



# **PROCESSUS MARKOVIENS**



Thomas DUQUESNE

2015-2016



# Table des matières

<b>I Généralités sur les processus.</b>	<b>1</b>
I.1 Noyaux. . . . .	1
I.1.a Généralités. . . . .	1
I.1.b Hypothèses sur les espace mesurables considérés. . . . .	5
I.1.c Désintégration des couplages, applications. . . . .	7
I.2 Processus : définitions, construction. . . . .	12
I.2.a Processus : définitions, premières propriétés. . . . .	12
I.2.b Loi d'un processus. . . . .	15
I.2.c Construction de processus : le théorème d'extension de Kolmogorov. . . . .	16
I.2.d Processus sur $\mathbb{R}_+$ , filtrations, régularité, modification, indistinguabilité et mesurabilité progressive. . . . .	18
I.3 Temps d'arrêt. . . . .	24
I.3.a Définitions, premières propriétés. . . . .	24
I.3.b Existence de temps d'arrêt, complétion des filtrations. . . . .	28
I.4 Régularisation des processus. Martingales à temps continu. . . . .	35
I.4.a Résultats déterministes sur les fonctions régularisables. . . . .	35
I.4.b Martingales en temps continu : définition, régularisation. . . . .	38
<b>II Généralités sur les processus Markoviens.</b>	<b>43</b>
II.1 Noyaux Markoviens, semi-groupes associés. . . . .	43
II.2 Processus de Markov, propriété de Markov simple. . . . .	50
II.2.a Définitions élémentaires des processus de Markov. . . . .	51
II.2.b Construction des Processus de Markov sur l'espace canonique. . . . .	54
II.2.c Définition complète des processus de Markov et propriété de Markov (faible). . . . .	55
II.3 Propriété de Markov forte. . . . .	58
II.3.a Définition et propriété de Markov forte. . . . .	58
II.3.b Un critère impliquant la propriété de Markov forte. . . . .	60
II.4 Propriétés de Markov relativement aux filtrations augmentées. . . . .	61
II.4.a Markov faible relativement aux filtrations augmentées, loi du 0-1 de Blumenthal. . . . .	61
II.4.b Markov forte pour les fonctionnelles augmentées. Quasi-continuité à gauche. . . . .	66
II.5 Régularité des processus de Markov. . . . .	70
II.5.a Processus de Hunt. . . . .	70
II.5.b Durée d'un processus sous-Markovien, processus standard. . . . .	72
II.6 Régularisation des processus de Feller. . . . .	76
II.6.a Énoncé, résumé des résultats applicables, construction canonique. . . . .	76

II.6.b	Préliminaires sur les fonctions sur-médianes.	78
II.6.c	Preuve du théorème II.6.1 de régularisation des processus de Feller.	81
<b>III Processus de Feller : résolvantes et générateur.</b>		<b>85</b>
III.1	Théorie de Hille-Yosida.	85
III.1.a	Quelques points de calcul intégral et différentiel dans les Banach.	85
III.1.b	Semi-groupes, contractivité, forte continuité : définitions et premières propriétés.	88
III.1.c	Résolvantes, contractivité, forte continuité : définitions et premières propriétés.	91
III.1.d	Des résolvantes aux semi-groupes.	94
III.1.e	Générateur infinitésimaux.	97
III.1.f	Des générateurs aux semi-groupes et aux résolvantes.	100
III.2	Applications aux semi-groupes de Feller-Dynkin.	104
III.2.a	Forte continuité des semi-groupes de Feller-Dynkin.	104
III.2.b	Principe du maximum.	106
III.2.c	Application au mouvement Brownien.	109
III.3	Formule de Dynkin, opérateur caractéristique.	113
III.3.a	Formule de Dynkin.	113
III.3.b	Opérateur caractéristique.	114
III.4	Quelques applications aux diffusions.	116
<b>IV Nuages de Poisson.</b>		<b>121</b>
IV.1	Processus de Poisson linéaire homogène.	121
IV.1.a	Événements rares et loi de Poisson, lois exponentielles, statistiques d'ordre.	121
IV.1.b	Une heuristique.	128
IV.1.c	Construction des processus Poisson homogènes sur $\mathbb{R}_+$ .	129
IV.2	Généralités sur les nuages de points.	132
IV.2.a	Premières définitions.	132
IV.2.b	Loi et indépendance de nuages aléatoires.	134
IV.2.c	Mesurabilité de certaines opérations sur les nuages de points.	136
IV.2.d	Intersections et unions de nuages aléatoires.	139
IV.3	Nuages Poissonniens.	140
IV.3.a	Définition, premières propriétés.	140
IV.3.b	Construction.	145
IV.4	Outils de calculs.	149
IV.4.a	Formules de Palm.	149
IV.4.b	Formules exponentielles.	152
IV.5	Nuages Poissonniens sur $\mathbb{R}_+ \times E$ .	155
IV.5.a	Premières propriétés.	155
IV.5.b	Une loi des grands nombres.	159
IV.5.c	Étiquetage poissonnien de tableaux cohérents par extraction spatiale.	161
IV.6	Processus ponctuels de Poisson.	170
IV.6.a	Définitions et formule de compensation.	170
IV.6.b	Processus ponctuels régénératifs : le théorème de Greenwood-Pitman.	176

<b>V Processus de Lévy.</b>	<b>181</b>
V.1 Définitions et lois infiniment divisibles. . . . .	181
V.1.a Définitions des processus de Lévy, premières propriétés. . . . .	181
V.1.b Lois infiniment divisibles, semi-groupes de convolution et processus de Lévy. . . . .	182
V.2 Structure des processus de Lévy. . . . .	184
V.2.a Caractérisation des processus de Lévy continus. . . . .	184
V.2.b Décomposition des processus de Lévy, formule de Lévy Khintchine. . . . .	189
V.3 Quelques propriétés. Cas spécifiques. . . . .	198
V.3.a Variation totale des trajectoires. . . . .	198
V.3.b Subordonateurs . . . . .	201
V.3.c Processus sans saut négatif. . . . .	210
<b>VI Temps locaux et excursions des processus de Markov.</b>	<b>213</b>
VI.1 Construction du temps local, propriétés fondamentales des excursions. . . . .	213
VI.1.a Propriétés de l'ensemble des temps de passage en $x_0$ . . . . .	216
VI.1.b Construction du temps local, excursions. . . . .	221
VI.1.c Preuve du lemme VI.1.16. . . . .	232
VI.1.d Caractérisation et propriétés du temps local et son inverse. . . . .	236
VI.1.e Indexation mesurable des excursions, formule de compensation. . . . .	240



# Chapitre I

## Généralités sur les processus.

Le *Chapitre I* rassemble des résultats sur les processus en général ; il est conseillé de commencer la lecture de ce polycopié par le *Chapitre II*, quitte à vérifier les détails des notions auxquelles il fait appel dans le *Chapitre I*, qui est une sorte d'annexe technique. Ce premier chapitre comporte une copieuse section sur les temps d'arrêt : le lecteur peut consulter le livre d'Ethier & Kurtz [?] (Chapter 2) pour plus de détails. Sur le théorème du "Début" : voir Rogers & Williams [?], Chapter II, Section 5, subsection 75-76 ; sur ce point technique nous renvoyons également au premier volume de Dellacherie & Meyer [?]. Sur la régularisation des martingales, nous renvoyons également à l'ouvrage de Rogers & Williams [?] (Chapter IV, Section 5) ou bien aux généralités de l'ouvrage de Dellacherie & Meyer [?] et au volume de ces auteurs consacré aux martingales [?].

### Brève bibliographie.

---

DELLACHERIE, C., AND MEYER, P.-A. *Probabilités et potentiel*. Hermann, Paris, 1975. Chapitres I à IV, Édition entièrement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1372.

DELLACHERIE, C., AND MEYER, P.-A. *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*, revised ed., vol. 1385 of *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Hermann, Paris, 1980. Théorie des martingales.

ETHIER, S., AND KURTZ, T. *Markov Processes : Characterization and Convergence*. Wiley, 1986.

ROGERS, L. C. G., AND WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.

---

### I.1 Noyaux.

La notion de noyau généralise celle de probabilités de transition pour les chaînes de Markov. Elle joue un rôle fondamental dans la théorie des processus de Markov dont la loi est caractérisée par leurs noyaux. Par ailleurs les noyaux permettent des constructions probabilistes intéressantes telles que loi conditionnelles.

#### I.1.a Généralités.

**Définition I.1.1** Un noyau de sous-probabilités de l'espace mesurable  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers l'espace mesurable  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ , est une famille  $p = (p(x, dy); x \in E_1)$  satisfaisant les propriétés suivantes.

- (a) Pour chaque  $x \in E_1$ ,  $p(x, dy) : \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, 1]$  est une mesure positive telle que  $p(x, E_2) \leq 1$ .  
(b) Pour tout  $B \in \mathcal{E}_2$ , la fonction  $x \in E_1 \mapsto p(x, B) \in \mathbb{R}_+$  est  $\mathcal{E}_1$ -mesurable.

Si de plus,  $p$  satisfait  $p(x, E_1) = 1$ ,  $x \in E_1$ ,  $p$  est appelé *noyau de probabilités*.  $\square$

**Lemme I.1.2** Soit  $p$ , un noyau de sous-probabilités de  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ . Soit  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction qui est  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -mesurable. Alors la fonction

$$x \in E_1 \longmapsto \int_{E_2} p(x, dy) g(x, y) \text{ est } \mathcal{E}_1\text{-mesurable.} \quad (\text{I.1})$$

Ce résultat reste valable si  $g$  est à valeurs complexes et est  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -mesurable bornée.

**Preuve :** il s'agit d'un argument de routine utilisant le théorème ?? de classe monotone fonctionnelle, page ???. On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty]$  qui sont  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -mesurables et qui satisfont (I.1). Il est clair que c'est un espace vectoriel. On note  $\mathcal{P} := \{A_1 \times A_2; A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2\}$  qui est un pi-système engendrant par définition ?? (page ???) de la tribu  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ . Soit  $C = A_1 \times A_2 \in \mathcal{P}$ . On remarque que  $\int_{E_2} p(x, dy) \mathbf{1}_C(x, y) = \mathbf{1}_{A_1}(x) p(x, A_2)$ . La propriété (b) de la définition des noyaux implique que  $\mathbf{1}_C \in \mathcal{H}$ . Par ailleurs, le théorème de convergence monotone implique que  $\mathcal{H}$  satisfait l'hypothèse (c) du théorème ?? de classe monotone fonctionnelle. Ce théorème s'applique donc et permet de conclure. Si  $g$  bornée, on applique le cas positif à ses parties positives et négatives, ce qui entraîne facilement le résultat : les détails sont laissés au lecteur. ■

**Définition I.1.3 (Produit de noyaux)** Soit  $p$ , un noyau de sous-probabilités de  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ . Soit  $q$ , un noyau de sous-probabilités de  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  vers  $(E_3, \mathcal{E}_3)$ . Soit  $\mu : \mathcal{E}_1 \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure positive.

(a) On pose

$$\forall x \in E_1, \forall B \in \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3, \quad p \otimes q(x, B) = \int_{E_2} p(x, dy) \left( \int_{E_3} q(y, dz) \mathbf{1}_B(y, z) \right) \quad (\text{I.2})$$

Alors  $p \otimes q$  est un noyau de sous-probabilités de  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers  $(E_2 \times E_3, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$  appelé *produit du noyau p avec le noyau q*.

(b) On pose

$$\forall B \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \quad \mu \otimes p(B) = \int_{E_1} \mu(dx) \left( \int_{E_2} p(x, dy) \mathbf{1}_B(x, y) \right). \quad (\text{I.3})$$

Alors  $\mu \otimes p : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure positive appelée produit de  $\mu$  avec  $p$ .  $\square$

Justifions les définitions précédentes : le lemme I.1.2 montre que  $f : y \in E_2 \mapsto \int_{E_3} q(y, dz) \mathbf{1}_B(y, z)$  est  $\mathcal{E}_2$ -mesurable, ce qui montre que (I.2). Ce même lemme implique également que  $x \mapsto p \otimes q(B) = \int_{E_1} p(x, dy) f(y)$  est  $\mathcal{E}_1$ -mesurable, ce qui prouve la propriété (b) de la définition I.1.1 des noyaux. Soient  $B_n \in \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des ensembles deux-à-deux disjoints ; on pose  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  ; le théorème d'interversion série-intégrale positif appliqué deux fois implique que pour tout  $x \in E_1$ ,

$$\begin{aligned} (p \otimes q)(x, B) &= \int_{E_2} p(x, dy) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_3} q(y, dz) \mathbf{1}_{B_n}(y, z) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_2} p(x, dy) \left( \int_{E_3} q(y, dz) \mathbf{1}_{B_n}(y, z) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p \otimes q(x, B_n), \end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout  $x \in E_1$ ,  $p \otimes q(x, \cdot) : \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3 \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure positive. Il est ensuite clair que c'est une sous-probabilité, ce qui montre que  $p \otimes q$  satisfait la propriété (a) de la définition I.1.1 des noyaux. La justification de la définition d'une mesure avec un noyau est similaire : nous laissons les détails au lecteur.

**Remarque I.1.4** Avec les notations de la définition I.1.3, on observe facilement que Si  $p$  et  $q$  sont des noyaux de probabilités, alors il en est de même pour  $p \otimes q$ . On observe également que  $\mu \otimes p(E_1 \times E_2) \leq \mu(E_1)$  et si  $p$  est un noyau de probabilités, on a même  $\mu \otimes p(E_1 \times E_2) = \mu(E_1)$ .  $\square$

Avec les hypothèses et les notations de la définition I.1.3, on déduit de (I.2) par un argument de classe monotone (laissé au lecteur) que pour toute fonction  $g : E_2 \times E_3 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}_3$ -mesurable :

$$\forall x \in E_1, \quad \int_{E_2 \times E_3} p \otimes q(x, dydz) f(y, z) = \int_{E_2} p(x, dy) \left( \int_{E_3} q(y, dz) f(y, z) \right). \quad (\text{I.4})$$

De même on déduit de (I.3) que pour toute fonction  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ -mesurable :

$$\int_{E_1 \times E_2} \mu \otimes p(dxdy) g(x, y) = \int_{E_1} \mu(dx) \left( \int_{E_2} p(x, dy) g(x, y) \right). \quad (\text{I.5})$$

Soient  $(E_k, \mathcal{E}_k)$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , des espaces mesurables. Pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , soit  $p_k$  un noyau de probabilités de  $(E_{k-1}, \mathcal{E}_{k-1})$  vers  $(E_k, \mathcal{E}_k)$ . On identifie  $(E_1 \times E_2) \times E_3$  avec  $E_1 \times (E_2 \times E_3)$ , que l'on note simplement  $E_1 \times E_2 \times E_3$ . Cela entraîne que  $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 \otimes (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$  et on vérifie facilement qu'alors

$$(p_1 \otimes p_2) \otimes p_3 = p_1 \otimes (p_2 \otimes p_3). \quad (\text{I.6})$$

Autrement dit, le produit de noyaux est associatif et on notera simplement  $p_1 \otimes p_2 \otimes p_3$ .

Soit  $(E_1, \mathcal{E}_1)$ ,  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ , deux espaces mesurables. On introduit ensuite les fonctions  $\pi_1 : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1$  et  $\pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow E_2$  par

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2, \quad \pi_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Les fonctions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont les *projections canoniques*. On rappelle que  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  est la plus petite tribu rendant mesurable  $\pi_1$  et  $\pi_2$  :

$$\sigma(\pi_1, \pi_2) = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2.$$

Cela implique notamment que si  $(E_0, \mathcal{E}_0)$  est un espace mesurable et si  $f = (f_1, f_2) : E_0 \rightarrow E_1 \times E_2$ , est une fonction, alors  $f$  est  $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ -mesurable ssi  $f_1$  est  $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ -mesurable et  $f_2$  est  $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_2)$ -mesurable.

**Définition I.1.5** On reprend les notations précédentes. Soit  $m : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure positive. La première marginale de  $m$  est la mesure image de  $m$  sur par  $\pi_1$ . De même, la seconde marginale de  $m$  est la mesure image de  $m$  sur par  $\pi_2$ . Si on les note respectivement  $\mu$  et  $\nu$ , on a

$$\forall A \in \mathcal{E}_1, \quad \forall B \in \mathcal{E}_2, \quad \mu(A) = m(A \times E_2) \quad \text{et} \quad \nu(B) = m(E_1 \times B).$$

On utilise la notation  $\mu = \underline{m}$  et  $\nu = \overline{m}$ .  $\square$

**Définition I.1.6 (Composition de noyaux)** Soit  $p$ , un noyau de sous-probabilités de  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ . Soit  $q$ , un noyau de sous-probabilités de  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  vers  $(E_3, \mathcal{E}_3)$ . Soit  $\mu : E \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure positive.

- (a) Pour tout  $x \in E_1$ , on note  $pq(x, dz)$  la mesure sur  $E_3$  qui est la seconde marginale  $\overline{p \otimes q(x, \cdot)}$  de  $p \otimes q(x, \cdot)$ , c'est-à-dire

$$\forall x \in E_1, \forall A_3 \in \mathcal{E}_3, \quad pq(x, A_3) = p \otimes q(x, E_2 \times A_3) = \int_{E_2} p(x, dy) q(y, A_3). \quad (\text{I.7})$$

Alors,  $pq$  est un noyau de sous-probabilités de  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers  $(E_3, \mathcal{E}_3)$  que est appelé la *composition de p avec q*.

- (b) On note  $\mu p(dy)$  la seconde marginale  $\overline{\mu \otimes p}$ , c'est-à-dire

$$\forall A_2 \in \mathcal{E}_2, \quad \mu p(A_2) = \int_{E_1} \mu(dx) p(x, A_2). \quad (\text{I.8})$$

Alors  $\mu p : \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure positive appelée *composition de μ avec p*.  $\square$

Le fait que  $p \otimes q$  est un noyau implique que  $x \in E_1 \mapsto p \otimes q(x, E_2 \times A_3)$  est  $\mathcal{E}_1$ -mesurable, ce qui est la propriété (b) de la définition des noyaux, seul point à justifier dans la définition précédente.

**Remarque I.1.7** Avec les notations de la définition précédente, on observe facilement que  $pq$  est un noyau de probabilités dès que  $p$  et  $q$  le sont. De même on voit que  $\mu p(E_2) \leq \mu(E_1)$  avec égalité si  $p$  est un noyau de probabilités.  $\square$

**Propriétés élémentaires.** Les preuves sont laissées en exercice.

- (a) Avec les hypothèses et les notations de la définition I.1.6, on déduit de (I.7) par un argument de classe monotone (laissé au lecteur) que pour toute fonction  $f : E_1 \times E_3 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_3$ -mesurable :

$$\forall x \in E_1, \quad \int_{E_3} pq(x, dz) f(x, z) = \int_{E_2} p(x, dy) \left( \int_{E_3} q(y, dz) f(x, z) \right). \quad (\text{I.9})$$

De même on déduit de (I.8) que pour toute fonction  $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}_2$ -mesurable :

$$\int_{E_2} \mu p(dy) f(y) = \int_{E_1} \mu(dx) \left( \int_{E_2} p(x, dy) f(y) \right). \quad (\text{I.10})$$

- (b) Soient  $(E_k, \mathcal{E}_k)$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , des espaces mesurables. Pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , soit  $q_k$  un noyau de probabilités de  $(E_{k-1}, \mathcal{E}_{k-1})$  vers  $(E_k, \mathcal{E}_k)$ . On vérifie que

$$q_1(q_2 \otimes q_3) = (q_1 q_2) \otimes q_3 \quad (\text{I.11})$$

- (c) On montre également que

$$\forall x \in E_0, \forall A \in \mathcal{E}_1, \forall B \in \mathcal{E}_3, \quad q_1 \otimes q_2 \otimes q_3(x, A \times E_2 \times B) = q_1 \otimes (q_2 q_3)(x, A \times B). \quad (\text{I.12})$$

- (d) Concluons cette section par une généralisation pour  $n$  noyaux de (I.12) qui sera utilisée dans le chapitre sur les processus de Markov. Si on dispose de  $n$  noyaux  $p_1, \dots, p_n$  de sous-probabilités, on définit récursivement  $p_1 \otimes \dots \otimes p_n$  par exemple par

$$p_1 \otimes \dots \otimes p_{k+1} := (p_1 \otimes \dots \otimes p_k) \otimes p_{k+1}, \quad 1 \leq k < n.$$

**Lemme I.1.8** Soient  $(E_k, \mathcal{E}_k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , des espaces mesurables. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $p_k$  un noyau de probabilités de  $(E_{k-1}, \mathcal{E}_{k-1})$  vers  $(E_k, \mathcal{E}_k)$ . Alors, pour tous  $A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , on a

$$\begin{aligned} p_1 \otimes p_2 \otimes \dots \otimes p_n (x, A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times E_k \times A_{k+1} \times \dots \times A_n) \\ = p_1 \otimes \dots \otimes (p_k p_{k+1}) \otimes \dots \otimes p_n (x, A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

**Preuve :** on note  $u$  le premier membre de l'égalité et on pose  $A = A_1 \times \dots \times A_{k-1}$  et  $B = A_{k+1} \times \dots \times A_n$ . En utilisant l'associativité du produit des noyaux et appliquant (I.12) à  $q_1 = p_1 \otimes \dots \otimes p_{k-1}$ ,  $q_2 = p_k$  et  $q_3 = p_{k+1} \otimes \dots \otimes p_n$ , on obtient

$$u = (p_1 \otimes \dots \otimes p_{k-1}) \otimes (p_k (p_{k+1} \otimes \dots \otimes p_n))(x, A \times B).$$

On applique ensuite (I.11) à  $q_1 = p_k$ ,  $q_2 = p_{k+1}$  et  $q_3 = p_{k+2} \otimes \dots \otimes p_n$ , on obtient,

$$p_k (p_{k+1} \otimes \dots \otimes p_n) = (p_k p_{k+1}) \otimes p_{k+2} \otimes \dots \otimes p_n$$

ce qui permet de conclure. ■

### I.1.b Hypothèses sur les espaces mesurables considérés.

Nous définissons quelques hypothèses sur les espaces sur lesquels sont définis les noyaux ou les mesures considérés dans ce cours. Nous commençons par des hypothèses de mesurabilité simples. Nous renvoyons le lecteur à la section ?? pour plus de détails et des preuves de ce qui est rappelé ci-dessous. On rappelle d'abord la définition suivante.

**Définition I.1.9 (Isomorphisme d'espaces mesurables)** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$ , deux espaces mesurables. Ils sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection  $\phi : E \rightarrow E'$  qui est  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable et telle que sa réciproque  $\phi^{-1} : E' \rightarrow E$  soit  $(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ -mesurable. □

Une telle fonction  $\phi$  est un *isomorphisme d'espaces mesurables* et l'application  $B \in \mathcal{E} \mapsto \phi(B) \in \mathcal{E}'$  est une bijection de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}'$ .

**Définition I.1.10** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. On introduit les notions suivantes.

- (a)  $(E, \mathcal{E})$  contient les singletons si  $\{x\} \in \mathcal{E}$  pour tout  $x \in E$ .
- (b)  $(E, \mathcal{E})$  est dit *diagonal* si  $\Delta \in \mathcal{E}^{\otimes 2}$ , où  $\Delta = \{(x, x); x \in E\}$  est la diagonale de  $E^2$ .
- (c)  $(E, \mathcal{E})$  est dit *mesurable séparable* s'il existe  $A_n \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , engendant  $\mathcal{E} : \mathcal{E} = \sigma(\{A_n; n \in \mathbb{N}\})$ .
- (d)  $(E, \mathcal{E})$  est dit *mesurable séparé* si pour tous  $x, y \in E$  distincts, il existe  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $x \in A$  et  $y \in E \setminus A$ . □

Le théorème ??, page ??, montre d'une part que

$$(E, \mathcal{E}) \text{ séparable et séparé} \implies (E, \mathcal{E}) \text{ mesurable diagonal} \implies (E, \mathcal{E}) \text{ contient les singletons.}$$

Le théorème ??, page ??, montre également le fait suivant :

Soit  $(E, \mathcal{E})$ , espace mesurable. Il est séparable et séparé si et seulement s'il existe  $X \subset \mathbb{R}$  (pas nécessairement Borélien), tel que  $(E, \mathcal{E})$  est isomorphe à  $(X, \mathcal{B}(X))$ , où  $\mathcal{B}(X)$  est la tribu trace sur  $X$  des Boréliens de  $\mathbb{R}$  (voir la définition ?? et le lemme ??, page ??, pour cette notion).

On rappelle ensuite la définition d'espace mesurable régulier.

**Définition I.1.11** (*Espace mesurable régulier*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Il est dit *régulier* s'il existe  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $(E, \mathcal{E})$  et  $(C, \mathcal{B}(C))$  soient isomorphes.  $\square$

On rappelle le théorème suivant (prouvé à la section ??).

**Théorème I.1.12** Soit  $(E, d)$ , un espace métrique séparable complet. Soit  $A \in \mathcal{B}(E)$ . Alors il existe  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $(A, \mathcal{B}(A))$  et  $(C, \mathcal{B}(C))$  soient isomorphes. Autrement dit, tout Borélien d'un espace Polonais muni de sa tribu Borélienne trace est un espace mesurable régulier.

Le théorème d'isomorphisme de Borel affirme le résultat suivant, plus fort.

*Si  $(E, d)$  est un espace métrique séparable et complet et si  $A \in \mathcal{B}(E)$  n'est pas dénombrable, alors  $(A, \mathcal{B}(A))$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .*

Sa preuve est difficile. Le théorème I.1.12, moins précis mais de preuve facile, est largement suffisant pour les applications. Les hypothèses sur les espaces considérés dans la suite sont pour plupart plus restrictives. Rappelons les définitions suivantes.

**Définition I.1.13** (*Espace Polonais, espace LCBD*) Soit  $E$ , un espace muni d'une topologie  $\mathcal{T}$ .

- (a)  $E$  est un espace métrisable séparable s'il existe une distance  $d$  sur  $E$  générant la topologie  $\mathcal{T}$  et telle que  $(E, d)$  soit séparable (c'est-à-dire admette une suite dense).
- (b)  $E$  est dit *polonais* s'il existe une distance  $d$  sur  $E$  générant la topologie  $\mathcal{T}$  et telle que  $(E, d)$  soit séparable complet.
- (c)  $E$  est un espace *localement compact à base dénombrable* (abrégé systématiquement en *LCBD*) si la topologie  $\mathcal{T}$  admet une base dénombrable d'ouverts d'adhérence compacte (voir la définition ?? page ?? (base, base dénombrable), la définition ?? page ?? (localement compact) et le lemme ??, page ??).  $\square$

On rappelle le résultat standard suivant.

**Proposition I.1.14** Soient  $E$  et  $E'$ , des espaces métrisables séparables. Alors  $E \times E'$ , muni de la topologie produit, est également métrisable et séparable et on a

$$\mathcal{B}(E \times E') = \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E').$$

Voir la proposition ?? et sa preuve.

On rappelle également un résultat concernant la métrisabilité des espaces LCBD. Ce résultat est prouvé à la section ??, page ??; il est une conséquence du théorème d'Urysohn sur la métrisabilité des espaces compacts à base dénombrable (théorème ??, page ??) et un théorème de compactification à des espaces localement compacts (proposition ??, page ??).

**Théorème I.1.15** Soit  $(E, \mathcal{T})$ , un espace LCBD. Soit  $\partial \notin E$ . On pose  $E_\partial = E \cup \{\partial\}$ . Alors il existe une distance  $d$  sur  $E_\partial$ , telle que :

- (a)  $(E_\partial, d)$  est un espace métrique compact (donc séparable complet),
- (b) la topologie induite par  $d$  sur  $E$  est  $\mathcal{T}$ .

Dans la suite du cours, on résume cela en disant que  $(E_\partial, d)$  est un "compactifié habituel" de  $E$ .

**Remarque I.1.16** Lorsque l'espace  $E$  est déjà compact à base dénombrable, il est métrisable et il y a une ambiguïté dans le terme "compactifié" : on précise que dans le cas où  $E$  est compact, l'on définit le "compactifié habituel" de  $E$  en ajoutant un point isolé, car ce point  $\partial$  joue le rôle particulier d'un point d'absorption pour les processus de Markov, rôle qui est indépendant d'une compactification.  $\square$

### I.1.c Désintégration des couplages, applications.

On rappelle brièvement la notion de mesure image et le théorème de transfert.

**Lemme I.1.17** Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$ , un espace mesuré. Soit  $(E', \mathcal{E}')$ , un espace mesurable. Soit  $f : E \rightarrow E'$ , une application  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable. On définit  $\nu : \mathcal{E}' \rightarrow [0, \infty]$  par

$$\forall B \in \mathcal{E}', \quad \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Alors  $\nu$  est une mesure positive sur  $(E', \mathcal{E}')$  qui est appelée la **mesure image de  $\mu$  par  $f$** . Elle est parfois notée  $\nu = \mu \circ f^{-1}$ .

**Preuve :** soient  $B_n \in \mathcal{E}'$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des ensembles deux-à-deux disjoints. On remarque que les ensembles  $f^{-1}(B_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont également deux-à-deux disjoints et dans  $\mathcal{E}$ . D'autre part,  $f^{-1}(\bigcup B_n) = \bigcup f^{-1}(B_n)$ . La sigma additivité de  $\mu$  entraîne alors

$$\nu\left(\bigcup B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup f^{-1}(B_n)\right) = \sum \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum \nu(B_n).$$

Donc  $\nu$  est sigma additive et il est clair que  $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ . Cela montre que  $\nu$  est une mesure positive.  $\blacksquare$

**Théorème I.1.18 (Changement de variable abstrait ou Transfert)** Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$ , un espace mesuré. Soit  $(E', \mathcal{E}')$ , un espace mesurable. Soit  $f : E \rightarrow E'$ , une application  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable. On note  $\nu$  la mesure image de  $\mu$  par  $f$ . Alors, pour toute fonction  $h \in \mathcal{L}^1(E', \mathcal{E}', \nu)$ ,

$$\int_{E'} h(y) \nu(dy) = \int_E h(f(x)) \mu(dx). \quad (\text{I.13})$$

Ce résultat est également vrai pour toute fonction  $h : E' \rightarrow [0, \infty]$  qui est  $\mathcal{E}'$ -mesurable.

**Preuve :** on considère d'abord le cas où  $h = \mathbf{1}_B$ , avec  $B \in \mathcal{E}'$ . Alors, on remarque que  $\mathbf{1}_B \circ f = \mathbf{1}_{f^{-1}(B)}$ , ce qui entraîne bien (I.13) pour les fonctions indicatrices, par définition de la mesure image. Soit  $h : E' \rightarrow [0, \infty]$ , une application  $\mathcal{E}'$ -mesurable. Le lemme ?? page ?? implique l'existence de  $B_n \in \mathcal{E}'$  et  $c_n \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \mathbf{1}_{B_n}$ . L'interversion série/intégrale positive implique alors que

$$\begin{aligned} \int_{E'} h d\nu &= \int_{E'} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \mathbf{1}_{B_n} \right) d\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \int_{E'} \mathbf{1}_{B_n} d\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \int_E \mathbf{1}_{B_n}(f(x)) d\mu(x) \\ &= \int_E \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \mathbf{1}_{B_n}(f(x)) \right) d\mu(x) = \int_E h \circ f d\mu. \end{aligned}$$

On passe au cas des fonctions réelles  $\nu$ -intégrables en considérant leur partie positive et leur partie négative.  $\blacksquare$

**Définition I.1.19** (*Couplage*) Soient  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ , deux espaces mesurables. Soient  $\mu : \mathcal{E}_1 \rightarrow [0, \infty]$ , et  $\nu : \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty]$ , deux mesures positives. Un *couplage de*  $(\mu, \nu)$  est une mesure positive  $m : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, \infty]$  telle que la première marginale de  $m$  soit  $\mu$  et sa seconde soit  $\nu : \mu = \underline{m}$  et  $\nu = \overline{m}$ .  $\square$

Dans la suite on se restreint aux mesures finies. Si  $m$  est un couplage de  $\mu$  et  $\nu$ , mesure finies, alors  $m$  est une mesure finie et on a

$$\mu(E_1) = m(E_1 \times E_2) = \nu(E_2).$$

Donc deux mesures qui peuvent être couplées sont nécessairement de même masse. On peut interpréter un couplage comme un transport d'une masse répartie selon  $\mu$  dans l'espace  $E_1$  sur un espace  $E_2$  selon une nouvelle répartition  $\nu : m(dxdy)$  représente alors la quantité de masse située en  $x \in E_1$  à mettre en  $y \in E_2$ . Le but de cette section est de montrer le théorème de représentation des couplages suivant.

**Théorème I.1.20** (*Représentation des couplages*) Soient  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ , deux espaces mesurables. Soit  $m : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une mesure finie, dont on note  $\mu := \underline{m}$  la première marginale. On note  $\ell$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  régulier. Alors, il existe  $\Psi : E_1 \times ]0, 1[ \rightarrow E_2$ , qui est  $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{E}_2)$ -mesurable et telle que

$$\int_{E_1 \times E_2} g dm = \int_{E_1 \times ]0, 1[} g(x, \Psi(x, z)) \mu(dx) \ell(dz). \quad (\text{I.14})$$

pour toute fonction  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty]$  qui est  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -mesurable.

Avant de montrer ce théorème, discutons de quelques conséquences théoriques. La première est le théorème de désintégration des couplages.

**Théorème I.1.21** (*Désintégration des couplages*) Soient  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{E}_2)$ , deux espaces mesurables. Soit  $m : \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une mesure finie, dont on note  $\mu := \underline{m}$  sa première marginale. On suppose  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  régulier. Alors, il existe un noyau  $p$  de probabilités de  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  vers  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  tel que  $m = \mu \otimes p$ , c'est-à-dire

$$\int_{E_1 \times E_2} g dm = \int_{E_1} \mu(dx) \int_{E_2} p(x, dy) g(x, y), \quad (\text{I.15})$$

pour toute fonction  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty]$  qui est  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -mesurable.

**Preuve :** on reprend les notations du théorème I.1.20. Pour tout  $x \in E_1$ , on note  $p(x, dy)$  la mesure image de la mesure de Lebesgue  $\ell$  sur  $]0, 1[$  par la fonction  $\Psi(x, \cdot)$ . Le théorème I.1.18 de transfert (page 7) montre que (I.15) est égal à (I.14), ce qui termine la preuve.  $\blacksquare$

Nous appliquons ensuite le théorème I.1.20 de représentation des couplages à la construction de suites de variables aléatoires. Pour cela on utilise les deux faits élémentaires suivants.

- (a) Il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et une suite  $U_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Preuve :** en fait on peut choisir  $\Omega = [0, 1[$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1[)$  et  $\mathbf{P} = \ell$ , la mesure de Lebesgue. En effet, pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in [0, 1[$ , on pose  $\xi_n(x) := \lfloor 2^n x \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} x \rfloor$ . On vérifie facilement que  $\xi_n(x) \in \{0, 1\}$ , que la suite  $(\xi_n(x))_{n \geq 1}$  n'est pas stationnaire à 1 et que  $x = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \xi_n(x)$ . Autrement dit  $(\xi_n(x))_{n \geq 1}$  est le développement dyadique de  $x$ . Il est facile ensuite de vérifier que sous  $\mathbf{P}$ , les v.a.  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  sont des variables de Bernoulli indépendantes telles que  $\mathbf{P}(\xi_n = 1) = \mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1/2$ . Soit  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ , une bijection. On pose alors  $U_n = \sum_{p \geq 1} 2^{-p} \xi_{\varphi(n,p)}$ . On vérifie facilement que sous  $\mathbf{P}$ , les v.a.  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des uniformes indépendantes.  $\square$

On utilise également le fait élémentaire suivant.

- (b) Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité et soit  $U : \Omega \rightarrow ]0, 1[$ , une v.a. uniforme. On suppose que  $\mu(E) = 1$  et que  $(E, \mathcal{E})$  est un espace régulier. Alors,

$$\exists h : ]0, 1[ \rightarrow E, \text{ qui est } (\mathcal{B}(]0, 1[), \mathcal{E})\text{-mesurable telle que } h(U) \text{ sous } \mathbf{P} \text{ ait pour loi } \mu. \quad (\text{I.16})$$

**Preuve :** il existe  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et une bijection  $\phi : E \rightarrow B$  telle que  $\phi$  est  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(B))$ -mesurable et  $\phi^{-1}$  est  $(\mathcal{B}(B), \mathcal{E})$ -mesurable. On note  $\nu$  la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$  et on pose

$$\forall y \in ]0, 1[, \quad G(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \nu([-\infty, x]) > y\}$$

qui est l'inverse continu à droite de la fonction de répartition de  $\nu$ . On pose  $Y := G(U)$ . Il est bien connu que  $Y$  sous  $\mathbf{P}$  a pour loi  $\nu$ . Comme  $\mathbf{P}(Y \notin B) = \nu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$ , il existe une v.a.  $X : \Omega \rightarrow E$  telle que  $X = \phi^{-1}(Y)$ , où  $\phi^{-1}$  est la réciproque mesurable de  $\phi$ . Alors, pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in \phi(A)) = \nu(\phi(A)) = \mu(A)$ , car on rappelle que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont mesurables. On a donc montré que  $h := \phi^{-1} \circ G$  convient.  $\square$

En s'appuyant sur (a) et (b) et en appliquant le théorème I.1.20, on montre le résultat suivant qui est un cas particulier du théorème d'extension de Kolmogorov.

**Théorème I.1.22** Soit  $(E_n, \mathcal{E}_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , une suite d'espaces mesurables supposés réguliers. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on se donne  $\mu_n : \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n \rightarrow [0, 1]$ , une mesure de probabilité. On suppose que ces mesures sont compatibles dans le sens suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n, \quad \mu_n(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_{n+1}(A_1 \times \dots \times A_n \times E_{n+1}). \quad (\text{I.17})$$

Alors, il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $X_n : \Omega \rightarrow E_n$ , v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_n)$ -mesurable, tels que

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu_n$  est la loi de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sous  $\mathbf{P}$ .

**Preuve :** par (a), on se donne  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , espace de probabilité et  $U_n : \Omega \rightarrow ]0, 1[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Il suffit de montrer par récurrence le fait suivant.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une fonction  $h_n : ]0, 1[^n \rightarrow E_n$  qui est  $(\mathcal{B}(]0, 1[^n), \mathcal{E}_n)$ -mesurable et telle que si on pose  $X_n := h_n(U_1, \dots, U_n)$ , alors la loi de  $(X_1, \dots, X_n)$  est  $\mu_n$ .

Le rang  $n=1$  est (I.16). On suppose que cela est vrai pour tous les rangs  $k \in \{1, \dots, n\}$ . En voyant  $E_1 \times \dots \times E_{n+1}$  comme le produit  $(E_1 \times \dots \times E_n) \times E_{n+1}$  et appliquant le théorème I.1.20 à  $m = \mu_{n+1}$ , et  $\mu = \mu_n$ , on obtient une fonction mesurable  $\Psi : (E_1 \times \dots \times E_n) \times ]0, 1[ \rightarrow E_{n+1}$ , telle que pour toute fonction mesurable  $g : E_1 \times \dots \times E_{n+1} \rightarrow [0, \infty]$ ,

$$\int_{E_1 \times \dots \times E_{n+1}} g \, d\mu_{n+1} = \int_{E_1 \times \dots \times E_n \times ]0, 1[} \mu_n(dx_1 \dots dx_n) \ell(dz) g(x_1, \dots, x_n, \Psi(x_1, \dots, x_n, z)).$$

On pose alors

$$h_{n+1}(y_1, \dots, y_n, y) = \Psi(h_1(y_1), h_2(y_1, y_2), \dots, h_n(y_1, \dots, y_n), y),$$

ce qui convient.  $\blacksquare$

**Preuve du théorème I.1.20.** La preuve est en plusieurs étapes. On commence par montrer le lemme général suivant.

**Lemme I.1.23** Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$ , un espace mesuré sigma fini. Soient  $f, g : E \rightarrow [0, \infty]$ , deux fonctions  $\mathcal{E}$ -mesurables. On suppose que pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ . Alors,  $f \leq g$ ,  $\mu$ -presque partout.

**Preuve :** on suppose d'abord que  $\mu$  est finie. Soient  $a, b \in \mathbb{Q}_+$  tels que  $a < b$ . On observe d'abord que

$$\{g \leq a < b \leq f\} = g^{-1}([0, a]) \cap f^{-1}([b, \infty]) \in \mathcal{E}.$$

On a ensuite  $g \mathbf{1}_{\{g \leq a < b \leq f\}} \leq a \mathbf{1}_{\{g \leq a < b \leq f\}} \leq b \mathbf{1}_{\{g \leq a < b \leq f\}} \leq f \mathbf{1}_{\{g \leq a < b \leq f\}}$ . En intégrant cette inégalité, on obtient

$$\int_{\{g \leq a < b \leq f\}} g d\mu \leq a\mu(\{g \leq a < b \leq f\}) \leq b\mu(\{g \leq a < b \leq f\}) \leq \int_{\{g \leq a < b \leq f\}} f d\mu.$$

Mais les membres extrêmes de ces inégalités sont supposés égaux, donc  $a\mu(\{g \leq a < b \leq f\}) = b\mu(\{g \leq a < b \leq f\})$ . Comme  $\mu$  est de masse finie et que  $a \neq b$ , on obtient  $\mu(\{g \leq a < b \leq f\}) = 0$ . On voit ensuite que

$$\{g < f\} = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}_+} \{g \leq a < b \leq f\} \in \mathcal{E},$$

et par sigma sous-additivité,  $\mu(\{g < f\}) \leq \sum_{a, b \in \mathbb{Q}_+} \mu(\{g \leq a < b \leq f\}) = 0$ , ce termine la preuve dans le cas où  $\mu$  est finie.

Il reste à montrer ce résultat lorsque  $\mu$  est sigma-finie : dans ce cas il existe une suite  $E_n \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $E_n \subset E_{n+1}$ ,  $\mu(E_n) < \infty$  et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mu_n = \mu(\cdot \cap E_n)$ . En remplaçant  $A$  par  $A \cap E_n$  dans l'hypothèse, on voit que pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\int_A f d\mu_n \leq \int_A g d\mu_n$ . Comme les mesures  $\mu_n$  sont finies, on en déduit que  $\mu(E_n \cap \{g < f\}) = 0$ . Par la monotonie des mesures,  $\mu(\{g < f\}) = \lim_n \mu(E_n \cap \{g < f\}) = 0$ , ce qui montre le résultat voulu. ■

On considère ensuite le cas  $E_2 = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  en montrant le lemme suivant.

**Lemme I.1.24** Soit  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ , un ensemble dénombrable et dense. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Pour tout  $r \in \mathcal{D}$ , on se donne  $\mu_r : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une mesure de masse finie. On fait les hypothèses suivantes :

$$\sup_{r \in \mathcal{D}} \mu_r(E) < \infty, \quad \lim_{r \in \mathcal{D} \rightarrow -\infty} \mu_r(E) = 0 \quad \text{et} \quad \forall r \leq r' \text{ dans } \mathcal{D}, \forall B \in \mathcal{E}, \quad \mu_r(B) \leq \mu_{r'}(B). \quad (\text{I.18})$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Il existe une unique mesure finie  $m : \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\forall r \in \mathcal{D}, \forall B \in \mathcal{E}, \quad m(B \times ]-\infty, r]) = \mu_r(B).$$

(ii) On note  $\mu = \underline{m}$ , la première marginale de  $m$ . Il existe une fonction  $\Psi : E \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(]0, 1[)$ -mesurable et telle que

$$\int_E g dm = \int_{E \times ]0, 1[} g(x, \Psi(x, z)) \mu(dx) \ell(dz)$$

pour toute fonction  $g : E \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  qui est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable.

**Preuve :** soit  $r_n \in \mathcal{D}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite croissante qui tend vers l'infini. On pose  $\nu_0 := \mu_{r_0}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on pose également  $\nu_n := \mu_{r_n} - \mu_{r_{n-1}}$ , qui est clairement une mesure positive de masse finie. On pose ensuite  $\mu := \sum_{n \geq 0} \nu_n$  qui est une mesure positive. On a donc  $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{r_n}(B) = \sup_{r \in \mathcal{D}} \mu_r(B)$ , pour tout  $B \in \mathcal{E}$ . La dernière égalité montre que  $\mu$  ne dépend pas de la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  choisie. De plus, pour tout  $r \in \mathcal{D}$  et tout  $B \in \mathcal{E}$ , on a  $\mu_r(B) \leq \mu(B)$ . Donc  $\mu_r$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ . Comme  $\mu$  est finie et donc sigma-finie, le théorème de Radon-Nikodym s'applique et il existe une fonction  $f_r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{E}$ -mesurable telle que

$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad \mu_r(B) = \int_B f_r d\mu. \quad (\text{I.19})$$

Soient  $r, r' \in \mathcal{D}$  tels que  $r \leq r'$ . Ce qui précède implique que pour tout  $B \in \mathcal{E}$ ,  $\int_B f_r d\mu = \mu_r(B) \leq \mu_{r'}(B) \leq \int_B f_{r'} d\mu \leq \mu(B)$  et le lemme I.1.23 (page 10) implique que  $\mu$ -p.p.  $0 \leq f_r \leq f_{r'} \leq 1$ . L'ensemble  $\mathcal{D}$  étant dénombrable, on a donc

$$\mu\text{-p.p.} \quad f_{-\infty} := \inf_{r \in \mathcal{D}} f_r = \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow -\infty}} f_r \quad \text{et} \quad f_\infty := \sup_{r \in \mathcal{D}} f_r = \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow \infty}} f_r.$$

Le théorème de convergence dominée montre ensuite que

$$0 \leq \int_E f_{-\infty} d\mu = \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow -\infty}} \int_E f_r d\mu = \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow -\infty}} \mu_r(E) = 0.$$

Donc  $\mu\text{-p.p. } f_{-\infty} = 0$ . De même, on montre que

$$0 \leq \int_E (1 - f_\infty) d\mu = \mu(E) - \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow \infty}} \int_E f_r d\mu = \mu(E) - \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow \infty}} \mu_r(E) = 0,$$

ce qui implique que  $\mu\text{-p.p. } f_\infty = 1$ ,  $\mu$ -presque partout. Quitte à modifier les fonctions  $f_r$  sur un ensemble  $\mu$ -négligeable on peut supposer que pour tous  $r, r' \in \mathcal{D}$ , tels que  $r \leq r'$ , on a

$$\forall x \in E, \quad 0 \leq f_r(x) \leq f_{r'}(x) \leq 1, \quad \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow -\infty}} f_r(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{r \in \mathcal{D} \\ r \rightarrow \infty}} f_r(x) = 1. \quad (\text{I.20})$$

Pour tout  $(x, z) \in E \times ]0, 1[$ , on pose alors  $\Psi(x, z) := \inf\{r \in \mathcal{D} : f_r(x) > z\}$ , qui est une quantité bien définie. On remarque que pour tout  $b \in \mathbb{R}$ ,

$$\Psi(x, z) \leq b \iff \forall r \in \mathcal{D} \cap ]b, \infty[, \quad f_r(x) > z. \quad (\text{I.21})$$

On a donc

$$\{\Psi \leq b\} = \bigcap_{r \in \mathcal{D} \cap ]b, \infty[} \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} f_r^{-1}(]s, \infty[) \times ]-\infty, s]$$

ce qui implique que  $\Psi : E \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(]0, 1[)$ -mesurable. Le théorème de convergence dominée, (I.21), Fubini et (I.19) impliquent que

$$\int_{E \times ]0, 1[} \mu(dx) \ell(dz) \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\{\Psi(x, z) \leq b\}} = \lim_{r \in \mathcal{D} \downarrow b} \int_{E \times ]0, 1[} \mu(dx) \ell(dz) \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\{f_r(x) > z\}} = \int_B \mu(dx) f_r(x) = \mu_r(B). \quad (\text{I.22})$$

On définit la fonction  $\varphi(x, z) = (x, \Psi(x, z))$  qui est  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(]0, 1[), \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable et on pose  $m := (\mu \otimes \ell) \circ \varphi^{-1}$ , la mesure image de  $\mu \otimes \ell$  par  $\varphi$ . Le théorème I.1.18 de transfert (page 7) et (I.22) impliquent

immédiatement (i) et (ii). On remarque enfin que  $\{B \times ]-\infty, r] ; B \in \mathcal{E}, r \in \mathcal{D}\} \cup \{E \times \mathbb{R}\}$  est un pi-système générant  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . L'unicité de  $m$  découle alors théorème ?? d'unicité des mesures (page ??).

**Fin de la preuve du théorème I.1.20.** On suppose  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  régulier : il existe donc  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $\phi : E_2 \rightarrow A$ , une bijection telle que  $\phi$  est  $(\mathcal{E}_2, \mathcal{B}(A))$ -mesurable et la réciproque  $\phi^{-1} : A \rightarrow E_2$  est  $(\mathcal{B}(A), \mathcal{E}_2)$ -mesurable. Pour tout  $(x, y) \in E_1 \times E_2$ , on pose  $\Lambda(x, y) := (x, \phi(y)) \in E_1 \times A$ . Il est facile de vérifier que  $\Lambda$  est un isomorphisme d'espaces mesurables de  $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$  sur  $(E_1 \times A, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{B}(A))$ . On pose alors

$$\forall C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad m_*(C) := m(\{\Lambda(x, y) \in E_1 \times A : (x, \phi(y)) \in C\}).$$

Autrement dit,  $m_*$  est la mesure image de  $m$  par  $\Lambda$ . C'est donc une mesure de masse finie. On remarque que  $\mu$  est aussi la première marginale de  $m_*$ . On voit aussi que  $m_*$  est concentrée sur  $E_1 \times A$ , c'est-à-dire que  $m_*((E_1 \times \mathbb{R}) \setminus (E_1 \times A)) = 0$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ , et tout  $B \in \mathcal{E}_1$ , on pose  $\mu_r(B) := m_*(B \times ]-\infty, r])$ . On vérifie immédiatement que les  $\mu_r$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ , sont des mesures positives qui satisfont bien les hypothèses (I.18) du lemme I.1.24 avec  $(E, \mathcal{E}) = (E_1, \mathcal{E}_1)$ . Par ce lemme, il existe donc  $\Psi_* : E_1 \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{B}([0, 1[)$ -mesurable telle que

$$\int_{E_1 \times \mathbb{R}} g_* dm_* = \int_{E_1 \times ]0, 1[} g_*(x, \Psi_*(x, z)) \mu(dx) \ell(dz), \quad (\text{I.23})$$

pour toute fonction  $g_* : E_1 \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  qui est  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{B}([0, 1[)$ -mesurable. Comme  $m_*$  est concentrée sur  $E_1 \times A$ , on peut modifier  $\Psi_*$  de manière mesurable de sorte que  $\Psi_*(x, z) \in A$ , pour tout  $(x, z) \in E_1 \times ]0, 1[$  et de sorte que (I.23) reste vrai pour toutes fonctions  $g_*$ .

On définit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow E_2$  en posant  $\psi(x) := \phi^{-1}(x)$ , si  $x \in A$  et  $\psi(x) := y_0$  sinon, où  $y_0 \in E_2$  est un point de  $E_2$ , ne jouant aucun rôle spécifique. On vérifie facilement que  $\psi$  est  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{E}_2)$ -mesurable. On pose alors  $\Psi := \psi \circ \Psi_*$ . Soit  $g : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ -mesurable. Il est clair que  $g_*(x, y') := g(x, \psi(y'))$ ,  $x \in E_1$ ,  $y' \in \mathbb{R}$ , définit une fonction  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable. On remarque que  $g_* \circ \Lambda = g$ . Comme  $m_*$  est la mesure image de  $m$  par  $\Lambda$ , le théorème I.1.18 de transfert (7) et (I.23) impliquent alors que

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} g dm &= \int_{E_1 \times \mathbb{R}} g_* \circ \Lambda dm = \int_{E_1 \times \mathbb{R}} g_* dm_* = \int_{E_1 \times ]0, 1[} g_*(x, \Psi_*(x, z)) \mu(dx) \ell(dz) \\ &= \int_{E_1 \times ]0, 1[} g(x, \psi(\Psi_*(x, z))) \mu(dx) \ell(dz) = \int_{E_1 \times ]0, 1[} g(x, \Psi(x, z)) \mu(dx) \ell(dz) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat désiré. ■

## I.2 Processus : définitions, construction.

### I.2.a Processus : définitions, premières propriétés.

On introduit les objets suivants.

- Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité.
- Soit  $I$ , un ensemble d'indices, supposé non-vide.
- Pour tout  $i \in I$ , on se donne un espace mesurable  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  et une v.a.  $X_i : \Omega \rightarrow E_i$  qui est  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_i)$ -mesurable. Alors,  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de v.a. indexée par  $I$ .

Lorsque  $I$  est fini, on parle plutôt de vecteur aléatoire, lorsque  $I$  est dénombrable on parle plutôt d'une suite de v.a., lorsque  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle,  $i$  est vu comme un temps (et est noté  $t$  ou  $s$ , en général) et on parle

plutôt de *processus*. Lorsque  $I$  est un espace, on parle plutôt de *champ* aléatoire. Dans ce chapitre, on parle indistinctement de processus, indépendamment de la nature de  $I$ .

**Notations.** On utilise la notation  $\prod_{i \in I} E_i$  pour l'ensemble des *fonctions de  $I$  dans les  $E_i$* :

$$\prod_{i \in I} E_i := \{ \mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} : \forall i \in I, x_i \in E_i \} .$$

Nous ne nous étendons pas sur une définition ensembliste qui soit rigoureuse et nous commettons un abus de notation en utilisant une notation suggérant plus un "produit cartésien", ce qui est différent d'un point de vue ensembliste.  $\square$

Dans cette section, on va considérer la famille de v.a.  $(X_i)_{i \in I}$  comme *un seul objet aléatoire* noté  $X$ , c'est-à-dire comme la fonction

$$X : \omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) := (X_i(\omega))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i .$$

**Définition I.2.1** (*Tribu produit*) On garde les notations précédentes.

- (a)  $C \subset \prod_{i \in I} E_i$  est appelé *cylindre élémentaire* s'il existe  $J \subset I$ , un sous-ensemble *fini* d'indices et des ensembles  $B_j \in \mathcal{E}_j$ ,  $j \in J$  tels que

$$C = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i : \forall j \in J, x_j \in B_j \right\}, \text{ qui est simplement noté } \left( \prod_{j \in J} B_j \right) \times \left( \prod_{i \in I \setminus J} E_i \right).$$

Ceci décrit un ensemble de fonctions, ce malgré l'emploi abusif de notations "cartésiennes"  $\times$  et  $\prod$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des cylindres élémentaires.

- (b) La tribu engendrée par  $\mathcal{C}$  est la *tribu produit des  $\mathcal{E}_i$* ,  $i \in I$ . On la note  $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i := \sigma(\mathcal{C})$ .
- (c) Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Un *processus* à valeurs dans  $\prod_{i \in I} E_i$  qui est  $\mathcal{F}$ -mesurable est une fonction  $X : \Omega \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$  qui est  $(\mathcal{F}, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i)$ -mesurable.
- (d) Pour tout  $J \subset I$ , on définit  $\pi_J : \prod_{i \in I} E_i \rightarrow \prod_{j \in J} E_j$  en posant  $\pi_J((x_i)_{i \in I}) := (x_j)_{j \in J}$ : c'est la restriction à  $J$  de la fonction  $(x_i)_{i \in I}$ . On appelle  $\pi_J$  la *J-projection canonique*.  $\square$

On utilise les notations simplifiées suivantes. Lorsque  $J$  est le singleton  $\{i\}$ , on utilise la notation  $\pi_i$  plutôt que  $\pi_{\{i\}}$ . Lorsque les espaces mesurables sont les mêmes  $(E, \mathcal{E}) = (E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , on utilise les notations

$$E^I := \prod_{i \in I} E_i \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{\otimes I} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i .$$

**Proposition I.2.2** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. Pour tout  $i \in I$ , soit  $X_i : \Omega \rightarrow E_i$ , une fonction. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) Pour tout  $i \in I$ ,  $X_i$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_i)$ -mesurable.
- (b)  $X = (X_i)_{i \in I} : \Omega \longrightarrow \prod_{i \in I} E_i$  est un processus  $(\mathcal{F}, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i)$ -mesurable.

**Preuve :** soit  $J \subset I$  fini; pour tout  $j \in J$ , soit  $B_j \in \mathcal{E}_j$ . Soit  $C = (\prod_{j \in J} B_j) \times (\prod_{i \in I \setminus J} E_i)$ , un cylindre élémentaire. Alors

$$\{X \in C\} = \bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}. \quad (\text{I.24})$$

Si on suppose (a), alors  $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$  pour tout cylindre élémentaire. Comme les cylindres élémentaires engendrent la tribu produit, on en déduit (b). Si on suppose (b), alors on applique (I.24) à  $J = \{i\}$ , ce qui montre que  $\{X_i \in B_j\} = \{X \in C\} \in \mathcal{F}$ , et ce pour tout  $B_i \in \mathcal{E}_i$ , ce qui entraîne (a). ■

**Définition I.2.3** (*Espace et processus canoniques*) Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. L'espace canonique des processus à valeurs dans  $\prod_{i \in I} E_i$  est l'espace mesurable

$$\Omega^{\text{can}} = \prod_{i \in I} E_i \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{\text{can}} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i.$$

On définit le processus canonique  $X^{\text{can}} = (X_i^{\text{can}})_{i \in I} : \Omega^{\text{can}} \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$  en posant

$$\forall \mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i, \quad \forall i \in I, \quad X_i^{\text{can}}(\mathbf{x}) = x_i.$$

Autrement dit  $X_i^{\text{can}} = \pi_i$ , la  $i$ -projection canonique et on remarque que  $X^{\text{can}}$  est l'identité sur  $\prod_{i \in I} E_i$ . □

**Corollaire I.2.4** Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) La classe  $\mathcal{C}$  des cylindres élémentaires de  $\prod_{i \in I} E_i$  est un pi-système.
- (ii) La tribu produit est la tribu engendrée par les projection canoniques :  $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i = \sigma(\pi_i ; i \in I)$ .
- (iii) Pour tout  $J \subset I$ , non-vide  $\pi_J : \prod_{i \in I} E_i \rightarrow \prod_{j \in J} E_j$  est  $(\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j)$ -mesurable.

**Preuve :** le point se vérifie immédiatement. Les points (ii) et (iii) découlent facilement de la proposition I.2.2 appliquée à l'espace canonique et processus canonique. Nous laissons les détails aux lecteurs. ■

Le théorème suivant donne une description de la tribu produit qui est utilisée dans la suite.

**Théorème I.2.5** Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. Pour tout  $J \subset I$ , on pose  $\mathcal{G}_J := \left\{ \pi_J^{-1}(A) ; A \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j \right\}$ . Alors,

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i = \bigcup_{\substack{J \subset I, \\ J \text{ dénombrable}}} \mathcal{G}_J. \quad (\text{I.25})$$

**Preuve :** pour simplifier, on note  $\mathcal{G}$  le membre de droite de (I.25). La proposition I.2.4 (ii) montre que  $\pi_J$  est  $(\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j)$ -mesurable, ce qui implique que  $\mathcal{G}_J \subset \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$  et donc  $\mathcal{G} \subset \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$ .

Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $C = (\prod_{j \in J} B_j) \times (\prod_{i \in I \setminus J} E_i)$ ,  $J \subset I$ , fini et  $B_j \in \mathcal{E}_j$ ,  $j \in J$ ;  $C$  est un cylindre élémentaire. On a donc  $C = \pi_J^{-1}(\prod_{j \in J} B_j)$  et donc  $C \in \mathcal{G}_J$ . Cela montre que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ , où est la classe des cylindres élémentaires. Comme la tribu produit est engendrée par  $\mathcal{C}$ , on a  $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \subset \sigma(\mathcal{G})$  et il suffit donc de montrer que  $\mathcal{G}$  est une tribu : (a) il est clair que tout l'espace  $\prod_{i \in I} E_i \in \mathcal{G}$ . (b) Soit  $B \in \mathcal{G}$ ; il existe donc  $J \subset I$ , dénombrable et tel que  $B \in \mathcal{G}_J$ ; comme  $\mathcal{G}_J$  est une tribu (c'est la tribu engendrée

par  $\pi_J$ ), le complémentaire de  $B$  est dans  $\mathcal{G}_J$  et donc dans  $\mathcal{G}$ ; cela montre que  $\mathcal{G}$  est stable par passage au complémentaire. (c) Montrons que  $\mathcal{G}$  est stable par union dénombrable : pour cela on remarque d'abord que si  $J \subset J'$ , alors  $\mathcal{G}_J \subset \mathcal{G}_{J'}$ ; soit  $B_n \in \mathcal{G}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe donc  $J_n \subset I$ , dénombrable tel que  $B_n \in \mathcal{G}_{J_n}$ ; on pose alors  $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ , qui dénombrable; on a donc  $B_n \in \mathcal{G}_J$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; comme  $\mathcal{G}_J$  est une tribu, on a  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}_J \subset \mathcal{G}$ . Cela termine la preuve du fait que  $\mathcal{G}$  est une tribu, ce qui permet de conclure comme montré précédemment. ■

### I.2.b Loi d'un processus.

**Définition I.2.6 (lois marginales)** Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_i)_{i \in I} : \Omega \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$ , un processus  $(\mathcal{F}, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i)$ -mesurable.

- (a) Soit  $\mu : \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \rightarrow [0, 1]$ , une mesure de probabilité. Pour tout  $J \subset I$ , non-vide, on note  $\mu_J := \mu \circ \pi_J^{-1}$  la mesure image de  $\mu$  par la  $J$ -projection canonique  $\pi_J$ . La mesure de probabilité  $\mu_J : \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j \rightarrow [0, 1]$  est appelé la *loi  $J$ -marginale de  $\mu$* . L'ensemble des mesures  $\mu_J$ , avec  $J \subset I$  fini, est appelé ensemble des *marginales de dimension finie de  $\mu$* .
- (b) On note  $\mu_X$  la loi de  $X$  sous  $\mathbf{P}$ , c'est-à-dire  $\mu_X(B) = \mathbf{P}(X \in B)$ ,  $\forall B \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$ . On note  $\mu_{X,J}$  la loi  $J$ -marginale de  $X$ , c'est-à-dire la loi de  $\pi_J(X) = (X_j)_{j \in J}$ :

$$\forall B \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j, \quad \mu_{X,J}(B) = \mathbf{P}((X_j)_{j \in J} \in B).$$

Les lois  $\mu_{X,J}$ , lorsque  $J$  est fini, sont appelée les loi marginales de dimension finie du processus  $X$ . □

La proposition suivante donne des formulations équivalentes au fait que deux processus aient même loi.

**Proposition I.2.7** Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ , des espaces de probabilité. Soit  $X = (X_i)_{i \in I} : \Omega \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$ , un processus  $(\mathcal{F}, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i)$ -mesurable et soit  $X' = (X'_i)_{i \in I} : \Omega' \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$ , un autre processus  $(\mathcal{F}', \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}'_i)$ -mesurable. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $X$  sous  $\mathbf{P}$  a même loi que  $X'$  sous  $\mathbf{P}'$ , c'est-à-dire  $\mu_X = \mu_{X'}$ .
- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $i_1, \dots, i_n \in I$ , distincts,

$$(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \text{ sous } \mathbf{P} \text{ a même loi que } (X'_{i_1}, \dots, X'_{i_n}) \text{ sous } \mathbf{P}',$$

c'est-à-dire que  $X$  et  $X'$  ont mêmes lois marginales de dimension finie :  $\mu_{X,J} = \mu_{X',J}$ ,  $J \subset I$ ,  $J$  fini.

- (c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $i_1, \dots, i_n \in I$ , distincts, pour toutes fonctions  $f_k : E_{i_k} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}_{i_k}$ -mesurables bornées,  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$\mathbf{E}[f_1(X_{i_1}) \dots f_n(X_{i_n})] = \mathbf{E}'[f_1(X'_{i_1}) \dots f_n(X'_{i_n})].$$

- (d) Pour tout  $i \in I$ , soit  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{E}_i$ , un pi-système tel que  $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{E}_i$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $i_1, \dots, i_n \in I$ , distincts, pour tous  $C_1 \in \mathcal{C}_{i_1}, \dots, C_n \in \mathcal{C}_{i_n}$ ,

$$\mathbf{P}(X_{i_1} \in C_1; \dots; X_{i_n} \in C_n) = \mathbf{P}'(X'_{i_1} \in C_1; \dots; X'_{i_n} \in C_n).$$

Autrement dit

$$\mu_{X, \{i_1, \dots, i_n\}}(C_1 \times \dots \times C_n) = \mu_{X', \{i_1, \dots, i_n\}}(C_1 \times \dots \times C_n).$$

**Preuve :** il est clair que  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ . Il suffit de montrer que  $(d) \Rightarrow (a)$ . On pose

$$\mathcal{P} = \left\{ \pi_J^{-1} \left( \prod_{j \in J} C_j \right); J \subset I, J \text{ fini et } \forall j \in J, C_j \in \mathcal{C}_j \right\}.$$

On vérifie que  $\mathcal{P}$  est un pi-système sur  $\prod_{i \in I} E_i$ . Il est facile de vérifier que  $\sigma(\mathcal{P}) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$ . La condition (d) signifie que  $\mu_X$  et  $\mu_{X'}$  coïncident sur  $\mathcal{P}$ . La théorème ?? de l'unicité du prolongement des mesures (page ??) implique que  $\mu_X = \mu_{X'}$ . ■

### I.2.c Construction de processus : le théorème d'extension de Kolmogorov.

La proposition I.2.7 montre que la loi d'un processus est caractérisée par ses lois marginales de dimension finie. Le but de cette section est montrer que toute famille de loi marginales de dimension finie qui est cohérente est la famille des lois marginales d'un processus. Pour cela définissons tout d'abord la propriété de cohérence.

**Définition I.2.8** (*Famille de lois cohérentes*) Soit  $I$ , un ensemble d'indices non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables.

(a) Soient  $K \subset J \subset I$ . On note  $\pi_{K,J}: \prod_{j \in J} E_j \rightarrow \prod_{k \in K} E_k$  la projection :

$$\forall (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} E_j, \quad \pi_{K,J}((x_j)_{j \in J}) = (x_k)_{k \in K}.$$

On voit donc que  $\pi_J = \pi_{J,I}$  et on observe que  $\pi_K = \pi_{K,J} \circ \pi_J$ . Cela implique que pour toute mesure de probabilité  $\mu: \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \rightarrow [0, 1]$ , on a

$$\forall K \subset J \subset I, \quad \mu_K = \mu_J \circ \pi_{K,J}^{-1}. \quad (\text{I.26})$$

(b) Une *famille de lois de dimension finie* est la donnée de  $(\nu_J, J \subset I, J \text{ fini})$  où  $\nu_J: \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j \rightarrow [0, 1]$  est une mesure de probabilité. Elles forment un *système cohérent* si

$$\forall K \subset J \subset I, \quad J \text{ fini}, \quad \nu_K = \nu_J \circ \pi_{K,J}^{-1}. \quad (\text{I.27})$$

On dit aussi qu'elles forment un *système compatible* ou encore un *système projectif*. □

Par (I.26), qui est trivial, on voit que les marginales de dimension finie d'une mesure  $\mu: \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \rightarrow [0, 1]$  forment un système compatible. En revanche il n'est pas du tout trivial de montrer que si on a un système de mesures compatibles, elles sont les marginales de dimension finie d'une mesure : modulo quelques hypothèses, cette réciproque est le propos du théorème d'extension de Kolmogorov qui suit.

**Théorème I.2.9** (*Théorème d'extension de Kolmogorov*) Soit  $I$ , un ensemble non-vide. Soit  $(E_i, \mathcal{E}_i)$ ,  $i \in I$ , une famille d'espaces mesurables. Pour tout sous-ensemble fini d'indices  $J \subset I$ , on se donne une mesure de probabilité  $\nu_J: \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j \rightarrow [0, 1]$ . On suppose l'axiome du choix et on fait les deux hypothèses suivantes.

(a) Pour tout  $i \in I$ ,  $(E_i, \mathcal{E}_i)$  est un espace mesurable régulier.

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in I$ , distincts, pour tous  $B_1 \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, B_n \in \mathcal{E}_{i_n}$ , on a

$$\nu_{\{i_1, \dots, i_n, i_{n+1}\}}(B_1 \times \dots \times B_n \times E_{i_{n+1}}) = \nu_{\{i_1, \dots, i_n\}}(B_1 \times \dots \times B_n).$$

Alors, les assertions suivantes, équivalentes, sont vérifiées.

- (i) Il existe une mesure  $\mu : \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \rightarrow [0, 1]$  dont les lois  $\nu_J$  sont les marginales de dimension finie, c'est-à-dire que

$$\mu \circ \pi_J^{-1} = \nu_J, \quad J \subset I, J \text{ fini.}$$

- (ii) Il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et un processus  $X = (X_i)_{i \in I} := \Omega \rightarrow \prod_{i \in I} E_i$  qui est  $(\mathcal{F}, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i)$ -mesurable dont les  $\nu_J$  sont les lois marginales de dimension finie de  $X$  :

$$\forall J \subset I, J \text{ fini}, \forall B \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j, \quad \mathbf{P}((X_j)_{j \in J} \in B) = \nu_J(B).$$

**Preuve :** on remarque tout d'abord que le résultat a été démontré dans le cas où  $I$  est dénombrable : il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème I.1.22 (page 9). Il s'agit d'ailleurs du point difficile de la preuve. Par conséquent, pour tout sous-ensemble *dénombrable* d'indices  $J_*$ , il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_{J_*} : \bigotimes_{j \in J_*} \mathcal{E}_j \rightarrow [0, 1]$  telle que pour tout  $J \subset J_*$ ,  $J$  fini,  $\mu_{J_*} \circ \pi_{J, J_*} = \nu_J$ . Soit  $J'_* \subset I$ , dénombrable tel que  $J_* \subset J'_*$ . On pose  $\mu' = \mu_{J'_*} \circ \pi_{J'_*, J'_*}^{-1}$ . Soit  $J \subset J_*$ ,  $J$  fini. Comme  $\pi_{J, J'_*} = \pi_{J, J_*} \circ \pi_{J_*, J'_*}$ , on a  $\mu' \circ \pi_{J, J'_*}^{-1} = \mu_{J_*} \circ \pi_{J, J_*}^{-1} = \nu_J$ . Donc les marginales de dimension finie de  $\mu'$  sont également les  $\nu_J$  : par unicité cela montre que  $\mu' = \mu_{J_*}$ . On a donc obtenu les résultats suivants :

$$\forall J_* \subset I, J_* \text{ dénombrable}, \quad \exists! \mu_{J_*} : \bigotimes_{j \in J_*} \mathcal{E}_j \rightarrow [0, 1], \text{ probabilité : } \quad \forall J \subset J_*, J \text{ fini}, \quad \mu_{J_*} \circ \pi_{J, J_*}^{-1} = \nu_J.$$

et

$$\forall J_* \subset J'_* \subset I, \text{ avec } J'_* \text{ dénombrable}, \quad \mu_{J'_*} \circ \pi_{J'_*, J'_*}^{-1} = \mu_{J_*}. \quad (\text{I.28})$$

On utilise ensuite le théorème I.2.5 dont on reprend les notations. On définit  $\mu : \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \rightarrow [0, 1]$  de la manière suivante : soit  $B \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$ ; par le théorème I.2.5, il existe  $J_* \subset I$ ,  $J_*$  dénombrable, tel que  $B \in \mathcal{G}_{J_*}$  et donc il existe  $A \in \bigotimes_{j \in J_*} \mathcal{E}_j$  tel que  $B = \pi_{J_*}^{-1}(A)$ . On pose alors  $\mu(B) := \mu_{J_*}(A)$ . Vérifions d'abord la cohérence de cette définition : supposons que  $B \in \mathcal{G}_{J'_*}$ , pour  $J'_* \subset I$  et  $J'_*$  dénombrable; il existe donc  $A' \in \bigotimes_{j \in J'_*} \mathcal{E}_j$  tel que  $B = \pi_{J'_*}^{-1}(A')$ . Comme  $\pi_{J'_*}^{-1}(A') = \pi_{J_*}^{-1}(A)$ , il existe  $A_0 \in \bigotimes_{j \in J_* \cap J'_*} \mathcal{E}_j$  tel que

$$A = A_0 \times \left( \prod_{j \in J_* \setminus (J_* \cap J'_*)} E_j \right) \quad \text{et} \quad A' = A_0 \times \left( \prod_{j \in J'_* \setminus (J_* \cap J'_*)} E_j \right).$$

Par conséquent,  $A = \pi_{J_* \cap J'_*, J_*}^{-1}(A_0)$  et  $A' = \pi_{J_* \cap J'_*, J'_*}^{-1}(A_0)$  et par (I.28) on a

$$\mu_{J_*}(A) = \mu_{J_*} \circ \pi_{J_* \cap J'_*, J_*}^{-1}(A_0) = \mu_{J_* \cap J'_*}(A_0) = \mu_{J'_*} \circ \pi_{J'_* \cap J'_*, J'_*}^{-1}(A_0) = \mu_{J'_*}(A').$$

La définition de  $\mu(B)$  ne dépend donc pas du choix de  $J_*$  ni de celui de  $A \in \bigotimes_{j \in J_*} \mathcal{E}_j$  tel que  $B = \pi_{J_*}^{-1}(A)$ .

Il est ensuite clair que si  $J$  est fini,  $\mu_J = \nu_J$  et donc si  $B \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j$ , on a  $\mu(B) = \mu_J(B)$  (par définition de  $\mu$ ) et donc  $\mu(B) = \nu_J(B)$ . C'est-à-dire

$$\forall J \subset I, J \text{ fini}, \forall B \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j, \quad \mu(B) = \nu_J(B). \quad (\text{I.29})$$

On montre ensuite que  $\mu$  est une mesure positive : il est clair que  $\mu(\emptyset) = 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $B_n \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$ , des ensembles deux-à-deux disjoints. Le théorème I.2.5 implique que  $B_n = \pi_{J^n_*}^{-1}(A_n)$ , avec  $J^n_* \subset I$

dénombrable et  $A_n \in \bigotimes_{j \in J_*^n} \mathcal{E}_j$ . On pose  $J_* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_*^n$ , qui est un sous-ensemble dénombrable de  $I$ . On pose alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = A_n \times \prod_{j \in J_* \setminus J_*^n} E_j.$$

On vérifie les faits suivants :

- (a)  $C_n \in \bigotimes_{j \in J_*} \mathcal{E}_j$ , ce qui implique que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \bigotimes_{j \in J_*} \mathcal{E}_j$ .
- (b)  $B_n = \pi_{J_*}^{-1}(C_n)$  et donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \pi_{J_*}^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)$ .
- (c) Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ , distincts,  $C_n \cap C_m = \emptyset$ . En effet, par ce qui précède, on a

$$B_n \cap B_m = \pi_{J_*}^{-1}(C_n) \cap \pi_{J_*}^{-1}(C_m) = \pi_{J_*}^{-1}(C_n \cap C_m) = (C_n \cap C_m) \times \prod_{i \in I \setminus J_*} E_i$$

et si  $C_n \cap C_m$  n'est pas vide, les  $E_i$  n'étant pas vides, l'axiome du choix implique que le dernier membre n'est pas vide, ce qui contredit le fait que les  $B_n$  sont supposés deux-à-deux disjoints.

Par définition de  $\mu$  et par (b), on a  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \mu_{J_*}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(B_n) = \mu_{J_*}(C_n)$ . Par le point (c) et le fait que  $\mu_{J_*}$  est une mesure, on a  $\mu_{J_*}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{J_*}(C_n)$ . On a donc

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mu_{J_*}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{J_*}(C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n),$$

et  $\mu$  est sigma-additive. Par (I.29), on a bien construit une mesure de probabilité  $\mu : \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \rightarrow [0, 1]$  dont les marginales de dimension finie sont les  $\nu_J$ . Soit  $\mu'$ , une autre mesure dont les marginales de dimension finie sont les  $\nu_J$ ; alors  $\mu$  et  $\mu'$  coïncident sur le pi-système des cylindres élémentaires et le théorème ?? d'unicité du prolongement des mesures entraîne que  $\mu = \mu'$ . On a donc montré (i).

Le point (ii) est montré en prenant l'espace canonique :

$$\Omega := \Omega^{\text{can}} = \prod_{i \in I} E_i, \quad \mathcal{F} := \mathcal{F}^{\text{can}} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i, \quad \mathbf{P} := \mu,$$

et le processus canonique  $X^{\text{can}}$  satisfait bien (ii). ■

## I.2.d Processus sur $\mathbb{R}_+$ , filtrations, régularité, modification, indistinguabilité et mesurabilité progressive.

On considère des processus à valeurs dans un même espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ . En général,  $E$  est un espace topologique et la tribu  $\mathcal{E}$  est celle de ses Boréliens, toujours notée  $\mathcal{B}(E)$ . L'ensemble des indices est  $\mathbb{R}_+$  qui est interprété comme un ensemble de temps. On note l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E$  par  $E^{\mathbb{R}_+}$ ; on le munit de la tribu produit  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Comme défini dans la section précédente, un processus  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une v.a.  $X : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  qui est  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. On introduit les définition suivantes.

**Définition I.2.10** (*Filtration, filtration naturelle, processus adapté*) On garde les notations ci-dessus.

- (a) Une *filtration* sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une famille  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de sous-tribus telles que pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , tels que  $s \leq t$  on ait  $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}$ . On utilise souvent la notation  $\mathcal{G}_\infty := \sigma(\mathcal{G}_t ; t \in \mathbb{R}_+)$

(b) Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. Sa *filtration naturelle* est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{F}_t^o(X) = \sigma(X_s; s \in [0, t]).$$

(c) Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Le processus  $X$  est dit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow E$  est  $(\mathcal{G}_t, \mathcal{E})$ -mesurable. On note qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.  $\square$

**Remarque I.2.11** On remarque que la proposition I.2.2 implique que  $\mathcal{F}_\infty^o(X) = \sigma(X_t; t \in \mathbb{R}_+) = \sigma(X)$ . Par conséquence, le théorème ?? de représentation (page ??) implique le fait suivant : soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée ; il existe une fonction  $F : E^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurable bornée telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = F((X_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}_+}). \quad (\text{I.30})$$

De même si  $t \in \mathbb{R}_+$ , la proposition I.2.2 implique que  $\mathcal{F}_t^o(X) = \sigma(X_s; s \in [0, t]) = \sigma((X_s)_{s \in [0, t]})$  et si  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée ; il existe une fonction  $F : E^{[0, t]} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}^{\otimes [0, t]}$ -mesurable bornée telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = F((X_s(\omega))_{s \in [0, t]}). \quad (\text{I.31})$$

Ces deux faits sont très souvent utilisés dans la suite.  $\square$

**Définition I.2.12** Une fonction de  $E_+^{\mathbb{R}}$  est notée de manière générique par  $x = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et on note  $\mathcal{C}$  la classe des cylindres élémentaires de  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ .

(a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note  $\pi_{[0, t]} : E^{\mathbb{R}_+} \rightarrow E^{[0, t]}$  la projection canonique, c'est-à-dire la *restriction* à  $[0, t]$  des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E$ . Un *cylindre élémentaire antérieur à  $t$*  est un ensemble de fonctions

$$C = \{x = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in E^{\mathbb{R}_+} : x_{t_0} \in B_0; x_{t_1} \in B_1; \dots; x_{t_n} \in B_n\} \quad (\text{I.32})$$

où  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t$  et  $B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ . On note  $\mathcal{C}_t$  la classe des cylindres élémentaires antérieurs à  $t$ . On vérifie que  $\mathcal{C}_t$  est un pi-système et que  $\mathcal{C}_t = \pi_{[0, t]}^{-1}(\mathcal{C}_{[0, t]})$  où  $\mathcal{C}_{[0, t]}$  est l'ensemble des cylindres élémentaires de  $E^{[0, t]}$ . On remarque que  $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{C}_t$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  tels que  $s \leq t$ .

(b) (*Filtration canonique*) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note  $\mathcal{F}_t^{\text{can}}$  la tribu sur  $E^{\mathbb{R}_+}$  engendrée par le pi-système  $\mathcal{C}_t$ . On remarque que pour tous  $s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s^{\text{can}} \subset \mathcal{F}_t^{\text{can}}$ . La filtration  $(\mathcal{F}_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  sur  $E^{\mathbb{R}_+}$  est appelée filtration canonique. On remarque que  $\mathcal{F}_t^{\text{can}} = \pi_{[0, t]}^{-1}(\mathcal{E}^{\otimes [0, t]})$ . On utilise parfois la notation  $\mathcal{F}_\infty^{\text{can}} = \sigma(\mathcal{F}_t^{\text{can}}; t \in \mathbb{R}_+) = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ .

