Lucie MICHELET
Axel STREIFF

BE MA322

Champs gravitationnels autour d'une masse sphérique

M. COUFFIGNAL – M. EL MAHBOUBY

07.06.2022

Première partie : Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique

1. Nous savons que la matrice G se définie :

$$\boldsymbol{G} := \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

avec les fonctions A et B de la forme :

$$A(r) := c^2\left(1+\frac{K}{r}\right) \quad \text{et} \quad B(r) := \left(1+\frac{K}{r}\right)^{-1}$$

où : $K = -\frac{2GM}{c^2}$ avec : G la constante gravitationnelle, M la masse de l'objet (sphérique) considéré.

Nous pouvons alors en déduire que la matrice G n'est pas définie lorsqu'elle s'annule c'est-à-dire lorsque r vaut :

$$r = 0 \quad \text{et} \quad r = \frac{c^2}{2GM}$$

Nous allons ensuite calculer le déterminant de G :

$$\det(G) = -\,c^2\, r^4 \sin(\theta)^2$$

On en déduit que le déterminant de G est bien défini en r_s puisqu'il vaut en cette valeur $-c^2\, r_s^4 \sin(\theta)^2$ et non pas zéro.

Nous savons qu'un trou noir est un objet (sphérique) dont le rayon est inférieur à son rayon de Schwarzschild. Nous allons donc calculer le rayon de Schwarzschild du Soleil, de la Terre, de l'univers observable et de Sagittarius A*. Nous utilisons un tableur Excel pour nous simplifier les calculs :

Nom du corps	Masse (kg)	Rayon Schwarzschild (m)	Rayon (m)
Soleil	1,989E+30	2917,2	696340000
Terre	5,92E+24	0,008682667	6371000
Univers observable	1,5E+53	2,2E+26	4,4E+26
Sagitarius A*	8,26E+36	1,21E+10	22000000

$$r_s := \frac{2GM}{c^2}$$

$c = 3.10^8$ m/s

$G = 6{,}6.10^{-11}$

Nous avons comparé les rayons de Schwarzschild aux rayons de chaque astre pour savoir si l'on pouvait les qualifier de trou noir. Pour le Soleil, la Terre et l'univers observable, le rayon étant plus grand que le rayon de Schwarzschild, c'est sans surprise que l'on peut conclure que ces trois astres ne sont pas des trous noirs. En revanche nous n'arrivons pas à la même conclusion pour Sagittarius A*. En effet comme nous nous y attendions, le rayon de Schwarzschild de cet astre est plus grand que son rayon, ce qui signifie qu'il s'agit bien d'un trou noir. Sagittarius A* est un trou noir.

2. Pour la suite de ce projet, nous avons besoin de trouver l'expression de f(Y). On sait que,

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \dfrac{d^2x_0}{d\lambda^2} = -\dfrac{A'}{A}\dfrac{dx_0}{d\lambda}\dfrac{dr}{d\lambda} \\ \dfrac{d^2r}{d\lambda^2} = -\dfrac{A'}{2B}\left(\dfrac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \dfrac{B'}{2B}\left(\dfrac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \dfrac{r}{B}\left(\dfrac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \dfrac{r\sin(\theta)^2}{B}\left(\dfrac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \dfrac{d^2\theta}{d\lambda^2} = -\dfrac{2}{r}\dfrac{d\theta}{d\lambda}\dfrac{dr}{d\lambda} + \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\dfrac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \dfrac{d^2\phi}{d\lambda^2} = -\dfrac{2}{r}\dfrac{d\phi}{d\lambda}\dfrac{dr}{d\lambda} - 2\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\dfrac{d\theta}{d\lambda}\dfrac{d\phi}{d\lambda} \end{cases}$$

Suite à nos calculs nous avons conclu :

$$\text{Y0} = \begin{pmatrix} x0 \\ r \\ \theta \\ \varphi \\ \frac{dx0}{d\lambda} \\ \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d\theta}{d\lambda} \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} \end{pmatrix} \rightarrow \quad \text{Y1} = \begin{pmatrix} \frac{dx1}{d\lambda} \\ \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d\theta}{d\lambda} \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} \\ \frac{d^2x0}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2r}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} \\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \end{pmatrix}$$

