



Bureau d'étude : Optimisation différentiable 1

MICHELET Lucie / PEDONI Chloé/ DIETTE Timo / KLINGLER Mathieu

Classe : 3TS1-2

Professeur : M. EL MAHBOUBY

Date de soumission : 19/04/2022

1- Théorie : la corde vibrante

1.1- Justification physique des expressions des énergies cinétique et potentielle

On peut voir l'expression de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} \rho L v^2$ dans la formule de $E_c(u)$ donné par le sujet. Ainsi on en déduit que c'est la somme de l'énergie cinétique en tout point de la corde.

1.2- Dérivée directionnelle de E_c

Calculons la dérivée directionnelle de E_c en u dans la direction v :

$$\begin{aligned} D_v E_c(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^L \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \rho \frac{\int_0^L \left(2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} * \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) dx}{\varepsilon} \\ &= \int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t} * \frac{\partial v}{\partial t} dx \end{aligned}$$

1.3- Dérivée directionnelle de E_p en u dans la direction v

Développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} &f \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) \\ &= f \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + f' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} f'' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On peut en déduire l'expression de la dérivée directionnelle de E_p en u dans la direction v :

$$\begin{aligned} D_v E_p(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_p(u + \varepsilon v) - E_p(u)}{\varepsilon} \\ &= \int_0^L f' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{aligned}$$

1.4- Dérivée directionnelle de $D_v S(u)$ en u dans la direction v

$$D_v S(u) = \int_{t_0}^{tf} D_v E_c - D_v E_p dt = \int_{t_0}^{tf} \int_0^L \rho \frac{\partial u}{\partial t} * \frac{\partial v}{\partial t} - f' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

On a par IPP :

$$\begin{aligned} D_v S(u) &= \int_0^L \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} v \right]_{t_0}^{tf} - \int_{t_0}^{tf} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dt dx - \int_{t_0}^{tf} \left[f' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) v \right]_0^L - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f'' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) v dx dt \\ &= \int_{t_0}^{tf} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f'' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) v - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx dt \\ &= \int_{t_0}^{tf} \left(\int_0^L \phi(x, t) v(x, t) dx \right) dt \end{aligned}$$

Avec $\phi(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f'' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

1.5- Application du principe d'action stationnaire (principe de moindre action)

Montrons qu'avec deux fonction continues g et h données et une intégrale nulle alors g est la fonction nulle.

$$\int_0^b g(s) h(s) ds = 0$$

Par le lemme fondamental de calcul des variations si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et on a $\forall h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\int_a^b g(s) h(s) ds = 0$, alors g est la fonction nulle.

Demo : on pose $g = f \Rightarrow \int_0^1 f^2(t) dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0$

On peut alors en déduire les points critiques de l'action S :

$$D_v S(u) = \int_{t_0}^{tf} \left(\int_0^L \phi(x, t) v(x, t) dx \right) dt = 0$$

On a $\forall v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donc il faut chercher :

$$\phi(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f'' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

En réécrivant : $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} f' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$

1.6- Tension supposée de la corde

On suppose dans cette partie que la fonction f s'écrit sous la forme :

$$f(s) = \frac{1}{2}Ts^2$$

On peut tout d'abord voir que cette expression représente la force de rappel en fonction de x et t .

On retrouve la forme de la loi de Hooke :

$$f(s) = \frac{1}{2}Ts^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

A présent on peut obtenir l'équation des ondes dites homogènes.

On a $f''(s) = T$, alors :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} T = 0$$

On retrouve bien l'équation des ondes dites homogènes de la même forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

On remarque donc que la célérité est :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

2- Modélisation

2.1- Consistance, stabilité et convergence

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } [0, L] \times [t_0, t_f] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \in [t_0, t_f] \\ u(x, t_0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = v_0(x) & \forall x \in [0, L] \end{array} \right.$$

Au sens de Von Neumann-Fourier : $u_j^N = \zeta^N e^{ik\pi x_j}$

L'équation est homogène, on regroupe les termes de même ordre. On remplace puis passe par Euler.

$$\zeta^2 - 2\zeta + 1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\zeta^2 \theta (\cos(k\pi \Delta x) - 1) + 2(1 - \theta)\zeta (\cos(k\pi \Delta x) - 1) + \theta (\cos(k\pi \Delta x) - 1)) = 0$$

On pose $\gamma = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

$$\zeta^2 - 2 \left(\frac{1 + \gamma^2 (\cos(k\pi \Delta x) - 1)(1 - \theta)}{1 - \gamma^2 (\cos(k\pi \Delta x) - 1)\theta} \right) \zeta + 1 = 0$$

