

Regards Croisés Mathématiques & Physique

Bloc 1 : De la lumière rapide à la lumière lente

Lucie Le Briquer

18 décembre 2017

1 Historique des connaissances sur la vitesse de la lumière

Quelque soit l'époque, jusqu'au 18ème siècle, débat : lumière instantanée ou rapide ?

- Instantané : Aristote (-384), Descartes (1596), Kepler (1571)
- ou rapide ? Empedocles (-Ve), Ibn al Haytham (965), Galilée (1564)

1.1 Römer

Ole Römer (1676), astronome, constate et prédit des retards dans des observations astronomiques (éclipses de Io par Jupiter : selon la position de la Terre autour du soleil, l'éclipse du satellite n'avait pas la même durée) ; phénomène qu'il va expliquer par la "propagation successive" de la lumière.

1.2 Fizeau : expérience de la roue dentée

Hippolyte Fizeau (1849) : première expérience probante de la mesure de la vitesse de la lumière. L'expérience de la roue dentée, on obtient une première approximation de la vitesse de la lumière ($V=313\,000\,000$ m/s).

+schéma

Deux lunettes astronomiques alignées à 9km de distance, une roue dentée est placée entre les deux pour créer des impulsions lumineuses. Pour une vitesse faible de la roue on observe un clignotement. Si on dépasse la capacité de l'oeil à voir les clignotements, on observe de la lumière en continu. En continuant d'augmenter la vitesse la lumière revient sur un cran de la roue, l'observateur ne perçoit plus rien.

1.3 Foucault : Méthode de miroir tournant

Léon Foucault (1862) : Méthode du miroir tournant (cf. musée des Arts et métiers). Il obtient une meilleure approximation ($V=298\,000\,000$ m/s). Un miroir tournant réfléchit la lumière sur un miroir sphérique. La réflexion ne se fait que pour une certaine plage d'angles du miroir, ce qui crée des impulsions lumineuses. En mesurant la distance entre la source et la réflexion (miroir/miroir sphérique/miroir) sur l'écran,

1.4 Maxwell, Michelson, Morley : Interféromètre

Maxwell (1831) : fait le lien entre électricité et magnétisme, il démontre qu'une onde électromagnétique se déplace à une vitesse $V=300\,000\,000\text{m/s}$. À l'époque, il ne peut pas concevoir qu'une telle onde puisse se déplacer sans un milieu permettant la propagation par interaction proche : il suppose l'existence de l'éther luminifère.

Par la suite, Albert Michelson (1852) et Edward Morley (1887) vont chercher à démontrer l'existence de cet éther. C'est ce qui va motiver l'expérience de Michelson et Morley : l'interféromètre.

+ schéma

En faisant tourner un interféromètre dans un bain de mercure, il cherche à composer la vitesse de la lumière avec celle du vent d'éther. Refait l'expérience à plusieurs reprises et cumule les échecs → dépression nerveuse.

1.5 Lorentz, Poincaré, Einstein

Lorentz (1853), Poincaré (1864), Einstein (1979) vont expliquer la constance de la vitesse de la lumière dans le vide ; théorie de la relativité par Einstein en 1905.

1.6 Récemment

La vitesse de l'impulsion lumineuse est négative dans certains milieux (vapeur atomique + lasers)

2 Propagation des ondes lumineuses dans le vide

2.1 Rappels

— Définition 1 (équations de Maxwell) —

$$\text{div}E(r, t) = \frac{\rho(r, t)}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\text{rot}E(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div}B(r, t) = 0 \quad (3)$$

$$\text{rot}B(r, t) = \mu_0 j(r, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} \quad (4)$$

Remarque. Les équations de Maxwell. Se souvenir que le champ électromagnétique n'est qu'un moyen pratique de décrire les forces qui s'exercent sur une charge ponctuelle.

Remarque. Ce sont les charges qui créent la lumière : par exemple l'agitation thermique dans le filament thermique fait émettre un rayonnement aux charges qui le traversent.

Rappel. Équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

a pour solution :

$$E(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

2.2 Notion de paquet d'onde

On cherche à simplifier l'équation précédente (5). Le champ est associé à une énergie finie, la fonction $E(z, t)$ est donc une fonction de carré sommable, on peut donc en prendre la transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(z, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(z, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

On réinjecte dans (5).