On en conclue l'expression de f(Y) :

$$\text{f(Y)} = \begin{pmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ Y(2) \\ Y(3) \\ -\frac{A\prime(Y(1))}{A(Y(1))} * Y(4) * Y(5) \\ -\frac{A'(Y(1))}{2*B(Y(1))} * Y(4)^2 - \frac{B'(Y(1))}{2*B(Y(1))} * Y(5)^2 - \frac{Y(1)}{B(Y(1))} * Y(6)\&^2 + \frac{(Y(1))*\sin^2(Y(2))*Y(7)^2}{B(Y(1))} \\ \frac{-2}{Y(1)} * Y(6) * Y(5) + \sin\big(Y(2)\big) * \cos\big(Y(2)\big) * Y(7)^2 \\ \frac{-2}{Y(1)} * Y(7) * Y(5) - \frac{\cos\,(Y(2))}{\sin\,(Y(2))} * Y(6) * Y(7) \end{pmatrix}$$

3. Nous avons écrit un code python qui génère la matrice P qui donne les paramètres du photon grâce à l'algorithme de Runge-Kutta4 et donc de la fonction f calculé plus tôt. On en sort une matrice de taille (8,N)

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	10	9.80147	9.60478	9.41	9.2172	9.02644
2	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708
3	0	-0.013291	-0.0267635	-0.0405893	-0.054841	-0.0695684
4	0	0	0	0	0	0
5	-1.5	-1.48597	-1.47185	-1.45737	-1.4424	-1.4269
6	0	8.09146e-20	1.67085e-19	2.61268e-19	3.64974e-19	4.7955e-19
7	-0.1	-0.0994412	-0.101518	-0.104378	-0.107691	-0.111348

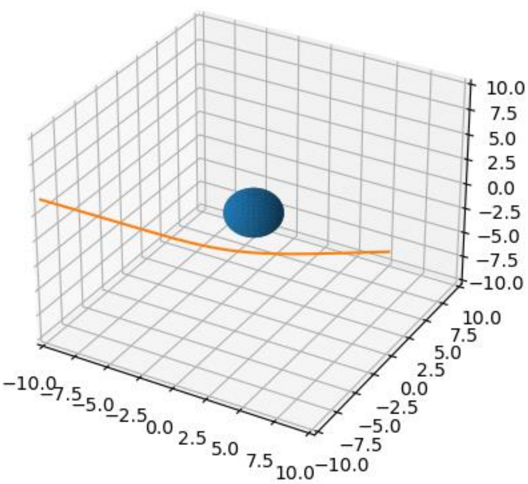
Capture d'écran des premières colonnes de la matrice P

4. Nous avons écrit une fonction Python qui permet de visualiser en 3D la trajectoire d'un photon. Nous testons notre programme avec les paramètres initiaux données :

$$\begin{cases} c = 1 \\ G = 1 \\ M = 1 \\ y_0 := \left(1, 10, \frac{\pi}{2}, 0, 0, -1.5, 0, -0.1\right)^T \\ h = 10^{-2}, itermax = 10^3 \end{cases}$$

Ce programme prend en entrée la matrice P calculé précédemment et il en récupère les données (r,θφ) qui sont les seuls dont nous ayons besoin pour calculer les coordonnées dans la base sphérique :

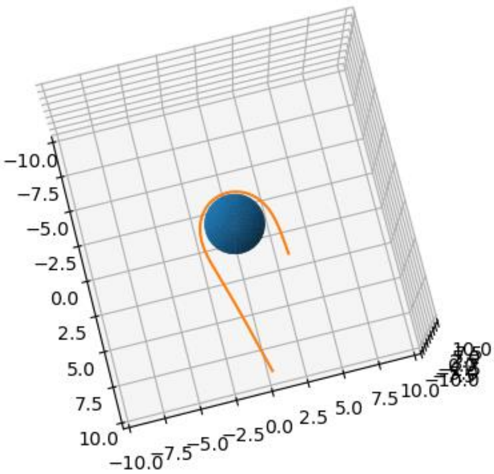
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique

Nous retrouvons bien un graphique similaire à l'exemple donné dans l'énoncer pour la trajectoire de ce photon.

