Analyse
Chapitre 5 : Espaces de Sobolev

Lucie Le Briquer

17 décembre 2018

Table des matières

1 Dérivation au sens faible

Soient u et $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$.
Intégration par parties :

$$\int_a^b u\varphi' dx = u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_a^b u'\varphi dx$$

Si supp$\varphi \subset]a,b[$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, ainsi :

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b u'\varphi dx$$

Lemme 1

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f \in \mathcal{L}^p(I)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si

$$\int_I f\varphi dx = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$$

alors $f = 0$.

Donc u' est l'unique fonction $v\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_a^b v\varphi dx = -\int_a^b u\varphi' dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[)$$

Cette formule a un sens $\forall u, v \in \mathcal{L}^p([a,b])$.

Définition 1 (dérivée au sens faible)

Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. On dit que $u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{L}^p$, admet une dérivée au sens faible dans $\mathcal{L}^p(I)$ ssi $\exists v \in \mathcal{L}^p(I)$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(I),\ \int_I v\varphi dx = -\int_I u\varphi' dx$$

On note $v = u'$ ou $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou $\partial_x u$.

Propriété 1

Toute fonction $\mathcal{C}^1$, u, sur un intervalle $[a,b]$ compact est dérivable au sens faible dans $\mathcal{L}^p([a,b])$, $\forall p \in [1,\infty]$.

Remarque. Faux sur $]a,b[$.

1. Exemple : $u(x) = 1/x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ mais $u \notin \mathcal{L}^1(]0,1[)$.
2. Exemple : $u(x) = x^{-1/3}$. Alors $u \in \mathcal{L}^p(]0,1[)$ si $1 \leqslant p < 3$ mais $u' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} \notin \mathcal{L}^p$.

Propriété 2

Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si $u \in \mathcal{L}^p$ est dérivable au sens faible, sa dérivée est unique.

Preuve. Par le lemme $\int f\varphi dx = 0 \Rightarrow f = 0$. ■

Propriété 3

$x \mapsto |x|$ est dérivable au sens faible dans $\mathcal{L}^p$.

Preuve.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(]-1,1[)$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x|\varphi' dx &= \int_0^1 x\varphi' dx - \int_{-1}^{0} x\varphi' dx \\ &= -\int_0^1 \varphi dx + \int_{-1}^{0} \varphi dx \\ &= -\int_{-1}^{1} H(x)\varphi(x) dx\end{aligned}$$

où $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$. On vérifie que $H|_{]-1,1[} \in \mathcal{L}^p$. ■

Propriété 4

La fonction $\mathbb{1}_{]0,1[}$ n'est pas dérivable au sens faible dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $\forall p \in]1,\infty]$.

Preuve.
Par l'absurde supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} v\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,1[}\varphi' dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$$

Alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$,

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi' \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} v\varphi dx \right| \underset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|v\|_{\mathcal{L}^p} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

Or ceci est absurde car on peut construire une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

1. $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$
2. $\varphi_n(1) = 1$, $\varphi_n(0) = 0$
3. $\|\varphi_n\|_{\mathcal{L}^{p'}} = \frac{1}{n}$

■

En dimension > 1, on a la formule de Stokes :

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

$\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ signifie $\varphi, \nabla\varphi \equiv 0$ près de $\partial\Omega$

Définition 2 (espaces de Sobolev)

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

- $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. On dit que u est dérivable au sens faible dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ dans la direction x_j si $\exists v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega v\varphi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

  On note $v = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ ou $\partial_{x_j} u$ ou $\partial_j u$ ou u_{x_j}.

- On définit de même la dérivée au sens faible pour $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ou $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ou $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^m$. Par exemple pour $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^m$ on décompose en parties réelle et imaginaire.

- L'espace Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des fonction $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$) qui admettent des dérivées au sens faible dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ dans toutes les directions x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

- On introduit la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$$

Théorème 1

$1 \leqslant p \leqslant \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Définition 3 ($W^{k,p}(\Omega)$)

On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ appartient à $W^{k,p}(\Omega)$ si les dérivées $\partial_{x_j} u$ de u appartiennent à $W^{k-1,p}(\Omega)$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$.

On pose :

$$W^{\infty,p}(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} W^{k,p}(\Omega)$$

Et on définit $W^{0,p}(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)$.

Notation. Si $p = 2$, on pose $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

Propriété 5

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H_1(\Omega)} &= \int_\Omega u\bar{v} dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial v}}{\partial x_j} dx \\ &= (u, v)_{\mathcal{L}^2} + (\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{L}^2}\end{aligned}$$

Preuve. c.f. TD ■

On a donc une généralisation de la notion de dérivée. Regardons maintenant la généralisation de la notion de solution. On traitera l'exemple de l'équation $\Delta u = f$ où $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j} = \nabla \cdot \nabla$

Définition 4 (solution faible)

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de $\Delta u = f$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega), \quad -\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega f \varphi dx$$

Remarque. Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ (i.e. $u = U|_\Omega$ avec $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$) vérifie $\Delta u = f$. Alors, $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ donc $u \in H^1(\Omega)$ (pour Ω borné) et de plus :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \partial_n u d\sigma = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \varphi \partial_n u d\sigma &= \int_{\partial\Omega} (\varphi \nabla u) \cdot n d\sigma \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi \nabla u) dx \\
&= \int_\Omega (\nabla \varphi \cdot \nabla u + \varphi \Delta u) dx
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \varphi f dx$$

donc u est solution faible.

Rappels 1

$u \in \mathcal{C}^1$, $T-$périodique, $\int_0^T u dt = 0$

$$\int_0^T u^2 dt \leqslant \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \int_0^T u'(t)^2 dt$$

Remarque. L'hypothèse de moyenne nulle sert à éliminer les fonctions constantes.

Définition 5 ($H_0^1(\Omega)$)

On définit :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

i.e. $u \in H_0^1(\Omega)$ ssi $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Théorème 2 (Poincaré)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclus dans une bande $\mathcal{R} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |x_n| < R\}$. Alors $\forall u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant 2R\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

Preuve.

1. Par densité il suffit de le montrer pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty$.
2. On va utiliser une formule de représentation. Soit $(x', x_n) \in \Omega$ et $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On prolonge u par 0 sur $\mathcal{R}\backslash\Omega$.
$$u(x', x_n) = \int_{-R}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$
3. On cherche à montrer une inégalité $\Rightarrow$ appliquer Cauchy-Schwarz.
$$|u(x', x_n)| \leqslant \int_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|(x', t)dt$$
Donc,
$$|u(x', x_n)|^2 \leqslant \left(\int_{-R}^{R} dt\right)\left(\int_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^2 dt\right)$$
Ainsi, en intégrant sur $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:
$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^2 dx' \leqslant 2R \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^2 dtdx' = 2R\|\partial_{x_n} u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$
Alors,
$$\int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^2 dx' dx_n \leqslant \int_{-R}^{R} 2R\|\partial_{x_n} u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} dx_n$$
Alors,
$$\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{R})} \leqslant (2R)^2\|\partial_{x_n} u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant (2R)^2\|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

■

Proposition 1

Soit Ω un ouvert borné. Pour tout $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de $\Delta u = f$.

Preuve.
On introduit sur $H_0^1(\Omega)$,
$$B(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$
et $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{B(u, u)} = \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ (on considère des fonctions à valeurs réelles).

Alors $B(u,v)$ est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ et $(H_0^1(\Omega), \|.\|_{H_0^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. En effet,

$$\exists c > 0,\ \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Donc $\exists c' > 0$,

$$c'\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Par ailleurs,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^2(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & (f,\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx \end{array} \right.$$

est une forme linéaire continue. A fortiori :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & (f,\varphi) \end{array} \right.$$

est continue car H_0^1 s'injecte continûement dans $\mathcal{L}^2$ par Poincaré.
D'après le théorème de Riesz, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$,

$$B(u,v) = -(f,\varphi)_{\mathcal{L}^2}\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Donc :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -\int_\Omega f\varphi dx$$

Or $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ (par convolution $\exists w_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tels que $w_n \underset{H^1}{\longrightarrow} w$ ceci $\forall w \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$).
Donc $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\int_\Omega f\varphi$$

u est donc solution faible. Ceci montre l'existence.

Unicité.

$$\int \nabla u \nabla \varphi = -\int f\varphi \qquad \int \nabla \tilde{u} \nabla \varphi = -\int f\varphi$$

Donc :

$$\int \nabla(u-\tilde{u})\nabla\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$$

$\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ car $\mathcal{C}_0^\infty$ l'est. Ainsi :

$$\int |\nabla(u-\tilde{u})|^2 = 0 \Rightarrow \|u-\tilde{u}\|_{H^1} = 0$$

par Poincaré. Finalement $u = \tilde{u}$. ■

2 Epaces de Sobolev et Fourier

Définition 6

Soit $s \in [0, +\infty[$. On dit que $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espce de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ si :

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}| \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

On pose $\|.\|_{H^s}$:

$$\|u\|_{H^s}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}}^n (1 + |\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Propriété 6

Si $k \in \mathbb{N}^*$, $H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$. Les deux définitions coïncident et on a équivalence des normes.