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}(z, \omega) e^{-i\omega t} - \frac{1}{c^2} \tilde{E}(z, \omega) (-\omega^2) e^{-i\omega t} \right] \frac{d\omega}{2\pi} &= 0 \\ \int \left[\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2}(z, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}(z, \omega) \right] e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de propagation pour les composantes de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \Delta E(r, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} E(r, \omega) &= 0 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{k^2} E &= 0 \\ \tilde{E}(z, \omega) &= A(\omega) e^{ikz} + B(\omega) e^{-ikz} \\ E(z, t) &= \underbrace{\int A(\omega) e^{i(kz - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi}}_{f(z - ct)} + \underbrace{\int B(\omega) e^{-i(kz + \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi}}_{g(z + ct)} \end{aligned}$$

Impulsion lumineuse :

$$E(z = 0, t) = \int A(\omega) \exp -i\omega t \frac{d\omega}{2\pi}$$

Exemple. Exemple d'une impulsion Gaussienne

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \exp \frac{-(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2} \\ E(0, t) &\propto \exp \left(\frac{-t^2}{2\Delta t^2} \right) \exp(-i\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta\omega}$$

La symétrie dans l'espace des fréquences \rightarrow prendre la partie réelle.

+ schéma paquet d'onde (enveloppe + fréquences)

Remarque. On ne détecte que l'enveloppe du signal, pas de technologie pour détecter la variation temporelle.

Propagation dans le vide.

$$E(z, t) = \int A(\omega) e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})} \frac{d\omega}{2\pi} = E\left(0, t - \frac{z}{c}\right) \propto e^{-i\omega_0(t - \frac{z}{c})} e^{-\frac{(t - \frac{z}{c})^2}{2\Delta t^2}}$$

3 Propagation dans la matière

Les lois de la réfraction sont observées dès l'antiquité.

Exemple. Problème du sauveteur sur la plage. On obtient comme loi $\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$. On peut de la même façon associer le changement de milieu de propagation de la lumière à un changement de vitesse de la lumière. On définit l'indice optique n comme :

$$v = \frac{c}{n}$$

3.1 Dispersion

Chaque charge est ponctuelle $\delta(r - r_i)$. Opération de lissage : $\delta(r - r_i(t)) \rightarrow f(r - r_i(t))$. On supprime les singularités.

Pour un atome A donné :

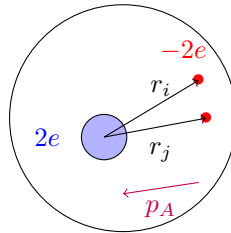
$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \sum q_i f[r - r_A(t) - r_i(t)] \\ &\approx \sum q_i f[r - r_A(t)] - \sum q_i r_i(t) \text{grad} f[r - r_A(t)] \end{aligned}$$

car on doit avoir $\|\vec{r}_i\| \ll L + DL$.

La densité de charge libre est définie par :

$$\rho_{\text{libre}} = \sum_A q_A f(\vec{r} - \vec{r}_A)$$

Polarisation.



$$\rho(r, t) = \sum_A q_A f[r - r_A(t)] - \sum_A p_A(t) \text{grad} f[r - r_A(t)]$$

$$\rho(r, t) \approx \rho_A(t) - \text{div} \left[\sum_A p_A(t) f[r - r_A(t)] \right]$$

$$\rho(r, t) \approx \rho_A(r, t) - \text{div}[P(t)]$$

$P(t)$ représente la densité de polarisation. On obtient alors de nouvelles équations de Maxwell.

Première hypothèse purement phénoménologique : P proportionnel à E . Ce n'est pas toujours vrai (anisotrope, ...). P est la réponse de la matière.

En vérité, la réponse de la matière doit dépendre de toute l'histoire du champ magnétique. On cherche plutôt une relation :

$$P(t) = \varepsilon_0 \int \chi(t - t') E(t') dt'$$

On a toujours la proportionnalité mais dans l'espace de Fourier cette fois.

$$P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega)$$

χ est appelé *susceptibilité*.

