

BE : CHAMPS GRAVITATIONNEL AUTOUR D'UNE MASSE SPHÉRIQUE.

Par groupe de 4 étudiants maximum, vous devez rédiger un rapport détaillé dans lequel vous répondrez aux questions du sujet et plus globalement au problème demandé. La qualité de rédaction ainsi que tous les compléments que vous apporterez (réflexions, analyses des réponses, etc...) seront fortement pris en compte. Toutes les fonctions programmées le seront en Python et seront abondamment commentées. Le rendu du projet se fera sous la forme d'un fichier .zip contenant le rapport ainsi que l'ensemble des programmes.

Au cœur de la théorie d'Einstein (relativité générale) on trouve le fait que les forces gravitationnelles sont des forces d'inerties i.e. des pseudo-forces (**principe d'équivalence**) et par suite le fait que les lois de la physique (=les équations de la théorie) doivent être invariantes par changement généraux de coordonnées (**principe de covariance**). En 1916, Karl Schwarzschild (1873-1916) donne la première solution aux équations d'Einstein dans le cas particulier d'une masse sphérique qui n'est pas en rotation et dont on supposera la masse invariante par rapport au temps. Nous nous placerons dans ce cadre restreint.

Nous allons nous intéresser aux équations donnant la trajectoire (=géodésique) d'un photon dans un champs gravitationnel sphérique. En résolvant les équations d'Einstein, Schwarzschild démontre qu'un intervalle infinitésimal d'espace-temps (=métrique) est donné par l'expression :

$$ds^2 = \vec{dx}^T \mathbf{G} \vec{dx}$$

avec : $\vec{dx} := (cdt, dr, d\theta, d\phi)^T$ et où (r, θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques attachées à la masse sphérique produisant le champs gravitationnel, c vitesse de la lumière et \mathbf{G} la matrice :

$$\mathbf{G} := \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

avec les fonctions A et B de la forme :

$$A(r) := c^2 \left(1 + \frac{K}{r} \right) \quad \text{et} \quad B(r) := \left(1 + \frac{K}{r} \right)^{-1}$$

où : $K = -\frac{2GM}{c^2}$ avec : G la constante gravitationnelle, M la masse de l'objet (sphérique) considéré.

Notons : $\vec{x}(\lambda) := (x_0(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))^T$ les coordonnées paramétriques d'un photon dans l'espace-temps. On peut montrer que les composantes de $\vec{x}(\lambda)$ vérifient :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dx_0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r \sin(\theta)^2}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \end{cases}$$

Première partie

: Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique

1. Pour quelles valeurs de r la matrice \mathbf{G} n'est pas définie ? On appelle :

$$r_s := \frac{2GM}{c^2}$$

le **rayon de Schwarzschild**. Montrer que néanmoins le déterminant de \mathbf{G} : $\det(\mathbf{G})$, est bien définie en $r = r_s$ ¹. Calculer le rayon de Schwarzschild pour les corps suivant : le Soleil, la Terre et de l'univers observable. On appelle **trou noir** un objet (sphérique) dont le rayon est inférieur à son rayon de Schwarzschild. Quel est le rayon de Schwarzschild de Sagittarius A*.

2. Montrer que (\mathcal{P}) s'écrit sous la forme :

$$Y' = f(Y)$$

avec $Y \in \mathbb{R}^8$.

3. Rédiger une fonction Python `Traj_photon(y0,h,itermax)` qui résout le problème (\mathcal{P}) avec la méthode de Runge-Kutta 4 et :

- $Y_0 := \left(x_0, r, \theta, \phi, \frac{dx_0}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}, \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^T$: les données initiales.
- $h \in \mathbb{R}_*^+$: le pas de la méthode,
- $itermax$: le nombre d'itération maximal.