5. Nous souhaitons maintenant montrer que nous pouvons changer la trajectoire du photon en modifiant la valeur de $\frac{d\varphi}{d\lambda}$:



Trajectoire d'un photon qui rebrousse chemin autour d'une masse sphérique

Pour obtenir ce résultat, nous avons progressivement modifié la valeur de $\frac{d\varphi}{d\lambda}$. Celle qui nous a permis d'avoir cette trajectoire est $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ = -0.038.

En augmentant le nombre d'itération max, on augmente la précision et nous sommes allés jusqu'à trouver une valeur de phi de -0.0365.

6. Application : déflexion de la trajectoire d'un photon (=rayon lumineux) passant à proximité du Soleil.

Nous normaliserons à partir de maintenant la masse solaire : $M_\odot := 1$ et la constante gravitationnelle : $G = 4\pi^2$

On déduit la valeur de la célérité en UA/an,

c (m/s)	c (UA/an)
3000000000	632415

Puis on recalcule les rayons de Schwarzschild de chacun des astres dans ces nouvelles unités :

Nom du corps	Masse (kg)	Masse/Soleil	Rayon Schwarzschild (m)	Rayon Schwarzschild (UA)
Soleil	1,989E+30	1	2917,2	1,97217E-10
Terre	5,92E+24	2,97637E-06	0,008682667	5,86992E-16
Univers observable	1,5E+53	7,54148E+22	2,2E+26	1,48731E+13
Sagittarius A*	8,26E+36	4,15E+06	1,21E+10	8,19E-04

Le rayon du soleil, 696 340 km, devient 0,0046547454 UA soit $4{,}6.10^{-3}$ UA.

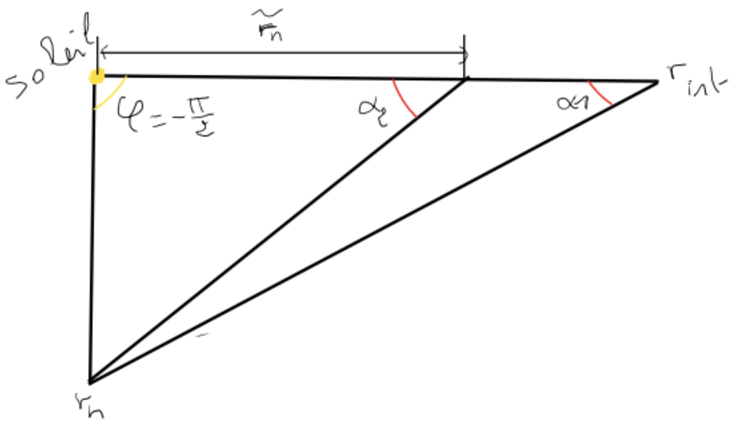
Nous avons alors recalculé la matrice P avec les paramètres dans ces nouvelles unités :

$$\begin{cases} c = \text{"valeur de la question précédente"} \\ G = 4\pi^2 \\ M = 1 \\ y_0 := \left(1, 0.1, \frac{\pi}{2}, 0, 0, -1, 0, -0.75\right)^T \\ h = 10^{-3}, itermax = 10^3 \end{cases}$$

Nous avons cherché dans la nouvelle matrice P, pour quelle valeur de r_n on trouve phi se rapprochant de -pi/2 c'est-à-dire environ -1,5. Nous avons déduit cette valeur à la huitième itération du 9. R_n = 0,0068.

5	6	7	8
1	1	1	1
0.0334141	0.0201061	0.00680402	-0.00649675
1.5708	1.5708	1.5708	1.5708
-0.0395071	-0.0446621	-0.0529507	5.02489
0	0	0	0
-0.99822	-0.99766	-0.996384	44.8263
5.83642e-18	1.46554e-17	6.66181e-17	4.15108e-13
-0.507213	0.145272	-2.36463	1915.44

D'après le schéma ci-dessous,



On calcule $\tan \alpha 1 = \frac{adjacent}{opposé} = \frac{-rn}{rinit}$ avec un signe – parce que rn est vers le bas. Donc :

$$\alpha 1 = \arctan \frac{-rn}{rinit}$$

Comme ici : $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. On suppose que le rayon lumineux vérifie l'équation de droite :

$$y = ax + b$$

avec a le coefficient directeur de la droite et b l'abscisse à l'origine. En posant dans ce plan :

$$\begin{cases} x := r\cos\phi \\ y := r\sin\phi \end{cases}$$

On a les dérivées de x et y :