(c) (*Processus canonique*) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on rappelle que  $X_t^{\text{can}} = \pi_t : E^{\mathbb{R}_+} \rightarrow E$ , la projection canonique de marginale  $t$ . Le processus canonique  $X^{\text{can}} = (X_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est l'identité sur  $E^{\mathbb{R}_+}$ .  $\square$

**Remarque I.2.13** En gardant les notations des définitions I.2.10 et I.2.12 qui précèdent, on remarque facilement que  $\mathcal{F}_t^o(X) = X^{-1}(\mathcal{F}_t^{\text{can}}) = \{\{X \in A\}; A \in \mathcal{F}_t^{\text{can}}\}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Si on pose

$$\mathcal{P}_t := X^{-1}(\mathcal{C}_t) = \{\{X \in A\}; A \in \mathcal{C}_t\},$$

alors on vérifie aisément que  $\mathcal{P}_t$  est un pi-système générant  $\mathcal{F}_t^o(X)$ .  $\square$

On reformule ensuite l'énoncé du théorème d'extension de Kolmogorov pour des processus indexés par  $\mathbb{R}_+$  et à valeurs dans le même espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Pour tout sous-ensemble fini et non-vide  $J \subset \mathbb{R}_+$ , on se donne une mesure de probabilité  $\nu_J : \mathcal{E}^{\otimes J} \rightarrow (0, 1]$ . Si on suppose que  $J$  compte  $n$  points distincts, on s'en donne une indexation qu'il est naturel de prendre *croissante* :  $J = \{t_1 < \dots < t_n\}$ . On répète ici que  $\nu_J$  est une loi sur l'espace des *fonctions* de  $J$  dans  $E$  et que l'existence d'un ordre naturel sur  $J$  ne change rien à cela : il n'est pas utile de voir  $\nu_J$  comme une loi sur l'espace des  $n$ -uplets (ordonnés par leurs coordonnées) à valeurs dans  $E$  car la mesure donnée par le théorème d'extension de Kolmogorov est une mesure sur l'espace des fonctions : l'ordre linéaire sur  $\mathbb{R}_+$  n'y joue aucun rôle spécifique. Néanmoins, si l'on préfère indexer les temps dans l'ordre croissant, les conditions de compatibilité du théorème d'extension doivent être reformulées. Par ailleurs, pour tous réels  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , on effectue l'identification  $\{t_1, \dots, t_n\} \equiv \{1, \dots, n\}$ , ce qui entraîne

$$E^{\{t_1, \dots, t_n\}} \equiv E^n \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{\otimes \{t_1, \dots, t_n\}} \equiv \mathcal{E}^{\otimes n}, \quad (\text{I.33})$$

où il faut comprendre que  $E^n$  est l'espace des *fonctions* de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $E$  et où  $\mathcal{E}^{\otimes n}$  est la tribu produit associé à cet espace de fonctions. On obtient immédiatement l'énoncé suivant.

**Théorème I.2.14** (Théorème d'extension de Kolmogorov) *On suppose l'axiome du choix. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable supposé régulier. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous réels  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , on se donne une mesure de probabilité*

$$\nu_{\{t_1, \dots, t_n\}} : \mathcal{E}^{\otimes n} \rightarrow [0, 1].$$

*On suppose que ces mesures forment un système compatible, c'est-à-dire que pour tout entier  $n \geq 2$ , pour tous réels  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , pour tous  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$  et pour tout  $1 \leq m \leq n$ ,*

$$\nu_{\{t_1, \dots, t_n\}}(B_1 \times \dots \times B_{m-1} \times E \times B_{m+1} \times \dots \times B_n) = \nu_{\{t_1, \dots, t_n\} \setminus \{t_m\}}(B_1 \times \dots \times B_{m-1} \times B_{m+1} \times \dots \times B_n)$$

*avec des conventions évidentes si  $m=1$  ou  $n$ . Alors, les assertions suivantes, équivalentes, sont vérifiées.*

(i) *Il existe une mesure  $\mu : \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+} \rightarrow [0, 1]$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous réels  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,*

$$\mu \circ \pi_{\{t_1, \dots, t_n\}}^{-1} = \nu_{\{t_1, \dots, t_n\}}$$

*en faisant les identifications naturelles (I.33).*

(ii) *Il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et un processus  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  qui est  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous réels  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,*

$$\forall B \in \mathcal{E}^{\otimes n}, \quad \mathbf{P}((X_{t_m})_{1 \leq m \leq n} \in B) = \nu_{\{t_1, \dots, t_n\}}(B),$$

*en faisant les identifications naturelles (I.33).*

**Remarque I.2.15** (Limitation de la tribu  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ ) Soit  $E$  est un espace topologique métrisable séparable dont la tribu Borélienne est notée  $\mathcal{B}(E)$ . Le théorème I.2.5 affirme que

$$\mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}_+} = \{\pi_J^{-1}(A); J \subset I, J \text{ dénombrable}, A \in \mathcal{B}(E)^{\otimes J}\}.$$

Autrement dit un événement  $B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}_+}$  correspond à des conditions sur un ensemble *dénombrable* de temps. Par exemple si  $E = \mathbb{R}$ , on a

$$\{\mathbf{x} = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : \sup_{[0,1]} |x_t| < \infty\} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}.$$

De même l'événement "être continu à droite au temps  $t_0$ " n'est pas dans la tribu produit car il fait intervenir les valeurs des fonctions pour un ensemble non-dénombrable de temps.  $\square$

### Hypothèses courantes de régularité sur les processus.

**Définition I.2.16** Soit  $E$ , un espace topologique ; soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité et soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable.

(a)  $X$  est dit *continu à droite* (*càd*, en abrégé) si pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t(\omega) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} X_{t+h}(\omega)$ .

(b)  $X$  est dit *continu à droite et avec limite à gauche* (*càdlàg*, en abrégé) si pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t(\omega) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} X_{t+h}(\omega) \quad \text{et si} \quad \forall t \in ]0, \infty[, \quad X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} X_{t+h}(\omega) \text{ existe.}$$

(c)  $X$  est dit *continu* si pour tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} X_{t+h}(\omega)$ .  $\square$

Lorsque par exemple  $E = \mathbb{R}^n$ , l'espaces des fonctions continues et des fonctions càdlàg peuvent être munis de distances les rendant complets et séparables, la tribu des Boréliens étant la tribu trace de la tribu produit, ce qui prolonge les résultats déjà obtenus sur les processus. Plus précisément, faisons quelques rappels, sans preuve, des résultats fondamentaux concernant ces espaces.

**Espace des fonctions continues.** On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . On note  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ , l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$  et on munit cet espace de topologie de la convergence uniforme sur tous les ensembles (de temps) compact qui peut être par exemple engendrée par la distance suivante

$$x, y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \quad d(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \min \left( 1, \max_{t \in [0, n]} \|x_t - y_t\| \right).$$

On vérifie facilement que  $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), d)$  est un espace métrique séparable complet, c'est-à-dire un espace Polonais. On note toujours  $\pi_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la projection canonique au temps  $t$  qui à toute fonction  $x = (x_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$  associe  $\pi_t(x) = x_t$ . On peut montrer facilement les résultats suivants, rappelés ici sans preuve.

- $\pi_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- Les Boréliens de  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  sont engendrés par les projections canoniques :

$$\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)) = \sigma(\pi_t ; t \in \mathbb{R}_+). \tag{I.34}$$

Autrement dit,  $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$  est la tribu trace de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{R}_+}$  sur  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  :

$$\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)) = \{B \cap C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) ; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{R}_+}\}. \tag{I.35}$$

• On en déduit que si  $(\Omega, \mathcal{F})$  est un espace mesurable et si  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ , est une fonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable.
- (b)  $X : \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)))$ -mesurable.
- (c)  $X : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}_+}$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable.

Mentionnons que le point de vu (b) permet d'utiliser les résultats d'analyse sur la convergence étroite des mesures de probabilité sur les espaces Polonais, pour développer des théorèmes limites sur les processus dont le prototype est le théorème d'invariance de Donsker.

**Fonctions càdlàg.** On note  $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ , l'espace des fonctions càdlàg de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Il peut être muni de la *distance de Skorokod* (dont nous ne rappelons pas la définition) qui en fait une espace Polonais. On note toujours  $\pi_t : D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la projection canonique au temps  $t$  qui à toute fonction  $x = (x_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$  associe  $\pi_t(x) = x_t$ . On rappelle (sans preuve) les résultats suivants.

- $\pi_t$  est mesurable par rapport aux Boréliens de  $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  (cependant, rappelons que  $\pi_t$  n'est pas continue pour la distance de Skorohod).
- Les Boréliens de  $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  sont engendrés par les projections canoniques :

$$\mathcal{B}(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)) = \sigma(\pi_t ; t \in \mathbb{R}_+) . \quad (\text{I.36})$$

Autrement dit,  $\mathcal{B}(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n))$  est la tribu trace de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{R}_+}$  sur  $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  :

$$\mathcal{B}(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)) = \{B \cap D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) ; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{R}_+}\} . \quad (\text{I.37})$$

• On en déduit que si  $(\Omega, \mathcal{F})$  est un espace mesurable et si  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ , est une fonction, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable.
- $X : \Omega \rightarrow D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)))$ -mesurable.
- $X : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}_+}$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable.

Comme pour l'espace des fonctions continues, le point de vue (b) permet également de montrer des théorèmes limite pour les lois des processus càdlàg.

### Modification et indistingabilité.

**Définition I.2.17** (*Modification et indistingabilité*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soient  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  et  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , deux processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurables.

- $X$  est une  $\mathbf{P}$ -modification de  $Y$  si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'ensemble  $\{X_t \neq Y_t\}$  est un ensemble  $\mathbf{P}$ -négligeable.
- $X$  et  $Y$  sont  $\mathbf{P}$ -indistinguishables si  $\{\omega \in \Omega : \exists t \in \mathbb{R}_+, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$  est  $\mathbf{P}$ -négligeable.  $\square$

Tout d'abord quelques remarques.

- (1)  $X$  est une  $\mathbf{P}$ -modification de  $Y$  si et seulement si  $Y$  est une  $\mathbf{P}$ -modification de  $X$ .
- (2) Lorsque l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  est diagonal (voir la définition I.1.10, page 5), alors  $\{X_t = Y_t\} \in \mathcal{F}$  et  $X$  est une modification de  $Y$  ssi  $\mathbf{P}(X_t = Y_t) = 1$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ; on rappelle que tout espace régulier (et donc a fortiori Polonais) est diagonal (voir les résultats de la section I.1.b, page 5).
- (3) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité sous laquelle on considère les processus, on dit simplement que  $X$  est une modification de  $Y$ ; de même on dit simplement que  $X$  et  $Y$  sont indistinguables.

**Proposition I.2.18** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  et  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , deux processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurables. On suppose que  $X$  est une modification de  $Y$ . Alors,  $X$  et  $Y$  ont même loi.

On suppose de plus que  $E$  est un espace topologique, que  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$  et que  $X$  et  $Y$  sont càd. Alors,  $X$  et  $Y$  sont indistinguables. Par conséquent un processus n'a, à indistingualité près, qu'une modification càd.

**Preuve :** pour tous  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , on a  $\mathbf{P}$ -p.s.  $X_{t_k} = Y_{t_k}$ , pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Donc  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  et  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$  ont même loi sous  $\mathbf{P}$  et la proposition I.2.7 implique (i).

On suppose ensuite que  $E$  est un espace topologique et que  $X$  et  $Y$  sont càd. On pose  $N = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} \{X_q \neq Y_q\}$  qui est un ensemble  $\mathbf{P}$ -négligable (puisque c'est une union dénombrable d'ensembles  $\mathbf{P}$ -négligeables). Pour tout  $\omega \in \Omega \setminus N$ , on a  $X_q(\omega) = Y_q(\omega)$ ,  $q \in \mathbb{Q}_+$ . La continuité à droite de  $X$  et  $Y$  implique alors que pour tout  $\omega \in \Omega \setminus N$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ , ce qui termine la preuve. ■

### Filtrations continues à droite et à gauche.

**Définition I.2.19**  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  on introduit les tribus suivantes :

$$\mathcal{G}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{G}_s \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{t-} := \sigma(\mathcal{G}_s ; s \in [0, t[).$$

La définition de  $\mathcal{G}_{t-}$  ci-dessus n'a de sens que si  $t > 0$ . Par convention on pose  $\mathcal{G}_{0-} := \mathcal{G}_0$ . On appelle  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  la *filtration continue à droite* associée à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et on appelle  $(\mathcal{G}_{t-})_{t \in \mathbb{R}_+}$  la *filtration continue à gauche* associée à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On dit ensuite que la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est *continue à droite* si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{G}_{t+} = \mathcal{G}_t$ . De même, on dit que la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est *continue à gauche* si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{G}_{t-} = \mathcal{G}_t$ . □

On vérifie facilement les propriétés immédiates suivantes.

- (1) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{G}_{t-} \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_{t+}$ .
- (2) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , posons  $\mathcal{G}_t^+ := \mathcal{G}_{t+}$  et  $\mathcal{G}_t^- := \mathcal{G}_{t-}$ . Alors  $\mathcal{G}_{t+}^+ = \mathcal{G}_t^+ = \mathcal{G}_{t+}$  et  $\mathcal{G}_{t-}^- = \mathcal{G}_t^- = \mathcal{G}_{t-}$ . Autrement dit la filtration  $(\mathcal{G}_t^+)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continue à droite et la filtration  $(\mathcal{G}_t^-)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continue à gauche.
- (3) On reprend les notations du (2). Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{G}_{t-}^+ = \mathcal{G}_{t-}$  et  $\mathcal{G}_{t+}^- = \mathcal{G}_{t+}$ . En effet, si  $s < t$  (resp.  $s > t$ ),  $\mathcal{G}_s^+ \subset \mathcal{G}_{\frac{1}{2}(s+t)}^+$  (resp.  $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}(s+t)}^- \subset \mathcal{G}_s^-$ ) ce qui implique les résultats voulus.

**Progressive mesurabilité.** Jusqu'à présent, les processus ont été envisagés comme des fonctions aléatoires de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E$ . Nous introduisons ici une nouvelle idée : un processus  $X$  est une fonction  $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in E$ . Ce point de vue s'avère très fructueux dans de nombreuses situations impliquant des propriétés trajectorielles des temps d'arrêt, ou du calcul stochastique.

**Définition I.2.20** (*Progressive mesurabilité*) Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(\Omega, \mathcal{F})$ , des espaces mesurables. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. Le processus  $X$  est dit *progressivement mesurable par rapport à*  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  la fonction

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longmapsto X_s(\omega) \in E$$

est  $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t, \mathcal{E})$ -mesurable. □

On rappelle le résultat de mesurabilité suivant.

- (\*) Soient  $(E_1, \mathcal{E}_1)$ ,  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  et  $(E, \mathcal{E})$ , des espaces mesurables. Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ , supposée  $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{E})$ -mesurable. Alors, pour tout  $x \in E_1$ , l'application partielle  $f(x, \cdot) : E_2 \rightarrow E$  est  $(\mathcal{E}_2, \mathcal{E})$ -mesurable. De même, pour tout  $y \in E_2$ , l'application partielle  $f(\cdot, y) : E_1 \rightarrow E$  est  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})$ -mesurable.

Le résultat (\*) permet de démontrer le lemme suivant.

**Lemme I.2.21** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(\Omega, \mathcal{F})$ , des espaces mesurables. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. Si  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -progressivement mesurable, alors il est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté.

**Preuve :** on fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  et on note  $f : (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in E$ . Par hypothèse,  $f$  est  $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t, \mathcal{E})$ -mesurable et on observe que l'application partielle  $f(t, \cdot)$  est la variable  $X_t$  : la propriété (\*) qui précède implique donc que  $X_t$  est  $\mathcal{G}_t$ -mesurable. ■

L'adaptation n'implique en général pas la progressive mesurabilité. La proposition suivante donne cependant un critère, modulo la continuité à droite du processus.

**Proposition I.2.22** Soit  $E$ , un espace topologique. Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable sur lequel est définie une filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. On suppose que  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté et càd. Alors,  $X$  est progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

**Preuve :** soit  $s \in \mathbb{R}_+$ . On note  $\lceil s \rceil$  le plus petit entier strictement supérieur à  $s$  et on note  $\lfloor s \rfloor$  sa partie entière. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $X_t^n = X_{2^{-n}\lceil 2^n t \rceil}$ , puis à  $t \in \mathbb{R}_+$  fixé, on pose pour tous  $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$ ,

$$\phi_n(s, \omega) := X_s^n(\omega) \text{ si } s \in [0, 2^{-n}\lfloor 2^n t \rfloor[ \quad \text{et} \quad \phi_n(s, \omega) = X_t(\omega) \text{ si } s \in [2^{-n}\lfloor 2^n t \rfloor, t].$$

Soit  $B \in \mathcal{B}(E)$ . On vérifie que

$$\phi_n^{-1}(B) = ([2^{-n}\lfloor 2^n t \rfloor, t] \times \{X_t \in B\}) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq \lfloor 2^n t \rfloor} [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[ \times \{X_{k2^{-n}} \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t.$$

Cela montre donc que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_n$  est  $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t, \mathcal{B}(E))$ -mesurable. On pose ensuite  $\phi(s, \omega) := X_s(\omega)$ , pour tous  $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$ . On vérifie ensuite facilement que la continuité à droite de  $X$  implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$  ponctuellement que  $[0, t] \times \Omega$ . Donc  $\phi$  est  $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t, \mathcal{B}(E))$ -mesurable, ce qui permet de conclure. ■

### I.3 Temps d'arrêt.

#### I.3.a Définitions, premières propriétés.

**Définition I.3.1** (*Temps d'arrêt*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Une fonction  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t. \quad (\text{I.38})$$

On rappelle que  $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\mathcal{G}_t; t \in \mathbb{R}_+)$  et on définit ensuite

$$\mathcal{G}_T = \{A \in \mathcal{G}_\infty : \forall t \in \mathbb{R}_+, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t\}.$$

On vérifie que  $\mathcal{G}_T$  est une sous-tribu de  $\mathcal{G}_\infty$ . Elle est appelée *tribu des événements antérieurs à T*. □

Quelques remarques.

- (1) Comme  $\{T > t\} = \Omega \setminus \{T \leq t\}$  et puisqu'une tribu est stable par passage au complémentaire,  $T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêtssi  $\{T > t\} \in \mathcal{G}_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

(2) Vérifions ensuite que  $\mathcal{G}_T$  est une tribu : il est clair que  $\Omega \in \mathcal{G}_T$  par (I.38). Si  $A \in \mathcal{G}_T$ , on vérifie que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$(\Omega \setminus A) \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap (\Omega \setminus (A \cap \{T \leq t\})) \in \mathcal{G}_t.$$

Enfin si  $A_n \in \mathcal{G}_T$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{G}_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Le lemme suivant détaille quelques propriétés simples des temps d'arrêt.

**Lemme I.3.2** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soient  $T$  et  $S$ , deux  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêts. Alors, les résultats suivants sont vérifiés.

- (i)  $S \wedge T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et  $\mathcal{G}_{S \wedge T} = \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T$ .
- (ii) Si  $S \leq T$  partout sur  $\Omega$ , alors  $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_T$ .
- (iii)  $S \vee T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et  $\mathcal{G}_{S \vee T} = \sigma(\mathcal{G}_S, \mathcal{G}_T)$ .
- (iv)  $S + T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

**Preuve :** pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on remarque d'abord que l'événement  $\{S \wedge T > t\} = \{S > t\} \cap \{T > t\} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $S \wedge T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt (voir la remarque (1) ci-dessus). Soit  $A \in \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T$ . Alors

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{G}_t.$$

Donc  $A \in \mathcal{G}_{S \wedge T}$ . On a donc montré  $\mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_{S \wedge T}$ . Soit  $B \in \mathcal{G}_{S \wedge T}$ . Alors  $B \cap \{S \leq t\} = (B \cap \{S \wedge T \leq t\}) \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $B \in \mathcal{G}_S$ . On en déduit  $\mathcal{G}_{S \wedge T} \subset \mathcal{G}_S$ . De même  $\mathcal{G}_{S \wedge T} \subset \mathcal{G}_T$  et donc  $\mathcal{G}_{S \wedge T} \subset \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T$ , ce qui termine la preuve de (i).

Le point (ii) est une conséquence immédiate de (i). Montrons (iii) : soit  $t \in \mathbb{R}_+$  ; on remarque d'abord que  $\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $S \vee T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Soit  $A \in \mathcal{G}_S$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $A \cap \{S \vee T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \vee T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $A \in \mathcal{G}_{S \vee T}$ . Donc  $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_{S \vee T}$ . De même,  $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_{S \vee T}$  et par conséquent  $\sigma(\mathcal{G}_S, \mathcal{G}_T) \subset \mathcal{G}_{S \vee T}$ . On remarque ensuite que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\{T < S \leq t\} = \bigcup_{q \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \{q \leq S \leq t\} \cap \{T < q\} \in \mathcal{G}_t.$$

Donc  $\{S \leq T \leq t\} = \{T \leq t\} \setminus \{T < S \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . Soit  $B \in \mathcal{G}_{S \vee T}$ . On pose  $C = B \cap \{S \leq T\}$  et on observe que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $C \cap \{T \leq t\} = (B \cap \{S \vee T \leq t\}) \cap \{S \leq T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $C \in \mathcal{G}_T$ , c'est-à-dire  $B \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{G}_T$ . De même, on montre que  $B \cap \{T \leq S\} \in \mathcal{G}_S$ . Donc

$$B = (B \cap \{S \leq T\}) \cup (B \cap \{T \leq S\}) \in \sigma(\mathcal{G}_S, \mathcal{G}_T).$$

Par conséquent,  $\mathcal{G}_{S \vee T} \subset \sigma(\mathcal{G}_S, \mathcal{G}_T)$ , ce qui termine la preuve de (iii).

Montrons (iv). Pour cela, on remarque que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a On observe que

$$\{0 < T \leq t ; S + T > t\} = \bigcup_{q \in ]0, t[ \cap \mathbb{Q}} \{q < T \leq t\} \cap \{S > t - q\} \in \mathcal{G}_t$$

De plus,  $\{T = 0 ; S > t\} \in \mathcal{G}_t$ . Comme  $S$  et  $T$  jouent des rôles symétriques on en déduit que  $\{0 < S \leq t ; S + T > t\} \in \mathcal{G}_t$  et  $\{S = 0 ; T > t\}$ . Enfin on a  $\{S \wedge T > t\} \in \mathcal{G}_t$ , ce qui implique facilement (iv). ■

**Lemme I.3.3** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(\Omega, \mathcal{F})$ , des espaces mesurables. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. On rappelle la notation  $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\mathcal{G}_t; t \in \mathbb{R}_+)$  et on se donne  $X_\infty : \Omega \rightarrow E$ , une v.a.  $(\mathcal{G}_\infty, \mathcal{E})$ -mesurable, ce qui permet de définir

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

On suppose que  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -progressivement mesurable. Alors,  $X_T$  est  $(\mathcal{G}_T, \mathcal{E})$ -mesurable.

**Preuve :** pour tout  $t \in [0, \infty]$ , on pose  $Y_t : (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \rightarrow X_s(\omega) \in E$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $B \in \mathcal{E}$ , par hypothèse,  $\{Y_t \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t$ . On remarque ensuite que

$$Y_\infty^{-1}(B) = (\{\infty\} \times X_\infty^{-1}(B)) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n^{-1}(B) \in \mathcal{B}([0, \infty]) \otimes \mathcal{G}_\infty$$

Donc pour tout  $t \in [0, \infty]$ ,  $Y_t$  est  $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t, \mathcal{E})$ -mesurable.

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . On note  $\mathcal{G}_t^* := \{A \cap \{T \leq t\}; A \in \mathcal{G}_t\}$ , qui est une tribu sur  $\{T \leq t\}$  (c'est la tribu trace de  $\mathcal{G}_t$  sur  $\{T \leq t\}$ ). On vérifie que  $Z_t : \omega \in \{T \leq t\} \mapsto (T(\omega), \omega) \in [0, t] \times \Omega$  est  $(\mathcal{G}_t^*, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t)$ -mesurable. En effet, pour tout  $A \in \mathcal{G}_t$  et tout  $s \in [0, t]$ , on a  $Z_t^{-1}([0, s] \times A) = A \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{G}_t^*$ , et il est facile de montrer que  $\{[0, s] \times A; s \in [0, t], A \in \mathcal{G}_t\}$  est un pi-système générant  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t$ .

De même, on introduit  $Z_\infty : \omega \in \Omega \rightarrow (T(\omega), \omega) \in [0, \infty] \times \Omega$  qui est  $(\mathcal{G}_\infty, \mathcal{B}([0, \infty]) \otimes \mathcal{G}_\infty)$ -mesurable. On remarque alors que  $X_T = Y_\infty \circ Z_\infty$ , qui est donc une v.a.  $(\mathcal{G}_\infty, \mathcal{E})$ -mesurable. Soit  $B \in \mathcal{E}$ . On pose  $A := \{X_T \in B\}$ . Ce qui précède montre que  $A \in \mathcal{G}_\infty$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$ . On remarque que  $A \cap \{T \leq t\} = (Y_t \circ Z_t)^{-1}(B)$ . Donc  $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t^*$ , ce qui implique que  $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . On en déduit que  $A \in \mathcal{G}_T$ , ce qui termine la preuve. ■

**Définition I.3.4** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

- (a) On définit  $\mathcal{G}_{T+} := \{A \in \mathcal{G}_\infty : \forall t \in ]0, \infty[ \quad A \cap \{T < t\} \in \mathcal{G}_t\}$ , qui est une sous-tribu de  $\mathcal{G}_\infty$ .
- (b) On définit  $\mathcal{G}_{T-} = \sigma(B \cap \{T > t\}; t \in \mathbb{R}_+, B \in \mathcal{G}_t)$ , qui est une sous-tribu de  $\mathcal{G}_\infty$ . □

**Lemme I.3.5** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $T$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêtssi  $\{T < t\} \in \mathcal{G}_t$  pour tout  $t \in ]0, \infty[$ .
- (ii) Supposons que  $T$  soit un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On pose  $\mathcal{G}_t^+ = \mathcal{G}_{t+}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Alors  $T$  est un  $(\mathcal{G}_t^+)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et on a

$$\mathcal{G}_{T+} = \mathcal{G}_T^+ = \{A \in \mathcal{G}_\infty : \forall t \in \mathbb{R}_+, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_{t+}\}.$$

- (iii) Supposons que  $T$  soit un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et supposons que  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  soit continue à droite c'est-à-dire que  $\mathcal{G}_{t+} = \mathcal{G}_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Alors  $\mathcal{G}_{T+} = \mathcal{G}_T$ .

- (iv) Supposons que  $T$  soit un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On rappelle la convention  $\mathcal{G}_{0-} := \mathcal{G}_0$ . Alors

$$\mathcal{G}_{T-} = \sigma(B \cap \{T \geq t\}; t \in \mathbb{R}_+, B \in \mathcal{G}_{t-}) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{T-} \subset \mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_{T+}.$$

- (v) Supposons que  $T$  soit un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Alors,  $T$  est  $\mathcal{G}_{T-}$ -mesurable.

**Preuve :** supposons d'abord que  $\{T < t\} \in \mathcal{G}_t$  pour tout  $t \in ]0, \infty[$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\{T \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T < t + 2^{-n}\} \in \mathcal{G}_{t+}$ , ce qui implique que  $T$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Réciproquement si  $T$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt, pour tout  $t \in ]0, \infty[$ , on a  $\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T < t - 2^{-n}\} \in \mathcal{G}_t$ , ce qui termine la preuve de (i). Un raisonnement analogue montre (ii). Enfin, le point (ii) implique immédiatement (iii).

Montrons le point (iv). On pose  $\mathcal{H} = \sigma(B \cap \{T \geq t\}; t \in \mathbb{R}_+, B \in \mathcal{G}_{t-})$ . Soit  $B \in \mathcal{G}_{t-}$ . Il est clair que  $\{T=t\} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $B \cup \{T=t\} \in \mathcal{G}_t$  et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall B \in \mathcal{G}_{t-}, \quad B \cap \{T \geq t\} = (B \cup \{T=t\}) \cap \{T > t\} \in \mathcal{G}_{t-},$$

ce qui implique que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_{t-}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $B \in \mathcal{G}_t$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $B \in \mathcal{G}_{(t+2^{-n})-}$ , donc  $B \cap \{T \geq t + 2^{-n}\} \in \mathcal{H}$  et donc  $B \cap \{T > t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B \cap \{T \geq t + 2^{-n}\} \in \mathcal{H}$ . Cela implique que  $\mathcal{G}_{t-} \subset \mathcal{H}$  et donc  $\mathcal{G}_{t-} = \mathcal{H}$ .

On vérifie immédiatement que  $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_{T+}$ . On fixe  $s \in \mathbb{R}_+$  et  $B \in \mathcal{G}_s$  et on pose  $A := B \cap \{T > s\}$ . Il est clair que  $A \in \mathcal{G}_\infty$ . Alors, Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Si  $t \leq s$ , alors  $A \cap \{T \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{G}_t$ . Si  $t > s$ , alors  $B \in \mathcal{G}_t$ ,  $\{s < T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$  et donc  $A \cap \{T \leq t\} = B \cap \{s < T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ . Dans tous les cas  $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ , ce qui implique que  $A \in \mathcal{G}_T$  et donc  $\mathcal{G}_{T-} \subset \mathcal{G}_T$ . Cela termine la preuve de (iv). Le point (v) vient immédiatement du fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\{T > t\} \in \mathcal{G}_{T-}$ . ■

**Lemme I.3.6** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soient  $S, T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , deux  $(\mathcal{G}_t)$ -temps d'arrêt. Les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Pour tout  $A \in \mathcal{G}_S$ ,  $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{G}_T$  et  $A \cap \{S < T\} \in \mathcal{G}_{T-}$ .
- (ii) Si  $S \leq T$  partout sur  $\Omega$ , alors  $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_T$ ,  $\mathcal{G}_{S+} \subset \mathcal{G}_{T+}$  and  $\mathcal{G}_{S-} \subset \mathcal{G}_{T-}$ .
- (iii)  $\{S=T\}$  et  $\{S \leq T\}$  sont dans  $\mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T$  et  $\{S < T\}$  est dans  $\mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_{T-}$ .

**Preuve :** on observe d'abord que  $\{T < S \leq t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} \{T < q\} \cap \{S \leq t\} \cap (\Omega \setminus \{S \leq q\}) \in \mathcal{G}_t$ . On en déduit que

$$\{S \leq T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap (\Omega \setminus \{T < S \leq t\}) \in \mathcal{G}_t. \quad (\text{I.39})$$

Soit  $A \in \mathcal{G}_S$ . Donc  $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{G}_t$  et  $(A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \leq T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$  par (I.39). Cela montre que  $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{G}_T$ . On observe ensuite que  $A \cap \{S < T\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} (A \cap \{S < q\}) \cap \{T > q\}$ . Or  $A \cap \{S < q\} \in \mathcal{G}_{q-} \subset \mathcal{G}_q$ . Donc  $(A \cap \{S < q\}) \cap \{T > q\} \in \mathcal{F}_{T-}$ , ce qui entraîne que  $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{G}_{T-}$  et la preuve de (i) est terminée.

Prouvons (ii) : soit  $A \in \mathcal{G}_S$ . Comme  $S \leq T$  partout sur  $\Omega$ ,  $A = A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{G}_T$ , par (i). Cela montre que  $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_T$ . Cela montre aussi que  $\mathcal{G}_S^+ \subset \mathcal{G}_T^+$ , où  $\mathcal{G}_t^+ = \mathcal{G}_{t+}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Mais le lemme I.3.5 (ii) implique que  $\mathcal{G}_T^+ = \mathcal{G}_{T+}$  et  $\mathcal{G}_S^+ = \mathcal{G}_{S+}$ , et on a donc  $\mathcal{G}_{S+} \subset \mathcal{G}_{T+}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , et tout  $B \in \mathcal{G}_t$ , on remarque ensuite que  $B \cap \{t < S\} \in \mathcal{G}_t$  et donc que

$$B \cap \{t < S\} = (B \cap \{t < S\}) \cap \{t < T\} \in \mathcal{G}_{T-}$$

ce qui entraîne  $\mathcal{G}_{S-} \subset \mathcal{G}_{T-}$ . Cela termine la preuve de (ii).

Montrons (iii) : on observe que  $\{S < T\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_+} \{S < q\} \cap \{T \geq q\}$ . Or  $\{S < q\} \in \mathcal{G}_{q-}$ , donc, par le lemme I.3.5 (iv),  $\{S < q\} \cap \{T \geq q\} \in \mathcal{G}_{T-}$ , ce qui implique que

$$\{S < T\} \in \mathcal{G}_{T-}. \quad (\text{I.40})$$

On observe ensuite que (I.39) implique que  $\{S \leq T\} \in \mathcal{G}_T$ . En échangeant les rôles de  $S$  and  $T$ , on obtient que  $\{T \leq S\} \in \mathcal{G}_S$ . Par conséquent,  $\{S < T\} = \Omega \setminus \{T \leq S\} \in \mathcal{G}_S$  et (I.40) implique que  $\{S < T\} \in \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_{T-}$ . Comme  $\mathcal{G}_{T-} \subset \mathcal{G}_T$ , on en déduit que  $\{S < T\} \in \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T$  et donc

$$\{S = T\} = \{S \leq T\} \cap (\Omega \setminus \{S < T\}) \in \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T.$$

Enfin on remarque  $\{S \leq T\} = \{S < T\} \cup \{S = T\} \in \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}_T$ , ce qui complète la preuve de (iii).  $\blacksquare$

**Proposition I.3.7** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soient  $T_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n \leq T_{n+1}$  partout. Alors,  $T := \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et

$$\mathcal{G}_{T-} = \sigma(\mathcal{G}_{T_n-}; n \in \mathbb{N}).$$

(ii) On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} \leq T_n$  partout. Alors  $T := \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et

$$\mathcal{G}_{T+} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{T_n+}.$$

**Preuve :** on prouve (i) ;  $T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt car  $\{T \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_n \leq t\}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Le lemme I.3.6 (ii) implique que  $\mathcal{G}_{T_n-} \subset \mathcal{G}_{T-}$  et donc  $\sigma(\mathcal{G}_{T_n-}; n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{G}_{T-}$ . Soient  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $B \in \mathcal{G}_t$ . On remarque alors que  $B \cap \{t < T\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B \cap \{t < T_n\}$ ; comme par définition  $B \cap \{t < T_n\} \in \mathcal{G}_{T_n-}$ , on a donc  $B \cap \{t < T\} \in \sigma(\mathcal{G}_{T_n-}; n \in \mathbb{N})$ , ce qui entraîne  $\mathcal{G}_{T-} \subset \sigma(\mathcal{G}_{T_n-}; n \in \mathbb{N})$  et ce qui termine la preuve de (i).

Montrons (ii) : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n < t\} \in \mathcal{G}_t$ ; le lemme I.3.5 (i) implique que  $T$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Le lemme I.3.6 (ii) implique que  $\mathcal{G}_{T+} \subset \mathcal{G}_{T_n+}$  et donc  $\mathcal{G}_{T+} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{T_n+}$ . Soit  $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{T_n+}$ . On a donc  $A \in \mathcal{G}_\infty$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $A \cap \{T_n < t\} \in \mathcal{G}_t$  et donc

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap \{T_n < t\} \in \mathcal{G}_t.$$

et donc  $A \in \mathcal{G}_{T+}$ , ce qui termine la preuve.  $\blacksquare$

### I.3.b Existence de temps d'arrêt, complétion des filtrations.

**Temps d'arrêt élémentaires.** Cette section est consacrée à l'existence de temps d'arrêt intéressants. Nous commençons par quelques définition et quelques résultats relativement simples – même si leur preuve est longue.

**Définition I.3.8** (*Temps d'atteinte, de retour et d'approche*) Soit  $E$ , un espace topologique métrisable et séparable. Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soient  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  et  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , des fonctions. Soit  $A \in \mathcal{B}(E)$ .

(a) On pose :

$$T_{T,A} := \inf \{t \in [T, \infty[ : X_t \in A\} \quad \text{et} \quad T_{T,A}^+ := \inf \{t \in ]T, \infty[ : X_t \in A\}$$

avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . Le temps  $T_{T,A}$  est le *temps d'atteinte de A par X après T* et le temps  $T_{T,A}^+$  est le *temps de retour en A de X après T*.

(b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on utilise ensuite la notation

$$\Gamma_{T,t} = \overline{\{X_s ; s \in [T, t]\}},$$

qui est l'adhérence de  $\{X_s ; s \in [T, t]\}$  dans  $E$ , avec la convention que  $\Gamma_{T,t} = \emptyset$  si  $T = \infty$ . On définit alors le *temps d'approche de A par X après T* par

$$S_{T,A} = \inf \{t \in [T, \infty[ : \Gamma_{T,t} \cap A \neq \emptyset\},$$

avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ .

Si  $T$  est nul partout, on note  $T_{T,A}, T_{T,A}^+$  et  $S_{T,A}$  simplement par  $T_A, T_A^+$  et  $S_A$ .  $\square$

**Remarque I.3.9** On reprend les notations de la définition précédente et on suppose que  $X$  est continu partout sur  $\Omega$ . Alors,  $\Gamma_{T,t} = \{X_s ; s \in [T, t]\}$ . Donc

$$T_{T,A} = S_{T,A}. \quad (\text{I.41})$$

En effet, si  $X_t \in A$ , alors  $\Gamma_{T,t} \cap A \neq \emptyset$ , ce qui montre que  $S_{T,A} \leq T_{T,A}$ . Soit  $t_0$  tel que  $t_0 > S_{T,A}$  : il existe donc  $t \in [T, t_0]$  tel que  $\Gamma_{T,t} \cap A \neq \emptyset$ , ce qui implique l'existence de  $s \in [T, t]$  tel que  $X_s \in A$  et donc  $T_{T,A} \leq t < t_0$ . En choisissant  $t_0$  arbitrairement proche de  $S_{T,A}$ , on obtient  $T_{T,A} \leq S_{T,A}$ , ce entraîne (I.41).  $\square$

**Remarque I.3.10** On reprend les notations de la définition précédente et on suppose  $X$  est càdlàg partout sur  $\Omega$ . Alors,

$$\Gamma_{T,t} = \{X_T\} \cup \{X_s, X_{s-} ; s \in ]T, t]\} \text{ si } T < \infty \quad \text{et} \quad \Gamma_{T,t} = \emptyset \text{ si } T = \infty. \quad (\text{I.42})$$

Supposons que  $T < \infty$ . On constate d'abord clairement que  $\{X_s, X_{s-} ; s \in ]T, t]\} \subset \Gamma_{T,t}$ . Supposons que  $y \in \Gamma_{T,t}$ . Comme  $E$  est métrisable, il existe  $t_n \in [T, t]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $X_{t_n} \rightarrow y$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $s \in [T, t]$ , une valeurs d'adhérence de la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Si l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} : t_n \geq s\}$  est infini, alors par continuité à droite de  $X$ , on a  $X_s = y$ . En particulier, si  $s = T$ , alors,  $\{n \in \mathbb{N} : t_n \geq T\} = \mathbb{N}$  et donc  $X_T = y$ . Si l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} : t_n < s\}$  est infini, alors  $s > T$ , nécessairement, et on a  $X_{s-} = y$ . Dans cas cas  $y \in \{X_T\} \cup \{X_s, X_{s-} ; s \in ]T, t]\}$ , ce qui permet de montrer (I.42).  $\square$

**Remarque I.3.11** On reprend les notations de la définition précédente. Soient  $T_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , une suite de temps aléatoires décroissants vers  $T$  et tels que

$$T < \infty \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n > T. \quad (\text{I.43})$$

Par exemple les temps  $T_n := T + 2^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , satisfont ces conditions. On observe alors que

$$T_{T,A}^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} T_{T_n,A}. \quad (\text{I.44})$$

En effet, il est clair que  $T_{T,A}^+ \leq T_{T_n,A}$  donc  $T_{T,A}^+ \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} T_{T_n,A}$ . Supposons ensuite que  $T_{T,A}^+ < \infty$ . Cela implique d'une part que  $T < \infty$  et d'autre part qu'il existe une suite  $t_p \in ]T, \infty[$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , décroissant vers  $T_{T,A}^+$  et telle que  $X_{t_p} \in A$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Comme  $T < t_p < \infty$ , (I.43) implique l'existence de  $n_p \in \mathbb{N}$  tel que  $T_{n_p} < t_p$  et donc  $T_{T_{n_p},A} \leq t_p$ . Cela montre donc que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_{T_n,A} \leq t_p$  et donc  $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_{T_n,A} \leq T_{T,A}^+$ , ce qui termine la preuve de (I.44).  $\square$

La proposition suivante montre que sous certaines conditions de régularité de la trajectoire les temps d'atteinte/de retour/d'approche d'un ouvert, d'un fermé ou d'un compact sont des temps d'arrêt.

**Théorème I.3.12** Soit  $(E, d)$ , un espace métrique séparable. Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace de mesurable muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté et soit  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) On suppose  $X$  càd partout sur  $\Omega$ . Alors, pour tout ouvert  $U$  de  $E$ , les temps  $T_{T,U}$  et  $T_{T,U}^+$  sont des  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.
- (ii) On suppose  $X$  càd partout sur  $\Omega$ . Soit  $K$ , un compact de  $E$ . Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels décroissant strictement vers 0. On pose  $U_n = \{x \in E : d(x, K) < \varepsilon_n\}$  qui est un ouvert de  $E$ . Alors

$$T_{T,U_n} \leq T_{T,U_{n+1}} \quad \text{et} \quad S_{T,K} = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{T,U_n}. \quad (\text{I.45})$$

Par ailleurs, le temps d'approche  $S_{T,K}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

- (iii) On suppose  $X$  càdlàg partout sur  $\Omega$ . Soit  $F$ , un fermé de  $E$ . Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels décroissant strictement vers 0. On pose  $U_n = \{x \in E : d(x, F) < \varepsilon_n\}$  qui est un ouvert de  $E$ . Alors

$$T_{T,U_n} \leq T_{T,U_{n+1}} \quad \text{et} \quad S_{T,F} = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{T,U_n}. \quad (\text{I.46})$$

Par ailleurs, le temps d'approche  $S_{T,F}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. De plus on a

$$S_{T,F} = \begin{cases} \inf \{t \in ]T, \infty[ : X_t \text{ ou } X_{t-} \in F\} & \text{si } T < \infty \text{ et } X_T \notin F. \\ T & \text{si } T < \infty \text{ et } X_T \in F \text{ ou si } T = \infty. \end{cases}$$

- (iv) On suppose  $X$  càdlàg partout sur  $\Omega$ . On introduit alors

$$S_{T,F}^+ = \inf \{t \in ]T, \infty[ : X_t \text{ ou } X_{t-} \in F\} \text{ avec la convention que } \inf \emptyset = \infty. \quad (\text{I.47})$$

Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt tels que  $T \leq T_n \leq T_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  et tels que si  $T < \infty$  alors  $T_n > T$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$S_{T_{n+1},F} \leq S_{T_n,F} \quad \text{et} \quad S_{T,F}^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} S_{T_n,F} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{T_n,F}. \quad (\text{I.48})$$

et  $S_{T,F}^+$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

- (v) Si  $X$  est continu partout sur  $\Omega$ , on a  $S_{T,F} = T_{T,F}$  et donc  $T_{T,F}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

**Preuve :** prouvons (i). Soit  $t \in ]0, \infty[$ . Si  $s \in [T, t[$  est tel que  $X_s \in U$ , alors – puisque  $X$  est càd et puisque  $U$  est ouvert – il existe un rationnel  $q \in [s, t[$  tel que  $X_q \in U$  et donc

$$\{T_{T,U} < t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t[} \{T \leq q\} \cap \{X_q \in U\} \in \mathcal{G}_t.$$

Le lemme I.3.5 (i) implique que  $T_{T,U}$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On pose ensuite  $T_n := T + 2^{-n}$ , qui est également un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt; ce que l'on vient de montrer implique que  $T_{T_n,U}$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. La proposition I.3.7 (ii) implique que  $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_{T_n,U}$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Or (I.44) (remarque I.3.11) montre que  $T_{T,U}^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} T_{T_n,U}$ , qui est donc  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt, ce qui termine la preuve de (i).

Montrons (ii). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n := \{x \in E : d(x, K) < \varepsilon_n\}$ . On rappelle que  $x \mapsto d(x, K)$  est 1-Lipschitzienne, ce qui implique que les ensembles  $U_n$  sont des ouverts de  $E$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Supposons d'abord que  $S_{T,K} \leq t$  et que  $X_t \notin K$ . Donc  $d(X_t, K) < 0$  et par continuité de  $d(\cdot, K)$  et continuité à droite de  $X$ ,  $s \mapsto d(X_s, K)$  est continue à droite et il existe donc des réels  $\varepsilon, \eta > 0$  tels que  $d(X_s, K) > \eta$ , pour tout  $s \in [t, t + \varepsilon]$ . Comme  $S_{T,K} \leq t$ ,  $\Gamma_{T,t+\varepsilon} \cap K \neq \emptyset$ . Il existe donc une suite de temps  $t_p \in [T, t + \varepsilon]$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , telle que  $d(X_{t_p}, K) \rightarrow 0$  lorsque  $p \rightarrow \infty$ . Ce qui précède implique alors que  $t_p \in [T, t[$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  assez grand. Par conséquent, il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $t_{p(n)} \in [T, t[$  et  $d(X_{t_{p(n)}}, K) < \varepsilon_n$ . Autrement dit,  $X_{t_{p(n)}} \in U_n$  et en particulier  $T_{T,U_n} < t$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs si  $S_{T,K} \leq t$  et  $X_t = K$ , alors  $T_{T,U_n} \leq t$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Combiné avec ce qui précède, cela implique que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , si  $S_{T,K} \leq t$  alors  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} \leq t$ . Cela entraîne donc que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} \leq S_{T,K}$ .

Supposons ensuite que  $T_{T,U_n} < t$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $t_n \in [T, t[, tel que  $d(X_{t_n}, K) < \varepsilon_n$ . Comme  $K$  est compact, la fonction  $y \mapsto d(X_{t_n}, y)$  atteint son infimum sur  $K$ . Il existe donc  $y_n \in K$  tel que  $d(X_{t_n}, y_n) = d(X_{t_n}, K) < \varepsilon_n$ . Comme  $K$  est compact, on extrait de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $y \in K$ . On a donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,$

$$d(y, \Gamma_{T,t}) \leq d(y, X_{t_{n(k)}}) \leq d(y, y_{n(k)}) + d(y_{n(k)}, X_{t_{n(k)}}) < d(y, y_{n(k)}) + \varepsilon_{n(k)} \longrightarrow 0$$

lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Donc  $d(y, \Gamma_{T,t}) = 0$ . Comme  $\Gamma_{T,t}$  est un fermé de  $E$ ,  $y \in \Gamma_{T,t}$ . On a donc  $y \in \Gamma_{T,t} \cap K$  et donc  $S_{T,K} \leq t$ .

Cela entraîne d'une part pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , si  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} < t$ , alors  $S_{T,K} \leq t$  et donc que  $S_{T,K} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n}$ . Combiné avec l'inégalité large contraire précédente, cela prouve (I.45).

Par ailleurs, les arguments précédents prouvent plus précisément que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\{S_{T,K} \leq t\} = (\{T \leq t\} \cap \{X_t \in K\}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_{T,U_n} < t\}.$$

Donc  $\{S_{T,K} \leq t\} \in \mathcal{G}_t$  par le (i). Cela prouve que  $S_{T,K}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt et cela complète la preuve de (ii).

Montrons le point (iii). Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . On suppose que  $S_{T,F} \leq t$ . Alors, ou bien  $T \leq t$  et  $X_t \in F$ , ou bien  $T \leq t$  et  $X_t \notin F$ . Dans ce cas, on reprend les arguments de la preuve du (ii) pour en déduire que  $T_{T,U_n} < t$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En raisonnant comme au (ii), cela implique facilement que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} \leq S_{T,F}$ .

Supposons maintenant que  $T_{T,U_n} < t$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $t_n \in [T, t[, tel que  $d(X_{t_n}, F) < \varepsilon_n$ . Soit  $s \in [T, t]$ , une valeur d'adhérence de la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Si l'ensemble d'indices  $\{n \in \mathbb{N} : t_n \geq s\}$  est infini, la continuité à droite de  $X$  implique que  $d(X_s, F) = 0$  et comme  $F$  est fermé on a donc  $X_s \in F$ , ce qui implique que  $S_{T,F} \leq t$ . Si l'ensemble d'indices  $\{n \in \mathbb{N} : t_n < s\}$  est infini, on a  $d(X_{s-}, F) = 0$  et comme  $F$  est fermé on a donc  $X_{s-} \in F$ , ce qui implique que  $X_{s-} \in \Gamma_{T,t} \cap F$  (voir (I.42), remarque I.3.10) et donc  $S_{T,F} \leq t$ . En raisonnant comme au (ii), cela implique facilement que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_{T,U_n} \geq S_{T,F}$  et donc l'égalité (I.46).$

Par ailleurs, les arguments précédents prouvent plus précisément que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\{S_{T,F} \leq t\} = (\{T \leq t\} \cap \{X_t \in F\}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_{T,U_n} < t\} \in \mathcal{G}_t,$$

par le (i). Cela montre que  $S_{T,F}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Enfin (I.42), à la remarque I.3.10 implique (I.3.12). Cela termine la preuve de (iii).

Montrons (iv) et plus précisément, montrons tout d'abord (I.48). Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on introduit  $I_+(t) = \{s \in ]t, \infty[ : X_s \text{ ou } X_s \in F\}$  et on pose  $I(t) = I_+(t)$  si  $X_t \notin F$  et  $I(t) = \{t\} \cup I_+(t)$  si  $X_t \in F$ . On pose aussi  $I(\infty) = \emptyset$ . On observe d'abord que par (iii),  $\inf I(T_n) = S_{T_n,F}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $S_{T,F}^+ = \inf I_+(T)$ . On remarque ensuite que  $I(T_{n+1}) \subset I(T_n)$  et  $I_+(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I(T_n)$ , ce qui implique (I.48). Par (iii), les  $S_{T_n,F}$

sont des  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt donc (I.48) combiné à la proposition I.3.7 (ii) (page 28) impliquent que  $S_{T,F}^+$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt, ce qui termine la preuve de (iv).

Enfin, si  $X$  est continu, (I.41 et la remarque I.3.9 combinés avec (iii) permettent de prouver (v), ce qui termine la preuve du théorème. ■

**Problème de mesurabilité des temps d'arrêt.** Le théorème I.3.12 fait une liste assez complète des temps d'arrêt dont l'existence se prouve par des arguments élémentaires. Dès que l'on s'éloigne un peu des hypothèses de ce théorème, il devient assez compliqué de prouver la mesurabilité de certains temps d'arrêt aussi naturels que les temps d'atteinte de compacts. En effet, signalons le fait suivant : on reprend les notations du théorème I.3.12 ; on suppose  $X$  est càdlàg et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté ; soit  $K$ , un compact de  $E$  ; on rappelle que  $T_K = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t \in K\}$  est le premier temps d'atteinte de  $K$ . C'est une fonction de  $\Omega$  dans  $[0, \infty]$ . Dellacherie a montré que dans certains cas  $T_K$  n'est pas  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable. Cette obstruction entraîne que  $T_K$  ne peut être un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt, ni-même un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. En revanche, cela devient le cas si l'on enrichit la filtration avec les ensembles  $\mathbf{P}$ -négligeables. Comme expliqué dans les paragraphes suivants, il s'agit d'un fait général qui s'exprime informellement en la "philosophie" suivante : *tous les temps d'arrêt auxquels on peut penser naturellement sont des "vrais" temps d'arrêt relativement à la filtration continue à droite enrichie par les ensembles  $\mathbf{P}$ -négligeables.*

**Complétion des filtration** Le lecteur est invité à lire la section ??, en appendice page ??, sur la complétion des espaces mesurés. Nous rappelons les notations suivantes. Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$ , un espace mesuré. L'ensemble des  $\mu$ -négligeables est défini par

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \subset E : \exists B \in \mathcal{E}, A \subset B, \mu(B) = 0\}.$$

On observe qu'un ensemble  $\mu$ -négligeable n'est pas nécessairement dans la tribu  $\mathcal{E}$ . On définit la  $\mu$ -complétion de la tribu  $\mathcal{E}$  par

$$\mathcal{E}^\mu := \sigma(\mathcal{E}, \mathcal{N}_\mu).$$

On rappelle les résultats suivants.

(a) Le théorème ??, page ??, montre que *la mesure  $\mu$  s'étend de manière unique à la tribu  $\mu$ -complétée  $\mathcal{E}^\mu$ .*

On note systématiquement  $\mu$  cette extension, bien que cela soit un abus de notation. On rappelle qu'une tribu est dite  $\mu$ -complète si  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\mu$ .

(b) On rappelle que l'extension  $\mathcal{E}^\mu$  est  $\mu$ -complète, c'est -à-dire que *la tribu  $\mathcal{E}^\mu$  complétée par l'extension de  $\mu$  à  $\mathcal{E}^\mu$  est  $\mathcal{E}^\mu$  elle-même.*

On rappelle également les faits suivants.

(c) Soit  $A \in \mathcal{E}^\mu$ . Alors il existe  $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$  tels que  $B_1 \subset A \subset B_2$ , et  $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$ .

(d) Soit  $A \in \mathcal{E}^\mu$ . Alors, il existe  $B \in \mathcal{E}$  tels que  $\mu$ -p.p.  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ .

(e) Soit  $f : E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}^\mu$ -mesurable. Alors il existe,  $f_1, f_2 : E \rightarrow [0, \infty]$ , des fonctions  $\mathcal{E}$ -mesurables telles que  $f_1 \leq f \leq f_2$  et  $\mu(\{f_1 < f_2\}) = 0$ . De plus, on a  $\int_E f_i d\mu = \int_E f d\mu$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

(f) Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , une fonction  $\mathcal{E}^\mu$ -mesurable. Ici,  $\mathbb{K}$  peut être  $[0, \infty]$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $[-\infty, \infty]$ , ou  $\mathbb{C}$ . Alors il existe,  $g : E \rightarrow \mathbb{K}$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable telle que  $\mu$ -p.p.  $f = g$ . De plus, si  $f$  est  $\mu$  intégrable, alors il en est de même pour  $g$  et on a  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ .

**Définition I.3.13** (*Augmentation, hypothèses habituelles*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. On note  $\mathcal{N}_{\mathbf{P}}$  l'ensemble des  $\mathbf{P}$ -négligeables. On note  $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$  la tribu  $\mathbf{P}$ -complétée de  $\mathcal{F}$ . Pour simplifier les notations, on continue de noter  $\mathbf{P}$  l'extension de  $\mathbf{P}$  à  $(\Omega, \mathcal{F}^{\mathbf{P}})$ . Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

- (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note  $\mathcal{G}_t^{\mathbf{P}}$  la  $\mathbf{P}$ -complétion de la tribu  $\mathcal{G}_t : \mathcal{G}_t^{\mathbf{P}} = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{N}_{\mathbf{P}})$ . Il est clair que  $(\mathcal{G}_t^{\mathbf{P}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F}^{\mathbf{P}})$ , appelée la  $\mathbf{P}$ -augmentation simple de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .
- (b)  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les *hypothèses habituelles relativement à  $\mathbf{P}$*  si  $\mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}} = \mathcal{G}_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$

Une notion d'augmentation, proche mais distincte, est discutée plus loin en relation avec les processus de Markov.

**Lemme I.3.14** *On reprend les notation de la définition I.3.13, qui précède. Alors,  $\mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}} = \sigma(\mathcal{G}_{t+}, \mathcal{N}_{\mathbf{P}})$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .*

**Preuve :** pour tous  $s > t$ ,  $\mathcal{G}_{t+} \subset \mathcal{G}_s$ , et donc  $\sigma(\mathcal{G}_{t+}, \mathcal{N}_{\mathbf{P}}) \subset \mathcal{G}_s^{\mathbf{P}}$ . Par conséquent,  $\sigma(\mathcal{G}_{t+}, \mathcal{N}_{\mathbf{P}}) \subset \bigcap_{s > t} \mathcal{G}_s^{\mathbf{P}} = \mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}}$ . Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $A \in \mathcal{G}_{t+\frac{1}{n}}^{\mathbf{P}}$  et donc il existe  $B_n \in \mathcal{G}_{t+\frac{1}{n}}$  tel que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{B_n}$ . On pose par exemple  $B = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{p \geq n} B_p$ . Il est clair que  $B \in \mathcal{G}_{t+}$ ; d'autre part,  $\mathbf{1}_B = \limsup_n \mathbf{1}_{B_n}$  et donc  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ . Donc  $A \in \sigma(\mathcal{G}_{t+}, \mathcal{N}_{\mathbf{P}})$ . Cela montre  $\mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}} \subset \sigma(\mathcal{G}_{t+}, \mathcal{N}_{\mathbf{P}})$  et on conclut.  $\blacksquare$

Travailler avec les filtrations augmentées ne cause en général pas de problème insurmontable, comme le montre le théorème suivant qui affirme que tout temps d'arrêt relativement à la filtration augmentée coïncide presque sûrement avec un temps d'arrêt de la filtration d'origine. Ce résultat est utilisé pour démontrer la propriété de Markov forte, dans la suite de ce cours.

**Théorème I.3.15** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}})$ -temps d'arrêt. Alors, il existe  $T^o$ , un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt tel que*

$$\mathbf{P}(T^o = T) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{T+}^{\mathbf{P}} = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}}, \mathcal{G}_{T+}).$$

**Preuve :** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = 2^{-n} \lceil 2^n T \rceil$ , avec la convention que  $\lceil x \rceil = \infty$  ssi  $x = \infty$ . Le lemme I.3.5 (i) implique que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\{T_n = k2^{-n}\} = \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\} \in \mathcal{G}_{k2^{-n}}^{\mathbf{P}}.$$

Par le théorème ??, page ??, il existe  $B_{k,n} \in \mathcal{G}_{k2^{-n}}$  tel que  $\{T_n = k2^{-n}\} \subset B_{k,n}$  et  $B_{k,n} \setminus \{T_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{N}_{\mathbf{P}}$ . On pose ensuite  $C_{1,n} := B_{1,n}$  et  $C_{k,n} := B_{k,n} \setminus \bigcup_{1 \leq \ell < k} B_{\ell,n}$  si  $k \geq 2$ . On vérifie que  $C_{k,n} \in \mathcal{G}_{k2^n}$  et que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} C_{k,n} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_{k,n}$ . On définit alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \omega \in C_{k,n} \quad S_n^o(\omega) := k2^{-n} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_{k,n}, \quad S_n^o(\omega) := \infty.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on voit que  $\{S_n^o < t\} = \bigcup_{k < 2^n t} C_{k,n} \in \mathcal{G}_t$ . Donc  $S_n^o$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On vérifie facilement que  $\mathbf{P}(S_n^o = T_n) = 1$  et donc

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n^o = T_n. \tag{I.49}$$

On pose ensuite  $T_n^o := \inf_{0 \leq p \leq n} S_p^o$ . Le lemme I.3.2 (i) (page 25) implique que  $T_n^o$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On observe ensuite que par définition  $T_n = \inf_{0 \leq p \leq n} T_p$  partout sur  $\Omega$ . Donc (I.49) implique que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n^o = T_n. \tag{I.50}$$

On définit  $T^o := \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n^o$ . La proposition I.3.7 (ii), page 28, entraîne alors que  $T^o$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Comme  $T = \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n$  partout sur  $\Omega$ , (I.50) implique que  $\mathbf{P}(T^o = T) = 1$ . Comme  $T_n^o$  et  $T_n$  ne prennent que des valeurs dyadiques, (I.50) implique facilement que

$$\mathcal{G}_{T_n+}^P = \sigma(\mathcal{N}_P, \mathcal{G}_{T_n^o}).$$

Par la proposition I.3.7 (ii), page 28, on a  $\mathcal{G}_{T+}^P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{T_n+}^P$ . Il est ensuite facile de montrer que

$$\sigma\left(\mathcal{N}_P, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{T_n+}^P\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathcal{N}_P, \mathcal{G}_{T_n^o+}).$$

Or la proposition I.3.7 (ii), page 28 entraîne  $\mathcal{G}_{T^o+} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{T_n^o+}$ , ce qui permet de conclure. ■

**Un résultat général de mesurabilité des temps d'arrêt : le théorème du "Début".** On introduit la définition suivante.

**Définition I.3.16 (Début)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable. Soit  $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ . On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad D_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\},$$

avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . La fonction  $D_A : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  est appelée le *début de A*. □

Sans une hypothèse de mesurabilité sur  $A$ ,  $D_A$  n'a aucune raison d'être mesurable. On rappelle la définition I.2.20, page 23, d'un processus progressivement mesurable et on introduit la notion suivante.

**Définition I.3.17 (Ensembles progressivement mesurables)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Un ensemble  $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$  est dit *progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$*  si  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un processus progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , c'est-à-dire si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la fonction

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto \mathbf{1}_A(s, \omega)$$

est  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t$ -mesurable. □

**Exemple I.3.18** Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On pose

$$A := \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) \leq t\}. \quad (\text{I.51})$$

Alors,  $A$  est un ensemble progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . En effet, on fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  et on observe que

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : \mathbf{1}_A(s, \omega) = 0\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} [0, q] \times \{\omega \in \Omega : T(\omega) > q\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t.$$

On vérifie alors que

$$\forall \omega \in \Omega : D_A(\omega) = T(\omega),$$

ce qui montre que *tout temps d'arrêt est le début d'un ensemble progressivement mesurable*. □

**Exemple I.3.19** Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $E$ , un espace topologique métrisable. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , supposé progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Soit  $B \in \mathcal{B}(E)$ . Alors, on vérifie facilement que

$$A := \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) \leq t \text{ et } X_t(\omega) \in B\} \quad (\text{I.52})$$

est un ensemble progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . En effet, si on fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  : notons  $\bar{X}_t : (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in E$ . Comme  $X$  est supposé progressivement mesurable,  $\bar{X}_t$  est  $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t, \mathcal{B}(E))$ -mesurable et donc  $\bar{X}_t^{-1}(E \setminus B) \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t$  et on remarque que

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : \mathbf{1}_A(s, \omega) = 0\} = \bar{X}_t^{-1}(E \setminus B) \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} [0, q] \times \{\omega \in \Omega : T(\omega) > q\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{G}_t.$$

On remarque ensuite que

$$\forall \omega \in \Omega : D_A(\omega) = T_{T,B}(\omega) = \inf\{t \in [T(\omega), \infty[ : X_t(\omega) \in B\},$$

où  $T_{T,B}$  est le premier temps d'atteinte de  $B$  par  $X$  après  $T$ .  $\square$

Le théorème suivant, dû à Hunt, permet en général de régler le problème de la mesurabilité des temps d'arrêt.

**Théorème I.3.20 (du "Début")** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ , que l'on suppose progressivement mesurable par rapport à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On rappelle la définition du début de  $A$  :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad D_A(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$$

avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . Alors,  $D_A$  est un  $(\mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

**Preuve :** elle n'est pas élémentaire et nécessite l'introduction des ensembles analytiques. Une preuve détaillée est donnée dans la Section ?? page ??.

Avant de conclure cette section, notons que le théorème I.3.20 du "Début" combiné avec l'exemple I.3.19 implique immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire I.3.21** Soit  $E$  un espace topologique métrisable. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité muni de la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et du processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , supposé progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $B \in \mathcal{B}(E)$  et soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On rappelle les définitions des temps d'atteinte suivants :

$$T_{T,B} = \inf \{t \in [T, \infty[ : X_t \in B\} \quad \text{et} \quad T_{T,B}^+ = \inf \{t \in ]T, \infty[ : X_t \in B\}$$

avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . Alors,  $T_{T,B}$  et  $T_{T,B}^+$  sont des  $(\mathcal{G}_{t+}^{\mathbf{P}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

## I.4 Régularisation des processus. Martingales à temps continu.

### I.4.a Résultats déterministes sur les fonctions régularisables.

**Définition I.4.1 (Fonctions régularisables)** Une fonction  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *régularisable* si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q \text{ existe dans } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap ]0, t[ \\ q \rightarrow t}} y_q \text{ existe dans } \mathbb{R},$$

la seconde condition n'ayant de sens que lorsque  $t > 0$ . On note  $\mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+)$ , l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont régularisables.  $\square$

La définition précédente des fonctions régularisables ne porte en réalité que sur les fonctions  $y : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . L'explication du terme "régularisable" est donnée par le théorème suivant.

**Théorème I.4.2** Soit  $y \in \mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+)$ . On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x_t := \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q .$$

Alors,  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction càdlàg.

**Preuve :** pour tout  $t \in ]0, \infty[$ , on pose

$$x_t^* := \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap ]0, t[ \\ q \rightarrow t}} y_q ,$$

qui existe dans  $\mathbb{R}$  car  $y \in \mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+)$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  et une suite  $t_n \in ]t, \infty[$  (resp. si  $t \neq 0$ ,  $t_n \in ]0, t[$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , telle que  $t_n \rightarrow t$ . Par définition de  $x_{t_n}$ , il existe une suite  $q_n \in \mathbb{Q} \cap ]t, \infty[$  (resp.  $q_n \in \mathbb{Q} \cap ]t_n, t[$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , telle que  $|t_n - q_n| < 2^{-n}$  et  $|x_{t_n} - y_{q_n}| < 2^{-n}$ . Comme  $t_n \rightarrow t$  et comme  $|t_n - q_n| < 2^{-n}$ , on a  $q_n \rightarrow t$ . Par définition de  $x_t$  (resp. de  $x_t^*$ ) on a donc  $y_{q_n} \rightarrow x_t$  (resp.  $y_{q_n} \rightarrow x_t^*$ ). Comme  $|x_{t_n} - y_{q_n}| < 2^{-n}$ , cela implique que  $x_{t_n} \rightarrow x_t$  (resp.  $x_{t_n} \rightarrow x_t^*$ ), ce qui permet de conclure. ■

Nous rappelons ensuite la définition du nombre de montées d'une fonction à valeurs réelles, ce qui permet ensuite d'établir un critère de régularisation des fonctions.

**Définition I.4.3** (*Nombre de montées*) Soit  $D \subset \mathbb{R}_+$ , un sous-ensemble contenant au moins deux points. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Soit  $y : D \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction. On note  $U_D(y, [a, b])$  le supremum des  $p \in \mathbb{N}^*$  tels qu'il existe  $s_1, t_1, \dots, s_p, t_p \in D$  satisfaisant :

$$s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_p < t_p \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad y_{s_k} < a \quad \text{et} \quad y_{t_k} > b . \quad (\text{I.53})$$

Notons que  $U_D(y, [a, b])$  peut être infini, ou bien nul s'il n'existe aucun entier  $p \in \mathbb{N}^*$  satisfaisant (I.53). □

**Théorème I.4.4** Soit  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(a)  $y \in \mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+)$ .

(b) Pour tous  $a, b \in \mathbb{Q}$  tels que  $a < b$  et pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sup \{|y_q| ; q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]\} < \infty \quad \text{et} \quad U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(y, [a, b]) < \infty . \quad (\text{I.54})$$

**Preuve :** soit  $y$  satisfaisant (b). Supposons qu'il existe  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\liminf_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q < \limsup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q \quad \text{ou bien} \quad \liminf_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap ]0, t[ \\ q \rightarrow t}} y_q < \limsup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap ]0, t[ \\ q \rightarrow t}} y_q ,$$

le dernier cas supposant que  $t \neq 0$ . Il existe donc  $a, b \in \mathbb{Q}$  tels que  $a < b$  et tels que  $a$  et  $b$  soient situés entre les limites supérieures et inférieures précédentes. On a donc  $U_{[0, n_0]}(y, [a, b]) = \infty$  pour tout entier  $n_0 > t$ , ce qui contredit (b). Par conséquent, on a montré que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap ]0, t[ \\ q \rightarrow t}} y_q \quad \text{existent dans } [-\infty, \infty].$$

La première condition de (b) montre que ces limites doivent être dans  $\mathbb{R}$ , ce qui montre que  $y$  est régularisable. On a donc montré que (b)  $\implies$  (a).

Montrons la réciproque : supposons l'existence de  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $\sup_{q \in [0, n_0]} |y_q| = \infty$ . Comme  $[0, n_0]$  est compact il existe une suite  $q_n \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $q_n \rightarrow t$  et telle que  $|y_{q_n}| > n$ . Comme les  $y_q$  sont des réels (finis), la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut être stationnaire à  $t$ . Par conséquent, ou bien il y a une infinité d'indices  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $q_n < t$ , et alors

$$\lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t] \\ q \rightarrow t}} y_q \quad \text{n'existe pas dans } \mathbb{R}.$$

ou bien il y a une infinité d'indices  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $q_n > t$ , et alors

$$\lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q \quad \text{n'existe pas dans } \mathbb{R}.$$

Autrement dit, on a montré que s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $\sup_{q \in [0, n_0]} |y_q| = \infty$ ,  $y$  n'est pas régularisable.

Supposons ensuite qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  et  $a, b \in \mathbb{Q}$  tel que  $a < b$  et  $U_{[0, n_0]}(y, [a, b]) = \infty$ . Il y a alors un sens à poser  $t := \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : U_{[0, s]}(y, [a, b]) = \infty\}$ , qui est un réel positif fini. Il est facile de vérifier que

$$\liminf_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q < a < b < \limsup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} y_q \quad \text{ou bien} \quad \liminf_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t] \\ q \rightarrow t}} y_q < a < b < \limsup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t] \\ q \rightarrow t}} y_q,$$

ce qui implique que  $y$  n'est pas régularisable. Cela montre que (a)  $\implies$  (b), par contraposition. ■

Le critère précédent implique notamment que l'ensemble des fonctions régularisables est mesurable pour la tribu produit sur l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème I.4.5**  $\text{Reg}(\mathbb{R}_+) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}$ .

**Preuve :** on fixe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  et on se donne une énumération  $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de l'ensemble  $\mathbb{Q} \cap [0, n_0]$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$A_m(k, n_0) := \{y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : |y_{q_0}| < k; |y_{q_1}| < k; \dots; |y_{q_m}| < k\}.$$

Cet ensemble est clairement un cylindre élémentaire de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ . Donc  $A_m(k, n_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}$ . On en déduit donc que

$$A := \{y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |y_q| < \infty\} = \bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m(k, n_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}. \quad (\text{I.55})$$

On fixe ensuite  $a, b \in \mathbb{Q}$  tels que  $a < b$ . On fixe également  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ . Pour tous  $s_1, t_1, \dots, s_p, t_p \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]$ , on pose

$$C_{s_1, t_1, \dots, s_p, t_p}(a, b) = \{y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : |y_{s_1}| < a; |y_{t_1}| > b; \dots; |y_{s_p}| < a; |y_{t_p}| > b\}.$$

Il est clair que  $C_{s_1, t_1, \dots, s_p, t_p}(a, b)$  est un cylindre élémentaire de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ . Donc  $C_{s_1, t_1, \dots, s_p, t_p}(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}$ . On note  $I_{p, n_0}$  l'ensemble des  $(2p)$ -uplets  $s_1, t_1, \dots, s_p, t_p \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]$  tels que  $s_1 < t_1 < \dots < s_p < t_p$ . Il est clair que  $I_{p, n_0}$  est dénombrable. On remarque ensuite que

$$\forall p, n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \{y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(y, [a, b]) \geq p\} = \bigcup_{(s_1, t_1, \dots, s_p, t_p) \in I_{p, n_0}} C_{s_1, t_1, \dots, s_p, t_p}(a, b),$$

qui est donc dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}$ . Cela implique que  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \mapsto U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(y, [a, b])$  est  $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurable. Par conséquent,

$$B := \bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(y, [a, b]) \leq p\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+}.$$

On remarque ensuite que  $A \cap B$  est l'ensemble des fonctions  $y$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  qui satisfont la condition (b) du théorème I.4.4; ce même théorème montre alors que  $\text{Reg}(\mathbb{R}_+) = A \cap B$ , ce qui est le résultat voulu. ■

**Corollaire I.4.6** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soit  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. Alors,

$$\{Y \in \text{Reg}(\mathbb{R}_+)\} \in \mathcal{F}_\infty^o(Y) \subset \mathcal{F},$$

où on rappelle que  $\mathcal{F}_\infty^o(Y)$  est la tribu engendrée par le processus  $Y$ .

**Preuve :** conséquence immédiate du théorème I.4.5. ■

#### I.4.b Martingales en temps continu : définition, régularisation.

Dans toute cette section l'espace de probabilité de référence est  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . À plusieurs reprises, nous considérons l'espérance conditionnelle par rapport à des filtrations complétées en utilisant le résultat suivant.

**Lemme I.4.7** Soit  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , une tribu. On rappelle que  $\mathcal{G}^\mathbf{P}$  et  $\mathcal{F}^\mathbf{P}$  sont les tribus  $\mathbf{P}$ -complétées associées à  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$ . Alors pour toutes v.a.  $Z_1, Z_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $\mathcal{F}^\mathbf{P}$ -mesurables bornées et pour toute tribu  $\mathcal{H}$  telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } Z_1 = Z_2 \text{ et } \mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}^\mathbf{P},$$

on a  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{E}[Z_1 | \mathcal{H}] = \mathbf{E}[Z_2 | \mathcal{G}]$ .

**Preuve :** soit  $A \in \mathcal{H}$ . Comme  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^\mathbf{P}$ , le théorème ??, page ?? implique l'existence de  $B \in \mathcal{G}$  tel que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$  et donc  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{1}_A Z_1 = \mathbf{1}_B Z_2$ . Donc

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_A Z_1] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_B Z_2] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_B \mathbf{E}[Z_2 | \mathcal{G}]] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[Z_2 | \mathcal{G}]].$$

car on a également  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{1}_B \mathbf{E}[Z_2 | \mathcal{G}] = \mathbf{1}_A \mathbf{E}[Z_2 | \mathcal{G}]$ . Comme  $\mathbf{E}[Z_2 | \mathcal{G}]$  est  $\mathcal{H}$ -mesurable puisque  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ , et que l'égalité précédente est valable pour tout  $A \in \mathcal{H}$ , on en déduit le résultat voulu. ■

**Définition I.4.8** (*Martingales en temps continu*) Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une processus réel. C'est une *martingale* (resp. *sur-martingale*, *sous-martingale*) s'il satisfait les conditions suivantes.

- (a)  $M$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adapté, c'est-à-dire que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $M_t$  est  $\mathcal{G}_t$ -mesurable.
- (b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{E}[|M_t|] < \infty$ .
- (c) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \mathbf{E}[M_{s+t} | \mathcal{G}_t] = M_t \text{ (resp. } \mathbf{E}[M_{s+t} | \mathcal{G}_t] \leq M_t, \mathbf{E}[M_{s+t} | \mathcal{G}_t] \geq M_t).$$

Le processus  $M$  peut n'être que défini sur un sous-intervalle de  $\mathbb{R}$  : la notion de (sur/sous-)martingale associée est claire, sauf en ce qui concerne les extrémités de l'intervalle de définition. □

Nous énonçons et prouvons un résultat dû à Doob qui montre que les sur-martingales sont p.s. des fonctions régularisables (cela est utilisé dans le théorème de régularisation des processus de Feller). On adopte ici une convention, relativement standard, qui consiste à annoter processus et filtrations "bruts" par le symbole  $o$  en exposant, et à noter sans ce symbole les processus et filtrations régularisés.

**Théorème I.4.9 (Régularisation des martingales de Doob)** Soit  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $M^o = (M_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une sur-martingale relativement à  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $\mathcal{G}_t := \mathcal{G}_{t+}^P$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'augmentation habituelle de  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et on pose  $\Omega^o := \{M^o \in \text{Reg}(\mathbb{R}_+)\}$ . Alors,

$$\Omega^o \in \mathcal{F}_\infty^o(Y) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\Omega^o) = 1. \quad (\text{I.56})$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $\omega \in \Omega$ , on pose ensuite

$$M_t(\omega) := \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} M_q^o(\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega^o \quad \text{et} \quad M_t(\omega) := 0 \quad \text{si } \omega \in \Omega \setminus \Omega^o.$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto M_t(\omega)$  est càdlàg.

(ii) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $M := (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale qui est càd dans  $L^1$ , c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbf{E}[|M_{t+h} - M_t|] = 0.$$

(iii)  $M$  est une modification de  $M^o$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(M_t = M_t^o) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , si et seulement si  $M^o$  est càd dans  $L^1$  c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \mathbf{E}[|M_{t+h}^o - M_t^o|] = 0.$$

(iv) Si  $M^o$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale, alors  $M$  est une modification de  $M^o$ ssi  $t \mapsto \mathbf{E}[|M_t^o|]$  est càd.

(v) Si  $M^o$  est  $\mathbf{P}$ -p.s. càd, alors c'est une une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale et  $M^o$  est indistinguable de  $M$ .

Le couple  $M$  est appelé la **sur-martingale régularisée** associée à  $M^o$ . L'énoncé reste vrai lorsque le mot sur-martingale est remplacé par le mot martingale.

**Preuve :** on fixe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ . L'ensemble des rationnels étant dénombrable dense dans  $\mathbb{R}$ , il possible de trouver des ensembles  $D_m := \{0 = q_{m,0} < q_{m,1} < \dots < q_{m,m-1} < q_{m,m} = n_0\} \subset \mathbb{Q} \cap [0, n_0]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , tels que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad D_m \subset D_{m+1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m = \mathbb{Q} \cap [0, n_0].$$

On remarque alors que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$(M_{q_{m,k}}^o)_{k \in [\![0, m]\!]} \text{ est une } (\mathcal{G}_{q_{m,k}}^o)_{k \in [\![0, m]\!]} \text{-sur-martingale à temps discret et à horizon fini,} \quad (\text{I.57})$$

selon la définition ?? (page ??). L'inégalité maximale pour les sur-martingales (théorème ??, page ??) implique que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\left(\sup_{q \in D_m} |M_q^o| \geq 3k\right) \leq \frac{1}{k} (4\mathbf{E}[|M_0^o|] + 3\mathbf{E}[|M_{n_0}^o|]).$$

Comme  $D_m \subset D_{m+1}$ , on a  $\{\sup_{q \in D_m} |M_q^o| \geq 3k\} \subset \{\sup_{q \in D_{m+1}} |M_q^o| \geq 3k\}$ . Puisque  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m = \mathbb{Q} \cap [0, n_0]$ , on a  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\sup_{q \in D_m} |M_q^o| \geq 3k\} = \{\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| \geq 3k\}$ . Par conséquent,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| \geq 3k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{q \in D_m} |M_q^o| \geq 3k\right) \leq \frac{1}{k}(4\mathbf{E}[|M_0^o|] + 3\mathbf{E}[|M_{n_0}^o|]). \quad (\text{I.58})$$

Or  $\{\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| \geq 3(k+1)\} \subset \{\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| \geq 3k\}$  et  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \{\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| \geq 3k\} = \{\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| = \infty\}$ , donc, par (I.58),

$$\mathbf{P}\left(\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| = \infty\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| \geq 3k\right) = 0.$$

Comme cela est valable pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , on a montré

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, n_0]} |M_q^o| < \infty. \quad (\text{I.59})$$

On fixe ensuite  $a, b \in \mathbb{Q}$  tels que  $a < b$ . L'inégalité de Doob (théorème ??, page ??) appliquée à la sur-martingale (I.57) implique que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad (b-a)\mathbf{E}[U_{D_m}(M^o, [a, b])] \leq \mathbf{E}[(M_{n_0}^o - a)_-] \leq \mathbf{E}[|M_{n_0}^o|] + |a|.$$

On remarque ensuite que  $m \mapsto U_{D_m}(M^o, [a, b])$  croît et que  $\lim_{m \rightarrow \infty} U_{D_m}(M^o, [a, b]) = U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(M^o, [a, b])$ . Le théorème de convergence monotone implique alors que

$$\mathbf{E}[U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(M^o, [a, b])] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}[U_{D_m}(M^o, [a, b])] \leq \frac{\mathbf{E}[|M_{n_0}^o|] + |a|}{b-a} < \infty$$

Comme cela est valable pour tous les rationnels  $a < b$ , on a déduit que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ tels que } a < b, \quad U_{\mathbb{Q} \cap [0, n_0]}(M^o, [a, b]) < \infty. \quad (\text{I.60})$$

Le critère de régularisation déterministe donné au théorème I.4.4 (page 36) combiné au corollaire I.4.6 (page 38) et à (I.59) et (I.60) implique (I.56). Le théorème I.4.2, page 36, implique immédiatement (i).

Montrons (ii). On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  et une suite  $q_n \in \mathbb{Q} \cap ]t, \infty[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , qui décroît vers  $t$ . On pose alors  $Z := \liminf_{n \rightarrow \infty} M_{q_n}^o$  qui est à valeurs dans  $[-\infty, \infty]$ . Il est clair que  $Z$  est  $\mathcal{G}_{t+}^o$ -mesurable. Or  $\mathbf{P}$ -p.s.  $Z = M_t$ , donc  $M_t$  est  $\sigma(\mathcal{G}_t^o, \mathcal{N}_P)$ -mesurable. Le lemme I.3.14, page 33, montre que  $\mathcal{G}_{t+}^P = \sigma(\mathcal{N}_P, \mathcal{G}_{t+}^o)$ . Donc  $M$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté.