On obtient de nouvelles équations de Maxwell :

$$[\chi(\omega) + 1] \operatorname{div} E(r, \omega) = 0$$

$$\operatorname{rot} E(r, \omega) = i\omega B(r, \omega)$$

$$\operatorname{div} B(r, \omega) = 0$$

$$\operatorname{rot} B(r, \omega) = -i\omega \mu_0 \varepsilon_0 [\chi(\omega) + 1] E(r, \omega)$$

Alors,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E(r, \omega) = \operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div} E}_0) - \Delta E$$

$$i\omega \operatorname{rot} B = -\Delta E$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi(\omega)) E = -\Delta E$$

Donc :

$$\Delta E(r, \omega) + \left(\frac{n(\omega)\omega}{c} \right)^2 E(r, \omega) = 0$$

$$k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$$

$$n^2(\omega) = [\chi(\omega) + 1]$$

On a :

$$E(z, t) = \int A(\omega) e^{i(kz - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$\Delta\omega$ "suffisamment" petit :

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

Donc en injectant :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int A(\omega) e^{ik_0 z} e^{i \frac{dk}{d\omega} (\omega - \omega_0) z} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int A(\omega) e^{i \frac{dk}{d\omega} (\omega - \omega_0) z} e^{-i(\omega - \omega_0) t} \frac{d(\omega - \omega_0)}{2\pi} \\ &= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \times \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \frac{dk}{d\omega})}{2\Delta t^2}} \\ &= \exp\left(i\omega_0 \left(t - \frac{z}{v_\varphi}\right)\right) \times \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(t - \frac{dk}{d\omega})}{2\Delta t^2}\right) \end{aligned}$$

$$k_0 = \frac{n(\omega_0)}{\omega_0} c \quad v_\varphi = \frac{c}{n(\omega_0)} \quad v_G = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0}}$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} \quad v_G = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

4 Exemple d'une vapeur atomique

Système : 1 e^- de l'atome, \vec{r} la position de l'électron par rapport à sa "position d'équilibre"

- $-e\vec{E}$
- $-m\omega_0^2\vec{r}$
- $-m\gamma\dot{\vec{r}}$

On a donc :

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - m\omega_0^2\vec{r} - m\gamma\dot{\vec{r}}$$

$$-\omega^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E} - \omega_0^2\vec{r} + i\omega\gamma\vec{r}$$

Or $\vec{p} = -e\vec{r}$, d'où :

$$\vec{P}(\omega) = \frac{-\frac{e^2}{m}\vec{E} \times N}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} = \varepsilon_0\chi(\omega)\vec{E}$$

Alors,

$$\chi(\omega) = \frac{-\frac{e^2}{m\varepsilon_0}N}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

Et finalement :

$$n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 - \frac{N\frac{e^2}{\omega\varepsilon_0}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

Si n faible :

$$n(\omega) \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

Remarque. Ce modèle simple permet au final d'approcher assez bien l'indice.

5 Images et première interprétation

Interprétation possible. Les endroits où des comportements "bizarres" ont lieu correspondent à des lieux de forte atténuations des parties réelles et imaginaires de l'indice (cf. schémas).

Pour une propagation à $V > c$ on a une forte atténuation mais on est toujours inclus dans le signal.

6 Les mathématiques au secours : l'interprétation de Sommerfeld

On a une impulsion avec le sommet de l'impulsion qui se propage plus vite que c .

→ notion de *front d'onde*

Sommerfeld propose d'étudier un signal simple : une sinusoïde de période τ émise de $t = 0$ à $t = T = N\tau$. $f(t) = \sin(\omega_0 t)$.

1. Exprimer $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$.

On a $h(t) = \mathbb{1}_{t \in [0, T]}$.

$$\tilde{h}(\omega) = \int_0^T e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega T} - 1)$$

Et $g(t) = \sin(\omega_0 t)$.

$$\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2i} (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

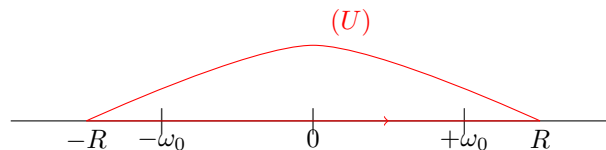
Il ne reste plus qu'à faire le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \int \tilde{h}(\omega - \omega') \tilde{g}(\omega') d\omega' \\ &= \int \frac{1}{i(\omega - \omega')} (e^{i(\omega - \omega')T} - 1) \tilde{g}(\omega') d\omega' \\ &= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{\omega + \omega_0} (e^{i(\omega + \omega_0)T} - 1) - \frac{1}{\omega - \omega_0} (e^{i(\omega - \omega_0)T} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{i\omega T} - 1) \left[\frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \\ &= \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (e^{i\omega T} - 1) \end{aligned}$$

2. Ainsi :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (e^{i\omega t} - 1) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Intégration sur les réels. Astuce : on passe dans le plan complexe.