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d(rcos\varphi)}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda}cos\varphi - r\frac{d\varphi}{d\lambda}sin\varphi$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{d(rsin\varphi)}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda}sin\varphi + r\frac{d\varphi}{d\lambda}cos\varphi$$

On cherche alors à déduire l'expression de a. On suppose que $\varphi = -\pi/2$:

$$\frac{dx}{d\lambda} = r_n\frac{d\varphi}{d\lambda}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\frac{dr}{d\lambda}$$

Or on sait que $\frac{dy}{d\lambda} = a\frac{dx}{d\lambda}$ donc on en déduit l'expression de a :

$$a = -\frac{\frac{dr}{d\lambda}}{r_n\frac{d\varphi}{d\lambda}}$$

On peut alors déduire la valeur de b :

$$b = y - ax$$

$$b = r_n \sin\varphi - a\, r_n \cos\varphi$$

on a toujours $\varphi = -\pi/2$, on obtient alors :

$$b = -r_n$$

Le point d'intersection avec les abscisses se trouve à $0 = ax + b$, c'est-à-dire pour $x = -b/a$, on notera ce point $\tilde{r}_n$:

$$\tilde{x} = \frac{-r_n * r_n * \frac{d\varphi}{d\lambda}}{\frac{dr}{d\lambda}}$$

$$\tilde{r}_n := \tilde{x} = -r_n^2\frac{\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}$$

On en déduit alors l'angle $\alpha 2$ de la même façon que le premier angle,

$$\alpha 2 = arctan\frac{adjacent}{opposé} = arctan\frac{-r_n}{\widetilde{r_n}} = \arctan\frac{-r_n * \frac{dr}{d\lambda}}{-r_n^2 * \frac{d\varphi}{d\lambda}} = \arctan\frac{\frac{dr}{d\lambda}}{r_n * \frac{d\varphi}{d\lambda}}$$

On obtient bien l'expression attendue :

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}{r_n\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}\right)$$

Nous avons donc calculé grâce à un programme python les valeurs de ces angles :

$$\begin{cases} \alpha 1 = -1{,}30 \\ \alpha 2 = 0{,}065 \end{cases}$$

Nous avons ensuite calculé leur différence en seconde d'arc :

$$E \approx 1{,}35$$

Cette valeur est du même ordre de grandeur que celle qu'avait trouvé Arthur Eddington :

$$1.61'' \pm 0.30$$

On en conclue que l'écart que nous avons calculé est cohérent.

Deuxième partie : Expression numérique de la relation entre φ et r

L'enjeu de cette deuxième grande partie est d'étudier le problème du calcul de la déflexion sous un autre angle en utilisant des méthodes d'intégration numériques qui nous ont été introduite cette année.

On commence donc par se consacrer à la méthode de Newton-Cotes à l'ordre 5.

1) Méthode de Newton-Cotes d'ordre 5

On utilise ici la méthode de Newton-Cotes à l'ordre 4 donc on a logiquement $l_i = l = 4$ pour tout i c'est-à-dire que les points échantillonnés ζ_{ij} sont régulièrement espacés dans l'intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$.

Une approche de la fonction f sur chaque $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ par son polynôme interpolateur de Lagrange aux points ζ_{ij} est alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=0}^{4} \omega_j f(\zeta_{ij})$$

Avec,

$$\omega_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \prod_{k \neq j} \frac{t - t_k}{t_j - t_k}\, dt \quad et\ t_k = -1 + \frac{k}{2}$$

Ici on a $k \in [\![0,4]\!]$.

Le but de cette partie est donc de déterminer les valeurs des coefficients ω_j.

1. On commence donc par effectuer un changement de variable sur l'intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$. La fonction f est ainsi considérée sur le nouvel intervalle $[-1,1]$ pour retrouver la formule de quadrature élémentaire.

Dans la méthode de Newton-Cotes :

$$\zeta_{ij} = \alpha_{i-1} + j\, \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{l}$$

Donc dans notre cas :

$$\zeta_{ij} = -1 + j\, \frac{1-(-1)}{4} = -1 + \frac{1}{2}j = t_j$$

On a ensuite :

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} f(x)dx = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} p_l(x)\, dx$$

Avec $p_l(t)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange dépendant du temps.