Soit  $s \in ]0, \infty[$ . Soit  $q_n \in \mathbb{Q} \cap ]t, t+s]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite qui décroît vers  $t$  telle que  $q_0 := s+t$ . Les tribus  $(\mathcal{G}_{q_n}^o)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une filtration rétrograde. Comme  $M^o$  est une sur-martingale, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{E}[M_{q_n}^o | \mathcal{G}_{q_{n+1}}^o] \leq M_{q_{n+1}}^o$ , ce qui montre que  $(M_{q_n}^o)_{n \in \mathbb{N}}$  est une  $(\mathcal{G}_{q_n}^o)_{n \in \mathbb{N}}$ -sur-martingale rétrograde. Par définition de  $M$ , on a  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\lim_n M_{q_n}^o = M_t$  et le théorème théorème ?? de convergence des martingales rétrogrades implique aussi que  $M_t$  est intégrable et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|M_{q_n}^o - M_t|] = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\text{-p.s. } \mathbf{E}[M_{q_n}^o | \mathcal{G}_{t+}^o] \leq M_t \quad (\text{I.61})$$

car  $\mathcal{G}_{t+}^o = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_{q_n}^o$ . En considérant (I.61) pour  $n=0$ , comme  $q_0 = s+t$ , on en déduit que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}\text{-p.s. } \mathbf{E}[M_{t+s}^o | \mathcal{G}_{t+}^o] \leq M_t. \quad (\text{I.62})$$

Soit  $r_n \in \mathbb{Q} \cap ]t, s]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite qui tend vers  $t + s$ ; on a montré que  $\lim_n \mathbf{E}[|M_{r_n}^o - M_{t+s}|] = 0$  et par (I.62)  $\mathbf{E}[M_{r_n}^o | \mathcal{G}_{t+}^o] \leq M_t$ . Or

$$\mathbf{E}[|\mathbf{E}[M_{r_n}^o | \mathcal{G}_{t+}^o] - \mathbf{E}[M_{t+s} | \mathcal{G}_{t+}^o]|] \leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[|M_{r_n}^o - M_{t+s}| | \mathcal{G}_{t+}^o]] = \mathbf{E}[|M_{r_n}^o - M_{t+s}|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On extrait de cette convergence  $L^1$  une convergence presque sûre et en passant à la limite dans les inégalités  $\mathbf{E}[M_{r_n}^o | \mathcal{G}_{t+}^o] \leq M_t$ , on obtient

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}[M_{t+s} | \mathcal{G}_{t+}^o] \leq M_t. \quad (\text{I.63})$$

Enfin le lemme I.4.7 implique que  $\mathbf{P}\text{-p.s. } \mathbf{E}[M_{t+s} | \mathcal{G}_{t+}^o] = \mathbf{E}[M_{t+s} | \mathcal{G}_t]$ , et (I.63) implique que  $M$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale.

Il reste à montrer que  $M$  est càd dans  $L^1$ . le théorème ?? de convergence des martingales rétrogrades implique que pour toute suite  $t_n \in ]t, \infty[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , décroissant vers  $t$ ,  $\lim_n M_{t_n} = M_t$  p.s. et dans  $L^1$ , c'est-à-dire  $\lim_n \mathbf{E}[|M_{t_n} - M_t|] = 0$ . Autrement dit,  $\lim_{h > 0, h \rightarrow 0} \mathbf{E}[|M_{t+h} - M_t|] = 0$ , ce qui termine la preuve de (ii).

La preuve de (iii) découle de (I.61) : si  $M^o$  est càd dans  $L^1$ , alors  $\lim_n \mathbf{E}[|M_{q_n}^o - M_t|] = \mathbf{E}[|M_t^o - M_t|]$  et (I.61) implique que  $\mathbf{E}[|M_t^o - M_t|] = 0$  et donc  $M$  est une modification de  $M^o$ . Réciproquement, si  $M$  est une modification de  $M^o$ , alors  $\mathbf{E}[|M_{t+h} - M_t|] = \mathbf{E}[|M_{t+h}^o - M_t^o|]$  et  $M^o$  est càd dans  $L^1$  car par (ii),  $M$  l'est.

Montrons (iv) : si  $M^o$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale, pour toute suite  $q_n \in \mathbb{Q} \cap ]t, \infty[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{E}[M_{q_n}^o | \mathcal{G}_t] \leq M_t^o$ . Or (i) et le théorème ?? des martingales rétrogrades implique que  $\lim_n M_{q_n}^o = M_t$  p.s. et dans  $L^1$ , ce qui implique, en passant à la limite dans les inégalités précédentes que  $M_t = \mathbf{E}[M_t | \mathcal{G}_t] \leq M_t^o$ . Or si  $s \mapsto \mathbf{E}[M_s^o]$  est càd, alors la convergence des  $M_{q_n}^o$  dans  $L^1$  vers  $M_t$  implique que  $\mathbf{E}[M_t] = \mathbf{E}[M_t^o]$  et comme  $M_t \leq M_t^o$ , on a  $\mathbf{P}$ -p.s.  $M_t = M_t^o$  et  $M$  est une modification de  $M^o$ . Réciproquement, comme  $M$  est càd dans  $L^1$ , si  $M^o$  est une modification de  $M$ , on  $\mathbf{E}[M_t] = \mathbf{E}[M_t^o]$  et  $t \mapsto \mathbf{E}[M_t^o]$  est càd.

Montrons (v) : si  $M^o$  est  $\mathbf{P}$ -p.s. càd, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $M_t = M_t^o$  et  $M$  est une modification de  $M^o$ . Comme  $M^o$  et  $M$  sont càd, la proposition I.2.18, page 22, implique que  $M$  et  $M^o$  sont indistiguables. Le lemme I.4.7 implique que pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{E}[M_{t+s}^o | \mathcal{G}_t^o] = \mathbf{E}[M_{t+s}^o | \mathcal{G}_t]$  et donc  $M^o$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale. Cela termine la preuve de (v) et celle du théorème. ■



## Chapitre II

# Généralités sur les processus Markoviens.

Le *Chapitre II* présente les résultats fondamentaux sur les processus de Markov : loi du 0-1 de Blumenthal, critère pour la propriété de Markov forte, continuité à droite des filtrations naturelles complétées, quasi-continuité à gauche, durée de vie, régularisation des processus de Feller-Dynkin, etc. Une présentation générale des processus de Markov est donnée dans le premier chapitre de l'ouvrage de Blumenthal & Getoor [?]. Un exposé plus élémentaire est donné dans le livre de Revuz & Yor [?] (Chapter III). Nous renvoyons également à la présentation donnée dans le premier tome de Rogers & Williams [?] (Chapter III). Pour un traitement plus complet le lecteur peut consulter l'ouvrage de Dynkin [?]. Pour une présentation de théories plus générales, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de Dellacherie & Meyer, notamment [?].

### Brève bibliographie.

---

BLUMENTHAL, R. M., AND GETOOR, R. K. *Markov processes and potential theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 29. Academic Press, New York-London, 1968.

DELLACHERIE, C., AND MEYER, P.-A. *Probabilités et potentiel. Chapitres XII–XVI*, second ed. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, XIX. Hermann, Paris, 1987. Théorie du potentiel associée à une résolvante. Théorie des processus de Markov. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1417.

DYNKIN, E. B. *Markov processes. Vols. I, II*, vol. 122 of *Translated with the authorization and assistance of the author by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra, G. Majone. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bände 121*. Academic Press Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

REVUZ, D., AND YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, third edition ed., vol. 293. Springer, 1999.

ROGERS, L. C. G., AND WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.

---

### II.1 Noyaux Markoviens, semi-groupes associés.

Dans cette section nous introduisons la notion de noyaux (sous-) Markoviens en nous limitant au minimum requis pour la suite de ce chapitre sans épargner au lecteur quelques détails techniques cependant.

**Notations.** En général, l'espace d'états est noté  $E$ . Il est toujours muni d'une tribu notée  $\mathcal{E}$ . La plupart du temps  $E$  est muni d'une topologie et on prend  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ , la tribu des Boréliens associée à cette topologie. Pour de nombreuses applications,  $E$  est supposé *métrisable séparable* et très souvent *localement compact à base dénombrable* (en abrégé : LCBD). On introduit les notations suivantes.

- On note  $\mathcal{M}_f(E)$  l'espace des mesures  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$  de masse finie.
- On note  $\mathcal{M}_1(E)$  l'espace des mesures de probabilité  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ .
- On note  $L(E)$  l'espace des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $\mathcal{E}$ -mesurables.
- On note  $L_b(E)$  l'espace des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $\mathcal{E}$ -mesurables et bornées.
- On note  $L_+(E)$  l'espace des fonctions  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  qui sont  $\mathcal{E}$ -mesurables.

Les définitions suivantes n'ont de sens que si  $E$  est muni d'une topologie.

- On note  $C(E)$  l'espace des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continues.
- On note  $C_b(E)$  l'espace des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continues bornées.
- On note  $C_c(E)$  l'espace des fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continues à support compact.
- Si  $E$  est un LCBD, on note  $(E_\partial, d)$  une compactification comme dans le théorème I.1.15. On note  $C_0(E)$  l'ensemble des fonctions continues  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) \rightarrow 0$  dès que  $d(x, \partial) \rightarrow 0$ . Autrement dit,  $C_0(E)$  est l'ensemble des fonctions continues  $f$  sur  $E$  se prolongeant continûment à  $E_\partial$  par  $f(\partial) = 0$ .
- Pour toute fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ , la norme infinie de  $f$ . □

**Théorème II.1.1** Soit  $E$  un espace polonais. Alors  $(C_b(E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach. De plus, si  $E$  est un espace LCBD, alors l'adhérence de  $C_c(E)$  pour  $\|\cdot\|_\infty$  est  $C_0(E)$ , qui est un Banach séparable.

**Noyaux Markoviens et semi-groupe associé.** On rappelle la définition I.1.1 des noyaux de sous-probabilité. Le lecteur est invité à parcourir la section (I.1.a) page 1 qui détaille quelques propriétés des noyaux.

**Définition II.1.2** (*Noyaux sous-Markoviens*) Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in E$ , soit  $p_t(x, dy)$ , une mesure positive sur  $\mathcal{E}$ . La famille de mesures  $(p_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E}$  sont des *noyaux sous-markoviens* si les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in E$ ,  $p_t(x, \cdot)$  est une sous-probabilité, c'est-à-dire que  $p_t(x, E) \leq 1$ . Si les  $p_t(x, \cdot)$  sont *conservatifs*, c'est-à-dire si  $p_t(x, E) = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in E$ , alors on parle de *noyaux Markoviens*.

(b) (*Mesurabilité*) Pour toute  $f \in L_b(E)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$x \in E \longmapsto \int_E p_t(x, dy) f(y) \in \mathbb{R}$$

est une application  $\mathcal{E}$ -mesurable (on remarque qu'elle est nécessairement bornée).

(c) (*Kolmogorov-Chapman*) Pour toute  $f \in L_b(E)$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in E$ ,

$$\int_E p_{s+t}(x, dy) f(y) = \int_E p_s(x, dy) \left( \int_E p_t(y, dz) f(z) \right), \quad (\text{II.1})$$

qui a bien un sens par (b).

(d) (*Normalité*) Pour tout  $x \in E$ ,  $p_0(x, dy) = \delta_x(dy)$ , la masse de Dirac en  $x$ .  $\square$

**Définition II.1.3** (*Semi-groupe associé à des noyaux sous-Markoviens*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soient  $(p_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E}$ , des noyaux sous-Markoviens. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on définit  $P_t : L_b(E) \rightarrow L_b(E)$  en posant

$$\forall f \in L_b(E), \forall x \in E, \quad P_t f(x) = \int_E p_t(x, dy) f(y) .$$

Il est clair que les  $P_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , sont des applications linéaires. On appelle  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé à  $(p_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E}$ , cette appellation étant justifiée par la proposition suivante.  $\square$

**Proposition II.1.4** Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , le semi-groupe associé aux noyaux sous-Markoviens  $(p_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour toute fonction  $f \in L_b(E)$ ,  $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ . De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall f \in L_b(E), \quad 0 \leq f \leq 1 \implies 0 \leq P_t f \leq 1 .$$

(ii) Propriété de semi-groupe pour la composition d'endomorphismes sur  $L_b(E)$  :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad P_{s+t} = P_t P_s .$$

(iii) Si les noyaux sont Markoviens, alors  $P_t \mathbf{1}_E = \mathbf{1}_E$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

(iv) Comme les noyaux sont normaux,  $P_0 = \text{Id}$ , c'est-à-dire  $P_0 f = f$ , pour toute  $f \in L_b(E)$ .

**Preuve :** conséquence immédiate de la définition des noyaux sous-Markoviens.  $\blacksquare$

**Exemple II.1.5** Ici,  $E = \mathbb{R}^n$  est muni de la topologie associée à la norme Euclidienne  $\|\cdot\|$  dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On pose

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in ]0, \infty[, \quad p_t(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2t}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2\right) d\mathbf{y}$$

et  $p_0(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) := \delta_{\mathbf{x}}(d\mathbf{y})$ . Il est clair que  $p_t(\mathbf{x}, \cdot)$  est la loi d'une variable Gaussienne de moyenne  $\mathbf{x}$  et de covariance  $t\text{Id}$ . Par ailleurs, pour toute fonction  $f \in L_b(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$P_t f(\mathbf{x}) = (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{-\frac{1}{2t}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} d\mathbf{y} .$$

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que  $P_t f$  est continue. Le théorème de convergence dominée implique également que si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  par rapport à la mesure de Lebesgue,  $P_t f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ . On rappelle que la transformée de Fourier des v.a. Gaussiennes est connues explicitement (voir le lemme ??, page ??) et en particulier on a

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle} p_t(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - t\|\mathbf{u}\|^2} .$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_t(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^n} p_s(\mathbf{y}, d\mathbf{z}) e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle} = e^{-s\|\mathbf{u}\|^2} \int_{\mathbb{R}^n} p_t(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle} = e^{-(t+s)\|\mathbf{u}\|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} p_{t+s}(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle} ,$$

ce qui implique que les  $p_t(\mathbf{x}, d\mathbf{y})$  satisfont l'équation de Kolmogorov-Chapman, par injectivité de la transformée de Fourier. Cela montre que les  $p_t(\mathbf{x}, d\mathbf{y})$  sont des noyaux Markoviens : ce sont les noyaux du mouvement Brownien standard dans  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Exemple II.1.6** Ici,  $E = \mathbb{R}$  est muni de la topologie usuelle. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in ]0, \infty[, \quad p_t(x, dy) = \frac{1}{\pi} \frac{t dy}{(y - x)^2 + t^2}$$

et  $p_0(x, dy) = \delta_0(dy)$ . On voit que  $p_t(x, dy)$  est une loi de Cauchy centrée en  $x$  et de paramètre  $t$ . Par le théorème de continuité des intégrales à paramètres,  $P_t f$  est continue, pour toute fonction  $f \in L_b(\mathbb{R})$ . Un calcul simple montre que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} p_t(x, dy) = e^{iux - t|u|}.$$

En raisonnant sur les transformées de Fourier comme dans l'exemple précédent, on montre que les  $p_t(x, dy)$  vérifient l'équation de Kolmogorov-Chapman, ce qui montre que les  $p_t(x, dy)$  sont des noyaux Markoviens : ce sont les noyaux du processus de Cauchy standard dans  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Exemple II.1.7** Ici,  $E = \mathbb{R}_+$  est muni de la topologie usuelle. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in ]0, \infty[, \quad p_t(x, dy) = e^{-\frac{x}{t}} \delta_0(dy) + \phi(x, y, t) dy \quad \text{où} \quad \phi(x, y, t) := \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y^{n-1}}{t^{2n} n! (n-1)!} e^{-\frac{x+y}{t}}.$$

et  $p_0(x, dy) = \delta_0(dy)$ . On vérifie que la transformée de Laplace des  $p_t(x, dy)$  est donnée par

$$\forall \lambda, x, t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{\mathbb{R}_+} p_t(x, dy) e^{-\lambda y} = \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + \lambda t}\right).$$

On voit que  $p_t(x, dy)$  est une loi de probabilité et en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace, on vérifie que les  $p_t(x, dy)$  vérifient l'équation de Kolmogorov-Chapman. Par ailleurs, le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que pour toute fonction  $f \in L_b(\mathbb{R})$ ,  $P_t f$  est continue donc mesurable. Cela montre que les  $p_t(x, dy)$  sont des noyaux Markoviens : ce sont les noyaux de la diffusion de Feller.  $\square$

**Exemple II.1.8** Ici,  $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable. On fixe  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad p_t(x, dy) = \mu(dy).$$

On vérifie facilement que les  $p_t(x, dy)$  sont des noyaux Markoviens (pathologiques).  $\square$

**Semi-groupes de Feller.** Dans la suite, on fait des hypothèses restrictives sur les semi-groupes : essentiellement, ce cours ne porte que sur les processus de Markov dont le semi-groupe est Fellérien dans le sens suivant.

**Définition II.1.9** (*Semi-groupe de Feller-Dynkin*) Soit  $E$ , un espace LCBD. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , soit  $P_t : C_0(E) \rightarrow C_0(E)$ , une application linéaire. C'est un *semi-groupe de Feller-Dynkin* si les conditions suivantes sont satisfaites.

- (a) *Semi-groupe* : pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_{s+t} = P_s P_t$ .
- (b) *Positivité et contractilité* : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour toute fonction  $f \in C_0(E)$ , on a

$$0 \leq f \leq 1 \implies 0 \leq P_t f \leq 1.$$

(c) *Continuité faible* : pour toute fonction  $f \in C_0(E)$  on a

$$\forall x \in E, \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x),$$

ce qui implique facilement que  $P_0 = \text{Id}$ .  $\square$

La définition suivante, proche mais distincte, est parfois introduite.

**Définition II.1.10** (*Semi-groupe de Feller*) Soit  $E$ , un espace LCBD. Un *semi-groupe de Feller* est la donnée d'applications linéaires  $P_t : C_b(E) \rightarrow C_b(E)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  satisfaisant les conditions (a), (b) et (c) de la définition II.1.10. Le semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit *fortement Fellérien* si en plus  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_t : L_b(E) \rightarrow C_b(E)$ .  $\square$

Les exemples II.1.5, II.1.6 et II.1.7 (semi-groupes Browniens, de Cauchy et celui de la diffusion de Feller) sont fortement Fellériens et Feller-Dynkin. On vérifie tout d'abord qu'un semi-groupe de Feller-Dynkin ou de Feller est associé à des noyaux sous-Markoviens.

**Proposition II.1.11** Soit  $E$ , un espace LCBD. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin (ou de Feller). Alors,  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est le semi-groupe de noyaux sous-Markoviens  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ .

**Preuve :** on montre d'abord

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall f \in C_0(E), \quad f \geq 0 \implies P_t f \geq 0. \quad (\text{II.2})$$

En effet on remarque que  $0 \leq \|f\|_\infty^{-1} f \leq 1$  et donc  $\|f\|_\infty^{-1} P_t f = P_t(\|f\|_\infty^{-1} f) \geq 0$  par la propriété (b) de la définition II.1.10. On a donc  $P_t f \geq 0$ . On montre ensuite que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall f \in C_0(E), \quad \|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty. \quad (\text{II.3})$$

Pour cela, on pose  $g = \|f\|_\infty^{-1} f$ . On a donc  $|g| - g \geq 0$ . Le point précédent implique que

$$P_t |g| - \|f\|_\infty^{-1} P_t f = P_t(|g| - g) \geq 0.$$

Donc  $P_t f \leq \|f\|_\infty P_t |g|$ . Or  $0 \leq |g| \leq 1$  et la propriété (b) de la définition II.1.10 implique que  $P_t |g| \leq 1$ , et donc que  $P_t f \leq \|f\|_\infty$ . On raisonne de même avec  $-f$ , ce qui implique que  $-P_t f \leq \|f\|_\infty$ , ce qui prouve (II.3).

Pour tout  $x \in E$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on observe que  $f \in C_c(E) \mapsto P_t f(x) \in \mathbb{R}$  est une forme linéaire positive. Par le théorème de Riesz, il existe une mesure de Radon  $p_t(x, \cdot) : \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, \infty]$  telle que  $P_t f(x) = \int_E p_t(x, dy) f(y)$ , ce qui s'étend immédiatement à toute fonction  $f \in C_0(E)$ .

Montrons ensuite les propriétés de mesurabilité en  $x$  des  $p_t(x, dy)$ . On note  $(E_\partial, d)$  un compactifié de  $E$ . Soit  $U$ , un ouvert de  $E$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = 1 \wedge (nd(x, E_\partial \setminus U))$ . Comme  $x \mapsto d(x, E_\partial \setminus U)$  est Lipschitzienne,  $f_n$  est une fonction continue. Par ailleurs,  $f_n(x) \leq nd(x, \partial)$  et donc  $f_n \in C_0(E)$ ; on vérifie de plus que  $f_n \leq f_{n+1} \leq 1_U$  et  $\lim_n f_n = 1_U$  ponctuellement. Par convergence monotone, pour tout  $x \in E$ ,  $\lim_n P_t f_n(x) = \lim_n \int_E p_t(x, dy) f_n(y) = p_t(x, U)$ . Comme les  $P_t f_n$  sont  $\mathcal{B}(E)$ -mesurables (car continues), il en est de même pour  $x \in E \mapsto p_t(x, U)$ . En appliquant ce raisonnement avec  $U = E$ , on voit également que  $p_t(x, E) \leq 1$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  et on pose  $\mathcal{L}$  l'ensemble des fonctions  $f \in L_b(E)$  telles que  $x \mapsto \int_E p_t(x, dy) f(y)$  est  $\mathcal{B}(E)$ -mesurable. On montre facilement que  $\mathcal{L}$  est un espace vectoriel. On note  $\mathcal{P}$  la classe des ouverts de  $E$ . Il est clair que  $\mathcal{P}$  est un pi-système tel que  $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(E)$ . On a montré ci-dessus que pour tout  $U \in \mathcal{P}$ ,  $1_U \in \mathcal{L}$ . Enfin, le théorème de convergence monotone implique que  $\mathcal{L}$  est stable par limite ponctuelle de suites croissantes de fonctions dans  $\mathcal{L}$  uniformément bornées.  $\mathcal{L}$  satisfait donc les hypothèses du théorème ?? de la classe monotone dans sa version fonctionnelle (page ??) et donc  $\mathcal{L} = L_b(E)$ . Par ailleurs, le fait que  $P_0 = \text{Id}$

implique facilement que les noyaux sont normaux. L'équation de semi-groupe entraîne enfin que les noyaux  $p_t(x, dy)$  satisfont l'équation de Kolmogorov-Chapman. ■

Comme déjà mentionné, les notions de semi-groupe de Feller-Dynkin et de Feller ne coïncident pas mais si  $E$  est un espace compact, on a

$$C_0(E) = C_b(E) = C(E) \quad \text{et} \quad \text{Feller-Dynkin} = \text{Feller}.$$

La proposition suivante donne deux conditions permettant de montrer qu'un Feller est Feller-Dynkin.

**Proposition II.1.12** *On suppose  $E$  LCBD. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un semi-groupe de Feller dont on note  $p_t(x, dy)$ ,  $x \in E$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , les noyaux sous-Markoviens associés. Soit  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel de  $E$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est Feller-Dynkin.
- (ii) Pour tout compact  $K \subset E$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $p_t(x, K) \rightarrow 0$  lorsque  $d(x, \partial) \rightarrow 0$ .
- (iii) Il existe  $f^* \in C_0(E)$  telle que  $f^*(x) > 0$ , pour tout  $x \in E$  et telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_t f^* \in C_0(E)$ .

**Preuve :** On suppose (i) et on pose  $f^*(x) := d(x, \partial)$ , qui satisfait (iii). Ensuite, on suppose (iii) et on en déduit (ii) : soit  $K$  un compact de  $E$ ; comme  $f^*$  est continue, il existe  $x_0 \in K$ , tel que  $\inf_K f^* = f^*(x_0) := a > 0$ ; on remarque alors que  $P_t f^*(x) \geq P_t(f^* \mathbf{1}_K)(x) \geq a p_t(x, K)$ , ce qui implique (ii).

On suppose (ii) et on montre (i). Soient  $f \in C_0(E)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que  $\|f \mathbf{1}_{B(\partial, \eta)}\|_\infty < \varepsilon$ , où  $B(\partial, \eta)$  désigne la boule ouverte centrée en  $\partial$  et de rayon  $\eta$ . On pose ensuite  $K_\eta := E_\partial \setminus B(\partial, \eta)$ , qui est un compact de  $E$  et on remarque que

$$|P_t f(x)| \leq |P_t f \mathbf{1}_{K_\eta}(x)| + |P_t(f \mathbf{1}_{B(\partial, \eta)})(x)| \leq \|f\|_\infty p_t(x, K_\eta) + \|f \mathbf{1}_{B(\partial, \eta)}\|_\infty \leq \|f\|_\infty p_t(x, K_\eta) + \varepsilon,$$

ce qui implique que  $\limsup_{x \rightarrow \partial} |P_t f(x)| \leq \varepsilon$ , et ce, pour tout  $\varepsilon > 0$ , ce qui implique que  $P_t f \in C_0(E)$ . ■

Nous introduisons ci-dessous une hypothèse de régularité des semi-groupes qui n'est pas standard : c'est une coquetterie technique, minimale pour certains raisonnements communs aux deux hypothèses Feller et Feller-Dynkin ; elle se présente de manière pratique. Il ne faut pas y accorder plus d'importance que cela (d'autant qu'elle est toujours accompagnée d'une hypothèse de continuité à droite des processus dont les conséquences sont importantes).

**Définition II.1.13 (Hypothèse (H))** Soit  $E$ , un espace topologique muni de la tribu des Boréliens  $\mathcal{B}(E)$ . Soient des noyaux sous-Markoviens  $(p_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E}$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , le semi-groupe associé. On dit qu'il satisfait l'hypothèse (H) s'il existe :

- un sous-ensemble  $L$  de fonctions continues bornées :  $L \subset C_b(E)$  (pas nécessairement un esp. vect.),
- un pi-système  $\mathcal{P}$  d'ensembles de  $E$  tel que  $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(E)$ ,

qui satisfont les conditions suivantes.

- (a) Pour tout  $A \in \mathcal{P}$ , il existe une suite de fonctions  $f_n \in L$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , telles que  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  et telle que  $\lim_n f_n = \mathbf{1}_A$  ponctuellement.
- (b) Pour toute fonction  $f \in L$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_t f \in C_b(E)$ . □

On observe que  $L$  n'est pas nécessairement laissé stable par le semi-groupe. L'hypothèse (a) assure que  $L$  est suffisamment riche et permet d'appliquer des raisonnements de classe monotone. La proposition suivante montre que les semi-groupes de Feller et de Feller-Dynkin satisfont **(H)**.

**Proposition II.1.14** *Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin (resp. de Feller). Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (i)  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait **(H)**.
- (ii) Pour tout  $x \in E$  et toute fonction  $f \in C_0(E)$  (resp.  $C_b(E)$ ),  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto P_t f(x)$  est continu à droite et borné par  $\|f\|_\infty$ .

**Preuve :** on choisit  $L := C_0(E)$  (resp.  $L := C_b(E)$ ) qui vérifie (b) de la définition II.1.13. On note  $\mathcal{P}$  le pi-système constitué de  $E$  et des ensembles ouverts de  $E$ . On a bien  $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(E)$ . Traitons le cas Feller-Dynkin, le cas Feller nécessitant les mêmes arguments : on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié métrique habituel de  $E$ . Soit  $U \in \mathcal{P}$ ; on pose  $f_n(x) = 1 \wedge (nd(x, E_\partial \setminus U))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in E$ . On voit facilement que  $f_n \in C_0(E)$  et que (a) est vérifié : voir la preuve de la proposition II.1.11, page 47. Donc le semi-groupe satisfait **(H)**.

Montrons (ii) : la continuité faible des semi-groupes de Feller-Dynkin (resp. Feller) implique que pour toute fonction  $f \in C_0(E)$  (resp.  $f \in C_b(E)$ ) et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} P_{t+s} f(x) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} P_s(P_t f)(x) = P_t f(x).$$

Cela montre que  $t \mapsto P_t f(x)$  est continu à droite. De plus  $\|P_s f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , ce qui montre (ii). ■

**Des noyaux sous-Markoviens aux noyaux Markoviens.** A partir de noyaux sous-Markoviens on obtient des noyaux Markoviens par le procédé d'extension minimale suivant.

**Définition II.1.15** (*Extension minimale*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soient  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ , des noyaux sous-Markoviens et  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , leur semi-groupe associé. On choisit un point  $\partial$  qui n'est pas dans  $E$ , appelé *point d'absorption* et on pose  $E_\partial := \{\partial\} \cup E$  que l'on munit de la tribu  $\mathcal{E}_\partial = \{A, \{\partial\} \cap A ; A \in \mathcal{E}\}$ . Notamment, si  $f \in L_b(E_\partial)$ , alors la restriction de  $f$  à  $E$  notée  $f|_E$  est dans  $L_b(E)$ . L'*extension minimale* des noyaux sous-Markoviens  $p_t(x, dy)$  à  $E_\partial$  est la famille de noyaux  $(p_t^\partial(x, dy))_{x \in E_\partial, t \in \mathbb{R}_+}$  donnés par comme suit.

- (a) Pour tout  $x \in E$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $p_t^\partial(x, \cdot) = p_t(x, \cdot \cap E) + (1 - p_t(x, E))\delta_{\{\partial\}}$ .
- (b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $p_t^\partial(\partial, \cdot) = \delta_{\{\partial\}}$ .

On note  $P_t^\partial : L_b(E_\partial) \rightarrow L_b(E_\partial)$  l'opérateur associé à  $p_t^\partial(x, \cdot)$  et on a :

$$\forall f \in L_b(E_\partial), \forall x \in E, \quad P_t^\partial f(x) = \int_{E_\partial} p_t^\partial(\partial, dy) f(y) = (P_t f|_E)(x) + (1 - p_t(x, E))f(\partial)$$

De plus  $P_t^\partial f(\partial) = f(\partial)$ .

**Convention :** lorsque  $E$  est un espace topologique LCBD, il est d'usage de considérer que  $E_\partial$  est muni de la topologie qui en fait le compactifié habituel. On vérifie que  $\mathcal{B}(E_\partial) = \{A, \{\partial\} \cap A ; A \in \mathcal{B}(E)\}$ . L'extension minimale préserve le caractère Fellérien des semi-groupes. □

**Lemme II.1.16** *On garde les notations de la définition II.1.15. Alors, les noyaux  $p_t^\partial(x, dy)$  sont Markoviens (conservatifs) sur  $E_\partial$ .*

*De plus, si  $E$  est LCBD, alors  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est Feller-Dynkin si et seulement si son extension minimale  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est Feller.*

**Preuve :**  $(p_t^\partial(x, dy); x \in E_\partial, t \in \mathbb{R}_+)$  vérifie clairement les propriétés (a) et (b) de la définition II.1.3. Il faut montrer les relations de Kolmogorov-Chapman, c'est-à-dire  $P_{s+t}^\partial = P_s^\partial P_t^\partial$  sur  $L_b(E_\partial)$ . Pour cela on observe que pour toute fonction  $f \in L_b(E_\partial)$  et tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} (P_s^\partial P_t^\partial f)(x) &= \int_E p_s(x, dy) P_t^\partial f(y) + (1 - p_s(x, E)) P_t^\partial f(\partial) \\ &= \int_E p_s(x, dy) \left( \int_E p_t(y, dz) f(z) + (1 - p_t(y, E)) f(\partial) \right) + (1 - p_s(x, E)) f(\partial) \\ &= \int_E p_{s+t}(x, dz) f(z) + f(\partial) \left( 1 - p_s(x, E) + p_s(x, E) - \int_E p_s(x, dy) p_t(y, E) \right) \\ &= (P_{s+t}f|_E)(x) + (1 - p_{s+t}(x, E)) f(\partial) = P_{s+t}^\partial f(x). \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que  $P_{s+t}^\partial f(\partial) = f(\partial) = (P_s^\partial P_t^\partial f)(\partial)$ , ce qui montre que les  $p_t^\partial(x, dy)$  sont des noyaux Markoviens.

On suppose ensuite que  $E$  est LCBD et que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est Feller-Dynkin. Soit  $f \in C(E_\partial)$ . On pose  $f^0(x) := f(x) - f(\partial)$ . Il est clair que  $f^0 \in C_0(E)$  (avec un léger abus de notation). Comme les  $p_t^\partial(x, dy)$  sont des noyaux Markoviens conservatifs, on a  $P_t^\partial \mathbf{1}_{E_\partial} = \mathbf{1}_{E_\partial}$  et donc  $P_t^\partial f = P_t f^0 + f(\partial) \mathbf{1}_{E_\partial}$ . Cela montre que  $P_t^\partial$  laisse  $C(E_\partial)$  stable. De plus, pour tout  $x \in E$ , on a  $\lim_{t \rightarrow 0} P_t^\partial f(x) = f(\partial) + \lim_{t \rightarrow 0} P_t f^0(x) = f(\partial) + f^0(x) = f(x)$  et  $P_t^\partial f(\partial) = f(\partial)$ . Cela montre la continuité faible de  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , qui est donc Feller.

Supposons que  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  soit de Feller. Soit  $f \in C_0(E)$ , que l'on voit comme une fonction sur  $E_\partial$  nulle en 0. On a  $P_t^\partial f = P_t f$ , qui est continue. Or par définition de l'extension minimale,  $P_t^\partial f(\partial) = f(\partial) = 0$ , on a bien  $P_t f \in C_0(E)$ . Cela montre que les  $P_t$  laissent stables  $C_0(E)$  : il vient immédiatement que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est Feller-Dynkin. ■

## II.2 Processus de Markov, propriété de Markov simple.

**Notations sur les processus.** On fixe un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  et on rappelle quelques notations concernant les processus à valeurs dans  $E$  et indexés par  $\mathbb{R}_+$  : nous renvoyons à la section I.2.d page 18, chapitre I.

- On note  $E^{\mathbb{R}_+}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E$ . Une fonction de  $E^{\mathbb{R}_+}$  est notée de manière générique par  $x = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .
- On note simplement  $\mathcal{C}$  au lieu de  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}_+}$  les cylindres élémentaires de  $E^{\mathbb{R}_+}$  (voir la définition I.2.12, page 19).
- Un cylindre élémentaire antérieur à  $t$  est un ensemble de fonctions  $C$  tel qu'il existe  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t$  et  $B_0, \dots, B_n \in \mathcal{E}$  satisfaisant

$$C = \{x = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in E^{\mathbb{R}_+} : x_{t_0} \in B_0; x_{t_1} \in B_1; \dots; x_{t_n} \in B_n\} \quad (\text{II.4})$$

On note  $\mathcal{C}_t$  l'ensemble des cylindres élémentaires antérieurs à  $t$ . On remarque que  $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{C}_t$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  tels que  $s \leq t$ .

- *Filtration canonique* : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note  $\mathcal{F}_t^{\text{can}}$  la tribu sur  $E^{\mathbb{R}+}$  engendrée par le pi-système  $\mathcal{C}_t$ . On remarque que pour tous  $s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s^{\text{can}} \subset \mathcal{F}_t^{\text{can}}$ . La filtration  $(\mathcal{F}_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  sur  $E^{\mathbb{R}+}$  est appelée *filtration canonique*. On remarque que

$$\mathcal{F}_t^{\text{can}} = \pi_{[0,t]}^{-1}(\mathcal{E}^{\otimes[0,t]}) .$$

où  $\pi_{[0,t]} : E^{\mathbb{R}+} \rightarrow E^{[0,t]}$  la projection canonique, c'est-à-dire la restriction à  $[0, t]$  des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  à  $[0, t]$ . On utilise parfois la notation

$$\mathcal{F}_{\infty}^{\text{can}} = \sigma(\mathcal{F}_t^{\text{can}}; t \in \mathbb{R}_+) = \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{R}+} .$$

- *Processus canonique* : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $X_t^{\text{can}} = \pi_t : E^{\mathbb{R}+} \rightarrow E$ , la projection canonique de marginale  $t$ . Le processus  $X^{\text{can}} = (X_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est appelé le processus canonique : c'est l'identité sur  $E^{\mathbb{R}+}$ . Pour résumer : on pose  $\Omega_{\text{can}} := E^{\mathbb{R}+}$  et  $\mathcal{F}^{\text{can}} := \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{R}+}$ . Alors  $(\Omega_{\text{can}}, \mathcal{F}^{\text{can}})$  est l'*espace canonique des processus à valeurs dans  $E$  indexés par  $\mathbb{R}_+$* . Le processus canonique est  $X^{\text{can}}$  et la filtration canonique est  $(\mathcal{F}_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

- Soient  $t_0 < \dots < t_n$ . On note  $\pi_{t_0, \dots, t_n}$  la projection qui à  $x = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in E^{\mathbb{R}+}$  associe  $\pi_{t_0, \dots, t_n}(x) = (x_{t_0}, \dots, x_{t_n}) \in E^{n+1}$ . La remarque I.2.13 affirme les faits suivants : soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable ; soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable sur lequel est définie une filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{R}+})$ -mesurable. On note  $\mathcal{F}_t^{\text{o}}(X) := \sigma(X_s; s \in [0, t])$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , ce qui définit la filtration naturelle du processus  $X$ . On remarque facilement que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{F}_t^{\text{o}}(X) = X^{-1}(\mathcal{F}_t^{\text{can}}) = \{\{X \in A\}; A \in \mathcal{F}_t^{\text{can}}\} .$$

De plus, si on pose

$$\mathcal{P}_t := X^{-1}(\mathcal{C}_t) = \{\{X \in A\}; A \in \mathcal{C}_t\},$$

alors on vérifie aisément que  $\mathcal{P}_t$  est un pi-système générant  $\mathcal{F}_t^{\text{o}}(X)$ .

**Notations sur les noyaux.** Nous renvoyons à la section I.1.a, page 1 du chapitre I.

- On rappelle la définition I.1.3 page 2 d'un produit de noyaux Markoviens : soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable ; soient  $p(x, dy)$  et  $q(x, dy)$  deux noyaux de sous-probabilité de  $E$  vers  $E$  et soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . On rappelle que pour toute fonction  $B \in \mathcal{E}^{\otimes 2}$ ,  $(p \otimes q)(x, dydz)$  est un noyau de  $E$  sur  $E^2$  et  $(\mu \otimes p)(dx)$  est une mesure sur  $E^2$  donnés par

$$\forall x \in E, \forall B \in \mathcal{E}^2, \quad p \otimes q(x, B) = \int_E p(x, dy) \int_E q(y, dz) \mathbf{1}_B(y, z) \quad \text{et} \quad \mu \otimes p(B) = \int_E \mu(dx) \int_E p(x, dy) \mathbf{1}_B(x, y) .$$

- On rappelle la définition I.1.6 page 3 de la composition de noyaux : en gardant les mêmes définitions pour  $p$ ,  $q$  et  $\mu$ , la composition de  $p$  par  $q$ , qui est un noyau de  $E$  sur  $E$  noté  $pq(x, dy)$ , et la mesure  $\mu p(dx)$  sur  $E$ , sont donnés par

$$\forall x \in E, \forall B \in \mathcal{E}, \quad pq(x, B) = \int_E p(x, dy) q(y, B) \quad \text{et} \quad \mu p(B) = \int_E \mu(dx) p(x, B) .$$

### II.2.a Définitions élémentaires des processus de Markov.

Dans cette section nous donnons une première définition des processus Markoviens. Il s'agit d'une définition minimale, insuffisante pour les applications : elle est amenée à s'étoffer par la suite.

**Définition II.2.1 (Markov I)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ , des noyaux Markoviens. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable.

Alors, sous  $\mathbf{P}$ ,  $X$  est un processus Markovien de noyaux de transition  $p_t(x, dy)$  et de loi d'entrée  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tous  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ ,

$$\forall B \in \mathcal{E}^{\otimes n+1}, \quad \mathbf{P}((X_{t_0}, \dots, X_{t_n}) \in B) = (\mu p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}})(B),$$

c'est-à-dire que, pour toute fonction  $f \in L_b(E^{n+1})$ ,

$$\mathbf{E}[f(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})] = \int_E \dots \int_E \mu(dx) p_{t_0}(x, dy_0) p_{t_1-t_0}(y_0, dy_1) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) f(y_0, y_1, \dots, y_n).$$

On voit en particulier que la loi de  $X_t$  sous  $\mathbf{P}$  est  $\mu p_t$  et donc que la loi de  $X_0$  est  $\mu p_0$ . Comme les noyaux sont normaux, on a  $\mu p_0 = \mu$ .  $\square$

On garde les notations de la définition précédente et on note  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , le semi-groupe associé aux noyaux  $p_t(x, dy)$ . Soit  $n \geq 2$ , un entier; soient  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}_+$  et soient  $f_1, \dots, f_n \in L_b(E)$ . On définit récursivement les fonctions  $g_1, \dots, g_n$  en posant

$$g_1 = P_{s_n} f_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad g_{k+1} = P_{s_{n-k}} (f_{n-k} g_k).$$

En omettant les parenthèses  $g_n$  s'écrit simplement

$$g_n = P_{s_1} f_1 P_{s_2} f_2 P_{s_3} \dots f_{n-1} P_{s_n} f_n, \tag{II.5}$$

La proposition suivante donne une formulation équivalente de la définition II.2.1, page 52.

**Proposition II.2.2** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ , des noyaux Markoviens. On note  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , leur semi-groupe associé. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable. On rappelle que  $(\mathcal{F}_t^\circ(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est la filtration naturelle de  $X$ . Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Sous  $\mathbf{P}$ ,  $X$  est Markovien de noyaux de transition  $p_t(x, dy)$  et de loi d'entrée  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ .

(ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tous  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$  et pour toutes  $f_0, \dots, f_n \in L_b(E)$ ,

$$\mathbf{E}\left[\prod_{0 \leq k \leq n} f_k(X_{t_k})\right] = \int_E \mu(dx) (P_{t_0} f_0 P_{t_1-t_0} f_1 P_{t_2-t_1} \dots f_{n-1} P_{t_n-t_{n-1}} f_n)(x).$$

(iii) La loi de  $X_0$  sous  $\mathbf{P}$  est  $\mu$  et pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et toute  $f \in L_b(E)$ ,

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t^\circ(X)] = P_s f(X_t).$$

**Preuve :** on montre d'abord que  $(i) \Leftrightarrow (ii)$ . On suppose  $(i)$ ; si on choisit  $f(y_0, \dots, y_n) = f_0(y_0) \dots f_n(y_n)$  dans la définition II.2.1, on voit immédiatement que  $(i)$  implique  $(ii)$ . Réciproquement, supposons  $(ii)$ . On note  $\mathcal{P}$  la classe de sous-ensembles de  $E^{n+1}$  de la forme  $A_0 \times \dots \times A_n$ , où  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ . Alors  $\mathcal{P}$  est un pi-système engendrant  $\mathcal{E}^{\otimes n+1}$ . On voit ensuite que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tous  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$  et tous  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ ,

$$\int_E \mu(dx) (P_{t_0} \mathbf{1}_{A_0} P_{t_1-t_0} \dots \mathbf{1}_{A_{n-1}} P_{t_n-t_{n-1}} \mathbf{1}_{A_n})(x) = (\mu p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}})(A_0 \times \dots \times A_n).$$

En choisissant  $f_k = \mathbf{1}_{A_k}$  dans (ii), on voit que cela implique que pour tout  $C \in \mathcal{P}$ ,  $\mu_X^{t_0, \dots, t_n}(C) = (\mu p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}})(C)$ , où  $\mu_X^{t_0, \dots, t_n}$  est la loi de  $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$  sous  $\mathbf{P}$ . Le théorème ?? d'unicité du prolongement des mesures finies (page ??) s'applique et entraîne que  $\mu_X^{t_0, \dots, t_n} = \mu p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}}$  et comme cela est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ , on en déduit (i).

Montrons ensuite que (iii) implique (ii) (et donc (i)). On définit  $g_1, \dots, g_{n+1} \in L_b(E)$  récursivement en posant

$$g_1 = P_{t_n-t_{n-1}} f_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad g_{k+1} = P_{t_{n-k}-t_{n-k-1}}(f_{n-k} g_k),$$

avec la convention que  $t_{-1} = 0$ , si bien que  $g_{n+1} = P_{t_0} f_0 P_{t_1-t_0} f_1 \dots P_{t_n-t_{n-1}} f_n$ . On remarque tout d'abord que (iii) appliqué à  $s = t_n - t_{n-1}$  et  $t = t_{n-1}$  implique  $\mathbf{P}$ -p.s. que

$$\mathbf{E}\left[\prod_{0 \leq k \leq n} f_k(X_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}^o(X)\right] = P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}}) \prod_{0 \leq k \leq n-1} f_k(X_{t_k}) = (f_{n-1} g_1)(X_{t_{n-1}}) \prod_{0 \leq k \leq n-2} f_k(X_{t_k}).$$

En appliquant successivement (iii) aux temps  $s = t_{n-k} - t_{n-k-1}$  et  $t = t_{n-k-1}$ , on démontre par récurrence que  $\mathbf{E}[\prod_{0 \leq k \leq n} f_k(X_{t_k}) \mid \mathcal{F}_{t_{n-\ell-1}}^o(X)] = (f_{n-\ell} g_\ell)(X_{t_{n-\ell}}) \prod_{0 \leq k \leq n-\ell-1} f_k(X_{t_k})$ . Pour  $k = n+1$ , cela implique que  $\mathbf{E}[\prod_{0 \leq k \leq n} f_k(X_{t_k}) \mid \mathcal{F}_0^o(X)] = g_{n+1}(X_0)$ . En intégrant cette espérance conditionnelle, on obtient bien (ii).

Montrons que (ii) implique (iii) : soit  $C \in \mathcal{C}_t$ , où  $\mathcal{C}_t$  est la classe des cylindres élémentaires antérieurs à  $t$  (voir les notations en début de section). Il existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq t$  et  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$  tels que  $C = \{x \in E^{\mathbb{R}^+} : x_{t_0} \in A_0; \dots; x_{t_n} \in A_n\}$ . On applique (ii) à  $f_0 = \mathbf{1}_{A_0}, \dots, f_n = \mathbf{1}_{A_n}, f_{n+1} = \mathbf{1}_E$  et  $f_{n+2} = f$ ,  $t_{n+1} = t$  et  $t_{n+2} = s+t$ , et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X \in C\}} f(X_{s+t})] &= \mathbf{E}\left[\prod_{0 \leq k \leq n+2} f_k(X_{t_k})\right] \\ &= \int_E \mu(dx) (P_{t_0} f_0 P_{t_1-t_0} f_1 P_{t_2-t_1} \dots f_{n+1} P_{t_{n+2}-t_{n+1}} f_{n+2})(x) \\ &= \int_E \mu(dx) (P_{t_0} f_0 P_{t_1-t_0} f_1 P_{t_2-t_1} \dots \mathbf{1}_E P_s f)(x) \\ &= \mathbf{E}\left[P_s f(X_t) \prod_{0 \leq k \leq n} f_k(X_{t_k})\right] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{X \in C\}} P_s f(X_t)]. \end{aligned}$$

Comme  $\{\{X \in C\} ; C \in \mathcal{C}_t\}$  est un pi-système engendrant  $\mathcal{F}_t^o(X)$  (voir le début de la section), et puisque  $P_s f(X_t)$  est  $\mathcal{F}_t^o(X)$ -mesurable, cela implique (iii), ce qui termine la preuve. ■

L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) dans la proposition qui précède suggère une définition plus générale des processus Markoviens.

**Définition II.2.3 (Markov 2)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ , des noyaux Markoviens. On note  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , leur semi-groupe associé. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}^+}$ , un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+})$ -mesurable. Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Alors, sous  $\mathbf{P}$ ,  $X$  est un processus Markovien relativement à la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , de noyaux de transition  $p_t(x, dy)$  et de loi d'entrée  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{G}_t$ -mesurable. Autrement dit,  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté.
- (b) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et toute  $f \in L_b(E)$ ,

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{G}_t] = P_s f(X_t).$$

(c) La loi de  $X_0$  sous  $\mathbf{P}$  est  $\mu$ . □

La proposition II.2.2 montre qu'un processus de Markov selon la définition II.2.1 *Markov 1* est un processus de Markov selon la définition II.2.3 *Markov 2* relativement à la filtration naturelle du processus. Par ailleurs, il est clair qu'un processus selon la définition II.2.3 *Markov 2* est un processus de Markov selon la définition II.2.1 *Markov 1*. La définition II.2.3 *Markov 2* présente l'avantage de définir le caractère Markovien par rapport à une filtration plus large que la filtration naturelle du processus, ce qui a son importance dans la suite. Néanmoins, cette définition reste en partie insuffisante : elle est enrichie plus loin.

### II.2.b Construction des Processus de Markov sur l'espace canonique.

Le théorème suivant montre qu'à tout semi-groupe de noyaux Markoviens sur un espace mesurable régulier, on peut associer un processus de Markov : ce processus est construit sur l'espace canonique grâce au théorème d'extension de Kolmogorov (théorème I.2.14, page 20). On rappelle les notations  $(\mathcal{F}_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(X_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  pour resp. la filtration et le processus canonique.

**Théorème II.2.4** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable supposé régulier. Soient  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ , des noyaux Markoviens. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , le semi-groupe associé. Alors, pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}_1(E)$ , il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{P}_\nu : \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+} \rightarrow [0, 1]$  telle que le processus canonique  $X^{\text{can}}$  sous  $\mathbb{P}_\nu$  soit un processus Markovien relativement à la filtration canonique  $(\mathcal{F}_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ , de noyaux  $p_t(x, dy)$  et de loi d'entrée  $\nu$ .

**Preuve :** on fixe  $\nu \in \mathcal{M}_1(E)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$  on pose  $\mu_{t_0, \dots, t_n} = \nu p_{t_0} \otimes p_{t_1 - t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n - t_{n-1}}$ . Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . En appliquant le lemme I.1.8 (page 5), il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \mu_{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_{k-1} \times E \times A_{k+1} \times \dots \times A_n) \\ = (\nu p_{t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_k - t_{k-1}} p_{t_{k+1} - t_k} \otimes \dots \otimes p_{t_n - t_{n-1}})(A_0 \times \dots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n) \\ = \mu_{t_0, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n) \end{aligned}$$

car  $p_{t_k - t_{k-1}} p_{t_{k+1} - t_k} = p_{t_{k+1} - t_{k-1}}$  par l'équation de Kolmogorov-Chapman. Cela montre que les lois  $\mu_{t_0, \dots, t_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$  sont compatibles. Le théorème I.2.14 d'extension de Kolmogorov (page 20) entraîne l'existence de  $\mathbb{P}_\nu$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tous  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ , et tout  $B \in \mathcal{E}^{\otimes n+1}$ ,

$$\mathbb{P}_\nu((X_{t_0}^{\text{can}}, \dots, X_{t_n}^{\text{can}}) \in B) = (\mathbb{P}_\nu \circ \pi_{t_0, \dots, t_n}^{-1})(B) = (\nu p_{t_0} \otimes p_{t_1 - t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n - t_{n-1}})(B),$$

ce qui implique le résultat désiré. ■

**Opérateurs de décalage sur l'espace canonique.** Un des buts du chapitre est d'établir la propriété de Markov qui affirme que le processus décalé dans le temps  $X_{t_0+}$  est également Markovien avec les mêmes noyaux Markoviens que  $X$ . Pour cela, nous considérons brièvement l'opération de décalage dans le temps des processus.

**Définition II.2.5** (*Décalages sur l'espace canonique*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , on définit  $\theta_{t_0}^{\text{can}} : E^{\mathbb{R}_+} \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  en posant

$$\forall x = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in E^{\mathbb{R}_+}, \quad \theta_{t_0}^{\text{can}} x = (x_{t_0+t})_{t \in \mathbb{R}_+}.$$

On appelle  $\theta_{t_0}^{\text{can}}$  l'opérateur de décalage au temps  $t_0$ . On vérifie facilement que  $\theta_{t_0+t_1}^{\text{can}} = \theta_{t_0}^{\text{can}} \circ \theta_{t_1}^{\text{can}}$ , pour tous  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$ . □

**Lemme II.2.6** Soient  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $(\theta_t^{\text{can}})^{-1}(\mathcal{F}_s^{\text{can}}) \subset \mathcal{F}_{s+t}^{\text{can}}$ .
- (ii) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta_t^{\text{can}}$  est  $(\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable.

**Preuve :** soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_0 < \dots < t_n \leq s$  et  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ . On pose  $C := \{x \in E^{\mathbb{R}_+} : x_{t_0} \in A_0; \dots; x_{t_n} \in A_n\}$ , qui est un cylindre élémentaire de  $\mathcal{F}_s^{\text{can}}$  (ou un cylindre antérieurs à  $s$ ). Alors

$$(\theta_t^{\text{can}})^{-1}(C) = \{x \in E^{\mathbb{R}_+} : x_{t+t_0} \in A_0; \dots; x_{t+t_n} \in A_n\} \in \mathcal{C}_{t+s} \subset \mathcal{F}_{s+t}^{\text{can}},$$

ce qui entraîne le résultat voulu les cylindres élémentaires de  $\mathcal{F}_s^{\text{can}}$  engendrent  $\mathcal{F}_s^{\text{can}}$ . Le point (ii) se montre de la même manière. ■

On introduit le processus de Markov canonique de la manière suivante.

**Définition II.2.7** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace régulier. Soient  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ , des noyaux Markoviens conservatifs. On note  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , leur semi-groupe associé. On note  $\mathbb{P}_\mu$ ,  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  les lois introduites au théorème II.2.4. Alors, les objets

$$(\Omega^{\text{can}} := E^{\mathbb{R}_+}; \mathcal{F}^{\text{can}} := \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}; (\mathcal{F}_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}; (\theta_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbb{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E))$$

forment ce que l'on appelle le processus de Markov canonique associé au semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . □

### II.2.c Définition complète des processus de Markov et propriété de Markov (faible).

Par imitation de la définition II.2.7 des processus de Markov canoniques, on pose la définition suivante des processus Markoviens, qui permet d'énoncer la propriété de Markov.

**Définition II.2.8 (Processus Markoviens)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Un processus de Markov est la donnée des objets suivants

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)) \quad (\text{II.6})$$

qui satisfont les conditions suivantes.

- (a)  $(\Omega, \mathcal{F})$  est un espace mesurable et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .
- (b)  $X : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  est un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté.
- (c)  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est le semi-groupe associé à des noyaux Markoviens  $(p_t(x, dy))_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ .
- (d) Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$  est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que  $X_0$  sous  $\mathbf{P}_\mu$  a pour loi  $\mu$  et telle que pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et toute fonction  $f \in L_b(E)$ ,

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[f(X_{s+t}) \mid \mathcal{G}_t] = P_s f(X_t).$$

• *Convention.* Si aucune filtration n'est mentionnée, il est sous-entendu que  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^{\text{o}}(X) = \sigma(X_s; s \in [0, t])$ , la filtration naturelle de  $X$ . On rappelle au passage que  $\mathcal{F}_\infty^{\text{o}}(X) = \sigma(\mathcal{F}_t^{\text{o}}(X); t \in \mathbb{R}_+) = \sigma(X_t; t \in \mathbb{R}_+)$  est la tribu engendrée par  $X$ .

• *Notations.* Pour tout  $x \in E$ , on adopte la notation  $\mathbf{P}_x := \mathbf{P}_{\delta_x}$ . De même on note  $\mathbf{E}_x := \mathbf{E}_{\delta_x}$  l'espérance associée. Donc  $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$ .

• *Opérateurs de décalage.* Cette structure n'est pas essentielle mais elle simplifie certains énoncés sur les processus de Markov.

(e) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , il existe  $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$  tel que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \forall \omega \in \Omega, \quad X_s(\theta_t(\omega)) = X_{s+t}(\omega).$$

Les  $\theta_t$  sont appelés *opérateurs de décalage*. Notons qu'ici, aucune hypothèse de mesurabilité n'est faite sur ces opérateurs. Lorsque que le processus de Markov est muni d'opérateurs de décalage, on le signale en l'ajoutant dans (II.6).  $\square$

Le lemme suivant considère les propriétés de mesurabilité des opérateurs de décalage.

**Lemme II.2.9** *On considère un processus de Markov avec les notations de la définition II.2.8.*

(i) Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable et bornée. Alors, il existe une fonctionnelle  $F : E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$ -mesurable bornée telle que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $Z(\omega) = F((X_s(\omega))_{s \in \mathbb{R}_+})$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad Z \circ \theta_t = F(\theta_t^{\text{can}} X) = F((X_{t+s})_{s \in \mathbb{R}_+}), \text{ partout sur } \Omega. \quad (\text{II.7})$$

Cela implique que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Z \circ \theta_t$  est  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable. D'autre part, cela implique que

$$Z \circ \theta_0 = Z, \text{ partout sur } \Omega. \quad (\text{II.8})$$

(ii) Soit  $s \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_s^o(X)$ -mesurable bornée. Alors, il existe une fonctionnelle  $F : E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{F}_s^{\text{can}}$ -mesurable telle que (II.7) ait lieu. Cela implique que  $Z \circ \theta_t$  est  $\mathcal{F}_{s+t}^o(X)$ -mesurable bornée et donc que

$$\theta_t^{-1}(\mathcal{F}_s^o(X)) \subset \mathcal{F}_{s+t}^o(X).$$

**Preuve :** montrons d'abord (ii). Soit  $s \in \mathbb{R}_+$ . On note  $\mathcal{P}_s$  la classe d'événements de la forme  $A = \{X_{t_0} \in A_0; \dots; X_{t_n} \in A_n\}$  où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq s$  et  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ . On a donc  $\mathcal{P}_s = X^{-1}(\mathcal{C}_s)$ , où  $\mathcal{C}_s$  désigne le pi-système des cylindres antérieurs à  $s$  sur l'espace canonique. On vérifie immédiatement que  $\mathcal{P}_s$  est un pi-système tel que  $\sigma(\mathcal{P}_s) = \mathcal{F}_s^o(X)$ . Soit  $A \in \mathcal{P}_s$  comme ci-dessus. On pose  $Z = \mathbf{1}_A$  et  $C = \{x \in E^{\mathbb{R}^+} : x_{t_0} \in A_0; \dots; x_{t_n} \in A_n\}$ . Il est clair que  $C \in \mathcal{F}_s^{\text{can}}$  est tel que  $Z = \mathbf{1}_C(X)$  partout sur  $\Omega$ . Par le lemme II.2.6, on a  $(\theta_t^{\text{can}})^{-1}(C) \in \mathcal{F}_{s+t}^{\text{can}}$  et donc

$$Z \circ \theta_t = \mathbf{1}_{\{X_{t_0+t} \in A_0; \dots; X_{t_n+t} \in A_n\}} = \mathbf{1}_C(\theta_t^{\text{can}} X) = \mathbf{1}_{(\theta_t^{\text{can}})^{-1}(C)}(X)$$

est  $\mathcal{F}_{s+t}^o(X)$ -mesurable. Soit  $H$ , l'ensemble des v.a.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $\mathcal{F}_s^o(X)$ -mesurables bornées telles qu'il existe  $F : E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}_s^{\text{can}}$ -mesurable bornée satisfaisant le fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Z \circ \theta_t$  soit  $\mathcal{F}_{s+t}^o(X)$ -mesurable bornée et vaille  $F(\theta_t^{\text{can}} X)$  partout sur  $\Omega$ . On vérifie que  $H$  est un espace vectoriel. On vient de montrer que  $\mathbf{1}_A \in H$ , pour tout  $A \in \mathcal{P}_s$ . Il est facile de vérifier que  $H$  satisfait les propriétés sur théorème ?? de la classe monotone fonctionnelle (page ??). On en déduit donc que  $H$  est l'ensemble de toutes les v.a.  $\mathcal{F}_s^o(X)$ -mesurables bornées, ce qui montre (ii).

Le point (i) se montre de manière similaire. Pour montrer (II.8), on rappelle que  $\theta_0^{\text{can}}$  est l'identité sur  $E^{\mathbb{R}^+}$  et on remarque que  $Z \circ \theta_0 = F(\theta_0^{\text{can}} X) = F(X) = Z$ .  $\blacksquare$

**Lemme II.2.10** *On considère un processus de Markov avec les notations de la définition II.2.8. Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée. Alors,  $x \in E \mapsto \mathbf{E}_x[Z] \in \mathbb{R}$  est  $\mathcal{B}(E)$ -mesurable bornée.*

**Preuve :** on montre d'abord le lemme pour  $Z = \mathbf{1}_C(X)$  où  $C \in \mathcal{C}$  est un cylindre élémentaire de l'espace canonique ; rappelons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_0 < \dots < t_n$  et  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$  tels que  $C = \{x \in E^{\mathbb{R}^+} : x_{t_0} \in A_0; \dots; x_{t_n} \in A_n\}$ . On a donc

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_C(X)] = \mathbf{P}_x(X \in C) = (p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}})(x, C).$$

Or  $x \mapsto (p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}})(x, C)$  est mesurable car  $p_{t_0} \otimes p_{t_1-t_0} \otimes \dots \otimes p_{t_n-t_{n-1}}$  est un noyau de  $E$  sur  $E^{n+1}$ .

On note ensuite  $H$  l'ensemble des fonctionnelles  $F : E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$ -mesurables bornées telles que  $x \in E \mapsto \mathbf{E}_x[F(X)] \in \mathbb{R}$  est  $\mathcal{E}$ -mesurable bornée. On a montré que  $\mathbf{1}_C \in H$ , pour tout  $C \in \mathcal{C}$ . Il est facile de montrer que  $H$  satisfait les hypothèses du théorème ?? de la classe monotone dans sa version fonctionnelle (page ??), qui implique que  $H$  est exactement l'espace des fonctionnelles  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$ -mesurables bornées. Cela permet de conclure car pour toute v.a.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée, le lemme II.2.9 (i) implique qu'il existe  $F : E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$ -mesurable bornée telle que  $Z = F(X)$ . ■

Nous obtenons ensuite première version de la propriété de Markov.

**Théorème II.2.11 (Propriété de Markov faible)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et pour toute fonctionnelle  $F : E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$ -mesurable bornée, on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[F((X_{t+s})_{s \in \mathbb{R}_+}) \mid \mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_{X_t}[F(X)]. \quad (\text{II.9})$$

C'est la propriété de Markov faible.

Si le processus de Markov est muni d'opérateurs de décalage  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , cette propriété de Markov faible se reformule comme suit : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et pour toute v.a.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée, on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[Z \circ \theta_t \mid \mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_{X_t}[Z]. \quad (\text{II.10})$$

**Preuve :** il est clair que si le processus de Markov est muni d'opérateurs de décalage, le lemma II.2.9 (ii) montre que (II.9) est équivalente à (II.10). Il suffit donc de montrer (II.9). On commence par considérer des fonctionnelles de la forme  $F(X) := f_0(X_{t_0}) \dots f_n(X_{t_n})$ , où  $0 \leq t_0 < \dots < t_n$  et  $f_0, \dots, f_n \in L_b(E)$ . Pour cela on définit  $\phi_0, \dots, \phi_n \in L_b(E)$  récursivement par

$$\phi_n = f_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \phi_k = f_k P_{t_{k+1}-t_k} \phi_{k+1}.$$

On vérifie tout d'abord que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mu[F(X_{t+\cdot}) \mid \mathcal{G}_{t+t_{n-1}}] &= \mathbf{E}_\mu[f_n(X_{t+t_n}) \mid \mathcal{G}_{t+t_{n-1}}] \prod_{0 \leq k \leq n-1} f_k(X_{t+t_k}) \\ &= f_{n-1}(X_{t+t_{n-1}}) P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{t+t_{n-1}}) \prod_{0 \leq k \leq n-2} f_k(X_{t+t_k}) \\ &= \phi_{n-1}(X_{t+t_{n-1}}) \prod_{0 \leq k \leq n-2} f_k(X_{t+t_k}). \end{aligned}$$

Ici on a utilisé le point (d) la définition II.2.8 des processus Markoviens. En raisonnant de même, on montre récursivement que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.

$$\mathbf{E}_\mu[F(X_{t+ \cdot}) | \mathcal{G}_{t+t_k}] = \phi_k(X_{t+t_k}) \prod_{0 \leq \ell \leq k-1} f_k(X_{t+t_\ell})$$

et finalement  $\mathbf{E}_\mu[F(X_{t+ \cdot}) | \mathcal{G}_t] = P_{t_0}\phi_0(X_t)$ . Or pour tout  $x \in E$ , la proposition II.2.2 implique que

$$P_{t_0}\phi_0(x) = P_{t_0}f_0 P_{t_1-t_0}f_1 \dots P_{t_n-t_{n-1}}f_n(x) = \mathbf{E}_x[F(X)],$$

ce qui entraîne bien (II.9) pour  $F(X) := f_0(X_{t_0}) \dots f_n(X_{t_n})$ .

En choisissant  $f_k = \mathbf{1}_{A_k}$ , où  $A_k \in \mathcal{E}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , on a montré que (II.9) est vérifiée pour toute fonctionnelle de la forme  $F = \mathbf{1}_C$ , avec  $C \in \mathcal{C}$ , cylindre élémentaire de l'espace canonique. On note  $H$  l'ensemble des fonctionnelles  $F$  vérifiant (II.9); on constate facilement que  $H$  satisfait les hypothèses du théorème ?? de la classe monotone fonctionnelle. Ce théorème implique alors que  $H$  est l'ensemble des fonctionnelles bornées  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurables, ce qui est le résultat voulu. ■

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition II.2.12** *On considère un processus de Markov avec les notations de la définition II.2.8. Alors, pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et toute v.a.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée, on a*

$$\mathbf{E}_\mu[Z] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}_x[Z]. \quad (\text{II.11})$$

**Preuve :** par (II.8) au lemme II.2.9, page 56,  $Z \circ \theta_0 = Z$  La propriété de Markov faible (II.10) au temps 0 implique alors que

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[Z | \mathcal{G}_0] = \mathbf{E}_\mu[F((X_{0+s})_{s \in \mathbb{R}_+}) | \mathcal{G}_0] = \mathbf{E}_{X_0}[F(X)] = \mathbf{E}_{X_0}[Z].$$

Comme sous  $\mathbf{P}_\mu$  la loi de  $X_0$  est  $\mu$ , en intégrant l'égalité précédente, on obtient (II.11). ■

## II.3 Propriété de Markov forte.

### II.3.a Définition et propriété de Markov forte.

Le but de cette section est d'étendre la propriété de Markov simple à des temps d'arrêts. On renvoie le lecteur à la section I.3, page 24, traitant des temps d'arrêt en général.

**Définition II.3.1** (*Processus de Markov forts*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov au sens de la définition II.2.8. C'est un processus de *Markov fort* s'il satisfait les conditions suivantes.

- (a)  $X$  est progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

- (b) *Convention pour les temps infinis.* Soit  $\partial \in E$ , qui, sauf mention explicite du contraire ne joue qu'un rôle arbitraire. Soit  $X_\infty$  la v.a. constante à  $\partial : X_\infty(\omega) = \partial$ ,  $\omega \in \Omega$ . Pour tout temps aléatoire  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $X_T : \Omega \rightarrow E$  est alors bien défini par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega). \quad (\text{II.12})$$

Si le processus de Markov est muni d'opérateurs de décalage  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , on suppose également l'existence de  $\theta_\infty : \Omega \rightarrow \Omega$  tel que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \forall t \in [0, \infty], \quad X_t(\theta_\infty(\omega)) = X_\infty(\omega). \quad (\text{II.13})$$

- (c) Pour tout  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt  $T$ , pour toute fonction  $f \in L_b(E)$ , pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et tout  $s \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} f(X_{s+T}) \mid \mathcal{G}_T] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} P_s f(X_T). \quad (\text{II.14})$$

ce qui étend la définition II.2.8 des processus de Markov.  $\square$

**Remarque II.3.2** On rappelle que  $T$  et  $s + T$  sont des  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt (lemme I.3.2 (iv), page 25) et donc  $X_T$  et  $X_{s+T}$  sont resp.  $\mathcal{G}_T$  et  $\mathcal{G}_{s+T}$ -mesurables, par le lemme I.3.3, page 26, puisque  $X$  est supposé progressivement mesurable. On rappelle aussi que  $\{T < \infty\} \in \mathcal{G}_T$ .  $\square$

**Théorème II.3.3 (Propriété de Markov forte)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov fort. Soit  $\partial \in E$ ; on adopte les conventions (b) de la définition II.3.1. Soit  $F : E^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonctionnelle  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurable bornée. Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Les assertions suivantes sont vérifiées.

(i)  $F((X_{T+t})_{t \in \mathbb{R}_+})$  est une v.a.  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable bornée.

(ii) Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} F((X_{T+t})_{t \in \mathbb{R}_+}) \mid \mathcal{G}_T] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \mathbf{E}_{X_T}[F(X)]. \quad (\text{II.15})$$

Lorsque le processus de Markov est muni d'opérateurs de décalage, la propriété de Markov forte se reformule comme suit : soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty^\circ(X)$ -mesurable bornée; alors  $Z \circ \theta_T$  est une v.a.  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable bornée et pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} Z \circ \theta_T \mid \mathcal{G}_T] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \mathbf{E}_{X_T}[Z]. \quad (\text{II.16})$$

**Preuve :** on observe que (II.16) est strictement équivalente à (II.15), modulo l'existence d'opérateurs de décalage. Il suffit donc de démontrer (II.15) et on commence par le faire pour une fonctionnelle de la forme  $F(X) = f_0(X_{t_0}) \dots f_n(X_{t_n})$  où  $0 \leq t_0 < \dots < t_n$  et  $f_0, \dots, f_n \in L_b(E)$ . On vérifie d'abord que

$$F((X_{T+t})_{t \in \mathbb{R}_+}) = f_0(X_{t_0+T}) \dots f_n(X_{t_n+T})$$

qui est  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable car les v.a.  $X_{t_k+T}$  sont  $(\mathcal{G}_\infty, \mathcal{B}(E))$ -mesurables. En effet,  $t_k + T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt,  $X$  est progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , par hypothèse et par le lemme I.3.3 qui s'applique. On définit ensuite  $\phi_0, \dots, \phi_n \in L_b(E)$  récursivement par

$$\phi_n = f_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \phi_k = f_k P_{t_{k+1}-t_k} \phi_{k+1}.$$

On vérifie tout d'abord que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\{T < \infty\} = \{t_{n-1} + T < \infty\} \in \mathcal{G}_{t_{n-1}+T}$ . Comme  $\mathcal{G}_{t_k+T} \subset \mathcal{G}_{t_{n-1}+T}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} F(X_{T+}) \mid \mathcal{G}_{T+t_{n-1}}] &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbf{E}_\mu[f_n(X_{T+t_n}) \mid \mathcal{G}_{T+t_{n-1}}] \prod_{0 \leq k \leq n-1} f_k(X_{T+t_k}) \\ &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} f_{n-1}(X_{T+t_{n-1}}) P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{T+t_{n-1}}) \prod_{0 \leq k \leq n-2} f_k(X_{T+t_k}) \\ &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \phi_{n-1}(X_{T+t_{n-1}}) \prod_{0 \leq k \leq n-2} f_k(X_{T+t_k}).\end{aligned}$$

Ici on a utilisé le point (c) la définition II.3.1. En raisonnant de même, on montre récursivement que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.

$$\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} F(X_{T+}) \mid \mathcal{G}_{T+t_k}] = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \phi_k(X_{T+t_k}) \prod_{0 \leq \ell \leq k-1} f_\ell(X_{T+t_\ell})$$

et finalement  $\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} F(X_{T+}) \mid \mathcal{G}_T] = P_{t_0} \phi_0(X_T)$ . Or pour tout  $x \in E$ , la proposition II.2.2 implique que

$$P_{t_0} \phi_0(x) = P_{t_0} f_0 P_{t_1-t_0} f_1 \dots P_{t_n-t_{n-1}} f_n(x) = \mathbf{E}_x[F(X)],$$

ce qui entraîne bien (II.15) pour  $F(X) = f_0(X_{t_0}) \dots f_n(X_{t_n})$ .

On passe au cas général par un raisonnement de classe monotone. On rappelle que  $\mathcal{C}$  désigne l'ensemble des cylindres élémentaires de  $E^{\mathbb{R}^+}$ . En choisissant  $f_k = \mathbf{1}_{A_k}$ , où  $A_k \in \mathcal{E}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , on a montré que (i) et (ii) sont vérifiées pour toute fonctionnelle de la forme  $\mathbf{1}_B$ , avec  $B \in \mathcal{C}$ . On note  $H$  l'ensemble des fonctionnelles  $F: E^{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C} \otimes \mathbb{R}^+$ -mesurables bornées et qui satisfont (i) et (ii). On a montré que  $\mathbf{1}_B \in H$ , pour tout  $B \in \mathcal{C}$ . On vérifie facilement que  $H$  satisfait les hypothèses du théorème ?? de la classe monotone fonctionnelle qui entraîne alors le résultat voulu. ■

### II.3.b Un critère impliquant la propriété de Markov forte.

La définition des processus de Markov est trop générale car elle n'exclut pas certains processus pathologiques tels que le cas d'une famille de v.a.  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  i.i.d. de loi  $\mu$ . Et il n'est pas envisageable de déduire sMarkov forte de Markov faible sans faire des hypothèses restrictives. Le problème de lire directement sur le semi-groupe la propriété de Markov forte est délicat : nous nous contentons de l'énoncé (suffisant pour le reste du cours) qui utilise l'hypothèse **(H)** introduite à la définition II.1.13, page 48, et qui est satisfaite par les semi-groupes de Feller et de Feller-Dynkin (voir la proposition II.1.14, page 49).

**Théorème II.3.4 (Critère Markov fort)** Soit  $E$ , un espace topologique métrisable séparable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov. On fait les hypothèses suivantes.

- (a) Le processus  $X$  est continu à droite.
- (b) Son semi-groupe satisfait l'hypothèse **(H)** (voir la définition II.1.13, page 48).

Alors, le processus est fortement Markovien par rapport à la filtration continue à droite  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

**Preuve :** comme  $X$  est càd et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , il est progressivement mesurable par rapport à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et donc également par rapport à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ , par le lemme I.2.22, page 24. Il suffit de montrer que pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et pour tout  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt  $T$  on a :

$$\forall f \in L_b(E), \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} f(X_{s+T}) | \mathcal{G}_{T+}] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} P_s f(X_T). \quad (\text{II.17})$$

On se donne  $L$  et  $\mathcal{P}$  comme dans la définition II.1.13 de l'hypothèse **(H)** et on commence par montrer (II.17) pour  $f \in L$ . Pour cela, on pose  $T_n := 2^{-n} \lceil 2^n T \rceil$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On remarque que  $T = \infty$  ssi  $T_n = \infty$  et que  $T_n \downarrow T$  partout sur  $\Omega$ . Soit  $A \in \mathcal{G}_{T+}$ . On pose

$$u_n(f) := \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} f(X_{s+T_n})].$$

La continuité à droite de  $X$  et la continuité de  $f$  impliquent, par convergence dominée, que  $\lim_n u_n(f) = u_n(f) := \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} f(X_{s+T})]$ . Par ailleurs, on vérifie que

$$u_n(f) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\}} f(X_{s+k2^{-n}})].$$

car  $\sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\}} | f(X_{s+k2^{-n}})|] = u(|f|) \leq \|f\|_\infty < \infty$ , et on peut utiliser l'interversion série-espérance  $\mathbf{L}^1$ . La définition I.3.4 (a) de  $\mathcal{G}_{T+}$  (page 26) implique que  $A \cap \{T < k2^{-n}\} \in \mathcal{G}_{k2^{-n}}$ . Comme  $\{(k-1)2^{-n} \leq T\} \in \mathcal{G}_{(k-1)2^{-n}}$  (car le complémentaire  $\{T < (k-1)2^{-n}\} \in \mathcal{G}_{(k-1)2^{-n}}$ , par le lemme I.3.5 (i), page 26), on a  $A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\} \in \mathcal{G}_{k2^{-n}}$ . Par définition des processus de Markov on a donc

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\}} f(X_{s+k2^{-n}}) | \mathcal{G}_{k2^{-n}}] = \mathbf{1}_{A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\}} P_s f(X_{k2^{-n}}).$$

En intégrant sous  $\mathbf{P}_\mu$  cette égalité et en sommant on obtient donc

$$u_n(f) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\}} P_s f(X_{k2^{-n}})] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} P_s f(X_{T_n})].$$

Puisque  $P_s f$  est continue bornée, la continuité à droite de  $X$  entraîne par convergence dominée que

$$\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} f(X_{s+T})] = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(f) = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} P_s f(X_T)]. \quad (\text{II.18})$$

On étend (II.18) à toutes les fonctions de  $L_b(E)$  par un raisonnement de classe monotone : on note  $H$  l'ensemble des fonctions de  $L_b(E)$  satisfaisant (II.18). En utilisant l'hypothèse (b) et la convergence monotone, on montre facilement que  $H$  contient les fonctions de la forme  $\mathbf{1}_A$ ,  $A \in \mathcal{P}$ . On vérifie également que  $H$  satisfait les autres hypothèses du théorème ?? de la classe monotone fonctionnelle, ce qui entraîne que  $H = L_b(E)$  et donc (II.17). ■

## II.4 Propriétés de Markov relativement aux filtrations augmentées.

### II.4.a Markov faible relativement aux filtrations augmentées, loi du 0-1 de Blumenthal.

Comme déjà mentionné dans la section I.3.b au chapitre I, page 28, l'emploi de temps d'arrêt est facilité par l'utilisation de filtrations augmentées. Les deux prochaines sections détaillent les conséquences de cette complétion du point de vue des propriétés de Markov (faible et forte). On rappelle tout d'abord les notations suivantes : soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable et  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ; on note  $\mathcal{N}_\mu$  la classe des ensembles  $\mu$ -négligeables

et on note  $\mathcal{E}^\mu := \sigma(\mathcal{E}, \mathcal{N}_\mu)$ , la tribu  $\mu$ -complétée. On rappelle ici la définition de la tribu des universellement mesurables associée à  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E}^{\text{uni}} = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \mathcal{E}^\mu.$$

On a clairement  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^{\text{uni}} \subset \mathcal{E}^\mu$ , pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . Dans le cadre des processus de Markov, la définition suivante précise le terme de "complétion des filtrations".

**Définition II.4.1** (*Augmentation des filtrations, hypothèses habituelles*) Soit  $E$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^o; (\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)), \quad (\text{II.19})$$

un processus de Markov. Dans la suite, le symbole "o" est employé pour signaler le caractère "brut" de la filtration. On rappelle que  $\mathcal{F}_t^o(X) = \sigma(X_s; s \in [0, t])$  désigne la filtration naturelle de  $X$ .

- (a) Pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ , on note  $\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}$  les  $\mathbf{P}_\mu$ -négligeables de  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Pour simplifier les notations, on pose  $\mathcal{F}^\mu := (\mathcal{F}^o)^{\mathbf{P}_\mu} = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{F}^o)$ ,

$$\mathcal{G}_t^\mu := (\mathcal{G}_t^o)^{\mathbf{P}_\mu} = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{G}_t^o) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t^\mu(X) := (\mathcal{F}_t^o(X))^{\mathbf{P}_\mu} = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{F}_t^o(X)).$$

qui sont resp. les  $\mathbf{P}_\mu$ -complétions de  $\mathcal{G}_t^o$  et de  $\mathcal{F}_t^o(X)$ .

- (b) L'*augmentation de  $\mathcal{F}^o$ , de  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et de  $(\mathcal{F}_t^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+$*  sont définies par

$$\mathcal{F} := \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \mathcal{F}^\mu, \quad \mathcal{G}_t := \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \mathcal{G}_t^\mu \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t(X) := \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \mathcal{F}_t^\mu(X). \quad (\text{II.20})$$

On continue de noter  $\mathbf{P}_\mu$  l'extension (unique par le théorème ??, page ??) de  $\mathbf{P}_\mu$  à  $\mathcal{F}^\mu$ .

- (c) Dans le contexte des processus de Markov, la filtration  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les *hypothèses habituelles* si  $\mathcal{G}_t^o = \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t+}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , où  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est l'augmentation de  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  définie au (b).  $\square$

**Remarque II.4.2** On reprend les notations de la définition II.4.1 qui précède. Le lemme I.3.14 (i), page 33, implique que

$$\mathcal{G}_{t+} = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{G}_{t+}^o) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{t+}(X) = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{F}_{t+}^\mu(X)). \quad (\text{II.21})$$

On voit de plus que  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_{t+}(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfont toujours les hypothèses habituelles.  $\square$

**Lemme II.4.3** Soit  $X$ , un  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Markov avec les notations de (II.19) de la définition II.4.1 :  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  sont les augmentations habituelles de resp.  $\mathcal{F}^o$ ,  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  définies par (II.20). Alors,

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

est également un processus de Markov. L'existence d'opérateurs de décalage ne pose aucun problème dans cette extension.

**Preuve :** comme  $\mathcal{G}_t^o \subset \mathcal{G}_t$ ,  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté. La preuve est une simple conséquence du le lemme I.4.7, page 38 : soient  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,  $f \in L_b(E)$  et  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ; comme  $\mathcal{G}_t^o \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_t^\mu$ , on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_\mu[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{G}_t^o] = P_s f(X_t),$$

ce qui montre le lemme.  $\blacksquare$

Le théorème suivant montre que la propriété de Markov peut avoir lieu pour des fonctionnelles  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurables bornées – et non pas seulement pour des fonctionnelles  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ . Cette extension de la propriété de Markov n'est pas un détail : elle a des conséquences importantes telles que loi du 0-1 de Blumenthal. On note que dans l'énoncé ci-dessous, les opérateurs de décalage jouent un rôle très pratique.

**Théorème II.4.4 (Propriété de Markov simple pour les fonctionnelles augmentées)** Soit  $E$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^o; (\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)) ,$$

un processus de Markov muni d'opérateurs de décalage. Soient  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , les augmentations de resp.  $\mathcal{F}^o$ ,  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour toute v.a.  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée, l'application  $x \in E \mapsto \mathbf{E}_x[Z] \in \mathbb{R}$  est  $\mathcal{E}^{\text{uni}}$ -mesurable, où  $\mathcal{E}^{\text{uni}}$  est la tribu des universellement mesurables associée à  $\mathcal{E}$ .

(ii) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta_t^{-1}(\mathcal{F}_s(X)) \subset \mathcal{F}_{s+t}(X)$  et  $\theta_t$  est  $(\mathcal{F}_\infty(X), \mathcal{F}_\infty(X))$ -mesurable.