Définition 7

Soit $s \in \mathbb{R}$. On dit que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ si

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

Exemple. $\delta_0 \in H^{-1}(\mathbb{R})$ car $\hat{\delta}_0 = 1$. Ainsi $(1 + |\xi|^2)^{-1/2}\hat{\delta}_0 = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
En fait $\delta_0 \in H^{-1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})$ $\forall \varepsilon > 0$.

Exercice. $i\partial_t u - \Delta u = 0$, $u|_{t=0} = \delta_0$. Que vaut $u(t, x)$?

Propriété 7

$H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^s} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$$

Propriété 8

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Preuve. En exercice. ■

Propriété 9

Si $s > \frac{n}{2}$, alors $H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.

1. *Densité.* Par densité il suffit de montrer que $\exists c > 0$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant c\|u\|_{H^s} = c\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2}$$

2. *Formule de représentation.* Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi$$

3. *Cauchy-Schwarz.*

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}|d\xi \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}}_{\in\mathcal{L}^2 \text{ si } s>\frac{n}{2}}\underbrace{|\hat{u}|}_{\in\mathcal{L}^2}d\xi\end{aligned}$$

Théorème 3

$n \geqslant 1$, $0 \leqslant s < \frac{n}{2}$. ALors :

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } p \text{ vérifiant } 2 \leqslant p \leqslant \frac{2n}{n-2s}$$

Preuve.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On montre que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^q} \leqslant c\|f\|_{\dot{H}^s} \quad (*)$$

où $q = \frac{2n}{n-2s}$ et

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad \text{norme raffinée}$$

Supposons ceci vrai. Montrons le théorème. Soit $p \in [2, q]$. Alors, $\exists s' \in [0, s]$ tel que $p = \frac{2n}{n-2s'}$. Alors :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant c\|f\|_{\dot{H}^{s'}} \leqslant c\|f\|_{H^{s'}} \leqslant c\|f\|_{H^s}$$

Montrons $(*)$. On introduit :

$$\{|f| > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$$

$$\big|\{|f| > \lambda\}\big| = \text{mesure de } \{|f| > \lambda\}$$

Alors,

$$\|f\|_{\mathcal{L}^q}^q = q\int_0^{+\infty}\lambda^{q-1}\big|\{|f| > \lambda\}\big|d\lambda$$

En effet, par Fubini :

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{L}^q}^q &= \int |f|^q dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{|f(x)|} q\lambda^{q-1} d\lambda \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{|f|>\lambda} dx \right) q\lambda^{q-1} d\lambda
\end{aligned}
$$

Soit $\lambda > 0$. On décompose $f = g_\lambda + h_\lambda$.

$$
\hat{g}_\lambda(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi) & \text{si } |\xi| \leqslant A_\lambda \\ 0 & \text{si } |\xi| > A_\lambda \end{cases} \qquad \hat{h}_\lambda(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \leqslant A_\lambda \\ \hat{f}(\xi) & \text{si } |\xi| > A_\lambda \end{cases}
$$

avec A_λ à choisir.

Remarquons que si $|f| > \lambda$ alors soit $|g_\lambda| > \frac{\lambda}{2}$ soit $|h_\lambda| > \frac{\lambda}{2}$. On choisit A_λ tel que $|g_\lambda| \leqslant \frac{\lambda}{2}$. On a :

$$
|g_\lambda(x)| = \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{|\xi| \leqslant A_\lambda} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right|
$$

$$
|g_\lambda(x)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{|\xi| \leqslant A_\lambda} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{1/2} \left(\int |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}
$$

Donc,

$$
\|g_\lambda\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant c_1 \left(\int_{|\xi| \leqslant A_\lambda} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{\dot{H}^s}
$$

Or,

$$
\int_{|\xi| \leqslant A_\lambda} |\xi|^{-2s} d\xi = \int_0^{A_\lambda} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{-2s+n-1} dr d\theta = c_2 A_\lambda^{n-2s}
$$

Donc $\|g_\lambda\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant c_3 A_\lambda^{n/2-s} \|f\|_{\dot{H}^s}$. On choisit A_λ tel que :

$$
c_3 A_\lambda^{n/2-s} \|f\|_{\dot{H}^s} = \frac{\lambda}{4}
$$

Or :

$$
\{|f| > \lambda\} \subset \{|h_\lambda| > \lambda/2\}
$$

Donc,

$$
\|f\|_{\mathcal{L}^q}^q \leqslant q \int_0^{+\infty} \lambda^{q-1} \left| \left\{ |h_\lambda| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| d\lambda
$$

De plus,

$$
\|h_\lambda\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int |h_\lambda|^2 dx \geqslant \int_{|h_\lambda| > \frac{\lambda}{2}} \frac{\lambda^2}{4} dx = \frac{\lambda^2}{2} \left| \left\{ |h_\lambda| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|
$$

Donc,

$$
\|f\|_{\mathcal{L}^q}^q \leqslant c_4 \int_0^{+\infty} \lambda^{q-3} \|h_\lambda\|_{\mathcal{L}^2}^2 d\lambda
$$

Or,

$$\|h_\lambda\|_{\mathcal{L}^2}^2 = (2\pi)\|\hat{h}_\lambda\|_{\mathcal{L}^2}^2 = (2\pi)\int_{|\xi|\geqslant A_\lambda} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

D'où,

$$\|f\|_{\mathcal{L}^q}^q \leqslant c_5 \int_0^{+\infty} \lambda^{q-3} \int_{|\xi|\geqslant A_\lambda} |\hat{f}|^2 d\xi d\lambda \leqslant c_5 \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left(\int_0^{\Lambda(\xi)} \lambda^{q-3} d\lambda \right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

où $\Lambda(\xi)$ choisi tel que $\lambda \geqslant \Lambda(\xi) \Rightarrow \xi \leqslant A_\lambda$. On a $A_\lambda^{n/2-s} c\|f\|_{\dot{H}_s} = \frac{\lambda}{4}$.
Si $|\xi| \geqslant A_\lambda (c\|f\|_{\dot{H}^s})^{(n/2-s)^{-1}}$ alors

$$|\xi|^{n/2-s} \geqslant c_6 \lambda$$

On pose, $\Lambda(\xi) = \frac{1}{c_6}|\xi|^{n/2-s}$. Donc :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^q}^q \leqslant c_7 \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(\xi)^{q-2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \ldots = c_8 \|f\|_{\dot{H}^s}^q$$

3 Convolution

3.1 Introduction

Définition 8 (produit de convolution)

Soient $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Le produit de convolution de f et g est la fonction $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

On note $h = f * g$.

Remarque. Cette notion est naturelle dès que l'on ne s'intéresse pas aux valeurs ponctuelles mais à des moyennes locales (par exemple les mesures de quantités physiques).

Exemples.

- $f = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$. Alors :

$$h(x) = \int_{-\frac{1}{2}\leqslant x-y\leqslant\frac{1}{2}} g(y)dy = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(y)dy$$

  $h(x)$ est la moyenne de g sur $\left[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right]$.

- $f = \mathbb{1}_{[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]}$. Alors :

$$h(x) = \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} g(y)dy$$

  On s'attend à ce que h_ε soit régulière et converge vers g quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Théorème 4 (inégalité de Young)

Soit $n \geqslant 1$ et $(p,q,r) \in [1,\infty]^3$ tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et de plus,

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^r} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p}\|g\|_{\mathcal{L}^q}$$

Preuve.

