Probabilités
Chapitre 3 : Indépendance

Lucie Le Briquer

23 novembre 2017

1 Indépendance sur les tribus

On pense à une tribu $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ comme $\mathcal{B} = \sigma(X)$. Intuitivement, on ne peut pas tirer de l'information sur une tribu à partir des autres lorsqu'elles sont indépendantes. On espère en particulier :

- Si X, Y, Z sont indépendants alors $F(X, Y)$ est indépendant de Z
- Si $X_1, Y_1, X_2, Y_2, ...$ sont des v.a.i. alors $F(X_1, X_2, ...)$ et $G(Y_1, Y_2, ...)$ le sont, de même que $F_1(X_1, Y_1)$, $F_2(X_2, Y_2)$, ...

Ce sont 3 cas particuliers du lemme de regroupement (théorème de coalition)

Théorème 1

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de tribus ($B_i \subset \mathcal{A}$) indépendantes. Soit $(J_r)_{r\in R}$ une partition de I. Soit pour $r \in R$: $\hat{B}_r = \sigma(B_i \mid i \in J_r)$. Alors $(\hat{B}_r)_{r\in R}$ est une famille de tribus indépendantes.

Lemme 1

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de tribus telle que $\forall i \in I,\ B_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ où $\mathcal{C}_i$ est un $\pi-$système générateur. Alors,

$$(B_i)_{i\in I} \text{ indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \forall J \in \mathcal{P}_f(I), \forall (A_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \quad (*)$$

Preuve.
$\Leftarrow$: ok
$\Rightarrow$: Il suffit de traiter le cas où $I = [\![1, n]\!]$. Définissons $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_k}$ la propriété $(*)$. On a $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,...,\mathcal{C}_n}$ et on veut $\mathcal{P}_{B_1,...,B_n}$. Si on montrer que si les A_i sont des $\pi-$systèmes alors $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_1,...,\mathcal{A}_n} \Rightarrow \mathcal{P}_{\sigma(\mathcal{A}_1),...,\mathcal{A}_n}$ et donc $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,...,\mathcal{C}_n} \Rightarrow \mathcal{P}_{\sigma(\mathcal{C}_1),...,\mathcal{C}_n} \Rightarrow \mathcal{P}_{\sigma(\mathcal{C}_1),\sigma(\mathcal{C}_2)...,\mathcal{C}_n} \Rightarrow ... \Rightarrow \mathcal{P}_{\sigma(\mathcal{C}_1),...,\sigma(\mathcal{C}_n)} = \mathcal{P}_{B_1,...,B_n}$.
Supposons donc $\mathcal{P}_{A_1,...,A_n}$ et A_n $\pi-$système. Posons :

$$\mathcal{M} = \Bigg\{ A \subset \mathcal{A} \mid \forall k \geqslant 2,\ \forall i_2, ..., i_k \text{ 2 à 2 distincts} \in [\![2, n]\!]$$
$$\forall A_2 \in \mathcal{A}_{i_2}, ..., A_k \in \mathcal{A}_{i_k},\ \mathbb{P}(A \cap \bigcap_{j=2}^{k} A_j) = \mathbb{P}(A) \prod_{j=2}^{k} \mathbb{P}(A_j) \Bigg\}$$

On a $\mathcal{P}_{\mathcal{M},\mathcal{A}_2,...,\mathcal{A}_n}$.

- $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}_1$
- $\Omega \in \mathcal{M}$
- Si $A \subseteq B \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((B\backslash A)\bigcap_{j=2}^{k} A_j\right) &= \mathbb{P}((B\cap(\cap A_j))\backslash(A\cap(\cap A_j)))\\ &= \mathbb{P}(B\cap(\cap A_j)) - \mathbb{P}(A\cap(\cap A_j))\\ &= \mathbb{P}(B\backslash A)\prod \mathbb{P}(A_j)\end{aligned}$$

- Si B_n est une suite croissante dans $\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_n B_n\right)\cap(\cap A_j)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_n (B_n\cap(\cap A_j))\right)\\ &= \lim_n \uparrow \mathbb{P}(B_n\cap(\cap A_j))\\ &= (\lim \mathbb{P}(B_n))\prod \mathbb{P}(A_j)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_n B_n\right)\prod \mathbb{P}(A_j)\end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ est donc un $\lambda-$système et $\mathcal{A}_1$ un $\pi-$système donc par le théorème de Dynkin $\mathcal{M} \supset \Lambda(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_1)$ donc on a $\mathcal{P}_{\sigma(\mathcal{A}_1),\mathcal{A}_2,...,\mathcal{A}_n}$ $\square$

Preuve.
Soit :

$$\mathcal{C}_r = \{A_1\cap...\cap A_k \mid k \geqslant 1 \text{ et } \exists j_1,...,j_k \text{ 2 à 2 distincts } \in J_r \text{ tels que } A_1 \in \mathcal{B}_{j_1},...,A_k \in \mathcal{B}_{j_k}\}$$

C'est un $\pi-$système. Si $B = A_1\cap...\cap A_k$ et $C = A'_1\cap...\cap A'_k \in \mathcal{C}_r$, alors $A = B\cap C \in \mathcal{C}_r$ en regroupant les évènements de la même tribu. $\forall j \in J_r$, $\mathcal{C}_r \supseteq \mathcal{B}_j$ donc $\sigma(\mathcal{C}_r) \supseteq \mathcal{B}_j$ donc $\sigma(\mathcal{C}_r \supseteq \sigma(\mathcal{B}_j \mid j \in J_r) = \mathcal{B}_r$. Il reste à prouver que les $(\mathcal{C}_i)_{i\in R}$ vérifient la propriété d'indépendance.
Soit $B_1 = A_1^1\cap...\cap A_{k_1}^1 \in \mathcal{C}_1$ ($A_i^1 \in \mathcal{B}_{j_i}$ où $j_i \in J_1$ $\neq$), ..., $B_p = A_1^p\cap...\cap A_{k_p}^p \in \mathcal{C}_p$ ($A_i^p \in \mathcal{B}_{j_i}$ où $j_i \in J_p$). Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1\cap...\cap B_p) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{p}\underbrace{\bigcap_{i=1}^{k_r}}_{j_i\neq\text{dans } J_r} A_i^r\right)\\ &= \prod_{r=1}^{p}\prod_{i=1}^{k_r}\mathbb{P}(A_i^r)\\ &\underset{\mathcal{B}_i \text{ idp}}{=} \prod_{r=1}^{p}\left(\bigcap_{i=1}^{k_r} A_i^r\right)\end{aligned}$$

(car les J_r sont disjoints donc tous ses évènements $\in \mathcal{B}_i$ différents).
On a $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,...,\mathcal{C}_n}$ donc $\mathcal{P}_{\sigma(\mathcal{C}_1),...,\sigma(\mathcal{C}_n)}$ donc $\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{B}_1},...,\hat{\mathcal{B}_n}}$. $\square$