(iii) Soient  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée. Alors  $Z \circ \theta_t$  est  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable et

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[Z \circ \theta_t | \mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_{X_t}[Z] .$$

(iv) En particulier, en conservant les notations ci-dessus, on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } Z \circ \theta_0 = Z \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_\mu[Z] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}_x[Z] . \quad (\text{II.22})$$

**Preuve :** on fixe  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . On montre d'abord (i) et (iv) Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée. Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . Comme  $\mathcal{F}_\infty(X) \subset \mathcal{F}_\infty^\mu(X)$ , le théorème ?? (page ??) montre qu'il existe  $Z_1, Z_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , deux v.a.  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurables bornées telle que  $Z_1 \leq Z \leq Z_2$  partout sur  $\Omega$  et telles que  $\mathbf{E}_\mu[Z_1] = \mathbf{E}_\mu[Z_2]$ . Par (II.8), lemme II.2.9, page 56,  $Z_i \circ \theta_0 = Z_i$  donc  $Z_1 \circ \theta_0 = Z_1 \leq Z \circ \theta_0 \leq Z_2 = Z_2 \circ \theta_0$ . Donc  $|Z \circ \theta_0 - Z| \leq Z_2 - Z_1$ . On obtient donc  $\mathbf{E}_\mu[|Z \circ \theta_0 - Z|] = \mathbf{E}_\mu[Z_2] - \mathbf{E}_\mu[Z_1] = 0$ , ce qui prouve la première égalité de (II.22).

Par ailleurs, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , le lemme II.2.10, page 56, affirme que  $x \in E \mapsto \mathbf{E}_x[Z_i] \in \mathbb{R}$  est  $\mathcal{E}$ -mesurable et par la proposition II.2.12, page 58,  $\mathbf{E}_\mu[Z_i] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}_x[Z_i]$ . Or  $\mathbf{E}_x[Z_2] - \mathbf{E}_x[Z_1] = \mathbf{E}_x[Z_2 - Z_1] \geq 0$ . Donc  $\int_E \mu(dx) (\mathbf{E}_x[Z_2] - \mathbf{E}_x[Z_1]) = \mathbf{E}_\mu[Z_2] - \mathbf{E}_\mu[Z_1] = 0$ . On en déduit donc que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\mathbf{E}_x[Z_2] = \mathbf{E}_x[Z_1]$ . Or pour tout  $x \in E$ ,  $\mathbf{E}_x[Z_1] \leq \mathbf{E}_x[Z] \leq \mathbf{E}_x[Z_2]$ . Donc  $x \mapsto \mathbf{E}_x[Z]$  coïncide  $\mu$ -presque partout avec une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable. Cela montre que  $x \mapsto \mathbf{E}_x[Z]$  est  $\mathcal{E}^\mu$ -mesurable et comme cela est vrai pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ , cela entraîne (i) immédiatement. Cela montre également que

$$\int_E \mu(dx) \mathbf{E}_x[Z] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}_x[Z_i] = \mathbf{E}_\mu[Z_i] = \mathbf{E}_\mu[Z] ,$$

ce qui prouve la seconde égalité de (II.22), ce qui termine la preuve de (iv).

Montrons (ii) et (iii) en même temps. On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $s \in [0, \infty]$ . Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_s(X)$ -mesurable bornée. On note  $\nu := \mu p_t$ , qui est la loi de  $X_t$  sous  $\mathbf{P}_\mu$ . Comme  $\mathcal{F}_s(X) \subset \mathcal{F}_s^\nu(X)$ , le théorème ?? (page ??) montre qu'il existe  $Y_1, Y_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , deux variables  $\mathcal{F}_s^\nu(X)$ -mesurables bornées telles que  $Y_1 \leq Z \leq Y_2$  partout sur  $\Omega$  et telles que  $\mathbf{E}_\nu[Y_1] = \mathbf{E}_\nu[Y_2] = \mathbf{E}_\nu[Z]$ . Or  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{E}_{X_t}[Y_2] - \mathbf{E}_{X_t}[Y_1] = \mathbf{E}_{X_t}[Y_2 - Y_1] \geq 0$ . Par définition de  $\nu$  et par (II.11) au lemme II.2.12, page 58, on a  $\mathbf{E}_\mu[\mathbf{E}_{X_t}[Y_2] - \mathbf{E}_{X_t}[Y_1]] = \mathbf{E}_\nu[Y_2] - \mathbf{E}_\nu[Y_1] = 0$ . Comme  $\mathbf{E}_{X_t}[Y_1] \leq \mathbf{E}_{X_t}[Z] \leq \mathbf{E}_{X_t}[Y_2]$ , on obtient

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_{X_t}[Y_2] = \mathbf{E}_{X_t}[Y_1] = \mathbf{E}_{X_t}[Z] . \quad (\text{II.23})$$

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , le lemme I.4.7, page 38 et la première version de la propriété de Markov faible du théorème II.2.11, page 57, impliquent alors que  $Y_i \circ \theta_t$  est  $\mathcal{F}_{s+t}^o(X)$ -mesurable et que

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[Y_i \circ \theta_t | \mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_\mu[Y_i \circ \theta_t | \mathcal{G}_t^o] = \mathbf{E}_{X_t}[Y_i]. \quad (\text{II.24})$$

Donc  $\mathbf{E}_\mu[Y_1 \circ \theta_t] = \mathbf{E}_\mu[Y_2 \circ \theta_t]$ . Or  $Y_1 \circ \theta_t \leq Z \circ \theta_t \leq Y_2 \circ \theta_t$ . Par conséquent,  $\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } Z \circ \theta_t = Y_2 \circ \theta_t = Y_1 \circ \theta_t$  et  $Z \circ \theta_t$  est  $\mathcal{F}_{s+t}^\mu(X)$ -mesurable. Comme cela est vrai pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ , cela prouve que  $Z \circ \theta_t$  est  $\mathcal{F}_{s+t}(X)$ -mesurable, ce qui prouve (ii). Pour montrer (iii), on garde les mêmes notations et on choisit  $s = \infty$ ; (II.24) entraîne alors que  $\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.}$

$$\mathbf{E}_{X_t}[Y_1] = \mathbf{E}_\mu[Y_1 \circ \theta_t | \mathcal{G}_t] \leq \mathbf{E}_\mu[Z \circ \theta_t | \mathcal{G}_t] \leq \mathbf{E}_\mu[Y_2 \circ \theta_t | \mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_{X_t}[Y_2]$$

et (II.23) implique (iii), ce qui termine la preuve du théorème. ■

En application, on montre la loi du 0-1 de Blumenthal qui s'énonce comme suit.

**Théorème II.4.5 (Loi du 0-1 de Blumenthal)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable régulier. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^o; (\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov. Soit  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , l'augmentation de  $(\mathcal{F}_t^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Alors,

$$\forall x \in E, \forall B \in \mathcal{F}_0(X), \quad \mathbf{P}_x(B) = 0 \text{ ou } 1.$$

**Preuve :** donnons une preuve lorsque le processus est muni d'opérateur de décalage  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  : soient  $x \in E$  et  $B \in \mathcal{F}_0(X)$ . Par (II.22) au théorème II.4.4, page 63 implique que  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B \circ \theta_0$ . La propriété de Markov simple étendue aux fonctionnelles augmentées (théorème II.4.4 (iii), page 63), implique alors que  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } \mathbf{1}_B = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_B | \mathcal{G}_0] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_B \circ \theta_0 | \mathcal{G}_0] = \mathbf{E}_{X_0}[\mathbf{1}_B] = \mathbf{P}_x(B)$  car  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } X_0 = x$ . On a donc  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } \mathbf{P}_x(B) = \mathbf{1}_B$ , ce qui implique le théorème.

Nous donnons une seconde preuve, se passant des opérateurs de décalage. On commence par traiter le cas d'ensembles  $A \in \mathcal{F}_0^o(X) = \sigma(X_0)$  : il existe donc  $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{B}(E)$ -mesurable telle que  $\mathbf{1}_A = f(X_0)$  par tout sur  $\Omega$ ; et alors  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } \mathbf{1}_A = f(x)$ , ce qui implique que  $\mathbf{P}_x(A) = f(x) \in \{0, 1\}$ . Soit  $B \in \mathcal{F}_0(X)$ ; comme l'ensemble  $B$  est dans la tribu  $\mathbf{P}_x$ -complétée  $\mathcal{F}_0^o(X)$ , le théorème ?? (page ??) implique l'existence de  $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_0^o(X)$  tels que  $B_1 \subset B \subset B_2$  et  $\mathbf{P}_x(B_1) = \mathbf{P}_x(B) = \mathbf{P}_x(B_2)$ . Or pour  $i \in \{1, 2\}$ , on a montré que  $\mathbf{P}_x(B_i) \in \{0, 1\}$ , ce qui permet de conclure. ■

Une application non-triviale de cette loi du 0-1 est donnée plus loin. On montre tout d'abord un résultat montrant la continuité à droite des filtrations naturelles augmentées – modulo une hypothèse essentielle.

**Théorème II.4.6 (Régularité à droite des filtrations naturelles augmentées)** Soit  $E$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^o; (\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov. Soit  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , l'augmentation de  $(\mathcal{F}_t^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On suppose que  $X$  est Markovien relativement à  $(\mathcal{F}_{t+}^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Alors,

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E), \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{F}_{t+}^\mu(X) = \mathcal{F}_t^\mu(X),$$

et donc  $\mathcal{F}_{t+}(X) = \mathcal{F}_t(X)$ , c'est-à-dire que  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les conditions habituelles.

**Preuve :** soient  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurable bornée. On montre d'abord que

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[Z|\mathcal{F}_{t+}^o(X)] = \mathbf{E}_\mu[Z|\mathcal{F}_t^o(X)]. \quad (\text{II.25})$$

*Preuve de (II.25) :* on considère d'abord des fonctionnelles de la forme  $Z = F(X) = f_0(X_{t_0}) \dots f_n(X_{t_n})$ , où  $0 \leq t_0 < \dots < t_n$  et  $f_0, \dots, f_n \in L_b(E)$ . On observe que si  $t \geq t_n$ , le résultat est évident. Supposons que  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . On pose  $G(X) := f(X_{t_{k+1}-t}) \dots f(X_{t_n-t})$  et  $H(X) := f(X_{t_0}) \dots f(X_{t_k})$ . La variable  $H(X)$  est  $\mathcal{F}_t^o(X)$ -mesurable et donc  $\mathcal{F}_{t+}^o(X)$ -mesurable et  $Z = H(X)G(X_{t+})$ . Comme  $X$  est Markovien pour  $(\mathcal{F}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et pour  $(\mathcal{F}_{t+}^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , la propriété de Markov simple pour ces deux filtrations donne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[Z|\mathcal{F}_{t+}^o(X)] &= H(X)\mathbf{E}_\mu[G(X_{t+})|\mathcal{F}_{t+}^o(X)] \\ &= H(X)\mathbf{E}_{X_t}[G(X)] = H(X)\mathbf{E}_\mu[G(X_{t+})|\mathcal{F}_t^o(X)] = \mathbf{E}_\mu[Z|\mathcal{F}_t^o(X)], \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat voulu pour des fonctionnelles  $Z$  de la forme  $f_0(X_{t_0}) \dots f_n(X_{t_n})$ . Un raisonnement de classe monotone (facile et donc laissé au lecteur) permet d'étendre ce résultat à toutes les fonctionnelles  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurables bornées (qui, on le rappelle, sont toutes de la forme  $F(X)$ , avec  $F : E^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurable bornée, car  $\mathcal{F}_\infty^o(X) = \sigma(X)$ ). Cela montre (II.25). On termine la preuve du théorème comme suit : soient  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$  et  $B \in \mathcal{F}_{t+}^o(X)$ ; en choisissant  $Z = \mathbf{1}_B$  dans (II.25), on a  $\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{1}_B = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_t^o(X)]$ , ce qui implique que  $B \in \mathcal{F}_t^\mu(X)$ . Donc  $\mathcal{F}_{t+}^o \subset \mathcal{F}_t^\mu(X)$ ; si on note  $\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}$  les  $\mathbf{P}_\mu$ -négligeables de  $(\Omega, \mathcal{F})$ , on a  $\sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{F}_{t+}^o) \subset \mathcal{F}_t^\mu(X)$ . Or le lemme I.3.14 implique que  $\mathcal{F}_{t+}^\mu(X) = \bigcap_{t' > t} \mathcal{F}_{t'}^\mu(X) = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{F}_{t+}^o(X))$ . Cela montre que  $\mathcal{F}_{t+}^\mu(X) \subset \mathcal{F}_t^\mu(X)$ , ce qui implique trivialement  $\mathcal{F}_{t+}^\mu(X) = \mathcal{F}_t^\mu(X)$ . ■

En application de la loi du 0-1 de Blumenthal et du théorème précédent, on prouve la proposition suivante. On rappelle la définition II.1.13 de la l'hypothèse **(H)**; page 48.

**Proposition II.4.7** Soit  $E$ , un espace topologique métrisable séparable. Soit  $X$  un processus de Markov à valeurs  $E$ . On fixe  $\partial \in E$  et on note  $X_\infty$ , la v.a. constante à  $\partial$ . On fait les hypothèses suivantes.

(a) Le processus  $X$  est continu à droite.

(b) Son semi-groupe satisfait l'hypothèse **(H)** (voir la définition II.1.13, page 48).

On note  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  l'augmentation de la filtration naturelle  $\mathcal{F}_t^o(X)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ , et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{F}_t^\mu(X) = \mathcal{F}_{t+}^\mu(X)$  et donc  $\mathcal{F}_t(X) = \mathcal{F}_{t+}(X)$  et  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , qui satisfait les hypothèses habituelles. De plus  $X$  est fortement Markovien relativement à  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  et comme  $\mathcal{F}_{0+}(X) = \mathcal{F}_0(X)$ , la loi du 0-1 de Blumenthal s'énonce comme suit

$$\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{F}_{0+}(X), \quad \mathbf{P}_x(A) \in \{0, 1\}.$$

(ii) Soit  $B \in \mathcal{B}(E)$ . Le premier temps de retour en  $B$  est noté :  $T_B^+ = \inf \{t > 0 : X_t \in B\}$  (avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ ). Soit  $x \in E$ . Alors, on a l'alternative suivante :

- ou bien  $\mathbf{P}_x(T_B^+ = 0) = 1$ , et  $x$  est dit régulier pour  $B$ ,
- ou bien  $\mathbf{P}_x(T_B^+ = 0) = 0$ , et  $x$  est dit irrégulier pour  $B$ .

(iii) Pour simplifier on pose  $H_x := T_{E \setminus \{x\}}^+ = \inf \{t > 0 : X_t \neq x\}$  (avec la condition  $\inf \emptyset = \infty$ ). Alors, pour tout  $x \in E$ , il existe  $q_x \in [0, \infty]$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P_x(H_x > t) = e^{-q_x t},$$

avec la convention  $e^{-\infty} := 0$ . Si le processus  $X$  est continu, alors on a l'alternative suivante :

- ou bien  $q_x = 0$  et  $\mathbf{P}_x$ -p.s. le processus  $X$  est constant à  $x$ ,
- ou bien  $q_x = \infty$  et  $\mathbf{P}_x(H_x = 0) = 1$ , et  $x$  quitte instantanément son point de départ.

**Preuve :** le lemme II.4.3, page 62, nous assure que  $X$  est Markovien par rapport l'augmentation  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  et le théorème II.3.4 nous assure que  $X$  est alors un Markov fort relativement à  $(\mathcal{F}_{t+}(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Mais le théorème II.4.6, page 64, montre que  $\mathcal{F}_t(X) = \mathcal{F}_{t+}(X)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , ce qui prouve (i).

Le fait que  $X$  soit fortement Markov par rapport à  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  implique qu'il est progressivement mesurable par rapport à cette filtration et le théorème du "Début" montre que  $T_B^+$  est un  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Donc  $\{T_B^+ = 0\} \in \mathcal{F}_0(X)$  et la loi du 0-1 de Blumenthal (théorème II.4.5) entraîne (ii).

Pour toute trajectoire  $y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , on pose  $H_x(y) = \inf\{t > 0 : y_t \neq x\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . On remarque alors que si  $H_x > t$ , alors,  $X_t = x$  et  $H_x = t + H_x(X_{t+})$ . En appliquant la propriété de Markov, on a donc pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\text{-p.s. } \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{H_x > t+s\}} | \mathcal{F}_t(X)] &= \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{H_x > t\}} \mathbf{1}_{\{H_x(X_{t+}) > s\}} | \mathcal{F}_t(X)] \\ &= \mathbf{1}_{\{H_x > t\}} \mathbf{E}_{X_t}[\mathbf{1}_{\{H_x > s\}}] = \mathbf{1}_{\{H_x > t\}} \mathbf{P}_x(H_x > s). \end{aligned}$$

En intégrant sous  $\mathbf{P}_x$  cette égalité on montre que  $\mathbf{P}_x(H_x > t + s) = \mathbf{P}_x(H_x > t) \mathbf{P}_x(H_x > s)$ . Il est facile de voir que s'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\mathbf{P}_x(H_x > t_0) = 0$ , alors  $\mathbf{P}_x(H_x > t) = 0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Supposons que ce ne soit pas le cas, on pose alors  $f(t) = -\log \mathbf{P}_x(H_x > t)$ , on constate que  $f$  est bien définie, positive, càd et que  $f(s+t) = f(s) + f(t)$ , pour tout  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . Cela implique que  $f$  est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe  $q_x \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(t) = q_x t$  et donc  $\mathbf{P}_x(H_x > t) = e^{-q_x t}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Si  $X$  est continu et si  $H_x < \infty$ , alors la continuité à gauche implique que  $X_{H_x} = x$  et aussi  $H_x(X_{H_x+}) = 0$ . En appliquant la propriété de Markov forte en  $H_x$ , on a

$$\mathbf{P}_x\text{-p.s. } 0 = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{H_x < \infty; H_x(X_{H_x+}) > 0\}} | \mathcal{F}_{H_x}(X)] = \mathbf{1}_{\{H_x < \infty\}} \mathbf{P}_x(H_x > 0).$$

Donc  $\mathbf{P}_x(H_x < \infty) \mathbf{P}(H_x > 0) = 0$ . Si  $\mathbf{P}_x(H_x < \infty) > 0$ , alors  $\mathbf{P}_x(H_x > 0) = 0$  et donc  $\mathbf{P}_x(H_x = 0) = 1$ . Si  $\mathbf{P}_x(H_x < \infty) = 0$ , on a donc  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } H_x = \infty$ , ce qui implique que  $X$  est constant à  $x$ . ■

### II.4.b Markov forte pour les fonctionnelles augmentées. Quasi-continuité à gauche.

**La propriété de Markov forte pour les filtrations augmentées.** Modulo la continuité à droite des filtrations, l'extension de la propriété de Markov forte aux filtrations complétées se prouve de la même manière que la propriété de Markov simple.

**Théorème II.4.8 (Propriété de Markov forte pour les fonctionnelles augmentées)** Soit  $E$ , un espace mesurable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^\circ; (\mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov muni d'opérateurs de décalage. Soient  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , les augmentations de resp.  $(\mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t^\circ(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On suppose que  $X$  est fortement markovien par rapport à  $(\mathcal{G}_{t+}^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $X$  est fortement Markovien par rapport à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  (qui satisfait les hypothèses habituelles).
- (ii) Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée. Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Alors  $\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} Z \circ \theta_T$  est une v.a.  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable bornée.

(iii) Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée. Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Alors, pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Z \circ \theta_T | \mathcal{G}_{T+}] = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbf{E}_{X_T}[Z]. \quad (\text{II.26})$$

**Preuve :** puisque  $X$  est fortement Markovien par rapport à  $(\mathcal{G}_{t+}^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , il est progressivement mesurable par rapport à cette filtration. Comme  $\mathcal{G}_{t+}^o \subset \mathcal{G}_{t+}$ ,  $X$  est également progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Il est par ailleurs clair que  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les conditions habituelles.

On fixe  $T$ , un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Le lemme I.3.3, page 26, implique que  $X_T$  est  $\mathcal{G}_{T+}$ -mesurable. On fixe  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . Alors,  $T$  est également un  $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Le lemme I.3.15, page 33, implique l'existence d'un  $(\mathcal{G}_{t+}^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt noté de  $T^o$ , tel que

$$\mathbf{P}_\mu(T^o = T) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{T+}^\mu = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{G}_{T^o+}). \quad (\text{II.27})$$

On fixe  $s \in \mathbb{R}_+$  et  $f \in L_b(E)$ . Ce qui précède implique que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} f(X_{s+T}) = \mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} f(X_{s+T^o})$  et  $X_T = X_{T^o}$ . On a donc  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} f(X_{s+T}) | \mathcal{G}_{T+}] &= \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} f(X_{s+T^o}) | \mathcal{G}_{T+}^\mu] \\ &= \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} f(X_{s+T^o}) | \mathcal{G}_{T^o+}^o] \\ &= \mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} P_s f(X_{T^o}) \\ &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} P_s f(X_T) \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme I.4.7, page 38, pour justifier les égalités des deux premières lignes et la propriété de Markov forte relativement à  $(\mathcal{G}_{t+}^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  pour la troisième. Cela termine la preuve de (i).

Le reste de la preuve est proche de celle du théorème II.4.4 : montrons (ii), avec les mêmes notations que ci-dessus. Notons  $\nu$  la loi de  $X_T$  sous  $\mathbf{P}_\mu$ , qui par (II.27), est aussi la loi de  $X_{T^o}$  sous  $\mathbf{P}_\mu$ . Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée. Comme  $\mathcal{F}_\infty(X) \subset \mathcal{F}_\infty^\nu(X)$ , le théorème ??, page ??, montre qu'il existe  $Y_1, Y_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , deux variables  $\mathcal{F}_\infty^o(X)$ -mesurables telle que  $Y_1 \leq Z \leq Y_2$  partout sur  $\Omega$  et telles que  $\mathbf{E}_\nu[Y_1] = \mathbf{E}_\nu[Y_2] = \mathbf{E}_\nu[Z]$ . On a donc  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{E}_{X_T}[Y_2] - \mathbf{E}_{X_T}[Y_1] = \mathbf{E}_{X_T}[Y_2 - Y_1] \geq 0$ . Par définition de  $\nu$  et par (II.11) au lemme II.2.12, page 58, on a  $\mathbf{E}_\mu[\mathbf{E}_{X_T}[Y_2] - \mathbf{E}_{X_T}[Y_1]] = \mathbf{E}_\nu[Y_2] - \mathbf{E}_\nu[Y_1] = 0$ . Comme  $\mathbf{E}_{X_T}[Y_1] \leq \mathbf{E}_{X_T}[Z] \leq \mathbf{E}_{X_T}[Y_2]$ , on obtient  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{E}_{X_T}[Y_1] = \mathbf{E}_{X_T}[Y_2] = \mathbf{E}_{X_T}[Z]$ . Puisque  $X_{T^o} = X_T$   $\mathbf{P}_\mu$ -p.s., on obtient

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad \mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_{X_T}[Y_i] = \mathbf{E}_{X_{T^o}}[Y_i] = \mathbf{E}_{X_T}[Z] = \mathbf{E}_{X_{T^o}}[Z]. \quad (\text{II.28})$$

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , le lemme I.4.7, page 38, et la première version de la propriété de Markov forte au théorème II.3.3, page 59, (relativement à  $(\mathcal{G}_{t+}^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et pour le temps  $T^o$ ) impliquent alors que  $Y_i \circ \theta_{T^o}$  est  $\mathcal{G}_\infty^o$ -mesurable et que

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} Y_i \circ \theta_{T^o} | \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{G}_{T^o+}^o)] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} Y_i \circ \theta_{T^o} | \mathcal{G}_{T^o+}^o] = \mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} \mathbf{E}_{X_{T^o}}[Y_i].$$

Or par (II.27),  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{1}_{\{T^o<\infty\}} Y_i \circ \theta_{T^o} = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_i \circ \theta_T$ ,  $X_T = X_{T^o}$  et  $\mathcal{G}_{T+}^\mu = \sigma(\mathcal{N}_{\mathbf{P}_\mu}, \mathcal{G}_{T^o+}^o)$ . On obtient donc

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_i \circ \theta_T | \mathcal{G}_{T+}] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_i \circ \theta_T | \mathcal{G}_{T+}^\mu] = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbf{E}_{X_T}[Y_i] = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbf{E}_{X_T}[Z] \quad (\text{II.29})$$

où on a utilisé le lemme I.4.7, page 38, pour justifier la première égalité et (II.28) pour justifier la dernière.

Tout d'abord (II.29) entraîne que  $\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_1 \circ \theta_T] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_2 \circ \theta_T]$ . Comme  $Y_1 \circ \theta_T \leq Z \circ \theta_T \leq Y_2 \circ \theta_T$ , on en déduit que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Z \circ \theta_T = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_2 \circ \theta_T$  et donc  $Z \circ \theta_T$  est  $\mathcal{G}_\infty^\mu$ -mesurable. Comme cela est vrai pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ , cela prouve que  $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Z \circ \theta_T$  est  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable, ce qui prouve (ii). Cela implique également que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_i \circ \theta_T | \mathcal{G}_{T+}] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Z \circ \theta_T | \mathcal{G}_{T+}]$ , ce qui implique (iii) par (II.29). ■

**Définition II.4.9** (*Quasi-continuité à gauche*) Soit  $E$ , un espace topologique métrisable séparable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)) ,$$

un processus de Markov fort. Il est dit *quasi-continu à gauche sur  $\mathbb{R}_+$  relativement à la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$*  si pour toute suite croissante de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt  $T_n \leq T_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , si on pose  $T := \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ , alors on a

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E), \mathbf{P}_\mu\text{-p.s. sur } \{T < \infty\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T .$$

On rappelle que  $T$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt, par le le lemme I.3.7 (i), page 28.  $\square$

Bien que cela ne soit pas mentionné dans cette définition, la quasi-continuité à gauche implique une certaine régularité du processus, notamment, pour tout  $t \in ]0, \infty[$  et pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $X$  admet  $X_t$  pour limite à gauche en  $t$ , c'est à dire que le processus est stochastiquement continu au sens de la définition suivante.

**Définition II.4.10** (*Continuité stochastique*) Soit  $E$ , un espace topologique. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+}$  un processus  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}_+})$ -mesurable supposé càdlàg. Il est dit *stochastiquement continu* en  $t \in \mathbb{R}_+$  sous  $\mathbf{P}$  si  $\mathbf{P}(X_{t-} = X_t) = 1$ .  $\square$

Le théorème qui suit donne un critère sur un processus de Markov (faible) pour qu'il soit un processus de Markov fort relativement à la filtration continue à droite associée à l'augmentation de la filtration de départ et aussi pour qu'il soit quasi-continu à gauche. On rappelle la définition II.1.13 de la l'hypothèse **(H)**, page 48.

**Théorème II.4.11** Soit  $E$ , un espace topologique métrisable séparable.

$$(\Omega; \mathcal{F}^\circ; (\mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)) ,$$

un processus de Markov. Soient  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , les augmentations de resp.  $\mathcal{F}^\circ$ ,  $(\mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t^\circ(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On fixe  $\partial \in E$  et on note  $X_\infty$ , la v.a. constante à  $\partial$ . On fait les hypothèses suivantes.

(a) Le processus  $X$  est continu à droite.

(b) Son semi-groupe satisfait l'hypothèse **(H)** (voir la définition II.1.13, page 48).

Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{F}_t(X) = \mathcal{F}_{t+}(X)$ .

(ii)  $X$  est Markovien fort par rapport à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ , qui satisfont les conditions habituelles. Si le processus de Markov est muni d'opérateurs de décalage, il satisfait la propriété de Markov forte pour des fonctionnelles  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurables.

On fait l'hypothèse supplémentaire suivante.

(a') Le processus  $X$  est càdlàg.

Alors :

(iii)  $X$  est quasi-continu à gauche sur  $\mathbb{R}_+$  relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \mu \in \mathcal{M}_1(E), \mathbf{P}_\mu(X_{t-} = X_t) = 1 .$$

**Preuve :** il est clair que  $X$  est Markovien par rapport à  $(\mathcal{F}_t^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On applique la proposition II.3.4, qui montre que  $X$  est fortement Markovien par rapport à  $(\mathcal{G}_{t+}^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_{t+}^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Le fait que  $X$  soit fortement Markovien par rapport à  $(\mathcal{F}_{t+}^o(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  permet d'appliquer le théorème II.4.6 et on a  $\mathcal{F}_t(X) = \mathcal{F}_{t+}(X)$ . Le théorème II.4.8 qui précède implique ensuite (i) et (ii).

Montrons (iii) : on suppose (a'). Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt tels que  $T_n \leq T_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $T := \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ , qui est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt (proposition I.3.7, page 28). On suppose d'abord que  $T < \infty$ , partout sur  $\Omega$  et on définit les deux événements  $A := \{\exists n \in \mathbb{N} : T_n = T\}$  et  $B = \Omega \setminus A = \{\forall n \in \mathbb{N} : T_n < T\}$ , qui appartiennent clairement à  $\mathcal{G}_\infty$ . On rappelle que  $X$  est càdlàg et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \omega \in \Omega, \quad Y_t(\omega) := X_{T(\omega)+t}(\omega) \text{ si } \omega \in A \quad \text{et} \quad Y_t(\omega) := X_{(T(\omega)+t)-}(\omega) \text{ si } \omega \in B.$$

On vérifie que  $Y_t$  est  $(\mathcal{G}_\infty, \mathcal{B}(E))$ -mesurable. Comme  $T$  est fini et  $X$  est càdlàg, alors partout sur  $\Omega$ , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n+t} = Y_t \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} Y_t = X_T. \quad (\text{II.30})$$

On se donne  $L$  et  $\mathcal{P}$  associés à l'hypothèse (H) (définition II.1.13, page 48). On fixe  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . Soient  $f, g \in L$ . Par (II.30) et par convergence dominée, on obtient tout d'abord :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\mu[f(X_{T_n+t})g(X_{T_n})] = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \mathbf{E}[f(Y_t)g(Y_0)] = \mathbf{E}_\mu[f(X_T)g(Y_0)]. \quad (\text{II.31})$$

La propriété de Markov forte au temps  $T_n$  implique également que

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[f(X_{T_n+t})g(X_{T_n}) | \mathcal{G}_{T_n+}] = g(X_{T_n})P_tf(X_{T_n}) \quad (\text{II.32})$$

(on rappelle que  $T_n < \infty$  partout sur  $\Omega$ ) et donc on a

$$\mathbf{E}_\mu[f(X_{T_n+t})g(X_{T_n})] = \mathbf{E}_\mu[P_tf(X_{T_n})g(X_{T_n})].$$

Or pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in E$ , la continuité à droite de  $X$  et le fait que  $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$ , implique que  $\mathbf{P}_x\text{-p.s. } \lim_{t \rightarrow 0} X_t = x$ . Comme  $f \in L \subset C_b(E)$ , par convergence dominée on a  $\lim_{t \rightarrow 0} P_tf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{E}_x[f(X_t)] = f(x)$ , pour tout  $x \in E$ . De plus, comme  $P_tf \in C_b(E)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_tf(X_{T_n}) = P_tf(Y_0)$  et par convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\mu[P_tf(X_{T_n})g(X_{T_n})] = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \mathbf{E}[P_tf(Y_0)g(Y_0)] = \mathbf{E}_\mu[f(Y_0)g(Y_0)],$$

ce qui, combiné avec (II.32) et (II.31) implique

$$\forall f, g \in L, \quad \mathbf{E}_\mu[f(X_T)g(Y_0)] = \mathbf{E}_\mu[f(Y_0)g(Y_0)]. \quad (\text{II.33})$$

On note  $\mathcal{Q} = \{B \times C; B, C \in \mathcal{B}(E)\}$ , qui est un pi-système sur  $E^2$  en gendrant  $\mathcal{B}(E)^{\otimes 2}$ . Soit  $B \times C \in \mathcal{Q}$ . Par l'hypothèse (b), il existe,  $f_n, g_n \in L$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , positives croissantes convergeant respectivement vers  $\mathbf{1}_B$  et  $\mathbf{1}_C$ . Alors, en appliquant (II.33) à  $(f, g) = (f_n, g_n)$ , et par convergence monotone, on obtient  $\mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{B \times C}(X_T, Y_0)] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{B \times C}(Y_0, Y_0)]$ . On note ensuite  $H$  l'ensemble des fonctions  $F : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}(E)^{\otimes 2}$ -mesurables bornées telles que

$$\mathbf{E}_\mu[F(X_T, Y_0)] = \mathbf{E}_\mu[F(Y_0, Y_0)]. \quad (\text{II.34})$$

Il est clair que  $H$  est un espace vectoriel. On a montré que pour tout  $D \in \mathcal{Q}$ ,  $\mathbf{1}_D \in H$ . Le théorème de convergence monotone implique facilement que  $H$  est stable par limite ponctuelle croissante de suites de fonctions

uniformément bornées. Autrement dit,  $H$  satisfait le théorème ?? de la classe monotone, version fonctionnelle (page ??); ce théorème montre que  $H = L_b(E^2)$  et donc (II.34) est vérifiée pour toute fonction  $F : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}(E)^{\otimes 2}$ -mesurable bornée.

On pose  $\Delta := \{(x, x); x \in E\}$ , la diagonale de  $E^2$ . C'est un ensemble fermé de  $E^2$ , muni de la topologie produit. Donc  $\Delta \in \mathcal{B}(E^2)$ . Comme  $E$  est métrisable séparable,  $\mathcal{B}(E^2) = \mathcal{B}(E)^{\otimes 2}$  et on peut appliquer (II.34) à  $F = \mathbf{1}_\Delta$  :

$$\mathbf{P}_\mu(X_T = Y_0) = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_\Delta(X_T, Y_0)] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_\Delta(Y_0, Y_0)] = \mathbf{P}_\mu(Y_0 = Y_0) = 1,$$

ce qui montre bien que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $Y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T$ , dans les cas où  $T < \infty$  partout sur  $\Omega$ .

On passe au cas général en remarquant que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \wedge T_n$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt tel que  $\sup_n p \wedge T_n = p \wedge T < \infty$  partout sur  $\Omega$ . Ce qui précède implique alors que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{p \wedge T_n} = X_{p \wedge T}$ . On observe que sur  $\{T < \infty\}$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, on a  $p \wedge T = T$  et donc  $p \wedge T_n = T_n$ , pour tout  $n$ , ce qui implique facilement que  $X$  est quasi-continu à gauche.

Montrons le dernier point du théorème : soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ ; soit  $t_n, n \in \mathbb{N}$ , une suite de temps croissants strictement vers  $t$ . Comme  $X$  est càdlàg  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n} = X_{t-}$  or la quasi-continuité à gauche implique que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n} = X_t$  et donc  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $X_{t-} = X_t$ , ce qui montre le résultat voulu. ■

## II.5 Régularité des processus de Markov.

### II.5.a Processus de Hunt.

**Définition II.5.1** (*Processus de Hunt*) Soit  $E$ , un espace topologique métrisable séparable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov. C'est un processus de *Hunt* s'il satisfait les hypothèses suivantes.

- (a)  $X$  est fortement Markovien relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  qui satisfait les hypothèses habituelles.
- (b)  $X$  est quasi-continu à gauche sur  $\mathbb{R}_+$  relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .
- (c) Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_t(\omega)$  est càd. □

La proposition suivante, conséquence immédiate du théorème II.4.11 (page 68), donne un critère pour être un processus de Hunt (en particulier les processus de Feller ou Feller-Dynkin càdlàg sont des processus de Hunt). On rappelle la définition II.1.13 de la l'hypothèse **(H)**, page 48.

**Proposition II.5.2** Soit  $E$ , un espace topologique métrisable séparable. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^\circ; (\mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)),$$

un processus de Markov. On note  $\mathcal{F}$  et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  les augmentations de resp.  $\mathcal{F}^\circ$  et  $(\mathcal{G}_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $\partial \in E$  et soit  $X_\infty$ , la v.a. constante à  $\partial$ . On fait les hypothèses suivantes.

- (a) Le processus  $X$  est càdlàg.
- (b) Son semi-groupe satisfait l'hypothèse **(H)** (voir la définition II.1.13, page 48).

Alors,  $X$  est un processus de Hunt relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

La régularité càdlàg est inhérente aux processus de Hunt : pour montrer cela rappelons le résultat élémentaire suivant.

**Lemme II.5.3** Soit  $(E, d)$ , un espace métrique. On note  $(\bar{E}, d)$  son complété; par commodité, on suppose que  $E \subset \bar{E}$ . Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ , une fonction. Pour tous réels  $t > \delta > 0$ , on pose

$$w_t(\delta, f) = \sup\{d(f(s), f(r)) ; s, r \in ]t-\delta, t[\} .$$

On observe que  $\delta \mapsto w_t(\delta, f)$  croît. On suppose que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_t(\delta, f) = 0$ . Alors  $f$  admet une limite à gauche en  $t$  dans le complété  $\bar{E}$ .

**Preuve :** soit  $s_n \in [0, t[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite croissant vers  $t$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tels que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $|s_n - t| < \delta$  et  $w_t(\delta, f) < \varepsilon$ . Donc pour tout  $m, n \geq n_0$ ,  $d(f(s_n), f(s_m)) \leq w_t(\delta, f) < \varepsilon$ . Cela montre que  $(f(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy : elle converge donc vers  $y \in \bar{E}$ . Pour tout  $\delta \in ]0, t[$  et tout  $s \in ]t-\delta, t[$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand  $d(f(s), y) \leq d(f(s), f(s_n)) + d(f(s_n), y) \leq w_t(\delta, f) + d(f(s_n), y)$  et donc  $d(f(s), y) \leq w_t(\delta, f)$ , ce qui implique le lemme. ■

**Théorème II.5.4** Soit  $(E, d)$ , un espace métrique séparable. On note  $(\bar{E}, d)$  son complété; par commodité, on suppose que  $E \subset \bar{E}$ . Soit

$$(\Omega, \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)) ,$$

un processus de Markov de Hunt. Alors, il existe  $\Omega_0 \in \mathcal{G}_\infty$  tel que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E), \quad \mathbf{P}_\mu(\Omega_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega_0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto X_t(\omega) \text{ est càdlàg dans } \bar{E}.$$

De plus  $X$  est stochastiquement continu, c'est-à-dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_1(E), \quad \mathbf{P}_\mu(X_{t-} = X_t) = 1 .$$

**Preuve :** on fixe un réel  $\varepsilon > 0$  et on définit une suite de temps aléatoires  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant

$$T_0^\varepsilon = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1}^\varepsilon = \inf \{t > T_n^\varepsilon : d(X_t, X_{T_n^\varepsilon}) > \varepsilon\}$$

avec la condition  $\inf \emptyset = \infty$ . Il est clair que  $T_0^\varepsilon$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Supposons que  $T_n^\varepsilon$  le soit aussi. La continuité à droite de  $X$  implique ensuite que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\{T_{n+1}^\varepsilon < t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t[} \{T_n^\varepsilon < q\} \cap \{d(X_q, X_{t \wedge T_n^\varepsilon}) > \varepsilon\} .$$

Comme  $X$  est progressivement mesurable relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et que  $t \wedge T_n^\varepsilon$  est un temps d'arrêt relativement à cette filtration, la v.a.  $X_{t \wedge T_n^\varepsilon}$  est  $\mathcal{G}_{t \wedge T_n^\varepsilon}$ -mesurable. Le lemme I.3.2 (ii), page 25, implique  $\mathcal{G}_{t \wedge T_n^\varepsilon} \subset \mathcal{G}_t$ . Puisque  $q < t$ , on a donc  $\{d(X_q, X_{t \wedge T_n^\varepsilon}) > \varepsilon\} \in \mathcal{G}_t$ . Cela entraîne que  $\{T_{n+1}^\varepsilon < t\} \in \mathcal{G}_t$  et donc  $T_{n+1}^\varepsilon$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Comme  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continue à droite (elle satisfait en effet les hypothèses habituelles),  $T_{n+1}^\varepsilon$  est donc un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On a montré par récurrence que les  $T_n^\varepsilon$  sont des  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.

On pose  $T^\varepsilon := \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n^\varepsilon$  et on observe que si  $T_{n+1}^\varepsilon < \infty$ , alors la continuité à droite de  $X$  implique que  $d(X_{T_{n+1}^\varepsilon}, X_{T_n^\varepsilon}) \geq \varepsilon$ . Donc si  $T^\varepsilon < \infty$ , la suite  $(X_{T_n^\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente dans  $E$  (ni dans  $\bar{E}$ ). Or la quasi-continuité à gauche implique que pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ ,

$$\mathbf{P}_\mu(T^\varepsilon < \infty) = \mathbf{P}_\mu(T^\varepsilon < \infty ; \lim_n X_{T_n^\varepsilon} = X_{T^\varepsilon}) .$$

On a donc  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $T^\varepsilon = \infty$ .

On pose ensuite  $\varepsilon_p = 2^{-p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $\Omega_0 := \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \{T^{\varepsilon_p} = \infty\}$ . Il est clair que  $\Omega_0 \in \mathcal{G}_\infty$  et que  $\mathbf{P}_\mu(\Omega_0) = 1$ , pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ . On a donc

$$\forall \omega \in \Omega_0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad ]0, \infty[ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [T_n^{\varepsilon_p}(\omega), T_{n+1}^{\varepsilon_p}(\omega)] .$$

On fixe  $\omega \in \Omega_0$ . Soit  $t \in ]0, \infty[$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Il existe donc  $n$  tels que  $t \in [T_n^{\varepsilon_p}(\omega), T_{n+1}^{\varepsilon_p}(\omega)]$ . La définition des temps  $T_n^\varepsilon$  implique que pour tous  $s, r \in [T_n^{\varepsilon_p}(\omega), t[$ , on a

$$d(X_s(\omega), X_r(\omega)) \leq d(X_s(\omega), X_{T_n^{\varepsilon_p}}(\omega)) + d(X_{T_n^{\varepsilon_p}}(\omega), X_r(\omega)) \leq 2\varepsilon_p$$

Donc, en reprenant les notations du lemme II.5.3, page 71, on a pour tout  $\delta$  suffisamment petit  $w_t(\delta, X(\omega)) \leq 2^{-p+1}$ . Donc, pour tout  $\omega \in \Omega_0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_t(\delta, X(\omega)) = 0$  et le lemme II.5.3 implique que  $X_{t-}(\omega)$  existe dans  $\overline{E}$ , ce qui montre le premier point du théorème. Le second point est une conséquence immédiate de la quasi-continuité à gauche : voir la fin de la preuve du théorème II.4.11. ■

**Remarque II.5.5** Le résultat précédent n'utilise absolument pas la propriété de Markov : il est vrai pour les processus quasi-continus à gauche et càd. □

### II.5.b Durée d'un processus sous-Markovien, processus standard.

Cette section considère les processus Markoviens associés à l'extension minimale de noyaux sous-Markoviens (voir la définition II.1.15, page 49) sur un espace LCBD. On rappelle la terminologie suivante : soit  $E$  est un espace topologique LCBD ;  $(E_\partial, d)$  est un compactifié habituel de  $E$  si  $E_\partial = E \cup \{\partial\}$ , où  $\partial \notin E$  et si  $(E_\partial, d)$  est un espace métrique compact dont la topologie induite sur  $E$  est celle de départ.

**Définition II.5.6** (*Durée d'un processus*) Soit  $E$ , un espace LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable muni d'une filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $X : \Omega \rightarrow E_\partial^{\mathbb{R}^+}$ , un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté que l'on suppose de plus continu à droite. On définit la *durée de  $X$*  par

$$\zeta := \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : \partial \in \overline{\{X_s; s \in [0, t]\}}\}$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$  et où pour tout sous-ensemble  $A \subset E_\partial$ ,  $\overline{A}$  désigne son adhérence dans  $E_\partial$ . Autrement dit,  $\zeta$  est le *premier temps d'approche* du compact  $\{\partial\}$  par  $X$  (voir la définition I.3.8 page 28). Comme  $X$  est càd,  $\zeta$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt (théorème I.3.12 (ii), page 30). □

La durée d'un processus se reformule de la manière suivante.

**Proposition II.5.7** Soit  $E$ , un espace LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable muni d'une filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $X : \Omega \rightarrow E_\partial^{\mathbb{R}^+}$ , un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté. on pose

$$T_n = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : d(X_t, \partial) < 2^{-n}\}, \quad \text{avec la convention } \inf \emptyset = \infty.$$

On suppose que  $X$  est càd. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $T_n$  est un  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt.
- (ii)  $\zeta = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ .

On suppose de plus que  $X$  est càdlàg sur  $[0, \zeta[$ . Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (iii)  $\zeta = \inf\{t \in ]0, \infty[ : X_t \text{ ou } X_{t-} = \partial\}$  avec les conventions  $X_{0-} = X_0$  et  $\inf \emptyset = \infty$ .  
(iv) Pour tout  $t \in ]0, \zeta[, \overline{\{X_s ; s \in [0, t]\}} = \{X_s, X_{s-} ; s \in [0, t]\}$  est un compact de  $E$ . Notamment  $X_{t-}$  et  $X_t$  sont dans  $E$  pour tout  $t \in ]0, \zeta[$ .

**Preuve :** Les points (i), (ii) et (iii) sont des conséquences directes du théorème  $T_n$  est le temps d'atteinte de la boule ouverte de centre  $\partial$  et de rayon  $2^{-n}$ . Le théorème I.3.12 (i) et (ii) (page 30) avec  $K = \partial$ . Les points (iii) et (iv) sont des conséquences de la remarque I.3.10, page 29. ■

Le théorème suivant précise le théorème II.5.4 dans le cas où l'espace d'état est LCBD et pour l'extension minimale sur le compactifié habituel. Il résume également les quelques résultats généraux applicables concernant la durée d'un processus de Hunt.

**Théorème II.5.8** Soit  $E$  un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soient  $p_t(x, dy)$  des noyaux sous-Markoviens sur  $E$  de semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $p_t^\partial(x, dy)$  les extensions minimales des noyaux  $p_t(x, dy)$  à  $E_\partial$  et on note  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E)) ,$$

un processus de Markov. On suppose que c'est un processus de Hunt.

- Alors, il existe  $\Omega_0 \in \mathcal{G}_\infty$  tel que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial), \quad \mathbf{P}_\mu(\Omega_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega_0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_t(\omega) \text{ est càdlàg dans } E_\partial. \quad (\text{II.35})$$

- De plus  $X$  est stochastiquement continu, c'est-à-dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial), \quad \mathbf{P}_\mu(X_{t-} = X_t) = 1. \quad (\text{II.36})$$

- Enfin, la durée du processus  $\zeta$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Elle se réécrit comme suit :

$$\zeta = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_{t-} \text{ ou } X_t = \partial\}, \quad (\text{II.37})$$

avec les conventions  $X_{0-} = X_0$  et  $\inf \emptyset = \infty$  et pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \forall t \in [0, \zeta[ \quad \overline{\{X_s ; s \in [0, t]\}} = \{X_s, X_{s-} ; s \in [0, t]\} \text{ est un compact de } E. \quad (\text{II.38})$$

En particulier,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. pour tout  $t \in ]0, \zeta[, X_t$  et  $X_{t-} \in E$ . Enfin, on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \forall t \in [\zeta, \infty[, \quad X_t = \partial. \quad (\text{II.39})$$

**Preuve :** une partie découle des résultats antérieurs : le théorème II.5.4 implique (II.35) et (II.36); (II.37) et (II.38) viennent de la proposition II.5.7 qui précède (ici on utilise la fait que la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est càd). Il reste à montrer (II.39) : on reprend les notations  $T_n$  introduite à la proposition II.5.7 et on rappelle que  $\zeta = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ . Supposons que  $\zeta < \infty$ . La continuité à droite de  $X$  implique que  $d(X_{T_n}, \partial) \leq 2^{-n}$  et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = \partial$ . La quasi-continuité à gauche de  $X$  implique que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. sur  $\{\zeta < \infty\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_\zeta$  et donc  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. sur  $\{\zeta < \infty\}$ , on a  $X_\zeta = \partial$ . La propriété de Markov forte en  $\zeta$  entraîne ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{\zeta < \infty ; \exists t \in \mathbb{R}_+ : X_{\zeta+t} \neq \partial\}} | \mathcal{G}_\zeta] &= \mathbf{1}_{\{\zeta < \infty\}} \mathbf{E}_{X_\zeta}[\mathbf{1}_{\{\exists t \in \mathbb{R}_+ : X_{\zeta+t} \neq \partial\}}] \\ &= \mathbf{1}_{\{\zeta < \infty\}} \mathbf{P}_\partial(\exists t \in \mathbb{R}_+ : X_{\zeta+t} \neq \partial). \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Or par définition de l'extension minimale des noyaux, pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\mathbf{P}_\partial(X_s = \partial) = p_s^\partial(\partial, \partial) = 1$ . Donc  $\mathbf{P}_\partial$ -p.s. pour tout  $q \in \mathbb{Q}_+$ ,  $X_q = \partial$  et par continuité à droite de  $X$ ,  $\mathbf{P}_\partial$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t = \partial$ . Donc  $\mathbf{P}_\partial(\exists t \in \mathbb{R}_+ : X_{\zeta+t} \neq \partial) = 0$  et (II.40) implique que  $\mathbf{P}_\mu(\exists t \in [\zeta, \infty[ : X_t \neq \partial) = 0$ , ce qui termine la preuve. ■

**Remarque II.5.9** Si les noyaux  $p_t(x, dy)$  sont Markoviens conservatifs, l'extension minimale de ces noyaux est triviale. Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$  telle que  $\mu(\{\partial\}) = 0$ . On a donc  $\mathbf{P}_\mu(X_t \in E) = 1$ . On en déduit que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. pour tout  $q \in \mathbb{Q}_+$ ,  $X_q \in E$  et comme  $X$  est càd,  $X_t \in E$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et donc  $\zeta = \infty$ . En revanche, par définition de l'extension minimale,  $\partial$  est absorbant et donc  $\mathbf{P}_\partial$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t = \partial$  et donc  $\zeta = 0$ .  $\square$

Le théorème suivant montre d'une part que les processus de Feller-Dynkin càd sont des processus de Hunt et il donne un critère de continuité de ces processus en termes du semi-groupe.

**Théorème II.5.10** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soient  $p_t(x, dy)$  des noyaux sous-Markoviens sur  $E$  dont le semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est supposé Feller-Dynkin. On note  $p_t^\partial(x, dy)$  les extensions minimales de ces noyaux et on note  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^o; (\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)) ,$$

un processus de Markov. On note  $\mathcal{F}$  et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  les augmentations habituelles de resp.  $\mathcal{F}^o$  et  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On suppose que  $X$  càdlàg.

- Alors,  $X$  est un processus de Hunt sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  (et les conclusions du théorème II.5.8, page 73, s'y appliquent).

- On suppose de plus que pour tous sous-ensembles  $K \subset U \subset E$ , avec  $K$  compact et  $U$  ouvert, on a

$$\sup_{x \in K} \frac{1}{t} p_t(x, E \setminus U) \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} 0. \quad (\text{II.41})$$

Alors

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial), \mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } X \text{ est continu sur } [0, \zeta[. \quad (\text{II.42})$$

**Preuve :** il est clair que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_t^\partial(C_b(E_\partial)) \subset C_b(E_\partial)$  est de Feller; ce semi-groupe satisfait l'hypothèse **(H)** (définition II.1.13, page 48). La proposition II.5.2 implique que  $X$  est un processus de Hunt  $(\Omega, \mathcal{F})$  relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et le théorème II.5.8 s'applique à  $X$ , ce qui implique (II.36), (II.37) et (II.38).

Il reste à démontrer le second point. Soit  $\mathbf{x} = (x_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E_\partial$ . On pose

$$\forall \delta, t \in \mathbb{R}_+, \quad w_t(\delta, \mathbf{x}) = \sup \{d(x_s, x_r); s, r \in [0, t] \text{ tels que } |s - r| \leq \delta\} .$$

On rappelle que  $\mathbf{x}$  est continue sur  $[0, t]$ ssi  $\lim_{\delta \rightarrow 0} w_t(\delta, \mathbf{x}) = 0$ . Pour tout  $x \in E_\partial$  et tout  $r \in \mathbb{R}_+$ , on note  $B(x, r)$  et  $\overline{B}(x, r)$  les boules resp. ouvertes et fermées de centre  $x$  et de rayon  $r$  dans  $E_\partial$ . Soit  $K$ , un compact de  $E$ . On a  $d(\partial, K) > 0$  et pour tout réel strictement positif  $\varepsilon < \frac{1}{3}d(\partial, K)$ , on pose :

$$b_\varepsilon(t, K) = \sup_{x \in K} p_t(x, E \setminus B(x, 3\varepsilon))$$

On montre d'abord

$$\frac{1}{t} b_\varepsilon(t, K) \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} 0. \quad (\text{II.43})$$

Pour cela, on se donne  $x_1, \dots, x_j \in K$  tels que  $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \varepsilon)$ . Comme  $\overline{B}(x_j, \varepsilon)$  est un compact de  $E_\partial$  et que  $\varepsilon < \frac{1}{3}d(\partial, K)$ , on a  $\overline{B}(x_j, \varepsilon) \subset E$ , et donc  $\overline{B}(x_j, \varepsilon)$  est un compact de  $E$ . De même,  $B(x_j, 2\varepsilon)$  est un ouvert de  $E$ . On remarque ensuite que pour tout  $x \in \overline{B}(x_j, \varepsilon)$ ,  $B(x_j, 2\varepsilon) \subset B(x, 3\varepsilon)$ . On en déduit

$$\frac{1}{t} b_\varepsilon(t, K) \leq \sum_{1 \leq j \leq p} \sup_{x \in \overline{B}(x_j, \varepsilon)} \frac{1}{t} p_t(x, E \setminus B(x, 3\varepsilon)) \leq \sum_{1 \leq j \leq p} \sup_{x \in \overline{B}(x_j, \varepsilon)} \frac{1}{t} p_t(x, E \setminus B(x_j, 2\varepsilon))$$

et (II.41) implique (II.43).

On fixe ensuite  $t, \varepsilon > 0$  et  $K$ , compact de  $E$ . Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu \left( \left\{ \forall s \in [0, t], X_s \in K \right\} \cap \bigcup_{0 \leq k < n} \left\{ d(X_{(k+1)t/n}, X_{kt/n}) > 3\varepsilon \right\} \right) \\ \leq \mathbf{P}_\mu \left( \bigcup_{0 \leq k < n} \left\{ X_{kt/n} \in K \right\} \cap \left\{ d(X_{(k+1)t/n}, X_{kt/n}) > 3\varepsilon \right\} \right) \\ \leq \sum_{0 \leq k < n} \mathbf{P}_\mu \left( X_{kt/n} \in K ; d(X_{(k+1)t/n}, X_{kt/n}) > 3\varepsilon \right). \end{aligned}$$

La propriété de Markov simple au temps  $kt/n$  implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu \left( X_{kt/n} \in K ; d(X_{(k+1)t/n}, X_{kt/n}) > 3\varepsilon \right) &= \mathbf{E}_\mu [\mathbf{1}_{\{X_{kt/n} \in K\}} \mathbf{P}_{X_{kt/n}}(d(X_0, X_{t/n}) > 3\varepsilon)] \\ &= \int_K \mu p_{kt/n}(dx) \mathbf{P}_x(X_{t/n} \notin B(x, 3\varepsilon)) \\ &= \int_K \mu p_{kt/n}(dx) p_{t/n}(x, E \setminus B(x, 3\varepsilon)) \leq b_\varepsilon(t/n, K). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}_\mu \left( \left\{ \forall s \in [0, t], X_s \in K \right\} \cap \bigcup_{0 \leq k < n} \left\{ d(X_{(k+1)t/n}, X_{kt/n}) > 3\varepsilon \right\} \right) \leq nb_\varepsilon(t/n, K).$$

Si  $K$  est un compact de  $E$ , et si  $\varepsilon < d(\partial, K)$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , (II.43) implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\mu \left( \left\{ \forall s \in [0, t], X_s \in K \right\} \cap \bigcup_{0 \leq k < n} \left\{ d(X_{(k+1)t/n}, X_{kt/n}) > 3\varepsilon \right\} \right) = 0. \quad (\text{II.44})$$

Sur l'événement  $\{X_s \in K; t \in [0, t]\}$ , s'il existe  $s \in [0, t]$  tel que  $d(X_{s-}, X_s) > 3\varepsilon$ , alors, pour tout  $n$  assez grand, il existe  $k_n$  tel que  $k_n t/n < s \leq (k_n + 1)t/n$  et  $d(X_{(k_n+1)t/n}, X_{k_n t/n}) > 3\varepsilon$ . Par (II.44), cela montre que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , tout compact  $K \subset E$  et tout  $\varepsilon < d(\partial, K)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. sur  $\{X_s \in K; s \in [0, t]\}$ , on a  $d(X_{s-}, X_s) \leq 3\varepsilon$  pour tout  $s \in [0, t]$ . Cela entraîne donc que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. sur  $\{X_s \in K; s \in [0, t]\}$ ,  $X$  est continu sur  $[0, t]$ . Soit  $K_n = E_\partial \setminus B(\partial, 2^{-n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , qui est une suite de compacts tels que  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Un simple argument montre que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. sur l'événement  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X_s \in K_n; s \in [0, t]\}$ ,  $X$  est continu sur  $[0, t]$ . Or la propriété (II.38) implique que  $\{\zeta > t\}$  coïncide avec  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X_s \in K_n; s \in [0, t]\}$  à un ensemble  $\mathbf{P}_\mu$ -négligeable près. On a donc montré que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. sur l'événement  $\{\zeta > t\}$ ,  $X$  est continu sur  $[0, t]$ , ce qui implique immédiatement le résultat désiré. ■

Pour conclure, nous introduisons une hypothèse de régularité légèrement plus faible que la propriété de Hunt.

**Définition II.5.11** (*Processus standard*) Soit  $E$ , un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soient  $p_t(x, dy)$  des noyaux sous-Markoviens sur  $E$  dont le semi-groupe est noté  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $p_t^\partial(x, dy)$  les extensions minimales de ces noyaux et on note  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)),$$

un processus de Markov. C'est un processus *standard* s'il satisfait les hypothèses suivantes.

- (a)  $X$  est fortement Markovien relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  qui satisfait les hypothèses habituelles.
- (b) Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_t(\omega)$  est càd.
- (c)  $X$  est quasi-continu à gauche sur  $[0, \zeta[$  relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , c'est-à-dire que pour toute suite croissante de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt, tels que  $T_n \leq T_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , si on pose  $T := \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ , alors on a

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E), \mathbf{P}_\mu\text{-p.s. sur } \{T < \zeta\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T.$$

□

On note bien la différence avec les processus de Hunt pour lesquels la quasi-continuité à gauche a lieu sur tout  $\mathbb{R}_+$  et non pas seulement sur  $[0, \zeta[$ . Les processus standard apparaissent assez naturellement, par exemple lorsque l'on considère les processus de Markov à temps continu mais espace d'états discret. En adaptant les preuves du théorème II.5.4 et du théorème II.5.8, on montre facilement le résultat suivant.

**Théorème II.5.12** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soient  $p_t(x, dy)$  des noyaux sous-Markoviens sur  $E$  dont le semi-groupe est noté  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $p_t^\partial(x, dy)$  les extensions minimales de ces noyaux et on note  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)),$$

un processus de Markov standard. Alors pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $X$  est càdlàg sur  $[0, \zeta[$  et pour tout  $t \in [0, \zeta[, \overline{\{X_s ; s \in [0, t]\}} = \{X_s, X_{s-} ; s \in [0, t]\}$  est un compact de  $E$ .

**Remarque II.5.13** On a donc Feller-Dynkin càdlàg  $\implies$  Hunt  $\implies$  standard. Par ailleurs, les notions de processus et de Hunt et de processus standard coïncident si les processus dont la durée est infinie partout. En revanche, si  $X_{\zeta-}$  existe dans  $E_\partial$  pour un processus de Hunt, ce n'est pas nécessairement le cas pour un processus standard pour lequel des comportements plus complexes sont possibles vers  $\zeta$ . □

## II.6 Régularisation des processus de Feller.

### II.6.a Énoncé, résumé des résultats applicables, construction canonique.

Dans la plupart des résultats précédents, on suppose les trajectoires du processus continues à droite. Le théorème suivant construit une modification càdlàg à tout processus dont le semi-groupe est de Feller-Dynkin.

**Théorème II.6.1 (Régularisation des processus de Feller-Dynkin)** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soient  $p_t(x, dy)$ , des noyaux sous-Markoviens sur  $E$  dont le semi-groupe est noté  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $p_t^\partial(x, dy)$  les extensions minimales de ces noyaux et on note  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}^o; (\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}; (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)),$$

un processus de Markov. On note  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t(Y))_{t \in \mathbb{R}_+}$  les augmentations habituelles de resp.  $\mathcal{F}^o$ ,  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\mathcal{F}_t^o(Y))_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

On suppose que la restriction de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à  $C_0(E)$  est un semi-groupe de Feller-Dynkin. Alors, il existe

$$\Omega^o \in \mathcal{F}_\infty^o(Y) \quad \text{et} \quad X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \longrightarrow E_\partial^{\mathbb{R}^+}$$

qui satisfont les assertions suivantes.

(i)  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -progressivement mesurable et pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est càdlàg dans  $E_\partial$ .

(ii) Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on a  $\mathbf{P}_\mu(\Omega^\circ) = 1$  et

$$\forall \omega \in \Omega^\circ, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t(\omega) = \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} Y_q(\omega)$$

(iii) Pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{P}_\mu(X_t = Y_t) = 1$ .

(iv) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , et tout mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on a

$$\mathcal{F}_t^\mu(X) = \mathcal{F}_t^\mu(Y) = \mathcal{F}_{t+}^\mu(X) = \mathcal{F}_{t+}^\mu(Y) \quad \text{et donc} \quad \mathcal{F}_t(X) = \mathcal{F}_t(Y) = \mathcal{F}_{t+}(X) = \mathcal{F}_{t+}(Y)$$

autrement dit  $(\mathcal{F}_t(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les hypothèses habituelles.

(v)  $X$  est un processus de Hunt relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ , ou à  $(\mathcal{F}_t(Y))_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

Le processus  $X$  est appelé régularisation du processus  $Y$ .

**Résumé des résultats généraux applicables à un processus de Feller régulier.** Rappelons brièvement les résultats qui sont applicables au processus régularisé  $X$  du théorème précédent. Pour simplifier on suppose que la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est càd (elle satisfait donc les hypothèses habituelles).

• Loi du 0-1 de Blumenthal : pour tout  $B \in \mathcal{F}_{0+}(X) = \mathcal{F}_0(X)$  et pour tout  $x \in E_\partial$ , on a  $\mathbf{P}_x(B) \in \{0, 1\}$ .

• Propriété de Markov forte pour les fonctionnelles augmentées : on suppose le processus  $X$  muni d'opérateurs de décalage  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{F}_\infty(X)$ -mesurable bornée. Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Alors  $\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} Z \circ \theta_T$  est  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} Z \circ \theta_T | \mathcal{G}_T] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \mathbf{E}_{X_T}[Z].$$

• Quasi-continuité à gauche : soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt tels que  $T_n \leq T_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $T = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ , qui est également un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  d'arrêt. Alors pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on a

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T.$$

• Continuité stochastique : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ ,  $\mathbf{P}_\mu(X_{t-} = X_t) = 1$ .

• Absorption en  $\partial$  : la durée du processus  $X$ , notée  $\zeta$ , satisfait

$$\zeta = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : X_{t-} \text{ ou } X_t = \partial\}$$

avec les conventions  $X_{0-} = X_0$  et  $\inf \emptyset = \infty$ . On a d'une part

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \forall t \in [\zeta, \infty[, \quad X_t = \partial.$$

et

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \forall t \in [0, \zeta[ \quad \overline{\{X_s ; s \in [0, t]\}} = \{X_s, X_{s-} ; s \in [0, t]\} \quad \text{est un compact de } E.$$

• Critère de continuité : on suppose que pour tous  $K, U \subset E$ , avec  $K \subset U$ ,  $K$  compact,  $U$  ouvert, on a

$$\sup_{x \in K} \frac{1}{t} p_t(x, E \setminus U) \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} 0.$$

Alors il existe  $\Omega_1 \in \mathcal{F}_\infty(Y)$  tel que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial), \quad \mathbf{P}_\mu(\Omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega_1, \quad t \in [0, \zeta(\omega)[ \rightarrow X_t(\omega) \text{ est continu.}$$

**Construction sur l'espace canonique.** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. On rappelle que  $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+, E_\partial)$  désigne l'espace des fonctions càdlàg à valeurs dans  $E_\partial$  et que  $C(\mathbb{R}_+, E_\partial)$  désigne l'espace des fonctions continues à valeurs dans  $E_\partial$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et toute fonction càdlàg  $w = (w(s))_{s \in \mathbb{R}_+}$ , on définit :  $X_t^{\text{can}}(w) = w(t)$ , autrement dit  $(X_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est le processus canonique sur  $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+, E_\partial)$ . On note  $\mathcal{F}^{\text{can}} = \sigma(X_t^{\text{can}}, t \in \mathbb{R}_+)$ , qui est la tribu trace sur  $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+, E_\partial)$  de la tribu produit  $\mathcal{B}(E_\partial)^{\otimes \mathbb{R}_+}$ . On rappelle la notation  $\theta_t^{\text{can}}$  pour l'opérateur de décalage au temps  $t$  :  $\theta_t^{\text{can}}(w) = w(t + \cdot)$ .

**Théorème II.6.2 (Existence des processus de Feller réguliers)** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD dont on note  $(E_\partial, d)$  un compactifié habituel. Soient  $p_t(x, dy)$  des noyaux sous-Markoviens sur  $E$  dont le semi-groupe est noté  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $p_t^\partial(x, dy)$  les extensions minimales de ces noyaux et on note  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le semi-groupe associé. On suppose que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est de Feller-Dynkin.

Alors, pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{P}_\mu$  sur l'espace mesurable  $(\mathbf{D}(\mathbb{R}_+, E_\partial), \mathcal{F}^{\text{can}})$  telle que sous  $\mathbb{P}_\mu$ ,  $X^{\text{can}}$  est un processus de Markov de semi-groupe  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et de loi initiale  $\mu$ . On note  $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_\mu}$  l'ensemble des  $\mathbb{P}_\mu$ -négligeables et on pose

$$\mathcal{F} := \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)} \sigma(\mathcal{F}^{\text{can}}, \mathcal{N}_{\mathbb{P}_\mu}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t := \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)} \sigma(\mathcal{F}_t^{\text{can}}, \mathcal{N}_{\mathbb{P}_\mu}), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors

$$(\mathbf{D}(\mathbb{R}_+, E_\partial); \mathcal{F}; (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, X^{\text{can}}; (\theta_t^{\text{can}})_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbb{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial))$$

est un processus de Markov, la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les hypothèses habituelles : c'est un processus de Hunt qui est appelé réalisation canonique du semi-groupe de Feller-Dynkin  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

**Preuve :** on note  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  le processus canonique sur  $E_\partial^{\mathbb{R}_+}$ . Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ . Le théorème II.2.4 (page 54), basé sur le théorème d'extension de Kolmogorov, montre l'existence la la mesure de probabilité  $\mathbf{P}_\mu$  :  $\mathcal{B}(E_\partial)^{\otimes \mathbb{R}_+} \rightarrow [0, 1]$  telle que sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,  $Y$  soit un processus de Markov de semi-groupe  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et de loi initiale  $\mu$ . On applique le théorème de régularisation II.6.1 qui précède et on note  $X$  la régularisation de  $Y$ . On note alors  $\mathbb{P}_\mu$  la loi de  $X$  sous  $\mathbf{P}_\mu$ . Il est clair que  $\mathbb{P}_\mu$  est une mesure de probabilité sur l'espace canonique des fonctions càdlàg. On conclut ensuite facilement. ■

## II.6.b Préliminaires sur les fonctions sur-médianes.

On reprend les notations du théorème II.6.1. On introduit tout d'abord la notion de fonction sur-médiane.

**Définition II.6.3 (Fonctions  $p$ -sur-médianes associées à un semi-groupe)** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin sur  $C_0(E)$ . Une fonction  $g \in C_0(E)$  est dite  $p$ -sur-médiane si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E_\partial, \quad 0 \leq e^{-pt} P_t g(x) \leq g(x),$$

ce qui implique notamment que  $g$  est positive. □

Cette définition s'interprète de manière probabiliste comme suit.

**Lemme II.6.4** On reprend les notations du théorème II.6.1. Il y a équivalent entre les deux assertions suivantes.

- (a) Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ . Alors, sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,  $(e^{-pt} g(Y_t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale.
- (b)  $g$  est  $p$ -sur-médiane.

**Preuve :** pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $e^{-pt}g(Y_t)$  est une v.a. ( $\mathcal{G}_t^o$ )-mesurable positive bornée par  $e^{-pt}\|g\|_\infty$  : elle est donc intégrable. Soit  $s \in \mathbb{R}_+$ . La définition des processus Markoviens implique

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[e^{-p(s+t)}g(Y_{s+t}) \mid \mathcal{G}_t^o] = e^{-pt}e^{-ps}(P_s g)(Y_t). \quad (\text{II.45})$$

Si  $g$  est sur-médiane, on a  $e^{-pt}e^{-ps}(P_s g)(Y_t) \leq e^{-pt}g(Y_t)$  ce qui implique (a). Si on suppose (a), on applique (II.45) avec  $\mu = \delta_x$  et  $t = 0$ , pour montrer que  $g$  est  $p$ -sur-médiane. ■

Le lemme suivant donne un exemple de fonction sur-médiane.

**Lemme II.6.5** *On reprend les notations du théorème II.6.1. Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , toute fonction  $f \in C_0(E)$  et tout  $x \in E$ , il y a un sens à poser :*

$$U_p f(x) := \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt. \quad (\text{II.46})$$

Alors,  $U_p f \in C_0(E)$  et  $U_p : C_0(E) \rightarrow C_0(E)$  est une application linéaire telle que

$$\forall p \in ]0, \infty[, \forall f \in C_0(E), \|pU_p f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \lim_{p \rightarrow \infty} pU_p f(x) = f(x). \quad (\text{II.47})$$

La famille d'opérateurs  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est appelé la famille des résolvantes associée au semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . De plus, toute fonction positive  $f \in C_0(E)$ ,  $pU_p f$  est  $p$ -sur-médiane.

**Preuve :** le lemme II.1.14 (ii), page 49, montre que  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto P_t f(x)$  est continue à droite et borné par  $\|f\|_\infty$  ; la définition (II.46) a donc un sens. Puisque pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_t f \in C_0(E)$ , le théorème de convergence dominée implique facilement que  $U_p f \in C_0(E)$ . Par ailleurs, la linéarité de  $U_p$  est claire. Comme  $|U_p f(x)| \leq \int_0^\infty ds e^{-ps} |P_s f(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^\infty ds e^{-ps}$ , on a déduit que  $\|pU_p f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ . Enfin, par un changement de variable élémentaire on a

$$pU_p f(x) - f(x) = \int_0^\infty dt p e^{-pt} (P_t f(x) - f(x)) = \int_0^\infty ds e^{-s} (P_{s/p} f(x) - f(x)).$$

Le fait que pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$ , on ait  $\lim_{p \rightarrow \infty} P_{s/p} f(x) = f(x)$ , combiné au théorème de convergence dominée, implique la limite dans (II.47).

Soit  $f \in C_0(E)$  positive. Montrons ensuite que  $pU_p f$  est  $p$ -sur-médiane : à l'aide du théorème de Fubini et l'équation de Kolmogorov-Chapman, on montre les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned} P_t(U_p f)(x) &= \int_E p_t(x, dy) U_p f(y) = \int_E p_t(x, dy) \int_0^\infty ds e^{-ps} \int_E p_s(y, dz) f(z) \\ &= \int_0^\infty ds e^{-ps} \int_E p_t(x, dy) \int_E p_s(y, dz) f(z) = \int_0^\infty ds e^{-ps} P_{s+t} f(x) \\ &= e^{pt} \int_t^\infty ds e^{-ps} P_s f(x) \leq e^{pt} \int_0^\infty ds e^{-ps} P_s f(x) = e^{pt} U_p f(x), \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

l'inégalité étant une conséquence du fait que  $f$  est positive. Cela implique donc que  $e^{-pt} P_t(pU_p f)(x) \leq pU_p f(x)$ , ce qui termine la preuve du lemme. ■

Les résultats précédents sont utilisés pour montrer le lemme suivant.

**Lemme II.6.6** *On reprend les notations du théorème II.6.1. Il existe une suite de fonctions  $h_n : E_\partial \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , qui satisfait les conditions suivantes.*

- (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n \in C_0(E)$  et  $0 \leq h_n \leq 1$ .
- (ii) Pour tout  $x \in E$ ,  $h_0(x) > 0$ .
- (iii)  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sépare les points : pour tous  $x, y \in E_\partial$  distincts, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $h_n(x) \neq h_n(y)$ .
- (iv) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $m_n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $h_n$  est  $m_n$ -sur-médiane.

**Preuve :** soit une suite  $x_n \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite dense dans  $E$ ; on introduit les fonctions suivantes

$$\forall x \in E_\partial, \quad f_0(x) = 1 \wedge d(x, \partial) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = 1 \wedge d(x, x_n) \wedge d(x, \partial). \quad (\text{II.49})$$

Il est clair que  $f_n \in C_0(E)$  et  $0 \leq f_n \leq 1$ . De plus,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sépare les points c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E_\partial \text{ tels que } x \neq y, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad f_n(x) \neq f_n(y). \quad (\text{II.50})$$

En effet, soient  $x, y \in E_\partial$ , distincts. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x \neq \partial$  : on a  $f_0(x) > 0$  et si  $y = \partial$ ,  $f_0(x) > f_0(y) = 0$ . Supposons ensuite que  $x, y \in E$  : on pose  $\delta := d(x, y) \wedge d(x, \partial) \wedge d(y, \partial) > 0$ . Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $d(x, x_n) < \delta/2$ . Donc  $f_n(x) < \delta/2$  et l'inégalité triangulaire implique  $d(y, x_n) \geq d(x, y) - d(x, x_n) > \delta/2$ . Comme  $d(y, \partial) \geq \delta$ , cela entraîne  $f_n(y) > \delta/2$ , ce qui montre (II.50).

On introduit ensuite les fonctions suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad g_{m,n} := m U_m f_n. \quad (\text{II.51})$$

On a donc  $g_{m,n} \in C_0(E)$ ,  $0 \leq g_{m,n} \leq 1$ . Le lemme II.6.5 implique que  $g_{m,n}$  est  $m$ -sur-médiane. On remarque ensuite que

$$\forall x \in E, \quad g_{1,0}(x) > 0. \quad (\text{II.52})$$

En effet, la propriété de Feller implique que pour tout  $x \in E$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} P_s f_0(x) = f_0(x) > 0$ . Donc si  $x \in E$ ,  $s \mapsto P_s f_0(x)$  est strictement positif pour tout  $s$  dans un voisinage de 0. Cela implique  $\int_0^\infty ds e^{-s} P_s f_0(x) > 0$  et on a donc  $g_{1,0}(x) = U_1 f_0(x) > 0$ .

La famille de fonctions  $g_{m,n}$  sépare les points :

$$\forall x, y \in E_\partial \text{ tels que } x \neq y, \quad \exists (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} : \quad g_{m,n}(x) \neq g_{m,n}(y). \quad (\text{II.53})$$

En effet, il existe  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $f_n(x) \neq f_n(y)$ . Or par (II.47) on a  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_{m,n}(x) = f_n(x)$  et  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_{m,n}(y) = f_n(y)$ , ce qui entraîne (II.53). On ré-indexe la suite  $(g_{m,n})_{m \geq 1, n \geq 0}$  en une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $h_0 := g_{1,0}$ , qui satisfait les propriétés désirées. ■

On utilise les fonctions  $h_n$  pour "coder"  $E_\partial$  par  $[0, 1]^\mathbb{N}$ . Pour cela on utilise un fait élémentaire de topologie, qui est rappelé sous la forme du lemme suivant.

**Lemme II.6.7** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces topologiques séparés. Soit  $K_1 \subset E_1$ , un compact et soit  $\Phi: G_1 \rightarrow E_2$ , une fonction continue.

- (i)  $K_2 := \Phi(K_1)$  est un compact de  $E_2$ .
- (ii) Supposons de plus que  $\Phi$  soit injective. On note  $\Psi: K_2 \rightarrow K_1$  sa réciproque. Alors,  $\Psi$  est continue : autrement dit  $\Phi$  est un homéomorphisme de  $K_1$  sur  $K_2$ .

**Preuve :** soit  $V_i \subset E_2$ ,  $i \in I$ , une famille d'ouverts recouvrants  $K_2$ . Alors  $K_1 = \Phi^{-1}(K_2) \subset \Phi^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} \Phi^{-1}(V_i)$ . Comme  $K_1$  est compact et que les  $\Phi^{-1}(V_i)$  sont des ouverts de  $E_1$  (par continuité de  $f$ ), il existe  $I_0 \subset I$ ,  $I_0$  fini, tel que  $K_1 \subset \bigcup_{i \in I_0} \Phi^{-1}(V_i) = \Phi^{-1}(\bigcup_{i \in I_0} V_i)$ , ce qui implique que  $K_2 \subset \bigcup_{i \in I_0} V_i$ . Donc,  $K_2$  a la propriété de recouvrement fini : c'est donc un compact. Soit  $F$ , un fermé de  $E_1$ ,  $\Psi^{-1}(F) = \Phi(F \cap K_1)$  qui est compact par le premier point et car  $F \cap K_1$  est un fermé du compact  $K_1$  donc compact car  $E_1$  a une topologie séparée. Cela montre la continuité de  $\Psi$ . ■

On applique ce résultat à l'espace compact  $E_1 = K_1 = E_\partial$  et à  $E_2$  qui est l'espace  $J := [0, 1]^\mathbb{N}$  des suites à valeurs dans  $[0, 1]$  muni de la topologie produit, c'est-à-dire que la convergence dans  $J$  correspond à la convergence coordonnée par coordonnée. On rappelle que  $J$  est compact et on vérifie facilement que la topologie produit correspond à la métrique suivante : pour tous  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in J$ ,  $\delta(u, v) := \sum_{n \geq 0} 2^{-n-1} |u_n - v_n|$ .

**Lemme II.6.8** *On rappelle la définition des fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  du lemme II.6.6. Pour tout  $x \in E_\partial$ , on pose  $\Phi(x) := (h_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , qui satisfait les propriétés suivantes.*

(i)  $\Phi: E_\partial \rightarrow J$  est continue injective.

(ii)  $K := \Phi(E_\partial)$  est un compact de  $J$  et la préciproque  $\Psi: K \rightarrow E_\partial$  de  $\Psi$  est continue.

**Preuve :** le lemme II.6.7 montre que (i) implique (ii). Il suffit de montrer (i). Comme les  $h_n$  sont continues et que  $J$  est muni de la topologie produit,  $\Phi$  est continue. Il reste à montrer que  $\Phi$  est injective : c'est une conséquence immédiate du fait que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sépare les points (lemme II.6.6 (iii)). ■

### II.6.c Preuve du théorème II.6.1 de régularisation des processus de Feller.

On se place sous les hypothèses du théorème II.6.1. On rappelle la définition I.4.1 (page 35) de l'ensemble  $\mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+)$  des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont régularisables. On rappelle le point (iv) du lemme II.6.6, page 79. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \omega \in \Omega, \quad M_t^{(n)} := e^{-m_n t} h_n(Y_t(\omega)) \quad \text{et} \quad \Omega_n := \{\omega \in \Omega : (M_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+)\}.$$

Le corollaire I.4.6 (page 38) implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Omega_n \in \mathcal{F}_\infty^o(Y).$$

Comme  $h_n$  est  $m_n$ -surmédiane, le lemme II.6.4, page 78, implique que pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,  $M^{(n)}$  est une  $(\mathcal{G}_t^o)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -sur-martingale. Le théorème I.4.9 de régularisation des sur-martingales (page 39) implique alors que  $\mathbf{P}_\mu(\Omega_n) = 1$ . Si on pose  $\Omega^o := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ , alors

$$\Omega^o \in \mathcal{F}_\infty^o(Y) \quad \text{et} \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial), \quad \mathbf{P}_\mu(\Omega^o) = 1.$$

Comme  $t \mapsto e^{-m_n t}$  est continue, on constate que

$$\forall \omega \in \Omega^o, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (h_n(Y_t(\omega)))_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbf{Reg}(\mathbb{R}_+).$$

La définition I.4.1 (page 35) des fonctions régularisables et le théorème I.4.2 (page 36) implique que

$$\forall \omega \in \Omega^o, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad H_t^{(n)}(\omega) := \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} h_n(Y_q(\omega)) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et } t \mapsto H_t^{(n)}(\omega) \text{ est càdlàg.}$$

On rappelle la définition des fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  du lemme II.6.8, page 81. On pose alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \omega \in \Omega, \quad X_t(\omega) := \Psi((H_t^{(n)}(\omega))_{n \in \mathbb{N}}) \text{ si } \omega \in \Omega^\circ \quad \text{et} \quad X_t(\omega) := \partial \text{ si } \omega \in \Omega \setminus \Omega^\circ.$$

Comme  $J$  est muni de la topologie produit, pour tout  $\omega \in \Omega^\circ$ ,  $t \mapsto ((H_t^{(n)}(\omega))_{n \in \mathbb{N}})$  est càdlàg dans  $J$ . Comme  $\Psi$  est continu (lemme II.6.8 (ii)) et comme  $X$  est constant hors de  $\Omega^\circ$ , on en déduit que

$$\forall \omega \in \Omega^\circ, \quad t \mapsto X_t(\omega) \text{ est càdlàg.}$$

Le fait que  $\Psi$  (ou  $\Phi$ ) soit bijectif implique que partout sur  $\Omega$  on ait

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad Y_t = \Psi((h_n(Y_t))_{n \in \mathbb{N}})$$

et la continuité de  $\Psi$  implique alors que

$$\forall \omega \in \Omega^\circ, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t(\omega) = \lim_{\substack{q \in \mathbb{Q} \cap [t, \infty[ \\ q \rightarrow t}} Y_q(\omega) \text{ dans } E_\partial.$$

Le théorème I.4.9 de régularisation des sur-martingales (page 39) implique également que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial), \quad (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ est } (\mathcal{F}_{t+}^\mu(Y))_{t \in \mathbb{R}_+} \text{-adapté}$$

où on rappelle que  $(\mathcal{F}_{t+}^\mu(Y))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est la filtration  $(\mathcal{F}_t^\circ(Y))_{t \in \mathbb{R}_+}$  qui est  $\mathbf{P}_\mu$ -complétée et rendue continue à droite. Cela implique donc que

$$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ est } (\mathcal{F}_{t+}(Y))_{t \in \mathbb{R}_+} \text{-adapté et donc } (\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+} \text{-adapté également.}$$

On montre plus bas qu'en fait  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté. À ce point près, on a montré les points (i) et (ii) du théorème II.6.1 de régularisation des processus de Feller-Dynkin.

