MiniRT - Documentation

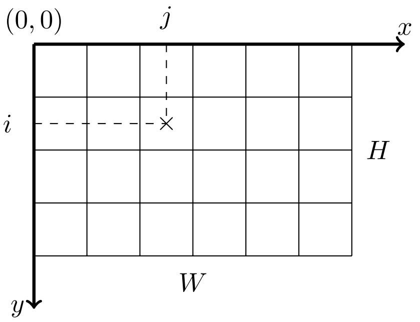
Lucie Le Briquer

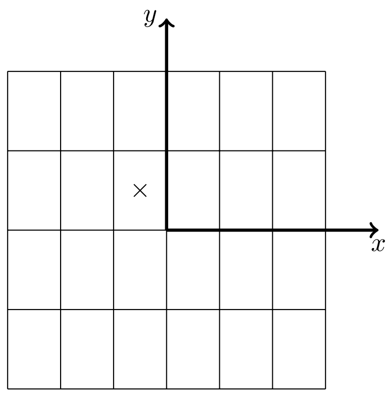
15 janvier 2021

Table des matières

Remarque. On notera dans tout ce document $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel.

1 Génération des rayons





On cherche à remplir l'image pixel par pixel, on a i correspondant à la ligne du pixel et j à sa colonne. On va d'abord normaliser les coordonnées selon la largeur et la hauteur de l'écran pour travailler avec une image carrée. On note :

$$\text{pixNorm}_x = \frac{j+0.5}{W} \quad \text{et} \quad \text{pixNorm}_y \frac{i+0.5}{H}$$

On effectue ensuite une translation pour centrer le repère sur le milieu de l'écran ainsi qu'une inversion de l'axe y. Ainsi :

$$\text{pixScreen}_x = 2 \times \text{pixNorm}_x - 1 \quad \text{et} \quad \text{pixScreen}_y = 1 - 2 \times \text{pixNorm}_y$$

Il reste ensuite à prendre en compte la FOV donnée en paramètre :

$$\text{pixFinal}_x = \text{pixScreen}_x \times \text{ratio} \times \tan\left(\frac{\text{FOV}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \text{pixFinal}_y = \text{pixScreen}_y \times \tan\left(\frac{\text{FOV}}{2}\right)$$

Finalement :

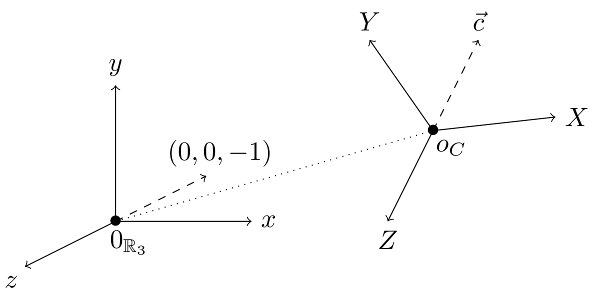
$$\text{pixFinal}_x = \left(2 \times \frac{j+0.5}{W} - 1\right) \times \text{ratio} \times \tan\left(\frac{\text{FOV}}{2}\right)$$

$$\text{pixFinal}_y = \left(1 - 2 \times \frac{i+0.5}{H}\right) \times \tan\left(\frac{\text{FOV}}{2}\right)$$

où ratio $= \frac{W}{H}$.

2 Rotation de la caméra

Soit $(o_C, \vec{c})$ une caméra, o_C est sa position et $\vec{c}$ la direction dans laquelle elle regarde. La caméra par défaut regarde en $(0, 0, -1)$.



On cherche à déterminer les coordonnées des vecteurs X, Y et Z. On sait déjà que $Z = -\vec{c}$ (normalisé). On cherche maintenant un vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$X = v \wedge Z$$

Or on sait que pour $Z = (0, 0, 1)$ on veut $X = (1, 0, 0)$. On prend donc $\vec{v} = (0, 1, 0)$ pour satisfaire la relation.