On renverra une matrice P de taille : 8 lignes et N colonnes avec N le nombre d'itération de l'algorithme de Runge-Kutta 4. On imposera comme critère d'arrêt (en plus d' $itermax$) que : $r > r_s$. Il est conseillé de déclarer les variables, c, M, G, K en variables globales. On notera dans la suite pour les itérations de Runge-Kutta :

$$Y_n := \left(x_n, r_n, \theta_n, \phi_n, \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right)_n, \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)_n, \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)_n, \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)_n \right)^T$$

4. Écrire une fonction `Visualisation(P,rs,lim)` qui permet de visualiser en 3D la trajectoire d'un photon de paramètres initiaux donnés par y_0 . Cette fonction dépend en entrée de P la matrice calculée à la question précédente, r_s le rayon de Schwarzschild et lim un réel positif qui permet de fixer les tailles des axes. On pourra utiliser pour tracer les commandes suivantes :

```
ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.set_xlim(-lim,lim)
ax.set_ylim(-lim,lim)
ax.set_zlim(-lim,lim)
```

On tracera uniquement les paramètres $(r, \theta, \phi)^T$ en les convertissant en coordonnées cartésiennes. Vous pourrez tester votre programme sur les données (fictives) suivantes :

$$\begin{cases} c = 1 \\ G = 1 \\ M = 1 \\ y_0 := \left(1, 10, \frac{\pi}{2}, 0, 0, -1.5, 0, -0.1 \right)^T \\ h = 10^{-2}, itermax = 10^3 \end{cases}$$

1. On dit que $r = r_s$ n'est pas une singularité physique mais une singularité du système de coordonnées. En réalité il existe un système de coordonnées (maximal) qui ne possède pas cette singularité : les coordonnées de Kruskal-Szekeres.

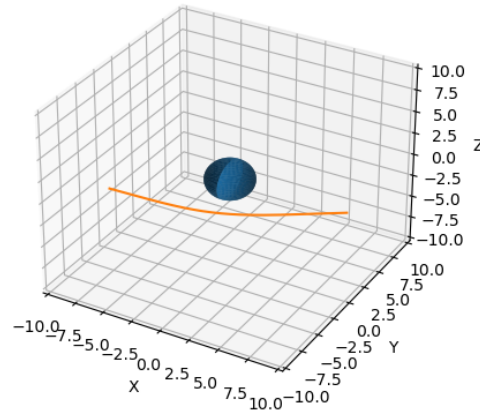


FIGURE 1 – Trajectoire d'un photon autour d'une masse sphérique

5. Sur les données fictives, en ne modifiant que la valeur initiale de $\frac{d\phi}{d\lambda}$ ($= -0.1$ on rappelle dans le cas précédent), montrer graphiquement que le photon peut « rebrousser » chemin à partir de certains angles.
6. **Application : déflexion de la trajectoire d'un photon (=rayon lumineux) passant à proximité du Soleil.** Nous allons utiliser le programme précédent afin de déterminer l'écart entre le modèle gravitationnel newtonien : les photons vont en ligne droite, et le cas relativiste : le Soleil courbe l'espace-temps donc courbe la trajectoire des photons passant à proximité. On normalisera en masse solaire i.e. :

$$M_{\odot} := 1$$

On rappelle que dans ce cas : $G = 4\pi^2$.

- (a) Exprimer c la vitesse de la lumière en UA/an (ou UA est l'unité astronomique). En déduire la valeur de r_S dans ces unités. Déterminer de même r_0 le rayon du Soleil en UA.
- (b) Calculer la matrice P (sortie de `Traj_photon(y0,h,itermax)`)
- (c)

$$\begin{cases} c = \text{"valeur de la question précédente"} \\ G = 4\pi^2 \\ M = 1 \\ y_0 := \left(1, 0.1, \frac{\pi}{2}, 0, 0, -1, 0, -0.75\right)^T \\ h = 10^{-3}, \text{itermax} = 10^3 \end{cases}$$

- (d) Notons $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{\text{itermax}})$ la ligne 4 de la matrice P (=valeurs successive de ϕ). Quel est l'indice n (=numéro de colonne de P) tel que ϕ_n s'approche le plus de $-\frac{\pi}{2}$? Donner le r_n correspondant.
- (e) En supposant que la trajectoire du rayon lumineux est une ligne droite on obtient un triangle rectangle dont l'angle droit est situé au centre du Soleil et dont deux des côtés sont $r_{\text{init}} := 0.1$ et r_n . Justifier que :

$$\alpha_1 := \arctan\left(\frac{-r_n}{r_{\text{init}}}\right)$$

est la valeur de l'angle entre l'axe des x (coordonnées cartésiennes) et le rayon lumineux considéré comme une ligne droite.