Montrons le point (iii). Pour cela on fixe  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f, g \in C_0(E)$  et une suite  $q_n \in \mathbb{Q} \cap ]t, \infty[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , décroissant vers  $t$ . Les points (i) et (ii) du théorème de régularisation combinés avec le théorème de convergence dominée entraînent

$$\mathbf{E}_\mu[f(X_t)g(Y_t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\mu[f(Y_{q_n})g(Y_t)] \tag{II.54}$$

La définition des processus de Markov entraîne ensuite que

$$\mathbf{E}_\mu[f(Y_{q_n})g(Y_t)] = \mathbf{E}_\mu[P_{q_n-t}f(Y_t)g(Y_t)]. \tag{II.55}$$

Comme le semi-groupe est Fellérien,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{q_n-t}f(Y_t) = f(Y_t)$  partout sur  $\Omega$ . Par convergence dominée, on obtient donc

$$\forall f, g \in C_0(E), \quad \mathbf{E}_\mu[f(X_t)g(Y_t)] = \mathbf{E}_\mu[f(Y_t)g(Y_t)]. \tag{II.56}$$

Par un raisonnement de classe monotone, on en déduit que pour toute fonction  $F : E_\partial^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{B}(E_\partial)^{\otimes 2}$ -mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}_\mu[F(X_t, Y_t)] = \mathbf{E}_\mu[F(Y_t, Y_t)]. \tag{II.57}$$

*En effet :* soient  $U, V \subset E_\partial$  deux ouverts. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = 1 \wedge nd(x, E_\partial \setminus U)$  et  $g_n(x) = 1 \wedge nd(x, E_\partial \setminus V)$ . On vérifie facilement que  $f_n, g_n \in C_0(E)$ , que  $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \mathbf{1}_U$  et  $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \mathbf{1}_V$  et

enfin que  $f_n \rightarrow \mathbf{1}_U$  et  $f_n \rightarrow \mathbf{1}_V$  ponctuellement. En appliquant (II.56) à  $f_n$  et  $g_n$  et en utilisant la convergence monotone, on obtient que

$$\forall U, V \subset E_\partial \text{ ouverts}, \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_U(X_t)\mathbf{1}_V(Y_t)] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_U(Y_t)\mathbf{1}_V(Y_t)]. \quad (\text{II.58})$$

On note ensuite  $\mathcal{P} := \{U \times V; U, V \subset E_\partial \text{ ouverts}\}$ . On remarque que  $\mathcal{P}$  est un pi-système générant  $\mathcal{B}(E_\partial)^{\otimes 2}$ . On note ensuite  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions  $F$  qui sont  $\mathcal{B}(E_\partial)^{\otimes 2}$ -mesurables bornées et qui satisfont (II.57). Il est clair que  $\mathcal{H}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De plus, (II.58) montre que pour tout  $C \in \mathcal{P}$ ,  $\mathbf{1}_C \in \mathcal{H}$ . Le théorème de convergence monotone montre que  $\mathcal{H}$  est stable par limite ponctuelle de fonctions positives croissantes uniformément bornées. L'espace  $\mathcal{H}$  satisfait donc les hypothèses du théorème ?? de classe monotone fonctionnelle (page ??) et ce théorème permet d'affirmer que  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des fonctions  $\mathcal{B}(E_\partial)^{\otimes 2}$ -mesurables bornées, ce qui prouve (II.57).

On note  $\Delta := \{(x, x); x \in E_\partial\}$  qui est un fermé de  $E_\partial^2$ , donc un Borélien de cet espace. On peut donc appliquer (II.57) :  $\mathbf{P}_\mu(X_t = Y_t) = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_\Delta(X_t, Y_t)] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_\Delta(Y_t, Y_t)] = \mathbf{P}_\mu(Y_t = Y_t) = 1$ , ce qui prouve le point (iii) du théorème de régularisation des processus de Feller.

Le point (iii) implique que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , et toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ , on  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t^\mu(Y)$ -mesurable, ce qui implique que  $X_t$  est  $\mathcal{G}_t^\mu$ -mesurable car  $\mathcal{F}_t^\mu(Y) \subset \mathcal{G}_t^\mu$ . Comme cela est vrai pour toute mesure  $\mu$ ,  $X_t$  est donc  $\mathcal{G}_t$ -mesurable. Comme  $X$  est càd, la proposition I.2.22, page 24, implique que  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -progressivement mesurable.

On fixe ensuite  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f \in L_b(E_\partial)$  et  $\mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial)$ . On a  $\mathcal{G}_t^0 \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_t^\mu$ , et le point (iii) implique que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $f(X_{t+s}) = f(Y_{s+t})$  et  $P_s f(X_t) = P_s f(Y_t)$ ; le lemme I.4.7 (page 38) entraîne alors que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.

$$\mathbf{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t] = \mathbf{E}_\mu[f(Y_{s+t})|\mathcal{G}_t^0] = P_s f(Y_t) = P_s f(X_t).$$

On a donc montré que  $(\Omega; \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial))$  est un processus Markovien. Comme  $X$  est càdlàg et comme  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est de Feller-Dynkin, le théorème II.3.4 (page 60) montre que  $X$  est fortement Markovien relativement à  $(\mathcal{G}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Le théorème II.4.6 de régularité à droite des filtrations naturelles augmentées (page 64) entraîne que  $\mathcal{F}_{t+}^\mu(X) = \mathcal{F}_t(X)^\mu$ , ce qui implique le point (iv) du théorème II.6.1. Enfin la proposition II.5.2, page 70, entraîne le point (v). ■



## Chapitre III

# Processus de Feller : résolvantes et générateur.

### III.1 Théorie de Hille-Yosida.

Cette section est consacrée à l'étude générale des semi-groupes continus sur des espaces de Banach, de leurs résolvantes et leur générateur. Ces résultats d'analyse sont ensuite appliqués aux semi-groupes de Feller.

#### III.1.a Quelques points de calcul intégral et différentiel dans les Banach.

Dans ce qui suit,  $H$  désigne un espace de Banach réel, c-à-d. un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé complet ;  $|\cdot|$  est la norme de  $H$ . Dans ce contexte, une application linéaire  $Q : H \rightarrow H$  est appelée un *opérateur*. On rappelle que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $Q$  est continu.
- (b) Il existe  $v \in H$  tel que  $Q$  soit continu en  $v$ .
- (c)  $Q$  est continu en 0.
- (d) Il existe  $c \in ]0, \infty[$ , tel que  $v \in H$ ,  $|Qv| \leq c|v|$ .

Plutôt que de dire qu'un opérateur est continu on dit qu'il est *borné*, ce qui eut prêter à confusion. Autrement dit " $Q : H \rightarrow H$  opérateur borné" signifie " $Q$  endomorphisme continu sur  $H$ ". On note  $L(H)$  l'ensemble des opérateurs bornés sur  $H$  ;  $L(H)$  est un espace vectoriel réel que l'on munit de la norme suivante :

$$\forall Q \in L(H), \quad \|Q\| := \sup \{ |Qv| ; v \in H : |v| \leq 1 \}$$

La vérification du fait que  $\|\cdot\|$  est une norme est facile. On appelle  $\|\cdot\|$  la *norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$*  et on montre facilement que  $(L(H), \|\cdot\|)$  est un espace de Banach. Soient  $P, Q \in L(H)$  ; la composition de  $P$  et  $Q$  est simplement notée  $PQ$  ; on vérifié facilement que

$$\|PQ\| \leq \|P\| \|Q\| .$$

c'est-à-dire que la norme d'opérateur est sous-multiplicative.

On note  $H'$  le *dual topologique de  $H$*  qui est l'espace des formes linéaires continues. On vérifie facilement que pour toute  $\phi \in H'$ , il existe  $c \in ]0, \infty[$ , tel que  $|\phi(v)| \leq c|v|$ , pour tout  $v \in H$  et on munit  $H'$  de la norme

$$\forall \phi \in H', \quad |\phi'| := \sup \{ |\phi(v)| ; v \in H : |v| \leq 1 \} ,$$

On rappelle que  $H'$  muni de  $|\cdot|'$  est un espace de Banach. On rappelle le théorème de *Hahn-Banach* : soit  $v \in H$ , un vecteur non-nul. Alors il existe  $\phi \in H'$  telle que  $\phi(v) \neq 0$ . Établissons d'abord quelques résultats de calcul intégral pour les fonctions de  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans les Banach.

**Lemme III.1.1** Soit  $H$ , Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto v_t \in H$ , une fonction supposée uniformément continue et bornée par une constante notée  $c \in ]0, \infty[$ . Soit  $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ . Alors, il existe un élément de  $H$ , noté  $\int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq m} \mu(I_{k,n}) v_{k2^{-n}}, \quad (\text{III.1})$$

où les limites ont lieu pour la norme  $|\cdot|$  et où  $I_{k,n}$  désigne l'intervalle  $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ . Les propriétés suivantes sont également vérifiées.

(i)  $|\int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t| \leq c \mu(\mathbb{R}_+)$ .

(ii) Pour toute  $\phi \in H'$ , la fonction  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \phi(v_t) \in \mathbb{R}$  est uniformément continue bornée et

$$\phi\left(\int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) \phi(v_t).$$

(iii) Soit  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto w_t \in H$ , une fonction uniformément continue et bornée. Soient  $Q, R \in L(H)$ . Alors  $t \mapsto Qv_t + R w_t$  est également uniformément continue et bornée et

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) (Qv_t + R w_t) = Q \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t + R \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) w_t.$$

**Preuve :** on fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tous entiers  $m_1, m_2 \geq m$ ,

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq m_1} \mu(I_{k,n}) v_{k2^{-n}} - \sum_{0 \leq k \leq m_2} \mu(I_{k,n}) v_{k2^{-n}} \right| \leq \sum_{k \geq m} c \mu(I_{n,k}) = c \mu([m2^{-n}, \infty[) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

ce qui montre que la suite des sommes partielles  $(\sum_{0 \leq k \leq m} \mu(I_{k,n}) v_{k2^{-n}})_{m \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $H$ . Comme  $H$  est complet, la limite

$$J_n := \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_{k,n}) v_{k2^{-n}} := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq m} \mu(I_{k,n}) v_{k2^{-n}}$$

est bien définie dans  $H$ . On vérifie ensuite que  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est également de Cauchy dans  $H$ . En effet, on remarque d'abord que

$$J_{n+p} - J_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k2^p \leq \ell < (k+1)2^p} \mu(I_{k+\ell,n+p}) (v_{\ell2^{-n-p}} - v_{k2^{-n}}).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose ensuite  $\omega_n = \sup\{|v_t - v_s| ; t, s \in \mathbb{R}_+ : |t - s| \leq 2^{-n}\}$  qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$|J_{n+p} - J_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k2^p \leq \ell < (k+1)2^p} \mu(I_{k+\ell,n+p}) \omega_n \leq \mu(\mathbb{R}_+) \omega_n$$

Il existe donc  $J$  qui est la  $|\cdot|$ -limite des  $J_n$  et on a (III.1) avec  $J = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t$ . Au passage, on a montré que  $|J_n| \leq c \mu(\mathbb{R}_+)$ , ce qui implique (i).

Soit  $\phi \in H'$ . On a

$$\phi\left(\int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq m} \mu(I_{k,n}) \phi(v_{k2^{-n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) \phi(v_{2^{-n}\lfloor 2^n t \rfloor}) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) \phi(v_t),$$

la première égalité découlant de la continuité de  $\phi$ , la deuxième du théorème de convergence dominée et la troisième de la continuité de  $t \mapsto \phi(v_t)$  et du théorème de convergence dominée. Cela montre (ii).

Montrons (iii) : clairement  $t \mapsto Qv_t + R w_t$  est uniformément continu et borné. La continuité des opérateurs  $Q$  et de  $R$  impliquent alors que

$$Q \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) v_t + R \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) w_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq m} \mu(I_{k,n}) (Qv_{k2^{-n}} + R w_{k2^{-n}}) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) (Qv_t + R w_t),$$

la première égalité découlant de la continuité et de la linéarité de  $Q$  et de  $R$ . ■

On rappelle ensuite la notion de dérivée suivante.

**Définition III.1.2** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto v_t \in H$ , une fonction. Elle est dite *dérivable en t* s'il existe  $w \in H$  tel que

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \neq 0}} |s^{-1}(v_{s+t} - v_t) - w| = 0. \quad (\text{III.2})$$

Il est clair qu'il n'existe qu'un  $w$  tel que (III.2) et on note ce vecteur  $w = \frac{d}{dt} v_t$ , qui est la *dérivée de  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  en t*. De même, on définit les notions de limite à gauche et de limite à droite :

$$\frac{d^+}{dt} v_t = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} s^{-1}(v_{s+t} - v_t) \quad \text{et} \quad \frac{d^-}{dt} v_t = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s < 0}} s^{-1}(v_t - v_{t-s})$$

la limite à gauche n'ayant de sens que si  $t > 0$ . □

On laisse au lecteur le soin de montrer l'équivalence des assertions suivantes :

- (a)  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dérivable en  $t$ ,
- (b)  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dérivable à droite et à gauche en  $t$  et ces deux dérivées coïncident.

Dans ce cas,  $\frac{d}{dt} v_t = \frac{d^+}{dt} v_t = \frac{d^-}{dt} v_t$ .

**Proposition III.1.3** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on se donne  $v_t, w_t \in H$ . Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (i) Soient  $Q, R \in L(H)$ . On suppose  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  dérивables en  $t$  (resp. dérivables à gauche, dérivables à droite en  $t$ ). Alors  $(Qv_t + R w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dérivable en  $t$  (resp. dérivable à gauche, dérivable à droite en  $t$ ) et on a

$$\frac{d}{dt} (Qv_t + R w_t) = Q \frac{d}{dt} v_t + R \frac{d}{dt} w_t,$$

(resp. avec les égalités correspondantes pour les dérivées à gauche et à droite).

- (ii) Soit  $\phi \in H'$ . On suppose  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  dérivable en  $t$  (resp. à gauche, à droite en  $t$ ). On pose  $f(t) = \phi(v_t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Alors  $f$  est dérivable en  $t$  (resp. à gauche, à droite en  $t$ ) et

$$f'(t) = \phi\left(\frac{d}{dt} v_t\right)$$

(resp. avec les égalités correspondantes pour les dérivées à gauche et à droite).

(iii) On suppose que  $(w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est uniformément continue et bornée. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $x_t := \int_0^t ds w_s$ . Alors,  $(x_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dérivable partout sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\frac{d}{dt}x_t = w_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

(iv) On suppose que  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $(\frac{d}{dt}v_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est uniformément continue et bornée. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad v_t - v_0 = \int_0^t ds \frac{d}{ds} v_s .$$

**Preuve :** les points (i) et (ii) découlent directement de la définition. Le point (iii) est élémentaire : nous le laissons en exercice. Montrons (iv). Pour cela on fixe  $\phi \in H'$  et on pose  $f(t) = \phi(v_t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Par (i),  $f$  est dérivable partout et  $f'$  est uniformément continue et bornée. Le théorème fondamental de l'analyse implique que  $f(t) - f(0) = \int_0^t ds f'(s)$ . On a donc

$$\phi(v_t - v_0) = \int_0^t ds \phi\left(\frac{d}{ds} v_s\right) = \phi\left(\int_0^t ds \frac{d}{ds} v_s\right) ,$$

la première égalité découlant du (i) et la seconde du lemme III.1.1 (ii). Comme cela est vérifié pour toute forme linéaire continue  $\phi \in H'$ , cela implique (iv) par le théorème de Hahn-Banach. ■

### III.1.b Semi-groupes, contractivité, forte continuité : définitions et premières propriétés.

#### Semi-groupes contractants sur les espaces de Banach.

**Définition III.1.4** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , soit  $P_t \in L(H)$ . Alors  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe s'il satisfait la condition suivante.

(a) *Semi-groupe* :  $P_{s+t} = P_s P_t$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ .

Si  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe, il est dit *contractant* s'il satisfait la condition suivante.

(b) *Contractivité* :  $|P_t v| \leq |v|$ , pour tout  $v \in H$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Un semi-groupe contractant  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit *fortement continu sur  $H$*  s'il satisfait la condition suivante.

(c) *Continuité forte* :  $\lim_{t \rightarrow 0} |P_t v - v| = 0$ , pour tout  $v \in H$ , ce qui entraîne immédiatement que  $P_0 = \text{Id}$ , l'identité sur  $H$ . □

**Proposition III.1.5** Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe contractant d'opérateurs sur un espace de Banach  $(H, |\cdot|)$ . On définit le domaine de continuité forte du semi-groupe comme l'espace

$$H_0 = \{v \in H : \lim_{t \rightarrow 0} |P_t v - v| = 0\} .$$

Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.

(i)  $H_0$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

(ii)  $P_0$  est l'identité sur  $H_0$ .

(iii) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_t(H_0) \subset H_0$ .

Autrement dit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  restreint à  $H_0$  est un semi-groupe contractant fortement continu sur  $H_0$ .

**Preuve :** soient  $v_n \in H_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  convergeant vers  $v \in H$ . Comme les  $P_t$  sont des contractions on a

$$|P_t v - v| \leq |P_t v_n - v_n| + |P_t(v - v_n)| + |v - v_n| \leq |P_t v_n - v_n| + 2|v - v_n|.$$

Donc  $\limsup_{t \rightarrow 0} |P_t v - v| \leq 2|v - v_n| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ce qui implique (i). Soit  $v \in H_0$ . On voit immédiatement que  $\lim_{t \rightarrow 0} |P_t v - v| = 0$  implique que  $|P_0 v - v| = 0$ , ce qui entraîne (ii). Soit  $v \in H_0$  et  $s \in \mathbb{R}_+$ . Par les propriétés de semi-groupe et de contractivité on a

$$|P_t P_s v - P_s v| = |P_s(P_t v - v)| \leq |P_t v - v| \longrightarrow 0$$

lorsque  $t \rightarrow 0$ . On a donc  $P_s v \in H_0$ , ce qui implique (iii) et ce qui termine la preuve de la proposition.  $\blacksquare$

### L'exemple des exponentielles d'opérateurs bornés.

**Définition III.1.6** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soit  $A \in L(H)$ . On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ . Par conséquent  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|/n! < \infty$ , ce qui permet de définir la série  $\|\cdot\|$ -normalement convergente d'opérateurs bornés :

$$e^A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n = \|\cdot\| \text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} A^k$$

qui l'opérateur *exponentiel de A*. On a donc  $e^A \in L(H)$ .  $\square$

On montre les propriétés suivantes.

**Lemme III.1.7** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soit  $A \in L(H)$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

$$(i) \quad \|e^A\| \leq \exp(\|A\|).$$

$$(ii) \quad \text{Pour tout } v \in H,$$

$$e^A v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} A^n v = |\cdot| \text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} A^k v$$

$$(iii) \quad \text{Soit } c \in \mathbb{R}. \text{ Alors } e^{c \text{Id}} = e^c \text{Id}.$$

$$(iv) \quad \text{Soit } B \in L(H) \text{ tel que } AB = BA. \text{ Alors, } e^A e^B = e^{A+B}.$$

**Preuve :** l'inégalité triangulaire pour la norme d'opérateurs  $\|\cdot\|$  et sa sous-multiplicativité impliquent que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

et on obtient (i) lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Le point (ii) découle facilement de la définition de l'exponentielle de  $A$ . On obtient le point (iii) en remarquant que  $(c \text{Id})^n = c^n \text{Id}$ .

Montrons (iv). Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on pose  $Q_N := \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} A^k$  et  $R_N := \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} B^k$ . On a donc

$$Q_N R_N = \sum_{0 \leq k, \ell \leq N} \frac{1}{k! \ell!} A^k B^\ell = \sum_{0 \leq n \leq 2N} \frac{1}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{\{(n-k) \vee k \leq N\}} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Or comme  $A$  et  $B$  commutent,  $(A + B)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$  et donc

$$\|Q_N R_N - \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{n!} (A + B)^n\| = \left\| \sum_{N < n \leq 2N} \frac{1}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{\{(n-k) \vee k \leq N\}} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right\| \leq \sum_{n > N} \frac{1}{n!} (\|A\| + \|B\|)^n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

Or  $Q_N R_N \rightarrow e^A e^B$  pour  $\|\cdot\|$ . ■

**Proposition III.1.8** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soit  $B \in L(H)$ . Soit  $c \geq \|B\|$ . On pose

$$A = B - c\text{Id} \quad \text{et} \quad P_t = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe contractant fortement continu sur  $H$  (on a même une continuité plus forte :  $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t - \text{Id}\| = 0$ ).

**Preuve :** il est clair que  $tA$  et  $sA$  commutent donc  $P_s P_t = e^{(s+t)A} = P_{s+t}$ . Par ailleurs, on a  $e^{tA} = e^{-ct} e^{tB}$  car  $B$  et  $c\text{Id}$  commutent et  $e^{-ct}\text{Id} = e^{-ct}\text{Id}$ . Donc,  $\|e^{tA}\| = \|e^{-ct} e^{tB}\| = e^{-ct} \|e^{tB}\| \leq e^{-ct} e^t \|B\| \leq 1$ . Donc  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est contractant. Enfin on remarque que  $\|P_t - \text{Id}\| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , ce qui termine la preuve. ■

**Proposition III.1.9** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soit  $A \in L(H)$ .

(i)  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{tA} \in L(H)$  est dérivable dans  $(L(H), \|\cdot\|)$ . Pour tout  $v \in H$ ,  $t \mapsto e^{tA}v \in H$  est dérivable dans  $(H, |\cdot|)$ . On a de plus

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} e^{tA}v = Ae^{tA}v = e^{tA}Av.$$

(ii) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $e^{tA} - \text{Id} = \int_0^t ds A e^{sA} = \int_0^t ds e^{sA} A$ , l'intégrale ayant lieu dans  $L(H)$  muni de  $\|\cdot\|$ . De même pour tout  $v \in H$ , et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$e^{tA}v - v = \int_0^t ds A e^{sA}v = \int_0^t ds e^{sA}Av,$$

les intégrales étant à valeurs dans  $H$ .

(iii) Soient  $A, B \in L(H)$  tels que les semi-groupes  $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(e^{tB})_{t \in \mathbb{R}_+}$  soient contractants. On suppose de plus que  $A$  et  $B$  commutent. Alors

$$\forall v \in H, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |e^{tA}v - e^{tB}v| \leq t|Av - Bv|. \tag{III.3}$$

**Preuve :** on a

$$s^{-1}(e^{(t+s)A} - e^{tA}) - Ae^{tA} = s^{-1}(e^{(t+s)A} - e^{tA}) - e^{tA}A = e^{tA}s^{-1}(e^{sA} - \text{Id} - sA) = s e^{tA} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s^n}{(n+2)!} A^{n+2}$$

On en déduit que

$$\|s^{-1}(e^{(t+s)A} - e^{tA}) - Ae^{tA}\| \leq |s| e^{t\|A\|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|s|^n}{(n+2)!} \|A^{n+2}\|$$

le membre de droite tendant vers 0 lorsque  $s$  tend vers 0, ce qui montre (i). Le point (ii) découle du (i) et de la proposition III.1.3 (iv), page 87, dans l'espace de Banach  $L(H)$ .

Montrons le point (iii) : comme  $tA$  et  $tB$  commutent  $e^{tA} - e^{tB} = e^{tB}(e^{t(A-B)} - \text{Id})$  et point (ii) appliqué à l'opérateur  $A - B$  implique que

$$e^{tA}v - e^{tB}v = e^{tB}(e^{t(A-B)}v - v) = e^{tB} \int_0^t ds e^{s(A-B)}(A - B)v.$$

On utilise ensuite la propriété (iii) du lemme III.1.1, page 86, pour montrer que

$$e^{tB} \int_0^t ds e^{s(A-B)}(A - B)v = \int_0^t ds e^{tB} e^{s(A-B)}(A - B)v.$$

Par le lemme III.1.7 (iv),  $\int_0^t ds e^{tB} e^{s(A-B)}(A - B)v = \int_0^t ds e^{sA} e^{(t-s)B}(A - B)v$ . On utilise ensuite l'inégalité triangulaire (i) du lemme III.1.1 pour montrer que

$$\left| \int_0^t ds e^{sA} e^{(t-s)B}(A - B)v \right| \leq \int_0^t ds |e^{sA} e^{(t-s)B}(A - B)v|.$$

Comme  $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(e^{tB})_{t \in \mathbb{R}_+}$  sont contractants,  $|e^{sA} e^{(t-s)B}(A - B)v| \leq |Av - Bv|$ , ce qui termine la preuve de (III.3). ■

### III.1.c Résolvantes, contractivité, forte continuité : définitions et premières propriétés.

**Définition III.1.10** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , soit  $U_p \in L(H)$ . Alors  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est une *famille de résolvantes* si elle satisfait les conditions suivantes.

(a) *Equations de résolvante* :  $U_p - U_q = (q-p)U_pU_q$ , pour tous  $p, q \in ]0, \infty[$ .

Un famille de résolvantes  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est dite *contractante* si elle satisfait de plus les conditions suivantes.

(b) *Contractivité* :  $|pU_p v| \leq |v|$ , pour tout  $v \in H$  et pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , c'est-à-dire  $p\|U_p\| \leq 1$ , pour tout  $p \in ]0, \infty[$ .

$(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est dit *fortement continue* si elle satisfait la propriété suivante.

(c) *Continuité forte* :  $\lim_{p \rightarrow \infty} |pU_p v - v| = 0$ , pour tout  $v \in H$ . □

**Proposition III.1.11** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , une famille de résolvantes contractantes sur  $H$ . On introduit les deux sous-espaces suivants :

$$H_0 = \{v \in H : \lim_{p \rightarrow \infty} |pU_p v - v| = 0\} \quad \text{et} \quad D = U_1(H),$$

qui sont respectivement appelés espace de forte convergence et domaine de la famille de résolvantes. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

(i)  $H_0$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

(ii)  $D \subset H_0$  et pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on a  $D = U_p(H)$ .

(iii)  $H_0$  est l'adhérence de  $D$ .

(iv) La famille résolvante  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est fortement continue ssi  $D$  est dense dans  $H$ .

**Preuve :** soit  $v \in H$  et soient  $v_n \in H_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |v - v_n| = 0$ . On observe que pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , l'inégalité triangulaire, la linéarité de  $pU_p$  et sa contractivité impliquent

$$|pU_p v - v| \leq |pU_p v_n - v_n| + |pU_p(v - v_n)| + |v_n - v| \leq |pU_p v_n - v_n| + 2|v_n - v|,$$

On a donc  $\limsup_{p \rightarrow \infty} |pU_p v - v| \leq 2|v_n - v| \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ce qui implique que  $v \in H_0$  et donc que  $H_0$  est fermé, ce qui prouve (i).

Montrons (ii) : soit  $v \in D$ . Il existe donc  $w \in H$  tel que  $v = U_1 w$ . Soit  $p \in ]0, \infty[$ . L'équation de résolvante implique que  $v = U_1 w = U_p w + (p-1)U_p U_1 w$ , c'est-à-dire  $v = U_p w - U_p v + pU_p v$ . Cela implique que  $D \subset U_p(H)$  et par contractivité  $|pU_p v - v| = |U_p(w-v)| \leq p^{-1}|w-v|$ , ce qui implique que  $v \in H_0$ . En raisonnant de même, on montre que  $U_p(H) \subset U_1(H) = D$ , ce qui implique (ii).

Montrons (iii). Soit  $v \in H_0$ , comme  $|\cdot| \text{-}\lim_{p \rightarrow \infty} pU_p v = v$  et comme pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on a  $D = U_p(H)$ ,  $v$  est limite de points de  $D$  et donc dans l'adhérence de  $D$ . Or on a montré que  $D$  est contenu dans  $H_0$ . Donc  $H_0$  est l'adhérence de  $D$ , ce qui prouve (iii). Le point (iv) est une conséquence immédiate de (iii). ■

**Résolvantes associées aux semi-groupes contractant fortement continus.** On commence par montrer le lemme technique suivant.

**Lemme III.1.12** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe contractant fortement continu. Soient  $Q, R \in L(H)$  et soit  $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout  $v \in H$ , l'application  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto P_t v \in H$  est uniformément continue et bornée pour  $|\cdot|$ .

Le lemme III.1.1, page 86 permet alors de définir

$$\forall v \in H, \quad U^\mu v := \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) P_t v$$

et on vérifie que  $U^\mu \in L(H)$  et que  $\|U^\mu\| \leq \mu(\mathbb{R}_+)$ . De plus, on a les propriétés suivantes.

(ii) Pour tout  $v \in H$ ,  $Q U^\mu R v = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) Q P_t R v$ .

(iii) Pour tous  $v \in H$  et  $\phi \in H'$ ,  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \phi(Q P_t R v)$  est uniformément continue et bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\phi(Q U^\mu R v) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) \phi(Q P_t R v).$$

(iv) Pour toutes  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ ,  $U^{\mu * \nu} = U^\mu U^\nu$ , où  $\mu * \nu$  la convolution de  $\mu$  et  $\nu$ .

**Preuve :** on remarque que  $|P_{t+s} v - P_t v| = |P_t(P_s v - v)| \leq |P_s v - v| \rightarrow 0$ , lorsque  $s \rightarrow 0$ , par contractivité et forte continuité. Cela implique (i). L'existence de  $U^\mu$  et les point (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates du lemme III.1.1, page 86 Montrons (iv) : soient  $v \in H$  et  $\phi \in H'$ . En appliquant (ii) à  $Q = \text{Id}$  et  $R = U^\nu$ , on a  $\phi(U^\mu U^\nu v) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) \phi(P_t U^\nu v)$ ; en appliquant (ii) à  $Q = P_t$ , à  $\nu$  et à  $R = \text{Id}$ , on obtient que  $\phi(P_t U^\nu v) = \int_{\mathbb{R}_+} \nu(ds) \phi(P_t P_s v)$ . On rappelle que  $P_t P_s = P_{s+t}$ . On pose alors  $f(r) = \phi(P_r v)$  et par Fubini on a

$$\phi(U^\mu U^\nu v) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dt) \int_{\mathbb{R}_+} \nu(ds) f(s+t) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu \otimes \nu(dt ds) f(s+t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu * \nu(dt) f(t)$$

car  $\mu * \nu$  est la mesure image de  $\mu \otimes \nu$  par  $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto t + s \in \mathbb{R}_+$ . En appliquant encore (ii), on en déduit que pour tous  $v \in H$  et  $\phi \in H'$ ,  $\phi(U^\mu U^\nu v) = \phi(U^{\mu * \nu} v)$  et Hahn-Banach permet de conclure. ■

Le théorème suivant montre qu'à tout semi-groupe contractant fortement continu, on peut associer une famille de résolvantes contractantes fortement continue, qui est sa transformée de Laplace. Il s'agit du premier résultat de la théorie de Hille-Yosida (le sens abélien).

**Théorème III.1.13 (Hille-Yosida 1 : des semi-groupes aux résolvantes)** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe contractant fortement continu. Le lemme III.1.12 qui précède permet de définir les opérateurs bornés suivants

$$\forall p \in ]0, \infty[, \quad U_p := \int_0^\infty dt e^{-pt} P_t. \quad (\text{III.4})$$

Alors  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est une famille de résolvantes contractantes fortement continue.

**Preuve :** on fixe  $p, q \in ]0, \infty[$  et on pose  $\mu(dt) := e^{-pt} dt$  et  $\nu(dt) := e^{-qt} dt$ . Un calcul élémentaire montre que  $\mu * \nu(dt) = (p - q)^{-1}(e^{-qt} - e^{-pt})dt$ . Le point (iii) du lemme III.1.12 implique que  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est une famille de résolvantes. Montrons la contractivité : on fixe  $v \in H$ . L'inégalité triangulaire au (i) du lemme III.1.1, combiné avec la contractivité de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , montre que  $|U_p v| \leq \int_0^\infty dt e^{-pt} |P_t v| \leq |v| \int_0^\infty dt e^{-pt} = |v|/p$  ce qui montre la contractivité. Montrons enfin la forte continuité : on fixe  $v \in H$ . Le lemme III.1.1 permet d'écrire  $pU_p v - v$  comme suit :

$$pU_p v - v = \int_0^{\sqrt{p}} dt e^{-t} (P_{t/p} v - v) + \int_{\sqrt{p}}^\infty dt e^{-t} (P_{t/p} v - v).$$

On pose  $\varepsilon_p = \sup \{|P_s v - v| ; s \leq p^{-1/2}\}$  qui tend vers 0 lorsque  $p \rightarrow \infty$ . On a donc  $|e^{-t} (P_{t/p} v - v)| \leq \varepsilon_p e^{-t}$ , pour tout  $t \in [0, \sqrt{p}]$ . Pour tout  $t \geq \sqrt{p}$ , on a  $|e^{-t} (P_{t/p} v - v)| \leq 2e^{-t} |v|$ . L'inégalité triangulaire pour les intégrales à valeurs dans  $H$  entraîne alors

$$|pU_p v - v| \leq \int_0^{\sqrt{p}} dt e^{-t} \varepsilon_p + \int_{\sqrt{p}}^\infty dt e^{-t} 2|v| = \varepsilon_p (1 - e^{-\sqrt{p}}) + 2|v| e^{-\sqrt{p}}$$

ce qui implique  $\lim_{p \rightarrow \infty} |pU_p v - v| = 0$ , pour tout  $v \in H$ . ■

### Résolvantes d'exponentielles d'un opérateur borné.

**Proposition III.1.14** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . On munit  $L(H)$  de  $\|\cdot\|$ , la norme d'opérateur associée à  $|\cdot|$ . Soient  $B \in L(H)$  et  $c \geq \|B\|$ . On pose  $A := B - c\text{Id}$  et  $P_t := e^{tA}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Par la proposition III.1.8 (page 90),  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe contractant fortement continu. On note  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  la famille de résolvantes comme définie dans le théorème III.1.13 (qui affirme également que ces résolvantes sont contractantes et fortement continues). Alors,

$$\forall p \in ]0, \infty[, \quad U_p(p\text{Id} - A) = (p\text{Id} - A)U_p = \text{Id}.$$

Autrement dit, pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , l'opérateur  $p\text{Id} - A$  est inversible sur  $H$  d'inverse  $U_p$ .

**Preuve :** on fixe  $t \in \mathbb{R}_+, p \in ]0, \infty[, v \in H$  et  $\phi \in H'$ . On a

$$\begin{aligned}\phi(e^{-pt}P_t(p\text{Id} - A)v) &= pe^{-pt}\phi(e^{tA}v) - e^{-pt}\phi(e^{tA}Av) = pe^{-pt}\phi(e^{tA}v) - e^{-pt}\phi\left(\frac{d}{dt}(e^{tA}v)\right) \\ &= pe^{-pt}\phi(e^{tA}v) - e^{-pt}\frac{d}{dt}\phi(e^{tA}v) = -\frac{d}{dt}\phi(e^{-pt}e^{tA}v) = -\frac{d}{dt}\phi(e^{-pt}P_tv)\end{aligned}$$

On a utilisé la proposition III.1.9 (i), page 90, puis la proposition III.1.3 (ii), page 87, puis la formule de Leibniz pour la dérivée du produit de deux fonctions numériques. En intégrant sur  $t \in \mathbb{R}_+$ , on obtient

$$\phi(U_p(p\text{Id} - A)v) = \int_{\mathbb{R}_+} dt \phi(e^{-pt}P_t(p\text{Id} - A)v) = - \int_{\mathbb{R}_+} dt \frac{d}{dt}\phi(e^{-pt}P_tv) = \phi(v) - \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(e^{-pt}P_tv) = \phi(v). \quad (\text{III.5})$$

Ici on a utilisé la proposition III.1.1 (ii), page 86, pour la première égalité et le théorème fondamental du calcul intégral pour les deux dernières égalités. Comme (III.5) est vrai pour toute forme  $\phi \in H'$ , le théorème de Hahn-Banach implique que  $U_p(p\text{Id} - A)v = v$  pour tout  $v \in H$  et donc que  $U_p(p\text{Id} - A) = \text{Id}$ . L'égalité  $(p\text{Id} - A)U_p = \text{Id}$  se montre de la même manière. ■

**Remarque III.1.15** Le nom de *résolvante* vient du fait que ces opérateurs permettent de résoudre l'équation  $pv - Av = w$ , d'inconnue  $v$ . □

### III.1.d Des résolvantes aux semi-groupes.

Cette section est consacrée à la preuve du résultat suivant, qui est le pendant Taubérien du théorème III.1.13.

**Théorème III.1.16 (Hille-Yosida 2 : des résolvantes aux semi-groupes)** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , une famille de résolvantes contractantes fortement continue sur  $H$ . Alors, il existe un unique semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  contractant et fortement continu dont les résolvantes sont  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , c'est-à-dire  $U_p = \int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt}P_t$ , pour tout  $p \in ]0, \infty[$ .

Plus précisément, le semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  s'obtient par l'approximation suivante : pour tout  $r \in ]0, \infty[$  on pose

$$A_r := r(rU_r - \text{Id}) \in L(H) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P_t^{(r)} := e^{tA_r}.$$

On a alors

$$\forall v \in H, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |P_t^{(r)}v - P_tv| = 0.$$

**Preuve :** puisque  $\|rU_r\| \leq 1$ , la seconde égalité combinée avec la proposition III.1.8 (i) implique que

$(P_t^{(r)})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe contractant et fortement continu.

On note  $(U_p^{(r)})_{p \in (0, \infty)}$  la famille de résolvantes associée à  $(P_t^{(r)})_{t \in \mathbb{R}_+}$  :

$$\forall r \in ]0, \infty[, \forall p \in ]0, \infty[, \quad U_p^{(r)} := \int_0^\infty dt e^{-pt}P_t^{(r)}.$$

La proposition III.1.8 (ii) implique que  $U_p^{(r)}$  est l'inverse de  $p\text{Id} - A_r = (p + r)\text{Id} - r^2U_r$ , qui se calcule explicitement à l'aide des  $U_q$ . Pour cela on remarque d'abord que l'équation de résolvante implique que pour tous  $a, b \in ]0, \infty[$ ,

$$(\text{Id} + (b-a)U_a)(\text{Id} - (b-a)U_b) = (\text{Id} - (b-a)U_b)(\text{Id} + (b-a)U_a) = \text{Id}.$$

On choisit  $b = r$  et  $a = \frac{rp}{p+r} > 0$ , on a  $-(b-a) = -r^2(p+r)^{-1}$  et donc

$$(\text{Id} - r^2(p+r)^{-1}U_r)^{-1} = (\text{Id} - (b-a)U_b)^{-1} = \text{Id} + (b-a)U_a = \text{Id} + r^2(p+r)^{-1}U_{rp/(p+r)}.$$

Par conséquent,

$$U_p^{(r)} = (p+r)^{-1}(\text{Id} - r^2(p+r)^{-1}U_r)^{-1} = \frac{1}{p+r}\text{Id} + \left(\frac{r}{p+r}\right)^2 U_{\frac{rp}{p+r}}. \quad (\text{III.6})$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} U_p^{(r)} - U_p &= \frac{1}{p+r}\text{Id} + \left(\left(\frac{r}{p+r}\right)^2 - 1\right)U_p + \left(\frac{r}{p+r}\right)^2 \left(U_{\frac{rp}{p+r}} - U_p\right) \\ &= \frac{1}{p+r}\text{Id} + \left(\left(\frac{r}{p+r}\right)^2 - 1\right)U_p + \left(\frac{r}{p+r}\right)^2 \frac{p^2}{p+r} U_{\frac{rp}{p+r}} U_p \\ &= \frac{1}{p+r}\text{Id} - \frac{2r+p}{(p+r)^2} p U_p + \frac{r}{(p+r)^2} \frac{pr}{p+r} U_{\frac{rp}{p+r}} (p U_p) \end{aligned}$$

où on a utilisé l'équation de résolvante pour justifier la seconde égalité. En utilisant la fait que  $\|qU_q\| \leq 1$  avec  $q = p$  et  $q = \frac{pr}{p+r}$ , on a

$$\|U_p^{(r)} - U_p\| \leq \frac{1}{p+r} + \frac{2r+p}{(p+r)^2} + \frac{r}{(p+r)^2}$$

Donc

$$\forall p \in ]0, \infty[, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \|U_p^{(r)} - U_p\| = 0. \quad (\text{III.7})$$

On veut ensuite montrer que  $r \mapsto P_t^{(r)}v$  est de Cauchy dans  $H$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Pour cela on commence par montrer l'inégalité suivante

$$\forall t \in [0, t_0], \quad \forall v \in H, \quad \forall r, r' \in (0, \infty), \quad |P_t^{(r)}v - P_t^{(r')}v| \leq t_0 |A_r v - A_{r'} v|. \quad (\text{III.8})$$

*Preuve de (III.8)* : on observe que  $A_r$  et  $A_{r'}$  commutent et on applique la proposition III.1.9 (iii), page 90.  $\square$

On montre ensuite le résultat suivant

$$\forall v \in H, \quad |A_r U_1 v - U_1 v + v| \leq |r U_r v - v| + \frac{2}{|r-1|} |v| \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{III.9})$$

*Preuve de (III.9)* : l'équation de résolvante implique que pour  $r \neq 1$ ,

$$A_r U_1 = r^2 U_r U_1 - r U_1 = r^2(r-1)^{-1}(U_1 - U_r) - r U_1 = \frac{r}{r-1}(U_1 - r U_r) = U_1 - r U_r - \frac{1}{r-1}(U_1 - r U_r).$$

Donc  $A_r U_1 v - U_1 v + v = v - r U_r v - \frac{1}{r-1}(U_1 v - r U_r v)$  et comme  $|U_1 v| \leq |v|$  et  $|r U_r v| \leq |v|$ , on en déduit immédiatement (III.9).  $\square$

On pose  $D = U_1(H)$ , qui est le domaine de la famille de résolvantes, comme défini à la proposition III.1.11, page 91. Soit  $w \in D$ . Il existe donc  $v \in H$  tel que  $w = U_1 v$ . On pose

$$r \in ]1, \infty[, \quad \varepsilon(w, r) := 2 \sup_{r' > r} \left( |r' U_{r'} v - v| + \frac{2}{r'-1} |v| \right).$$

On voit alors que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(w, r) = 0$ . Par (III.8) et (III.9), on a donc

$$\forall w \in D, \quad \forall 0 \leq t \leq t_0, \quad \forall r', r'' \in ]r, \infty[, \quad |P_t^{(r'')} w - P_t^{(r')} w| \leq t_0 \varepsilon(w, r).$$

Donc, pour tout  $w \in D$ ,  $r \mapsto P_t^{(r)}w$  est de Cauchy lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Comme  $H$  est complet, pour tout  $w \in D$ , il existe un vecteur noté  $P_tw \in H$  tel que

$$|\cdot| \text{-} \lim_{r \rightarrow \infty} P_t^{(r)}w = P_tw .$$

et on a

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall w \in D, \sup_{t \in [0, t_0]} |P_t^{(r)}w - P_tw| \leq 2t_0 \varepsilon(w, r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 . \quad (\text{III.10})$$

Il est clair que  $P_t : D \rightarrow H$  est linéaire car les  $P_t^{(r)}$  le sont. Par ailleurs, puisque  $|P_t^{(r)}w| \leq |w|$ , en passant à la limite, on a  $|P_tw| \leq |w|$ , pour tout  $w \in D$ . Comme  $H$  est complet,  $P_t$  s'étend sur l'adhérence de  $D$  en une application linéaire contractante. Puisque la famille de résolvantes  $(U_p)_{p \in (0, \infty)}$  est fortement continue, la proposition III.1.11 (iv) implique que l'adhérence de  $D$  est  $H$ . Donc,  $P_t$  s'étend de  $D$  à  $H$  en une application linéaire telle que  $\|P_t\| \leq 1$ .

Montrons la propriété de semi-groupe : on fixe  $w \in D$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$  tels que  $t + s \leq t_0$  et  $r \in ]0, \infty[$ . On fixe également  $w_0 \in D$ . On a les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} |P_s P_tw - P_{s+t}w| &\leq |P_s P_tw - P_s^{(r)} P_t^{(r)}w| + |P_s^{(r)} P_t^{(r)}w - P_{s+t}^{(r)}w| + |P_{s+t}^{(r)}w - P_{s+t}w| \\ &\leq |P_s P_tw - P_s^{(r)} P_t^{(r)}w| + 0 + 2t_0 \varepsilon(w, r) \\ &\leq |P_s(P_tw - P_t^{(r)}w)| + |P_s P_t^{(r)}w - P_s^{(r)} P_t^{(r)}w| + 2t_0 \varepsilon(w, r) \\ &\leq |P_tw - P_t^{(r)}w| + |P_s(P_t^{(r)}w - w_0)| + |P_sw - P_s^{(r)}w_0| + |P_s^{(r)}(w_0 - P_t^{(r)}w)| + 2t_0 \varepsilon(w, r) \\ &\leq 2t_0 \varepsilon(w, r) + |P_t^{(r)}w - w_0| + 2t_0 \varepsilon(w_0, r) + |w_0 - P_t^{(r)}w| + 2t_0 \varepsilon(w, r) \\ &\leq 2|P_t^{(r)}w - w_0| + 4t_0 \varepsilon(w, r) + 2t_0 \varepsilon(w_0, r). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $r$  vers l'infini, on a donc  $|P_s P_tw - P_{s+t}w| \leq 2|P_tw - w_0|$ , pour tout  $w_0 \in D$ . Comme  $D$  est dense, on peut trouver  $w_0$  arbitrairement proche de  $P_tw$ , et on a bien montré  $|P_s P_tw - P_{s+t}w| = 0$ , ce qui montre la propriété de semi-groupe sur  $D$ . On en déduit la propriété de semi-groupe sur  $H$  par densité de  $D$ .

On a donc montré que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe contractant. Il faut encore montrer qu'il est fortement continu. Pour cela, on fixe  $w \in D$ , et pour tout  $r \in ]0, \infty[$ , on remarque que  $t \mapsto P_t^{(r)}w$  est une fonction continue telle que  $P_0^{(r)}w = w$ . Or par (III.10), la fonction  $t \mapsto P_tw$  est limite uniforme de fonction continue : elle est donc également continue, ce qui implique que  $P_0w = w$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} |P_tw - w| = 0$ . On note ensuite  $H_0 := \{v \in H : \lim_{t \rightarrow 0} |P_tv - v| = 0\}$ . On vient de montrer que  $D \subset H_0$ . Par ailleurs, la proposition III.1.5 (i), page 88, implique que  $H_0$  est fermé. Comme  $D$  est dense dans  $H$ , on en déduit que  $H_0 = H$ , ce qui prouve que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est fortement continu.

On montre ensuite les résolvantes associées à  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sont bien les  $U_p$ . Pour cela on fixe  $p \in ]0, \infty[$ ,  $w \in D$  et  $\phi \in H'$ . On rappelle que la notation  $U_p^{(r)}$  pour la  $p$ -résolvante de  $(P_t^{(r)})_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Par le lemme III.1.12 (ii), on a

$$\phi(U_p^{(r)}w) = \int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} \phi(P_t^{(r)}w) . \quad (\text{III.11})$$

Or (III.7) implique que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(U_p^{(r)}w) = \phi(U_pw)$ . D'autre part (III.10) implique que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(P_t^{(r)}w) = \phi(P_tw)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Par convergence dominée, en passant à la limite dans (III.11), on obtient

$$\forall w \in D, \phi(U_pw) = \int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} \phi(P_tw) .$$

Par densité de  $D$  dans  $H$ , par uniforme continuité de  $v \mapsto \phi(U_p v)$  et de  $v \mapsto \phi(P_t v)$  et par convergence dominée, on en déduit que

$$\forall v \in H, \quad \phi(U_p v) = \int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} \phi(P_t v).$$

Or  $\int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} \phi(P_t v) = \phi\left(\int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} P_t v\right)$ , par le lemme III.1.12 (ii), page 92. Donc pour toute forme  $\phi \in H'$ ,  $\phi(U_p v) = \phi\left(\int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} P_t v\right)$ . Le théorème de Hahn-Banach implique alors que  $U_p v = \int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} P_t v$ . Comme cette égalité est vraie pour tout  $v \in H$  et tout  $p \in ]0, \infty[$ , cela montre que la famille de résolvantes associée à  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est bien  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ .

Il reste à montrer l'unicité du semi-groupe. Supposons que  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  soit un semi-groupe contractant fortement continu dont la famille de résolvantes est  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ . Alors, le lemme III.1.12 (ii) implique que pour tous  $\phi \in H'$ ,  $p \in ]0, \infty[$  et  $v \in H$ , on a  $\int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} \phi(P_t v) = \phi(U_p v) = \int_{\mathbb{R}_+} dt e^{-pt} \phi(Q_t v)$ . La continuité de  $t \mapsto \phi(P_t v)$  et de  $t \mapsto \phi(Q_t v)$  et l'injectivité de la transformée de Laplace impliquent que  $\phi(P_t v) = \phi(Q_t v)$ . Comme cela est vrai pour tout  $\phi \in H'$ , Hahn-Banach implique que  $P_t v = Q_t v$ . Puisque cela est vérifié pour tout  $v \in H$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on en déduit l'unicité. ■

### III.1.e Générateur infinitésimaux.

**Définition III.1.17** (*Générateur d'un semi-groupe*) Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe d'opérateurs bornés. On définit son *générateur infinitésimal* comme la fonction  $A: D_A \rightarrow H$ ,  $D_A \subset H$ , qui est donnée par

$$(v \in D_A \text{ et } w = Av) \iff \left( \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \left| \frac{1}{t} (P_t v - v) - w \right| = 0 \right).$$

Autrement dit,  $v \in D_A$  si  $t \mapsto P_t v$  est dérivable en  $0+$  de dérivée  $Av$ . On remarque que

$$D_A \subset H_0 = \left\{ v \in H : \lim_{t \rightarrow 0} |P_t v - v| = 0 \right\}.$$

Clairement,  $D_A$  est un sous-espace de  $H$  (pas nécessairement fermé) et  $A$  est linéaire (pas nécessairement continu). □

**Lemme III.1.18** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe contractant fortement continu de générateur  $A: D_A \rightarrow H$ . Alors, pour tout  $v \in D_A$ ,  $t \mapsto P_t v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  dans  $H$  et  $\frac{d}{dt} P_t v = AP_t v = P_t Av$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Cela implique que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P_t(D_A) \subset D_A, \quad P_t A = AP_t \text{ sur } D_A \tag{III.12}$$

et

$$\forall v \in D_A, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P_t v - v = \int_0^t P_s Av ds = \int_0^t AP_s v ds. \tag{III.13}$$

**Preuve :** on fixe  $v \in D_A$  et on remarque que la propriété de semi-groupe et la contractivité impliquent que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  fixé, on a

$$\left| \frac{1}{s} (P_{s+t} v - P_t v) - P_t Av \right| = \left| \frac{1}{s} (P_t P_s v - P_t v) - P_t Av \right| = \left| P_t \left( \frac{1}{s} (P_s v - v) - Av \right) \right| \leq \left| \frac{1}{s} (P_s v - v) - Av \right| \longrightarrow 0$$

lorsque  $s \downarrow 0$ . Cela montre que  $\frac{d^+}{dt} P_t v = P_t Av$  et aussi que  $P_t v \in D_A$  et que  $AP_t v = \frac{d^+}{dt} P_t v$ , ce qui entraîne (III.12). Montrons ensuite que  $t \mapsto P_t v$  est dérivable à gauche : soient  $t > s > 0$  et  $v \in D_A$ . On a

$$\left| \frac{1}{s} (P_t v - P_{t-s} v) - P_t Av \right| \leq \left| \frac{1}{s} (P_t v - P_{t-s} v) - P_{t-s} Av \right| + |P_{t-s} Av - P_t Av|$$

$$\begin{aligned} &\leq |P_{t-s}\left(\frac{1}{s}(P_sv-v)-Av\right)| + |P_{t-s}(Av-P_sAv)| \\ &\leq \left|\frac{1}{s}(P_sv-v)-Av\right| + |Av-P_sAv| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque  $s \downarrow 0$ . On voit donc que  $\frac{d^-}{dt}P_tv = P_tAv = \frac{d^+}{dt}P_tv$  et donc  $t \mapsto P_tv$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  dans  $H$ . On peut appliquer la proposition III.1.3 (iv) (page 87) à  $v_t := P_tv$  pour en déduire (III.13). ■

**Proposition III.1.19** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe contractant fortement continu de générateur  $A: D_A \rightarrow H$ . Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on note  $U_p = \int_0^\infty e^{-pt}P_t dt$ , la famille de résolvantes associées (définie au théorème III.1.13 page 93). Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,  $U_p(H) = D_A$  et donc  $\overline{D_A} = H$ .

(ii) Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on a

$$\forall v \in D_A, \quad U_p(p\text{Id} - A)v = v \quad \text{et} \quad \forall v \in H, \quad (p\text{Id} - A)U_p v = v.$$

(iii) Pour tout  $v \in D_A$ , on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} p(pU_p v - v) = Av$  dans  $H$ .

**Preuve :** fixons  $v \in H$  et  $p \in ]0, \infty[$ . On pose  $w := U_p v$ . Par le lemme III.1.1 (ii), page 86, on a donc

$$\begin{aligned} P_tw &= \int_0^\infty e^{-ps}P_tP_sv ds = \int_0^\infty e^{-ps}P_{t+s}v ds = e^{pt} \int_t^\infty e^{-ps}P_sv ds \\ &= w + (e^{pt} - 1)w - e^{pt} \int_0^t e^{-ps}P_sv ds \\ &= w + ptw + (e^{pt} - 1 - pt)w - \frac{1}{p}(e^{pt} - 1)v - e^{pt} \int_0^t e^{-ps}(P_sv - v) ds \\ &= w + ptw - tv + (e^{pt} - 1 - pt)w - \frac{1}{p}(e^{pt} - 1 - pt)v - te^{pt} \int_0^1 e^{-s}(P_{st}v - v) ds \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left| \frac{1}{t}(P_tw - w) - pw + v \right| \leq \frac{1}{t}(e^{pt} - 1 - pt)|w| + \frac{1}{tp}(e^{pt} - 1 - pt)|v| + e^{pt} \int_0^1 e^{-s}|P_{st}v - v| ds \longrightarrow 0$$

lorsque  $t \downarrow 0$ , par convergence dominée pour le dernier terme de l'inégalité. Cela montre donc que  $U_p(H) \subset D_A$  et que pour tout  $v \in H$ ,  $AU_pv = pU_pv - v$ , c'est-à-dire  $(p\text{Id} - A)U_pv = v$ . On a montré une partie de (i) et de (ii).

Montrons (iii) : soit  $v \in D_A$ . Comme  $\int_0^\infty pe^{pt} dt = 1$ , on observe que

$$pU_pv - v = \int_0^\infty dt pe^{-pt}(P_tv - v) = \int_0^\infty ds e^{-s}(P_{s/p}v - v).$$

On a donc

$$p(pU_pv - v) - Av = \int_0^\infty ds se^{-s} \left( \frac{p}{s}(P_{s/p}v - v) - Av \right)$$

puisque  $\int_0^\infty ds se^{-s} = 1$ . Par (III.13), au lemme III.1.18, page 97, combiné à l'inégalité triangulaire au lemme III.1.1 (i) (page 86) et au fait que le semi-groupe soit contractant, implique que

$$|P_{s/p}v - v| \leq \int_0^{s/p} dr |P_r Av| \leq \frac{s}{p} |Av|.$$

Donc

$$\left| se^{-s} \left( \frac{p}{s} (P_{s/p}v - v) \right) - Av \right| \leq 2se^{-s} |Av|.$$

Le membre de droite est intégrable en  $s$  sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{p}{s} (P_{s/p}v - v) \right| = 0$ . Donc par convergence dominée on obtient (iii).

On termine la preuve de (i) et de (ii). Soit  $v \in D_A$ . Pour tout  $q \in ]0, \infty[$ , on pose

$$v_q := q(qU_qv - v) - Av.$$

Le point (iii) montre que  $\lim_{q \rightarrow \infty} |v_q| = 0$ . On fixe  $p \in ]0, \infty[$ . Comme  $pU_p$  est contractant, on a aussi  $\lim_{q \rightarrow \infty} |U_p v_q| = 0$ . Or l'équation de résolvante implique que

$$\begin{aligned} U_p v_q &= \frac{q^2}{q-p} (q-p) U_p U_q v - q U_p v - U_p A v \\ &= \frac{q^2}{q-p} (U_p v - U_q v) - q U_p v - U_p A v \\ &= \frac{q}{q-p} p U_p v - \frac{q}{q-p} q U_q v - U_p A v \end{aligned}$$

Or le théorème III.1.13, page 93, montre que les résolvantes  $U_q$  sont fortement continues donc  $\lim_{q \rightarrow \infty} q U_q v = v$  dans  $H$  et on déduit de ce qui précède que  $\lim_{q \rightarrow \infty} U_p v_q = p U_p v - v - U_p A v$  dans  $H$ . Or  $\lim_{q \rightarrow \infty} |U_p v_q| = 0$ . Donc  $v = U_p(pv - Av)$ , ce qui complète (ii). Cela montre aussi que  $v \in U_p(H)$ . Comme on a montré que  $U_p(H) \subset D_A$  on a bien  $U_p(H) = D_A$ . Comme les résolvantes  $U_p$  sont fortement continues, la proposition III.1.11, page 91, entraîne que  $\overline{D_A} = \overline{U_p(H)} = H$ , ce qui termine la preuve de la proposition. ■

On peut également introduire le générateur infinitésimal d'une famille de résolvantes de la manière suivante.

**Définition III.1.20** (*Générateur d'un résolvante*) Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , une famille de résolvantes sur  $H$ . On définit son générateur infinitésimal comme la fonction  $A : D_A \rightarrow H$ ,  $D_A \subset H$ , donnée par

$$(v \in D_A \text{ et } w = Av) \iff \left( \lim_{p \rightarrow \infty} |p(pU_p v - v) - w| \right).$$

On remarque que

$$D_A \subset H_0 = \{v \in H : \lim_{p \rightarrow \infty} |pU_p v - v| = 0\}.$$

Clairement,  $D_A$  est un sous-espace de  $H$  (pas nécessairement fermé) et  $A$  est linéaire (pas nécessairement continu). □

**Proposition III.1.21** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe contractant fortement continu. Soit  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , une famille de résolvantes contractante et fortement continue. On les suppose associées :  $U_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t dt$ ,  $p \in ]0, \infty[$ . Alors, leur générateur est le même.

**Preuve :** notons  $A_0 : D_{A_0} \rightarrow H$  le générateur de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $A_1 : D_{A_1} \rightarrow H$  le générateur de  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ . La proposition III.1.19 (iii) qui précède implique que  $D_{A_0} \subset D_{A_1}$  et que  $A_{1|D_{A_0}} = A_0$ .

Soit  $v \in D_{A_1}$ . Pour tout  $q \in ]0, \infty[$ , on pose  $v_q := q(qU_q v - v) - A_1 v$ . On reprend la fin de la preuve de la proposition III.1.19 précédente : par définition de  $A_1$ ,  $\lim_{q \rightarrow \infty} |v_q| = 0$ . On fixe  $p \in ]0, \infty[$ . Comme  $pU_p$  est contractant, on a aussi  $\lim_{q \rightarrow \infty} |U_p v_q| = 0$ . Or l'équation de résolvante implique la limite suivante dans  $H$  :

$$U_p v_q = \frac{q}{q-p} p U_p v - \frac{q}{q-p} q U_q v - U_p A_1 v \xrightarrow[q \rightarrow \infty]{} p U_p v - v - U_p A_1 v$$

Donc  $v = U_p(pv - A_1 v)$ . Cela montre que  $v \in U_p(H)$ . Or la proposition III.1.19 (i) implique que  $U_p(H) = D_{A_0}$ . Cela montre que  $D_{A_1} \subset D_{A_0}$  et par ce qui précède  $D_{A_1} = D_{A_0}$  et  $A_1 = A_0$ .  $\blacksquare$

Le théorème suivant montre que les semi-groupes et les familles de résolvantes contractants fortement continus sont caractérisés par leur générateur infinitésimal.

**Théorème III.1.22 (Caractérisation par le générateur)** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soient  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , deux semi-groupes contractants fortement continus. Soient  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  et  $(V_p)_{p \in ]0, \infty[}$  deux familles de résolvantes contractantes fortement continues. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Si  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  définissent la même famille de résolvantes, alors  $P_t = Q_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .
- (ii) Si  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ont le même générateur infinitésimal, alors  $P_t = Q_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .
- (iii) Si  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  et  $(V_p)_{p \in ]0, \infty[}$  ont le même générateur infinitésimal, alors  $U_p = V_p$ ,  $p \in ]0, \infty[$ .

**Preuve :** celle de (i) est simple. On note  $(W_p)_{p \in ]0, \infty[}$  la famille de résolvantes associée à  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soient  $v \in H$  et  $\phi \in H'$ . Par le lemme III.1.1 (ii), page 86, on a pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,

$$\int_0^\infty e^{-pt} \phi(P_t v) dt = \phi \left( \int_0^\infty e^{-pt} P_t v dt \right) = \phi(W_p v) = \phi \left( \int_0^\infty e^{-pt} Q_t v dt \right) = \int_0^\infty e^{-pt} \phi(Q_t v) dt .$$

L'injectivité de la transformée de Laplace pour les mesures finies sur  $\mathbb{R}_+$  implique que pour Lebesgue-presque tout  $t \in bR_+$ ,  $\phi(P_t v) = \phi(Q_t v)$ . Or le lemme III.1.12 (i), page 92, et la continuité de  $\phi$ , impliquent que  $t \mapsto \phi(P_t v)$  et  $t \mapsto \phi(Q_t v)$  sont continues. Donc  $\phi(P_t v) = \phi(Q_t v)$ , pour toute  $\phi \in H'$ . Par Hahn-Banach, on obtient  $P_t v = Q_t v$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $v \in H$ .

Montrons (ii). Notons  $A : D_A \rightarrow H$ , le générateur commun de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et de  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note respectivement  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  et  $(V_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , les familles de résolvantes associées. On fixe  $v \in H$  et  $p \in ]0, \infty[$ . La proposition III.1.19 (ii) appliquée à  $V_p$  implique  $(p\text{Id} - A)V_p v = v$  et donc  $U_p(p\text{Id} - A)V_p v = U_p v$ . Or la proposition III.1.19 (i) appliquée à  $V_p$  affirme que  $V_p v \in D_A$ . Si on pose  $w := V_p w$ , la proposition III.1.19 (ii) appliquée à  $U_p$  implique ensuite que  $U_p(p\text{Id} - A)w = w$ . On en déduit donc que  $V_p v = w = U_p v$ . Donc  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  définissent la même famille de résolvantes et le (i) implique que ces semi-groupes sont égaux.

Montrons (iii). Notons  $A : D_A \rightarrow H$ , le générateur commun de  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  et de  $(V_p)_{p \in ]0, \infty[}$ . Par le théorème III.1.16 de Hille-Yosida 2, page 94, il existe deux semi-groupes  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  contractants fortement continus tels que  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est la famille de résolvantes de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(V_p)_{p \in ]0, \infty[}$  celle  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . La proposition III.1.21 qui précède montre alors que  $A : D_A \rightarrow H$  est le générateur commun de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et de  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ; le point (ii) implique ensuite que ces semi-groupes sont égaux, ce qui entraîne que les résolvantes associées soient égales.  $\blacksquare$

### III.1.f Des générateurs aux semi-groupes et aux résolvantes.

Le théorème III.1.22 montre que les semi-groupes contractants et fortement continus sont caractérisés par leur générateur infinitésimal. Le but de cette section est de détailler les propriétés nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe contractant fortement continu. On introduit d'abord la notion d'opérateur dissipatif et celle d'opérateur fermé.

**Définition III.1.23 (Opérateurs dissipatifs, opérateurs fermés)** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $A : D_A \rightarrow H$ , un opérateur.

(a) L'opérateur  $A$  est dit *dissipatif* si

$$\forall p \in ]0, \infty[ \quad \forall v \in D_A, \quad |pv - Av| \geq p|v| .$$

On remarque que cela implique que  $p\text{Id} - A: D_A \rightarrow H$  est injectif.

(b) L'opérateur  $A: D_A \rightarrow H$  est dit *fermé* si pour toute suite  $v_n \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n =: v \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Av_n =: w ,$$

alors  $v \in D_A$  et  $w = Av$ . Autrement dit  $A$  est fermé ssi son graphe  $\{(v, Av); v \in D_A\}$  est un fermé de  $H \times H$  muni de la topologie produit.  $\square$

**Lemme III.1.24** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $A: D_A \rightarrow H$ , un opérateur dissipatif. Soit  $p \in ]0, \infty[$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) L'opérateur est fermé.

(b) Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,  $(p\text{Id} - A)(D_A)$  est un sous-espace fermé de  $H$ .

(c) Il existe  $p_0 \in ]0, \infty[$  tel que  $(p_0\text{Id} - A)(D_A)$  est un sous-espace fermé de  $H$ .

**Preuve :** supposons (a). Soit  $p \in ]0, \infty[$ . Soit  $v_n \in D_A$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $w \in H$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (p\text{Id} - A)v_n = w$ . On pose  $w_n := (p\text{Id} - A)v_n$ . Puisque  $A$  est dissipatif, on vérifie que  $p|v_n - v_m| \leq |w_n - w_m|$ , ce qui implique que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $H$  et donc converge vers  $v \in H$ . On en déduit donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Av_n = pv - w$ . Comme on a supposé que  $A$  est fermé, on a  $Av = pv - w$  et donc  $w \in (p\text{Id} - A)(D_A)$ , ce qui montre (b).

Clairement (b) implique (c). Montrons que (c)  $\implies$  (a) : soit  $v_n \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n =: v$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} Av_n =: w$ . Comme  $(p_0\text{Id} - A)(D_A)$  est fermé, il existe  $u \in D_A$  tel que  $p_0v - w = p_0u - Au$ . Comme  $A$  est dissipatif, on a aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$|p_0v_n - Av_n - (p_0u - Au)| = |p_0(v_n - u) - A(v_n - u)| \geq p_0|v_n - u| .$$

Donc, en passant à la limite,  $u = v$  : on en déduit que  $v \in D_A$  et que  $w = Au = Av$ , ce qui implique que  $A$  est fermé.  $\blacksquare$

Le théorème suivant est troisième résultat de la théorie de Hille-Yosida. Il exprime des conditions nécessaires et suffisantes sur un opérateur pour qu'il soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe contractant et fortement continu.

**Théorème III.1.25 (Hille-Yosida 3 : des générateurs aux semi-groupes)** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $H$ . Alors, un opérateur  $A: D_A \rightarrow H$ , est le générateur d'un semi-groupe contractant fortement continu si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes :

(a)  $D_A$  est dense dans  $H$ .

(b)  $A$  est dissipatif.

(c) Il existe  $p_0 \in ]0, \infty[$ , tel que  $(p_0\text{Id} - A)(D_A) = H$ .

De plus, dans ce cas, l'opérateur  $A$  est fermé.

**Preuve :** supposons d'abord que  $A : D_A \rightarrow H$  soit le générateur d'un semi-groupe contractant et fortement continu  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  dont on note  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$ , la famille de résolvantes (qui est contractante et fortement continue). La proposition III.1.19 (page 98) implique (a) et (c). De plus, pour tout  $v \in D_A$ , et tout  $p \in ]0, \infty[$ , il existe  $w \in H$  tel que  $v = U_p w$ , et donc la même proposition III.1.19  $w = p v - A v$ . Comme  $|p U_p w| \leq |w|$ , on a  $|p v - A v| \geq p |v|$ , ce qui montre (b).

Réiproquement, on suppose (a), (b) et (c). On note  $\Lambda := \{p \in ]0, \infty[ : (p \text{Id} - A)(D_A) = H\}$ . L'hypothèse (c) signifie que  $\Lambda \neq \emptyset$ . Soit  $p \in \Lambda$ ; comme  $A$  est dissipatif,  $p \text{Id} - A$  est injectif et donc  $p \text{Id} - A$  est une bijection de  $D_A$  sur  $H$ : on note  $U_p : H \rightarrow D_A$ , l'opérateur réciproque. Cet opérateur est borné car le caractère dissipatif de  $A$  implique que  $|p U_p v| \leq |v|$ , pour tout  $v \in H$ . De plus, on voit que

$$\forall p \in \Lambda, \quad \forall w \in D_A, \quad U_p(p \text{Id} - A)w = w.$$

Soient  $p, q \in \Lambda$ . Soit  $w \in D_A$ . On a

$$U_p(q \text{Id} - A)w = U_p((q-p)\text{Id} + p \text{Id} - A)w = (q-p)U_p w + U_p(p \text{Id} - A)w = (q-p)U_p w + w$$

Soit  $v \in H$ ; en appliquant l'égalité précédente à  $w := U_q v \in D_A$ , on obtient  $U_p(q \text{Id} - A)U_q v = (q-p)U_p U_q v + U_q v$ , ce qui montre

$$\forall p, q \in \Lambda, \quad U_p - U_q = (q-p)U_p U_q, \tag{III.14}$$

c'est-à-dire que les opérateurs  $U_p$ ,  $p \in \Lambda$ , satisfont les équations de résolvantes.

Montrons que  $\Lambda = ]0, \infty[$ . Soit  $p \in \Lambda$  et soit  $r \in ]0, \infty[$  tel que  $|1-r/p| < 1$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme d'opérateur bornée sur  $L(H)$  associée à  $|\cdot|$ . Comme  $A$  est dissipatif, on a vu que  $\|U_p\| \leq 1/p$  et on remarque alors que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |p-r|^n \|U_p^{n+1}\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|r-p|^n}{p^{n+1}} < \infty.$$

On pose alors  $V = \sum_{n \in \mathbb{N}} (p-r)^n U_p^{n+1}$  qui est un opérateur borné qui satisfait  $V = U_p + (r-p)U_p V$ . Par conséquent, pour tout  $v \in H$ , on a  $(p \text{Id} - A)Vv = v + (r-p)Vv$ , c'est-à-dire que  $(r \text{Id} - A)Vv = v$ , pour tout  $v \in H$ . On a donc montré que si  $p \in \Lambda$ , alors  $]0, 2p[\subset \Lambda$ . Comme  $\Lambda \neq \emptyset$ , cela implique facilement que  $\Lambda = ]0, \infty[$ .

Cela montre que les  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  sont une famille de résolvantes contractantes. On a également montré que  $(p \text{Id} - A)(D_A) = H$  pour tout  $p \in ]0, \infty[$ . Montrons que les résolvantes sont fortement continues : soit  $v \in D_A$ ; on a  $U_p(p \text{Id} - A)v = v$ . Donc

$$|p U_p v - v| = \frac{1}{p} |p U_p A v| \leq \frac{1}{p} |A v| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0.$$

Cela montre que  $D_A \subset H_0 := \{v \in H : \lim_{p \rightarrow \infty} p U_p v = v\}$ . Or la proposition III.1.11 (i), page 91 implique que  $H_0$  est fermé. Par l'hypothèse (a), on en déduit que  $H_0 = H$ , ce qui montre que la famille de résolvantes contractante  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est fortement continue.

Le théorème III.1.16 de Hille-Yosida 2 (des résolvantes vers le semi-groupe, page 94) implique l'existence d'un unique semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  contractant fortement continu dont les  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  sont les résolvantes. On note  $A_0 : D_{A_0} \rightarrow H$  le générateur infinitésimal de  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  (voir la définition III.1.20, page 99). La proposition III.1.21, page 99, implique que  $A_0$  est également le générateur de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit  $v \in D_A$ . Comme  $U_p(p \text{Id} - A)v = v$ , on a

$$|p(p U_p v - v) - A v| = |p U_p A v - A v| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$$

par la forte continuité des  $U_p$ . Cela montre que

$$D_A \subset D_{A_0} \quad \text{et} \quad A_{0|D_A} = A. \tag{III.15}$$

La proposition III.1.19 (i) (page 98) implique que  $U_p(H) = D_{A_0}$ . Or on a  $U_p(H) = D_A$ . Cela montre que  $D_{A_0} = D_A$  et (III.15) implique que  $A$  est le générateur de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . ■

L'hypothèse (c) du théorème III.1.25 est difficile à vérifier directement car en général, il est difficile de connaître explicitement le domaine d'un générateur infinitésimal. La plupart du temps, on connaît le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur un sous-espace qui, s'il est suffisamment riche, caractérise le générateur. Nous donnons dans la suite un énoncé plus pratique tenant compte de cette difficulté. Mais tout d'abord montrons une caractéristique des générateurs infinitésimaux qui est exploitée plus loin pour les processus Markoviens et qui permet parfois de calculer précisément le domaine d'un générateur.

**Lemme III.1.26** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soient  $D_A, D_{A_1}$ , des sous-espaces vectoriels de  $H$ . Soient  $A: D_A \rightarrow H$  et  $A_1: D_{A_1} \rightarrow H$ , des opérateurs. On fait les hypothèses suivantes.

- (a)  $A: D_A \rightarrow H$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe contractant et fortement continu.
- (b)  $D_A \subset D_{A_1}$  et  $A_1|_{D_A} = A$ .
- (c) Si  $v \in D_{A_1}$  est tel que  $A_1v = v$ , alors  $v = 0$ .

Alors,  $D_A = D_{A_1}$  et donc  $A = A_1$ .

**Preuve :** on note  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  la famille de résolvantes contractante et fortement continue associée au semi-groupe dont  $A$  est le générateur infinitésimal. soit  $u \in D_{A_1}$ . On pose  $v = u - A_1u$  et  $w = U_1v$ . La proposition III.1.19 (i) (page 98) implique que  $U_1(H) = D_A$ , donc  $w \in D_A$  et donc  $w \in D_{A_1}$ . On a alors

$$w - A_1w = w - Aw = (\text{Id} - A)U_1v = v = u - A_1u.$$

Donc  $A_1(u - w) = u - w$  et l'hypothèse (c) implique que  $u = w$  et donc que  $u \in D_A$ . On a donc  $D_{A_1} = D_A$ , ce qui permet de conclure. ■

Pour une version plus pratique du théorème III.1.25 de Hille-Yosida 3, on introduit les notions suivantes.

**Définition III.1.27** (*Opérateur fermable, fermeture*) Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $A: D_A \rightarrow H$ , un opérateur.

- (a)  $A$  est dit *fermable* si pour toute suite  $v_n \in D_A$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} Av_n =: w$ , on a  $w = 0$ .
- (b) On suppose  $A$  fermable. Sa *fermeture* est l'opérateur  $\bar{A}: D_{\bar{A}} \rightarrow H$  donné par

$$(v \in D_{\bar{A}} \text{ et } w = \bar{A}v) \iff (\text{il existe } v_n \in D_A, n \in \mathbb{N}, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} Av_n = w.)$$

Puisque  $A$  est fermable, à  $v \in H$  n'est associé au plus une valeur  $\bar{A}v$ . On vérifie facilement que  $D_{\bar{A}}$  est un sous-espace vectoriel (pas nécessairement fermé) et que  $\bar{A}$  est un opérateur fermé, pas nécessairement continu. □

**Remarque III.1.28** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $A: D_A \rightarrow H$ , un opérateur. On note  $\Gamma := \{(v, Av); v \in D_A\}$  son graphe dans  $H \times H$ . On vérifie facilement les faits suivants.

- (1) L'adhérence  $\bar{\Gamma}$  de  $\Gamma$  dans  $H \times H$  est le graphe d'un opérateur si et seulement si  $A$  est fermable.

- (2) Si  $A$  est fermable,  $\bar{\Gamma} = \{(v, \bar{A}v) ; v \in D_{\bar{A}}\}$  où  $\bar{A} : D_{\bar{A}} \rightarrow H$  est la fermeture de  $A$ .
- (3) Soit  $A_1 : D_{A_1} \rightarrow H$ , un opérateur étendant  $A$ , c'est-à-dire que  $D_A \subset D_{A_1}$  et  $A_{1|D_A} = A$ . Si  $A_1$  est fermé alors,  $A$  est fermable et  $A_1$  étend  $\bar{A}$ , c'est-à-dire que  $D_{\bar{A}} \subset D_{A_1}$  et  $A_{1|D_{\bar{A}}} = \bar{A}$ .

Autrement dit, la fermeture d'un opérateur fermable est le plus petit (au sens de l'inclusion des graphes) opérateur fermé étendant  $A$ .  $\square$

**Théorème III.1.29 (Hille-Yosida 3bis : des opérateurs fermables aux semi-groupes)** Soit  $H$ , un Banach de norme  $|\cdot|$ . Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $A : D_A \rightarrow H$ , un opérateur. On fait les hypothèses suivantes.

- (a)  $D_A$  est dense dans  $H$ .
- (b)  $A$  est dissipatif.
- (c) Il existe  $p_0 \in ]0, \infty[$ , tel que  $(p_0 \text{Id} - A)(D_A)$  soit dense dans  $H$ .

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $A$  est fermable et sa fermeture  $\bar{A} : D_{\bar{A}} \rightarrow H$  est dissipative.
- (ii)  $\bar{A} : D_{\bar{A}} \rightarrow H$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe contractant fortement continu.

**Preuve :** soit  $v_n \in D_A$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} Av_n =: w$ . Soit  $u \in D_A$ . Puisque  $A$  est dissipatif, pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,

$$|pv_n + u - Av_n - \frac{1}{p}Au| = |pv_n + u - A(v_n + \frac{1}{p}u)| \geq |pv_n + u|.$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient  $|u - w - \frac{1}{p}Au| \geq |u|$ . Lorsque  $p \rightarrow \infty$ , cela entraîne  $|u - w| \geq |u|$ . Comme  $D_A$  est dense dans  $H$ , cela implique facilement que  $w = 0$ . Cela montre que  $A$  est fermable. On vérifie ensuite facilement que les inégalités de dissipation passent à la limite : la fermeture de  $A$  est donc dissipative, ce qui prouve (i).

On pose  $\mathcal{R} := (p_0 \text{Id} - \bar{A})(D_{\bar{A}})$ . On a donc  $(p_0 \text{Id} - A)(D_A) \subset \mathcal{R}$  et par hypothèse le sous-espace vectoriel  $\mathcal{R}$  est dense dans  $H$ . Montrons que  $\mathcal{R}$  est fermé. Soient  $w_n \in \mathcal{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n =: w$ . Par définition de  $\mathcal{R}$ , il existe  $v_n \in D_{\bar{A}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tels que  $w_n = p_0 v_n - \bar{A}v_n$ . L'inégalité de dissipation implique que

$$|w_n - w_m| = |p(v_n - v_m) - \bar{A}(v_n - v_m)| \geq p_0 |v_n - v_m|;$$

Cela implique que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy donc convergente ; on note  $v$  sa limite. On a donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}v_n = p_0 - w$ . Comme  $\bar{A}$  est fermé, on a  $v \in D_{\bar{A}}$  et  $p_0 v - \bar{A}v = w$ , et donc  $w \in \mathcal{R}$ .

Le sous espace  $\mathcal{R}$  est donc dense et fermé donc  $\mathcal{R} = H$ , c'est-à-dire  $(p_0 \text{Id} - \bar{A})(D_{\bar{A}}) = H$ . L'opérateur satisfait les hypothèses du théorème III.1.25, page 101, qui permet de conclure.  $\blacksquare$

## III.2 Applications aux semi-groupes de Feller-Dynkin.

### III.2.a Forte continuité des semi-groupes de Feller-Dynkin.

On rappelle ici la définition d'un semi-groupe de Feller-Dynkin.

**Définition III.2.1** Soit  $E$ , un espace LCBD. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , soit  $P_t : C_0(E) \rightarrow C_0(E)$ , une application linéaire. C'est un *semi-groupe de Feller-Dynkin* si les conditions suivantes sont satisfaites.

- (a) *Semi-groupe* : pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P_{s+t} = P_s P_t$ .
- (b) *Positivité et contractivité* : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour toute fonction  $f \in C_0(E)$ , on a

$$0 \leq f \leq 1 \implies 0 \leq P_t f \leq 1 .$$

- (c) *Continuité faible* : pour toute fonction  $f \in C_0(E)$  on a

$$\forall x \in E, \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x) ,$$

ce qui implique que  $P_0 = \text{Id}$ . □

On rappelle la proposition II.1.11, page 47, qui montre que tout semi-groupe de Feller-Dynkin est le semi-groupe associé à des noyaux sous-Markoviens. On rappelle que la norme du supremum sur  $C_0(E)$  est notée  $\|\cdot\|_\infty$  et on rappelle enfin que  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach. La proposition suivante montre que les semi-groupes de Feller-Dynkin sont contractants fortement continus sur l'espace de Banach, ce qui permet de leur appliquer les résultats précédents de la théorie de Hille-Yosida.