- $f = 0$ ou $g = 0 \Rightarrow f * g = 0$ trivial
- On peut donc supposer $f \neq 0$ et $g \neq 0$, puis supposer que $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 1$, $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = 1$. On veut montrer que $\|f * g\|_{\mathcal{L}^r} \leqslant 1$. Remarquons que :
  - si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\Leftrightarrow r = \infty$) alors par Hölder on a bien le résultat :

    $$\left|\int f(x-y)g(y)dy\right| \leqslant \underbrace{\left(\int |f(x-y)|^p dy\right)^{1/p}}_{\|f\|_{\mathcal{L}^p}=1} \underbrace{\left(\int |g(y)|^q dy\right)^{1/q}}_{\|g\|_{\mathcal{L}^q}=1} \leqslant 1$$

    Le premier terme est bien la norme $\mathcal{L}^p$ malgré la translation et l'inversion.
  - Si $p = 1$ et $q = 1$ ($\Leftrightarrow r = 1$). Alors avec Fubini :

    $$\int\int |f(x-y)||g(y)|dydx = \int\int \ldots dxdy = \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

    Donc $\|f * g\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant 1$.
  - si $1 < r < +\infty$, alors $p < +\infty$, $q < +\infty$. Idée : on décompose.

    $$|f(x-y)||g(y)| = \alpha(x,y)\beta(x,y)$$

    avec $\alpha(x,y) = |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}$ et $\beta(x,y) = |f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}$. Alors :

    $$\int\int \alpha^r dxdy = \int\int |f(x-y)|^p|g(y)|^q dxdy = \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p\|g\|_{\mathcal{L}^q}^q = 1$$

    Et $\int \beta(x,y)^{r'}dy \leqslant 1$ car $\forall x$:

    $$\begin{aligned}\beta(x,y)^{r'} &= |f(x-y)|^{r'\left(1-\frac{p}{r}\right)}|g(y)|^{r'\left(1-\frac{q}{r}\right)} \\ &= |f(x-y)|^{pr'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}|g(y)|^{qr'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} \\ &= |f(x-y)|^{\frac{p}{s}}|g(y)|^{\frac{q}{t}}\end{aligned}$$

où $\frac{1}{s} = r'\left(1p - \frac{1}{r}\right)$ et $\frac{1}{t} = r'\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)$. Alors :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = r'\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2}{r}\right) = r'\left(1 + \frac{1}{r} - \frac{2}{r}\right) = r'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = r' \times \frac{1}{r'} = 1$$

Donc $t = s' = \frac{s}{s-1}$. Ainsi par Hölder :

$$\int \beta(x,y)^{r'} dy \leqslant \left(\int |f(x-y)|^p dy\right)^{1/s} \left(\int |g(y)|^q dy\right)^{1/t} \leqslant 1$$

Alors $h = f * g$ vérifie :

$$\begin{aligned}
|h(x)| &\leqslant \int |f(x-y)||g(y)|dy \\
&\leqslant \int \alpha(x,y)\beta(x,y)dy \\
&\leqslant \left(\int \alpha(x,y)^r dy\right)^{1/r} \underbrace{\left(\int \beta(x,y)^{r'} dy\right)^{1/r'}}_{\leqslant 1} \\
&\leqslant \left(\int \alpha(x,y)^r dy\right)^{1/r}
\end{aligned}$$

D'après Hölder. Donc :

$$\int |h(x)|^r dx \leqslant \int\int \alpha(x,y)^r dydx \leqslant 1$$

■

Remarque. Cas fondamental (moyenne). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $g \mapsto f * g$ est borné de $\mathcal{L}^q$ dans $\mathcal{L}^q$ pour tout $q \in [1, \infty]$.
Exemple principal :

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^2}$$

On peut généraliser cet exemple.

Propriété 10 (lemme de Schur)

Soit K une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|dx \leqslant A_1 \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|dy \leqslant A_2$$

Si $u \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$, on définit Pu par :

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy \quad \text{(opérateur de noyau } K\text{)}$$

Alors P se prolong par continuité en un opérateur borné de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\|P\|_{L(\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2)} \leqslant \sqrt{A_1 A_2}$$

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$Pu = f * u(x) = \int K(x,y)u(y)dy$$

avec $K(x,y) = f(x-y)$. Et $A_1 = A_2 = \|f\|_{\mathcal{L}^1}$.

Preuve.
Par Cauchy-Schwarz :

$$|Pu(x)|^2 \leqslant \int \ |K(x,y)||u(y)|^2 dy \times \underbrace{\int \ |K(x,y)|dy}_{\leqslant A_2}$$

Alors,

$$\int |Pu|^2 dx \leqslant A_2 \int \int |K(x,y)||u(y)|^2 dydx$$

puis Fubini. ■

Voyons un autre lien avec $\|f * g\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^2}$.

Propriété 11

- Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

- Soit $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$\widehat{uv} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{u} * \hat{v}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int \int e^{-ix\cdot\xi} f(x-y)g(y)dydx \\
&= \int \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)r^{-iy\cdot\xi} g(y)dydx \\
&= \int e^{-iy\cdot\xi} g(y) \left(\int e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)dx \right) dy \\
&= \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}(\hat{u} * \hat{v}) = \mathcal{F}(\hat{u})\mathcal{F}(\hat{v})$ où :

$$\mathcal{F}(\hat{u})(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi = (2\pi)^n u(-\xi)$$

donc

$$\mathcal{F}(\hat{u} * \hat{v}) = (2\pi)^{2n}(uv)(-\xi)$$
$$\mathcal{F}(\hat{u} * \hat{v}) = (2\pi)^n \mathcal{F}(\widehat{uv})$$

Ainsi, $\hat{u} * \hat{v} = (2\pi)^n \widehat{uv}$. ■

Application 1. Si $f \in \mathcal{L}^1$, $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$:

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^2} = C\|\widehat{f * g}\|_{\mathcal{L}^2} = C\|\hat{f}\hat{g}\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^\infty}\|\hat{g}\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^2}$$

car $\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^1}$ et $C\|\hat{g}\|_{\mathcal{L}^2} = \|g\|_{\mathcal{L}^2}$.

Application 2.

Théorème 5

Soit $n \geqslant 1$ et $s > \frac{n}{2}$. Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ alors $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\|uv\|_{H^s} \leqslant C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$$

Preuve.

$$\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$$

Lemme. $\forall s \geqslant 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle\xi\rangle^s \leqslant 2^s \left(\langle\xi - \eta\rangle^s + \langle\eta\rangle^s\right)$$

Pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{uv} = (2\pi)^{-n}\hat{u} * \hat{v}$ on en déduit que :

$$\langle\xi\rangle^s|\widehat{uv}(\xi)| \leqslant \frac{2^s}{(2\pi)^n}\int \left(\langle\xi - \eta\rangle^s + \langle\eta\rangle^s\right)|\hat{u}(\xi - \eta)||\hat{v}(\eta)|d\eta$$

Donc,

$$\langle\xi\rangle^s|\widehat{uv}(\xi)| \leqslant \frac{2^s}{(2\pi)^n}\left[\int \left(\langle\xi - \eta\rangle^s|\hat{u}(\xi - \eta)|\right)|\hat{v}(\eta)|d\eta + \int |\hat{u}(\xi - \eta)|\left(\langle\eta\rangle^s|\hat{v}(\eta)|\right)d\eta\right]$$

On applique $\|f * g\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^2}$ deux fois :

1. $f(x) = \hat{v}(x)$, $g(y) = \langle y\rangle^s\hat{u}(y)$
2. $f = \hat{u}$, $g = \langle.\rangle^s\hat{v}$

Puis on utilise $\|\hat{u}\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant C\|u\|_{H^s}$ et $\|\hat{v}\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant C\|v\|_{H^s}$. car :

$$\int |\hat{v}|d\xi \leqslant \underbrace{\left(\int 1\langle\xi\rangle^{2s}d\xi\right)^{1/2}}_{<+\infty}\underbrace{\left(\int \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{v}|^2\right)^{1/2}}_{=\|v\|_{H^s}}$$

et aussi $\|\langle.\rangle^s\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2} = \|u\|_{H^s}$. Ce qui montre l'inégalité pour u, v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Puis densité. ■

3.2 Fonctions à support compact

Propriété 12

Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe $\varphi_\Omega \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\varphi_\Omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi_\Omega(x) > 0\}$$

($\Leftrightarrow$ $\forall F$ fermé ,$\exists \varphi_F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ $0 \leqslant \varphi_F \leqslant 1$ qui s'annule exactement sur F)

Preuve.
Soit Ω ouvert. $\forall x \in \Omega$, $\exists a(x) \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega$ et $r(x) \in \mathbb{Q}_+$ tels que $x \in \mathcal{B}(a(x), r(x)) \subset \Omega$. Donc :

$$\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} \{x\} \subset \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{B}(a(x), r(x)) \subset \Omega$$

Donc, $\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{B}(a(x), r(x))$.
Mais $\{a(x) : x \in \Omega\}$ et $\{r(x) : x \in \Omega\}$ sont dénombrables donc :

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(a_k, r_k)$$

On pose :

$$\varphi_\Omega(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-1/r_k}}{2^{k+1}} \phi\left(1 - \frac{|x - a_k|^2}{r_k^2}\right)$$

où $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$\phi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

On remarque que :

- $\lim_{y\to 0^+} \phi(y) = 0$, ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}$
- $\partial_y^k \phi(y) = P_k\left(\frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{y}}$, $P_k \in \mathbb{R}[X]$ pour $y > 0 \Rightarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On a :

1. $\varphi_\Omega(x)$ est bien définie
2. $\varphi_\Omega(x) > 0$ si $x \in \Omega$
3. $\varphi_\Omega(x) = 0$ si $x \notin \Omega$
4. Montrons que :

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-1/r_k}}{2^{k+1}} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha \phi(\ldots)| < +\infty \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

   On vérifie que :

   $$\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha \phi(\ldots)| \leqslant r_k^{-|\alpha|}$$

   Or,

   $$\sum \frac{e^{-1/r_k}}{2^{k+1}} \left(\frac{1}{r_k}\right)^{|\alpha|} \leqslant \sum \frac{|\alpha|^{|\alpha|} e^{-|\alpha|}}{2^{k+1}} \leqslant |\alpha|^{|\alpha|} e^{-|\alpha|}$$

Par convergence normale des séries des dérivées on a $\varphi_\Omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Lemme 2

$\exists \theta \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\theta(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $\theta(t) = 1$ si $t \geqslant 1$.