On peut réécrire :

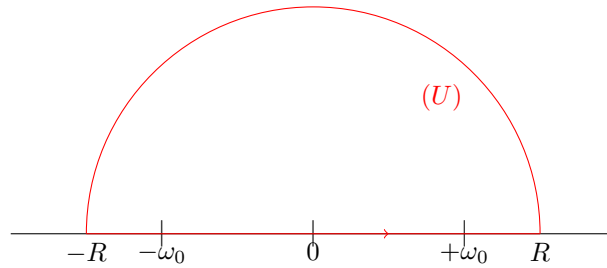
$$\int_0^R \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = 0 = \int_{-R}^R \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} + \int_{+R \text{ suivant } (U)}^R \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= - \int_{(U) \infty}^{-\infty} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (e^{i\omega T} - 1) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
&= f_1(t) - f_2(t) \\
&= \int_{(U) +\infty}^{-\infty} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} - \int_{(U) +\infty}^{-\infty} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{-i\omega(t-T)} \frac{d\omega}{2\pi}
\end{aligned}$$

3. On a :

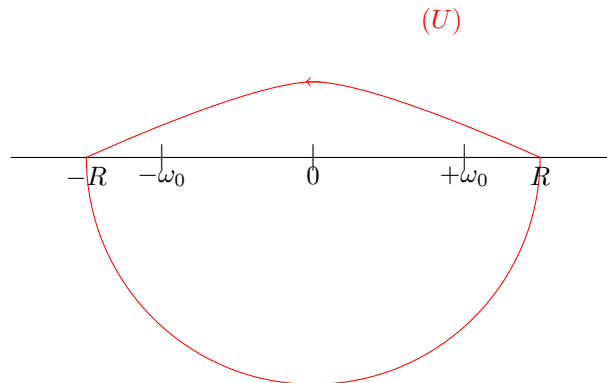
$$f_1(t) = \int_{(U)} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Pour $t < 0$ on prend le chemin :



En faisant tendre $R \rightarrow +\infty$ et avec le lemme de Jordan on obtient $f_1(t) = 0$ si $t < 0$.

Pour $t > 0$:



$$f_1(t) + \underbrace{\int_{(U)} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}}_{\rightarrow 0} = 2i\pi \text{Res}(-\omega_0) + 2i\pi \text{Res}(\omega_0) = \sin(\omega_0 t)$$

(cf Analyse Complexe et théorème des résidus avec sens de rotation autour des pôles)

On retrouve donc :

4. $f_1(t) = f_1(z = 0, t)$. On sait qu'on vérifie Helmholtz :

$$\Delta \tilde{f}(z, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{f}(z, \omega) = 0$$

Alors $\tilde{f}(z, \omega) = A e^{ikz}$, $k = n(\omega) \frac{\omega}{c}$.

$$f_1(z, t) = \int_{(U)} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i(kz - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Rappel :

$$n(\omega) \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{N \frac{e^2}{m\epsilon_0}}{\omega^2 - \omega_1^2 + i\gamma\omega}$$

Idée de Sommerfeld. Poser $t' = t - \frac{z}{c}$ $t' < 0 \Leftrightarrow z > ct$

Pour $|\omega| \rightarrow +\infty$ on a $n(\omega) \rightarrow 1$ donc $k(\omega) \rightarrow \frac{\omega}{c}$, d'où :

$$f_1(z, t) = \int_{(U)} \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega(\frac{z}{c} - t)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Ainsi $f_1(z, t) = f_1(t') = 0$ si $t' < 0$. Ainsi on vient de montrer que le front d'ondes ne peut pas se propager plus vite que c .

7 Réaliser des milieux “fast” et “slow”

On a déjà vu que :

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n_g}$$

Donc pour $\frac{dn}{d\omega} < 0 \rightarrow$ “slow light” et inversement.

8 Modèle de l'électron élastiquement lié

8.1 Rappels, forme de l'indice optique

$$p(\omega) = \frac{-e^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} E$$

Donc :

$$P(\omega) = \frac{-Ne^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} E$$

Ainsi :

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

De ça on extrait :

$$n(\omega) \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

8.2 Lien avec la mécanique quantique : interprétation

Modèle semi-classique/quantique. On considère la lumière comme un champ classique $E(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$ et l'atome comme un système à 2 niveaux (transition en $\hbar\omega_0$). Avec ce modèle on obtient :

$$\Omega = \frac{-\mu E_0}{\hbar} \quad \text{pulsation de Rabi}$$

$$n(\omega) = 1 - f \frac{N e^2}{4m\varepsilon_0\omega_0} \frac{\omega - \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{\Omega^2}{2}}$$

où f s'interprète comme la force d'oscillateur, ω_0 comme la pulsation associée à la transition, et γ comme l'inverse de la durée de vie de l'état excité.