Il faut $|\zeta| \leq 1$

2.2- Approximation à l'ordre 2

Nous commençons par l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On remplace et on trouve :

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = 0$$

Prenons comme condition initiale u_j^1 qu'on détermine avec le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} u_j^1 &= u(x_j, 0) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, 0) + \frac{(\Delta t^2)}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, 0) \\ &= u_0(x) + \Delta t v_0(x) - \alpha \frac{(\Delta t^2)}{2!} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} \\ &= u_0(x) + \Delta t v_0(x) - \frac{\alpha(\Delta t)^2}{2!} \left(\frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{\Delta x^2} \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien ici une approximation à l'ordre 2 en espace et temps :

- $u_0(x) + \Delta t v_0(x)$ pour le temps
- $u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0$ pour l'espace

2.3- Schéma numérique

$$u_j^1 = u_0(x) + \Delta t v_0(x) - \frac{\alpha(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} (Au_0(x))$$

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\alpha = -\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$.

$$P_0 = -\left(I_m + \frac{\alpha\theta}{2}A\right)$$

$$P_1 = ((-2I_m - \alpha(1-\theta)A)$$

$$P_2 = -P_0$$

Ainsi on a :

$$u^{n+2}P_2 = u^{n+1}P_1 + u^n P_0$$

3- Méthodes numériques

3.1- Sans contraintes

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la résolution pour tout $n \geq 0$:

$$P_2 u^{n+2} = P_1 u^{n+1} + P_0 u^n$$

Supposons que u^{n+1} et u^n connus. Posons la forme quadratique :

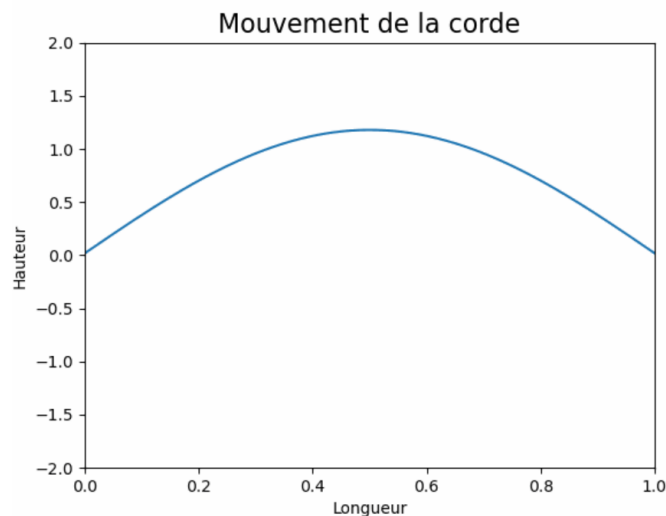
$$Q_n(x) := \frac{1}{2} x^T P_2 x - (P_1 u^{n+1} + P_0 u^n)^T x$$

Cherchons la nature du point critique de $Q_n : u^{n+2}$.

On a : $\nabla Q_n(x) = Ax - b \Leftrightarrow P_2 x - P_1 u^{n+1} + P_0 u^n = 0$

On en déduit donc le point critique de Q_n , $x = \frac{P_1 u^{n+1} - P_0 u^n}{P_2} = u^{n+2}$.

Nous avons modélisé grâce à la méthode du gradient conjugué le mouvement de la corde à des conditions initiales données. En connaissant u_0 et u_1 nous avons pu calculer u_{n+2} , dans une boucle, afin de créer une matrice U représentant les points de coordonnées de la corde à tous les instants. Chaque vecteur colonne du vecteur U représente les coordonnées à un instant donné. Le code nous permet également de sauvegarder cette animation en gif.



Capture d'écran du mouvement de la corde sans contrainte

On veut montrer que cette expression est solution au problème :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$$

On pose $F(x, t)$ une primitive de $v_0(s)$ telle que :

$$\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds = F(x + ct) - F(x - ct)$$

Alors on aura :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c}(F(x + ct) - F(x - ct))$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x - ct) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x + ct) \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x + ct) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x - ct) \right)$$

Et

$$-c^2 \frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x - ct) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x + ct) \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x + ct) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x - ct) \right)$$

Il vient donc $\frac{\partial u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0$, $u(x, t)$ est bien solution.

3.2- Sous contraintes

Nous ajoutons à présent des contraintes au problème, cela représente le mouvement de la corde dans un tube.

On suppose que $\forall x \in [0, L]$ et $t \in [t_0, t_f]$. On a donc $-\frac{1}{2} \leq u(x, t) \leq \frac{1}{2}$.