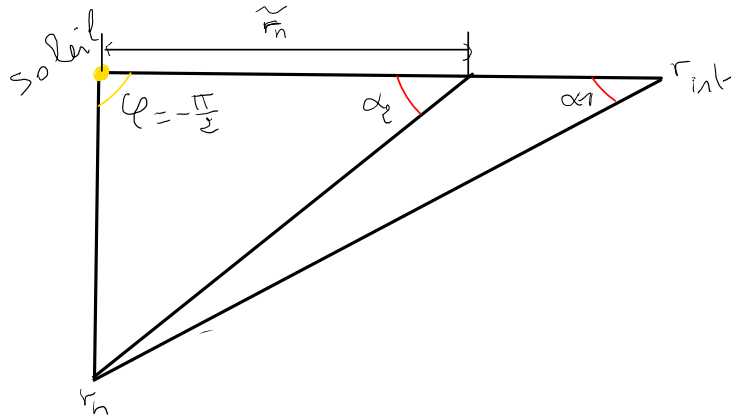


FIGURE 2 – Schéma de la situation

- (f) Comme ici : $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. On suppose que le rayon lumineux vérifie l'équation de droite :

$$y = ax + b$$

avec a le coefficient directeur de la droite et b l'abscisse à l'origine. En posant dans ce plan :

$$\begin{cases} x := r \cos \phi \\ y := r \sin \phi \end{cases}$$

- i. Donner l'expression de $\frac{dx}{d\lambda}$ et $\frac{dy}{d\lambda}$ en fonction de $\frac{dr}{d\lambda}$ et de $\frac{d\phi}{d\lambda}$ et de ϕ . En déduire une expression de a en fonction de $\frac{dr}{d\lambda}$ et de $\frac{d\phi}{d\lambda}$ et de ϕ .
- ii. On suppose que $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Montrer que l'on obtient une approximation de a par :

$$a \simeq -\frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}{r_n \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}$$

- iii. Montrer que : $b \simeq -r_n$.
- iv. On cherche le point d'intersection avec l'axe des abscisse i.e. $0 = a\tilde{x} + b$. Montrer que ce point vérifie :

$$\tilde{r}_n := \tilde{x} = -r_n^2 \frac{\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}$$

En déduire l'expression de l'angle :

$$\alpha_2 = \arctan \left(\frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_n}{r_n \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)_n} \right)$$

- v. Comparer les valeurs de α_1 et α_2 . Donner l'écart $\epsilon := \alpha_1 - \alpha_2$ en seconde d'arc. En 1919, Arthur Eddington (1882-1944) mesure se décalage à la faveur d'une éclipse totale, et trouve (avec les moyens de l'époque) en valeur absolue :

$$1.61'' \pm 0.30$$

Cette expérience est une des premières confirmations de la relativité générale.

Deuxième partie

: Expression numérique de la relation entre ϕ et r .

Nous allons aborder d'un autre point de vue le problème du calcul de la déflexion. Nous allons utiliser des méthodes d'intégrations numériques. Commençons par étudier la méthode Newton-Cotes d'ordre 5.

1 Méthode de Newton-cotes d'ordre 5

Dans la méthode de Newton-Cotes de rang 4, on choisit $l_i = 4$ pour tout i , et les points $\xi_{i,j}$ régulièrement espacés dans $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$. On approche ensuite f sur chaque $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ par son polynôme interpolateur de Lagrange aux points $\xi_{i,j}$. On obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \sum_{j=0}^4 w_j f(\xi_{i,j})$$

avec

$$w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \prod_{k \neq j} \frac{t - t_k}{t_i - t_k} dt \quad \text{et } t_k = -1 + \frac{k}{2}$$

pour $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. Notre but est de calculer les coefficients w_j .

1. En effectuant un changement de variable convenable, montrer que :

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx = (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \int_{-1}^1 g(t) dt$$

où g est une fonction à préciser.

2. En déduire que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left[(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \int_{-1}^1 g(t) dt \right]$$

3. Ainsi pour calculer une approximation de $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, il suffit de calculer une approximation de $\int_{-1}^1 g(t) dt$.