Preuve.
$g(t) = \phi(t)\phi(1-t)$ avec $\phi(y) = e^{-1/y}$ pour $y > 0$, 0 sinon. supp$g \subset [0,1]$. On pose alors :

$$\theta(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} g(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)ds}$$

qui convient. ■

Corollaire 1

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, K compact contenu dans Ω, $\exists f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $f \equiv 1$ sur un voisinage de K.

Preuve.
Soit $x \in K$. Il existe B_x boule centrée en x avec $\overline{B_x} \subset \Omega$. $\exists \varphi_x \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$, $\mathcal{C}^\infty$ telle que supp$(\varphi_x) \subset \mathcal{B}_x$ et $\varphi_x(x) > 0$. On peut supposer $\varphi_x(x) = 2$. On pose :

$$V_x = \{z \in \Omega : |\varphi_x(z)| > 1\}, \text{ ouvert}$$

Alors,

$$K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$$

donc par compacité on peut un extraire un sous recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} V_{x_i}$$

On pose $\varphi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_{x_i}$. Alors $\varphi \geqslant 1$ sur K, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ et supp$(\varphi) \subset \Omega$. Pour conclure on pose :

$$f = \theta \circ \varphi$$

Alors $0 \leqslant f \leqslant 1$ $f = 1$ sur K. supp$(f) \subset$ supp$(\varphi) \subset \Omega$. ■

Propriété 13

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ un recouvrement de K. Alors il existe une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ subordonnée à ce recouvrement :

$$\exists (\zeta_i)_{1 \leqslant i \leqslant N},\ \zeta_i \in \mathcal{C}^\infty,\ 0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1$$

avec supp$(\zeta_i) \subset U_i$ et

$$\sum_{i=1}^{N} \zeta_i(x) = 1 \ \forall x \in K$$

Lemme 3 (décomposition dyadique de l'unité)

Soit $n \geqslant 1$, $\exists \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset \mathcal{B}(0,1) \qquad \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathcal{B}(0,2) \backslash \mathcal{B}(0,1/2)$$

et $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi(\xi) + \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(2^{-p}\xi) = 1$$

Remarque. $\operatorname{supp}(\varphi(2^{-p}\xi) \subset \mathcal{C}_p$ où $\mathcal{C}_p$ est la couronne :

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{p-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^p\}$$

Preuve.
Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}(\psi) \subset \mathcal{B}(0,1)$ et $\psi(\xi) = 1$ si $\xi \in \mathcal{B}(0,1/2)$. On pose :

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$$

alors,

- si $|xi| \leqslant 1/2$ on a $\psi(\xi/2) = 1$, $\psi(\xi) = 1$ donc $\varphi(\xi) = 0$
- si $|\xi| \geqslant 2$ on a $\psi(\xi/2) = 0$, $\psi(\xi) = 0$ donc $\varphi(\xi) = 0$

donc $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathcal{B}(0,2) \backslash \mathcal{B}(0,1/2)$.

$$\begin{aligned}\psi(\xi) + \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(2^{-p}\xi) &= \psi(\xi) + (\psi(\xi/2) - \psi(\xi)) + \ldots + \left(\psi\left(\frac{\xi}{2^N}\right) - \psi\left(\frac{\xi}{2^{N-1}}\right)\right) + \ldots \\ &= \psi\left(\frac{\xi}{2^N}\right) = 1 \text{ si } 2^N \geqslant 4|\xi|\end{aligned}$$

■

Définition 9

Soit $\alpha \in]0,1[$. Une fonction $u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ ssi :

$$\sup_{x,y:|x-y| \leqslant 1} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty$$

Définition 10

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $p \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$. On définit $\Delta_p u$ par :

$$\mathcal{F}(\Delta_p u) = \varphi(2^{-p}\xi)\mathcal{F}u \text{ si } p \geqslant 0$$

$$\mathcal{F}(\Delta_{-1} u) = \psi(\xi)\mathcal{F}u$$

Propriété 14

Soit $r \in]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\exists c > 0$:

$$\forall p \in \{-1\} \cup \mathbb{N}, \ \|\Delta_p u\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant c 2^{-pr}$$

alors $u \in \mathcal{C}^{0,r}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2

Soit $s > \frac{n}{2}$. On sait que $H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $s > \frac{n}{2} + \alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$, alors

$$H^s(\mathbb{R}^n) \text{ s'injecte continûement dans } \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

Preuve.
On veut estimer $\|\Delta_p u\|_{\mathcal{L}^\infty}$. $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\Delta_p u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} |\Delta_p u| &\leqslant (2\pi)^{-n} \int \langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s} \varphi(2^{-p}\xi)|\hat{u}(\xi)| d\xi \\ &\leqslant (2\pi)^{-n} \left(\int \varphi(2^{-p}\xi)^2 \langle\xi\rangle^{-2s} d\xi\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}}_{\leqslant \|u\|_{H^s}} \end{aligned}$$

Or,

$$\varphi(2^{-p}\xi)^2\langle\xi\rangle^{-2s} \sim \mathbb{1}^2_{\mathcal{C}_p}(\xi)\langle 2^p\rangle^{-2s} \sim 2^{-2ps}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_p}$$

Alors,

$$\int \varphi(2^{-p}\xi)^2\langle\xi\rangle^{-2s} d\xi \leqslant 2^{-2ps} \int_{\mathcal{C}^p} d\xi \simeq 2^{-2ps}2^{pn} = 2^{p(n-2s)}$$

En fait,

$$\left(\int \varphi(2^{-p}\xi)^2\langle\xi\rangle^{-2s} d\xi\right)^{1/2} \leqslant 2^{-2ps} \int_{\mathcal{C}^p} d\xi \simeq 2^{-2ps}2^{pn} = C2^{p(n-2s)\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \ \|\Delta_p u\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant C' 2^{p\left(\frac{n}{2}-s\right)} \|u\|_{H^s}$. Alors $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ par la proposition. ■

4 Fonctions harmoniques

4.1 Propriété de la moyenne

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$ ouvert.

Définition 11 (fonction harmonique)

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est harmonique si :

$$\Delta u = 0$$

où $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.

Théorème 6

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. u est harmonique ssi :

$$\forall x \in \Omega,\ \forall r > 0,\ \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega \ \Rightarrow\ u(x) = \frac{1}{|\mathcal{B}(x,r)|}\int_{\mathcal{B}(x,r)} u(y)dy$$

i.e. $u(x)$ correspond à la moyenne de u sur toute boule centrée en x et incluse dans Ω.

Preuve.