Ainsi,

$$p_l(t) = \sum_{j=0}^{4} f(t_j)L_j(t) \ \ avec\ L_j(t) = \prod_{k\neq j}^{4} \frac{t\ -\ t_k}{t_j - t_k}$$

Donc,

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} p_l(t)\, dt\ = 2\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_j(t)f(t_j)\, dt\ =\ 2\sum_{j=0}^{4} \omega_j f(t_j)$$

On revient ensuite à l'intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ et on obtient :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \big(1-(-1)\big)\sum_{j=0}^{4} \omega_j f(t_j)\ \Rightarrow \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} f(t)dt = (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=0}^{4} \omega_j f(t_j)$$

Finalement,

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} f(t)dt = (\alpha_i - \alpha_{i-1})\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_j(t)f(t_j)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} f(t)dt = (\alpha_i - \alpha_{i-1})\int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2} L_j(t)f(t_j)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} f(t)dt = (\alpha_i - \alpha_{i-1})\int_{-1}^{1} g(t)dt$$

Et donc :

$$g(t) = \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2} L_j(t)f(t_j)$$

2. On sait que $[\alpha, \beta]$ représente l'intervalle complet que l'on cherche à échantillonner en n points. On peut donc écrire :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i-1}} f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - \alpha_{i-1})\int_{-1}^{1} g(t)dt\right]$$

3. Calculer une approximation de $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ revient donc à calculer une approximation de $\int_{-1}^{1} g(t)dt$.

Commençons par calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange g aux points $t_k = -1 + \frac{k}{2}$ pour $k \in [\![0,4]\!]$:

$$\boldsymbol{t_0} = -1\ ;\ \boldsymbol{t_1} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2};\ \boldsymbol{t_2} = 0\ ;\ \boldsymbol{t_3} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2};\ \boldsymbol{t_4} = 1$$

On calcule le polynôme aux trois premiers points :

$$g_0(t) = \prod_{k\neq 0}^{4} \frac{t - t_k}{t_0 - t_k}$$

$$\Leftrightarrow g_0(t) = \frac{(t-(-1/2)) * \ (t-0) * \left(t-\frac{1}{2}\right) * (t-1)}{(t_0-(-1/2)) * \ (t_0-0) * \left(t_0-\frac{1}{2}\right) * (t_0-1)}$$

$$\Leftrightarrow g_0(t) = \frac{(t+1/2) * \ t * \left(t-\frac{1}{2}\right) * (t-1)}{(-1-(-1/2)) * (-1) * \left(-1-\frac{1}{2}\right) * (-1-1)}$$

$$\Leftrightarrow g_0 = \frac{t^4 - t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t}{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow g_0(t) = \frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t}$$

$$g_1(t) = \prod_{k\neq 1}^{4} \frac{t - t_k}{t_1 - t_k}$$

$$\Leftrightarrow g_1(t) = \frac{(t-(-1)) * \ (t-0) * \left(t-\frac{1}{2}\right) * (t-1)}{(t_1-(-1)) * \ (t_1-0) * \left(t_1-\frac{1}{2}\right) * (t_1-1)}$$

$$\Leftrightarrow g_1(t) = \frac{(t+1) * \ t * \left(t-\frac{1}{2}\right) * (t-1)}{\left(-\frac{1}{2}+1\right) * \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{2}-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow g_1(t) = \frac{t^4 - \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t}{-\frac{3}{8}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow g_1(t) = -\frac{8}{3}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{8}{3}t^2 - \frac{4}{3}t}$$

$$g_2\,(t) = \prod_{k\neq 2}^{4} \frac{t - t_k}{t_2 - t_k}$$

$$\Leftrightarrow g_2(t) = \frac{(t-(-1)) * \left(t-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) * \left(t-\frac{1}{2}\right) * (t-1)}{(t_2-(-1)) * \left(t_2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) * \left(t_2-\frac{1}{2}\right) * (t_2-1)}$$

$$\Leftrightarrow g_2(t) = \frac{(t+1) * t * \left(t - \frac{1}{2}\right) * (t-1)}{(0-(-1)) * \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) * \left(0 - \frac{1}{2}\right) * (0-1)}$$

$$\Leftrightarrow g_2(t) = \frac{t^4 - \frac{5}{4}t^2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow g_2(t) = 4t^4 - 5t^2 + 1}$$