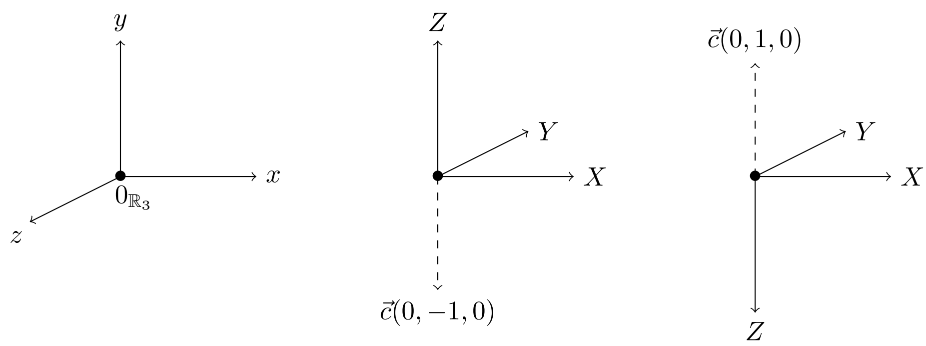
$$X = (0, 1, 0) \wedge Z$$

Remarque. Ceci n'est valable que dans le cas ou $Z \neq \lambda(0, 1, 0)$.

Pour finir la création de la base orthonormée directe on pose donc :

$$Y = Z \wedge X$$

Remarque. Pour le cas où $\vec{c} = (0, 1, 0)$ ou $(0, -1, 0)$ on pose $X = (1, 0, 0)$ (cf schémas).



3 Intersection rayon-sphère

Soit $(o_r, \vec{d_r})$ le rayon pour lequel on cherche une intersection avec une sphère (o_r est l'origine du rayon, $\vec{d_r}$ sa direction). Soit o le centre de la sphère $\mathcal{S}$ et r son rayon. On cherche donc un point p de la forme :

$$p = o_r + \mathbf{t}\vec{d_r} \quad \mathbf{t} > 0$$

intersectant la sphère, donc vérifiant :

$$\|p - o\|^2 = r$$

On veut donc :

$$\begin{aligned} & \|o_r - o + \mathbf{t}\vec{d_r}\|^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{t}^2\|\vec{d_r}\|^2 + 2\mathbf{t}\langle \vec{d_r}, o_r - o\rangle + \|o_r - o\|^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{t}^2 + 2\mathbf{t}\langle \vec{d_r}, o_r - o\rangle + \|o_r - o\|^2 = r^2 \end{aligned}$$

Le déterminant est :

$$\Delta = 4 \times \left(\langle \vec{d_r}, o - o_r\rangle^2 - \|o - o_r\|^2 - r^2\right)$$

Il ne reste plus qu'à determiner la plus petite racine positive si elle existe. Si le déterminant est négatif ou que les racines (ou la racine double) sont négatives, l'intersection n'est pas visible depuis la caméra.

4 Intersection rayon-plan

Soit $(o, \vec{n})$ le plan $\mathcal{P}$, ou $\vec{n}$ est la normale au plan et o un point du plan. Comme précédemment on cherche un point p de la forme :

$$p = o_r + \mathbf{t}\vec{d_r} \quad \mathbf{t} > 0$$

intersectant le plan, donc vérifiant :

$$\langle p - o, \vec{n}\rangle = 0$$

On veut donc :

$$\begin{aligned} & \langle o_r + \mathbf{t}\vec{d_r} - o + \mathbf{t}, \vec{n}\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle o_r - o, \vec{n}\rangle + \mathbf{t}\langle \vec{d_r}, \vec{n}\rangle = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

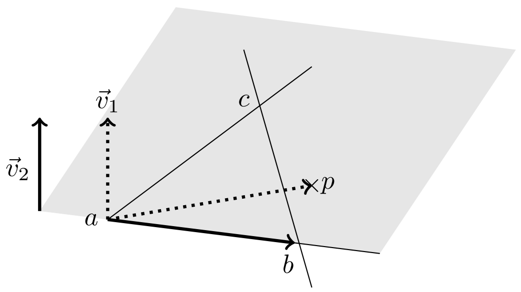
$$\mathbf{t} = \frac{\langle o - o_r, \vec{n}\rangle}{\langle \vec{d_r}, \vec{n}\rangle}$$

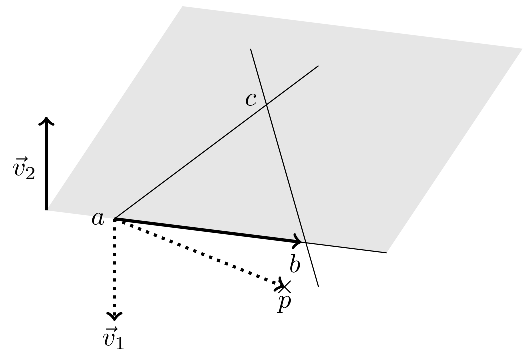
Si $\mathbf{t}$ est bien positif il y a une intersection visible avec le plan.