**Proposition III.2.2** Soit  $E$ , un espace LCBD. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin. Alors, c'est un semi-groupe d'opérateurs bornés de  $L(C_0(E))$  qui est contractant et fortement continu, c'est-à-dire que pour toute fonction  $f \in C_0(E)$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0 .$$

**Preuve :** soit  $(p_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E}$ , les noyaux sous-Markoviens associés à  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , c'est-à-dire  $P_t f(x) = \int_E p_t(x, dy) f(y)$ . Cela permet d'étendre les opérateurs  $P_t$  à l'espace  $L_b(E)$ . Il est clair que  $|P_t f(x)| \leq \|f\|_\infty p_t(x, E) \leq \|f\|_\infty$  car les noyaux sont sous-Markoviens. Donc  $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ .

La propriété de continuité faible de Feller-Dynkin (définition III.2.1 (c)) implique que pour toute  $f \in C_0(E)$  et tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto P_t f(x)$  est càd. Par conséquent, pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , pour tout  $f \in C_0(E)$ , il y a un sens à poser

$$\forall x \in E, \quad U_p f(x) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt .$$

Le lemme II.6.5, page 79 (qui est une conséquence du théorème de convergence dominée) permet d'affirmer que  $U_p f \in C_0(E)$ , que  $U_p : C_0(E) \rightarrow C_0(E)$  est linéaire, que  $\|p U_p f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  et que

$$\forall f \in C_0(E), \quad \forall x \in E, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p U_p f(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} P_{s/p} f(x) dt = f(x) . \quad (\text{III.16})$$

Un calcul élémentaire entraîne ensuite que

$$\forall p, q \in ]0, \infty[, \quad \forall f \in C_0(E), \quad \forall x \in E, \quad U_p f(x) - U_q f(x) = (q-p) U_p (U_q f)(x) .$$

Autrement dit  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est une famille de résolvantes contractante. On pose ensuite

$$H_0 := \{f \in C_0(E) : \lim_{p \rightarrow \infty} \|p U_p f - f\|_\infty = 0\} \quad \text{et} \quad D := U_1(C_0(E)) .$$

La proposition III.1.11, page 91 implique que  $H_0$  est un fermé de  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ , que  $D = U_p(C_0(E))$ , pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , et que l'adhérence de  $D$  pour  $\|\cdot\|_\infty$  est  $H_0$ . Soit  $\phi \in C_0(E)'$ , une forme linéaire continue. Le théorème de Riesz de représentation des formes continues montre qu'il existe une mesure signée  $\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow$

$\mathbb{R}$  telle que  $\phi(f) = \int_E f d\mu$ ,  $f \in C_0(E)$ . On note  $\mu_+$  et  $\mu_-$  respectivement les variations positive et négative de  $\mu$  : ce sont deux mesures positives de masse finie telles que  $\mu = \mu_+ - \mu_-$  et on a donc

$$\forall f \in C_0(E), \quad \phi(f) = \int_E f d\mu = \int_E f d\mu_+ - \int_E f d\mu_- .$$

Par (III.16) et par convergence dominée on a

$$\begin{aligned} \phi(pU_p f) &= \int_E pU_p f(x) \mu_+(dx) - \int_E pU_p f(x) \mu_-(dx) \\ &\xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \int_E f(x) \mu_+(dx) - \int_E f(x) \mu_-(dx) = \phi(f) . \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Supposons que  $\phi \in C_0(E)'$  soit telle que  $\phi(g) = 0$ , pour toute fonction  $g \in D$ . Comme  $U_p(C_0(E)) \subset D \subset H_0$ , pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on a pour toute fonction  $f \in C_0(E)$ ,  $\phi(pU_p f) = 0$ , et (III.17) implique que  $\phi(f) = 0$ , pour tout  $f \in C_0(E)$ , c'est-à-dire que  $\phi$  est nulle. Cela montre que  $D$ , et donc  $H_0$ , est dense dans  $C_0(E)$ . Or  $H_0$  est fermé donc  $H_0 = C_0(E)$  et donc la famille de résolvantes contractante  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  est fortement continue.

Le théorème III.1.16 de Hille-Yosida 2 (des résolvantes vers les semi-groupes, page 94), implique qu'il existe un unique semi-groupe contractant fortement continu  $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sur  $C_0(E)$  dont les résolvantes sont  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  : pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , pour toute  $f \in C_0(E)$  et tout  $x \in E$ ,

$$\int_0^\infty e^{-pt} Q_t f(x) dt = U_p f(x) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt$$

L'injectivité de la transformée de Laplace pour les mesures signées ainsi que la continuité à droite de  $t \mapsto P_t f(x)$  et de  $t \mapsto Q_t f(x)$  implique que  $P_t f(x) = Q_t f(x)$  et donc  $Q_t = P_t$ , ce qui permet de conclure. ■

### III.2.b Principe du maximum.

On reformule le théorème III.1.29 de Hille-Yosida (générateur vers semi-groupe) dans le contexte des opérateurs sur  $C_0(E)$  à l'aide du principe du maximum qui se définit comme suit.

**Définition III.2.3** (*Principe du maximum*) Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $D_A$ , un sous-espace vectoriel de  $C_0(E)$  et soit  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , un opérateur. Il satisfait le *principe du maximum* si pour toute fonction  $f \in D_A$  et tout  $x_0 \in E$  tels que  $\sup_{x \in E} f(x) = f(x_0) > 0$ , on a  $Af(x_0) \leq 0$ . □

Montrons d'abord le lemme suivant dû à Dynkin.

**Lemme III.2.4** (*Principe du maximum de Dynkin*) Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller-Dynkin. Soit  $A_1 : D_{A_1} \rightarrow C_0(E)$ , un opérateur prolongeant  $A$ . On suppose que  $A_1$  satisfait le principe du maximum. Alors,  $D_A = D_{A_1}$  et  $A = A_1$ .

**Preuve :** soit  $f \in D_{A_1}$  telle que  $A_1 f = f$ . Par le lemme III.1.26, page 103, il suffit de montrer que cela implique que  $f = 0$ . Soit  $(E_\partial, d)$ , un compactifié métrique habituel de  $E$ ;  $f$  se prolonge par continuité en  $\partial$  par  $f(\partial) = 0$ . Comme toute fonction continue sur un compact atteint ses extrema, il existe  $x_0 \in E_\partial$  tel que  $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ . Quitte à considérer  $-f$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} f(x) = f(x_0)$ . Si  $f \neq 0$ , alors  $f(x_0) > 0$ . Comme  $A_1$  satisfait le principe du maximum,  $A_1 f(x_0) \leq 0$ . Or  $A_1 f(x_0) = f(x_0) > 0$ , ce qui est absurde. On a donc  $f = 0$ . ■

On montre ensuite le lemme suivant.

**Lemme III.2.5** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $D_A$ , un sous-espace de  $C_0(E)$  et soit  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , un opérateur. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Si  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$  est le générateur d'un semi-groupe de Feller-Dynkin, il satisfait le principe du maximum.
- (ii) Si  $A$  satisfait le principe du maximum, alors il est dissipatif.

**Preuve :** montrons (i). On note  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , le semi-groupe dont  $A$  est le générateur. Soit  $f \in D_A$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto P_t f(x)$  est donc dérivable à droite en 0 et on a  $Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(P_t f(x) - f(x))$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\sup_{x \in E} f(x) = f(x_0) > 0$ . Comme  $P_t$  est associé aux noyaux sous-Markoviens  $p_t(x, dy)$ , on a  $P_t f(x_0) = \int_E p_t(x_0, dy) f(y) \leq p_t(x_0, E) f(x_0) \leq f(x_0)$ , ce qui implique que  $Af(x_0) \leq 0$ . Cela prouve (i).

Montrons (ii). On suppose que  $A$  satisfait le principe du maximum. Soit  $f \in D_A$ . Soit  $(E_\partial, d)$ , un compactifié métrique habituel de  $E$ ;  $f$  se prolonge par continuité en  $\partial$  par  $f(\partial) = 0$ . Comme toute fonction continue sur un compact atteint des extrema, il existe  $x_0 \in E_\partial$  tel que  $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ . On suppose d'abord que  $f(x_0) > 0$ , donc  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} f(x) = f(x_0)$ . Comme  $A$  satisfait le principe du maximum, on a donc pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,

$$p\|f\|_\infty = pf(x_0) \leq pf(x_0) - Af(x_0) = |pf(x_0) - Af(x_0)| \leq \|pf - Af\|_\infty$$

Si  $f(x_0) = -\|f\|_\infty < 0$ , on applique ce qui précède à  $-f$  et on obtient également que  $p\|f\|_\infty \leq \|pf - Af\|_\infty$ , pour tout  $p \in ]0, \infty[$ . Si  $f(x_0) = 0$ , alors  $f$  est nulle et l'inégalité précédente est triviale. Cela montre bien que  $A$  est dissipatif. ■

Le théorème suivant reformule le théorème III.1.25, page 101, dans le cas des semi-groupes de Feller-Dynkin.

**Théorème III.2.6** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $D_A$ , un sous-espace de  $C_0(E)$  et soit  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , un opérateur. Alors,  $A$  est le générateur d'un semi-groupe de Feller-Dynkin si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes.

- (a)  $D_A$  est dense dans  $C_0(E)$ .
- (b)  $A$  satisfait le principe du maximum.
- (c) Il existe  $p_0 \in ]0, \infty[$ , tel que  $(p_0 \text{Id} - A)(D_A) = C_0(E)$ .

**Preuve :** supposons d'abord que  $A$  soit le générateur d'un semi-groupe de Feller-Dynkin, alors  $A$  satisfait le principe du maximum d'après le lemme III.2.5 (i), page 107. Comme un semi-groupe de Feller-Dynkin est contractant et fortement continu (d'après la proposition III.2.2), le théorème III.1.25 de Hille-Yosida 3 (du générateur vers les semi-groupes, page 101) s'applique et  $D_A$  est dense dans  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$  et il existe  $p_0 \in ]0, \infty[$ , tel que  $(p_0 \text{Id} - A)(D_A) = C_0(E)$ .

Réiproquement : supposons (a), (b) et (c). Le lemme III.2.5 (ii) implique que  $A$  est dissipatif et le théorème III.1.25 de Hille-Yosida (des générateurs vers les semi-groupes, page 101) s'applique :  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$  est le générateur d'un semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  qui est contractant fortement continu sur l'espace de Banach  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ .

Il reste à montrer que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe de Feller-Dynkin et plus précisément, il faut montrer la condition (b) de positivité et contractilité de la définition III.2.1, page 104. Pour cela, on fixe tout d'abord  $g \in D_A$  tel que  $\inf_{x \in E} g(x) < 0$ . Soit  $(E_\partial, d)$ , un compactifié métrique habituel de  $E$ ;  $g$  se prolonge par

continuité en  $\partial$  par  $g(\partial) = 0$ . Comme toute fonction continue sur un compact atteint des extrema, il existe  $x_0 \in E_\partial$  tel que  $g(x_0) = \inf_{x \in E} g(x) < 0$ . En appliquant le principe du maximum à  $-g$ , on en déduit que  $Ag(x_0) \geq 0$ . Par conséquent, pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,

$$\inf_{x \in E} (pg(x) - Ag(x)) \leq pg(x_0) - Ag(x_0) \leq pg(x_0) < 0 .$$

Cela montre le fait suivant

$$\forall g \in D_A, \forall p \in ]0, \infty[, \quad pg - Ag \geq 0 \implies g \geq 0 . \quad (\text{III.18})$$

Soit  $f \in C_0(E)$  telle que  $f \geq 0$ . Soit  $p \in ]0, \infty[$ . La proposition III.1.19 (i) et (ii) (page 98) implique que  $U_p f \in D_A$  et  $(p\text{Id} - A)U_p f = f \geq 0$ . En appliquant (III.18) à  $g := U_p f$ , on en déduit que

$$\forall f \in C_0(E), \forall p \in ]0, \infty[, \quad f \geq 0 \implies U_p f \geq 0 . \quad (\text{III.19})$$

On rappelle l'approximation donnée au théorème III.1.16 de Hille-Yosida 2 (des résolvantes vers le semi-groupe, page 94) : on pose

$$\forall r \in ]0, \infty[, \quad A_r := r(rU_r - \text{Id}) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P_t^{(r)} = e^{tA_r} = e^{rt(rU_r - \text{Id})} .$$

On a alors

$$\forall f \in C_0(E), \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \|P_t^{(r)} f - P_t f\|_\infty = 0 . \quad (\text{III.20})$$

Soit  $f \in C_0(E)$  telle que  $f \geq 0$ . Par (III.19), pour tout  $r \in ]0, \infty[$  on a  $U_r f \geq 0$  et plus généralement  $(U_r)^n f \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$P_t^{(r)} f = e^{-rt} e^{tr^2 U_r} f = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-rt} \frac{(tr^2)^n}{n!} (U_r)^n f \geq 0$$

et (III.20) implique que  $P_t f \geq 0$ . On a donc montré

$$\forall f \in C_0(E), \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f \geq 0 \implies P_t f \geq 0 . \quad (\text{III.21})$$

Supposons maintenant que  $f \in C_0(E)$  soit telle que  $0 \leq f \leq 1$ , alors  $P_t f \geq 0$  et donc  $\sup_{x \in E} P_t f(x) = \|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq 1$ , car  $P_t$  est contractant. Donc  $0 \leq P_t f \leq 1$ . Cela montre la condition (b) de la définition III.2.1 des semi-groupes de Feller-Dynkin, ce qui permet de montrer que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe de Feller-Dynkin. ■

**Théorème III.2.7** Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $D_A$ , un sous-espace de  $C_0(E)$  et soit  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , un opérateur. On fait les hypothèses suivantes.

- (a)  $D_A$  est dense dans  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ .
- (b)  $A$  satisfait le principe du maximum.
- (c) Il existe  $p_0 \in ]0, \infty[$ , tel que  $(p_0\text{Id} - A)(D_A)$  soit dense dans  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ .

Alors  $A$  est fermable et sa fermeture  $\bar{A} : D_{\bar{A}} \rightarrow C_0(E)$  est le générateur d'un semi-groupe de Feller-Dynkin.

**Preuve :** le lemme III.2.5 (ii) implique que  $A$  est dissipatif et le théorème III.1.29 de Hille-Yosida 4 (des opérateurs fermables vers les semi-groupes, page 104) s'applique :  $A$  est fermable et sa fermeture  $\bar{A} : D_{\bar{A}} \rightarrow C_0(E)$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  qui est contractant et fortement continu sur l'espace de Banach  $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ . Il reste ensuite à montrer qu'il s'agit d'une semi-groupe de Feller-Dynkin, c'est-à-dire à prouver qu'il satisfait la condition (b) de la définition III.2.1.

Pour cela, on fixe  $g \in D_{\bar{A}}$  telle que  $\inf_{x \in E} g(x) < 0$ . Par définition de la fermeture de  $A$ , il existe  $g_n \in D_A$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\|_\infty = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{A}g - Ag_n\|_\infty = 0$ . Par compacité, il existe également  $x_*$  et  $x_n \in E$  tels que  $g(x_*) = \inf_{x \in E} g(x)$  et  $g_n(x_n) = \inf_{x \in E} g_n(x)$ . Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on observe alors que

$$\begin{aligned} \inf_{x \in E} pg(x) - \bar{A}g(x) &\leq pg(x_n) - \bar{A}g(x_n) \leq pg_n(x_n) - Ag_n(x_n) + p\|g - g_n\|_\infty + \|\bar{A}g - Ag_n\|_\infty \\ &\leq pg_n(x_n) + p\|g - g_n\|_\infty + \|\bar{A}g - Ag_n\|_\infty \\ &\leq p \inf_{x \in E} g_n(x) + p\|g - g_n\|_\infty + \|\bar{A}g - Ag_n\|_\infty \\ &\leq p \inf_{x \in E} g(x) + 2p\|g - g_n\|_\infty + \|\bar{A}g - Ag_n\|_\infty \\ &\leq g(x_*) + 2p\|g - g_n\|_\infty + \|\bar{A}g - Ag_n\|_\infty \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

car  $Ag_n(x_n) \geq 0$  (on applique le principe du maximum à  $-g_n$ ). En passant à la limite dans (III.22), on obtient que  $\inf_{x \in E} pg(x) - \bar{A}g(x) \leq g(x_*) < 0$ . Cela montre que

$$\forall g \in D_{\bar{A}}, \quad p \in ]0, \infty[, \quad pg - \bar{A}g \geq 0 \implies g \geq 0.$$

En raisonnant exactement comme dans la fin de la preuve du théorème III.2.6 qui précède, on montre que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait bien la condition (b) de la définition III.2.1 et qu'il est par conséquent un semi-groupe de Feller-Dynkin. ■

### III.2.c Application au mouvement Brownien.

Pour tout  $t \in ]0, \infty[$ , tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et toute fonction  $f \in L_b(\mathbb{R}^d)$ , on pose

$$g_t(\mathbf{x}) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2t}} \quad \text{et} \quad P_t f(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} g_t(\mathbf{y}) f(\mathbf{y} + \mathbf{x}) \ell_d(d\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} g_t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{y}) \ell_d(d\mathbf{y}).$$

On pose également  $P_0 f = f$ . On rappelle que  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est le semi-groupe Markovien du mouvement Brownien standard dans  $\mathbb{R}^d$ . On note

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^d) : \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

On note  $\partial_i$  la dérivation des fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  en la  $i$ -ème coordonnée, on note  $\partial_{i,j}^2$ , la dérivation seconde en les coordonnées  $i$  et  $j$ . On note  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$  l'espace des fonctions deux fois continûment dérивables en chaque coordonnée et dont les dérivées secondes tendent vers 0 en l'infini :

$$C_0^2(\mathbb{R}^d) := \{f \in C_0(\mathbb{R}^d) : \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \quad \partial_{i,j}^2 f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}.$$

On note  $\Delta$  l'opérateur Laplacien sur  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$  :

$$\forall f \in C_0^2(\mathbb{R}^d), \quad \Delta f = \sum_{1 \leq i \leq d} \partial_{i,i}^2 f \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

Le lemme suivant montre que le semi-groupe du mouvement Brownien résout le problème de la chaleur.

**Lemme III.2.8** Soit  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P_t f \in C_0^2(\mathbb{R}^d), \quad \Delta P_t f = P_t \Delta f. \quad (\text{III.23})$$

De plus pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto P_t f(\mathbf{x})$  est  $C^1$  et satisfait l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt} P_t f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta P_t f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} P_t \Delta f(\mathbf{x}), \quad (\text{III.24})$$

qui est l'équation de la propagation de la chaleur de condition initiale  $f$ . En particulier, cela montre que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^{-1} (P_t f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \Delta f(\mathbf{x}). \quad (\text{III.25})$$

**Preuve :** soit  $t \in ]0, \infty[$ . Comme  $P_t f(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} g_t(\mathbf{y}) f(\mathbf{y} + \mathbf{x}) \ell_d(d\mathbf{y})$ , le théorème de dérivation sous l'intégrale implique que  $P_t f$  est  $C^2$  et le théorème de convergence dominée implique également que  $P_t f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ . Un calcul élémentaire implique ensuite que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et tout  $t \in ]0, \infty[$ ,

$$\frac{1}{2} \Delta g_t(\mathbf{x}) = -\frac{d}{dt} g_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{d}{2}} t^{-\frac{d}{2}-2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2t}} (\|\mathbf{x}\|^2 - dt).$$

Comme  $t > 0$ , le théorème de dérivation sous l'intégrale peut s'appliquer et montre (III.24), pour tout  $t \in ]0, \infty[$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow 0+} P_t \Delta f(\mathbf{x}) = \Delta f(\mathbf{x})$ ,  $\frac{d}{dt} P_t f(\mathbf{x})$  tend vers  $\Delta f(\mathbf{x})$  lorsque  $t \rightarrow 0+$ .

Il faut montrer ensuite que  $P_t f(\mathbf{x})$  possède une dérivée droite en 0. Par la formule de Taylor, il existe une fonction continue bornée  $\varepsilon_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow 0} \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 0$  et telle que pour tout  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_d)$ , on ait

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq d} y_i \partial_i f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} y_i y_j \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \|\mathbf{y}\|^2.$$

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité et  $Y = (Y_1, \dots, Y_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un vecteur Gaussien  $\mathcal{F}$ -mesurable de matrice de covariance identité : la loi de  $Y$  a pour densité  $g_1$ . On remarque la loi de  $\sqrt{t}Y$  est  $g_t$  et que  $P_t f(x) = \mathbf{E}[f(\mathbf{x} + \sqrt{t}Y)]$  donc

$$P_t f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{E}[f(\mathbf{x} + \sqrt{t}Y) - f(\mathbf{x})] = \sqrt{t} \sum_{1 \leq i \leq d} \partial_i f(\mathbf{x}) \mathbf{E}[Y_i] + t \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{1}{2} \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{E}[Y_i Y_j] + t \mathbf{E}[\varepsilon_{\mathbf{x}}(\sqrt{t}Y) \|\mathbf{Y}\|^2].$$

Or  $\mathbf{E}[Y_i] = \mathbf{E}[Y_i Y_j] = 0$  si  $i \neq j$  et  $\mathbf{E}[Y_i^2] = 1$ . Donc

$$t^{-1} (P_t f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \Delta f(\mathbf{x}) + \mathbf{E}[\varepsilon_{\mathbf{x}}(\sqrt{t}Y) \|\mathbf{Y}\|^2].$$

et par convergence dominée, on obtient (III.25). ■

On montre ensuite le lemme suivant.

**Lemme III.2.9**  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R}^d)$  pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Preuve :** soit  $t \in ]0, \infty[$  et soit  $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ . On a montré que  $P_t f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ . Comme  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est de Feller-Dynkin, on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0$ , ce qui implique le lemme. Donnons, cependant, une preuve directe de ce fait : pour tout  $\delta \in ]0, \infty[$ , on pose  $w(\delta) := \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| ; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\}$ . On vérifie  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} w(\delta) = 0$ , c'est-à-dire que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , un vecteur Gaussien  $\mathcal{F}$ -mesurable de matrice de covariance identité : la loi

de  $Y$  a pour densité  $g_1$ . On remarque la loi de  $\sqrt{t}Y$  est  $g_t$  et donc que  $P_t f(\mathbf{x}) = \mathbf{E}[f(\mathbf{x} + \sqrt{t}Y)]$ . Donc  $|P_t f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \mathbf{E}[w(\sqrt{t}\|Y\|)]$ . Or  $|w(\delta)| \leq 2\|f\|_\infty$ , pour tout  $\delta \in ]0, \infty[$ . Par convergence dominée on a donc

$$\|P_t f - f\|_\infty \leq \mathbf{E}[w(\sqrt{t}\|Y\|)] \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0,$$

ce qui permet de conclure.  $\blacksquare$

**Lemme III.2.10** Soit  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$  telle qu'il existe  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  satisfaisant  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) > 0$ . Alors  $\Delta f(\mathbf{x}_0) \leq 0$ .

**Preuve :** on a tout d'abord  $\partial_i f(\mathbf{x}_0) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  et par la formule de Taylor, il existe une fonction continue bornée  $\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{y}) = 0$  et telle que pour tout  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_d)$ , on ait

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} y_i y_j \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{y}) \|\mathbf{y}\|^2 = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0) \leq 0.$$

En choisissant  $\mathbf{y} := \delta \mathbf{e}_i$ , où  $\mathbf{e}_i$  est le  $i$ -ème vecteur canonique et  $\delta > 0$ , on vérifie que  $\partial_{i,i}^2 f(\mathbf{x}_0) \leq 0$ . Comme cela est vérifié pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on en déduit que  $\Delta f(\mathbf{x}_0) \leq 0$ .  $\blacksquare$

**Lemme III.2.11** On considère l'opérateur  $\frac{1}{2}\Delta : C_0^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ . Alors,

- (a) Son domaine  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R}^d)$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .
- (b)  $\frac{1}{2}\Delta$  satisfait le principe du maximum.
- (c) Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , l'espace  $(p\text{Id} - \frac{1}{2}\Delta)(C_0^2(\mathbb{R}^d))$  est dense dans  $C_0(\mathbb{R}^d)$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Preuve :** le lemme III.2.9 montre (a) et le lemme III.2.10 montre (b). Il reste à prouver (c). Pour cela on fixe  $p \in ]0, \infty[$  et on pose

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall f \in C_0^2(\mathbb{R}^d), \quad U_p f(\mathbf{x}) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(\mathbf{x}) dt, \quad (\text{III.26})$$

qui a bien un sens car  $t \mapsto P_t f(\mathbf{x})$  est continue bornée (et même  $C^1$ ) par le lemme III.2.8. Ce même lemme, combiné avec le théorème de dérivation sous l'intégrale montre que  $U_p f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$  et que

$$\frac{1}{2}\Delta(U_p f)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{1}{2}\Delta(P_t f)(\mathbf{x}) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d}{dt} P_t f(\mathbf{x}) dt.$$

Une intégration par parties (basée sur le fait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} P_t f(\mathbf{x}) = 0$ , implique que  $\frac{1}{2}\Delta(U_p f)(\mathbf{x}) = p U_p f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$ ). On a donc montré que

$$\forall f \in C_0^2(\mathbb{R}^d), \quad (p\text{Id} - \frac{1}{2}\Delta)U_p f = f.$$

On en déduit que  $C_0^2(\mathbb{R}^d) \subset (p\text{Id} - \frac{1}{2}\Delta)(C_0^2(\mathbb{R}^d))$  et le lemme III.2.9 implique le point (c).  $\blacksquare$

Le théorème III.2.7, page 108 combiné au lemme III.2.11 qui précède permet la caractérisation suivante du générateur du mouvement Brownien standard  $d$ -dimensionnel.

**Théorème III.2.12** On considère l'opérateur  $\frac{1}{2}\Delta : C_0^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ . Alors,  $\frac{1}{2}\Delta$  est fermable dans l'espace de Banach  $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$  et sa fermeture  $\frac{1}{2}\overline{\Delta} : D_{\frac{1}{2}\overline{\Delta}} \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$  est le générateur du semi-groupe de Feller-Dynkin  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  du mouvement Brownien standard en dimension  $d$ .

**Remarque III.2.13** En dimension  $d \geq 2$ , le domaine  $D_{\frac{1}{2}\Delta}$  de la fermeture du Laplacien usuel  $\frac{1}{2}\Delta$  sur  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$  est difficile à décrire (il y a quelques résultats en dimension  $d=2$ ). Autrement dit, on connaît mal la fermeture du Laplacien en dimension  $d$  supérieure à 2. En revanche, en dimension 1, le générateur du mouvement Brownien est calculé explicitement comme montré dans le paragraphe qui suit.  $\square$

**Calcul exact du générateur infinitésimal du mouvement Brownien en dimension 1.** Nous calculons le générateur du mouvement Brownien en dimension 1 (c'est-à-dire que nous identifions son domaine) en calculant explicitement ses résolvantes. Pour cela, on rappelle que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iux}}{1+x^2} dx = e^{-|u|} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+u^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-iux-|x|} dx. \quad (\text{III.27})$$

La première égalité résulte d'un calcul élémentaire de primitive. La seconde égalité est une conséquence du théorème d'inversion de Fourier qui s'applique car  $x \mapsto e^{-|x|}$  est Lebesgue-intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on vérifie facilement que l'on peut définir  $U_p : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  par (III.26). Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{E}_u \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  la fonction définie par  $\mathcal{E}_u(x) = e^{iux}$ . On voit alors que

$$U_p \mathcal{E}_u(x) = \int_0^\infty dt e^{-pt} \int_{\mathbb{R}} (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2t}} e^{iuy} e^{iux} dy = e^{iux} \int_0^\infty dt e^{-pt} e^{-\frac{tu^2}{2}} = \frac{e^{iux}}{p + \frac{1}{2}u^2}.$$

Un changement de variable linéaire dans (III.27) implique alors que

$$U_p \mathcal{E}_u(x) = \int_{\mathbb{R}} dy (2p)^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{2p}|y-x|} e^{iuy}$$

Par injectivité de la transformée de Fourier on en déduit la proposition suivante.

**Proposition III.2.14** Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , le semi-groupe du mouvement Brownien en dimension 1, qui est de Feller-Dynkin. On note  $(U_p)_{p \in ]0, \infty[}$  la famille de résolvantes associée. Alors, on a la représentation suivante :

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \quad \forall p \in ]0, \infty[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad U_p f(x) = \int_{\mathbb{R}} dy (2p)^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{2p}|y-x|} f(y).$$

On fixe  $f \in C_0(\mathbb{R})$ . La proposition précédente permet d'écrire pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$U_p f(x) = e^{-x\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^x dy (2p)^{-\frac{1}{2}} e^{y\sqrt{2p}} f(y) + e^{x\sqrt{2p}} \int_x^\infty dy (2p)^{-\frac{1}{2}} e^{-y\sqrt{2p}} f(y).$$

Cela montre que  $U_p f$  est dérivable partout et un calcul élémentaire montre que

$$(U_p f)'(x) = e^{x\sqrt{2p}} \int_x^\infty dy e^{-y\sqrt{2p}} f(y) - e^{-x\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^x dy e^{y\sqrt{2p}} f(y).$$

Cette expression montre que  $(U_p f)'$  est également dérivable partout et un calcul élémentaire implique que

$$\begin{aligned} (U_p f)''(x) &= -2f(x) + \sqrt{2p} e^{x\sqrt{2p}} \int_x^\infty dy e^{-y\sqrt{2p}} f(y) + \sqrt{2p} e^{-x\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^x dy e^{y\sqrt{2p}} f(y) \\ &= -2f(x) + 2p U_p f(x). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\forall p \in ]0, \infty[, \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}), \quad U_p f \in C_0^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(U_p f)'' = p U_p f - f. \quad (\text{III.28})$$

On note  $A : D_A \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ , le générateur de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Pour simplifier les notations, on pose également  $D := C_0^2(\mathbb{R})$  et  $A_1 : f \in D \mapsto \frac{1}{2}f'' \in C_0(\mathbb{R})$ . La proposition III.1.11 (i), page 91, implique que pour tout  $p \in ]0, \infty[$ ,  $D_A = U_p(C_0(\mathbb{R}))$ . Donc (III.28) implique que  $D_A \subset D$ . Par ailleurs, la même proposition III.1.11 (ii) implique que pour toute fonction  $f \in C_0(\mathbb{R})$ , on a  $AU_p f = pU_p f - f$  et (III.28) implique que

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \forall p \in ]0, \infty[, \quad AU_p f = A_1 U_p f.$$

Comme  $U_p(C_0(\mathbb{R})) = D_A$ , on en déduit que  $A_{1|D_A} = A$ . Le principe du maximum de Dynkin (lemme III.2.4, page 106) implique alors que  $D = D_A$  et donc  $A_1 = A$ . On a donc montré le théorème suivant.

**Théorème III.2.15** (Calcul exact du générateur du Brownien en dim. 1) *On note  $A : D_A \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ , le générateur du semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  du mouvement Brownien en dimension 1. Alors,*

$$D_A = C_0^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}), \quad Af = \frac{1}{2}f''.$$

### III.3 Formule de Dynkin, opérateur caractéristique.

#### III.3.a Formule de Dynkin.

**Théorème III.3.1** (Formule de Dynkin) *Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin sur  $C_0(E)$ . On note  $E_\partial$ , un compactifié habituel de  $E$  et  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  l'extension minimale de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soit*

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial))$$

*un processus de Feller-Dynkin càdlàg tel que  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les hypothèses habituelles. Soit  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , le générateur de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Soient  $x \in E$  et  $f \in D_A$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) *Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad M_t^f := f(X_t) - \int_0^t Af(X_s) ds.$$

*Alors,  $(M_t^f)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est bien définie et sous  $\mathbf{P}_x$ , c'est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale.*

(ii) *Pour tout  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt  $T$  tel que  $\mathbf{E}_x[T] < \infty$ ,*

$$\mathbf{E}_x[f(X_T)] - f(x) = \mathbf{E}_x \left[ \int_0^T Af(X_s) ds \right]. \quad (\text{III.29})$$

*Cette identité est appelée formule de Dynkin.*

**Preuve :** comme  $Af \in C_0(E)$ ,  $s \mapsto Af(X_s)$  est càdlàg bornée, ce qui permet de définir  $M_t^f$  comme une v.a. bornée  $\mathcal{G}_t$ -mesurable. La propriété de Markov au temps  $t$  implique que  $\mathbf{P}_x$ -p.s.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x[M_{t+s}^f | \mathcal{G}_t] &= P_s f(X_t) - \int_0^t Af(X_r) dr - \mathbf{E}_x \left[ \int_0^s Af(X_{t+r}) dr \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= P_s f(X_t) - \int_0^t Af(X_r) dr - \int_0^s dr \mathbf{E}_x[Af(X_{t+r}) | \mathcal{G}_t] \\ &= P_s f(X_t) - \int_0^t Af(X_r) dr - \int_0^s dr P_r Af(X_t). \end{aligned}$$

L'interversion espérance conditionnelle/intégrale étant justifiée par le fait que  $Af(X_{t+r})$  est bornée. On applique ensuite (III.13) (au lemme III.1.18, page 97) pour constater que pour tout  $y \in E$ ,  $P_s f(y) - \int_0^s dr P_r Af(y) = f(y)$ . Donc  $\mathbf{P}_x$ -p.s.  $\mathbf{E}_x[M_{t+s}^f | \mathcal{G}_t] = f(X_t) - \int_0^t Af(X_r) dr = M_t^f$ , ce qui termine la preuve du point (i).

Il est possible de déduire le point (ii) du point (i) en appliquant un théorème d'arrêt général pour les martingale càd. Nous préférons démontrer la formule de Dynkin directement sans avoir recours à ce résultat. Pour cela on fixe  $p \in ]0, \infty[$  et  $g \in C_0(\mathbb{R})$ . Il est clair que  $Y := \int_0^\infty dt e^{-pt} g(X_t)$  est une v.a.  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et bornée par  $\|g\|_\infty/p$ . On remarque ensuite que

$$Y = \int_0^T e^{-pt} g(X_t) dt + \int_T^\infty e^{-pt} g(X_t) dt = \int_0^T e^{-pt} g(X_t) dt + e^{-pT} \int_0^\infty e^{-pt} g(X_{t+T}) dt$$

En appliquant la propriété de Markov forte au temps  $T$ , on obtient  $\mathbf{P}_x$ -p.s.

$$U_p g(x) = \mathbf{E}_x[Y] = \mathbf{E}_x \left[ \int_0^T e^{-pt} g(X_t) dt \right] + \mathbf{E}_x [e^{-pT} U_p g(X_T)] .$$

Soit  $f \in D_A$ . La proposition III.1.11 (ii), page 91, implique que  $U_p(pf - Af) = f$ . Si on applique ce qui précède à  $g = pf - Af$ , on obtient

$$f(x) = \mathbf{E}_x \left[ \int_0^T e^{-pt} (pf(X_t) - Af(X_t)) dt \right] + \mathbf{E}_x [e^{-pT} f(X_T)] .$$

On suppose  $p \in ]0, 1[$  et on remarque que

$$\left| \int_0^T e^{-pt} (pf(X_t) - Af(X_t)) dt \right| \leq (\|f\|_\infty + \|Af\|_\infty) T \quad (\text{III.30})$$

et le membre de droite est intégrable. On peut donc appliquer la convergence dominée pour passer à la limite dans (III.30) lorsque  $p \rightarrow 0$  et on obtient (III.29). ■

**Remarque III.3.2** Appliquons l'énoncé précédent au mouvement Brownien standard dans  $\mathbb{R}^d$ . Le théorème III.2.12, page 111, (mais en fait le lemme III.2.8, page 110, suffit) implique alors que pour toute fonction  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$M_t^f = f(X_t) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s) ds$$

est sous  $\mathbf{P}_x$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale. La formule d'Itô montre que  $M_t^f$  se représente comme l'intégrale stochastique suivante :

$$M_t^f = \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s .$$

La représentation de  $M_t^f$  comme une intégrale trajectorielle présente des avantages, notamment la résolution d'équations différentielles stochastiques par itérations de Picard. □

### III.3.b Opérateur caractéristique.

Grâce à la formule de Dynkin, il est possible de donner une forme alternative au générateur infinitésimal. Soit  $E$ , un espace topologique LCBD. Dans la suite de cette section,  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  désigne un semi-groupe de

Feller-Dynkin sur  $C_0(E)$ . On note  $(E_\partial, d)$ , un compactifié métrique habituel de  $E$  et  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  l'extension minimale de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $(p_t^\partial(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in E_\partial}$ , les noyaux associés. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(E_\partial))$$

un processus de Feller-Dynkin càdlàg tel que  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les hypothèses habituelles.

**Définition III.3.3** (*Point absorbant*) Un point  $x$  est dit absorbant si  $p_t(x, dy) = \delta_x(dy)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Un raisonnement simple montre que  $x$  est absorbant ssi  $\mathbf{P}_x$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t = x$ .  $\square$

On commence par montrer le lemme suivant.

**Lemme III.3.4** *On garde les notations et les hypothèses du début de la section pour le processus  $X$ . Soit  $x \in E$ , un point qui n'est pas absorbant pour le processus. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \infty[$ , on pose*

$$\tau_\varepsilon := \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : d(X_t, x) \geq \varepsilon\}$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . Alors, il existe  $\varepsilon_0 \in ]0, \infty[$  tel que  $\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon] < \infty$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ .

**Preuve :** comme  $x$  n'est pas absorbant et comme le processus part d'un point de  $E$  et est continu à droite, il existe  $t_0 \in ]0, \infty[$ , tel que  $p_{t_0}(x, E \setminus \{x\}) = p_{t_0}^\partial(x, E \setminus \{x\}) > 0$ . Il existe donc  $\delta$  et  $\eta$ , des réels strictement positifs, tels que  $p_{t_0}(x, U_\delta) > \eta$ , où  $U_\delta := \{y \in E : d(x, y) > \delta\}$ , qui est ouvert de  $E$ . Pour tout  $y \in E$ , on pose  $f_n(y) = 1 \wedge (nd(y, E_\partial \setminus U_\delta))$ <sup>1</sup>. On vérifie que  $f_n \in C_0(E)$  et que  $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \mathbf{1}_{U_\delta}$  et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \mathbf{1}_{U_\delta}$  ponctuellement. Par conséquent, par convergence monotone,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{t_0} f_n = p_{t_0}(\cdot, U_\delta)$  ponctuellement sur  $E$ . Or  $\{y \in E : p_{t_0}(y, U_\delta) > \eta\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in E : P_{t_0} f_n(y) > \eta\}$ , donc  $\{y \in E : p_{t_0}(y, U_\delta) > \eta\}$  est un ouvert de  $E$ . Il existe donc  $\varepsilon \in ]0, \infty[$ , tel que

$$\forall y \in B(x, \varepsilon), \quad p_{t_0}(y, U_\delta) = p_{t_0}^\partial(y, U_\delta) > \eta. \quad (\text{III.31})$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\varepsilon \in ]0, \delta[$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit l'événement

$$A_n = \{\forall k \in \{1, \dots, n\}, X_{kt_0} \in B(x, \varepsilon)\}.$$

On remarque que La propriété de Markov au temps  $(n-1)t_0$  implique  $\mathbf{P}_x$ -p.s.

$$\mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{A_n} | \mathcal{G}_{(n-1)t_0}] = p_{t_0}(X_{(n-1)t_0}, E_\partial \setminus U_\varepsilon) \mathbf{1}_{A_{n-1}} = (1 - p_{t_0}(X_{(n-1)t_0}, U_\varepsilon)) \mathbf{1}_{A_{n-1}} \quad (\text{III.32})$$

Or  $p_{t_0}(X_{(n-1)t_0}, U_\varepsilon) \geq p_{t_0}(X_{(n-1)t_0}, U_\delta)$  et sur  $A_{n-1}$ , on a  $X_{(n-1)t_0} \in B(x, \varepsilon)$  et donc  $p_{t_0}(X_{(n-1)t_0}, U_\delta) \geq \eta$ . Par conséquent,  $\mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{A_n} | \mathcal{G}_{(n-1)t_0}] \leq (1 - \eta) \mathbf{1}_{A_{n-1}}$  et en prenant l'espérance,  $\mathbf{P}_x(A_n) \leq (1 - \eta) \mathbf{P}_x(A_{n-1})$ ; une récurrence immédiate,  $\mathbf{P}_x(A_n) \leq (1 - \eta)^n$ . Or  $\mathbf{P}_x$ -p.s.  $\{\tau_\varepsilon > nt_0\} \subset A_n$ . Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}_x(\tau_\varepsilon > nt_0) \leq (1 - \eta)^n.$$

ce qui implique que facilement que  $\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon] < \infty$ .  $\blacksquare$

**Définition III.3.5** (*Opérateur caractéristique (Dynkin)*) On garde les notations et les hypothèses du début de la section pour le processus de Feller-Dynkin  $X$ . On note  $\text{Abs}$  l'ensemble des points absorbants du processus

1. On met ici  $\partial$

et pour tout  $\varepsilon \in ]0, \infty[$ , on rappelle la notation :  $\tau_\varepsilon = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : d(X_t, x) \geq \varepsilon\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . On définit un opérateur  $L : D_L \rightarrow C_0(E)$  par

$$(f \in D_L \text{ et } Lf = g) \iff \left( \forall x \in \text{Abs}, \quad g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus \{\text{Abs}\}, \quad g(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{E}_x[f(X_{\tau_\varepsilon})] - f(x)}{\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon]} \right).$$

Cette définition fait sens d'une part grâce au lemme III.3.4, page 115, montrant que  $\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon] < \infty$  et grâce à la continuité à droite de  $X$  qui implique que  $\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon] > 0$ . On vérifie aisément que  $D_L$  est un sous-espace vectoriel de  $C_0(E)$  et que  $L$  est linéaire. L'opérateur  $L : D_L \rightarrow C_0(E)$  est appelé *opérateur caractéristique* de  $X$ .  $\square$

**Théorème III.3.6** Soit  $X$ , un processus de Feller-Dynkin à valeurs dans  $E_\partial$ , avec les notations et hypothèses énoncées en début de section. On note  $L : D_L \rightarrow C_0(E)$  l'opérateur caractéristique du processus et  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$ , son générateur infinitésimal. Alors

$$D_A = D_L \quad \text{et} \quad A = L.$$

**Preuve :** soit  $f \in D_A$ . On pose  $Af =: g$ . Soit  $x \in \text{Abs}$ . On a donc  $P_t f(x) = f(x)$  et donc  $g(x) = \frac{d^+}{dt} P_t f(x)|_0 = 0$ . On suppose ensuite que  $x \in E \setminus \text{Abs}$ . Comme expliqué dans la définition III.3.5, page 115, pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon] \in ]0, \infty[$ . La formule de Dynkin (théorème III.3.1 (ii), page 113) implique que

$$\frac{\mathbf{E}_x[f(X_{\tau_\varepsilon})] - f(x)}{\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon]} - g(x) = \frac{1}{\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon]} \mathbf{E}_x \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} (g(X_s) - g(x)) ds \right].$$

On pose  $w(\varepsilon) = \sup_{y \in B(x, \varepsilon)} |g(y) - g(x)|$ . Comme  $g \in C_0(E)$ , on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} w(\varepsilon) = 0$ . Donc

$$\left| \frac{\mathbf{E}_x[f(X_{\tau_\varepsilon})] - f(x)}{\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon]} - g(x) \right| \leq \frac{1}{\mathbf{E}_x[\tau_\varepsilon]} \mathbf{E}_x \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} w(\varepsilon) ds \right] = w(\varepsilon),$$

ce qui implique que  $Lf(x) = g(x)$ . On a donc

$$D_A \subset D_L \quad \text{et} \quad L|_{D_A} = A.$$

Il est facile de vérifier ensuite que  $L$  satisfait le principe du maximum. Le lemme III.2.4, page 106, s'applique et permet de conclure.  $\blacksquare$

### III.4 Quelques applications aux diffusions.

**Définition III.4.1** Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin sur  $C_0(\mathbb{R}^d)$ . On note  $(\mathbb{R}_\partial^d, d)$ , un compactifié métrique habituel de  $\mathbb{R}^d$  et  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  l'extension minimale de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $(p_t^\partial(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}_\partial^d}$ , les noyaux associés. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_\partial^d))$$

un processus de Feller-Dynkin càdlàg tel que  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les hypothèses habituelles. On rappelle que  $\zeta$  désigne le temps de vie de  $X$ .

C'est une *diffusion de Feller-Dynkin* si les propriétés suivantes sont satisfaites.

- (a) Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [0, \zeta(\omega)] \mapsto X_t(\omega)$  est continu.

- (b)  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D_A$  où  $A : D_A \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$  est le générateur du processus et où  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.  $\square$

**Proposition III.4.2** Soit  $X$ , une diffusion de Feller-Dynkin dans  $\mathbb{R}^d$  : on utilise les notations de la définition III.4.1. La restriction de  $A$  à  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est locale, c'est-à-dire

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \forall f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (f = g \text{ dans un voisinage de } \mathbf{x}) \implies (Af(\mathbf{x}) = Ag(\mathbf{x})).$$

**Preuve :** si  $\mathbf{x}$  est un point absorbant, alors  $Af(\mathbf{x}) = Ag(\mathbf{x}) = 0$ . Supposons que  $\mathbf{x}$  ne soit pas absorbant. On rappelle la notation  $\tau_\varepsilon = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : d(X_t, X_0) \geq \varepsilon\}$ , avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . Par le lemme III.3.4, page 115, on a  $\mathbf{E}_{\mathbf{x}}[\tau_\varepsilon] < \infty$  et on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tau_\varepsilon = 0$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ -p.s. et dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\mathbf{x}})$ . On a donc  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ -p.s.  $\tau_\varepsilon < \zeta$  pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit. La continuité de  $X$  jusqu'au temps  $\zeta$  implique que  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ -p.s.  $d(X_{\tau_\varepsilon}, \mathbf{x}) = \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit. Supposons que  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  coïncident dans un voisinage de  $\mathbf{x}$ . Alors, ce qui précède implique que  $Lf(\mathbf{x}) = Lg(\mathbf{x})$ , où  $L$  est l'opérateur caractéristique du processus (définition III.3.5, page 115). Le théorème III.3.6, page 116, implique alors que  $Af(\mathbf{x}) = Ag(\mathbf{x})$ .  $\blacksquare$

Le théorème suivant, dû à Dynkin, donne la forme du générateur infinitésimal d'une diffusion de Feller-Dynkin (plus précisément la forme de sa restriction à  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ).

**Théorème III.4.3** Soit  $X$ , une diffusion de Feller-Dynkin dans  $\mathbb{R}^d$  : on utilise les notations de la définition III.4.1. Alors,

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad Af(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(\mathbf{x}) \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i, j \leq d} b_i(\mathbf{x}) \partial_i f(\mathbf{x}) - c(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}),$$

où les fonctions  $a_{i,j}$ ,  $b_i$  et  $c$  satisfont les propriétés suivantes.

- Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ ,  $a_{i,j}, b_i, c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues.
- Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , la matrice  $(a_{i,j}(\mathbf{x}))_{1 \leq i, j \leq d}$  est symétrique positive.
- Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $c(\mathbf{x}) \geq 0$ .

**Preuve.** On rappelle le fait suivant : soient  $K \subset U \subset \mathbb{R}^d$ , avec  $U$  ouvert et  $K$  compact ; alors il existe  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\mathbf{1}_K \leq \phi \leq \mathbf{1}_U$ . On fixe  $R > 0$  et on se donne  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\mathbf{1}_{\overline{B}(0, 2R)} \leq \phi \leq \mathbf{1}_{B(2R+1)}$ . Soit  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_d^0) \in B(0, R)$ . Pour tout  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , on définit

$$\forall \mathbf{y} := (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \quad h_i^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) := (y_i - x_i^0)\phi(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad g_{i,j}^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) := (y_i - x_i^0)(y_j - x_j^0)\phi(\mathbf{y})$$

Il est clair que ce sont des fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On pose ensuite

$$c(\mathbf{x}_0) := -(A\phi)(\mathbf{x}_0), \quad b_i(\mathbf{x}_0) := (Ah_i^{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}_0) \quad \text{et} \quad a_{i,j}(\mathbf{x}) := (Ag_{i,j}^{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}_0).$$

Le caractère local de  $A$  implique que si  $\phi$  est remplacée par n'importe quelle fonction  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  valant 1 au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ , cela définit les mêmes coefficients  $c(\mathbf{x}_0)$ ,  $b_i(\mathbf{x}_0)$  et  $a_{i,j}(\mathbf{x}_0)$ . Quitte à augmenter  $R$ , cela définit de façon unique  $c$ ,  $b_i$  et  $a_{i,j}$  comme des fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . La définition de  $c$  montre que  $c \in C(\mathbb{R}^d)$ . Soit  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_d) \in B(0, R)$ . On remarque que  $h_i^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = h_i^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) + (x_i^0 - x_i)\phi(\mathbf{y})$  et donc  $b_i(\mathbf{x}) = (Ah_i^{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}) - (x_i^0 - x_i)c(\mathbf{x})$ . Cela montre que  $b_i$  est continue. De même on observe que  $g_{i,j}^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = g_{i,j}^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) + (x_i^0 - x_i)h_j^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) + (x_j^0 - x_j)h_i^{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) + (x_i^0 - x_i)(x_j^0 - x_j)\phi(\mathbf{y})$ . Donc  $a_{i,j}(\mathbf{x}) = (Ag_{i,j}^{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}) + (x_i^0 - x_i)(x_j^0 - x_j)\phi(\mathbf{y})$ .

$x_i)(Ah_j^{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}) + (x_j^0 - x_j)(Ah_i^{\mathbf{x}_0})(\mathbf{x}) - (x_i^0 - x_i)(x_j^0 - x_j)\phi(\mathbf{x})$ . Cela montre également, que  $a_{i,j}$  est une fonction continue.

Comme  $\phi$  atteint son maximum pour tout  $\mathbf{x} \in B(0, R)$ , le principe du maximum (lemme III.2.5, page 107) implique que  $c(\mathbf{x}) = -(A\phi)(\mathbf{x}) \geq 0$ , ce qui montre que  $c$  est une fonction positive. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \infty[$ , pour tout  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , on pose  $\theta_\varepsilon(\mathbf{y}) = \varepsilon\phi(\mathbf{y}) - (\lambda_1 h_1^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \dots + \lambda_d h_d^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}))^2$ . Comme pour tout  $\mathbf{y} \in B(0, R)$ , on a  $\phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y})^2$ , on vérifie que pour tout  $\mathbf{y} \in B(0, R)$ , on a  $\theta_\varepsilon(\mathbf{y}) = \varepsilon\phi(\mathbf{y}) - \sum_{1 \leq i, j \leq d} \lambda_i \lambda_j g_{i,j}^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ . Or  $\theta_\varepsilon$  atteint son maximum en  $\mathbf{x}$  et ce maximum vaut  $\varepsilon > 0$ . Le principe du maximum (lemme III.2.5, page 107) implique que  $-\varepsilon c(\mathbf{x}) - \sum_{1 \leq i, j \leq d} \lambda_i \lambda_j a_{i,j}(\mathbf{x}) = (A\theta_\varepsilon)(\mathbf{x}) \leq 0$ . Comme cela est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}^d$ , on en déduit que la matrice  $(a_{i,j}(\mathbf{x}))_{1 \leq i, j \leq d}$  (clairement symétrique) est positive. On a montré que les fonctions  $a_{i,j}$ ,  $b_i$  et  $c$  satisfont les propriétés (a), (b) et (c).

Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On fixe  $\mathbf{x} \in B(0, R)$ . La formule de Taylor en  $\mathbf{x}$  au second ordre implique l'existence de  $\eta_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue bornée telle que  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \eta_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 0$  et telle que pour tout  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i \leq d} (y_i - x_i) \partial_i f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}) + \eta_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . On a donc  $\phi(\mathbf{y})f(\mathbf{y}) = f_0(\mathbf{y}) + \phi(\mathbf{y})\eta_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$  où

$$f_0(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) + \sum_{1 \leq i \leq d} h_i^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \partial_i f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} g_{i,j}^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}).$$

On en déduit que  $Af_0(\mathbf{x}) = -c(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i \leq d} b_i(\mathbf{x}) \partial_i f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(\mathbf{x}) \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x})$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . On pose  $q_\varepsilon(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - f_0(\mathbf{y}) - \varepsilon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 + \varepsilon^2 \phi(\mathbf{y})$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que  $\varepsilon^2 = \max_{B(\mathbf{x}, 2\delta)} q_\varepsilon$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\mathbf{1}_{\overline{B}(\mathbf{x}, \delta)} \leq \varphi \leq \mathbf{1}_{B(\mathbf{x}, 2\delta)}$ . Alors,  $\varphi q_\varepsilon$  atteint son maximum en  $\mathbf{x}$  et ce maximum vaut  $\varepsilon^2 > 0$ . Le principe du maximum implique que  $(A\varphi q_\varepsilon)(\mathbf{x}) \leq 0$  et puisque  $\varphi$  est local, on a

$$Af(\mathbf{x}) - Af_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq d} a_{i,i}(\mathbf{x}) - \varepsilon^2 c(\mathbf{x}) = -A\varphi q_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 0;$$

Comme cela est vérifié pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit

$$Af(\mathbf{x}) \leq Af_0(\mathbf{x}) = -c(\mathbf{x}) + \sum_{1 \leq i \leq d} b_i(\mathbf{x}) \partial_i f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(\mathbf{x}) \partial_{i,j}^2 f(\mathbf{x}).$$

On montre l'inégalité large contraire en raisonnant de même avec  $p_\varepsilon(\mathbf{y}) := f_0(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}) - \varepsilon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 + \varepsilon^2 \phi(\mathbf{y})$ , ce qui permet de conclure. ■

Le théorème suivant montre la nécessité de la continuité pour des processus de Feller-Dynkin dont le générateur est un opérateur différentiel du second ordre.

**Théorème III.4.4** Soit  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un semi-groupe de Feller-Dynkin sur  $C_0(\mathbb{R}^d)$ . On note  $(\mathbb{R}_\partial^d, d)$ , un compactifié métrique habituel de  $\mathbb{R}^d$  et  $(P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}$  l'extension minimale de  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $(p_t^\partial(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}_\partial^d}$ , les noyaux associés. Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t^\partial)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_\partial^d))$$

un processus de Feller-Dynkin càdlàg tel que  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  satisfait les hypothèses habituelles. On rappelle que  $\zeta$  désigne le temps de vie de  $X$  et on note  $A : D_A \rightarrow C_0(E)$  le générateur infinitésimal.

On suppose que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D_A$  et on suppose que la restriction de  $A$  à  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est un opérateur différentiel du second ordre satisfaisant les mêmes hypothèses que celle du théorème III.4.3 avec l'hypothèse que la fonction  $c$  est nulle. Alors, pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_\partial^d)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $t \in [0, \zeta[ \mapsto X_t$  est continue.

**Preuve :** on utilise le théorème II.5.10, page 74. Pour cela on fixe  $K \subset U \subset E$ , avec  $K$  compact et  $U$  ouvert. Il est facile de trouver un compact  $C$  tel que  $K \subset \overset{\circ}{C} \subset C \subset U$  et il existe  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\mathbf{1}_C \leq f \leq \mathbf{1}_U$ . Soit  $\mathbf{x} \in K$  et soit  $t \in ]0, \infty[$ , la formule de Dynkin implique que

$$p_t(\mathbf{x}, \mathbb{R}^d \setminus U) \leq \mathbf{E}_{\mathbf{x}}[1 - f(X_t)] \leq f(\mathbf{x}) - P_t f(\mathbf{x}) = - \int_0^t P_s A f(\mathbf{x}) ds$$

Comme  $f$  vaut 1 dans le voisinage  $\overset{\circ}{C}$  de  $\mathbf{x}$ , on a  $Af(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) = 0$ , car on a supposé  $c$  nulle partout. Comme cela est vrai pour tout  $\mathbf{x} \in K$ , on en déduit que

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} t^{-1} p_t(\mathbf{x}, \mathbb{R}^d \setminus U) \leq t^{-1} \int_0^t \|P_s A f - Af\|_\infty ds \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} 0.$$

Le théorème II.5.10 (page 74) s'applique et permet de conclure. ■



# Chapitre IV

## Nuages de Poisson.

Le but de ce chapitre est généraliser la notion de processus de Poisson, de construire des outils de calcul. Ces résultats sont ensuite utilisés pour étudier les processus de Lévy et développer la théorie des excursions des processus Markoviens.

### IV.1 Processus de Poisson linéaire homogène.

Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  qui est supposé suffisamment riche pour que l'on puisse y définir autant de suites de variables aléatoires indépendantes que nécessaire. Il est simple de constater que la phrase "on choisit un point uniformément au hasard sur  $\mathbb{R}_+$ " n'a pas de sens précis. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que cette phrase ait un sens précis : on note  $X$  ce point aléatoire uniforme. C'est donc une variable aléatoire positive définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et on doit avoir

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X \in [n, n+1[) .$$

Comme  $X$  est de loi "uniforme", on doit avoir  $\mathbf{P}(X \in [n, n+1[) = \mathbf{P}(X \in [0, 1[)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui contredit l'égalité précédente.

Si la phrase précédente n'a pas de sens, il est en revanche possible de définir un ensemble *infini dénombrable* de points aléatoires sur  $\mathbb{R}_+$  *uniformément répartis et totalement indépendants*. La définition d'un tel ensemble aléatoire est l'objet de cette section. Nous rappelons d'abord quelques résultats élémentaires sur les lois usuelles (Poisson, exponentielles, Erlang, statistiques d'ordre). Puis nous dégageons heuristiquement une définition d'un tel ensemble aléatoire de point avant d'en donner une construction.

#### IV.1.a Événements rares et loi de Poisson, lois exponentielles, statistiques d'ordre.

**Définition IV.1.1** Une v.a.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  est (de loi) de Poisson de paramètre  $\theta \in ]0, \infty[$  si  $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\theta} \theta^k / k!$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Si  $X$  est de Poisson de paramètre  $\theta$ , alors on vérifie facilement que

$$\mathbf{E}[r^X] = \exp(-\theta(1-r)), \quad r \in [0, 1].$$

En dérivant une puis deux fois cette fonction génératrice en 1,

$$\mathbf{E}[X] = \theta, \quad \mathbf{E}[X^2] = \theta + \theta^2 \quad \text{et donc} \quad \mathbf{var}(X) = \theta.$$

Cela justifie la définition suivante des lois de Poisson dégénérées.

**Définition IV.1.2** Une v.a.  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre infini (resp. nul) si  $\mathbf{P}(X = \infty) = 1$  (resp. si  $\mathbf{P}(X = 0) = 1$ ).  $\square$

**Lemme IV.1.3** Soient  $X_1, \dots, X_n$ , des v.a. de Poisson de paramètres respectifs  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . On les suppose indépendantes. Alors  $X_1 + \dots + X_n$  est une v.a. de Poisson de paramètre  $\theta_1 + \dots + \theta_n$ .

Plus généralement, soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des v.a. de Poisson indépendantes. On note  $\theta_n$  le paramètre de  $X_n$ . Alors  $X := \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est une v.a. de Poisson (éventuellement dégénérée) de paramètre  $\theta := \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$ .

**Preuve :** on montre d'abord le premier point. Pour cela, on observe que

$$\mathbf{E}[r^{X_1+\dots+X_n}] = \mathbf{E}[r^{X_1}] \dots \mathbf{E}[r^{X_n}] = \exp(-(\theta_1 + \dots + \theta_n)(1-r)) ,$$

ce qui permet de conclure puisque les fonctions génératrices caractérisent les lois sur  $\mathbb{N}$ .

Montrons le second point du lemme. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = X_0 + \dots + X_n$  et  $t_n = \theta_0 + \dots + \theta_n$ . On suppose d'abord que  $\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n < \infty$ . On remarque que  $S_n \leq S_{n+1}$  et que  $\lim_n S_n = X$ . Par convergence dominée et d'après le premier point du lemme, on a donc pour tout  $r \in [0, 1]$ ,

$$\mathbf{E}[r^X] = \lim_{n \rightarrow \infty} [r^{S_n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-t_n(1-r)) = \exp(-\theta(1-r)) ,$$

ce qui implique que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta$ .

On suppose ensuite que  $\theta = \infty$ . S'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\theta_n = \infty$ , alors  $X_n = \infty$  p.s. et donc  $X = \infty$ , ce qui montre le résultat voulu. Il reste à examiner le cas où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta_n < \infty$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , une inégalité de Markov implique que

$$\mathbf{P}(S_n \leq x) \leq e^x \mathbf{E}[e^{-S_n}] = e^{x-t_n(1-e^{-1})} .$$

Donc  $\lim_n \mathbf{P}(S_n \leq x) = 0$ . Or  $\{S < x\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{S_n \leq x\}$ , donc  $\mathbf{P}(X < x) = 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , ce qui implique que p.s.  $X = \infty$ , ce qui permet de conclure.  $\blacksquare$

**Approximation des lois de Poisson par des loi binomiales.** Les lois de Poisson apparaissent comme des loi binomiales dégénérées : plus précisément, on fixe  $\theta > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n > \theta$ , on considère  $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,n}$ , des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p_n = \theta/n$ . On pose

$$X_n = \sum_{1 \leq k \leq n} Y_{n,k} .$$

La probabilité que  $Y_{n,k}$  vole 1 est donc  $p_n$  : elle devient très petite lorsque  $n \rightarrow \infty$ . En revanche on voit que  $\mathbf{E}[X_n] = np_n = \theta$ , qui ne varie pas avec  $n$ . La loi  $X_n$  est une binomiale de paramètres  $(n, p_n)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et tout  $n \geq k$ , on a

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\theta^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\theta\right)^{n-k} \prod_{1 \leq j \leq k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

Cela montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\theta} \theta^k / k! .$$

En un sens que nous expliquons précisément plus loin  $X_n$  est très proche d'une loi de Poisson. Le théorème suivant donne un résultat plus précis.

**Théorème IV.1.4 (Approximation Binomiale-Poisson)** Pour tout  $n \geq 1$ , on se donne une suite  $(Y_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  de variables indépendantes de Bernoulli de paramètres respectifs  $p_{n,k}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(Y_{n,k} = 1) = p_{n,k}$ . On pose

$$X_n = \sum_{1 \leq k \leq n} Y_{n,k} \quad \text{et} \quad \theta_n = \sum_{1 \leq k \leq n} p_{n,k}.$$

Alors pour tout  $\theta > 0$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbf{P}(X_n = k) - e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \right| \leq 2|\theta - \theta_n| + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} p_{n,k}^2.$$

Si  $\lim_n \theta_n = \theta$  et si  $\lim_n \max_{1 \leq k \leq n} p_{n,k} = 0$ , alors  $\lim_n \sum_{1 \leq k \leq n} p_{n,k}^2 = 0$ , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbf{P}(X_n = k) - e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \right| = 0.$$

**Exemple d'application.** Avant de prouver ce théorème, voyons un exemple d'application de cette approximation : les statistiques nous disent que 3,2 piétons sont écrasés à Paris chaque mois (c'est un chiffre fantaisiste). Quelle est la probabilité que, le mois prochain, exactement 5 piétons soient écrasés à Paris ? Pour répondre rapidement à cette question on peut établir le modèle suivant : il y a (environ)  $n \simeq 2.10^6$  Parisiens qui ont une "chance" très faible de se faire écraser dans le mois suivant, et ce, indépendamment les uns des autres (nous négligeons les parents portant un nourrisson). On numérote les Parisiens de 1 à  $n$  et on note  $Y_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le Parisien numero  $k$  se fait écraser le mois prochain et qui vaut 0 sinon. D'après nos hypothèses, on peut considérer  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  comme une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre  $p$ . Par conséquent  $X = Y_1 + \dots + Y_n$  suit une loi Binomiale de paramètres  $(n, p)$ . Sa moyenne vaut  $np = 3,2$ . En appliquant la proposition précédente avec  $np = \theta = 3,2$ , on obtient

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbf{P}(X = k) - e^{-3,2} \frac{(3,2)^k}{k!} \right| \leq (3,2)^2/n.$$

Or  $(3,2)^2/n$  est de l'ordre de  $10^{-5}$ . On peut donc assimiler la probabilité que le mois prochain exactement 5 piétons soient écrasés à Paris à la quantité  $e^{-3,2}(3,2)^5/5!$ .

**Preuve du théorème d'approximation binomiale-Poisson.** Pour démontrer le théorème IV.1.4, on cherche à comparer les mesures de probabilités sur  $\mathbb{Z}$ . Une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{Z}$  est simplement donnée par  $\mu = (\mu(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ . On note  $\mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbb{Z}$ . Pour toutes mesures  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$ , on pose

$$d_{\text{var}}(\mu, \nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mu(k) - \nu(k)|.$$

Cette quantité est appelée *distance en variation de  $\mu$  et  $\nu$* . On peut voir  $\mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$  comme un sous-ensemble de l'espace des suites  $\ell^1(\mathbb{Z})$  et  $d_{\text{var}}$  n'est autre que la norme  $\ell^1$ . Il est facile de vérifier  $\mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$  est un fermé de  $\ell^1(\mathbb{Z})$  ce qui implique que  $(\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}), d_{\text{var}})$  est un espace métrique séparable complet. En fait  $d_{\text{var}}$  métrise la convergence en loi sur  $\mathbb{Z}$ .

Soyant  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$ , on rappelle que  $\mu * \nu$  est la convolée de  $\mu$  avec  $\nu$ . Il est clair que  $\mu * \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z})$  : précisément, on a  $\mu * \nu(k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(k-j)\nu(j)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . On rappelle que si  $X$ , de loi  $\mu$  et  $Y$ , de loi  $\nu$ , sont deux v.a. à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurables et indépendantes, alors la loi de  $X + Y$  est  $\mu * \nu$ .

On montre tout d'abord l'inégalité suivante.

$$\forall \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{Z}), \quad d_{\text{var}}(\mu_1 * \mu_2, \nu_1 * \nu_2) \leq d_{\text{var}}(\mu_1, \nu_1) + d_{\text{var}}(\mu_2, \nu_2). \quad (\text{IV.1})$$

*Preuve :* on a

$$\begin{aligned} d_{\text{var}}(\mu_1 * \mu_2, \nu_1 * \nu_2) &\leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\mu_2(k-j)\mu_1(j) - \nu_2(k-j)\nu_1(j)| = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\mu_2(k)\mu_1(j) - \nu_2(k)\nu_1(j)| \\ &\leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\mu_2(k)\mu_1(j) - \mu_2(k)\nu_1(j)| + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\mu_2(k)\nu_1(j) - \nu_2(k)\nu_1(j)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_2(k)d_{\text{var}}(\mu_1, \nu_1) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_1(j)d_{\text{var}}(\mu_2, \nu_2) = d_{\text{var}}(\mu_1, \nu_1) + d_{\text{var}}(\mu_2, \nu_2), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (IV.1).  $\square$

On introduit la notation suivante

$$\forall p \in [0, 1], \quad \mu_p = p\delta_1 + (1-p)\delta_0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in ]0, \infty[ \quad \nu_\theta = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} e^{-\theta} \theta^k \delta_k. \quad (\text{IV.2})$$

Autrement dit  $\mu_p$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et  $\nu_\theta$  la loi de Poisson de paramètre  $\theta$ . On montre alors :

$$\forall p \in [0, 1], \quad d_{\text{var}}(\mu_p, \nu_p) \leq 2p^2 \quad \text{et} \quad \forall \theta, \theta' \in ]0, \infty[, \quad d_{\text{var}}(\nu_\theta, \nu_{\theta'}) \leq 2|\theta - \theta'|. \quad (\text{IV.3})$$

*Preuve :* par convexité on rappelle que  $0 \leq 1 - e^{-p} \leq p$ . Or

$$\begin{aligned} d_{\text{var}}(\mu_p, \nu_p) &= (e^{-p} - 1 + p) + (p - pe^{-p}) + \sum_{k \geq 2} \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\ &= (e^{-p} - 1 + p) + (p - pe^{-p}) + (1 - e^{-p} - pe^{-p}) = 2p(1 - e^{-p}) \leq 2p^2, \end{aligned}$$

ce qui montre la première inégalité. Montrons la seconde : sans perte de généralité on suppose que  $\theta < \theta'$ . On pose  $\delta = \theta' - \theta$ . Le lemme IV.1.3 implique  $\nu_{\theta'} = \nu_\theta * \nu_\delta$  et (IV.1) implique que

$$d_{\text{var}}(\nu_\theta, \nu_{\theta'}) = d_{\text{var}}(\nu_\theta * \delta_0, \nu_\theta * \nu_\delta) \leq d_{\text{var}}(\nu_\theta, \nu_\theta) + d_{\text{var}}(\delta_0, \nu_\delta) = d_{\text{var}}(\delta_0, \nu_\delta).$$

Or  $d_{\text{var}}(\delta_0, \nu_\delta) = 1 - e^{-\delta} + \sum_{k \geq 1} \nu_\delta(k) = 2(1 - e^{-\delta}) \leq 2\delta$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

*Fin de la preuve du théorème IV.1.4 :* on fixe  $n$ . On note  $\mu_{X_n}$  la loi de  $X_n$ . Avec les notations de (IV.2),  $\mu_{X_n} = \mu_{p_{n,1}} * \dots * \mu_{p_{n,n}}$ . Le lemme IV.1.3 implique également que  $\nu_{\theta_n} = \nu_{p_{n,1}} * \dots * \nu_{p_{n,n}}$ . Par le lemme précédents et (IV.1), on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} d_{\text{var}}(\nu_\theta, \mu_{X_n}) &\leq d_{\text{var}}(\nu_\theta, \nu_{\theta_n}) + d_{\text{var}}(\nu_{\theta_n}, \mu_{X_n}) \leq 2|\theta - \theta_n| + d_{\text{var}}(\mu_{p_{n,1}} * \dots * \mu_{p_{n,n}}, \nu_{p_{n,1}} * \dots * \nu_{p_{n,n}}) \\ &= 2|\theta - \theta_n| + \sum_{1 \leq k \leq n} 2p_{n,k}^2, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.  $\blacksquare$

### Lois exponentielles.

**Définition IV.1.5** Une v.a.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  est (de loi) exponentielle de paramètre  $c \in ]0, \infty[$  si sa loi admet la densité  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto ce^{-ct}$  par rapport à la mesure de Lebesgue.  $\square$

Si  $X$  est une exponentielle de paramètre  $c$ , alors pour toute fonction mesurable  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{E}[f(X)] = \int_0^\infty f(t)ce^{-ct} dt .$$

Il est facile de vérifier pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  que

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda X}] = \frac{c}{c + \lambda} . \quad (\text{IV.4})$$

En dérivant une puis deux fois cette transformée de Laplace en 0, on obtient

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{c}, \quad \mathbf{E}[X^2] = \frac{2}{c^2} \quad \text{et donc} \quad \text{var}(X) = \frac{1}{c^2} .$$

Les variables exponentielles sont caractérisées par la propriété d'oubli qui s'énonce comme suit.

**Proposition IV.1.6** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable telle que  $\mathbf{P}(X > t) > 0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On suppose qu'elle possède la propriété d'oubli c'est-à-dire que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{P}(X - t > s \mid X > t) = \mathbf{P}(X > s) .$$

Alors  $X$  est une variable exponentielle pour un certain paramètre  $c \in ]0, \infty[$ .

**Preuve :** on pose  $f(t) = -\log \mathbf{P}(X > t)$ . La fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est bien définie. Par ailleurs  $f$  est continue à droite car  $F_X$  et continue à droite et  $f(t) = -\log(1 - F_X(t))$ . La propriété d'oubli implique que  $f(t) + f(s) = f(t + s)$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . On pose  $c = f(1)$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(n) = cn$  et  $nf(1/n) = c$ . Donc pour tout  $t \in \mathbb{Q}_+$ ,  $f(t) = ct$ . La continuité à droite implique que  $f(t) = ct$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On a donc  $\mathbf{P}(X > t) = e^{-ct}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $c$  ne peut être nul, ce qui termine la preuve de la proposition.  $\blacksquare$

**Proposition IV.1.7** Soient  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ , des exponentielles indépendantes de paramètre  $c \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $S = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$  suit une loi d'Erlang de paramètres  $(n, c)$ , c'est-à-dire que  $S$  a pour densité  $f_S(t) = \frac{c^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ct}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Preuve :** soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbf{E}[f(S)] = \int_{\mathbb{R}_+^n} c^n e^{-c(x_1 + \dots + x_n)} f(x_1 + \dots + x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

On effectue le changement de variable linéaire :

$$t = x_1 + \dots + x_n, \quad t_{n-1} = x_1 + \dots + x_{n-1}, \dots, \quad t_2 = x_1 + x_2, \quad t_1 = x_1$$

La matrice de transition est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Par ailleurs  $\mathbb{R}_+^n$  est envoyé sur le domaine  $\{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t\}$ . On a donc

$$\mathbf{E}[f(S)] = \int_{\{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t\}} c^n e^{-ct} f(t) dt dt_{n-1} \dots dt_1 .$$

Une simple récurrence montre que  $\int_{\{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t\}} dt_{n-1} \dots dt_1 = t^{n-1}/(n-1)!$ , ce qui implique le résultat par Fubini.  $\blacksquare$

**Statistique d'ordre de  $n$  v.a. réelles indépendantes de lois diffuses.** Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\Lambda_n(\mathbf{x}) = (x_{(k)})_{1 \leq k \leq n}$  le réarrangement croissant des réels  $(x_1, \dots, x_n)$ , c'est-à-dire que

$$x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq x_{(k+1)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad \text{et} \quad \{x_k ; 1 \leq k \leq n\} = \{x_{(k)} ; 1 \leq k \leq n\}.$$

**Lemme IV.1.8** *L'application  $\Lambda_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est mesurable.*

**Preuve :** pour tout  $y \in \mathbb{R}$  on pose  $\phi_y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j \leq n} \mathbf{1}_{]-\infty, y]}(x_j)$ . La fonction  $\phi_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$  est clairement mesurable. Pour tout  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ , on pose  $C_{y_1, \dots, y_n} := [\prod_{1 \leq k \leq n} ]-\infty, y_k]$ . On remarque alors que

$$\Lambda_n^{-1}(C_{y_1, \dots, y_n}) = \bigcap_{1 \leq k \leq n} \{\phi_{y_k} \geq k\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Or il est facile de montrer que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  est engendrée par les ensembles du type  $C_{y_1, \dots, y_n}$ ,  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ , ce qui implique la mesurabilité de  $\Lambda_n$ . ■

Cela permet de poser la définition suivante.

**Définition IV.1.9** Soient  $X_1, \dots, X_n$ , des v.a. réelles  $\mathcal{F}$  mesurables. On note  $(X_{(k)})_{1 \leq k \leq n}$  le réarrangement croissant de ces variables :

$$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq X_{(k+1)} \leq \dots \leq X_{(n)} \quad \text{et} \quad \{X_k ; 1 \leq k \leq n\} = \{X_{(k)} ; 1 \leq k \leq n\}.$$

La v.a.  $(X_{(k)})_{1 \leq k \leq n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable : c'est *statistique d'ordre de la suite*  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ . □

La proposition suivante décrit la statistique d'ordre de variables indépendantes de loi diffuse.

**Proposition IV.1.10** Soit  $X_1, \dots, X_n$ , des variables réelles indépendantes de même loi  $\mu$  qui est supposée diffuse. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) On note  $\mathbb{S}_n$  le groupe des permutation de  $\{1, \dots, n\}$ . Il existe  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_n$ , une permutation aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable dont la loi est uniforme, qui est indépendante de  $(X_{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ , et qui satisfait

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad X_{(k)} = X_{\sigma(k)}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (\text{IV.5})$$

(ii) Pour toute fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , on a

$$\mathbf{E}[f(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})] = n! \int_{\{x_1 < \dots < x_n\}} f(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n).$$

(iii) On note  $F(x) = \mu([-\infty, x])$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction de répartition de  $\mu$ . Alors, pour tout  $1 \leq k \leq n$  et pour toute fonction mesurable  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{E}[g(X_{(k)})] = \int_{\mathbb{R}} g(x) k \binom{n}{k} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \mu(dx).$$

**Preuve :** on note  $\Delta := \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}\}$  la diagonale de  $\mathbb{R}^2$  qui est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Par Fubini et le théorème de transfert, si  $i \neq j$ ,

$$\mathbf{P}(X_i = X_j) = \mu \otimes \mu(\Delta) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \mu(\{x\}) = 0$$

car la mesure  $\mu$  est diffuse. On pose  $A = \{X_j \neq X_k, 1 \leq j < k \leq n\}$ , qui est l'événement que les variables  $X_1, \dots, X_n$  soient toutes distinctes. On a

$$\mathbf{P}(\Omega \setminus A) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(X_i = X_j) = 0.$$

Donc  $\mathbf{P}(A) = 1$ . Pour toute permutation  $\gamma \in \mathbb{S}_n$ , on pose

$$A_\gamma = \{X_{\gamma(1)} < X_{\gamma(2)} < \dots < X_{\gamma(n)}\}.$$

Il est clair que les événements  $A_\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{S}_n$  sont deux-à-deux disjoints et que  $A = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{S}_n} A_\gamma$ . On définit alors la permutation aléatoire  $\sigma$  en posant  $\sigma = \gamma$  sur  $A_\gamma$  et  $\sigma = \text{Id}$  sur  $\Omega \setminus A$ . Comme  $\mathbf{P}(A) = 1$ ,  $\sigma$  satisfait bien (IV.5).

On observe ensuite que pour toute permutation  $\gamma \in \mathbb{S}_n$ , les v.a.  $(X_{\gamma(k)})_{1 \leq k \leq n}$  sont indépendantes et de même loi  $\mu$ . Donc

$$(X_{\gamma(1)}, X_{\gamma(2)}, \dots, X_{\gamma(n)}) \stackrel{\text{loi}}{=} (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

On en déduit alors que pour toute fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  et toute permutation  $\gamma \in \mathbb{S}_n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \mathbf{1}_{\{\sigma=\gamma\}}] &= \mathbf{E}[f(X_{\gamma(1)}, \dots, X_{\gamma(n)}) \mathbf{1}_{A_\gamma}] \\ &= \mathbf{E}[f(X_1, \dots, X_n) \mathbf{1}_{\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}}] \\ &= \int_{\{x_1 < \dots < x_n\}} f(x_1, \dots, x_n) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n). \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

En sommant sur  $\gamma \in \mathbb{S}_n$ , cela montre (ii). On en déduit que  $\int_{\{x_1 < \dots < x_n\}} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) = 1/n!$  et (IV.6) implique d'une part que  $\sigma$  est de loi uniforme sur  $\mathbb{S}_n$  et d'autre part que

$$\mathbf{E}[f(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) \mathbf{1}_{\{\sigma=\gamma\}}] = \mathbf{E}[f(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})] \mathbf{P}(\sigma = \gamma),$$

ce qui implique que  $\sigma$  est indépendante de  $(X_{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ , ce qui termine la preuve de (i).

Montrons (iii) : en raisonnant comme précédemment on montre que pour tout  $1 \leq k \leq n$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\{x_1 < \dots < x_{k-1} < x\}} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_{k-1}) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{]-\infty, x^{[k-1}}} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_{k-1}) = \frac{F(x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

De même, on a

$$\int_{\{x < x_{k+1} < \dots < x_n\}} \mu(dx_{k+1}) \dots \mu(dx_n) = \frac{1}{(n-k)!} \int_{]x, \infty[^{n-k}} \mu(dx_{k+1}) \dots \mu(dx_n) = \frac{(1-F(x))^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Par (ii) et Fubini, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(X_{(k)})] &= n! \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) g(x) \left( \int_{\{x_1 < \dots < x_{k-1} < x\}} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_{k-1}) \right) \left( \int_{\{x < x_{k+1} < \dots < x_n\}} \mu(dx_{k+1}) \dots \mu(dx_n) \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) g(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne (iii). ■

En particulier, lorsque les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et uniformes dans l'intervalle  $[0, t]$ , pour toute fonction  $f : [0, t]^n \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}\left[f\left(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}\right)\right] = \frac{n!}{t^n} \int_{\{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq t\}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (\text{IV.7})$$

### IV.1.b Une heuristique.

Pour résoudre le problème consistant à trouver une famille infinie dénombrable de points de  $\mathbb{R}_+$  qui soit *totalement aléatoire et uniformément répartie*, on peut commencer par élaborer un modèle discret de la manière suivante : on fixe un pas  $h > 0$  (qui tendra vers 0) et on discrétise  $\mathbb{R}_+$  en la collection d'intervalles  $I(h, n) = [nh, (n+1)h[, n \in \mathbb{N}$ . On note  $\Pi_h$  le nuage dénombrable de point "uniformément réparti" en supposant que chaque intervalle  $I(n, h)$  contient *au plus un point de  $\Pi_h$* . Comme on veut une répartition totalement aléatoire et uniforme, il est naturel de considérer que  $\xi_{h,n} = \#(\Pi_h \cap [nh, (n+1)h[)$  sont des variables de Bernoulli indépendantes dont paramètre ne dépend que de  $h$  : on le note  $p(h)$  et on a  $0 < p(h) < 1$ . On a donc les propriétés suivantes.

- (a) Pour tous entiers positifs  $n_1 < n_2$ , la variable entière  $\#(\Pi_h \cap [n_1h, n_2h[)$  suit la loi binomiale de paramètres  $n_2 - n_1$  et  $p(h)$ .
- (b) Pour tous  $n_1 < \dots < n_p$ , les variables  $\#(\Pi_h \cap [n_1h, n_2h[), \dots, \#(\Pi_h \cap [n_{p-1}h, n_ph[)$  sont indépendantes.