Montrons maintenant que les contraintes sont sous une forme discrétisée. D'après les données de la partie 2, j pour discrétiser l'espace, n pour discrétiser le temps. Donc on peut écrire la forme discrétisée équivalente suivante :

$$-\frac{1}{2} \leq u(x, t) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u_j^n \leq \frac{1}{2}$$

Calculons à présent le projeté de y sur C .

On a $y = u(x, t) \approx u_j^n$.

On cherche à minimiser la valeur de y par rapport à $\frac{1}{2}$ et la maximiser par rapport à $-\frac{1}{2}$, d'après la définition de la contrainte.

On a donc la fonction de ce projeté : à $y : x_j \rightarrow \max \min x_j, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

Ensuite nous montrons que le problème du mouvement de la corde dans un tube revient à minimiser Q_n .

Q_n est convexe et son minimum existe et unique, d'après la partie 3 et 2. Le problème revient à résoudre : $\min Q_n(x)$.

Nous devons chercher la valeur du pas ρ qui fait converger la méthode du gradient projeté pour résoudre le problème en trouvant u^{n+2} .

Montrons que Q_n est elliptique et lipschitzienne.

- Elliptique

$$\begin{aligned}
 & \nabla Q_n x - \nabla Q_n y^T x - y \\
 &= P_2 x - P_1 u^{n+1} + P_0 u^n - P_2 y - P_1 u^{n+1} + P_0 u^{nT} (x - y) \\
 &= 2P_2^T P_2 x - y^T (x - y) \\
 &= 2P_2 x - y^2 \\
 &\geq 2 \min \alpha^2 x - y^2_2, \text{ avec } \alpha \in SpP2 \\
 &\geq ax - y^2_2
 \end{aligned}$$

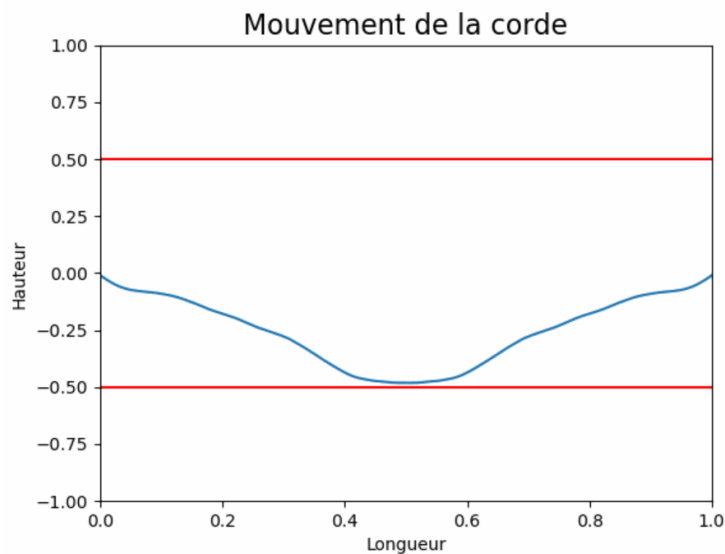
- Lipschitzienne

$$\begin{aligned}
 & \nabla Q_n x - \nabla Q_n y_2 \\
 &= 2P_2^T P_2 x - y_2 \\
 &\leq 2 \max \alpha x - y_2 \\
 &\leq bx - y_2
 \end{aligned}$$

Pour conclure le pas qui fait converger la méthode du gradient est :

$$0 < \rho < \frac{2a}{b^2} \Leftrightarrow 0 < \rho < \frac{4 \alpha_{min}^2}{4 \alpha_{max}} \Leftrightarrow 0 < \rho < \frac{\alpha_{min}^2}{\alpha_{max}}$$

Nous avons modélisé grâce à la méthode du gradient projeté le mouvement de la corde en lui imposant des contraintes. En effet, la corde ne devait pas sortir de l'intervalle $[-0.5, 0.5]$ sur l'axe des y. On obtient alors le mouvement d'une corde qui semble rebondir sur des parois.



Capture d'écran du mouvement de la corde avec contraintes

Nous avons testé cet algorithme avec différentes conditions initiales pour observer les conséquences de ces changements sur la trajectoire de la corde. Hormis $u_0(x)$ et $v_0(x)$, aucune condition n'a eu de modification exploitable. On obtenait la plupart du temps des ondes chaotiques et illisibles. Changer l'amplitude de u_0 et v_0 permet en revanche de changer la trajectoire de l'onde comme si on modifiait la force de départ qu'est appliqué à la corde.

La dernière cellule du code vous permet d'entrer les paramètres de $u_0(x)$ et $v_0(x)$ afin de changer leur amplitude et période et en observer le résultat.