Sachant que l'intervalle $[-1,1]$ est symétrique autour de 0 on a :

$$\begin{cases} t_{4-j} = -t_j \\ L_{4-j}(t) = L_j(-t) \\ \omega_{4-j} = \omega_j \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} L_{4-1}(t) = L_3(t) = L_1(-t) \\ L_{4-0}(t) = L_4(t) = L_0(-t) \\ L_{4-2}(t) = L_2(t) = L_2(-t) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} g_3(t) = g_1(-t) = \frac{8}{3}t^4 - \frac{4}{3}t^3 - \frac{8}{3}t^2 + \frac{4}{3}t \\ g_4(t) = g_0(-t) = -\frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t \end{cases}$$

On peut donc maintenant calculer les différents ω_j:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_0(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{18}t^3 - \frac{1}{12}t^2\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \omega_0 = \omega_4 = \frac{1}{2} * \frac{7}{45} = \frac{7}{90}}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_1(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(-\frac{8}{3}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{8}{3}t^2 - \frac{4}{3}t\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{8}{15}t^5 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{8}{9}t^3 - \frac{2}{3}t^2\right]_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{2} * \frac{32}{45} = \frac{16}{45}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g_2(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \omega_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (4t^4 - 5t^2 + 1)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \omega_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5}t^5 - \frac{5}{3}t^3 + t\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \omega_2 = \frac{1}{2} * \frac{14}{15} = \frac{2}{15}}$$

Ainsi, en remplaçant g par son polynôme de Lagrange on a :

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (g_0(t)f(\zeta_{i0}) + g_1(t)f(\zeta_{i1}) + g_2(t)f(\zeta_{i2}) + g_3(t)f(\zeta_{i3}) + g_4(t)f(\zeta_{i4}))dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} g(t)dt = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{6}t\right) f(\zeta_{i0}) + \left(-\frac{8}{3}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{8}{3}t^2 - \frac{4}{3}t\right) f(\zeta_{i1}) \right.$$
$$+ (4t^4 - 5t^2 + 1)f(\zeta_{i2}) + \left(\frac{8}{3}t^4 - \frac{4}{3}t^3 - \frac{8}{3}t^2 + \frac{4}{3}t\right) f(\zeta_{i3})$$
$$\left. + \left(-\frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t\right) f(\zeta_{i4})\right) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} g(t)dt = \sum_{j=0}^{4} \omega_j f(\zeta_{ij})$$

4. Si $f \in P_4$, alors on a le polynôme de Lagrange $p_4 = f$ et la méthode de Newton-Cotes de rang 4 est d'ordre $\geq$ 4.
   Ici l est pair, les formules sont donc encore exactes pour $f(x) = x^{l+1}$, et plus généralement pour $f \in P_{l+1}$ par linéarité.
   Ainsi, dans le cas où l est pair, l'ordre de NC4 est $l + 1$.

2) Application à la relativité générale

On reprend maintenant le problème de la première grande partie pour tenter de retrouver des relations entre les différentes variables pour ensuite le résoudre à l'aide de la méthode de Newton-Cotes étudiée plus haut.

1. On rappelle le problème :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \frac{d^2x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A}\frac{dx_0}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B}\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r\sin(\theta)^2}{B}\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} - 2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} \end{cases}$$

On pose maintenant les conditions : $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$

Celles-ci vont nous permettre de réécrire les équations sous la forme d'un nouveau problème (P') nous permettant de trouver les relations entre les différentes variables. Le nouveau problème s'écrit donc :

$$(P') : \begin{cases} \frac{d^2x_0}{d\lambda^2} = \frac{-A'}{A} * \frac{dx_0}{d\lambda} * \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{-A'}{2B}\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} * \frac{d\varphi}{d\lambda} * \frac{dr}{d\lambda} \end{cases}$$

2. On s'aide de la dernière ligne :

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} * \frac{d\varphi}{d\lambda} * \frac{dr}{d\lambda} \qquad \text{(E1)}$$

On repart de la relation qu'il faut démontrer et on remonte jusqu'à la relation de la dernière ligne pour prouver sa véracité :

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = h \ \text{(avec h une constante)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{h}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = \frac{d\left(\frac{h}{r^2}\right)}{dr} * \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = \frac{d\left(\frac{h}{r^2}\right)}{dr} * \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} * \frac{h}{r^2} * \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} * \frac{d\varphi}{d\lambda} * \frac{dr}{d\lambda}$$

On retrouve bien (E1) ce qui nous permet de démontrer la relation de départ entre r et φ.