Par ailleurs on veut que  $\Pi_h$ , soit une version discrétisée d'un ensemble aléatoire dénombrable  $\Pi$  sur  $\mathbb{R}_+$  ; c'est-à-dire que l'on suppose que lorsque  $h$  tend vers 0,  $\Pi_h$  "tend" vers  $\Pi$ . Cela impose que  $\Pi_h$  ne dépende que "peu" de  $h$  lorsque  $h$  est petit. En particulier, si on se fixe un intervalle  $[a, b] \subset [0, \infty[$ , on veut que la quantité

$$m_h(a, b) = \mathbf{E} \left[ \#(\Pi_h \cap [\lfloor a/h \rfloor h, \lfloor b/h \rfloor h]) \right] = (\lfloor b/h \rfloor - \lfloor a/h \rfloor) p(h),$$

ne dépende pas trop de  $h$ , lorsque  $h$  est petit. Cela conduit donc à imposer la chose suivante.

- (c)  $p(h) = \theta h + o(h)$ , où  $\theta$  est un réel strictement positif fixé.

L'approximation binomiale-Poisson permet alors de dire que lorsque  $h$  est petit, la variable  $\#(\Pi_h \cap [a, b])$  est très proche d'une loi de Poisson de paramètre  $\theta(a - b)$  et  $m_h(a, b)$  est très proche de  $\theta(a - b)$ .

Intéressons-nous au numéro de l'intervalle où tombe le premier point de  $\Pi_h$  : on pose

$$T_1(h) = \inf\{n \geq 0 : \xi_{h,n} = 1\}.$$

Il est facile de voir que  $T_1(h)$  suit une loi géométrique :  $\mathbf{P}(T_1(h) = n) = p(h)(1-p(h))^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On introduit aussi les numéros d'intervalle des points successifs. On les note  $(T_k(h))_{k \geq 1}$  et on les définit récursivement par

$$T_{k+1}(h) = \inf\{n > T_k(h) : \xi_{h,n} = 1\}.$$

On a clairement les propriétés suivantes.

- (d)  $\{\lfloor x/h \rfloor h ; x \in \Pi_h\}$  est exactement l'ensemble  $\{hT_k(h) ; k \geq 1\}$ .
- (e) Les variables  $\mathcal{E}_1(h) = T_1(h), \dots, \mathcal{E}_k(h) = T_k(h) - T_{k-1}(h) - 1, \dots$ , sont i.i.d.

Il est ensuite facile de constater que  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{P}(h\mathcal{E}_k(h) > t) = \exp(-\theta t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Autrement dit lorsque  $h$  est proche de 0, les variables indépendantes  $(h\mathcal{E}_k(h))_{k \geq 1}$  sont proches d'une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètre  $\theta$ .

Résumons les résultats apportés par cette brève heuristique : on cherche à définir un ensemble aléatoire de points  $\Pi$  qui soit infini dénombrable, sans point d'accumulation, "totalement aléatoire" et "uniformément réparti" sur  $\mathbb{R}_+$ . Si un tel objet existe, alors il est raisonnable de penser qu'il satisfait *nécessairement* les propriétés suivantes.

- (i) Il existe  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ , tel que pour tous réels positifs  $a < b$ , la variable  $\#(\Pi \cap [a, b])$  comptant le nombre de points de  $\Pi$  tombant dans  $[a, b]$ , suit une loi de Poisson de paramètre  $(b - a)\theta$ .
- (ii) Pour tous réels positifs  $t_1 < \dots < t_p$ , les variables

$$\#(\Pi \cap [0, t_1]), \#(\Pi \cap [t_1, t_2]), \dots, \#(\Pi \cap [t_{p-1}, t_p])$$

sont indépendantes.

- (iii)  $\Pi$  peut être indexé en croissant :  $\Pi = \{T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots\}$ . De plus les variables  $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots$  sont des variables exponentielles indépendantes de paramètre  $\theta$ .

Comme nous le montrons plus loin, ces propriétés sont redondantes : (i) et (ii) sont des conséquences de (iii). La propriété (iii) permet de donner une définition simple de  $\Pi$ , qui est le point de départ de la section suivante.

### IV.1.c Construction des processus Poisson homogènes sur $\mathbb{R}_+$ .

**Définition IV.1.11** Soit  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ , une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètre  $\theta$ . On pose

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n, \quad \Pi = \{T_n ; n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad N_t = \#(\Pi \cap [0, t]), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

On remarque que  $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0, t]}(T_n)$ , est une variable mesurable. Le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  est appelé *processus de Poisson homogène d'intensité  $\theta$* . L'ensemble aléatoire discret  $\Pi$  est appelé *nuage Poissonien homogène d'intensité  $\theta$  sur  $\mathbb{R}_+$* .  $\square$

Par commodité, on pose  $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et pour tout ensemble Borélien  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , on pose

$$N_B(\Pi) = \# \Pi \cap B = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_B(T_n) \in \mathbb{N}_\infty.$$

On remarque que  $N_B(\Pi)$  est une variable  $\mathcal{F}$ -mesurable. C'est la *fonction de comptage de  $\Pi$  en  $B$* . Par la loi des grands nombres,  $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty) = 1$ . Par conséquent si  $B$  est bornée, on a  $\mathbf{P}(N_B(\Pi) < \infty) = 1$ .

On constate facilement que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $t \mapsto N_t(\omega)$  est croissant et *continu à droite et admet une limite à gauche en tout point*, c'est-à-dire que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est càdlàg. On pose  $\Delta N(t) = N_t - N_{t-}$ , qui représente le saut éventuel au temps  $t$  du processus. On a alors,  $\Pi = \{t \in \mathbb{R}_+ : \Delta N(t) \neq 0\}$  et  $N_{[0, t]}(\Pi) = N_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Par conséquent, se donner  $(N_t)_{t \geq 0}$  équivaut à se donner  $\Pi$ .

Le théorème suivant montre que  $\Pi$  peut se voir comme un ensemble infini dénombrable, complètement aléatoire et uniformément réparti sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Théorème IV.1.12** On note  $\ell$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $\Pi$  un nuage Poissonien homogène d'intensité  $\theta$  et soit  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (i) Pour tout  $s < t$ ,  $N_t - N_s = N_{]s, t]}(\Pi)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta(t - s)$ .
- (ii) Pour tous  $t_1 < \dots < t_p$ , les variables  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_p} - N_{t_{p-1}}$  sont indépendantes.
- (iii) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble  $\Pi \cap [0, t]$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | N_t = n)$  a même loi que  $\{U_1, \dots, U_n\}$ , où  $U_1, \dots, U_n$  sont i.i.d. uniformes sur  $[0, t]$ .
- (iv) Soient  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , disjoints deux-à-deux. Alors,  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs  $\theta\ell(A_1), \dots, \theta\ell(A_p)$ .

**Remarque IV.1.13** On voit que (iv) implique (i) et (ii), qui sont plus élémentaires et qui ne concernent que  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Puisque dans de nombreuses applications, seul  $(N_t)_{t \geq 0}$  intervient, nous avons pris la peine d'expliquer (i) et (ii).  $\square$

**Preuve du théorème :** montrons d'abord que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta t$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On observe que  $T_n$  est indépendante de  $\mathcal{E}_{n+1}$  et que  $T_n$  suit une loi d'Erlang de paramètres  $(n, \theta)$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N_t = n) &= \mathbf{P}(T_n \leq t < T_n + \mathcal{E}_{n+1}) = \int_0^t du \theta^n \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta u} \left( \int_{t-u}^{\infty} dv \theta e^{-\theta v} \right) \\ &= \frac{\theta^n}{(n-1)!} e^{-\theta t} \int_0^t du u^{n-1} = \frac{(t\theta)^n}{n!} e^{-\theta t},\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat désiré.

Nous allons montrer (iii) et ensuite prouver que (iii) implique (iv), ce qui est suffisant d'après la remarque précédente. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction mesurable bornée. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[F(T_1, \dots, T_n); N_t = n] &= \mathbf{E}[F(T_1, \dots, T_n); T_n \leq t < T_n + \mathcal{E}_{n+1}] \\ &= \int_{\{s_1 + \dots + s_n \leq t\}} ds_1 \dots ds_n \theta^n e^{-\theta(s_1 + \dots + s_n)} F(s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_n) \int_{t-s_1+\dots+s_n}^{\infty} ds_{n+1} \theta e^{-\theta s_{n+1}} \\ &= \theta^n e^{-\theta t} \int_{\{s_1 + \dots + s_n \leq t\}} ds_1 \dots ds_n F(s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_n) \\ &= \theta^n e^{-\theta t} \int_{\{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq t\}} dx_1 dx_2 \dots dx_n F(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}[F(T_1, \dots, T_n) | N_t = n] = \frac{n!}{t^n} \int_{\{0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq t\}} dx_1 dx_2 \dots dx_n F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{IV.8})$$

ce qui implique (iii) par (IV.7).

Montrons (iv) : soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On suppose tout d'abord que  $A_1, \dots, A_p$  sont des Boréliens disjoints *inclus* dans  $[0, t]$ . On fixe  $n \geq 1$ . Le point (iii) implique que

$$(N_{A_1}(\mathbf{\Pi}), \dots, N_{A_p}(\mathbf{\Pi})) \text{ sous } \mathbf{P}(\cdot | N_t = n) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\#(\Pi_n \cap A_1), \dots, \#(\Pi_n \cap A_p)) \text{ sous } \mathbf{P},$$

où  $\Pi_n = \{U_1, \dots, U_n\}$ , avec  $(U_k, 1 \leq k \leq n)$  i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, t]$ . Par commodité on pose  $A_{p+1} = [0, t] \setminus \bigcup_{j=1}^p A_j$ . Soient  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on pose :

$$X_k = e^{iu_1} \mathbf{1}_{A_1}(U_k) + \dots + e^{iu_p} \mathbf{1}_{A_p}(U_k) + \mathbf{1}_{A_{p+1}}(U_k).$$

Les variables  $(X_1, \dots, X_n)$  sont indépendantes et de même loi. De plus on a

$$X_1 \dots X_n = \prod_{k=1}^p \exp(iu_k \#(\Pi_n \cap A_k)).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E} \left[ \prod_{1 \leq k \leq p} \exp(iu_k N_{A_k}(\mathbf{\Pi})) \mid N_t = n \right] = \mathbf{E}[X_1 \dots X_n] = \mathbf{E}[X_1]^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left( e^{iu_1} \frac{\ell(A_1)}{t} + \dots + e^{iu_p} \frac{\ell(A_p)}{t} + 1 - \frac{\ell(A_1)}{t} - \dots - \frac{\ell(A_p)}{t} \right)^n \\
&= t^{-n} (t - (1 - e^{iu_1})\ell(A_1) - \dots - (1 - e^{iu_p})\ell(A_p))^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[ \prod_{1 \leq k \leq p} \exp(iu_k N_{A_k}(\Pi)) \right] &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(N_t = n) t^{-n} (t - (1 - e^{iu_1})\ell(A_1) - \dots - (1 - e^{iu_p})\ell(A_p))^n \\
&= e^{-\theta t} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (\theta t - (1 - e^{iu_1})\theta\ell(A_1) - \dots - (1 - e^{iu_p})\theta\ell(A_p))^n \\
&= \prod_{1 \leq k \leq p} \exp(-\theta\ell(A_k)(1 - e^{iu_k})) ,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne bien le point (iv), dans le cas où  $A_1, \dots, A_p \subset [0, t]$ . Le cas général découle facilement du fait que  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tout  $1 \leq k \leq p$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N_{A_k} \cap [0, t]} = N_{A_k}(\Pi)$ . ■

### EXERCICES.

**Exercice 1** *Paradoxe de l'inspection* Soit  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ , une suite i.i.d. de variables de loi exponentielle de paramètre  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \{T_n ; n \in \mathbb{N}^*\},$$

qui est donc un nuage Poissonnier homogène sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $\theta$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on note  $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0, t]}(T_n)$ . On s'intéresse aux variables  $R_t$  et  $D_t$  définies par

$$R_t = t - T_{N_t} \quad \text{et} \quad D_t = T_{N_t+1} - t ,$$

qui sont telles que  $R_t + D_t = \mathcal{E}_{N_t+1}$ .

1. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $D_t$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\theta$ , c'est-à-dire que  $D_t$  a même loi que  $\mathcal{E}_1$ .
2. Montrer que  $R_t$  a même loi que le maximum de  $t$  et d'une exponentielle de paramètre  $\theta$ , c'est-à-dire que  $D_t$  a même loi que  $t \vee \mathcal{E}_1$ .
3. Calculer en fonction de  $t$  et de  $\theta$ , l'espérance  $\mathbf{E}[\mathcal{E}_{N_t+1}]$  et remarquer que

$$\mathbf{E}[\mathcal{E}_{N_t+1}] > \frac{1}{\theta} = \mathbf{E}[\mathcal{E}_1] ,$$

ce qui peut sembler "paradoxal" à première vue.

4. Montrer que  $D_t$  et  $R_t$  sont indépendantes et prouver que lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $\mathcal{E}_{N_t+1}$  converge vers une loi de densité  $s \mapsto \theta^2 s e^{-\theta s}$ . □

**Exercice 2** (*Statistiques d'ordre et processus de Poisson homogènes*) Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$ , une suite de variables i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $n \geq 2$ , on rappelle la notation  $(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)})$  pour la statistique d'ordre associée à  $(U_1, \dots, U_n)$ . Pour des raisons pratiques, on pose  $U_0^{(n)} = 0$  et  $U_{n+1}^{(n)} = 1$ . On se donne également  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ , une suite i.i.d. de variables de loi exponentielle de paramètre 1, et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \{T_n ; n \in \mathbb{N}^*\},$$

qui est donc un nuage Poissonnier homogène sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité 1.

1. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a l'identité en loi suivante

$$(T_1/T_{n+1}, \dots, T_n/T_{n+1}) \stackrel{(loi)}{=} (U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}) .$$

2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$n U_k^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} T_k .$$

3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{n(U_k^{(n)} - U_{k-1}^{(n)}) > x\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{proba})} e^{-x} .$$

4. Montrer que

$$\frac{n}{\log n} \max_{1 \leq k \leq n+1} (U_k^{(n)} - U_{k-1}^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{proba})} 1 .$$

5. Montrer que

$$n^2 \min_{1 \leq k \leq n} (U_k^{(n)} - U_{k-1}^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} \text{exponentielle}(1) .$$

□

## IV.2 Généralités sur les nuages de points.

On détaillera dans cette section quelques résultats concernant les nuages de points aléatoires (mesurabilité, loi et indépendance).

### IV.2.a Premières définitions.

**Définition IV.2.1** (*Nuages, fonctions de comptage*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. On utilise la notation  $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

- (a)  $\mathbb{S}_E := \{\pi \subset E : \pi \text{ est dénombrable}\}$  est l'*ensemble des nuages de points sur E*. On rappelle que *dénombrable* signifie *fini* (éventuellement vide) ou *en bijection avec N*.
- (b) Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , et tout  $\pi \in \mathbb{S}_E$ , on pose  $N_B(\pi) = \#(\pi \cap B)$ , qui est le nombre (éventuellement infini) de points de  $\pi$  qui sont dans  $B$ . La fonction  $N_B : \mathbb{S}_E \rightarrow \mathbb{N}_\infty$  est appelée la *fonction de comptage en B*.
- (c) On note  $\mathcal{S}_E$  la tribu engendrée sur  $\mathbb{S}_E$  par les fonctions de comptage  $N_B$ ,  $B \in \mathcal{E}$ .
- (d) Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable et  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , une fonction. C'est un *nuage aléatoire* si cette fonction est  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable, ce qui est équivalente à ce que pour tout  $B \in \mathcal{E}$ ,  $N_B(\Pi) : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_\infty$  soit  $\mathcal{F}$ -mesurable. □

**Exemple IV.2.2** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$ , un espace mesurable. Soit  $X_n : \Omega \rightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , une suite de variables  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -mesurables telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n > m \geq 1, \quad X_n(\omega) \neq X_m(\omega) . \quad (\text{IV.9})$$

Soit  $M : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_\infty$ , une variable  $\mathcal{F}$ -mesurable. On pose :

$$\Pi = \begin{cases} \emptyset & \text{si } M = 0, \\ \{X_1, \dots, X_M\} & \text{si } 0 < M < \infty, \\ \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\} & \text{si } M = \infty. \end{cases}$$

Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , (IV.9) implique que

$$N_B(\Pi) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_B(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq M\}}$$

qui est clairement  $\mathcal{F}$ -mesurable. Cela implique donc que  $N_B(\Pi)$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable et donc que  $\Pi$  est un nuage aléatoire. □

Dans le lemme suivant, on définit une caractéristique importante des nuages aléatoires, à savoir leur *intensité*.

**Lemme IV.2.3** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité et  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage aléatoire. On pose*

$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad \mu(B) = \mathbf{E}[N_B(\Pi)].$$

*Alors,  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure positive appelée **intensité** de  $\Pi$ .*

**Preuve :** on observe que  $N_\emptyset(\Pi) = 0$ , sur  $\Omega$ , donc  $\mu(\emptyset) = 0$ . Soient  $B_n \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , deux-à-deux disjoints. On pose  $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Par interversion série/intégrale pour la mesure de comptage  $\#$  et pour  $\mathbf{P}$ , on a bien

$$\mu(B) = \mathbf{E}[N_B(\Pi)] = \mathbf{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} N_{B_n}(\Pi)\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[N_{B_n}(\Pi)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$$

ce qui implique le résultat désiré. ■

**Définition IV.2.4** (*Fonctions de comptage généralisées*) Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable et  $f : E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable. On pose

$$\forall \pi \in \mathbb{S}_E, \quad N_f(\pi) = \sum_{x \in \pi} f(x).$$

On appelle  $N_f : \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$  la *fonction de f-comptage*. On remarque que  $N_B = N_{1_B}$ , pour tout  $B \in \mathcal{E}$ . □

Pour tous  $k, n \in \mathbb{N}$ , on pose  $B_n := \{f \geq n\}$  et  $A_{k,n} := \{k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}\}$ . Il est clair que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé, les  $A_{k,n} \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont deux-à-deux disjoints. On pose  $f_n := n1_{B_n} + \sum_{0 \leq k < n2^n} k2^{-n}1_{A_{k,n}}$ . On rappelle que  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  et  $\sup_n f_n = f$ . On remarque aussi que

$$N_{f_n} = nN_{B_n} + \sum_{0 \leq k \leq n2^n} k2^{-n}N_{A_{k,n}}. \quad (\text{IV.10})$$

Cela montre que  $N_{f_n}$  est  $\mathcal{S}_E$ -mesurable. Soit  $\pi \in \mathbb{S}_E$ ; on note  $\nu = \sum_{x \in \pi} \delta_x$  sa mesure empirique. On remarque que  $N_f(\pi) = \int_E f d\nu$ . Par convergence monotone relativement à  $\nu$ , on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow N_{f_n}(\pi) = N_f(\pi). \quad (\text{IV.11})$$

On en déduit le premier point du lemme suivant.

**Lemme IV.2.5** *Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $f : E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (i) *La fonction  $N_f : \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$  est  $\mathcal{S}_E$ -mesurable.*
- (ii) *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité et  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage aléatoire d'intensité  $\mu$ . Alors  $N_f(\Pi)$  est une variable  $\mathcal{F}$ -mesurable et  $\mathbf{E}[N_f(\Pi)] = \int_E f(x) \mu(dx)$ .*

**Preuve :** par (IV.10),  $\mathbf{E}[N_{f_n}(\Pi)] = \sum_{0 \leq k \leq n2^n} k2^{-n}\mu(A_{k,n}) = \int_E f_n(x) \mu(dx)$ , et on conclut par convergence monotone sous  $\mathbf{P}$  et sous  $\mu$ . ■

Il arrive fréquemment de *restreindre* un nuage de point à un certain sous ensemble  $B$  et de prendre *l'image* d'un nuage de points par une fonction  $\phi$ : modulo un hypothèse, ces deux opérations sont mesurables, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme IV.2.6** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (i) Soit  $B \in \mathcal{E}$ . Alors  $R_B : \pi \in \mathbb{S}_E \mapsto \pi \cap B \in \mathbb{S}_E$  est  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{S}_E)$ -mesurable.
- (ii) Soit  $(E', \mathcal{E}')$ , un espace mesurable et soit  $\phi : E \rightarrow E'$ , une fonction  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable supposée injective. Alors  $\Phi : \pi \in \mathbb{S}_E \mapsto \phi(\pi) \in \mathbb{S}_{E'}$  est  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{S}_{E'})$ -mesurable.

**Preuve :** on remarque que pour tout  $C \in \mathcal{E}$ ,  $N_C \circ R_B = N_{B \cap C}$  qui est donc  $\mathcal{S}_E$ -mesurable, ce qui implique (i). Montrons (ii) : puisque  $\phi$  est injective, on remarque que pour tout  $B'$  et tout nuage  $\pi \in \mathbb{S}_E$ , on a  $\#(\{\phi(x); x \in \pi\} \cap B') = \#\{x \in \pi : \phi(x) \in B'\}$  et donc que  $N_{B'}(\phi(\pi)) = N_{\phi^{-1}(B')}(\pi)$ . On a  $N_{B'} \circ \Phi = N_{\phi^{-1}(B')}$  qui est  $\mathcal{S}_E$ -mesurable, ce qui implique le résultat voulu. ■

Ces résultats se traduisent immédiatement pour les nuages aléatoires.

**Lemme IV.2.7** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage aléatoire. Les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Soit  $B \in \mathcal{E}$ . Alors  $\Pi \cap B$  est un nuage aléatoire. On munit  $B$  de la tribu  $\mathcal{E}(B) = \{A \cap B; A \in \mathcal{E}\}$ . Alors  $\Pi \cap B$  est un nuage aléatoire sur  $(B, \mathcal{E}(B))$  au sens de la définition IV.2.1 (d).
- (ii) Soit  $(E', \mathcal{E}')$ , un espace mesurable et soit  $\phi : E \rightarrow E'$ , une fonction  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable supposée injective. Alors  $\phi(\Pi)$  est un nuage aléatoire sur  $E'$  d'intensité  $\mu' = \mu \circ \phi^{-1}$  qui est la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$ .

#### IV.2.b Loi et indépendance de nuages aléatoires.

On voit un nuage aléatoire  $\Pi$  comme le processus de ses fonctions de comptage  $(N_B(\Pi))_{B \in \mathcal{E}}$ , processus qui est indexés par  $\mathcal{E}$ .

**Définition IV.2.8** On note  $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{S}_E$  la classe contenant tous les sous-ensembles  $C$  de la forme

$$C = \{\pi \in \mathbb{S}_E : N_{B_1}(\pi) \geq k_1; \dots; N_{B_q}(\pi) \geq k_q\}. \quad (\text{IV.12})$$

avec  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$ , et  $k_1, \dots, k_q \in \mathbb{N}$ . □

**Lemme IV.2.9** La classe  $\mathcal{C}_E$  est un pi-système engendrant  $\mathcal{S}_E$  :  $\sigma(\mathcal{C}_E) = \mathcal{S}_E$ .

**Preuve :** clairement  $\mathcal{C}_E$  est stable par intersection et contient  $\mathbb{S}_E = \{\pi \in \mathbb{S}_E : N_E(\pi) \geq 0\}$ . De plus, la forme (IV.12) des ensembles de  $\mathcal{C}_E$  implique que  $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{S}_E$  et donc que  $\sigma(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{S}_E$ . On remarque ensuite que pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\{\pi \in \mathbb{S}_E : N_B(\pi) \geq k\} \in \mathcal{C}_E$ . Par conséquent  $N_B : \mathbb{S}_E \rightarrow \mathbb{N}_\infty$  est  $\sigma(\mathcal{C}_E)$ -mesurable. Or  $\mathcal{S}_E$  est, par définition, la plus petite tribu sur  $\mathbb{S}_E$  rendant mesurable les fonctions de comptage. Par conséquent  $\mathcal{S}_E \subset \sigma(\mathcal{C}_E)$ , ce qui termine la preuve du lemme. ■

Puisqu'on l'utilise plusieurs fois, on établit sous forme de lemme le résultat élémentaire suivant.

**Lemme IV.2.10** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soient  $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$ . Alors il existe un entier  $p \leq 2^q$  et  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ , disjoints deux-à-deux tels que tout  $B_k$  est réunion de certains  $A_\ell$ , c'est-à-dire

$$\forall k \in \{1, \dots, q\}, \exists I_k \subset \{1, \dots, p\} : B_k = \bigcup_{\ell \in I_k} A_\ell \quad \text{et donc} \quad N_{B_k} = \sum_{\ell \in I_k} N_{A_\ell}. \quad (\text{IV.13})$$

**Preuve :** on note  $\mathcal{B}$  la classe des ensembles de la forme  $\bigcap_{1 \leq k \leq q} C_k$ , où  $C_k$  est soit  $B_k$ , soit son complémentaire  $E \setminus B_k$ ;  $\mathcal{B}$  compte au plus  $2^q$  ensembles distincts, les ensembles de  $\mathcal{B}$  sont dans  $\mathcal{E}$  et ils forment une partition de  $E$ . On se donne explicitement  $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_p\}$ , avec  $p = \#\mathcal{B}$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, q\}$ , on pose  $I_k = \{\ell \in \{1, \dots, p\} : B_k \cap A_\ell \neq \emptyset\}$  et on vérifie (IV.13) facilement. ■

La proposition suivante caractérise la loi d'un nuage de points.

**Proposition IV.2.11** *Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ , des espaces de probabilité. Soient  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$  et  $\Pi' : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}_E$ , deux nuages aléatoires. Ils ont la même loi ssi pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et tous  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$  disjoints deux-à-deux, on a*

$$(N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)) \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{(loi)}{=} (N_{A_1}(\Pi'), \dots, N_{A_p}(\Pi')) \text{ sous } \mathbf{P}' . \quad (\text{IV.14})$$

**Preuve :** il est clair que  $\Psi : \pi \in \mathbb{S}_E \mapsto (N_{A_1}(\pi), \dots, N_{A_p}(\pi)) \in \mathbb{N}_\infty^p$  est  $\mathcal{S}_E$ -mesurable car chaque composante de cette application l'est. Si  $\Pi$  et  $\Pi'$  ont même loi, alors il en est de même pour  $\Psi(\Pi)$  et  $\Psi(\Pi')$ , ce qui est exactement (IV.14). Montrons la réciproque : par le lemme IV.2.10, l'identité (IV.14) implique pour tous  $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$ , on a

$$(N_{B_1}(\Pi), \dots, N_{B_q}(\Pi)) \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{(loi)}{=} (N_{B_1}(\Pi'), \dots, N_{B_q}(\Pi')) \text{ sous } \mathbf{P}' . \quad (\text{IV.15})$$

Cela implique que  $\mathbf{P}(\Pi \in C) = \mathbf{P}'(\Pi' \in C)$ , pour tout  $C$  de la forme (IV.12). Si on note  $\nu$  et  $\nu'$  les lois respectives de  $\Pi$  et de  $\Pi'$ , cela montre que  $\nu(C) = \nu'(C)$ , pour tout  $C \in \mathcal{C}_E$ . Comme  $\mathcal{C}_E$  est un pi-système engendrant  $\mathcal{S}_E$  (lemme IV.2.9), le théorème d'unicité du prolongement des mesures de probabilité implique que  $\nu = \nu'$ . ■

**Brefs rappels sur la notion d'indépendance.** Rappelons quelques définitions générales sur l'indépendance. (voir la section ??, page ??, du chapitre ?? en appendice).

**1–** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soient  $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{F}$ ,  $i \in I$ , une famille de classes de sous-ensembles mesurables. Les classes  $\mathcal{R}_i$ ,  $i \in I$ , sont (mutuellement) indépendantes (sous  $\mathbf{P}$ ) si pour tout sous-ensemble d'indices  $J \subset I$ , non-vide et fini, et pour tous  $A_j \in \mathcal{R}_j$ ,  $j \in J$ , les événements  $A_j$ ,  $j \in J$  sont mutuellement indépendants. Autrement dit :

$$\forall J \subset I \text{ } J \text{ fini, } \forall A_j \subset \mathcal{R}_j, \ j \in J, \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j) .$$

On rappelle le résultat standard suivant.

**Proposition IV.2.12** *On conserve les notations précédentes. Soit  $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{F}$ ,  $i \in I$ , une famille de pi-systèmes qui sont mutuellement indépendants. Alors, les tribus engendrées  $\sigma(\mathcal{P}_i)$ ,  $i \in I$ , sont également mutuellement indépendantes.*

**Preuve :** voir la proposition ??, page ?? en appendice. ■

**2–** Soit  $(G, \mathcal{G})$ , un espace mesurable. Soit  $Y : \Omega \rightarrow G$ , une variable  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -mesurable. On rappelle que la tribu engendrée par  $Y$  est simplement donnée par  $\sigma(Y) = \{\{Y \in A\}; A \in \mathcal{G}\}$ . Soit  $\mathcal{C}$ , un pi-système sur  $G$  engendrant  $\mathcal{G}$ . On pose  $\mathcal{P}_Y := \{\{Y \in C\}; C \in \mathcal{C}\}$ . On voit immédiatement que  $\mathcal{P}_Y$  est un pi-système sur  $\Omega$  générant  $\sigma(Y)$ .

Soit  $X_i : \Omega \rightarrow G$ ,  $i \in I$ , une famille de variables  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ -mesurables. Les variables  $X_i$ ,  $i \in I$ , sont indépendantes si les tribus  $\sigma(X_i)$ ,  $i \in I$  sont indépendantes.

**Lemme IV.2.13** *On reprend les notation précédentes. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.*

- (i) *Les variables  $X_i$ ,  $i \in I$ , sont indépendantes.*
- (ii)  $\mathbf{P}(X_{i_1} \in C_1; \dots; X_{i_n} \in C_n) = \mathbf{P}(X_{i_1} \in C_1) \dots \mathbf{P}(X_{i_n} \in C_n)$ , pour tous  $i_1, \dots, i_n \in I$ , et tous  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ .

**Preuve :** il est clair que (i) implique (ii). Montrons la réciproque : on remarque que (ii) implique que les pi-systèmes  $\mathcal{P}_{X_i}$ ,  $i \in I$  sont mutuellement indépendants. La proposition IV.2.12 implique alors que les tribus  $\sigma(\mathcal{P}_{X_i}) = \sigma(X_i)$ ,  $i \in I$  sont mutuellement indépendantes, c'est-à-dire (i). ■

Après ces quelques rappels sur la notion d'indépendance, on peut énoncer le critère d'indépendance suivant pour les nuages aléatoires.

**Proposition IV.2.14** *Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $\Pi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ ,  $i \in I$ , une famille de nuages aléatoires. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.*

- (i) *Les nuages  $\Pi_i$ ,  $i \in I$ , sont mutuellement indépendants.*
- (ii) *Pour tous  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ , deux-à-deux disjoints les vecteurs aléatoires de  $\mathbb{N}_\infty^p$ ,  $(N_{A_k}(\Pi_i))_{1 \leq k \leq p}$ ,  $i \in I$ , sont mutuellement indépendants.*

**Preuve :** il est clair que  $\Psi : \pi \in \mathbb{S}_E \mapsto (N_{A_1}(\pi), \dots, N_{A_p}(\pi)) \in \mathbb{N}_\infty^p$  est  $\mathcal{S}_E$ -mesurable car chaque composante de cette application l'est. Si les nuages  $\Pi_i$ ,  $i \in I$ , sont mutuellement indépendants, alors il en est de même pour la famille de vecteurs aléatoires  $\Psi(\Pi_i)$ ,  $i \in I$ . Cela montre que (i) implique (ii).

Réciproquement, par le lemme IV.2.10, pour tous  $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$ , les vecteurs aléatoires  $(N_{B_\ell}(\Pi_i))_{1 \leq \ell \leq q}$ ,  $i \in I$ , sont indépendants. Soient  $i_1, \dots, i_n \in I$ , et  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}_E$  qui par définition peuvent s'écrire

$$C_m = \{\pi \in \mathbb{S}_E : N_{B_1}(\pi) \geq k_1(m); \dots; N_{B_q}(\pi) \geq k_q(m)\},$$

où  $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$ , et où pour tout  $1 \leq m \leq n$ ,  $k_1(m), \dots, k_q(m) \in \mathbb{N}$ . On en déduit donc que  $\mathbf{P}(\Pi_{i_1} \in C_1; \dots; \Pi_{i_n} \in C_n) = \mathbf{P}(\Pi_{i_1} \in C_1) \dots \mathbf{P}(\Pi_{i_n} \in C_n)$ , et le lemme IV.2.13 permet de conclure. ■

### IV.2.c Mesurabilité de certaines opérations sur les nuages de points.

Le but de cette section technique est de montrer la mesurabilité du *produit*, de l'*intersection* et de l'*union* de nuages aléatoires, ainsi que d'autres fonctions apparaissant naturellement. Or *en général, il n'est pas toujours clair que ces opérations soient mesurables* et les obstructions sont doubles : les espaces  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$  doivent satisfaire des conditions de régularité ; il est aussi nécessaire de se restreindre à des nuages finis sur chaque ensemble d'une partition fixée. Ces deux types de restrictions techniques ne sont pas très contraignantes dans la pratique.

On suppose dans la suite que l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  sur lequel sont définis les nuages de points sont *séparables et séparés* : on rappelle la définition I.1.10, page 5. On rappelle ici le théorème ??, page ?? en appendice Si  $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable séparable et séparé alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $\mathcal{E}$  contient tous les singltons.
- (ii)  $(E, \mathcal{E})$  est diagonal, c-à-d. que  $\Delta := \{(x, x) ; x \in E\} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ .
- (iii) Il existe  $C \subset \mathbb{R}$  (pas nécessairement Borélien) tel que  $(E, \mathcal{E})$  soit isomorphe à  $(C, \mathcal{B}(C))$ , où  $\mathcal{B}(C)$  est la tribu trace des Boréliens de  $\mathbb{R}$  sur  $C$ .

Le type de restriction sur les nuages de points est donné par le lemme suivant.

**Définition IV.2.15** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un ensemble mesurable. Soit  $B_p \in \mathcal{E}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , une *partition de E*, que l'on note  $\mathbf{B} := (B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ . On pose

$$\mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} = \{\pi \in \mathbb{S}_E : \forall p \in \mathbb{N}, N_{B_p}(\pi) < \infty\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} = \{D \cap \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} ; D \in \mathcal{S}_E\}.$$

$\mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}$  est l'ensemble des nuages finis sur chaque ensemble de la partition  $\mathbf{B}$ . Clairement que  $\mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \in \mathcal{S}_E$ . La tribu  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}$  est la tribu trace de  $\mathcal{S}_E$  sur  $\mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}$ . Comme  $\mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \in \mathcal{S}_E$ , on a bien  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \subset \mathcal{S}_E$ .  $\square$

**Résultats de mesurabilité.** Commençons par résoudre le problème consistant à localiser de manière mesurable les points d'un nuage.

**Lemme IV.2.16 (Localisation des points)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\mathbf{B} = (B_p)_{p \geq 1}$ , une partition de  $E$  en ensembles de  $\mathcal{E}$ . Il existe une famille de fonctions  $Y_k^{(p)} : \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \rightarrow E$ ,  $p, k \geq 1$ , qui sont  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$ -mesurables telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}, \pi \cap B_p = \{Y(p)_1(\pi), Y_2^{(p)}(\pi), \dots, Y_{N_{B_p}(\pi)}^{(p)}(\pi)\} \quad \text{dès que } N_{B_p}(\pi) \geq 1. \quad (\text{IV.16})$$

**Preuve :** comme  $(E, \mathcal{E})$  est séparable et séparé, il existe  $C \subset \mathbb{R}$  et  $\phi : E \rightarrow C$  isomorphisme entre les espaces mesurables  $(E, \mathcal{E})$  et  $(C, \mathcal{B}(C))$ . On fixe  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $x^* \in B_p$ . Soit  $\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}$ ; on pose  $\ell = N_{B_p}(\pi)$  et on se donne  $\pi$  comme l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  où l'indexation est telle que  $\phi(x_1) < \dots < \phi(x_\ell)$ . On pose alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y_k^{(p)}(\pi) := x_k$  si  $k \leq \ell$  et  $Y_k^{(p)}(\pi) := x^*$  si  $k > \ell$ . On a clairement (IV.16). Puisque  $\phi$  est un isomorphisme,  $Y_k^{(p)}$  est  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$ -mesurable ssi  $\phi \circ Y_k^{(p)}$  est  $(\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}, \mathcal{B}(C))$ -mesurable. Pour montrer cela, on fixe  $y \in \mathbb{R}$  et on pose  $D := \phi^{-1}([-\infty, y] \cap \phi(B_p))$ , qui est dans  $\mathcal{E}$ ; on remarque que

$$\{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : N_{B_p}(\pi) \geq k\} \cap \{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : \phi \circ Y_k^{(p)} \leq y\} = \{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : N_D(\pi) \geq k\} \in \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}.$$

D'autre part

$$\{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : N_{B_p}(\pi) < k\} \cap \{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : \phi \circ Y_k^{(p)} \leq y\} = \emptyset \quad \text{ou bien} \quad \{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : N_{B_p}(\pi) < k\}$$

selon que  $\phi(x^*) > y$  ou que  $\phi(x^*) \leq y$ . Dans les deux cas, les ensembles sont dans  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}$ , ce qui entraîne que  $\{\pi \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} : \phi \circ Y_k^{(p)} \leq y\} \in \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Donc  $\phi \circ Y_k^{(p)}$  est  $(\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}, \mathcal{B}(C))$ -mesurable, ce qui permet de conclure.  $\blacksquare$

**Lemme IV.2.17 (produit, intersection, union de nuages)** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$ , des espaces mesurables séparables et séparés. On munit  $E \times E'$  de la tribu produit  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ , qui est également séparable et séparée. Soit  $\mathbf{B} = (B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , une partition de  $E$  en ensembles de  $\mathcal{E}$ . Soit  $\mathbf{B}' = (B'_q)_{q \in \mathbb{N}}$ , une partition de  $E'$  en ensembles de  $\mathcal{E}'$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) L'application  $(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_{E'}^{\mathbf{B}'} \mapsto \pi \times \pi' \in \mathbb{S}_{E \times E'}$  est  $(\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}, \mathcal{S}_{E \times E'})$ -mesurable.

On suppose ensuite que  $(E, \mathcal{E}) = (E', \mathcal{E}')$ .

(ii) L'application  $(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}'} \mapsto \pi \cap \pi' \in \mathbb{S}_E$  est  $(\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}'}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable.

(iii) L'application  $(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}'} \mapsto \pi \cup \pi' \in \mathbb{S}_E$  est  $(\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}'}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable.

**Preuve :** pour tous  $p, k \in \mathbb{N}^*$ , soient  $Y_k^{(p)} : \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \rightarrow E$  qui est  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$ -mesurable et soit  $Z_k^{(p)} : \mathbb{S}_{E'}^{\mathbf{B}'} \rightarrow E'$ , qui est  $(\mathcal{S}_{E'}, \mathcal{E}')$ -mesurable telles que  $\pi \cap B_p = \{Y_k^{(p)}(\pi); 1 \leq k \leq N_{B_p}(\pi)\}$  et  $\pi' \cap B'_p = \{Z_k^{(p)}(\pi'); 1 \leq k \leq N_{B'_p}(\pi')\}$ . Il est clair que  $(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_{E'}^{\mathbf{B}'} \mapsto (Y_k^{(p)}(\pi), Z_k^{(p')}(\pi')) \in E \times E'$  est  $(\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$ -mesurable. Donc pour tout  $A \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$

$$(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_{E'}^{\mathbf{B}'} \mapsto N_A(\pi \times \pi') = \sum_{p, p', k, k' \geq 1} \mathbf{1}_{\{k \leq N_{B_p}(\pi); k' \leq N_{B'_p}(\pi')\}} \mathbf{1}_A(Y_k^{(p)}(\pi), Z_{k'}^{(p')}(\pi'))$$

est  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$ -mesurable, ce qui entraîne (i).

On suppose ensuite  $(E, \mathcal{E}) = (E', \mathcal{E}')$  mais on garde les notations précédentes pour la localisation des points. On rappelle que  $\Delta := \{(x, x); x \in E\} \in \mathcal{E}^{\otimes 2}$  car  $(E, \mathcal{E})$  est séparable et séparé. Soit  $B \in \mathcal{E}$ , on remarque alors que

$$(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}'} \mapsto N_B(\pi \cap \pi') = \sum_{p, p', k, k' \geq 1} \mathbf{1}_{\{k \leq N_{B_p}(\pi); k' \leq N_{B'_p}(\pi')\}} \mathbf{1}_B(Y_k^{(p)}(\pi)) \mathbf{1}_\Delta(Y_k^{(p)}(\pi), Z_{k'}^{(p')}(\pi'))$$

est  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$ -mesurable, ce qui entraîne (ii).

Le point (iii) se déduit de (ii) comme suit : pour tout  $C \in \mathcal{E}$ , tout  $p \in \mathbb{N}$ , et tous  $(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}'}$ , on peut écrire  $N_{C \cap B_p}(\pi \cup \pi') = N_{C \cap B_p}(\pi) + N_{C \cap B_p}(\pi') - N_{C \cap B_p}(\pi \cap \pi')$  car  $N_{C \cap B_p}(\pi \cap \pi') \leq N_{B_p}(\pi) < \infty$ , et (ii) implique que  $(\pi, \pi') \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}'} \mapsto N_{C \cap B_p}(\pi \cup \pi')$  est  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$ -mesurable. Or  $N_C(\pi \cup \pi') = \sum_{p \in \mathbb{N}} N_{C \cap B_p}(\pi \cup \pi')$ . Donc  $(\pi, \pi') \mapsto N_C(\pi \cup \pi')$  est  $\mathcal{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathcal{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$ -mesurable. ■

**Lemme IV.2.18** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\mathbf{B} = (B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , une partition  $\mathcal{E}$ -mesurable de  $E$ . Les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) La fonction  $x \in E \mapsto \{x\} \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}$  est  $(\mathcal{E}, \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}})$ -mesurable.
- (ii) La fonction  $(x, \pi) \in E \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \mapsto \pi \cup \{x\} \in \mathbb{S}_E$  est  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable.
- (iii) La fonction  $(x_1, \dots, x_n, \pi) \in E^n \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \mapsto \pi \cup \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{S}_E$  est  $(\mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable.
- (iv) (**Mesurabilité des fonctionnelles de type Palm**) Soit  $(E_0, \mathcal{E}_0)$ , un espace mesurable. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $F : E_0 \times E^n \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. Pour tous  $(z, \pi) \in E_0 \times \mathbb{S}_E$ , on pose

$$\Phi_F^{(n)}(z, \pi) := \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \pi \\ \text{distincts}}} F(z; x_1, \dots, x_n, \pi \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \quad \text{and} \quad \Lambda_F^{(n)}(z, \pi) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \pi \\ \text{distincts}}} F(z; x_1, \dots, x_n, \pi)$$

avec  $\Phi_F^{(n)}(z, \pi) = \Lambda_F^{(n)}(z, \pi) = 0$ , pour tout  $z \in E_0$  si  $\#\pi < n$ . Alors, les restrictions de  $\Phi_F^{(n)}$  et de  $\Lambda_F^{(n)}$  à  $E_0 \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}$  sont  $(\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}})$ -mesurables.

**Preuve :** on note  $\psi$  la fonction du (i). Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ ,  $(N_B \circ \psi)(x) = \mathbf{1}_B(x)$ . Cela montre que  $N_B \circ \psi$  est  $\mathcal{E}$ -mesurable pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , ce qui prouve (i). Montrons (ii) : par (i),  $(x, \pi) \in E \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \mapsto (\{x\}, \pi) \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}}$  est mesurable. Par le lemme IV.2.17 (iii),  $(\{x\}, \pi) \in \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \mapsto \pi \cup \{x\}$  est également mesurable, ce qui prouve (ii). Par (i) et (ii), combinés à une simple récurrence,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \{x_1, \dots, x_n\}$  est  $(\mathcal{E}^{\otimes n}, \mathcal{S}_E^{\mathbf{B}})$ -mesurable et le lemme IV.2.17 (iii) termine la preuve du point (iii).

Montrons (iv) pour cela on se donne pour tous  $p, k \in \mathbb{N}^*$ , soient  $Y_k^{(p)} : \mathbb{S}_E^{\mathbf{B}} \rightarrow E$  comme dans le lemme IV.2.16 de localisation des points. On pose  $B_p^* = E \setminus B_p$  : le lemme IV.2.6 (i) de restriction implique que  $\pi \mapsto \pi \cap B_p^*$  est mesurable. Soient  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq r$ . On pose  $S = \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$  et

$$f_{i_1, \dots, i_n; r}^p(z, \pi) = F(z; Y_{i_1}^{(p)}(\pi), Y_{i_1}^{(p)}(\pi), Y_{i_n}^{(p)}(\pi), (\pi \cap B_p^*) \cup \{Y_j^{(p)}; j \in S\})$$

Le point (iii) et ce qui précède implique que  $f_{i_1, \dots, i_n; r}^p : E_0 \times \mathbb{S}_E^B \rightarrow [0, \infty]$  est  $(\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{S}_E^B)$ -mesurable. On remarque ensuite que si  $N_{B_p}(\pi) = r$ , on a

$$f_{i_1, \dots, i_n; r}^p(z, \pi) = F(z; Y_{i_1}^{(p)}(\pi), \dots, Y_{i_n}^{(p)}(\pi), \pi \setminus \{Y_{i_1}^{(p)}(\pi), \dots, Y_{i_n}^{(p)}(\pi)\})$$

et donc  $\Phi_F^{(n)}(z, \pi) = \sum_{p \geq 1} \sum_{r \geq i_n > \dots > i_1 \geq 1} \mathbf{1}_{\{N_{B_p}(\pi) = r\}} f_{i_1, \dots, i_n; r}^p(z, \pi)$ , ce qui entraîne la mesurabilité de  $\Phi_F^{(n)}$ . La mesurabilité de  $\Lambda_F^{(n)}$  en découle par le point (iii). ■

#### IV.2.d Intersections et unions de nuages aléatoires.

Sauf mention explicite du contraire, on fait les hypothèses suivantes :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  supposé complet et  $(E, \mathcal{E})$  est supposé séparable et séparé.

La complétude de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  simplifie les énoncés où le produit, l'union ou l'intersection de nuages aléatoires interviennent. En effet, considérons  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage aléatoire d'intensité  $\mu$  supposée sigma-finie : il existe une partition  $\mathcal{E}$ -mesurable  $\mathbf{B} = (B_p)_{p \geq 1}$  de  $E$  telle que  $\mathbf{E}[N_{B_p}(\Pi)] = \mu(B_p) < \infty$  pour tout  $p \geq 1$ . Par conséquent, p.s.  $\Pi \in \mathbb{S}_E^B$ . On peut appliquer le lemme IV.2.16, page 137, de localisation des points des nuages à  $\Pi$  : pour tout  $k, p \geq 1$ , il existe des fonctions  $Y_k^{(p)} : \mathbb{S}_E \rightarrow E$ , qui sont  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$ -mesurables et telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall p \geq 1, \quad \Pi \cap B_p = \{Y_1^{(p)}(\Pi), Y_2^{(p)}(\Pi), \dots, Y_{N_{B_p}(\Pi)}^{(p)}(\Pi)\}.$$

**Proposition IV.2.19** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$ , des espaces mesurables séparables et séparés. On munit  $E \times E'$  de la tribu produit  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ . Soient  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$  et  $\Pi' : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{E'}$ , des nuages aléatoires d'intensités respectives  $\mu$  et  $\mu'$  supposées, sigma-finies. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $\Pi \times \Pi' : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{E \times E'}$  est un nuage aléatoire.
- (ii) Si  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont indépendants, alors l'intensité de  $\Pi \times \Pi'$  est  $\mu \otimes \mu'$ .

**Preuve :** d'après le fait détaillé ci-dessus, il existe  $\mathbf{B} = (B_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{B}' = (B'_q)_{q \in \mathbb{N}}$  des partitions mesurables de resp.  $E$  et  $E'$  telles que p.s.  $\Pi \in \mathbb{S}_E^B$  et  $\Pi' \in \mathbb{S}_{E'}^{B'}$ . Le lemme IV.2.17 (i) implique alors que  $\Pi \times \Pi'$  est p.s. égal à une variable  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{E \times E'})$ -mesurable. Comme  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  est supposé complet,  $\Pi \times \Pi'$  est donc  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{E \times E'})$ -mesurable : c'est un nuage aléatoire.

Montrons (ii) : on note  $\nu : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' \rightarrow [0, \infty]$  l'intensité de  $\Pi \times \Pi'$ . Comme  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont indépendants, pour tous  $B \in \mathcal{E}$  et  $B' \in \mathcal{E}'$

$$\nu(B \times B') = \mathbf{E}[N_{B \times B'}(\Pi \times \Pi')] = \mathbf{E}[N_B(\Pi)N_{B'}(\Pi')] = \mathbf{E}[N_B(\Pi)]\mathbf{E}[N_{B'}(\Pi')] = \mu(B)\mu'(B'). \quad (\text{IV.17})$$

Comme  $\mu$  et  $\mu'$  sont sigma-finies,  $\mu \otimes \mu'$  est l'unique mesure  $\nu$  satisfaisant (IV.17). ■

**Proposition IV.2.20** Soient  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soient  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$  et  $\Pi' : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , deux nuages aléatoires d'intensités respectives  $\mu$  et  $\mu'$ , supposées sigma-finies. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $\Pi \cap \Pi' : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$  est un nuage aléatoire.
- (ii) (**Principe de disjonction**) Si  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont indépendants et si  $\mu$  (ou  $\mu'$ ) est diffuse, alors p.s.  $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$ .

**Preuve :** on raisonne comme dans la preuve du point (i) de la proposition précédente IV.2.19 en utilisant le lemme IV.2.17 (ii) pour prouver (i). Montrons (ii) : la proposition IV.2.19 implique que l'intensité  $\Pi \times \Pi'$  est  $\mu \otimes \mu'$ . Donc,

$$\mathbf{E}[N_\Delta(\Pi \times \Pi')] = (\mu \otimes \mu')(\Delta) = \int_E \mu(\{x\}) \mu'(dx) = 0,$$

si  $\mu$  est diffuse. Donc p.s.  $(\Pi \times \Pi') \cap \Delta = \emptyset$ , c'est-à-dire  $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$ .  $\blacksquare$

**Proposition IV.2.21** Soient  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite de nuages aléatoires d'intensités respectives  $\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , toutes supposées sigma-finies. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i)  $\Pi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$  est un nuage aléatoire.

(ii) Si les  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont indépendants et si les  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont diffuses, alors

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall B \in \mathcal{E}, \quad N_B(\Pi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_B(\Pi_n) \tag{IV.18}$$

et l'intensité de  $\Pi$  est  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$ .

**Preuve :** en utilisant le fait que les intensités sont sigma-finies et en appliquant de manière répétée le lemme IV.2.17 (iii), page 137, on montre que  $\Pi_0 \cup \dots \cup \Pi_n$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable. Par convergence monotone pour la mesure de comptage, partout sur  $\Omega$ , et pour tout  $B \in \mathcal{E}$ ,  $N_B(\Pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_B(\Pi_0 \cup \dots \cup \Pi_n)$ . Donc,  $N_B(\Pi)$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , ce qui prouve (i).

Montrons (ii) : la proposition IV.2.20 (ii) implique que p.s. pour tout  $m < n$ ,  $\Pi_m \cap \Pi_n = \emptyset$ , ce qui implique (IV.18). Par interversion positive série/espérance, on a donc  $\mu(B) = \mathbf{E}[N_B(\Pi)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[N_B(\Pi_n)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(B)$ , pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , ce qui termine la preuve.  $\blacksquare$

## IV.3 Nuages Poissonniens.

### IV.3.a Définition, premières propriétés.

Sauf mention explicite du contraire, on fait les hypothèses suivantes :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  supposé complet et  $(E, \mathcal{E})$  est supposé séparable et séparé.

Sauf mention explicite du contraire, on fait les hypothèses suivantes : On rappelle qu'une variable à valeurs dans  $\mathbb{N}_\infty$  est une variable de Poisson étendue si son paramètre appartient à  $[0, \infty]$  : notamment son paramètre est nul (resp. infini) ssi la variable est p.s. nulle (resp. p.s. infinie).

**Définition. Caractérisations diverses.** En s'inspirant du cas des nuages homogènes sur  $\mathbb{R}_+$ , on introduit la définition suivante.

**Définition IV.3.1 (Nuages Poissonniens)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage aléatoire. C'est un *nuage Poissonnier* s'il satisfait les deux hypothèses suivantes.

**(Chaos)** Pour tous  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$  deux-à-deux disjoints, les variables  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont indépendantes.

**(Poisson)** Pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $N_A(\Pi)$  suit une loi de Poisson étendue.  $\square$

**Théorème IV.3.2** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$ . Alors,  $\mu$  est diffuse et la loi de  $\Pi$  est entièrement déterminée par  $\mu$ .

**Preuve :** pour tout  $x \in E$ ,  $N_{\{x\}}(\Pi) = 0$  ou 1. Or,  $N_{\{x\}}(\Pi)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu(\{x\})$ . On a donc  $\mu(\{x\}) = 0$ . Montrons le second point de la proposition : supposons que  $\Pi'$  soit un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ . Par définition,  $\Pi$  et  $\Pi'$  satisfont l'identité en loi (IV.14) de la proposition IV.2.11. Cette même proposition implique que  $\Pi$  et  $\Pi'$  ont même loi. ■

Le théorème suivant montre que l'hypothèse de chaos pour un nuage aléatoire implique en réalité son caractère Poissonnien. Sa preuve est placée en fin de section.

**Théorème IV.3.3** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de points  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ , supposée sigma-finie et diffuse. On suppose que  $\Pi$  satisfait également l'hypothèse de chaos :

**(Chaos)** Pour tous  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$  deux-à-deux disjoints, les v.a.  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont indépendantes. Alors,  $\Pi$  est un nuage Poissonnien.

**Preuve :** voir la fin de la section, page 144. ■

En application de ce résultat on peut montrer le théorème suivant qui simplifie la propriété de chaos et qui caractérise les nuages de Poisson par indépendance des événements d'évitements.

**Théorème IV.3.4 (Caractérisation par évitements indépendants)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de points  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ , supposée sigma-finie et diffuse. On suppose que  $\Pi$  satisfait la propriété suivante.

**(Évitements indépendants)** Pour tous  $A, B \in \mathcal{E}$  disjoints, les événements  $\{\Pi \cap A = \emptyset\}$  et  $\{\Pi \cap B = \emptyset\}$  sont indépendants.

Alors  $\Pi$  est un nuage de Poisson.

**Preuve :** voir l'exercice .12, page 169. ■

En application du résultat précédent, on peut ensuite montrer le théorème de Rényi qui caractérise les nuages de Poisson par leurs probabilités d'évitements.

**Théorème IV.3.5 (Théorème de Rényi)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de points  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable. On suppose que

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{P}(\Pi \cap A = \emptyset) = e^{-\mu(A)},$$

où  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure sigma finie et diffuse (avec la convention que  $e^{-\infty} = 0$ ). Alors  $\Pi$  est alors un nuage de Poisson.

**Preuve :** voir l'exercice .13, page 170. ■

### Stabilité des nuages Poisson par restriction, image et superposition.

**Théorème IV.3.6 (Restriction)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi$ , un nuage Poissonnier sur  $E$  d'intensité  $\mu$ . Soient  $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$ , disjoints. Alors  $\Pi \cap B_1$  et  $\Pi \cap B_2$  sont deux nuages Poissonniers indépendants d'intensités respectives  $\mu(\cdot \cap B_1)$  et  $\mu(\cdot \cap B_2)$ .

Plus généralement, soit  $B_i \in \mathcal{E}$ ,  $i \in I$ , une famille d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints. Alors,  $\Pi \cap B_i$ ,  $i \in I$ , est une famille de nuages Poissonniers indépendants d'intensités respectives  $\mu(\cdot \cap B_i)$ ,  $i \in I$ .

**Preuve :** la définition même des nuages Poissonniers implique que pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\Pi \cap A$  est un nuage Poissonnier d'intensité  $\mu(\cdot \cap A)$ . Pour tout  $i \in I$ , on pose  $\Pi_i := \Pi \cap B_i$  et on a pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $N_A(\Pi_i) = N_{A \cap B_i}(\Pi)$ . Comme les  $B_i \in \mathcal{E}$ ,  $i \in I$ , deux-à-deux disjoints, pour tous  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$  deux-à-deux disjoints, les vecteurs aléatoires  $(N_{A_k}(\Pi_i))_{1 \leq k \leq p}$ ,  $i \in I$ , sont indépendants (on utilise la propriété de Chaos des nuages Poissonniers car les ensembles  $A_k \cap B_i$ ,  $1 \leq k \leq p$ ,  $i \in I$ , sont deux-à-deux disjoints). On conclut grâce à la proposition IV.2.14 (ii). ■

**Théorème IV.3.7 (Superposition croissante ou indépendante)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de nuages Poissonniers sur  $E$ , d'intensités respectives  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toutes supposées sigma-finies. On pose  $\Pi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$ . Alors, c'est un nuage aléatoire dont l'intensité est notée  $\mu$  et les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Si on suppose que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\Pi$  est un nuage de Poisson d'intensité  $\mu$  et pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , on a  $\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu_n(A)$ .
- (ii) Si on suppose que les  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont indépendants, alors  $\Pi$  est un nuage de Poisson d'intensité  $\mu$  et on a  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$ .

**Preuve :** par la proposition IV.2.21 (i),  $\Pi$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable. Montrons (i). Soit  $A \in \mathcal{E}$ ; le théorème de convergence monotone pour la mesure de comptage implique que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $N_A(\Pi) = \lim_n N_A(\Pi_n)$ . En prenant l'espérance, le théorème de convergence monotone sous  $\mathbf{P}$  implique alors que  $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$ . Alors, clairement, pour tout  $r \in [0, 1]$ , par convergence dominée

$$\mathbf{E}[r^{N_A(\Pi)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[r^{N_A(\Pi_n)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\mu_n(A)(1-r)} = e^{-\mu(A)(1-r)},$$

ce qui implique que  $N_A(\Pi)$  suit une loi de Poisson (étendue) de paramètre  $\mu(A)$ . Soient  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ , deux-à-deux disjoints. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé les v.a.  $N_{A_1}(\Pi_n), \dots, N_{A_p}(\Pi_n)$  sont indépendantes et puisque

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} (N_{A_1}(\Pi_n), \dots, N_{A_p}(\Pi_n)) = (N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)),$$

les v.a. limites  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont nécessairement indépendantes. Cela montre donc que  $\Pi$  est un nuage de Poisson.

Montrons (ii) : par la proposition IV.2.21, page 140,  $\Pi$  est un nuage aléatoire  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$ . Soit  $B \in \mathcal{E}$ . On remarque que les v.a.  $(N_B(\Pi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont des v.a. de Poisson indépendante. Par conséquent (IV.18) et le lemme IV.1.3 page 122 impliquent que  $N_B(\Pi)$  est de Poisson.

Soient  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ , deux-à-deux disjoints. On vérifie facilement que les v.a.  $(N_{A_i}(\Pi_n))_{1 \leq i \leq p; n \in \mathbb{N}}$  sont mutuellement indépendantes. Notamment les suites  $(N_{A_1}(\Pi_n))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (N_{A_p}(\Pi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont indépendantes. Or par (IV.18),  $N_{A_i}(\Pi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_{A_i}(\Pi_n)$ , pour tout  $1 \leq i \leq p$ . Cela montre que les v.a.  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont indépendantes. Cela termine la preuve de (ii). ■

**Proposition IV.3.8** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$ , des espaces mesurables séparés et séparables. Soit  $\Pi$ , un nuage Poissonnien sur  $E$  d'intensité  $\mu$ . Soit  $\phi: E \rightarrow E'$ , supposée  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable. On note  $\mu'$  la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$  et on pose  $\Pi' := \phi(\Pi)$ . Si  $\phi$  est injective, alors  $\Pi'$  est un nuage Poissonnien sur  $E'$  d'intensité  $\mu'$ .

**Preuve :** si  $\phi$  est injective, alors

$$\forall \omega \in \Omega, \forall B' \in \mathcal{E}', N_{B'}(\Pi'(\omega)) = N_{\phi^{-1}(B')}(\Pi(\omega)). \quad (\text{IV.19})$$

Cela montre que  $\Pi'$  est un nuage aléatoire. Par ailleurs  $N_{B'}(\Pi')$  est une variable de Poisson d'intensité  $\mu(\phi^{-1}(B')) = \mu'(B')$ . Enfin, pour tous  $A'_1, \dots, A'_p \in \mathcal{E}'$ , deux-à-deux disjoints,  $\phi^{-1}(A'_1), \dots, \phi^{-1}(A'_p) \in \mathcal{E}$  sont également deux-à-deux disjoints et (IV.19) implique que les variables  $N_{A'_1}(\Pi'), \dots, N_{A'_p}(\Pi')$  sont indépendantes. ■

Le théorème suivant est une version plus sophistiquée de la proposition précédente.

**Théorème IV.3.9 (Image)** Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(E', \mathcal{E}')$ , deux espaces mesurables séparables et séparables. Soit  $\Pi$ , un nuage Poissonnien sur  $E$  d'intensité  $\mu$ , supposée sigma-finie. Soit  $\phi: E \rightarrow E'$ , une fonction  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ -mesurable. On note  $\mu'$  la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$  et on pose  $\Pi' := \phi(\Pi)$ . On suppose  $\mu'$  diffuse.

Alors,  $\Pi'$  est un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu'$  et p.s.  $\phi$  est injective sur  $\Pi$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall X, Y \in \Pi, \left( X \neq Y \right) \implies \left( \phi(X) \neq \phi(Y) \right), \quad (\text{IV.20})$$

ce qui entraîne que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall x' \in E', N_{\phi^{-1}(\{x'\})}(\Pi) \in \{0, 1\} \quad (\text{IV.21})$$

**Preuve :** on suppose d'abord que l'on a montré (IV.20). Cela implique immédiatement (IV.21). Il existe alors  $\Omega^* \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$  et

$$\forall \omega \in \Omega^*, \forall B' \in \mathcal{E}', N_{B'}(\Pi'(\omega)) = N_{\phi^{-1}(B')}(\Pi(\omega)), \quad (\text{IV.22})$$

On raisonne ensuite comme à la proposition IV.3.8 pour montrer que  $\Pi'$  est Poissonnien d'intensité  $\mu'$ .

Il reste donc à prouver (IV.20). Pour cela on considère  $\Pi^* = \Pi \times \Pi$ , qui d'après la proposition IV.2.19, est un nuage aléatoire sur l'espace  $E \times E$  muni de la tribu produit  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ . On note  $\rho$  son intensité, que l'on calcule comme suit : on fixe  $A, B \in \mathcal{E}$  et on pose  $A_0 := A \setminus (A \cap B)$  et  $B_0 := B \setminus (A \cap B)$ , si bien que  $A_0, A \cap B, B_0$  sont disjoints deux-à-deux. On a donc

$$\begin{aligned} \rho(A \times B) &= \mathbf{E}[N_{A_0}(\Pi)N_{B_0}(\Pi)] + \mathbf{E}[N_{A_0}(\Pi)N_{A \cap B}(\Pi)] \\ &\quad + \mathbf{E}[N_{A \cap B}(\Pi)N_{B_0}(\Pi)] + \mathbf{E}[(N_{A \cap B}(\Pi))^2] \\ &= \mu(A_0)\mu(B_0) + \mu(A_0)\mu(A \cap B) + \mu(A \cap B)\mu(B_0) + \mathbf{E}[(N_{A \cap B}(\Pi))^2]. \end{aligned}$$

Comme une variable de Poisson de paramètre  $\theta$  a un moment d'ordre 2 égal à  $\theta + \theta^2$ , on a

$$\begin{aligned} \rho(A \times B) &= \mu(A_0)\mu(B_0) + \mu(A_0)\mu(A \cap B) + \mu(A \cap B)\mu(B_0) + \mu(A \cap B)^2 + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A)\mu(B) + \mu(A \cap B) = (\mu \otimes \mu)(A \times B) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

On introduit ensuite la fonction  $\jmath: x \in E \mapsto (x, x) \in E \times E$ . On rappelle que  $\Delta \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ . Donc  $\jmath$  est  $(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ -mesurable : c'est même une bijection  $E$  sur  $\Delta$ . On note  $\mu_\Delta$  la mesure induite sur  $\Delta$  par  $\mu$  via  $\jmath$ . Comme  $\jmath^{-1}((A \times B) \cap \Delta) = A \cap B$ , on a donc montré que pour tous  $A, B \in \mathcal{E}$ ,  $\rho(A \times B) = \mu_\Delta(A \times B) + (\mu \otimes \mu)(A \times B)$ .

Comme  $\rho$  et  $\mu_\Delta + \mu \otimes \mu$  coïncident sur le pi-système  $\mathcal{P} := \{A \times B ; A, B \in \mathcal{E}\}$  engendrant  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ , le théorème d'unicité du prolongement des mesures sigma-finies s'applique facilement pour montrer que  $\rho = \mu_\Delta + \mu \otimes \mu$ .

On pose  $\Phi : (x, y) \in E \times E \mapsto (\phi(x), \phi(y)) \in E' \times E'$ . Il est facile de montrer que  $\Phi$  est  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}')$ -mesurable. On note  $\Delta'$  la diagonale de  $E' \times E'$ , diagonale qui appartient à  $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}'$ . On s'intéresse à l'ensemble  $U := \Phi^{-1}(\Delta') \setminus \Delta = \{(x, y) \in E \times E : x \neq y \text{ et } \phi(x) = \phi(y)\}$ . Comme  $\mu_\Delta$  est concentrée sur  $\Delta$  (par définition), on a  $\mu_\Delta(U) = 0$ . Par Fubini, on a également,

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \mu)(U) &= \int_E \mu(dx) \int_E \mu(dy) \mathbf{1}_{\{y \in E : y \neq x \text{ et } \phi(y) = \phi(x)\}} \\ &\leq \int_E \mu(dx) \mu(\phi^{-1}(\{\phi(x)\})) = \int_E \mu(dx) \mu'(\{\phi(x)\}). \end{aligned}$$

Comme  $\mu'$  est diffuse, on a  $\mu'(\{\phi(x)\}) = 0$ , pour tout  $x \in E$  et donc  $(\mu \otimes \mu)(U) = 0$ . On en déduit donc que  $\rho(U) = \mathbf{E}[N_U(\Pi^*)] = 0$  et donc que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\Pi^* \cap U = \emptyset$ , c'est-à-dire (IV.20), ce qui termine la preuve. ■

**Preuve du théorème IV.3.3.** On observe tout d'abord que les nuages aléatoires satisfaisant la propriété de chaos sont stables par restriction et que leurs restrictions à des sous-ensembles deux-à-deux disjoints sont mutuellement indépendantes. Cette observation, combinée au principe de superposition indépendante (théorème IV.3.7 (ii)), montre que l'on peut se ramener aux cas de nuages aléatoires d'intensité finie.

On considère donc un  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$  un nuage aléatoire  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable, satisfaisant la propriété de chaos et d'intensité  $\mu$  supposée finie :  $\mu(E) < \infty$ . Comme  $(E, \mathcal{E})$  est séparable et séparé, il existe  $C \subset [0, 1]$  et  $\phi : E \rightarrow C$  bijective  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(C))$ -mesurable telle que la réciproque  $\phi^{-1} : C \rightarrow E$  soit  $(\mathcal{B}(C), \mathcal{E})$ -mesurable (on rappelle que  $\mathcal{B}(C)$  est la tribu trace des Boréliens de  $\mathbb{R}$  sur  $C$ ). Le lemme IV.2.7, page 134, montre que  $\Pi' := \phi(\Pi)$  est un nuage aléatoire d'intensité  $\mu' := \mu \circ \phi^{-1}$ . Comme  $\phi$  est bijective, il est clair que  $\mu'$  est diffuse et que  $\Pi'$  satisfait la propriété de chaos. Si on montre que  $\Pi'$  est Poissonnier, alors la proposition IV.3.8, page 143, implique que  $\Pi = \phi^{-1}(\Pi')$  est Poissonnier également.

Il suffit donc de montrer que  $\Pi'$  est Poissonnier : comme  $\Pi'$  satisfait la propriété de chaos, il suffit de montrer que pour tout  $A \in \mathcal{B}(C)$ ,  $N_A(\Pi')$  suit une loi de Poisson. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k < 2^n$ ; on pose  $A_{n,k} = A \cap [k2^n, (k+1)2^n[$  et

$$\xi_{n,k} = \mathbf{1}_{\{N_{A_{n,k}}(\Pi') \geq 1\}}, \quad p_{n,k} = \mathbf{P}(N_{A_{n,k}}(\Pi') \geq 1) \quad \text{et} \quad X_n = \sum_{0 \leq k < 2^n} \xi_{n,k}.$$

L'hypothèse de chaos implique que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\xi_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$  sont des v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre respectifs  $(p_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$ . Il est ensuite facile de voir que p.s. pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \leq X_{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \sup_{n \geq 0} X_n = N_A(\Pi') < \infty. \quad (\text{IV.23})$$

Par convergence monotone, cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k < 2^n} p_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[N_A(\Pi')] = \mu'(A). \quad (\text{IV.24})$$

On remarque ensuite que  $p_{n,k} \leq \mathbf{E}[N_{A_{n,k}}(\Pi')] = \mu'(A_{n,k})$  et donc que

$$\sum_{0 \leq k < 2^n} p_{n,k}^2 \leq \sum_{0 \leq k < 2^n} \mu'(A_{n,k})^2 \leq \mu'(A) \max_{0 \leq k < 2^n} \mu'(A_{n,k}). \quad (\text{IV.25})$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $\max_{0 \leq k < 2^n} \mu'(A_{n,k})$  ne tend pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini : il existe donc  $\varepsilon > 0$  et une suite strictement croissante d'entiers naturels  $(n_\ell)_{\ell \geq 0}$  telle que

$$\max_{0 \leq k < 2^{n_\ell}} \mu'(A_{n_\ell,k}) \geq \varepsilon.$$

On introduit les ensembles *compacts* suivants :

$$I_{n,k} = [k2^n, (k+1)2^n], \quad 0 \leq k < 2^n, \quad \text{et} \quad J_\ell = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq 2^{n_\ell}: \\ \mu'(A_{n_\ell,k}) \geq \varepsilon}} I_{n_\ell,k}.$$

Clairement,  $J_{\ell+1} \subset J_\ell$ . On pose  $K = \bigcap_{\ell \geq 0} J_\ell$ , qui est un compact non-vide, par ce qui précède et puisque les  $J_\ell$  sont également compacts non-vides. Comme  $\mu'(A \cap J_\ell) \geq \varepsilon$ , on a  $\mu'(K \cap A) \geq \varepsilon$ . Soient  $x_1, \dots, x_q \in K \cap A$  distincts ; alors pour tout  $\ell$  assez grand, il existe  $k_1, \dots, k_q \in \{0, \dots, 2^{n_\ell} - 1\}$  distincts tels que pour tout  $p \in \{1, \dots, q\}$ , on ait  $x_p \in A_{n_\ell, k_p}$  et  $\mu'(A_{n_\ell, k_p}) \geq \varepsilon$ . Donc les intervalles  $I_{n_\ell, k_p}$ ,  $1 \leq p \leq q$  sont disjoints. Cela implique que  $q\varepsilon \leq \sum_{1 \leq p \leq q} \mu'(A_{n_\ell, k_p}) \leq \mu'(A)$ . On a montré que  $K \cap A$  contient au plus  $\mu'(A)/\varepsilon$  points. Or on a également prouvé que  $\mu'(K \cap A) \geq \varepsilon$ , ce qui contredit le fait que  $\mu'$  soit diffuse.

On a donc montré par l'absurde que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k < 2^n} \mu'(A_{n,k}) = 0$ . Par (IV.25) et (IV.24), l'approximation Binomiale-Poisson généralisée établie au théorème IV.1.4 s'applique (voir page 123, en appendice) : les variables  $X_n$  tendent en loi vers une loi de Poisson de paramètre  $\mu'(A)$  et (IV.23) implique que  $N_A(\Pi')$  suit une loi de Poisson, ce qui permet de conclure. ■

### IV.3.b Construction.

**Les cas des nuages Poissonniens d'intensité finie.** On se donne les objets suivants.

- (a)  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé ;  $\mu: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une mesure finie, non-nulle et diffuse.
- (b)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet ;  $X_n: \Omega \rightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , des v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -mesurables, indépendantes de même loi  $\mu(\cdot)/\mu(E)$ .
- (c)  $M: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ , une v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable, indépendante de  $(X_n)_{n \geq 1}$ , loi de Poisson de paramètre  $\mu(E)$ .

**Théorème IV.3.10** *Sous les hypothèses et notations précédentes, on définit  $\Pi: \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$  par*

$$\Pi = \{X_1, \dots, X_M\} \quad \text{si} \quad M \geq 1 \quad \text{et} \quad \Pi = \emptyset \quad \text{si} \quad M = 0. \quad (\text{IV.26})$$

Alors,  $\Pi$  est un nuage Poissonnier d'intensité  $\mu$ .

**Preuve :** l'exemple IV.2.2 permet d'affirmer que  $\Pi$  est un nuage aléatoire. Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ , deux-à-deux disjoints. On pose  $A_{p+1} := E \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_p)$ , si bien que  $A_1, \dots, A_{p+1}$  est une partition de  $E$ . On fixe  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Z_n := e^{iu_1} \mathbf{1}_{A_1}(X_n) + \dots + e^{iu_p} \mathbf{1}_{A_p}(X_n) + \mathbf{1}_{A_{p+1}}(X_n)$ . Les variables  $(Z_n)_{n \geq 1}$  sont i.i.d. et on vérifie facilement que

$$\mu(E)(1 - \mathbf{E}[Z_n]) = \mu(E)(1 - \mathbf{E}[Z_1]) = \mu(A_1)(1 - e^{iu_1}) + \dots + \mu(A_p)(1 - e^{iu_p}). \quad (\text{IV.27})$$

Comme  $\mu$  est sans atome,  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tous  $m < n$ ,  $X_n \neq X_m$ , ce qui entraîne

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \prod_{1 \leq j \leq p} \exp(iu_j N_{A_j}(\Pi)) = \prod_{1 \leq j \leq M} Z_j,$$

avec la convention qu'un produit sur un ensemble d'indices vide est égal à 1. On en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\prod_{1 \leq j \leq p} \exp(iu_j N_{A_j}(\boldsymbol{\Pi}))\right] &= \mathbf{E}\left[\prod_{1 \leq j \leq M} Z_j\right] = 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{M=n\}} \prod_{1 \leq j \leq n} Z_j\right] \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(M=n) \mathbf{E}\left[\prod_{1 \leq j \leq n} Z_j\right] = \sum_{n \geq 0} e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^n}{n!} \mathbf{E}[Z_1]^n \\ &= \exp(-\mu(E)(1 - \mathbf{E}[Z_1])) = \prod_{1 \leq j \leq p} \exp(-\mu(A_j)(1 - e^{iu_j})). \end{aligned}$$

L'injectivité de la fonction caractéristique montre que le vecteur  $(N_{A_1}(\boldsymbol{\Pi}), \dots, N_{A_p}(\boldsymbol{\Pi}))$  a des composantes indépendantes suivant des lois de Poisson, ce qui implique le résultat désiré. ■

**Construction pour les intensité sigma-finies.** On procède de la même façon en utilisant le principe de superposition. Plus précisément, on se donne les objets suivants.

- (a)  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé.  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure sigma-finie, non-nulle et diffuse. Il existe donc  $B_p \in \mathcal{E}$ ,  $p \geq 1$ , une partition de  $E$  telle que pour tout  $p \geq 1$ , on ait  $0 < \mu(B_p) < \infty$ .
- (b)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet;  $X_n^{(p)} : \Omega \rightarrow E$ ,  $p, n \geq 1$ , des v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables indépendantes telles que pour tout  $p \geq 1$ , la suite  $(X_n^{(p)})_{n \geq 1}$  est i.i.d. de loi  $\mu(\cdot \cap B_p)/\mu(B_p)$ . On pose  $T := (X_m^{(p)})_{p, n \geq 1}$ .
- (c)  $M_p : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ , des v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables indépendantes;  $M_p$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu(B_p)$ . On suppose que la suite  $(M_p)_{p \geq 1}$  est indépendante du tableau de variables  $T$ .

**Théorème IV.3.11** *Sous les hypothèses et notations précédentes, pour tout  $p \geq 1$ , on pose*

$$\boldsymbol{\Pi}_p = \{X_1^{(p)}, \dots, X_{M_p}^{(p)}\} \text{ si } M_p \geq 1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi}_p = \emptyset \text{ si } M_p = 0.$$

*On pose également  $\boldsymbol{\Pi} = \bigcup_{p \geq 1} \boldsymbol{\Pi}_p$ . Alors,  $\boldsymbol{\Pi}$  est un nuage Poissonnier sur  $E$  d'intensité  $\mu$ .*

**Preuve :** par le théorème IV.3.10,  $\boldsymbol{\Pi}_p$  est un nuage Poissonnier d'intensité  $\mu(\cdot \cap B_p)$ . La construction garantit que les  $\boldsymbol{\Pi}_p$ ,  $p \geq 1$ , sont indépendants. Par la propriété de superposition (proposition IV.3.7, page 142),  $\boldsymbol{\Pi}$  est un nuage Poissonnier d'intensité  $\sum_{p \geq 1} \mu(\cdot \cap B_p) = \mu$ . ■

**Représentation des nuages Poissonniens.** On montre, à l'aide du lemme de localisation IV.2.16 (page 137) que tout nuage Poissonnier, sur un espace séparable et séparé et d'intensité sigma-finie, peut se représenter de manière mesurable comme dans la construction générale qui précède. Pour simplifier quelques arguments on utilise le lemme suivant dont la preuve se trouve en fin de section.

**Lemme IV.3.12** *Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure sigma-finie et diffuse. Soit un entier  $n \geq 2$ . On note  $O$  l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_n) \in E$  tels que les  $x_i$  soient distincts. Soit  $\nu : \mathcal{E}^{\otimes n} \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure telle que pour tous  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ , disjoints deux-à-deux, on ait*

$$\nu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu(A_1) \dots \mu(A_n).$$

*Alors,  $O \in \mathcal{E}^{\otimes n}$  et  $\nu(\cdot \cap O) = \mu^{\otimes n}$ .*

**Preuve.** Voir la fin de la section. ■

**Remarque IV.3.13** On observe que le lemme précédent est faux si  $\mu$  n'est pas diffuse. □

On commence par considérer les nuages d'intensité finie. Plus précisément, on se donne les objets suivants.

( $\alpha$ )  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé.

( $\beta$ )  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet sur lequel est défini  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité finie :  $\mu(E) < \infty$ .

( $\gamma$ )  $U : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , une v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurable indépendante de  $\Pi$  et de loi uniforme.

À l'aide de  $U$ , on construit :

- une suite  $(X'_n)_{n \geq 1}$  de v.a. i.i.d. de loi  $\mu(\cdot)/\mu(E)$  ;
- une suite de permutations indépendantes  $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$  telle que d'une part,  $\Sigma_n : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  suit la loi uniforme et telle que d'autre part, la suite  $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$  est indépendante de  $(X'_n)_{n \geq 1}$ .

Comme  $(E, \mathcal{E})$  est séparable et séparé, il existe  $C \subset \mathbb{R}$  et une bijection  $\phi : E \rightarrow C$  qui est  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(C))$ -mesurable et telle que la réciproque  $\phi^{-1}$  soit  $(\mathcal{B}(C), \mathcal{E})$ -mesurable également. Par lemme IV.2.16 (page 137), il existe une suite  $Y_k : \mathbb{S}_E \rightarrow E$ ,  $k \geq 1$ , de fonctions  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$ -mesurables telles que pour tout nuage  $\pi \in \mathbb{S}_E$  comptant  $n$  points,

$$\pi = \{Y_1(\pi), \dots, Y_n(\pi)\} \quad \text{et} \quad \phi(Y_1(\pi)) < \dots < \phi(Y_n(\pi)).$$

Pour tout  $n \geq 1$ , sur  $\{\#\Pi = n\}$ , on pose :

$$X_k = Y_{\Sigma_n(k)}(\Pi) \text{ si } 1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad X_k = X'_{k-n} \text{ si } k > n.$$

Sur  $\{\#\Pi = 0\} \cup \{\#\Pi = \infty\}$ , pour tout  $k \geq 1$ , on pose  $X_k = X'_k$ . On montre tout d'abord que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\text{sous } \mathbf{P}(\cdot | \#\Pi = n), \text{ les v.a. } X_1, \dots, X_n \text{ sont i.i.d. de loi } \mu(\cdot)/\mu(E). \quad (\text{IV.28})$$

**Preuve de (IV.28).** Soient  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ , deux-à-deux disjoints. Observons que

$$\{N_{A_1}(\Pi) = 1; \dots; N_{A_n}(\Pi) = 1\} \cap \{\#\Pi = n\} = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \{X_{\sigma(1)} \in A_1; \dots; X_{\sigma(n)} \in A_n\} \cap \{\#\Pi = n\},$$

ces événements étant deux-à-deux disjoints. Ici,  $\mathbb{S}_n$  désigne l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . On remarque ensuite que pour tout  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ ,  $\Sigma_n \circ \sigma$  est une permutation de loi uniforme. Cela implique que sous  $\mathbf{P}(\cdot | \#\Pi = n)$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  à même loi que  $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$  et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_{A_1}(\Pi) = 1; \dots; N_{A_n}(\Pi) = 1 | \#\Pi = n) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \mathbf{P}(X_{\sigma(1)} \in A_1; \dots; X_{\sigma(n)} \in A_n | \#\Pi = n) \\ &= n! \mathbf{P}(X_1 \in A_1; \dots; X_n \in A_n | \#\Pi = n). \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

On pose ensuite  $A_{n+1} := E \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$  et on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_{A_1}(\Pi) = 1; \dots; N_{A_n}(\Pi) = 1; \#\Pi = n) &= \mathbf{P}(N_{A_1}(\Pi) = 1; \dots; N_{A_n}(\Pi) = 1; N_{A_{n+1}}(\Pi) = 0) \\ &= \mu(A_1) \dots \mu(A_n) e^{-\mu(E)}. \end{aligned}$$

Comme  $\#\Pi$  est une v.a. de Poisson de paramètre  $\mu(E)$ , on en déduit que

$$\mathbf{P}(N_{A_1}(\Pi) = 1; \dots; N_{A_n}(\Pi) = 1 | \#\Pi = n) = n! \frac{\mu(A_1)}{\mu(E)} \dots \frac{\mu(A_n)}{\mu(E)}.$$

Si on note  $\bar{\mu}(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(E)$  et  $\nu$  la loi de  $(X_1, \dots, X_n)$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | \#\Pi = n)$ . On veut appliquer le lemme IV.3.12 : on rappelle la définition de l'ensemble  $O$  de l'énoncé ; par construction,  $\nu(E^n \setminus O) = 0$  et donc  $\nu = \nu(\cdot \cap O)$ . Alors ce qui précède, (IV.29) et le lemme IV.3.12, impliquent que  $\nu = \bar{\mu}^{\otimes n}$ , c'est-à-dire (IV.28). ■

On déduit facilement de (IV.28) la proposition suivante.