Soit $x \in \Omega$. Posons :

$$\phi(r) = \frac{1}{|\mathcal{B}(x,r)|}\int_{\mathcal{B}(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{|\mathcal{B}(0,1)|}\int_{\mathcal{B}(0,1)} u(x+r\zeta)d\zeta$$

$\phi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} u(x)$. Il suffit de montrer que u harmonique ssi $\phi(r)$ est constante ($\forall x$). Montrons que $\phi'(r) = 0$. On a :

$$\phi'(r) = \frac{1}{|B|}\int_B (\zeta \cdot \nabla u)(x+r\zeta)d\zeta$$

où $B = \mathcal{B}(0,1)$ et $\zeta \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \zeta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Or,

$$\zeta \cdot \nabla u(x+r\zeta) = \mathrm{div}_\zeta\left(\frac{|\zeta|^2}{2}(\nabla u)(x+r\zeta)\right)$$

car :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\zeta(|\zeta|^2(\nabla u)(x+r\zeta)) &= \sum_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}(|\zeta|^2(\partial_{x_j}u)(x+r\zeta)) \\
&= \sum_{j=1}^n 2\zeta_j(\partial_{x_j}u)(x+r\zeta) + \sum_{j=1}^n r|\zeta|^2(\partial_{x_j}^2 u)(x+r\zeta) \\
&= 2\zeta \cdot (\nabla u)(x+r\zeta)
\end{aligned}$$

car $\Delta u = 0$. Donc :

$$\phi'(r) = \frac{1}{|B|}\int_B \mathrm{div}_\zeta(X)d\zeta = \frac{1}{|B|}\int_{\partial B} X \cdot n d\sigma$$

où $X(\zeta) = |\zeta|^2(\nabla u)(x + r\zeta)$. Sur ∂B on a $|\zeta|^2 = 1$. Donc :

$$\phi'(r) = \frac{1}{|B|}\int_{\partial B}(\partial_n u)(x + r\zeta)dr(\zeta)$$

Par ailleurs,

$$\int_{\mathcal{B}(x,r)} \Delta u dx = \int_{\mathcal{B}(x,r)} \mathrm{div}(\nabla u)dx = \int_{\partial\mathcal{B}(x,r)} \partial_n u d\sigma$$

Donc si $\Delta u = 0$ $\int_{\partial\mathcal{B}(x,r)} \partial_n u = 0$ $\forall x, \forall r$. Ainsi $\phi'(r) = 0$ et donc ϕ constante.
Inversement, si $\phi'(r) = 0$, on en déduit que :

$$\int_{\mathcal{B}(x,r)} (1 - |\zeta|^2)\Delta u dx = 0, \quad \forall \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega \ \Rightarrow \ \Delta u = 0$$

En effet, d'après les calculs qui précédent, si $\phi'(r) = 0$, alors on a :

$$\frac{1}{|B|}\int_{\partial B}(\partial_n u)(x + r\zeta)d\sigma(\zeta) = \frac{r}{|B|}\int_B |\zeta|^2(\Delta u)(x + r\zeta)d\zeta$$

Or,

$$\frac{r}{|B|}\int_B(\Delta u)(x + r\zeta)d\sigma(\zeta) = \frac{1}{|B|}\int_{\partial B}\partial_n u(x + r\zeta)d\sigma(\zeta)$$

car :

$$r\int_B \Delta u(x + r\zeta) = \int_B \mathrm{div}_\zeta(\nabla u)(x + r\zeta) = \int_{\partial B}(\partial_n u)(x + r\zeta)$$

D'où,

$$\frac{r}{|B|}\int_B(1 - |\zeta|^2)\Delta u(x + r\zeta)d\zeta = 0 \quad \forall x, \forall r, \text{ tq } \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega$$

■

Théorème 7

Ω ouvert borné connexe. Si $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ est harmonique, alors :

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

De plus si u atteint son maximum dans Ω alors u est constante.

Preuve.
Supposons $\exists x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Si $r > 0$ est tel que $\mathcal{B}(x_0, r) \subset \Omega$ alors :

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|\mathcal{B}(x_0, r)|}\int_{\mathcal{B}(x_0,r)} u(y)dy$$

Or $M = \frac{1}{|\mathcal{B}(x_0,r)|}\int_{\mathcal{B}(x_0,r)} M dy$, ainsi :

$$\int_{\mathcal{B}(x_0,r)} \underbrace{(u(y) - M)}_{\leqslant 0}dy = 0$$

Alors $u(y) = M$ $\forall y \in \mathcal{B}(x_0, r)$. Donc $\{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ est ouvert donc $= \Omega$ par connexité. ■

4.2 Solution fondamentale du Laplacien

On verra qu'il existe beaucoup de fonction harmoniques.

Exemples.

- $f = u + iv$ ($f : z \mapsto z = x + iy = u + iv$). Si $u_x = v_y$ $u_y = -v_x$ alors :

$$u_{xx} - u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

  $\Re(f), \Im(f)$ sont harmoniques.

- Si $\Delta\varphi = 0$ alors $\phi_x^2 - \phi_y^2$, $\phi_x\phi_y$ sont harmoniques.
- Si $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors $\exists u,\ \Delta u = 0$ tel que $u|_{\partial\Omega} = f$.
- On cherche $u(x) = v(|x|)$ où $v : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique. Alors $\Delta u =?$.

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum \partial_j^2(v(|x|)) \\ &= \sum \partial_j(v'(|x|)\partial_j(|x|)) \\ &= v'(|x|)\left(\sum \partial_j^2|x|\right) + v''(|x|)\sum(\partial_j|x|)^2\end{aligned}$$

  or, $\partial_j|x| = \frac{x_j}{|x|}$ et $\partial_j^2|x| = \frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3} = \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3}$. Donc :

$$\Delta u(x) = v'(|x|)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right) + v''(|x|)\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{|x|^2} = v'(|x|) + \frac{n-1}{|x|}v'(|x|)$$

  $\Delta u = 0$ ssi $v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$. Donc :

$$(\log v')' + (n-1)(\log r)'$$

Définition 12 (solution fondamentale du Laplacien)

On appelle solution fondamentale du Laplacien la fonction :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x|) \qquad (n = 2)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-2)|S_{n-1}|}\frac{1}{|x|^{n-2}} \qquad (n \geqslant 3)$$

Proposition 2

Soit $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)f(y)dy$$

est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et $-\Delta u = f$.

Preuve.
$y \mapsto f(y)$ est localement intégrable, $y \mapsto \varphi(x-y)$ est localement intégrable. Donc $y \mapsto \varphi(x-y)f(y)$ est intégrable. $u(x)$ est bien définie. On a :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y)dy$$

donc u est $\mathcal{C}^2$ (dérivation, Lebesgue) et :

$$\Delta u = \int \varphi(y)(\Delta f)\cdot(x-y)dy$$

Régularisons φ (pour $n \geqslant 3$), on pose :

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{(n-2)|S_{n-1}|}\frac{1}{(|y|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}} = \alpha_n \frac{1}{(|y|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

Soit $u_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(y)f(x-y)dy$. Alors $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\Delta_x u_\varepsilon = \int \varphi_\varepsilon(y)(\Delta_x f)(x-y)dy = \int \varphi_\varepsilon(y)(-\Delta_y(f(x-y)))$$

et $\Delta u_\varepsilon \to \Delta u$ quand $\varepsilon \to 0$. On a par intégration par parties :

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \int \Delta\varphi_\varepsilon(y)f(x-y)dy$$

et

$$\Delta\varphi_\varepsilon(y) = -\frac{n}{|S_{n-1}|}\frac{\varepsilon^2}{(|y|^2+\varepsilon^2)^{1+\frac{n}{2}}}$$

En prenant $y = \varepsilon z$,

$$\Delta u_\varepsilon(x) = -\frac{n}{|S_{n-1}|}\int \frac{f(x-\varepsilon z)}{(1+|z|^2)^{1+\frac{n}{2}}}dz$$

Donc $\Delta u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -af(x)$ où :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{n}{|S_{n-1}|}\int \frac{dz}{(1+|z|^2)^{1+\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{n}{|S_{n-1}|}\int_0^{+\infty} |S_{n-1}|\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{1+\frac{n}{2}}}dr \\
&= n\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^{n+1}}\frac{ds}{\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{1+\frac{n}{2}}} \\
&= n\int_0^{+\infty} \frac{s}{(1+s^2)^{1+\frac{n}{2}}}ds \\
&= n\left[-\frac{1}{n}\frac{1}{(1+s^2)^{n/2}}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3

Si $n \geqslant 2$, on a :

$$u(x) = \frac{1}{|S_{n-1}|} \int \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot \nabla u(y) dy \qquad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 8 (injections de Sobolev)

Soit $n \geqslant 2$ et $p \in]1, n[$. On pose $p^* = \frac{np}{n-p}$. Alors :

$$\exists c_p > 0 \ : \ \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ \|f\|_{\mathcal{L}^{p^*}} \leqslant c_p \|\nabla f\|_{\mathcal{L}^p}$$

Preuve.

On a :

$$f(x) = \frac{1}{|S_{n-1}|} \int \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot \nabla f(y) dy$$

Donc,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{|S_{n-1}|} \int \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

Rappel. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ on a :

$$\|h * g\|_{\mathcal{L}^r} \leqslant \|g\|_{\mathcal{L}^q} \|h\|_{\mathcal{L}^p}$$

Ici $h = |\nabla f| \in \mathcal{L}^p$, $g = |x-y|^{-(n-1)}$, on veut $r = p^*$. On a $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ donc $q = \frac{n}{n-1}$. On a :

$$|g(x)|^q = \left| \frac{1}{|x|^{n-1}} \right|^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{|x|^n}$$

On a “presque” $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$. ■

Théorème 9 (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(p, q, \alpha) > 0$, tels que :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \qquad 1 < p < \frac{n}{\alpha}$$

Alors, $\exists c = c(p, q, \alpha, n)$ telle que :

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{L}^q} \leqslant C \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ où :

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Preuve. Idée. Poser :

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathcal{B}(x,r)|} \int_{\mathcal{B}(x,r)} |f(y)| dr$$

■

Théorème 10 (Hardy-Littlewood)

Si $p > 1$ alors :

$$\|Mf\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant c_p \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

Lemme 4

Soit $\phi \in \mathcal{L}^1$, $\|\phi\|_{\mathcal{L}^1} = 1$. $\phi \geqslant 0$, ϕ radiale et décroissante, alors :

$$|f * \phi|(x) \leqslant Mf(x)$$

Preuve.

