \text{indépendance par regroupement} \\ &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{x} Y_i^n\right)\right] \\ &= \int \phi(z) d\mu^{*x}(z) \qquad * x = \text{ convolée } x \text{ fois de } \mu \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}[\phi(X_n)|X_{n-1}] = \int \phi(z) d\mu^{*X_{n-1}}(z)$. Donc $\mathcal{L}(X_n|X_{n-1}) = \mu^{*X_{n-1}}$.

Question. La descendance est-elle finie ou infinie ?

Remarque. $\mu(\{0\}) = 0 \Rightarrow$ population croissante $\Rightarrow$ descendance infinie
$\{X_n = 0\} \subseteq \{X_{n+1} = 0\}$ donc $A =$“extinction de la population”$= \bigcup_{n\geqslant 1} \uparrow \{X_n = 0\}$
Notre but est de trouver $\rho = \mathbb{P}(A) = \lim \uparrow \mathbb{P}(X_n = 0)$.

Outil. Fonction génératrice : jour le rôle de ϕ la fonction caractéristique pour les v.a. dans $\mathbb{N}$.

Définition 1 (fonction génératrice)

Si $X \in \mathbb{N}$ p.s., sa fonction génératrice est :

$$g_X : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ s & \longmapsto & g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k\geqslant 0} p_k s^k \end{cases}$$

où $p_k = \mathbb{P}(X_k) \geqslant 0$.

Propriété 1

Si $X \in \mathbb{N}$ p.s. alors g_X est :

1. analytique sur $[0,1[$
2. croissante convexe (strictement convexe si $\mathbb{P}(X \geqslant 2) > 0$)
3. $g_X(1) = 1$, $g'_X(1^-) = \mathbb{E}[X]$ ($+\infty$ si $X \notin \mathcal{L}^1$)

Preuve.

1. si $s \in [0,t]$ avec $t < 1$: $g_X(s) = \sum \underbrace{s^k p_k}_{|.| \leqslant t^k}$ avec $t < 1 \Rightarrow$ convergence normale

2. $p_k \geqslant 0 \Rightarrow$ croissance. Et :
$$g''_X(s) = \sum_{k \geqslant 2} k(k-1)p_k s^{k-2} \geqslant 0 \quad > 0 \text{ si } \exists k \geqslant 2 \text{ tel que } p_k > 0$$

3. $g'_X(s) = \sum_{k \geqslant 1} k s^k p_k \xrightarrow[s \to 1^-]{\uparrow} \sum_{k \geqslant 1} k p_k = \mathbb{E}[X]$

□

Calculons g_{X_n}. $g_{X_0}(s) = s^1 = s$.

$$\begin{aligned}
g_{X_n}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{X_n}\right] = \mathbb{E}\left[s^{Y_1^n + \ldots + Y_{X_{n-1}}^n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[s^{Y_1^n + \ldots + Y_{X_{n-1}}^n} \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_{n-1}=x}\right] \\
&\overset{\text{Fubini} \geqslant 0}{=} \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\underbrace{s^{Y_1^n}}_{\in \sigma(Y_1^n)} \ldots s^{Y_x^n} \quad \underbrace{\mathbb{1}_{X_{n-1}=x}}_{\in \sigma(Y_i^k)_{i \geqslant 1, k \leqslant n-1}}\right] \qquad \text{famille idp par regroupement} \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbb{E}[s^{Y_1^n}] \times \ldots \times \mathbb{E}[s^{Y_x^n}] \mathbb{P}(X_{n-1} = x) \\
&= \sum_{x=0}^{+\infty} (g_\mu(s))^x \mathbb{P}(X_{n-1} = x) \\
g_{X_n}(s) &= g_{X_{n-1}}(g_\mu(s)) = g_{X_0} \underbrace{(g_\mu(g_\mu(\ldots(g_\mu(s)))))}_{n \text{ fois}}
\end{aligned}$$

Finalement :
$$g_{X_n}(s) = g_\mu^{\circ n}(s)$$
(ok car $g_\mu \colon [0,1] \to [0,1]$)

Propriété 2

Soit ρ la probabilité d'extinction, i.e. $\rho = \lim \uparrow \mathbb{P}(X_n = 0)$ est le plus petit point fixe de g_μ sur $[0,1]$.

Remarque. $g_\mu(1) = 1$ donc il y a des points fixes.

Preuve.
$\mathbb{P}(X_n = 0) = g_{X_n}(0)$. Donc $\mathbb{P}(X_n = 0) = \underbrace{g_\mu(g_\mu(\ldots(0)))}_{n \text{ fois}}$.

$$\rho = \lim g_\mu(g_\mu(\ldots(0))) \underset{\text{continuité de } g_\mu}{=} g_\mu(\lim g_\mu(\ldots(0))) = g_\mu(\rho)$$

Donc ρ est un point fixe.

Soit x un autre point fixe. $0 \geqslant x$ et g_μ est croissante. Alors :

$$g_\mu(...(g_\mu(0))) \leqslant g_\mu(...g_\mu(x)) = x$$

Puis passage à la limite. Donc ρ est le plus petit point fixe. □

Théorème 1

Si $\mu \neq \delta_1$ alors si $m = \mathbb{E}[Y_1^1] = \int x d\mu(x)$.

- si $m \leqslant 1$ alors il y a extinction p.s.
- si $m > 1$ alors $\rho < 1$ survie avec une probabilité strictement positive

Remarque. On parle de "transition de phase" en $m = 1$. D'un côté on a un arbre fini p.s. sinon $\mathbb{P}(\text{arbre infini}) > 0$.

Preuve.

- si $m > 1$: $g_\mu(1) = 1$ et $g'_\mu(1) = m > 1$. Donc $\exists \varepsilon$ tel que

  $$\forall 1 - \varepsilon < y < 1, \; g_\mu(y) < y \text{ i.e. } g_\mu(y) - y < 0$$

  $g_\mu(0) \geqslant 0$. Si $g_\mu(0) = 0 \Rightarrow \; \rho = 0$. Sinon $g_\mu(0) - 0 > 0$.

- Si $m < 1$, $g'_{\mu_1} < 1$. g_μ est convexe donc reste $\geqslant$ à sa pente $> \{y = x\} \Rightarrow$ pas d'autre point fixe. ainsi $\rho = 1$.

- $g'_\mu(1) = 1$, pente$=\{y = x\}$ mais si $\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 0$ alors $m = 1 = 0p_0 + 1p_1 \Rightarrow p_1 = 1 \Rightarrow \mu = \delta_1$ qui est exclut. Donc $\mathbb{P}(X \geqslant 2) > 0 \Rightarrow g_\mu$ strictement convexe. $\Rightarrow g$ reste strictement au dessus de $\{y = x\}$ sauf en $1 \Rightarrow$ pas de point fixe plus petit que $\rho = 1$

□