3. On reprend maintenant la première ligne :

$$\frac{d^2x_0}{d\lambda^2} = \frac{-A'}{A} * \frac{dx_0}{d\lambda} * \frac{dr}{d\lambda} \qquad \text{(E2)}$$

Comme précédemment on part du premier terme de l'équation à démontrer :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A)\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)\right) + \frac{d}{d\lambda}(\ln(A))$$

Etant donné que A dépend de r :

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A)\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)\right) + \frac{d(\ln(A))}{dr} * \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A)\right) = \frac{\frac{d^2x_0}{d\lambda^2}}{\frac{dx_0}{d\lambda}} + \frac{d(\ln(A))}{dr} * \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A)\right) = -\frac{\frac{A'}{A} * \frac{dx_0}{d\lambda} * \frac{dr}{d\lambda}}{\frac{dx_0}{d\lambda}} + \frac{A'}{A} * \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A)\right) = 0}$$

De plus,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A)\right) = 0 \Leftrightarrow ln\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right) + \ln(A) = k1$$

$$\Leftrightarrow ln\left(A\frac{dx_0}{d\lambda}\right) = k1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow A\frac{dx_0}{d\lambda} = e^{k1} = k2 = k}$$

Avec $k2$ une constante.

On a donc trouvé une relation entre x_0 et r.

5. En nous basant sur les résultats précédents on peut maintenant simplifier la deuxième ligne du problème :

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{-A'}{2B}\left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{-A'}{2B}\left(\frac{k}{A}\right)^2 - \frac{B'}{2B}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B}\left(\frac{h}{r^2}\right)^2$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{-A'k^2}{2BA^2} - \frac{B'}{2B}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{Br^3}} \qquad (*)$$

6. En multipliant cette dernière équation par $2B\frac{dr}{d\lambda}$ on retrouve :

$$\left(2B\frac{dr}{d\lambda}\right)\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{dr}{d\lambda} * \frac{A'k^2}{A^2} - \frac{dr}{d\lambda} * B' * \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + 2\frac{dr}{d\lambda} * \frac{h^2}{r^3}$$

On souhaite donc réécrire (*) sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(B * \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2}{A}\right) = 0$$

Or,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{k^2}{A}\right)=\frac{d}{d\lambda}\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\right)+\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{k^2}{A}\right)$$

Sachant que B dépend de r :

$$\Leftrightarrow\frac{d}{d\lambda}\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{k^2}{A}\right)=\frac{d\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\right)}{dr}*\frac{dr}{d\lambda}+\frac{d\left(\frac{h^2}{r^2}\right)}{dr}*\frac{dr}{d\lambda}-\frac{d\left(\frac{k^2}{A}\right)}{dr}*\frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{d\lambda}\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{k^2}{A}\right)=\frac{d\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\right)}{d\lambda}*\frac{dr}{d\lambda}+\frac{d\left(\frac{h^2}{r^2}\right)}{d\lambda}*\frac{dr}{d\lambda}-\frac{d\left(\frac{k^2}{A}\right)}{d\lambda}*\frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{d\lambda}\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{k^2}{A}\right)=B'*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2*\frac{dr}{d\lambda}-\frac{2h^2}{r^3}*\frac{dr}{d\lambda}+\frac{A'k^2}{A^2}*\frac{dr}{d\lambda}$$

On retrouve l'équation (*) avec une inversion des signes. On peut donc bien écrire :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(B*\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{k^2}{A}\right)=0$$

Et ainsi :

$$B\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{h^2}{r^2}-\frac{k^2}{A}=m \qquad \text{(E3)}$$

Où m est une constante qu'on considèrera nulle dorénavant.