5 Intersection rayon-triangle

Soient (a, b, c) les sommets d'un triangle. La première étape est de vérifier qu'il existe un $\mathbf{t}$ tel que p soit dans le plan du triangle. On a donc besoin d'une normale au triangle, on prend par exemple $\vec{n} = (b - a) \wedge (c - a)$.

On veut maintenant vérifier que le point p est dans le demi-plan $P_{a,b}$ (où $P_{a,b}$ contient c et est délimité par la droite passant par a et b).





Il suffit de regarder le signe du produit scalaire entre les deux vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = (b - a) \wedge (p - a) \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = (b - a) \wedge (c - a)$$

Les deux cas possibles sont representés sur la figure : $\vec{v}_1$ est orienté comme $\vec{v}_2$ si p est dans le demi-plan, à l'opposé sinon. Ainsi :

$$p \in P_{a,b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle (ba) \wedge (p - a), (b - a) \wedge (c - a) \rangle > 0$$

De même :

$$p \in P_{b,c} \quad \Leftrightarrow \quad \langle (c - b) \wedge (p - b), (c - b) \wedge (a - b) \rangle > 0$$
$$p \in P_{c,a} \quad \Leftrightarrow \quad \langle (a - c) \wedge (p - c), (a - c) \wedge (b - c) \rangle > 0$$

Donc p appartient au triangle ssi :

$$\begin{cases} \langle (b - a) \wedge (p - a), (b - a) \wedge (c - a) \rangle > 0 \\ \langle (c - b) \wedge (p - b), (c - b) \wedge (a - b) \rangle > 0 \\ \langle (a - c) \wedge (p - c), (a - c) \wedge (b - c) \rangle > 0 \end{cases}$$

6 Intersection rayon-carré

Le principe est identique à l'intersection rayon-triangle : on cherche d'abord un point qui appartient au plan du carré puis on rajoute des conditions. Les conditions ici sont : $|y| < \frac{h}{2}$ et $|x| < \frac{h}{2}$ avec x et y les coordonnées de p dans la base du carré et h la hauteur du carré. On obtient cette base notée (o, X, Y, Z) en suivant les instructions de la Section 2. On rappelle que :

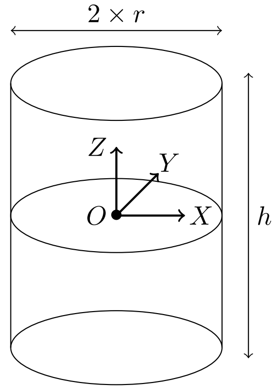
$$x = \langle p - o, X \rangle \quad \text{et} \quad y = \langle p - o, Y \rangle$$

7 Intersection rayon-cylindre

Soit (o, X, Y, Z) le repère du cylindre $\mathcal{C}$. Le point $p \in \mathcal{C}$ ssi

$$x_p^2 + y_p^2 = r^2 \quad \text{et} \quad |z_p| \leqslant \frac{h}{2}$$

avec (x_p, y_p, z_p) les coordonnées de p dans le repère du cylindre. Pour déterminer les vecteurs (X, Y, Z) il suffit d'utiliser la même construction de base vue précédemment avec comme axe de départ l'axe du cylindre.