On se ramène à :

$$\phi(x) = \sum_{p=1}^{N} a_p \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,\rho_p)}$$

■

Preuve. (suite de HLS)

$$I_\alpha f(x) = I_{\alpha,R} f(x) + I_\alpha^R f(x)$$

où :

$$I_{\alpha,R} f(x) = \int_{\mathcal{B}(x,\mathbb{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \qquad I_\alpha^R f(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(x,\mathbb{R})} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

$I_{\alpha,R} f(x) = \psi * f$ où $\psi(z) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,R)}(z) \frac{1}{|z|^{n-\alpha}}$. On a donc :

$$|I_{\alpha,R} f(x)| \leqslant \|\psi\|_{\mathcal{L}^1} \cdot Mf(x)$$

où :

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\mathcal{L}^1} &= \int_{|z| \leqslant R} \frac{dz}{|z|^{n-\alpha}} \\ &\underset{\alpha<n}{=} \text{cste} \int_0^R \frac{r^{n-1}}{r^{n-\alpha}} dr \\ &= \text{cste} \int_0^R r^{\alpha-1} dt \sim R^\alpha \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
I_\alpha^R(x) &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\
&\leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}(x,R)} \frac{dy}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p}\left(\int_R^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{p'(n-\alpha)}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant CR^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathcal{L}^p}
\end{aligned}$$

En combinant les deux majorations on trouve que :

$$|I_\alpha f(x)| \leqslant CR^\alpha Mf(x) + CR^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

On choisit R tel que :

$$R^\alpha Mf(x) = R^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_{\mathcal{L}^p} \quad \text{alors} \quad R = \left(\frac{\|f\|_{\mathcal{L}^p}}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{n}}$$

Ainsi,

$$|I_\alpha f(x)| \leqslant 2C\|f\|_{\mathcal{L}^p}^{\frac{\alpha p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}$$

On met à la puissance q et on utilise HL si $p \in]1,+\infty]$. ■

Théorème 11 (Weyl)

Si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie $\Delta u = 0$ au sens faible, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Lemme 5 (Caccioppoli)

Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ soit harmonique. Soit $\mathcal{B}(x_0,r) \subset \mathcal{B}(x_0,R) \subset \Omega$, $0 < r < R$. Alors :

$$\int_{\mathcal{B}(x_0,r)} |\nabla u|^2 dx \leqslant \frac{16}{(R-r)^2}\int_{\mathcal{B}(x_0,R)} |u|^2 dx$$

Remarque. Stable. Sert pour démontrer De Giorgi :

$$\operatorname{div}(A\Delta u) = 0,\ u \in H^1(\Omega),\ A \in \operatorname{Sym}_+(\mathbb{R}^n), A \in \mathcal{L}^\infty \ \Rightarrow\ \exists\alpha > 0 \text{ tq } u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\omega)$$

Preuve. (Caccioppoli)

On utilise $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0$ avec v bien choisie. Ici $v(x) = \eta(x)^2 u(x)$ où η est telle que :

- $\eta(x) = 1$ si $x \in \mathcal{B}(x_0,r)$
- $\operatorname{supp}(\eta) \subset \mathcal{B}(x_0,R)$
- $|\nabla\eta| \leqslant \frac{2}{R-r}$

Alors $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}(x_0,R))$. Donc si $\Delta u = 0$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0 \;\Rightarrow\; \int \nabla u \cdot (\eta^2 \nabla u + 2\eta u \nabla \eta) dx = 0$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int \nabla u \cdot \eta^2 \nabla u &= -2 \int \eta u \nabla u \cdot \nabla \eta \\
\left| \int \nabla u \cdot \eta^2 \nabla u \right| &\underset{(\mathrm{CS}, \mathbb{R}^n)}{\leqslant} 2 \int \eta u |\nabla u| |\nabla v| \\
&\underset{(\mathrm{CS}, \mathcal{L}^2)}{\leqslant} 2 \left(\int \eta^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int u^2 |\nabla \eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc comme $X^2 \leqslant XY \;\Rightarrow\; X \leqslant Y$, on obtient :

$$\left(\int \eta^2 |\nabla u|^2 \right) \leqslant 4 \left(\int u^2 |\nabla \eta|^2 \right) \leqslant 4 \int_{\mathcal{B}(x_0,R)} u^2 \|\nabla \eta\|^2_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant \frac{16}{(R-r)^2} \int_{\mathcal{B}(x_0,R)} u^2$$

Finalement comme $\eta(x) = 1$ si $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, on a le résultat :

$$\left(\int_{\mathcal{B}(x_0,r)} |\nabla u|^2 \right) \leqslant \frac{16}{(R-r)^2} \int_{\mathcal{B}(x_0,R)} u^2$$

$\blacksquare$

5 Équation de Schrödinger

Équation mécanique quantique ; décrit l'évolution d'une onde de probabilité :

$$i\partial_t u + \Delta u = 0 \quad (*)$$

$u = u(t,x) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. t le temps et x la position.
On peut résoudre $(*)$ par la méthode de Fourier introduite pour étudier :

$$\partial_t \theta - \Delta\theta = 0 \quad \text{(équation de la chaleur)}$$

$\theta = \theta(t,x) \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, x$\in \mathbb{R}^n$.i On note $\hat{w}$ la transformée de Fourier de $w(t,x)$ par rapport à x :

$$\hat{w}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} w(t,x)dx$$

Alors,

$$\widehat{\delta w} = \int e^{-ix\cdot\xi}\Delta w dx \underset{\text{IPP}}{=} \int (\Delta e^{-ix\cdot\xi}) w dx$$

Or,

$$\begin{aligned}
\Delta e^{-ix\cdot\xi} &= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 (e^{-ix_1\xi_1 - \ldots - ix_n\xi_n} \\
&= [(-i\xi_1)^2 + \ldots + (-i\xi_n)^2] e^{-ix\cdot\xi} \\
&= -(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) e^{-ix\cdot\xi}
\end{aligned}$$

$$\Delta e^{-ix\cdot\xi} = -|\xi|^2 e^{-ix\cdot\xi}$$

D'où :

$$i\partial_t \hat{u} - |\xi|^2 \hat{u} = 0 \qquad \partial_t \hat{\theta} + |\xi|^2 \hat{\theta} = 0$$

et donc,

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{u_0}(\xi) \qquad \hat{\theta}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{\theta}_0(\xi)$$

Donc :

$$|\hat{u}(t,\xi)| = |\hat{u_0}(\xi)| \qquad |\hat{\theta}(t,\xi)| = e^{-t|\xi|^2} |\hat{\theta_0}(\xi)|$$

Proposition 3

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note :

$$S(t) = e^{it\Delta}$$

le multiplicateur de Fourier défini (sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'\mathbb{R}^n)$) par :

$$S(\hat{t}) u_0(\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{u_0}(\xi)$$

Alors,

1. $S(0) = \text{id}$
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$
3. $\forall \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ est une isométrie sur $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ $(\mu \geqslant 0)$ si besoin.

Preuve. Immédiat. ■

On sait résoudre Schrödinger avec $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et on a une solution $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$ donnée par :

$$u(t,.) = S(t)u_0$$

Notation. Soit $u = u(t,x)$. On définit $U(t)$ par $U(t)(x) = u(t,x)$. On identifie u et U.

La solution est une courbe à valeurs dans un espace fonctionnel X. Justement : choix de X pour une EDP donnée ? Dans quel espace va-t-on chercher les solutions ? Choix classiques : $\mathcal{L}^p, H^s, \mathcal{C}^{k,\alpha}$,BM0,BV,etc. Ici, H^s est naturel.

Proposition 4

$S(t) = e^{it\Delta}$ n'est pas borné sur $\mathcal{L}^p$ ou $C^{k,\alpha}$ pour $t \neq 0$, $p \neq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$.