Pour Ω faible (i.e. amplitude du champ faible, par exemple lumière thermique) on retrouve l'indice optique du modèle de l'atome élastiquement lié.

Ω (donc E_0) très grand \Rightarrow saturation.

8.3 Ordres de grandeur...

- $\gamma = \frac{1}{\tau}$, τ la durée de vie de l'état excité est de l'ordre de $1ns$ donc $\gamma = 10^9 s^{-1} = 1GHz$
- $\omega \approx 10^{16}$
- $\frac{dn}{d\omega} \approx 10^{-34} \times \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} = 10^{-34} \times \frac{10^{-38}}{10^{-30}10^{-11}} N = 10^{-31} N$
- Ainsi, $\omega \frac{dn}{d\omega} = 10^{-15} N$
- Donc comme $n_G = n + \omega \frac{dn}{d\omega}$, si $N \geq 10^{15}$ atomes par m^3 le second terme est non négligeable.
- Montrons que $N = 10^{15}$ atomes/ m^3 correspond à l'ultra-vide :

$$PV = n \frac{k}{10^{-23}3.10^2} T \quad \text{à } T \sim 10^2 K \Rightarrow P = Nkt = 10^{-6} \approx 10^{-8} \text{ mbar}$$

9 Exemples de réalisations

9.1 Chu & Wong, Belle Labs

Article. Linear Pulse Propagation in an Absorbing Medium

9.2 Wang, Kuzmich & Dogariu, Princeton

Article. Gain-assisted superluminal light propagation

9.3 Stenner, Gauthier & Neigeld Duke, University of Arizona

Article. The speed of information in a "fast-light" optical medium

9.4 À la maison : l'exemple du cristal photonique

On dispose des câbles vmc (?) d'impédance différentes (par exemple alternance de 50 ohm/75 ohm) disposés périodiquement → le milieu est appelé *cristal photonique*.

$$\tilde{E}(z, \omega) + n^2(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}(z, \omega) = 0 \quad (\text{Helmholtz})$$

Schrodinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r})$$
$$\Delta \varphi(\vec{r}) + f(\vec{r}) \dots \varphi(\vec{r})$$

Modes de Bloch.

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} E(z) = 0 \quad \text{équation de propagation}$$

avec la particularité $\varepsilon(z+a) = \varepsilon(z)$. $E(z)$ peut s'écrire sous la forme :

$$E(z) = u(z) e^{ikz} \quad \text{avec } u(z+a) = u(z)$$

cf. Réflexion de Bragg lorsque $k \rightarrow \pm \frac{\pi}{a}$ Pour des fréquences dans la bande interdite, le signal ne se propage pas.

Cf Haché & Slimani

10 La lumière lente

10.1 Le “must” EIT

Electromagnetically Induced Transparency (1978)

Il faut attendre 1999 pour avoir la démonstration de la lumière lente à 17 m.s^{-1} (sûrement battu depuis). Vestergaard et al., Harvard & Stanford.

11 Résolution numérique des équations de Maxwell

11.1 Équation de Maxwell en temporel

En temporel, dans le vide :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

\vec{E} champ électrique, \vec{H} induction magnétique, ε_0 ??, μ_0 ??

Elles peuvent être discrétisées directement (système ordre 1). Chaque composante des champs vérifie l'équation des ondes en temporel, mais, en l'absence de charges, les champs sont à divergence nulle. Il va falloir réussir à l'imposer dans le schéma numérique.

En milieu conducteur, des courants J et des charges apparaissent. L'équation sur H devient :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \operatorname{div} \vec{D}}{\partial t}$$

Nous allons discrétiser les équations en rotationnel, qui impliquent, avec l'équation de conservation de la charge, les équation en divergence au niveau continue mais cette implication doit aussi se retrouver au niveau discret : difficulté spécifique à Maxwell (vérification au niveau discret de la conservation de la charge).

11.2 Quelle méthode numérique pour Maxwell ?

- Les trois principales méthodes numériques, différences finies, éléments finis, (assez peu) volumes finis, ont été appliquées à la résolution des équations de Maxwell.
- La méthode optimale dépend du type de problème à résoudre : taille, complexité géométrique
- Maxwell génère des difficultés spécifiques pour la méthodes des éléments finis, lié à la vérification au niveau discret de la conservation de la charge.
- La méthode en différences finies est la plus simple à programmer et souvent la plus efficace : on se concentrera principalement sur elle, en présentant quand même des alternatives.