- (a) Calculer le polynôme de Lagrange g aux point $t_k = -1 + \frac{k}{2}$ pour $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
- (b) En remplaçant g par son polynôme de Lagrange, montrer que :

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \sum_{j=0}^4 w_j f(\xi_{i,j})$$

avec

$$\begin{aligned} w_0 &= w_4 = \frac{7}{90} \\ w_1 &= w_3 = \frac{16}{45} \\ w_2 &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

4. Montrer que la méthode de Newton-Cotes de rang 4 est d'ordre 5.

5. Rédiger une fonction Python `Newton_Cotes4(f,a,b,n)` qui calcule la valeur approchée d'une intégrale grâce à la méthode de Newton-Cotes de rang 4 où f est la fonction à intégrer, a et b les bornes de l'intégrale et n la taille de la partition de l'intervalle $[a, b]$. Tester votre fonction sur l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

Pour différentes valeurs $n = 50, 100, \dots, 450, 500$ calculer l'erreur $E(f)$ relativement à la valeur exacte pour la fonction f , et on tracera en échelle logarithmique la courbe $E(f)$ en fonction de n . À partir de la pente des courbes précédemment tracées, retrouver l'ordre de cette méthode.

2 Application à la relativité générale.

On reprend les notations et les équations de l'introduction :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \frac{d^2 x_0}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dx_0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'}{2B} \left(\frac{dx_0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r}{B} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r \sin(\theta)^2}{B} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} \end{cases}$$

On se placera dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. On notera (\mathcal{P}') ce système. Ces conditions ne modifient pas le degré de généralité de ce que nous allons démontrer.

1. Réécrire les équations (\mathcal{P}) dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. Nous allons utiliser cette forme simplifiée (\mathcal{P}') pour déterminer des relations entre les variables.
2. En utilisant la dernière ligne montrer que nous avons la relation suivante :

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} := h$$

avec h une constante.

3. En utilisant la première ligne justifier que :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\ln \left(\frac{dx_0}{d\lambda} \right) + \ln(A) \right) = 0$$

En déduire que :

$$A \frac{dx_0}{d\lambda} = k$$

où k est une constante.

4. En utilisant la partie 1 et les applications numériques, vérifier que l'on retrouve numériquement ces relations.
5. Justifier que la seconde ligne de (\mathcal{P}') s'écrit alors :

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{A'k^2}{2BA^2} - \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{Br^3} \quad (*)$$

6. En multipliant l'équation précédente par $2B \frac{dr}{d\lambda}$ montrer que l'équation $(*)$ se réécrit :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(B \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2}{A} \right) = 0$$

En déduire que l'équation suivante est constante :

$$B \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{k^2}{A} = m$$

où m est une constante. On peut choisir un système de coordonnées (=la dépendance en λ) tel que : $m = 0$. On prendra cette valeur dans la suite.

7. En déduire alors une expression de $\frac{dr}{d\lambda}$ (on prendra la version positive) puis en utilisant le fait que :

$$\frac{d\phi}{dr} = \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)}$$

montrer que l'on a l'expression de $\frac{d\phi}{dr}$ en fonction de r :

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{h}{r^2} \sqrt{\frac{B}{\frac{k^2}{A} - \frac{h^2}{r^2}}}$$

8. Enfin en déduire que :

$$\phi(r) = \phi(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{h}{\psi^2} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{k^2}{A(\psi)} - \frac{h^2}{\psi^2}}} d\psi$$

9. Soit r_0 la plus petite distance entre le centre de masse et le photon. On impose que $\phi(r_0) = 0$ et par suite comme c'est un minimum :

$$\frac{dr}{d\phi}(r_0) = 0$$

En déduire en utilisant les questions précédentes (indice : lien avec $\frac{d\phi}{dr}$?) que :

$$\frac{k^2}{h^2} = \frac{A(r_0)}{r_0^2}$$

10. En se plaçant dans le cas des hypothèses précédentes démontrer que :

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{\psi^2 A(r_0)}{r_0^2 A(\psi)} - 1}} d\psi$$

11. En considérant la fonction :

$$f(\psi) := \begin{cases} 0 & \psi = r_0 \\ \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{B(\psi)}{\frac{\psi^2 A(r_0)}{r_0^2 A(\psi)} - 1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Rédiger un programme `Int_phi(r,r0,K,c,h,k,N)` qui calcule $\phi(r)$ en utilisant la méthode de Newton-Cotes de rang 4. Tracer le cas d'un rayon de lumière passant à proximité du Soleil :

$$\begin{cases} G = 4\pi^2 & c = \text{"valeur de c en UA/an"} \\ r_0 = \text{"rayon du Soleil en UA"} & M = 1 \\ r \in r_0 + n & n \in \llbracket r_0, 50r_0 \rrbracket \end{cases}$$

12. Combien vaut la valeur de ϕ quand r est grand ? Bonus : analyser ce résultat.