Preuve. Technique (cf Problème dans les notes). ■

On veut en fait résoudre l'équation non linéaire :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u \quad (**)$$

On dit que u est solution de $(**)$ si :

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-t')\big(|u(t')|^2 u(t')\big)dt'$$

(Formule de Duhamel, variation de la constante)

Remarque. Formellement,

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$$

On écrit :

$$\partial_t u + Au = f$$

où $A = -i\Delta$ et $f = -i|u|^2 u$. En multipliant par e^{tA} :

$$e^{tA} f = e^{tA}(\partial_t u + Au) = \partial_t(e^{tA}u)$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \partial_t(e^{t'A}u(t'))dt' &= \int_0^t e^{t'A} f(t')dt' \\
\Rightarrow e^{tA}u(t) - e^{0A}u(0) &= \int_0^t e^{t'A} f(t')dt' \\
\Rightarrow u(t) = e^{-tA}u(0) &+ \int_0^t e^{(t'-t)A} f(t')dt'
\end{aligned}$$

Ici $e^{tA} = S(-t)$. On obtient bien la formule de Duhamel.

Définition 13

Soit $s \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$. On dit que le problème de Cauchy est bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ si : pour toute boule $B \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, $\exists T > 0$, $\exists X_T^s \subset \mathcal{C}^0([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$ tels que :

1. $\forall v \in X_T^s,\ |v|^2 v \in \mathcal{L}^1(]0,T[, H^s(\mathbb{R}^n))$
2. Pour tout $u_0 \in B$, il existe une fonction $u \in X_T^s$ solution de Duhamel.

Définition 14

On dit que le problème de Cauchy est globalement bien posé si le résultat pécédent est vrai pour tout T.

Proposition 5

1. Le problème de Cauchy est bien posé sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ dès que $s > n/2$.
2. Si $n = 1$, le problème de Cauchy est globalement bien posé sur $H^1(\mathbb{R})$.

Preuve. (expresse)

1. On utilise que si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n/2$ alors $uvH^s(\mathbb{R}^n)$. Alors $X_T^s = \mathcal{C}^0([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$ vérifie la condition (1). On a même :

$$|u^2|u = u\bar{u}u \in \mathcal{C}^0([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$$

Pour résoudre Duhamel on utilise le théorème d upoint fixe ($u = \phi(u)$). Le produit $(u,v) \mapsto uv$ est $\mathcal{C}^1$ de $H^s \times H^s$ dans H^s.

2. Pour $n = 1, 1 > n/2$ donc le problème est bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$. Par critère de continuation, si le temps maximal T^* est fini, alors :

$$\limsup_{t \to T^*} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} = +\infty$$

Mais $\|u(t)\|_{H^1}$ ne peut pas exploser. En effet on utilise deux lois de conservation :

(a) $\frac{d}{dt} \int |u(t,x)|^2 dx = 0$

(b) $\frac{d}{dt} \left(\int |\partial_x u(t,x)|^2 + \frac{1}{2} \int |u(t,x)|^4 dx \right) = 0$

Ainsi,

$$\|u(t,.)\|_{H^1}^2 = \|u(t,.)\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\partial_x u(t,.)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leqslant \|u(0,.)\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\partial_x u(0,.)\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|u(0,.)\|_{\mathcal{L}^4}^4$$

Or $H^1(\mathbb{R})$ s'injecte dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [2, +\infty]$ et $\mathcal{L}^\infty \cap \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^4$. Donc :

$$\|u(0,.)\|_{\mathcal{L}^4} \leqslant \|u(0,.)\|_{H^1}$$

Ainsi,

$$\|u(t,.)\|_{H^1}^2 \leqslant \|u(0,.)\|_{H^1}^2 + C\|u(0,1)\|_{H^1}^4$$

Et donc $\overline{\lim}\|u(t)\|_{H^1} < +\infty$. Il reste à démontrer (a) et (b).

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \bar{u}\partial_t y - i\bar{u}\Delta u = -i|u|^4 \\
&\Rightarrow \quad \Re(\bar{u}\partial_t u) = \Re(i\bar{u}\Delta u) = -\Im(\bar{u}\Delta u) \\
&\Rightarrow \quad \int \Re(\bar{u}\partial_t u)dx = -\int \Im(\bar{u}\Delta u)dx
\end{aligned}$$

Or,

$$\int \Re(\bar{u}\partial_t u)dx = \frac{1}{2}\int(\bar{u}\partial_t u + u\partial_t\bar{u})dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u\bar{u}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\mathcal{L}^2}$$

et,

$$\int \Im(\bar{u}\Delta u) = \Im\left(\int \bar{u}\Delta u\right) = \Im\left(\int \bar{u}\mathrm{div}(\nabla u)\right) = \Im\left(\int \mathrm{div}(\bar{u}\nabla u)\right) - \Im\left(\int \overline{\nabla u}\cdot\nabla u\right)$$

On montre b en multipliant $i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$ par $\overline{\partial_t u}$ et en prenant la partie réelle et en intégrant en x.

∎

Remarque. On a toujours :

$$\|u\|_{\mathcal{L}^4(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

en dimension 2, 3 ou 4.

Ce qui devient dur : résoudre localement en temps car $H^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas une algèbre de Banach si $n > 1$. L'argument précédent n'est pas suffisant. Mais on a :

Théorème 12

Le problème de Cauchy pour $(**)$ est globalement bien posé sur $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Idée. On a presque $H^1(\mathbb{R}^2)$ qui s'injecte dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et presque $uv \in H^1$ si $u, v \in H^1$. On peut "gagner" des dérivées.

Théorème 13 (Strichartz-Ginibre-Vélo)

Soit (q, r) tels que $r \in [2, +\infty[$ et :

$$\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) < 1$$

Si $i\partial_t w + \Delta w = 0$, $w|_{t=0} = w_0$ alors :

$$\|w\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n))} \leqslant C\|w_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

où $\|w\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{L}^r)} = (\|w(t,.)\|^q_{\mathcal{L}^r}dt)^{1/q}$.

Remarque.

- Scaling : $w(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi solution $\Rightarrow q, r$ sont reliés.
- Exemples :

– $q = \infty$, $r = 2$, on retrouve :
$$\|w\|_{\mathcal{L}^\infty_t \mathcal{L}^2_x} = \|w_0\|_{\mathcal{L}^2}$$
– $q = 3$, $r = 6$ et $n = 2$, on a :
$$\|w\|_{\mathcal{L}^3(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}^6(\mathbb{R}^2))} \leqslant C\|w_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)}$$
$\Rightarrow$ on “gagne” des dérivées. Avec les injections de Sobolev on aurait seulement :
$$\|f\|_{\mathcal{L}^6(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}$$
pour un certain $s > 0$.

- Permet de résoudre le problème de Cauhcy avec :
$$\|u\|_{X_T^s} = \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(]0,T[,\mathcal{L}^2) \cap \mathcal{L}^3(]0,T[,\mathcal{L}^6(R^2))} + \|\nabla_x u\|_{\mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}^3) \cap \mathcal{L}^3(0,T;\mathcal{L}^6)}$$
où $\|f\|_{X\cap Y} = \|f\|_X + \|f\|_Y$.

Démontrons uniquement Strichartz. Utilise :

- deux calculs
- interpolation complexe
- inégalité HLS
- T^*T

Lemme 6

Soit w solution de $i\partial_t w + \Delta w = 0$, $w|_{t=0} = w_0$. Alors :

1. $\|w(t,.)\|_{\mathcal{L}^2} = \|w_0\|_{\mathcal{L}^2}$
2. $\|w(t,.)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leqslant \frac{C}{|t|^{n/2}}\|w_0\|_{\mathcal{L}^1}$

Preuve.

1. Plancherel, déjà vu.
2. $\hat{w}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2}\hat{w}_0(\xi)$
$$w(t,x) = \frac{1}{(i\pi t)^{n/2}} \int e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} w_0(t)dy$$
$\|w\|_{\mathcal{L}^\infty(t)} \leqslant \frac{C}{|t|^{n/2}}\|w_0\|_{\mathcal{L}^1}$

■

Corollaire 4

Pour tout $r \in [2, +\infty[$, on a :
$$\|w(t)\|_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{C}{|t|^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}}\|w_0\|_{\mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve. Conséquence directe de $(1), (2)$ et du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. ■

Théorème 14 (Riesz-Thorin)

Soit (Ω, μ), (Λ, ν) deux espaces mesurés $\sigma-$finis et soit $1 \leqslant p_0, q_0, p_1, q_1 \leqslant \infty$. Soit Y linéaire de $\mathcal{L}^{p_0}(\Omega) + \mathcal{L}^{p_1}(\Omega)$ dans $\mathcal{L}^{q_0}(\Lambda) + \mathcal{L}^{q_1}(\Lambda)$. Alors pour tout $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$\|T\|_{\mathcal{L}^{p_\theta} \to \mathcal{L}^{q_\theta}} \leqslant \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^{p_0} \to \mathcal{L}^{q_0}} \times \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}^{p_1} \to \mathcal{L}^{q_1}}$$

où :

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

et $\|T\|_{\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^q} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}^p}} \|Tf\|_{\mathcal{L}^q}$.