11.3 Quelques rappels sur les différences finies

Idée générale. On approxime les opérateurs différentiels $\frac{d}{dx_i}$, $\frac{d}{dt}$ apparaissant dans l'EDP à résoudre par des différences finies, ou quotients différentiels.

Exemple. (équation d'advection)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

a pour solution $u(x, t) = u_0(x - at)$ avec $u_0(x) = u(x, 0)$ la condition initial.

En différences finies, on cherche à calculer une approximation de la solution u d'une EDO ou d'une EDP sur une grille régulière en approxinant les dérivées par des quotients différentiels, par exemple $u'_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}$.

En 1D cette grille est un ensemble de points $x_j = jh$ où h est la taille de la maille.

Dans la plupart des cas pratiques, j est un entier naturel, compris entre 0 et J , une (ou des) condition est imposée en 0 (et/ou en J).

L'évaluation de l'ordre d'une approximation en différences finies de u' dans une EDO repose sur des développements de Taylor.

Plus précisément la fonction u est injectée dans le quotient différentiel. Par exemple, le quotient précédent est d'ordre 1, et si on choisit plutôt $u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}$ on a un schéma d'ordre 2.

Remarque. Ces écritures supposent la régularité de u puisqu'on effectue le développement de Taylor.

L'ordre de consistance d'un schéma est l'ordre de l'erreur dite de troncature.

Un schéma est dit stable s'il donne des résultats $R(\Delta t, T)$ bornés, i.e. si $\forall T, \exists C(T), \forall h, \|R(\Delta)\| \leq C$.

Un schéma instable est analogue à un problème mal posé : croissance non bornée de la solution à T pour des conditions initiales de type $\exp(\frac{ia}{h})$ quand $h \rightarrow 0$.

La transformée de Fourier diagonalise les opérateurs différentiels et les opérateurs aux différences : c'est l'outil de base de l'analyse des schéma.

Dérivation : multiplication pour ik . Shift positif : $\hat{u}(x+h) = e^{ikh}\hat{u}$

Remarque. La transformée de Fourier est une des premières approches, le bon outil pour l'étude des schémas est la transformée de Fourier semi-discrète.

Pour des équations linéaires, on s'assure de la stabilité d'un schéma en vérifiant qu'aucune condition initiale e^{ikx} dans $[-\pi/h, \pi/h]$ n'est amplifiée.

Exemple. (de condition de stabilité) : $a\Delta t < \Delta x = h$, nombre de Courant $\eta = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ borné

L'intérêt de monter en ordre est exprimé par le théorème de Lax-Richtmeyer

Théorème 1 (Lax-Richtmeyer)

Un schéma consistant à l'ordre p en espace et q en temps, $O(h^p + \Delta t^q)$ est convergent à ces mêmes ordres s'il est stable.

Sous condition de stabilité, la différence entre la solution de l'EDP et la solution donnée par un schéma d'ordre p en espace sera donc majorée par $C(h^p + \Delta t^q)$ si la condition initiale est assez régulière.

Remarque. Le théorème de Lax-Richtmeyer permet de ramener un problème (relativement) difficile de convergence de la solution du schéma vers celle de l'EDP à la vérification (relativement) facile :

- de la consistance : on injecte la sol de l'EDP dans le schéma + Taylor pour calculer l'erreur de troncature et donc l'ordre du schéma
- de la stabilité : plusieurs méthodes, la plus simple (Von Neumann) consiste à s'assurer que le schéma n'amplifie pas les e^{ikx}

Ce théorème est une condition suffisante, mais pas nécessaire : il peut arriver que des schémas convergent en dépit de leur non consistance (ex : upwind sur un maillage à pas variable).

11.4 Application aux opérateurs d'ordre élevé

11.5 Deux manières de centrer

- Utiliser une seule grille, et un schéma type saute-mouton (une équation)
- Utiliser 2 grilles, décalées d'un demi-pas, : si une quantité est définie sur une grille, sa dérivée sera définie sur l'autre.

C'est le plus commode pour les systèmes d'équations (ondes notamment). On part souvent de points-milieu (ou centres des mailles) indicés j et de cloisons indicées $j + \frac{1}{2}$ (ou parfois l'inverse).

Schéma sur grilles décalées. L'idée est de stocker certaines quantités au cloisons et d'autres aux point-milieu pour obtenir le bon centrage.

Exemple. Schéma de Yee pour les équations de Maxwell.