Le point p est de la forme $o_R + \mathbf{t}d_R$ où o_R est l'origine du rayon et d_R sa direction. Ainsi :

$$x_p = \langle p - o, X\rangle = \mathbf{t}\langle d_R, X\rangle + \langle o_r - o, X\rangle$$

$$y_p = \langle p - o, Y\rangle = \mathbf{t}\langle d_R, Y\rangle + \langle o_r - o, Y\rangle$$

Donc,

$$\begin{aligned} x_p^2 + y_p^2 = &\left(\langle d_R, X\rangle^2 + \langle d_r, Y\rangle^2\right)\mathbf{t}^2 \\ &+ 2\left(\langle d_R, X\rangle\langle o_R - o, X\rangle + \langle d_R, Y\rangle\langle o_R - o, Y\rangle\right)\mathbf{t} \\ &+ \left(\langle o_R - o, X\rangle^2 + \langle o_R - o, Y\rangle^2\right) \end{aligned}$$

$\mathbf{t}$ vérifie donc une équation du second degré $a\mathbf{t}^2 + b\mathbf{t} + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = \langle d_R, X\rangle^2 + \langle d_r, Y\rangle^2 \\ b = 2\left(\langle d_R, X\rangle\langle o_R - o, X\rangle + \langle d_R, Y\rangle\langle o_R - o, Y\rangle\right) \\ c = \langle o_R - o, X\rangle^2 + \langle o_R - o, Y\rangle^2 - r^2 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que, pour un des deux $\mathbf{t}$, on obtient un point p vérifiant $|z_p| \leqslant \frac{h}{2}$ sachant que :

$$z_p = \langle p - o, Z\rangle = \mathbf{t}\langle d_R, Z\rangle + \langle o_r - o, Z\rangle$$

On calcule ensuite la normale à la surface du cylindre qui est :

$$p - (o + \langle p - o, Z\rangle.Z)$$

$o + \langle p - o, Z\rangle.Z$ étant bien le point à hauteur de p sur l'axe du cylindre.

8 Intersection rayon-cône

Soit (o, X, Y, Z) le repère du cône. Le point appartient au cône ssi

$$x_p^2 + y_p^2 = \frac{r^2}{h^2} z_p^2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant z_p \leqslant h$$

avec (x_p, y_p, z_p) les coordonnées de p dans le repère du cône. Pour déterminer les vecteurs (X, Y, Z) il suffit d'utiliser la même construction de base vue précédemment avec comme axe de départ l'axe du cône.

Le point p est de la forme $o_R + \mathbf{t} d_R$ où o_R est l'origine du rayon et d_R sa direction. Ainsi :

$$x_p = \langle p - o, X \rangle = \mathbf{t} \langle d_R, X \rangle + \langle o_r - o, X \rangle$$

$$y_p = \langle p - o, Y \rangle = \mathbf{t} \langle d_R, Y \rangle + \langle o_r - o, Y \rangle$$

$$z_p = \langle p - o, Z \rangle = \mathbf{t} \langle d_R, Z \rangle + \langle o_r - o, Z \rangle$$

$$\begin{aligned} x_p^2 + y_p^2 - \frac{r^2}{h^2} z_p^2 = &\left(\langle d_R, X \rangle^2 + \langle d_r, Y \rangle^2 - \frac{r^2}{h^2} \langle d_r, Z \rangle^2 \right) \mathbf{t}^2 \\ &+ 2 \left(\langle d_R, X \rangle \langle o_R - o, X \rangle + \langle d_R, Y \rangle \langle o_R - o, Y \rangle - \frac{r^2}{h^2} \langle d_R, Z \rangle \langle o_R - o, Z \rangle \right) \mathbf{t} \\ &+ \left(\langle o_R - o, X \rangle^2 + \langle o_R - o, Y \rangle^2 - \frac{r^2}{h^2} \langle o_R - o, Z \rangle^2 \right) \end{aligned}$$

$\mathbf{t}$ vérifie donc une équation du second degré $a\mathbf{t}^2 + b\mathbf{t} + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = \langle d_R, X \rangle^2 + \langle d_r, Y \rangle^2 - \frac{r^2}{h^2} \langle d_r, Z \rangle^2 \\ b = 2 \left(\langle d_R, X \rangle \langle o_R - o, X \rangle + \langle d_R, Y \rangle \langle o_R - o, Y \rangle - \frac{r^2}{h^2} \langle d_R, Z \rangle \langle o_R - o, Z \rangle \right) \\ c = \langle o_R - o, X \rangle^2 + \langle o_R - o, Y \rangle^2 - \frac{r^2}{h^2} \langle o_R - o, Z \rangle^2 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que, pour un des deux $\mathbf{t}$, on obtient un point p vérifiant $0 \leqslant z_p \leqslant h$.