Lemme 7 (Hadamard)

Soit $S = \{x + iy : x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}\}$ et $\varphi \colon S \longrightarrow \mathbb{C}$ continue bornée, holomorphe dans $\widehat{\overset{\circ}{S}}$. Alors :

$$M_\theta = \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi(\theta + iy)| \quad \text{vérifie} \quad M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

Preuve.

1. Soit $\phi \colon S \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, bornée, holomorphe dans $\widehat{\overset{\circ}{S}}$. Montrons que :

   $$\sup_S |\phi| = \sup_{\partial S} |\phi|$$

   On utilise le théorème déjà vu : f holomorphe non constante sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ alors $|f|$ n'a pas de maximum local.

   En effet, soit $z_0 \in U$, $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. f non constante donc $f - f(z_0)$ non nulle sur tout ouvert $\neq \emptyset$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0)^k + (z - z_0)^k \varepsilon(z)$$

   (a) Si $f(z_0) = 0$, alors $f(z) \neq 0$ pour $z \neq z_0$ proche de z_0 donc $|f(z_0)| = 0$ n'est pas un maximum local.

   (b) Si $f(z_0) \neq 0$, on introduit β tel que $\beta^k = f(z_0)\lambda^{-1}$. Alors :

   $$f(z_0 + s\beta) = f(z_0) + \lambda(s\beta)^k + (s\beta)^k \varepsilon(z_0 + s\beta) = f(z_0)(1 + s^k) + (s\beta)^k \varepsilon(z_0 + s\beta)$$

   Donc $|f(z_0 + s\beta)| > |f(z_0)|$ pour ε assez petit. Donc $|f(z_0)|$ n'est pas un maximum local.

   Supposons $\phi \colon S \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, holomorphe dans S. Si de plus $\phi(z) \longrightarrow 0$ lorsque $|z| \to +\infty$, $z \in S$. Alors $|\phi|$ atteint son maximum. Le théorème précédent implique que ce maximum est atteint au bord.

Montrons que l'on peut se ramener à ϕ de limite nulle à l'infini. On se donne $\delta > 0$, $\exists z_0 \in \overset{\circ}{\widehat{S}}$ tel que $|\phi(z_0)| \geqslant (1-\delta) \sup_S |\phi|$. On introduit $\psi_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(z-z_0)^2}\phi(z)$. ψ_ε est continue, bornée car $|\psi_\varepsilon(z)| = e^{\Re(\varepsilon(z-z_0)^2)}|\phi(z)|$. De plus $\psi_\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ quand $|z| \to +\infty$. Donc :

$$\sup_S |\psi_\varepsilon| = \sup_{\partial S} |\psi_\varepsilon|$$

Or,

$$|\psi_\varepsilon(z_0)| = |\phi(z_0)| \geqslant (1-\delta) \sup_S |\phi|$$

et par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|\psi_\varepsilon(z_0)| &\leqslant \sup_S |\psi_\varepsilon| = \sup_{\partial S} |\psi_\varepsilon(z)| \\
&\leqslant \sup_{\partial S} |e^{\varepsilon(z-z_0)^2}\phi(z)| \\
&\leqslant \sup_{\partial S} \left| e^{\varepsilon\Re((z-z_0)^2) - \varepsilon\Im((z-z_0)^2)}\phi(z) \right| \\
&\leqslant \sup_{\partial S} |e^{\varepsilon}\phi(z)|
\end{aligned}$$

D'où, $\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$:

$$\sup_{\partial S} |\phi| \geqslant e^{-\varepsilon}(1-\delta) \sup_S |\phi|$$

Puis $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$. On obtient bien

$$\sup_{\partial S} |\phi| = \sup_S |\phi| \quad \text{(max)}$$

2. On veut $M_\theta \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^\theta$. On applique (max) avec :

$$\phi(z) = e^{-\lambda z}\varphi(z), \ \lambda \geqslant 0$$

Notons que $e^{-\lambda z}$ est continue, bornée sur S, holomorphe dans $\overset{\circ}{\widehat{S}}$. On choisit λ tel que :

$$\sup_{x=0} |\phi| = \sup_{x=1} |\phi|$$

Alors, $e^\lambda = \frac{M_1}{M_0}$.

■

Preuve. (Riesz-Thorin)

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si $p_\theta = +\infty$ c'est facile. Si $p_\theta \neq \infty$, on pose :

$$\alpha(z) = p_\theta \left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \right) \qquad \beta(z) = q'_\theta \left(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1} \right)$$

Soit f, g deux fonctions simples telles que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p_\theta}} \leqslant 1 \qquad \|g\|_{\mathcal{L}^{q'_\theta}} \leqslant 1$$

On veut montrer que :
$$\left|\int gTf dx\right| \leqslant N_0^{1-\theta} N_1^{\theta}$$
où $N_0 = \sup_{\|u\|_{\mathcal{L}^{p_0}}=1} \|Tu\|_{\mathcal{L}^{q_0}}$, $N_1 = \ldots$. On utilise :
$$\|v\|_{\mathcal{L}^q} = \sup_{\|h\|_{\mathcal{L}^{q'}}=1} \left|\int hv dx\right|$$
Une fonction simple est une somme finie de fonctions étagées :
$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{A_j}, \quad |A_j| < +\infty$$
On pose :
$$f_z(x) = |f(x)|^{\alpha(z)} \frac{f(x)}{|f(x)|} \qquad g_z(x) = |g(x)|^{\beta(z)} \frac{g(x)}{|g(x)|}$$
Puis on introduit :
$$\varphi(z) = \int g_z(x)(Tf_z)(x)dx$$
$\varphi\colon S \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, bornée et holomorphe dans $\overset{\circ}{\widehat{S}}$ car φ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme γ^z, avec $\gamma > 0$ puisque l'on peut écrire :
$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m'} \left\{ |a_j|^{\alpha(z)} |b_k|^{\beta(z)} \frac{a_j}{|a_j|} \frac{b_k}{|b_k|} \int_{B_k} T(\mathbb{1}_{A_j})dx \right\}$$
Appliquons Hadamard. Point-clé :
$$\|f_{iy}\|_{\mathcal{L}^{p_0}}^{p_0} = \int |f_{iy}|^{p_0}(x)dx = \int |f(x)^{p_0\alpha(iy)}|dx$$
et $|f(x)^{\alpha(iy)p_\theta}| = |f(x)|^{p_\theta}$. ■

Argument T^*T.
Si $S\colon v_0(\mathbb{R}^n) \mapsto v(t) = S(t)x_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n))$. $S(t) = e^{-it\Delta}$. Alors $S = T^*$ où :
$$T\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}^2) & \longrightarrow & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \\ f & \longmapsto & \int S(-s)f(s)ds \end{array} \right.$$
En effet,
$$\langle Sv, f\rangle = \int (S(s)v, f)ds = \int (v, S(-s)f)ds = \langle v, Tf\rangle$$

Lemme 8 (argument T^*T)
H espace de Hilbert. X espace de Banach. $T\colon X \longrightarrow H$, $T^*\colon H \longrightarrow X^*$. On a équivalence entre T bornée, T^* bornée, T^*T bornée.

Pour nous :

$$T\colon\ f \longmapsto \int S(-s)f(s)ds$$

$$T^*\colon v \longmapsto (T^*v)(t) = S(t)v$$

On en déduit que T^*T bornée de $\mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R};\mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^n))$ dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R};\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n))$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R},\mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^n))$, on estime $|\langle \varphi, T^*Tf\rangle|$ avec $f \in \mathcal{L}_r^{q'}(\mathcal{L}_x^{r'})$.

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, T^*Tf\rangle| &\leqslant \int\int \|S(t-s)f(s)\|_{\mathcal{L}^r}\|\varphi(t)\|_{\mathcal{L}^{r'}}dtds \\
&\leqslant C\int\int \frac{1}{|t-s|^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}}\|f(s)\|_{\mathcal{L}^{r'}}\|\varphi(t)\|_{\mathcal{L}^{r'}}dsdt \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{\mathcal{L}^{q'}(\mathcal{L}^{r'}}\left\|t \longmapsto \int \frac{1}{|t-s|^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}}\|f(s)\|_{\mathcal{L}^{r'}}ds\right\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

On a $n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right) < n$ par hypothèse donc on peut appliquer Hardy-Littlewood-Sobolev.

$$\left\|t \longmapsto \int \frac{1}{|t-s|^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}}\|f(s)\|_{\mathcal{L}^{r'}}ds\right\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_t^{q'}(\mathcal{L}_x^{r'})}\cdots$$