Analyse complexe
Chapitre 2

Lucie Le Briquer

Problème.

1. $0 < \Re(s) < d$

$$|f(x)x^{s-1}| = |f(x)||x|^{\Re(s)-1} \underset{x\to 0}{\sim} |f(0)||x|^{\Re(s)-1} \quad \text{intégrable car } \Re(s) > 0$$

   Et en $+\infty$:

$$|f(x)x^{s-1}| \underset{x\to +\infty}{\sim} \lambda|x|^{\Re(s)-1-d} \quad \text{intégrable puisque } \Re(s) < d$$

   Théorème d'holomorphie sous le signe $\int$.

   $B = \{z | 0 < \Re(z) < d\} \quad \forall x \in]0,+\infty[, s \longmapsto f(x)x^{s-1}$ est holomorphe sur B

   $K \subset B$ compact

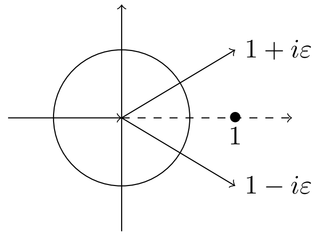
$$\forall s \in K, |f(x)x^{s-1}| \leq \underbrace{|f(x)|x^a 1_{x\geq 1}}_{\text{intégrable}} + \underbrace{|f(x)|a^b 1_{0\leq x\leq 1}}_{\text{intégrable}}$$

   où $a = \max\limits_{s\in U}(\Re(s-1))$ et $b = \min\limits_{s\in U}(\Re(s-1))$.

   Donc F est holomorphe sur B.

2. $U = \mathbb{C}\backslash[0,+\infty[$ est un ouvert simplement connexe ne contenant pas $0 \longrightarrow$ on peut définir $\log z$

   – $\exp\log z = z = |z|e^{i\theta}$
   – $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$
   – $\arg(z) \in]0, 2\pi[$
   – $z^s := \exp(s\log z)$ sur U

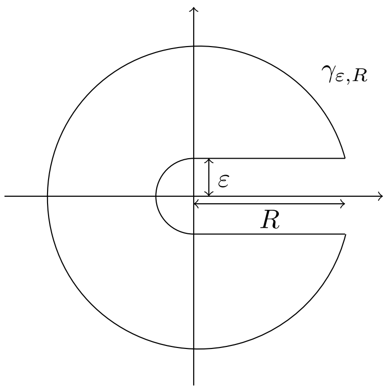


On a :

$$(1+i\varepsilon)^s \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 1 \qquad (1-i\varepsilon)^s \xrightarrow[\varepsilon\to 0-]{} e^{2i\pi s}$$

car $\log(1+i\varepsilon) = \ln \underbrace{|1+i\varepsilon|}_{\to 0} + i\underbrace{\arg(1+i\varepsilon)}_{\to 0}$ et $\log(1-i\varepsilon) = \ln \underbrace{|1-i\varepsilon|}_{\to 0} + i\underbrace{\arg(1-i\varepsilon)}_{\to 2\pi}$

3.



$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)z^{s-1}dz = 2i\pi \sum_{\alpha\in P_f} \mathrm{Res}(f(z)z^{s-1},\alpha)$$

Attention. $\mathrm{Res}(f(z)z^{s-1}) \neq \alpha^{s-1}\mathrm{Res}(f,\alpha)$ en général, on a l'égalité uniquement si des pôles simples.

$$\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)z^{s-1}dz = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} f(\varepsilon e^{it})(\varepsilon e^{it})^{s-1} i\varepsilon e^{it}dt$$

$\gamma(t) = \varepsilon e^{it}$ aveec $t \in [3\pi/2, \pi/2]$ et :

$$(\varepsilon e^{it})^{s-1} = \exp((s-1)\log(\varepsilon e^{it})) = \exp((s-1)(\ln\varepsilon + it))$$

$$\left|\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)z^{s-1}dz\right| \underset{\mathrm{TCD}}{\leq} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |f(\varepsilon e^{it})||\varepsilon^{s-1}||e^{it(s-1)}|dt \quad \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

4.

$$\int_0^R f(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{s-1}dx - \int_0^R f(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{s-1}dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathrm{TCD}} \int_0^R f(x)x^{s-1}dx - \int_0^R f(x)x^{s-1}e^{2i\pi(s-1)}$$

Donc avec $R \longrightarrow +\infty$:

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx\right)\left(1-e^{2i\pi(s-1)}\right) = 2i\pi \sum \mathrm{Res}(f(z)z^{s-1},\alpha)$$

5. *Application.*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{dx}{x^2+1} &= \frac{1}{1-e^{2i\pi(s-1)}} \times \left[\operatorname{Res}\left(\frac{x^{s-1}}{x^2+1}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{x^{s-1}}{x^2+1}, -i\right)\right] \\ &= \frac{2i\pi\left(\frac{i^{s-1}}{2i} - \frac{(-i)^{s-1}}{2i}\right)}{1-e^{2i\pi(s-1)}} \\ &= \frac{\pi e^{i\pi/2(s-1)} - \pi e^{i3\pi/2(s-1)}}{1-e^{2i\pi(s-1)}i} \qquad + \text{ angle moitié}\end{aligned}$$