MASTER 2, 1ère session, Markov I.

Sorbonne Université, le 15 novembre 2022.
Durée 3 heures; notes de cours autorisées.

Exercice I. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ qui est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Montrer, en le justifiant soigneusement, qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ que l'on calculera explictement tel que $\mathbf{P}$-p.s. on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{(1+|X_n|)(2+|X_n|)}}{\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} 2^{-|X_n]}} = \ell$$

Exercice II. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables $(\xi_k)_{k\geq 1}$, à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, indépendantes et de même loi notée ν: $\nu(i) = \mathbf{P}(\xi_k = i)$, $i \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On suppose également que sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ est également définie une variable $S_0 : \Omega :\to \mathbb{N}$, qui est indépendante de $(\xi_k)_{k\geq 1}$. On pose $S_k = S_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k$, pour tout $k \geq 1$. On note $[\![n, \infty[\![$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n et on note $I = \{S_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ l'image de la marche $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \inf\big\{\ell - n \ :\ \ell \in I \cap [\![n, \infty[\![\ \big\}\,.$$

II-1) Faire un dessin pour comprendre X_n. Calculer X_0 en fonction des $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

II-2) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on précisera la matrice de transition en fonction de ν. (On ne demande pas de justifier les calculs de probabilités conditionnelles avec beaucoup de rigueur).

II-3) On suppose qu'il existe une infinité d'entiers i tels que $\nu(i) > 0$. Montrer que la chaîne est irréductible. La chaîne est-elle réversible ? (*Indication: attention !*)

II-4) Quelles sont les périodes possible pour ce genre de chaînes ?

II-5) Montrer que 0 est récurrent.

II-6) Expliquer pourquoi il y a une unique mesure invariante π telle que $\pi(0) = 42$. La calculer explicitement. Montrer que la chaîne est récurrente positive si et seulement si $\sum_{i\geq 2} i\nu(i)$ est une quantité finie.

Exercice III. Soient M, N deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère un graphe $\mathbf{K}_{M,N} = (\mathbf{S}, \mathbf{A})$ possédant $M + N$ sommets qui sont de deux types: il y a M sommets rouges notés $r_1, \ldots, r_M$, et N sommets bleus notés $b_1, \ldots, b_N$; toutes les arêtes possibles dont les extrémités ont deux couleurs distinctes sont présentes dans le graphe, c'est-à-dire que

$$\mathbf{S} = \big\{r_1, \ldots, r_M, b_1, \ldots, b_N\big\} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \big\{\{r_i, b_j\}\,;\ 1\leq i\leq M,\ 1\leq j\leq N\big\}$$

On met le même poids sur chaque arête, poids égal à 1.

III-1) Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (p(s,s'))_{s,s'\in\mathbf{S}}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathscr{M}_1(\mathbf{S}))$, une chaîne de Markov qui est la marche aléatoire simple sur le graphe $\mathbf{K}_{M,N}$ (simple signifie associée à des poids tous égaux à 1.)

III-1a) Rappeler Q en fonction des données du problème. Est-ce que la marche est irréductible ? Quelle est sa période ?

III-1b) Est-elle réversible ? Trouver une mesure Q-invariante.

III-1c) Pour tout $s \in \mathbf{S}$, on pose

$$T_s = \inf\{n \geq 0 : X_n = s\} \quad \text{et} \quad T_s^+ = \inf\{n \geq 1 : X_n = s\} ,$$

avec la convention habituelle que $\inf \emptyset = \infty$. Calculer $\mathbf{E}_s[T_s^+]$ en fonction de la couleur du sommet s. (Justifier soigneusement sa réponse).

III-2) On note $\mathbb{T}(\mathbf{K}_{M,N})$ l'ensemble des arbres couvrants de $\mathbf{G}$. On rappelle qu'un arbre couvrant $T \in \mathbb{T}(\mathbf{G})$ est simplement donné par l'ensemble de ses arêtes. On introduit l'ensemble aléatoire d'arêtes

$$\mathcal{T} = \big\{ \{X_{T_s - 1}, s\}; s \in \mathbf{S}\backslash\{X_0\} \big\} ,$$

qui est appelé *l'arbre de premier passage de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III-2a) Soit $s \in \mathbf{S}$. Trouver un résultat du cours qui montre que $\mathbf{P}_s$-p.s. $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathbf{K}_{M,N})$. Que peut-on dire de remarquable sur la loi de $\mathcal{T}$ sous $\mathbf{P}_s$?

III-2b) On suppose que $M = N$. Trouver un chemin $(s_0, s_1, \ldots, s_{2N-2}, s_{2N})$ tel que d'une part s_i et s_{i+1} soient adjacents pour tous $0 \leq i < 2$, et d'autre par $\{s_0, \ldots, s_{2N-1}\} = \mathbf{S}$.