7. On peut à présent déterminer une relation entre r et φ :

On a tout d'abord à partir de (E3),

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2=\frac{m-\frac{h^2}{r^2}+\frac{k^2}{A}}{B}=\frac{m}{B}-\frac{h^2}{Br^2}+\frac{k^2}{BA}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow\frac{dr}{d\lambda}=\sqrt{\frac{m}{B}-\frac{h^2}{Br^2}+\frac{k^2}{BA}}}$$

Or,

$$\frac{d\phi}{dr}=\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\frac{\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)}$$

Ainsi,

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{\frac{h^2}{r^2}}{\sqrt{\frac{m-\frac{h^2}{r^2}+\frac{k^2}{A}}{B}}}=\frac{h^2}{r^2}*\sqrt{\frac{B}{m-\frac{h^2}{r^2}+\frac{k^2}{A}}}$$

Et comme $m=0$:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dr}=\frac{h^2}{r^2}*\sqrt{\frac{B}{\frac{k^2}{A}-\frac{h^2}{r^2}}}}$$

8. Il vient l'expression suivante de φ en fonction de r par intégration du résultat précédent à laquelle on ajoute la condition initiale $\varphi(r0)$ (ici la variable r devient Ψ dans l'intégrale pour ne pas confondre avec les bornes) :

$$\varphi(r)=\int_{r0}^{r}\frac{d\varphi}{d\Psi}\,d\Psi=\ \varphi(r0)+\int_{r0}^{r}\frac{h^2}{\Psi^2}*\sqrt{\frac{B(\Psi)}{\frac{k^2}{A(\Psi)}-\frac{h^2}{\Psi^2}}}\,d\Psi$$

9. Soit r0 la plus petite distance entre le centre de masse et le photon. On pose alors les conditions initiales : $\varphi(r0)=0$ et $\frac{dr}{d\varphi}(r0)=0$

Alors,

$$\frac{dr}{d\varphi}=\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{h^2}{r^2}*\sqrt{\frac{B}{\frac{k^2}{A}-\frac{h^2}{r^2}}}}=\frac{r^2\sqrt{\frac{k^2}{A}-\frac{h^2}{r^2}}}{h\sqrt{B}}$$

Donc,

$$\frac{dr}{d\varphi}(r0)=\frac{r0^2\sqrt{\frac{k^2}{A(r0)}-\frac{h^2}{r0^2}}}{h\sqrt{B(r0)}}$$

Et,

$$\frac{dr}{d\varphi}(r0)=0\Leftrightarrow\frac{r0^2}{h\sqrt{B(r0)}}=0\ ou\ \sqrt{\frac{k^2}{A(r0)}-\frac{h^2}{r0^2}}=0$$

Finalement,

$$\boxed{\sqrt{\frac{k^2}{A(r0)}-\frac{h^2}{r0^2}}=0\Leftrightarrow\frac{k^2}{A(r0)}=\frac{h^2}{r0^2}\Leftrightarrow\frac{k^2}{h^2}=\frac{A(r0)}{r0^2}}$$

10. A partir des résultats précédents et des conditions initiales on a pour finir :

$$\begin{cases}\varphi(r0)=0\\ h=\ \Psi\\ k^2=\dfrac{A(r0)h^2}{r0^2}\end{cases}$$

$$\varphi(r)=\int_{r0}^{r}\frac{d\varphi}{d\Psi}\,d\Psi=\int_{r0}^{r}\frac{h^2}{\Psi^2}*\sqrt{\frac{B(\Psi)}{\frac{k^2}{A(\Psi)}-\frac{h^2}{\Psi^2}}}\,d\Psi\ =\int_{r0}^{r}\frac{\Psi^2}{\Psi^2}*\sqrt{\frac{B(\Psi)}{\frac{h^2A(r0)}{r0^2A(\Psi)}-\frac{\Psi^2}{\Psi^2}}}\,d\Psi$$

CCL : Pour la fonction $\varphi(r)$ on a donc en conclusion :

$$\boxed{\varphi(r) = \int_{r0}^{r} \frac{1}{\Psi} * \sqrt{\frac{B(\Psi)}{\frac{\Psi^2 A(r0)}{r0^2 A(\Psi)} - 1}} d\Psi}$$

12. Pour de grande valeur de r :
- A tend vers c^2
- B tend vers 1

Donc pour φ on se rapproche de la formule suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{r}^2} * \frac{1}{\sqrt{\frac{A(r0)}{r0^2 c^2} - 1}}$$

Et,

$$\boxed{\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\mathrm{r}^2} * \frac{1}{\sqrt{\frac{A(r0)}{r0^2 c^2} - 1}} = 0}$$