III-2c) En déduire $\#\mathbb{T}(\mathbf{K}_{N,N})$.

III-2d) On suppose que $M < N$. Calculer $\#\mathbb{T}(\mathbf{K}_{M,N})$ par un raisonnement similaire à celui des deux questions précédentes.

III-2e) Calculer $\#\mathbb{T}(\mathbf{K}_{M,N})$ en général.

Exercice IV. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité sur lequel sont définies les variables indépendantes X_0, Y_k et Z_k, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que X_0 est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose ensuite que les Y_k suivent une loi exponentielle de paramètre $\theta \in]0, \infty[$ et on suppose enfin que les Z_k sont des variables géométriques de paramètre $1/2$, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(Z_k = j) = 2^{-j-1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ et Pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$N_t = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) \quad \text{et} \quad X_t = \max(X_0, \max_{1\leq k\leq N_t} Z_k)$$

avec la convention que $X_t = X_0$ si $N_t = 0$. On rappelle que $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le processus de Poisson linéaire d'intensité θ et qu'il possède les propriétés suivantes.

- $N_0 = 0$ p.s. et pour tout réel $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre θ.
- Pour tous $t, s \in \mathbb{R}_+$, $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de $(N_r)_{r\in[0,t]}$ et a même loi que N_s.

IV-1) Montrer que $\mathbf{P}$-p.s. $t \mapsto X_t$ est croissant et tend vers ∞.

IV-2) Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbf{P}(X_0 = i) > 0$. Soit j un entier tel que $j > i$. On pose $f_t(i,j) = \mathbf{P}(X_t = j | X_0 = i)$ Calculer $f_t(i,j)$ en fonction de j, t et θ. Est-ce que ce résultat dépend de i ?

IV-3) Montrer que $(X_t)_{\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Markovien à valeurs dans $\mathbb{N}$.

IV-4) Préciser le générateur de $(X_t)_{\in\mathbb{R}_+}$.

IV-5) Il s'agit d'une question intermédiaire. Sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, on se donne une suite de variable $(V_k)_{k\geq 1}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi notée ν. On suppose que $\nu(0) = 0$. On suppose également que sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ est également définie une variable $S_0 : \Omega :\to \mathbb{N}$, qui est indépendante de $(V_k)_{k\geq 1}$. On pose $S_k = S_0 + V_1 + \ldots + V_k$, pour tout $k \geq 1$. On se donne également un processus de Poisson $(N'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'intensité 1 indépendant de $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $(S_{N'_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Markovien à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on calculera le générateur. On appelle $(S_{N'_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ un *marche aléatoire de loi de saut* ν.

IV-6) Soit $v : \mathbb{N} \to [a, \infty[$ où a est un réel strictement positif. On pose $A_t = \int_0^t v(X_s)\, ds$ et $\tau_t = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : A_s > t\}$ avec la convention que $\inf \emptyset = \infty$.

IV-6a) Montrer que $\mathbf{P}$-p.s. $\tau_t < \infty$.

IV-6b) On pose $X'_t = X_{\tau_t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On rappelle que $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Markov. Trouver v pour que X' soit une marche aléatoire dont on précisera la loi de saut.

Exercice V. On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$, l'ensemble des réels strictement positifs. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la loi μ_β sur $\mathbb{R}_+^*$ muni des Boréliens, par $\mu_\beta(dt) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)t^{-\beta}\ell(dt)$, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On rappelle la définition de la fonction Γ d'Euler sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'intégrale $\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}\ell(dt)$. Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on se donne $\Pi_\beta : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+^*}$, un nuage Poissonnien d'intensité μ_β. On pose $S_\beta = \sum_{X\in\Pi_\beta} X$, qui est une variable $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$.

V-1) Pour quels $\beta \in \mathbb{R}^*$ a-t-on $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) = 1$? Que vaut $\mathbf{P}(S_\beta < \infty)$ si $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) < 1$?

V-2) On suppose que $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, calculer $\mathbf{E}[\exp(-\lambda S_\beta)]$ en fonction de λ, β et $\Gamma(2 - \beta)$.

V-3) On fixe $\beta = 3/2$. Trouver $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continue strictement décroissante bijective telle que $f(\Pi_{3/2})$ soit un nuage Poissonnien d'intensité ℓ sur $\mathbb{R}_+^*$.

V-4) On fixe $\beta = 3/2$. Montrer qu'il existe une suite de variables $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que $\mathbf{P}$-presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n > X_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ et $\Pi_{3/2} = \{X_n \,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer la fonction de répartition de X_n (sous la forme d'une somme finie de fonctions élémentaires).

V-5) On fixe $\beta = 3/2$ et on reprend les notations de la question précédente. Trouver la densité de X_n. Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives c et C, que l'on précisera, telles que $\lim_{n\to\infty} n^c X_n = C$ presque sûrement.