**Proposition IV.3.14** *On suppose  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  ci-dessus. On note  $\mathcal{G}$  la tribu engendrée par  $U$  et  $\Pi$ . On pose  $M := \#\Pi$ . Alors, il existe une famille de variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  satisfaisant les conditions suivantes.*

- (i) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n : \Omega \rightarrow E$  est  $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ -mesurable.
- (ii) Les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi  $\mu(\cdot)/\mu(E)$ .
- (iii) La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est indépendante de  $M$ .
- (iv)  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\Pi = \{X_1, \dots, X_M\}$  dès que  $M \geq 1$ .

Cette proposition se généralise immédiatement au cas sigma-fini.

**Proposition IV.3.15** *On suppose  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  ci-dessus, excepté que  $\mu$  est seulement supposée sigma-finie ; il existe donc une partition  $\mathcal{E}$ -mesurable de  $E$ , notée  $\mathbf{B} = (B_p)_{p \geq 1}$  telle que pour tout  $p \geq 1$ , on ait  $0 < \mu(B_p) < \infty$ . Pour tout  $p \geq 1$ , on note  $\mathcal{G}_p$  la tribu engendrée par  $U$  et  $\Pi \cap B_p$  et on note  $M_p = N_{B_p}(\Pi)$ . Alors, il existe un tableau de variables  $(X_n^{(p)})_{p, n \geq 1}$  qui satisfont les conditions suivantes.*

- (i) Pour tous  $n, p \geq 1$ ,  $X_n^{(p)} : \Omega \rightarrow B_p$  est  $(\mathcal{G}_p, \mathcal{E})$ -mesurable.
- (ii) Les variables  $(X_n^{(p)})_{p, n \geq 1}$  sont indépendantes et pour tous  $p, n \geq 1$ ,  $X_n^{(p)}$  a pour loi  $\mu(\cdot \cap B_p)/\mu(B_p)$ .
- (iii) Le tableau de variables  $(X_n^{(p)})_{p, n \geq 1}$  est indépendant de la suite  $(M_p)_{p \geq 1}$ .
- (iv)  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tout  $p \geq 1$ ,  $\Pi \cap B_p = \{X_1^{(p)}, \dots, X_{M_p}^{(p)}\}$  dès que  $M_p \geq 1$ .

**Preuve du lemme IV.3.12.** Comme  $(E, \mathcal{E})$  est séparable et séparé, il existe  $C \subset \mathbb{R}$  tel que  $(E, \mathcal{E})$  et  $(C, \mathcal{B}(C))$  soient isomorphes en tant qu'espaces mesurables et il suffit de montrer le lemme dans le cas où  $(E, \mathcal{E}) = (C, \mathcal{B}(C))$ . On rappelle que  $\mathcal{B}(C)$  est la tribu trace de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  sur  $C$  mais aussi la tribu borélienne de la topologie induite sur  $C$  par la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

On suppose tout d'abord que  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On note  $O_0$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  dont les coordonnées sont distinctes. Il est clair que  $O_0$  est un ouvert donc  $O_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_{p,k} = [k2^{-p}, (k+1)2^{-p}]$  et pour tout  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ , on note  $C_{\mathbf{k},p} = I_{k_1,p} \times \dots \times I_{k_n,p}$ , le cube dyadique de « coin »  $2^{-p}\mathbf{k}$ . Si les  $k_n$  sont distincts, alors  $\nu(C_{\mathbf{k},p}) = \mu^{\otimes n}(C_{\mathbf{k},p})$ . Soit un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  ;  $U \cap O_0$  est également un ouvert et on voit qu'il existe une suite  $\mathbf{k}_m \in \mathbb{Z}^n$ ,  $p_m \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , telle que les cubes  $(C_{\mathbf{k}_m, p_m})_{m \in \mathbb{N}}$  forment une partition de  $U \cap O_0$  ; comme  $C_{\mathbf{k}_m, p_m} \subset O_0$ , les coordonnées de  $\mathbf{k}_m$  sont distinctes, ce qui implique que  $\nu(U \cap O_0) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \nu(C_{\mathbf{k}_m, p_m}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu^{\otimes n}(C_{\mathbf{k}_m, p_m}) = \mu^{\otimes n}(U \cap O_0)$ . On observe que  $\mu^{\otimes n}(U \cap O_0) = \mu^{\otimes n}(U)$  car  $\mu$  est diffuse. Alors, la restriction à  $O_0$  de  $\nu$  coïncide avec  $\mu^{\otimes n}$  sur le pi-système des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  ; par unicité du prolongement des mesures, ces mesures sont égales.

On fixe ensuite  $C \subset \mathbb{R}$  et on considère le cas où  $(E, \mathcal{E}) = (C, \mathcal{B}(C))$ ,  $\mathcal{B}(C)$ . Pour tout  $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ , on pose  $\nu'(B') = \nu(B' \cap C^n)$  et pour tout  $A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on pose  $\mu'(A') = \mu(A' \cap C)$ . On vérifie que  $\nu'$  et  $\mu'$  sont des mesures sigma finies, que  $\mu'$  est diffuse et que pour tous  $A'_1, \dots, A'_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , deux à deux-disjoints, on a  $\nu'(A'_1 \times \dots \times A'_n) = \mu'(A'_1) \dots \mu'(A'_n)$ . Par ce qui précède, cela implique que  $\nu'(\cdot \cap O_0) = \mu'^{\otimes n}$ . Soit  $B \in \mathcal{B}(C)^{\otimes n}$ . Comme  $\mathcal{B}(C)^{\otimes n}$  est aussi la tribu borélienne de la topologie induite sur  $C^n$  par la topologie de la norme sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$  tel que  $B = B' \cap C^n$ . Puisque  $O = O_0 \cap C^n$ , on a donc  $\nu(B \cap O) = \nu'(B' \cap O_0) = \mu'^{\otimes n}(B')$ . On vérifie ensuite que  $\mu'^{\otimes n}(B') = \mu'^{\otimes n}(B)$ , ce qui permet de conclure. ■

## IV.4 Outils de calculs.

### IV.4.a Formules de Palm.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  supposé complet. Nous renvoyons au lemme IV.2.18 pour les questions de mesurabilité soulevées implicitement par le théorème suivant.

**Théorème IV.4.1 (Formule de Palm)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$ , supposée sigma-finie et non-nulle. Soit  $(E_0, \mathcal{E}_0)$ , un espace mesurable et soit  $Z : \Omega \rightarrow E_0$ , une variable  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_0)$ -mesurable supposée indépendante de  $\Pi$ . Soit  $F : E_0 \times E \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. Alors,

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{X \in \Pi} F(Z, X, \Pi \setminus \{X\}) \right] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi)] , \quad (\text{IV.30})$$

avec la convention qu'une somme sur un ensemble d'indices vide est nulle.

**Preuve :** on remarque que (IV.30) ne dépend que de la loi jointe de  $(Z, \Pi)$ . On peut donc choisir  $\Pi$  comme dans le théorème de construction IV.3.11 et  $Z$  indépendante des variables  $X_n^{(p)}$  et  $M_p$  (ou bien on applique la proposition de représentation IV.3.15). On pose alors

$$a = \mathbf{E} \left[ \sum_{X \in \Pi} F(Z, X, \Pi \setminus \{X\}) \right] \quad \text{et} \quad \Pi_p^* = \bigcup_{p' \in \mathbb{N} \setminus \{p\}} \Pi_{p'} .$$

Par interversion positive série/intégrale,

$$a = \sum_{p \geq 1} \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(M_p = n) \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}[F(Z, X_k^{(p)}, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_n^{(p)}\} \setminus \{X_k^{(p)}\})] .$$

On observe que pour toute permutation  $\gamma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a

$$(X_1^{(p)}, \dots, X_n^{(p)}) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (X_{\gamma(1)}^{(p)}, \dots, X_{\gamma(n)}^{(p)}) . \quad (\text{IV.31})$$

On pose  $b_{p,n,k} = \mathbf{E}[F(Z, X_k^{(p)}, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_n^{(p)}\} \setminus \{X_k^{(p)}\})]$  et on déduit de (IV.31) que

$$\begin{aligned} b_{p,n,k} &= \mathbf{E}[F(Z, X_n^{(p)}, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_n^{(p)}\} \setminus \{X_n^{(p)}\})] \\ &= \mathbf{E}[F(Z, X_n^{(p)}, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n-1}^{(p)}\})] \\ &= \int_{B_p} \frac{\mu(dx)}{\mu(B_p)} \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n-1}^{(p)}\})] , \end{aligned}$$

avec la convention que  $\{X_1^{(p)}, \dots, X_{n-1}^{(p)}\} = \emptyset$  si  $n = 1$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} a &= \sum_{p \geq 1} \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(M_p = n) n \int_{B_p} \frac{\mu(dx)}{\mu(B_p)} \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n-1}^{(p)}\})] \\ &= \sum_{p \geq 1} \sum_{n \geq 1} e^{-\mu(B_p)} \frac{\mu(B_p)^n}{n!} n \int_{B_p} \frac{\mu(dx)}{\mu(B_p)} \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n-1}^{(p)}\})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p \geq 1} \sum_{n \geq 1} e^{-\mu(B_p)} \frac{\mu(B_p)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{B_p} \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n-1}^{(p)}\})] \\
&= \sum_{p \geq 1} \sum_{n' \geq 0} \mathbf{P}(M_p = n') \int_{B_p} \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n'}^{(p)}\})] \\
&= \sum_{p \geq 1} \int_{B_p} \mu(dx) \sum_{n' \geq 0} \mathbf{P}(M_p = n') \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \{X_1^{(p)}, \dots, X_{n'}^{(p)}\})] \\
&= \sum_{p \geq 1} \int_{B_p} \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi_p^* \cup \Pi_p)] \\
&= \sum_{p \geq 1} \int_{B_p} \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi)] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi)],
\end{aligned}$$

qui est bien le résultat voulu. ■

**Remarque IV.4.2** On se donne  $G : \mathbb{S}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui sont respectivement  $\mathcal{S}_E$ -mesurable et  $\mathcal{E}$ -mesurable. La formule de Palm appliquée à  $F(x, \pi) = g(x)G(\pi)$ , donne

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{X \in \Pi} g(X)G(\Pi \setminus \{X\}) \right] = \mathbf{E}[G(\Pi)] \int_E g(x) \mu(dx).$$

Cette formule peut s'interpréter de la manière suivante : si on choisit un point  $X$  de  $\Pi$  "uniformément au hasard" (c'est-à-dire selon la mesure de comptage) alors ce point a pour "loi"  $\mu$ , il est indépendant du nuage  $\Pi \setminus \{X\}$  qui est Poissonnier d'intensité  $\mu$ . Autrement dit, si on observe  $\Pi$  depuis un point typique de  $\Pi$  (qui est enlevé de  $\Pi$ , on observe toujours un nuage Poissonnier. De plus, le nouveau nuage observé ne donne pas d'information sur la position d'observation. □

**Remarque IV.4.3** On conserve les mêmes hypothèses que le théorème précédent en ce qui concerne  $\Pi$  et  $Z$  mais on considère une application  $F : E_0 \times E \times \mathbb{S}_E \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  qui est  $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable et telle que

$$\int_E \mu(dx) \mathbf{E}[|F(Z, x, \Pi)|] < \infty. \quad (\text{IV.32})$$

Alors on déduit facilement du théorème IV.4.1, qui traite le cas des fonctions positives, que

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{X \in \Pi} F(Z, X, \Pi \setminus \{X\}) \right] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi)].$$

En effet, si  $F$  est réelle, il suffit de séparer  $F$  en sa partie positive et sa partie négative, de montrer que toutes les expressions ont un sens grâce à l'hypothèse (IV.32) et au théorème IV.4.1 et de déduire le résultat. Dans le cas où  $F$  est à valeurs complexes, il faut raisonner sur la partie réelle et la partie imaginaire. Nous laissons les détails au lecteur. □

En itérant la formule de Palm, on prouve le résultat suivant.

**Théorème IV.4.4 (Formule de Palm à  $n$  points)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnier d'intensité  $\mu$ , supposée sigma-finie et non-nulle. Soit  $(E_0, \mathcal{E}_0)$ , un espace mesurable et soit

$Z : \Omega \rightarrow E_0$ , une variable  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_0)$ -mesurable supposée indépendante de  $\Pi$ . Soit  $F : E_0 \times E^n \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. On rappelle la notation

$$\Phi_F^{(n)}(Z, \Pi) = \sum_{\substack{X_1, \dots, X_n \in \Pi \\ \text{distincts}}} F(Z, X_1, \dots, X_n, \Pi \setminus \{X_1, \dots, X_n\}).$$

avec la convention qu'une somme sur un ensemble d'indices vide est nulle. Alors,

$$\mathbf{E}[\Phi_F^{(n)}(Z, \Pi)] = \int_{E^n} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \mathbf{E}[F(Z, x_1, \dots, x_n, \Pi)]. \quad (\text{IV.33})$$

De même, on rappelle que  $\Lambda_F^{(n)}(Z, \Pi) = \sum_{X_1, \dots, X_n \in \Pi, \text{ distincts}} F(Z, X_1, \dots, X_n, \Pi)$ . Alors

$$\mathbf{E}[\Lambda_F^{(n)}(Z, \Pi)] = \int_{E^n} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \mathbf{E}[F(Z, x_1, \dots, x_n, \Pi \cup \{x_1, \dots, x_n\})]. \quad (\text{IV.34})$$

**Preuve :** on fait une récurrence. Le théorème IV.4.1 montre (IV.33) pour  $n = 1$ . On suppose que (IV.33) est vérifiée au rang  $n$ . Soit  $F : E_0 \times E^{n+1} \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. On pose  $E_1 = E_0 \times E$  muni de la tribu  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}$  et on définit la fonction  $G : E_1 \times E^n \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , par  $G((z, x), x_2, \dots, x_{n+1}, \pi) = F(z, x, x_2, \dots, x_{n+1}, \pi)$ . C'est une fonction  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}^{\otimes n} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. On pose  $F_0 = \Phi_G^{(n)}$ . La formule de Palm au rang  $n = 1$  (théorème IV.4.1) implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sum_{X_1 \in \Pi} F_0(Z, X_1, \Pi \setminus \{X_1\})\right] &= \int_E \mu(dx_1) \mathbf{E}[F_0(Z, x_1, \Pi)] \\ &= \int_E \mu(dx_1) \mathbf{E}[\Phi_G^{(n)}(Z, x_1, \Pi)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

On fixe  $x_1 \in E$ . L'hypothèse de récurrence implique au rang  $n$  que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Phi_G^{(n)}(Z, x_1, \Pi)] &= \mathbf{E}\left[\sum_{\substack{X_2, \dots, X_{n+1} \in \Pi \\ \text{distincts}}} F(Z, x_1, X_2, \dots, X_{n+1}, \Pi \setminus \{X_2, \dots, X_{n+1}\})\right] \\ &= \int_{E^n} \mu(dx_2) \dots \mu(dx_n) \mathbf{E}[F(Z, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \Pi)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} \sum_{X_1 \in \Pi} F_0(Z, X_1, \Pi \setminus \{X_1\}) &= \sum_{X_1 \in \Pi} \sum_{\substack{X_2, \dots, X_{n+1} \in \Pi \setminus \{X_1\} \\ \text{distincts}}} F(Z, X_1, X_2, \dots, X_{n+1}, \Pi \setminus \{X_1, X_2, \dots, X_{n+1}\}) \\ &= \Phi_F^{(n+1)}(Z, \Pi). \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Les égalités (IV.35), (IV.36) et (IV.37) permettent alors de montrer (IV.33) au rang  $n + 1$ , ce qui conclut la preuve de (IV.33). Pour démontrer la formule (IV.34), il suffit d'appliquer la formule (IV.33) à la fonction  $G(z, x_1, \dots, x_n, \pi) = F(z, x_1, \dots, x_n, \pi \cup \{x_1, \dots, x_n\})$ . ■

En application nous donnons une formule de moment d'ordre 2 pour  $\Phi_F(\Pi)$ .

**Proposition IV.4.5** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$ , supposée sigma-finie et non-nulle. Soit  $(E_0, \mathcal{E}_0)$ , un espace mesurable et soit  $Z : \Omega \rightarrow E_0$ , une variable  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_0)$ -mesurable supposée indépendante de  $\Pi$ . Soit  $F : E_0 \times E \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. On rappelle que  $\Phi_F(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} F(Z, X, \Pi \setminus \{X\})$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Phi_F(\Pi)^2] &= \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi)^2] \\ &\quad + \int_{E^2} \mu(dx) \mu(dy) \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi \cup \{y\}) F(Z, y, \Pi \cup \{x\})]. \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

**Preuve :** pour tout sous-ensemble fini  $J \subset \Pi$ , on a bien

$$\left( \sum_{X \in J} F(Z, X, \Pi \setminus \{X\}) \right)^2 = \sum_{X \in J} F(Z, X, \Pi \setminus \{X\})^2 + \sum_{\substack{X_1, X_2 \in J \\ \text{distincts}}} G(Z, X_1, X_1, \Pi \setminus \{X_1, X_2\}).$$

où  $G(z, x, y, \pi) = F(z, x, \pi \cup \{y\}) F(z, y, \pi \cup \{x\})$ . En effet, il s'agit juste du développement du carré d'une somme finie. En prenant le supremum sur tous les sous-ensembles finis  $J \subset \Pi$ , on peut remplacer  $J$  par  $\Pi$  dans l'expression précédente : on a  $\Phi_F(\Pi)^2 = \Phi_{F^2}(\Pi) + \Phi_G^{(2)}(\Pi)$  et on conclut par le théorème IV.4.4. ■

#### IV.4.b Formules exponentielles.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  supposé complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable et  $f : E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable. On rappelle la définition IV.2.4 (page 133) de la *f-fonction de comptage*  $N_f(\pi) = \sum_{x \in \pi} f(x)$ , pour tout  $\pi \in \mathbb{S}_E$ . On rappelle également l'approximation  $f_n$  de  $f$ , (IV.10) et (IV.11) page 133.

**Théorème IV.4.6 (Formule exponentielle positive)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$ . Soit  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  une application  $\mathcal{E}$ -mesurable. Alors

$$\mathbf{E}[\exp(-N_f(\Pi))] = \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)})\right), \quad (\text{IV.39})$$

avec la convention  $\exp(-\infty) = 0$ . De plus, on a

$$\mathbf{E}[N_f(\Pi)] = \int_E \mu(dx) f(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[N_f(\Pi)^2] = \int_E \mu(dx) f(x)^2 + \left(\int_E \mu(dx) f(x)\right)^2,$$

**Preuve :** par (IV.10), on a

$$\mathbf{E}[\exp(-N_{f_n}(\Pi))] = \prod_{0 \leq k < n2^n} \exp(-\mu(A_{k,n})(1 - e^{-f_n(x)})) = \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f_n(x)})\right),$$

ce qui entraîne (IV.39) par (IV.11), par convergence dominée et par convergence monotone. Le premier moment de  $N_f(\Pi)$  est donné par le lemme IV.2.5 (ii). La formule donnant le moment d'ordre 2 découle directement de la proposition IV.4.5 avec  $F(z, x, \pi) = f(x)$ . ■

**Lemme IV.4.7 (Caractérisation)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage aléatoire d'intensité  $\mu$ . C'est un nuage Poissonnienssi pour toute fonction  $f$  positive  $\mathcal{E}$ -mesurable bornée (IV.39) est vérifiée.

**Preuve :** si  $\Pi$  est Poissonnien, alors le théorème IV.4.6 montre que (IV.39) est vérifié pour toute fonction  $f$  positive,  $\mathcal{E}$ -mesurable bornée. Réciproquement, soient  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ , disjoints deux-à-deux et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ . En choisissant  $f = \lambda_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \lambda_p \mathbf{1}_{A_p}$  dans (IV.39), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[e^{-\lambda_1 N_{A_1}(\Pi) - \dots - \lambda_p N_{A_p}(\Pi)}] &= \mathbf{E}[e^{-N_f(\Pi)}] = \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)})\right) \\ &= \prod_{1 \leq k \leq p} \exp(-\mu(A_k)(1 - e^{-\lambda_k})).\end{aligned}$$

Par injectivité de la transformée de Laplace, cela entraîne que  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont des variables de Poisson indépendantes si  $\mu(A_1), \dots, \mu(A_p)$  sont des quantités finies. Le cas général est facile à déduire car si  $\mu(A) = \infty$ ,  $N_A(\Pi)$  est déterministe et vaut l'infini. ■

**Remarque IV.4.8** On observe également que si  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta \in ]0, \infty[$ , alors  $Y$  admet des moments exponentiels de tous ordres :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}[e^{\lambda Y}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!} e^{-\theta} e^{\lambda n} = \exp(\theta(e^\lambda - 1)).$$

En reprenant l'approximation de la preuve du théorème IV.4.6, on montre sous les mêmes hypothèses que ce théorème que

$$\mathbf{E}[\exp(N_f(\Pi))] = \exp\left(\int_E \mu(dx)(e^{f(x)} - 1)\right), \quad (\text{IV.40})$$

ces quantités pouvant être infinies, avec la convention  $\exp(\infty) := \infty$ . □

**Proposition IV.4.9** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application  $\mathcal{E}$ -mesurable ( $f$  ne prend pas la valeur  $\infty$ ). Alors, on a l'alternative suivante.

(a) Si  $\int_E (1 \wedge f(x)) \mu(dx) < \infty$ , alors p.s.  $N_f(\Pi) < \infty$ .

(b) Si  $\int_E (1 \wedge f(x)) \mu(dx) = \infty$ , alors p.s.  $N_f(\Pi) = \infty$ .

**Preuve :** on pose  $c = 1 - e^{-1}$ . On a  $c(1 \wedge y) \leq 1 - e^{-y} \leq 1 \wedge y$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ , car la fonction  $y \mapsto 1 - e^{-y}$  est concave. Donc pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,

$$c \int_E \mu(dx) (1 \wedge (\lambda f(x))) \leq \int_E \mu(dx) (1 - e^{-\lambda f(x)}) \leq \int_E \mu(dx) (1 \wedge (\lambda f(x))). \quad (\text{IV.41})$$

Supposons que  $\mathbf{P}(N_f(\Pi) < \infty) > 0$ , alors  $\mathbf{E}[\exp(-N_f(\Pi))] > 0$ , et la formule exponentielle implique que  $\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)}) < \infty$ . L'inégalité (IV.41) avec  $\lambda = 1$  implique donc que  $\int_E \mu(dx)(1 \wedge f(x)) < \infty$ .

Réciproquement, on suppose que  $\int_E \mu(dx)(1 \wedge f(x)) < \infty$ . On observe que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $1 - e^{-\lambda f(x)} \leq 1 \wedge f(x)$ . Comme  $f$  ne peut pas prendre la valeur  $\infty$ , on a  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} 1 - e^{-\lambda f(x)} = 0$ . Par convergence dominée, on obtient  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_E \mu(dx)(1 - e^{-\lambda f(x)}) = 0$  et un argument élémentaire combiné à la formule exponentielle montre que

$$\mathbf{P}(N_f(\Pi) < \infty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{E}[\exp(-\lambda N_f(\Pi))] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \exp\left(\int_E \mu(dx)(1 - e^{-\lambda f(x)})\right) = 1,$$

ce qui montre **(a)**. Supposons que  $\int_E \mu(dx)(1 \wedge f(x)) = \infty$ . Alors, par (IV.41)  $\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)}) = \infty$ , et la formule exponentielle entraîne que  $\mathbf{E}[\exp(-N_f(\Pi))] = 0$ , ce qui est équivalent à dire que  $\mathbf{P}(N_f(\Pi) = \infty) = 1$ . Cela montre une implication de **(b)**. L'implication réciproque suit immédiatement de **(a)**. ■

On se place sous les hypothèses du théorème IV.4.6. Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable telle que

$$\int_E \mu(dx) (1 \wedge |f(x)|) < \infty. \quad (\text{IV.42})$$

Cela implique que  $\int_E \mu(dx) (1 \wedge f^+(x))$  et  $\int_E \mu(dx) (1 \wedge f^-(x))$  sont des quantités finies. Ici  $f^+$  et  $f^-$  sont les parties positives et négatives de  $f$ . La proposition (IV.4.9) entraîne alors que  $N_{f^+}(\Pi)$  et  $N_{f^-}(\Pi)$  sont des variables finies presque sûrement et on a

$$N_{|f|}(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} |f(X)| = N_{f^+}(\Pi) + N_{f^-}(\Pi) < \infty.$$

On pose alors

$$N_f(\Pi) = N_{f^+}(\Pi) - N_{f^-}(\Pi) := \sum_{X \in \Pi} f(X). \quad (\text{IV.43})$$

**Théorème IV.4.10 (Formule exp. réelle)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\mu$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{E}$ -mesurable satisfaisant (IV.42), ce qui permet de définir  $N_f(\Pi)$  par (IV.43). Alors,

$$\mathbf{E}[\exp(iN_f(\Pi))] = \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{if(x)})\right). \quad (\text{IV.44})$$

Si  $\int_E \mu(dx)|f(x)| < \infty$ , alors  $N_f(\Pi)$  est une variable intégrable et on a

$$\mathbf{E}\left[\sum_{X \in \Pi} f(X)\right] = \int_E \mu(dx)f(x). \quad (\text{IV.45})$$

Si  $\int_E \mu(dx)|f(x)| < \infty$  et  $\int_E \mu(dx)f(x)^2 < \infty$ , alors  $N_f(\Pi)$  a un moment d'ordre deux et

$$\mathbf{var}(N_f(\Pi)) = \int_E \mu(dx)f(x)^2.$$

**Preuve :** soit  $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable telle que  $\int_E \mu(dx)(1 \wedge g(x)) < \infty$ . Par la proposition IV.4.9, on a  $\mathbf{P}(N_g(\Pi) < \infty) = 1$ . Comme dans la preuve de la formule exponentielle positive (théorème IV.4.6) on démontre facilement que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[\exp(iu N_g(\Pi))] = \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{iu g(x)})\right). \quad (\text{IV.46})$$

On pose  $E_+ := \{f \geq 0\}$  et  $E_- := \{f < 0\}$ , qui sont deux Boréliens disjoints. On a donc  $f = f^+$  sur  $E_+$  et  $-f = f^-$  sur  $E_-$ . On pose également  $\Pi_+ := \Pi \cap E_+$  et  $\Pi_- := \Pi \cap E_-$ . Le principe de restriction implique que  $\Pi_+$  et  $\Pi_-$  sont deux nuages Poissonniens indépendants d'intensités respectives  $\mu(\cdot \cap E_+)$  et  $\mu(\cdot \cap E_-)$ . En utilisant (IV.46) avec  $\Pi_{+/-}$ ,  $u = +1$  ou  $-1$  et  $g = |f|$ , on obtient

$$\mathbf{E}[\exp(iN_f(\Pi))] = \mathbf{E}[\exp(iN_f(\Pi_+))] \mathbf{E}[\exp(-iN_f(\Pi_-))]$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-\int_{E_+} \mu(dx)(1 - e^{if(x)})\right) \exp\left(-\int_{E_-} \mu(dx)(1 - e^{if(x)})\right) \\
&= \exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - e^{if(x)})\right),
\end{aligned}$$

ce qui montre le point (IV.44). On a également,  $\mathbf{E}[N_{f^{+/-}}(\Pi)] = \int_E \mu(dx)f^{+/-}(x)$  et on en déduit (IV.45). On rappelle que le théorème IV.4.6 implique

$$\mathbf{E}[N_{|f|}(\Pi_{+/-})^2] = \int_{E_{+/-}} \mu(dx)|f(x)|^2 + \left(\int_{E_{+/-}} \mu(dx)|f(x)|\right)^2.$$

Donc si  $\int_E \mu(dx)|f(x)| < \infty$  et  $\int_E \mu(dx)f(x)^2 < \infty$ ,  $N_f(\Pi) = N_{|f|}(\Pi_+) - N_{|f|}(\Pi_-)$  admet un moment d'ordre deux et par indépendance de  $\Pi_+$  et de  $\Pi_-$ , on a

$$\mathbf{var}(N_f(\Pi)) = \mathbf{var}(N_f(\Pi_+)) + \mathbf{var}(N_f(\Pi_-)) = \int_E \mu(dx)(f^+(x))^2 + \int_E \mu(dx)(f^-(x))^2,$$

ce qui entraîne le résultat voulu. ■

## IV.5 Nuages Poissonniens sur $\mathbb{R}_+ \times E$ .

### IV.5.a Premières propriétés.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité noté  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  supposé complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. On munit  $\mathbb{R}_+ \times E$  de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ . Il est facile de vérifier que  $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$  est séparable et séparé. On rappelle ensuite que  $\ell$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit une mesure sigma-finie  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{E})$ : la mesure produit  $\ell \otimes \mu$  est également sigma-finie et elle est diffuse, même lorsque  $\mu$  n'est pas diffuse.

**Proposition IV.5.1** Soit  $\theta \in ]0, \infty[$ . Soit  $\nu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure de probabilité. Soit  $(\mathcal{E}_n, X_n)$ ,  $n \geq 1$ , une suite de variables telles que  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$  soient i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\theta$ , telles que  $(X_n)_{n \geq 1}$  soient i.i.d. à valeurs dans  $E$  de loi  $\nu$ , et telles que  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$  et  $(X_n)_{n \geq 1}$  soient indépendantes. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n := \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi := \{(T_n, X_n); n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Alors,  $\Pi$  est un nuage Poissonnier sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  d'intensité  $\theta \ell \otimes \nu$ .

**Preuve :** par le lemme IV.4.7 page 152, il suffit de montrer que pour toute fonction mesurable  $f : \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{E}\left[\exp(-N_f(\Pi))\right] = \exp\left(-\theta \int_{\mathbb{R}_+ \times E} \ell(ds)\nu(dx)(1 - e^{-f(s,x)})\right). \quad (\text{IV.47})$$

On rappelle que  $\Pi_0 = \{T_n; n \in \mathbb{N}^*\}$  est un nuage Poissonnier d'intensité  $\theta \ell$  (voir le théorème IV.1.12, page 129 en appendice). Il est clairement indépendant de  $(X_n)_{n \geq 1}$ . On fixe  $t > 0$  et on définit  $f_t$  en posant  $f_t(s, x) := \mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s, x)$ . Par le théorème IV.1.12 (iii), on montre facilement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{E}\left[\exp(-N_{f_t}(\Pi)) \mid N_{[0,t]}(\Pi_0) = n\right] = \left(\frac{1}{t} \int_{[0,t] \times E} \ell(ds)\nu(dx)e^{-f(s,x)}\right)^n.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\exp(-N_{f_t}(\Pi))] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(N_{[0,t]}(\Pi_0) = n) \left( \frac{1}{t} \int_{[0,t] \times E} \ell(ds) \nu(dx) e^{-f(s,x)} \right)^n \\ &= e^{-\theta t} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \left( \theta \int_{[0,t] \times E} \ell(ds) \nu(dx) e^{-f(s,x)} \right)^n \\ &= \exp \left( -\theta \int_{[0,t] \times E} \ell(ds) \nu(dx) (1 - e^{-f(s,x)}) \right),\end{aligned}$$

Par convergence monotone, on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_{f_t}(\Pi) = N_f(\Pi)$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t] \times E} \ell(ds) \nu(dx) (1 - e^{-f(s,x)}) = \int_{\mathbb{R}_+ \times E} \ell(ds) \nu(dx) (1 - e^{-f(s,x)}).$$

Par convergence dominée, on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\exp(-N_{f_t}(\Pi))] = \mathbf{E}[\exp(-N_f(\Pi))]$ , ce qui montre (IV.47) et donc la proposition. ■

On veut montrer que tous les nuages d'intensité  $\ell \otimes \mu$  avec  $\mu$  finie se représentent comme dans la proposition IV.5.1. Pour cela, on introduit la notation suivante

*R est l'ensemble des nuages  $\pi$  sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  de la forme  $\{(t_n, x_n); n \in \mathbb{N}^*\}$  où la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  croît strictement vers  $\infty$ .*

Le résultat suivant est un résultat technique de mesurabilité dont la preuve peut être passée à première lecture.

**Lemme IV.5.2** *R est un ensemble de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe des fonctions  $\mathcal{E}_n : \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \rightarrow ]0, \infty[$  qui sont  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ -mesurables et des fonctions  $X_n : \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \rightarrow E$  qui sont  $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}, \mathcal{E})$ -mesurables, et qui satisfont les propriétés suivantes.*

- Si  $T_n := \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors pour tout  $\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\pi) = \infty$ .
- Pour tout  $\pi \in R$ , on a  $\pi = \{(T_n(\pi), X_n(\pi)); n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Preuve :** on pose  $R_0 := N_{\mathbb{R}_+ \times E}^{-1}(\{\infty\}) \cap \bigcap_{p \geq 1} N_{[0,p] \times E}^{-1}(\mathbb{N})$ , qui est dans la tribu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable bornée. On pose

$$\forall (t, \pi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}, \quad S_f(t, \pi) = \sum_{(s, x) \in \pi} (1 + f(x)) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \in [0, \infty].$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_t(s, x) = (1 + f(x)) \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ . Clairement,  $f_t : \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ -mesurable et on voit que  $S_f(t, \pi) = N_{f_t}(\pi)$ . Cela montre que pour  $t$  fixé,  $\pi \mapsto S_f(t, \pi)$  est mesurable. Par ailleurs, on remarque que à  $\pi$  fixé,  $t \mapsto S_f(t, \pi)$  est croissante. Si  $S_f(t_0, \pi) < \infty$ , alors  $t \mapsto S_f(t, \pi)$  est càd sur  $[0, t_0[$ . Comme  $f$  est bornée, pour tout nuage  $\pi \in R_0$ ,  $t \mapsto S_f(t, \pi)$  est donc croissante càd.

On pose  $\mathcal{S}_{R_0} = \{C \cap R_0; C \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}\}$ , la tribu trace de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  sur  $R_0$ . Comme  $R_0$  est dans la tribu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ ,  $\mathcal{S}_{R_0}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ . Montrons que la fonction

$$(t, \pi) \in \mathbb{R}_+ \times R_0 \longmapsto S_f(t, \pi) \in \mathbb{R}_+ \text{ est } \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{S}_{R_0}-\text{mesurable.} \quad (\text{IV.48})$$

En effet, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $(t)_n := 2^{-n} \lceil 2^n t \rceil$ , qui tend en décroissant vers  $t$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On remarque que  $S_f((t)_n, \pi) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[}(t) S_f(k2^{-n}, \pi)$ . Ce qui précède

implique que  $(t, \pi) \mapsto \mathbf{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]}(t)S_f(k2^{-n}, \pi)$  est  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{S}_{R_0}$ -mesurable. Il en est donc de même pour  $(t, \pi) \mapsto S_f((t)_n, \pi)$ . Or  $\lim_n S_f((t)_n, \pi) = S_f(t, \pi)$ , sur  $\mathbb{R}_+ \times R_0$ , ce qui permet de conclure.

Si  $f$  est nulle, alors  $S_0(t, \pi) = N_{[0,t] \times E}(\pi)$ . La fonction  $(t, \pi) \in \mathbb{R}_+ \times R_0 \rightarrow N_{[0,t] \times E}(\pi) \in \mathbb{N}$  est donc  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{S}_{R_0}$ -mesurable. On remarque qu'à  $\pi$  fixé, les sauts de  $t \mapsto N_{[0,t] \times E}(\pi)$  peuvent être strictement supérieurs à 1, si par exemple  $(t, x)$  et  $(t, y)$  appartiennent à  $\pi$  avec  $x$  et  $y$  distincts. On fixe  $\pi \in R_0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_0(\pi) := 0$  et  $T_{n+1}(\pi) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : S_0(t, \pi) > S_0(T_n(\pi), \pi)\}$ . Par définition de  $R_0$ , la suite  $T_n(\pi)$  croît strictement vers  $\infty$  et on a  $S_0(T_n(\pi), \pi) \geq n$ . Supposons que  $T_n : R_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  soit  $\mathcal{S}_{R_0}$ -mesurable ; alors il en est de même pour  $\pi \in R_0 \mapsto S_0(T_n(\pi), \pi)$ , par le résultat de mesurabilité conjointe (IV.48). On constate ensuite que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $T_{n+1}^{-1}([t, \infty]) = \{\pi \in R_0 : S_0(T_n(\pi), \pi) = S_0(t, \pi)\}$ , qui est bien un ensemble de  $\mathcal{S}_{R_0}$ . Cela montre que  $T_{n+1}$  est  $\mathcal{S}_{R_0}$ -mesurable.

Par récurrence, on a donc montré que les  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , sont des fonctions  $\mathcal{S}_{R_0}$ -mesurables. Il en est donc de même pour les fonctions  $\pi \mapsto S_0(T_n(\pi), \pi)$ . On remarque alors que  $R$  est le sous-ensemble des  $\pi \in R_0$  où  $t \mapsto N_{[0,t] \times E}(\pi)$  ne progresse que de 1 en 1, c'est-à-dire  $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\pi \in R_0 : S_0(T_{n+1}(\pi), \pi) = 1 + S_0(T_n(\pi), \pi)\}$ , qui est donc un ensemble dans la tribu  $\mathcal{S}_{R_0}$ , donc dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ .

On note  $\mathcal{S}_R$  la tribu trace de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  sur  $R$ . Si  $\pi \in R$ , alors il existe une suite  $X_n(\pi) \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , telle que  $\pi = \{(T_n(\pi), X_n(\pi)) ; n \in \mathbb{N}^*\}$ . On remarque ensuite que  $f(X_n(\pi)) = S_f(T_n(\pi), \pi) - S_f(T_{n-1}(\pi), \pi) - 1$  et les résultats de mesurabilités conjointes qui précèdent impliquent que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\pi \in R \mapsto f(X_n(\pi)) \in \mathbb{R}_+$  est  $\mathcal{S}_R$ -mesurable, pour toute fonction Borélienne  $f$ . Par conséquent,  $\pi \in R \mapsto X_n(\pi)$  est  $(\mathcal{S}_R, \mathcal{E})$ -mesurable.

On fixe  $x_0 \in E$ , qui ne joue aucun rôle spécifique. On étend  $X_n$  de façon mesurable à  $\mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  en posant  $X_n(\pi) := x_0$  si  $\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \setminus R$  : la fonction obtenue  $X_n : \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \rightarrow E$  est donc  $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}, \mathcal{E})$ -mesurable. On pose ensuite  $\mathcal{E}_n(\pi) := 1$  si  $\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \setminus R$  et  $\mathcal{E}_n(\pi) := T_n(\pi) - T_{n-1}(\pi)$  si  $\pi \in R$ . On vérifie immédiatement que  $\mathcal{E}_n : \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \rightarrow [0, \infty]$  est  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ -mesurable et que les suites de fonctions  $\mathcal{E}_n$ ,  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , satisfont bien les propriétés désirées. ■

**Proposition IV.5.3** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  un nuage Poissonnier d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . La mesure  $\mu$  est supposée de masse finie. On rappelle de la proposition IV.5.2, les définitions de  $X_n$  et  $\mathcal{E}_n$ . Alors, on a les propriétés suivantes.

- (i)  $\mathbf{P}(\Pi \in R) = 1$ .
- (ii) Les deux suites  $(\mathcal{E}_n(\Pi))_{n \geq 1}$  et  $(X_n(\Pi))_{n \geq 1}$  sont indépendantes.
- (iii) Les variables  $(\mathcal{E}_n(\Pi))_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\mu(E)$ .
- (iv) Les variables  $(X_n(\Pi))_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi  $\mu(\cdot)/\mu(E)$ .
- (v) Si on pose  $T_n(\Pi) = \mathcal{E}_1(\Pi) + \dots + \mathcal{E}_n(\Pi)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a donc

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \Pi = \{ (T_n(\Pi), X_n(\Pi)) ; n \in \mathbb{N}^* \} .$$

**Preuve :** soit  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ , un espace de probabilité sur lequel sont définies deux suites indépendantes de variables,  $(\mathcal{E}'_n)_{n \geq 1}$  et  $(X'_n)_{n \geq 1}$ , où les variables  $(\mathcal{E}'_n)_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\mu(E)$  et les variables  $(X'_n)_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi  $\mu(\cdot)/\mu(E)$ . On pose  $T'_n = \mathcal{E}'_1 + \dots + \mathcal{E}'_n$  et  $\Pi' = \{(T'_n, X'_n) ; n \in \mathbb{N}^*\}$ . La proposition IV.5.1 montre que  $\Pi'$  est un nuage Poissonnier sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . Donc  $\Pi'$  a même loi que  $\Pi$ . Comme il est clair que  $\mathbf{P}'(\Pi' \in R) = 1$ , on a  $\mathbf{P}(\Pi \in R) = 1$ . Le lemme IV.5.2 implique alors que la suite  $(\mathcal{E}_n(\Pi'), X_n(\Pi'))_{n \geq 1}$  a même loi que la suite  $(\mathcal{E}_n(\Pi), X_n(\Pi))_{n \geq 1}$ . Par ailleurs, il est clair que  $\mathbf{P}'\text{-p.s.}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n(\Pi')$  et  $X'_n = X_n(\Pi')$ , ce qui permet de conclure. ■

On déduit de ce qui précède et du théorème de restriction le résultat d'extraction suivant qui permet de calculer la loi d'un nuage jusqu'au premier temps d'atteint d'un ensemble.

**Proposition IV.5.4 (Extraction)** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . La mesure  $\mu$  est supposée sigma-finie. Soit  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $0 < \mu(A) < \infty$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) il existe des suites de v.a.  $(T_n, X_n)_{n \geq 1}$  qui satisfont les propriétés suivantes :

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times A) = \{(T, X) \in \Pi : X \in A\} = \{(T_n, X_n); n \geq 1\},$$

$(T_n)_{n \geq 1}$  et  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes ; les v.a.  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi  $\mu(\cdot \cap A)/\mu(A)$  ; on pose  $T_0 = 0$  ; alors les v.a.  $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$  sont i.i.d. exponentielle de paramètre  $\mu(A)$ .

(ii) On pose  $\Pi' = \Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times (E \setminus A))$ . Alors  $T_1, X_1$  et  $\Pi'$  sont indépendants et

$$\Pi \cap ([0, T_1] \times E) = \{(T_1, X_1)\} \cup (\Pi' \cap [0, T_1] \times E),$$

ce qui implique que pour toute fonction  $F : \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ -mesurable bornée on a

$$\mathbf{E}[F(\Pi \cap ([0, T_1] \times E))] = \int_0^\infty dt e^{-\mu(A)t} \int_A \mu(dx) \mathbf{E}[F(\{t, x\} \cup (\Pi \cap ([0, t] \times (E \setminus A))))].$$

**Preuve.** Par le principe de restriction (théorème IV.3.6, page 142),  $\Pi_A := \Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times A)$  est un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu(\cdot \cap A)$ . Comme  $\mu(\cdot \cap A)$  est de masse  $\mu(A)$  finie, la proposition IV.5.3 s'applique et on a  $T_n = \mathcal{E}_1(\Pi_A) + \dots + \mathcal{E}_n(\Pi_A)$  et  $X_n = X_n(\Pi_A)$ ,  $n \geq 1$ , ce qui prouve (i). Le point (ii) est une conséquence du (i) et du même principe de restriction (théorème IV.3.6, page 142) qui montre que  $\Pi'$  et  $\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times A)$  sont des nuages Poissonniens indépendants. ■

En appliquant le principe de restriction et les résultats précédents, on a immédiatement le résultat suivant.

**Théorème IV.5.5** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . La mesure  $\mu$  est supposée sigma-finie. Soit  $B_p \in \mathcal{E}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , une partition de  $E$  telle que  $0 < \mu(B_p) < \infty$ . On rappelle de la proposition IV.5.2, les définitions de  $X_n$  et  $\mathcal{E}_n$  et on pose pour tous  $n, p \geq 1$

$$\mathcal{E}_n^{B_p} = \mathcal{E}_n(\Pi \cap B_p) \quad \text{et} \quad X_n^{B_p} = X_n(\Pi \cap B_p).$$

Alors, les assertions suivantes sont vraies

- (i) Les variables  $\mathcal{E}_n^{B_p}, X_n^{B_p}$ ,  $n, p \geq 1$ , sont indépendantes.
- (ii) Pour tout  $p \geq 1$ , les variables  $(\mathcal{E}_n^{B_p})_{n \geq 1}$  suivent une loi exponentielle de paramètre  $\mu(B_p)$ .
- (iii) Pour tout  $p \geq 1$ , les variables  $(X_n^{B_p})_{n \geq 1}$  ont pour loi  $\mu(\cdot \cap B_p)/\mu(B_p)$ .
- (iv) Pour tous  $n, p \geq 1$ , on pose  $T_n^{B_p} := \mathcal{E}_1^{B_p} + \dots + \mathcal{E}_n^{B_p}$ . Alors  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tout  $p \geq 1$ ,  $\Pi \cap B_p = \{(T_n^{B_p}, X_n^{B_p}); n \in \mathbb{N}^*\}$ , et donc

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \Pi = \{(T_n^{B_p}, X_n^{B_p}); n, p \geq 1\}. \tag{IV.49}$$

Ce théorème donne une construction, et une méthode de simulation, des nuages Poissonniens d'intensité  $\ell \otimes \mu$  lorsque  $\mu$  est sigma-finie. On remarque que (IV.49) implique que sous les hypothèses du théorème IV.5.5 qui précède,

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N_{\{t\} \times E}(\Pi) \in \{0, 1\}. \quad (\text{IV.50})$$

Cela implique le résultat suivant.

**Lemme IV.5.6** *Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparé et séparable. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$ , où  $\mu$  est sigma finie et de masse infinie. On pose*

$$J(\Pi) := \{T \in \mathbb{R}_+ : \exists X \in E \text{ tel que } (T, X) \in \Pi\}.$$

Alors, p.s.  $J(\Pi)$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Preuve :** pour tous réels positifs  $a < b$ , on a  $(\ell \otimes \mu)([a, b] \times E) = \infty$ . Cela montre que p.s.  $N_{[a, b] \times E}(\Pi) = \infty$ . Or (IV.50) implique que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tous réels positifs  $a < b$ ,  $\#(J(\Pi) \cap [a, b]) = N_{[a, b] \times E}(\Pi)$ . Donc, p.s. pour tous rationnels positifs  $a < b$ ,  $\#(J(\Pi) \cap [a, b]) = \infty$ , ce qui implique le résultat voulu. ■

### IV.5.b Une loi des grands nombres.

On commence par montrer la loi de grands nombres suivante (qui est en fait un cas particulier du théorème de renouvellement).

**Lemme IV.5.7 (Renouvellement pour le processus de Poisson homogène)** *Soit  $(N_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ , un processus de Poisson homogène sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $\theta \in ]0, \infty[$  (cf. définition IV.1.11 page 129). Alors,*

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \frac{1}{s} N_s \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Preuve.** Les v.a.  $(N_{n+1} - N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont i.i.d. de loi de Poisson de paramètre  $\theta$ . Comme  $N_n = \sum_{0 \leq k < n} N_{k+1} - N_k$ , la loi des grands nombres implique  $\mathbf{P}$ -p.s. que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n/n = \theta$ . Comme pour tout réel  $s \geq 1$ , on a  $(s/\lfloor s \rfloor)\lfloor s \rfloor^{-1} N_{\lfloor s \rfloor} \leq N_s/s \leq (s/\lceil s \rceil)\lceil s \rceil^{-1} N_{\lceil s \rceil}$ , on obtient bien  $\lim_{s \rightarrow \infty} N_s/s = \theta$ . ■

On rappelle ensuite le second lemme de Dini (un résultat déterministe et relativement élémentaire) dont la preuve est placée en fin de section pour faciliter l'exposé des résultats.

**Lemme IV.5.8 (Second lemme de Dini)** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction croissante (pas nécessairement continue). Soit  $D \subset \mathbb{R}_+$ , un ensemble infini, dénombrable et non-borné (il n'est pas nécessairement dense). On fait les hypothèses suivantes.*

(a) Pour tout  $t \in D$ ,  $f(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$  existe dans  $\mathbb{R}_+$ .

(b) L'adhérence  $\overline{\{f(t) ; t \in D\}}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}_+$  contenant 0.

Alors,  $f$  se prolonge de manière unique à  $\mathbb{R}_+$  et ce prolongement noté  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continu, croissant et tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \sup_{s \in [0, t]} |f_k(s) - f(s)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Preuve.** Voir la fin de cette section. ■

Grâce aux deux résultats précédents on montre la loi des grands nombres suivante, utilisée pour prouver le théorème de Greenwood-Pitman IV.6.12 (page 177).

**Proposition IV.5.9** Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparé et séparable. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$ , où  $\mu$  est sigmafinie. Soient  $E_k \in \mathcal{E}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tels que

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \mu(E_k) < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \infty.$$

Alors,

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{N_{[0, s] \times E_k}(\Pi)}{\mu(E_k)} - s \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (\text{IV.51})$$

**Preuve.** On fixe un réel  $t > 0$ . Soit  $(N_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$  un processus de Poisson linéaire homogène d'intensité  $t$ , que l'on suppose défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  pour simplifier. On observe que la suite  $(N_{[0, t] \times E_k}(\Pi))_{k \in \mathbb{N}}$  a même loi que  $(N_{\mu(E_k)})_{k \in \mathbb{N}}$  : par le lemme IV.5.8 précédent, on a donc  $\mathbf{P}$ -p.s. que  $\lim_{k \rightarrow \infty} N_{[0, t] \times E_k}(\Pi)/\mu(E_k) = t$ . On pose ensuite

$$\Omega_0 = \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} N_{[0, q] \times E_k}(\Pi)/\mu(E_k) = q \right\}.$$

Clairement  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  et on vient de montrer que  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ . On conclut en fixant  $\omega \in \Omega_0$  et en appliquant le second lemme de Dini IV.5.8 à  $D = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ , et  $f_k(t) = N_{[0, t] \times E_k}(\Pi(\omega))$  et  $f(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . ■

**Preuve du lemme IV.5.8.** Pour simplifier les notations, pour tout  $t \in D$  on pose  $g(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$  et  $S := \{g(t) ; t \in D\}$  dont l'adhérence est supposée être un intervalle (fermé) de  $\mathbb{R}_+$  contenant 0. La fonction  $g : D \rightarrow S$  est donc surjective et croissante. Pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$ , on pose ensuite  $f(s) := \inf\{g(t) ; t \in D \cap [s, \infty[\}$  qui est bien définie car  $D$  est supposé non-borné. La fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est croissante et elle étend  $g$  donc  $S \subset f(\mathbb{R}_+)$ . Par définition,  $f$  est à valeurs dans  $\overline{S}$ , l'adhérence de  $S$ . On a donc  $S \subset f(\mathbb{R}_+) \subset \overline{S}$ . Soit un réel  $t > 0$ . On note  $f(t-)$  et  $f(t+)$  les limites à resp. gauche et droite de  $f$  en  $t$ . Clairement,  $f(t-)$  et  $f(t+)$  appartiennent à  $\overline{S}$ . Or  $]f(t-), f(t+)[ \subset \mathbb{R}_+ \setminus \overline{S}$  et puisque  $\overline{S}$  est un intervalle cela implique que  $f(t-) = f(t+)$ . Cela montre que  $f$  est continue sur  $]0, \infty[$ . On montre de même que  $f$  est continue à droite en 0, ce qui montre que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Il est clair que  $f(0) = 0$ . Comme pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $0 \leq f_k(0) \leq f_k(t) \rightarrow f(t)$ , pour tout  $t \in D$ , on a  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(0) \leq f(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 0+$  par continuité de  $f$ . On a donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(0) = f(0) = 0$  et sans perte de généralité on peut supposer que  $0 \in D$ .

On fixe ensuite un réel  $t > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f(0) = 0$ , par croissance et continuité,  $f([0, t]) = [0, f(t)]$ . Par conséquent, si on pose  $n = \lfloor f(t)/\varepsilon \rfloor$ , par définition de  $f$ , il existe  $s_0, \dots, s_{n+1} \in D$  tels que d'une part  $s_0 = 0 \leq \dots \leq s_{n+1}$ , d'autre part  $[0, t] \subset [0, s_{n+1}]$ , et tels que pour tout  $0 \leq i \leq n$ , on ait  $i\varepsilon \leq f(s_i) < (i+1)\varepsilon$  ainsi que  $n\varepsilon \leq f(s_{n+1}) < (n+1)\varepsilon$ , ce qui implique que  $0 \leq f(s_{i+1}) - f(s_i) < 2\varepsilon$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Il existe ensuite  $k_\varepsilon \geq 1$ , tel que pour tout  $k \geq k_\varepsilon$ , et pour tout  $i \in \{0, \dots, n+1\}$ , on ait  $|f_k(s_i) - f(s_i)| \leq \varepsilon$ . Soit  $s \in [0, t]$ . Il existe  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  tel que  $s \in [s_{i-1}, s_i]$  et pour tout  $k \geq k_\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} |f_k(s) - f(s)| &\leq |f_k(s) - f_k(s_i)| + |f_k(s_i) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(s)| \\ &\leq f_k(s_i) - f_k(s) + \varepsilon + f(s_i) - f(s) \\ &\leq f_k(s_i) - f_k(s_{i-1}) + \varepsilon + f(s_i) - f(s_{i-1}) \\ &\leq f_k(s_i) - f(s_i) + f(s_{i-1}) - f_k(s_{i-1}) + f(s_i) - f(s_{i-1}) + \varepsilon + f(s_i) - f(s_{i-1}) \\ &\leq |f_k(s_i) - f(s_i)| + |f(s_{i-1}) - f_k(s_{i-1})| + 5\varepsilon \leq 7\varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k_\varepsilon \geq 1$  tel que pour tout  $k \geq k_\varepsilon$ , on a  $\sup_{s \in [0, t]} |f_k(s) - f(s)| \leq 7\varepsilon$ . Donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, t]} |f_k(s) - f(s)| = 0$ , ce qui implique le résultat voulu. ■

### IV.5.c Étiquetage poissonnien de tableaux cohérents par extraction spatiale.

Nous reprenons le cadre et les notations des deux sections précédentes.

- Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité noté  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  supposé *complet*.
- Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé.
- On munit  $\mathbb{R}_+ \times E$  de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$  (qui est séparable et séparé).
- $\ell$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\mu$ , une mesure sigma-finie sur  $(E, \mathcal{E})$ .
- On fixe  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ , un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$ .

Soit  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $0 < \mu(A) < \infty$ . Il est commode d'introduire les notations suivantes : par la proposition d'*extraction* IV.5.4 (p. 158), il existe deux suites de v.a. notées  $(T_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(X_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times A) = \{(T, X) \in \Pi : X \in A\} = \{(T_n(A), X_n(A)) ; n \in \mathbb{N}^*\}. \quad (\text{IV.52})$$

On rappelle (de cette proposition) que leur loi est décrite comme suit :

- (i) les suites  $(T_n(A))_{n \geq 1}$  et  $(X_n(A))_{n \geq 1}$  sont indépendantes,
- (ii) les v.a.  $(X_n(A))_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi  $\mu(\cdot \cap A)/\mu(A)$ ,
- (iii) les  $(T_n(A) - T_{n-1}(A))_{n \geq 1}$  sont i.i.d. exponentielle de paramètre  $\mu(A)$  (avec  $T_0(A) = 0$ ).

On fixe ensuite  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , tels que

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \mu(E_k) < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \infty. \quad (\text{IV.53})$$

On observe que le tableau de variables aléatoires  $(X_n(E_k))_{n,k \in \mathbb{N}^*}$  est *cohérent par extraction* dans le sens suivant :  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tous  $k, l \in \mathbb{N}^*$  tels que  $k \leq l$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n(E_k) = X_{\tau_n^{k,l}}(E_l) \quad \text{où} \quad \{\tau_1^{k,l} < \tau_2^{k,l} < \dots < \tau_n^{k,l} < \dots\} = \{m \in \mathbb{N}^* : X_m(E_l) \in E_k\}. \quad (\text{IV.54})$$

Nous montrons un premier résultat qui peut se reformuler informellement comme suit :

*le nuage  $\Pi$  peut être  $\mathbf{P}$ -p.s. reconstitué à partir du seul tableau des marques spatiales extraites  $(X_n(E_k))_{n,k \in \mathbb{N}^*}$ , et ce, de façon mesurable.*

En effet, par la loi des grands nombres de la proposition IV.5.9 (p. 160), on voit que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad T_n(E_k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(E_l)} N_{[0, T_n(E_k)] \times E_l}(\Pi).$$

Mais on observe que

$$N_{[0, T_n(E_k)] \times E_l}(\Pi) = \tau_n^{k,l}$$

Cela montre donc le lemme suivant et prouve la reconstruction de  $\Pi$  par ses marques spatiales.

**Lemme IV.5.10 (Reconstruction par les marques spatiales.)** Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$  où  $\mu$  est sigma finie. Soient  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , satisfaisant (IV.53). Pour tous entiers  $l \geq k \geq 1$ , on définit la suite de v.a.  $(\tau_n^{k,l})_{n \in \mathbb{N}^*}$  comme dans (IV.54). Alors

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall k, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n(E_k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{k,l}}{\mu(E_l)} \quad \text{et} \quad \Pi = \{(T_n(E_k), X_n(E_k)) ; k, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ce résultat conduit à introduire en général la notion de suite extraite. Par commodité, on introduit un point cimetière  $\partial \notin E$  et on pose  $E_\partial = E \cup \{\partial\}$  que l'on munit de la tribu  $\mathcal{E}_\partial = \{B, B \cup \{\partial\}; B \in \mathcal{E}\}$ .

**Définition IV.5.11 (Suite  $A$ -extraites)** Soient  $Y_n : \Omega \rightarrow E_\partial$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , des v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\partial)$ -mesurables. On note  $Y_\infty$  la v.a. constante à  $\partial$ . Soit  $A \in \mathcal{E}$ . On définit la *suite  $A$ -extraite de  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$*  par

$$(Y_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*} = (Y_{\tau_n(A)})_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_n(A) = \inf \{m > \tau_{n-1}(A) : Y_m \in A\}$$

(avec les conventions  $\tau_0(A) = 0$  et  $\inf \emptyset = \infty$ ) c'est-à-dire que les  $(\tau_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont les temps de retours successifs en  $A$  de la suite de v.a.  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  $\square$

**Remarque IV.5.12** Si les  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont i.i.d. à valeurs dans  $E$  de loi  $\nu$  et si  $0 < \nu(A) < 1$ , alors :

(i) les variables  $(\tau_n(A) - \tau_{n-1}(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont i.i.d. de loi géométrique c'est-à-dire que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(\tau_n(A) - \tau_{n-1}(A) = m) = (1 - \nu(A))^{m-1} \nu(A);$$

(ii) les  $(Y_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont i.i.d. de loi  $\nu(\cdot \cap A)/\nu(A)$ .  $\square$

On montre alors la proposition suivante.

**Proposition IV.5.13 (Étiquetage temporel, version 1)** Soient  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , tels que  $E_k \subset E_{k+1}$ . Soit  $(Y_n^k)_{k,n \in \mathbb{N}^*}$  des variables à valeurs dans  $E$ . On fait les hypothèses suivantes.

- (a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les variables  $(Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  i.i.d. dont la loi commune est notée  $\nu_k$ .
- (b) Pour tous entiers  $l > k > 1$ ,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $(Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite  $E_k$ -extraite de  $(Y_n^l)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (cf. définition IV.5.11).
- (c)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_1) = 0$ .

Pour tous  $k, l \in \mathbb{N}^*$ , on définit récursivement les variables suivantes  $(\tau_n^{k,l})_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\tau_0^{k,l} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_n^{k,l} = \inf \{m > \tau_{n-1}^{k,l} : Y_m^l \in E_k\} \quad (\text{IV.55})$$

(avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ ). Alors, il existe des variables  $(T_n^k)_{k,n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurables à valeurs dans  $]0, \infty[$ , telles que d'une part

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n^k = \lim_{l \rightarrow \infty} \nu_l(E_1) \tau_n^{k,l} \quad (\text{IV.56})$$

et telles que d'autre part  $\mathbf{\Pi} := \{(T_n^k, Y_n^k); k, n \in \mathbb{N}^*\}$  soit un nuage de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . Ici la mesure  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  satisfait

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \mu(E_k) < \infty, \quad \nu_k = \frac{\mu(\cdot \cap E_k)}{\mu(E_k)}, \quad \mu(E) = \infty \quad \text{et} \quad \mu\left(E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k\right) = 0. \quad (\text{IV.57})$$

**Preuve.** Montrons tout d'abord l'existence d'une mesure  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  satisfaisant (IV.57). Par (a) et (b),  $\nu_l(E_k) > 0$  et  $\nu_l(\cdot \cap E_k)/\nu_l(E_k) = \nu_k$  pour tous entiers  $l > k \geq 1$ . Par commodité on pose  $E_0 = \emptyset$ . On introduit ensuite

$$\mu = \sum_{j \geq 1} \frac{\nu_j(\cdot \cap (E_j \setminus E_{j-1}))}{\nu_j(E_1)},$$

qui est une mesure positive (c'est une série de mesures positives). Si  $j > k$ , Alors  $E_k \cap (E_j \setminus E_{j-1}) = \emptyset$  et si  $j \leq k$ , on a  $E_k \cap (E_j \setminus E_{j-1}) = E_j \setminus E_{j-1}$ . Donc  $\mu(\cdot \cap E_k) = \sum_{1 \leq j \leq k} \nu_j(\cdot \cap (E_j \setminus E_{j-1}))/\nu_j(E_1)$ .

Mais pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ , comme  $\nu_j = \nu_k(\cdot \cap E_j)/\nu_k(E_j)$ , on a d'une part  $\nu_j(E_1) = \nu_k(E_1)/\nu_k(E_j)$  et  $\nu_j(\cdot \cap (E_j \setminus E_{j-1})) = \nu_k(\cdot \cap (E_j \setminus E_{j-1}))/\nu_k(E_j)$ . On a donc

$$\mu(\cdot \cap E_k) = \sum_{j \geq 1} \frac{\nu_k(\cdot \cap (E_j \setminus E_{j-1}))}{\nu_k(E_1)} = \frac{1}{\nu_k(E_1)} \nu_k(\cdot \cap E_k) = \frac{1}{\nu_k(E_1)} \nu_k,$$

car les  $(E_j \setminus E_{j-1})_{1 \leq j \leq k}$  forment une partition de  $E_k$  et puisque  $\nu_k(E \setminus E_k) = 0$ . Cela montre que

$$\mu(E_k) = \frac{1}{\nu_k(E_1)} \in ]0, \infty[. \quad (\text{IV.58})$$

L'hypothèse (c) implique que  $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = 0$ . Par définition on a également  $\mu(E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k) = 0$ , ce qui complète la preuve de (IV.57).

Sur un espace de probabilité  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  complet on se donne un nuage poissonnien  $\boldsymbol{\Pi}' : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  qui est  $(\mathcal{F}', \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E})$ -mesurable d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . En reprenant les notations de (IV.52), on observe que si  $\{(T_n(E_k), X_n(E_k)); n \in \mathbb{N}^*\} := \boldsymbol{\Pi}' \cap (\mathbb{R}_+ \times E_k)$ , alors les v.a.  $(X_n(E_k))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont i.i.d. de loi  $\mu(\cdot \cap E_k)/\mu(E_k) = \nu_k$  et sont stables par extraction, c'est-à-dire que pour tous entiers  $l \geq k \geq 1$ ,  $(X_n(E_k))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite  $E_k$ -extrait de  $(X_n(E_l))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . En particulier cela montre que pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $(Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq l}$  sous  $\mathbf{P}$  a même loi que  $(X_n(E_k))_{n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq l}$  sous  $\mathbf{P}'$ . Par conséquent, le tableau de v.a.

$$(Y_n^k)_{k, n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{(\text{loi})}{=} (X_n(E_k))_{k, n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P}'. \quad (\text{IV.59})$$

Pour tous entier  $l > k > 1$ , on définit récursivement  $(\bar{\tau}_n^{k,l})_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $\bar{\tau}_n^{k,l} = \inf\{m > \bar{\tau}_{n-1}^{k,l} : X_m(E_l) \in E_k\}$  et  $\bar{\tau}_0^{k,l} = 0$ . Alors (IV.59) implique que les v.a.  $(\bar{\tau}_n^{k,l})_{k, l, n \in \mathbb{N}^*, l > k}$  sous  $\mathbb{R}$  a même loi que  $(\bar{\tau}_n^{k,l})_{k, l, n \in \mathbb{N}^*, l > k}$  sous  $\mathbf{P}'$ . Par conséquent

$$\left( \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{k,l}}{\mu(E_l)}, \liminf_{l \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{k,l}}{\mu(E_l)} \right)_{k, n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{(\text{loi})}{=} \left( \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{\tau}_n^{k,l}}{\mu(E_l)}, \liminf_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{\tau}_n^{k,l}}{\mu(E_l)} \right)_{k, n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P}'. \quad (\text{IV.60})$$

Par (IV.58) et par le lemme IV.5.10,  $\mathbf{P}'$ -p.s.  $\limsup_{l \rightarrow \infty} \bar{\tau}_n^{k,l}/\mu(E_l) = \liminf_{l \rightarrow \infty} \bar{\tau}_n^{k,l}/\mu(E_l) = T_n(E_k)$ . Combiné avec (IV.60), cela entraîne d'une part (IV.56) et d'autre part

$$(T_n^k, Y_n^k)_{k, n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{(\text{loi})}{=} (T_n(E_k), X_n(E_k))_{k, n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P}',$$

ce qui permet de conclure. ■

**Énoncé pour des nuages et des suites stoppées.** Dans suite on aura besoin d'une version des résultats précédents pour des nuages Poissonniens sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  "stoppés" lorsque leurs marques spatiales atteignent un sous-ensemble  $A \in \mathcal{E}$ . Explicitement, on pose

$$\text{Stop}_A(\boldsymbol{\Pi}) = \boldsymbol{\Pi} \cap ([0, T_1(A)] \times E) \quad (\text{IV.61})$$

qui est le nuage  $\boldsymbol{\Pi}$  stoppé en  $A$ . La proposition IV.5.4 (ii) (p. 158) décrit la loi de  $\text{Stop}_A(\boldsymbol{\Pi})$  comme suit :

$$\mathbf{E}[F(\text{Stop}_A(\boldsymbol{\Pi}))] = \int_0^\infty dt e^{-\mu(A)t} \int_A \mu(dx) \mathbf{E}\left[F\left(\{t, x\} \cup (\boldsymbol{\Pi} \cap ([0, t] \times (E \setminus A)))\right)\right].$$

pour toute fonction  $F : \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ -mesurable bornée. On introduit les notions suivantes.

**Définition IV.5.14 (Nuages de Poisson stoppés, suites i.i.d. stoppées)** On fixe  $A \in \mathcal{E}$ .

- (a) Un nuage aléatoire  $\Pi_A : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  est un *nuage de Poisson stoppé en A d'intensité  $\mu$*  s'il a même loi que  $\text{Stop}_A(\Pi)$  où  $\Pi$  est un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \mu$ , avec  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  une mesure sigma finie telle que  $0 < \mu(A) < \infty$ .
- (b) Soient  $Y_n : \Omega \rightarrow E_\partial$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , des v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\partial)$ -mesurables. On note  $Y_\infty$  la v.a. constante à  $\partial$ . On rappelle de la définition (IV.5.11) la notation  $\tau_1(A) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : Y_n \in A\}$  avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . On définit la *suite stoppée en A* associée par la suite de v.a.  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  donnée par

$$Z_n = \begin{cases} Y_n & \text{si } n \leq \tau_1(A) \\ \partial & \text{si } n > \tau_1(A) \end{cases}$$

- (c) Soit  $\nu : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ , une mesure de probabilité. Une suite de v.a. est dite *i.i.d. stoppée en A de loi  $\nu$*  si elle est la suite stoppée en  $A$  d'une suite de variables i.i.d. de loi  $\nu$ .  $\square$

**Remarque IV.5.15** Dans la définition précédente si la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne visite jamais  $A$ , alors la suite  $A$ -extraite de  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est constante à  $\partial$  et que la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  stoppée en  $A$  est  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  elle-même.  $\square$

On vérifie facilement le résultat suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

**Lemme IV.5.16** Soit  $\nu : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ , une mesure de probabilité. Soit  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $0 < \nu(A) < 1$ . Soient  $Z_n : \Omega \rightarrow E_\partial$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , des v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}_\partial)$ -mesurables. On note  $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : Z_n \in A\}$ . Alors, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.

- (a)  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est i.i.d. stoppée en  $A$  de loi  $\nu$ .
- (b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(\tau = k) = \nu(A)(1 - \nu(A))^{k-1}$  et sous  $\mathbf{P}(\cdot | \tau = k)$ , les  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , sont indépendantes,  $Z_n = \partial$ , pour tout  $n > k$ ,  $Z_k$  a pour loi  $\nu(\cdot \cap A)/\nu(A)$  et  $Z_1, \dots, Z_{k-1}$  ont pour loi  $\nu(\cdot \cap (E \setminus A))/\nu(E \setminus A)$ .

De plus, si l'une des deux conditions précédentes est remplie, la loi de  $Z_1$  est  $\nu$ .

**Preuve.** Exercice.  $\blacksquare$

On montre alors la version stoppée de la proposition IV.5.13 d'étiquetage temporel.

**Proposition IV.5.17 (Étiquetage temporel, version 2)** Soit  $A \in \mathcal{E}$  et soient  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A \subset E_k \subset E_{k+1}.$$

Soit  $(Y_n^k)_{k,n \in \mathbb{N}^*}$  des variables à valeurs dans  $E$ . On fait les hypothèses suivantes.

- (a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les  $(Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont des variables i.i.d. stoppées en  $A$  de loi notée  $\nu_k$ .
- (b) Pour tous entiers  $l > k \geq 1$ ,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $(Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite  $E_k$ -extraite de  $(Y_n^l)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (cf. définition IV.5.11).
- (c)  $\nu_1(A) > 0$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_1) = 0$ .

Pour tous  $k, l \in \mathbb{N}^*$ , on définit récursivement les variables suivantes  $(\tau_n^{k,l})_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\tau_0^{k,l} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_n^{k,l} = \inf \{m > \tau_{n-1}^{k,l} : Y_m^l \in E_k\} \quad (\text{IV.62})$$

avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . Alors, il existe des variables  $(T_n^k)_{k,n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurables à valeurs dans  $[0, \infty]$  (elles peuvent être infinies) telles que d'une part

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n^k = \lim_{l \rightarrow \infty} \nu_l(E_1) \tau_n^{k,l} \quad (\text{IV.63})$$

(les limites étant dans  $[0, \infty]$ ) et telles que d'autre part  $\Pi_A := \{(T_n^k, Y_n^k); k, n \in \mathbb{N}^* : T_n^k < \infty\}$  soit un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \mu$  stoppé en  $A$  où  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  (cf. définition IV.5.14), une mesure qui satisfait :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \mu(A) \leq \mu(E_k) < \infty, \quad \nu_k = \frac{\mu(\cdot \cap E_k)}{\mu(E_k)}, \quad \mu(E) = \infty \quad \text{et} \quad \mu\left(E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k\right) = 0. \quad (\text{IV.64})$$

**Preuve.** Comme remarqué au lemme IV.5.16,  $\nu_k$  est la loi de  $Y_1^k$  par (a). Soient  $k, l \in \mathbb{N}^*$  tels que  $l > k$ . Puisque  $A \subset E_k \subset E_l$ , si  $(\bar{Y}_n^l)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite i.i.d. de loi  $\nu_l$ , prendre la suite  $E_k$ -extraite de  $(\bar{Y}_n^l)_{n \in \mathbb{N}^*}$  puis la stopper en  $A$  revient à stopper en  $A$  la suite  $(\bar{Y}_n^l)_{n \in \mathbb{N}^*}$  puis prendre la suite  $E_k$ -extraite de cette suite stoppée. Cela implique par (b) que  $\nu_k$  peut se voir comme la loi de la suite  $E_k$ -extraite d'une suite i.i.d. de loi  $\nu_l$  et donc que  $\nu_l(\cdot \cap E_k)/\nu_l(E_k) = \nu_k$ . En raisonnant comme dans la preuve de la proposition IV.5.13 de l'étiquetage temporel, version 1, il existe une mesure  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  telle que (IV.57). Comme  $\mu(E_1) = 1$ , on a  $\mu(A) = \mu(A)/\mu(E_1) = \nu_1(A) > 0$ , ce qui implique (IV.64).

Comme dans la preuve de la proposition IV.5.13, on se donne sur un espace de probabilité  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  complet, un nuage poissonnien  $\Pi' : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$  d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . On rappelle de (IV.52), la notation

$$\{(T_n(E_k), X_n(E_k)); n \in \mathbb{N}^*\} := \Pi' \cap (\mathbb{R}_+ \times E_k).$$

On pose alors  $\bar{N}_k$  l'entier tel que  $T_{\bar{N}_k}(E_k) = T_1(A)$ . On introduit également  $N_k = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \tau_n^{k,l} < \infty\} = \{n \in \mathbb{N}^* : Y_n^k \in A\}$ . On observe facilement que

$$((Y_n^k)_{1 \leq n \leq N_k})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{(\text{loi})}{=} ((X_n(E_k))_{1 \leq n \leq \bar{N}_k})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sous } \mathbf{P}'.$$

On conclut en raisonnant comme dans la preuve de la proposition IV.5.17 de la version 1 de l'étiquetage poissonnien. ■

## EXERCICES.

**Exercice.3** On munit  $\mathbb{R}^d$  de sa base canonique et de la norme Euclidienne associée, notée  $\|\cdot\|$ . On note  $\ell_d$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ . On note  $v_d$  le volume de la boule unité. Si  $B(x, r)$  dénote la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ , on a donc  $\ell_d(B(x, r)) = v_d r^d$ . On rappelle la formule de changement de variable radial : si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , est mesurable alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|) \ell_d(dx) = dv_d \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{d-1} \ell_1(dr).$$

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité sur lequel est défini un nuage Poissonnien  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}^d}$  d'intensité  $\ell_d$ . On pose

$$\Pi_0 = \{\|X\| ; X \in \Pi\}.$$

1. Montrer que  $\Pi_0$  est presque sûrement égal à un nuage Poissonnien sur  $\mathbb{R}_+$  dont on précisera l'intensité.
2. On note  $\phi(r) = br^\beta$ . Pour quelles valeurs de  $b$  et de  $\beta$ ,  $\phi(\Pi_0)$  est un nuage Poissonnien sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $\ell_1$  ?
3. Montrer qu'il existe une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables  $\mathcal{F}$ -mesurables telles que  $0 < \|X_n\| < \|X_{n+1}\|$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et telles que  $\Pi = \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$  presque sûrement. Trouver la fonction de répartition de  $\|X_n\|$ .
4. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives  $c_d$  et  $C_d$  (que l'on calculera) telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-c_d} \|X_n\| = C_d.$$

5. Trouver la densité de  $\|X_n\|$ .

6. On note  $\mu$  la loi uniforme sur la sphère unité  $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ . On rappelle que si  $Z : \Omega \rightarrow B(0, 1)$  a pour loi  $(v_d)^{-1}\ell_d(\cdot \cap B(0, 1))$ , alors  $(\|Z\|)^{-1}Z$  a pour loi  $\mu$ . Montrer qu'il existe une suite  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ , de variable i.i.d. de loi exponentielles de paramètre 1, et une suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$ , de variable i.i.d. de loi  $\mu$ , telles que  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$  et  $(Z_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes et

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \Pi = \{a_d(\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n)^{\gamma_d} \cdot Z_n ; n \in \mathbb{N}^*\},$$

où on précisera les constantes  $a_d$  et  $\gamma_d$ . □

**Exercice 4** On note  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels positifs,  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$ , l'ensemble des réels strictement positifs. Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit la loi  $\mu_\beta$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  muni des Boréliens, par  $\mu_\beta(dt) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)t^{-\beta}\ell(dt)$ , où  $\ell$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . On rappelle la définition de la fonction  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par l'intégrale

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} \ell(dt).$$

Pour tout nuage déterministe  $\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+^*}$ , tout  $c \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $a \in \mathbb{R}^*$ , on pose

$$c \cdot \pi = \{cx ; x \in \pi\} \quad \text{et} \quad (\pi)^a = \{x^a ; x \in \pi\}.$$

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ , on se donne  $\Pi_\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+^*}$ , un nuage Poissonnier d'intensité  $\mu_\beta$ . On pose

$$S_\beta = \sum_{X \in \Pi_\beta} X,$$

qui est une variable  $\mathcal{F}$ -mesurable à valeurs dans  $[0, \infty]$ .

1. Soient  $c \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $a \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que  $\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+^*} \mapsto c \cdot \pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+^*}$  et  $\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+^*} \mapsto (\pi)^a \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+^*}$  sont  $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*})$ -mesurables.
2. Soient  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a \in \mathbb{R}^*$ , qui dépendent de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  tels que

$$\Pi_{\beta_1} \stackrel{\text{(loi)}}{=} c \cdot (\Pi_{\beta_2})^a.$$

3. Pour quels  $\beta \in \mathbb{R}^*$  a-t-on  $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) = 1$ ? Que vaut  $\mathbf{P}(S_\beta < \infty)$  si  $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) < 1$ ?
4. On suppose que  $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) = 1$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , calculer  $\mathbf{E}[\exp(-\lambda S_\beta)]$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\beta$  et  $\Gamma(2 - \beta)$ .
5. On fixe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $a \in \mathbb{R}^*$ , on pose  $S_{a,\beta} = \sum_{X \in \Pi_\beta} X^a$ . Pour quels  $a$  a-t-on  $\mathbf{P}(S_{a,\beta} < \infty) = 1$ ?
6. On fixe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ . Trouver  $(c, a) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$  tel que  $c \cdot (\Pi_\beta)^a$  soit un nuage Poissonnier d'intensité  $\ell$ .
7. On fixe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer qu'il existe une suite de variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  telles que  $\mathbf{P}$ -presque sûrement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n > X_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_\beta = \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

8. On fixe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  et on reprend les notations de la question précédente. Trouver la fonction de répartition de  $X_n$ , sa densité et montrer qu'il existe deux constantes strictement positives  $c$  et  $C$ , que l'on précisera, telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} n^c X_n = C.$$

**Exercice 5** Soient  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\Pi$  un nuage Poissonnier sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, \theta_1 + \theta_2]$  d'intensité  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(dt)\ell(dt) \otimes \mathbf{1}_{[0, \theta_1 + \theta_2]}(x)\ell(dx)$ .

1. En utilisant le cours, montrer qu'il existe deux suites indépendantes de variable i.i.d.  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$  et  $(X_n)_{n \geq 1}$  telles que
  - les  $\mathcal{E}_n$  suivent une loi exponentielle de paramètre  $\theta_1 + \theta_2$ ,
  - les  $X_n$  sont uniformes dans  $[0, \theta_1 + \theta_2]$ ,
  - si on pose  $T_n := \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$ , alors  $\Pi = \{(T_n, X_n) ; n \geq 1\}$  presque sûrement.
2. On pose  $\Pi_1 = \{(T_n, X_n) : n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } X_n \in [0, \theta_1]\}$  et  $\Pi_2 = \{(T_n, X_n) : n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } X_n \in ]\theta_1, \theta_1 + \theta_2]\}$ . Montrer que ce sont deux nuages de Poisson indépendants dont on précisera les intensités.
3. On pose  $S = \inf\{n \geq 1 : X_n \in [\theta_1, \theta_1 + \theta_2]\}$ . Quelle est la loi de  $S$ ? Quelle est la loi de  $T_S$ ? Conditionnellement à  $T_S$ , quelle est la loi de  $\#\Pi \cap [0, T_S[$ ? (Indication : aucun calcul n'est nécessaire pour résoudre cette question.)

4. Soit  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ , une variable géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(G = n) = p(1 - p)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(\mathcal{E}')_{n \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables indépendantes de  $G$  et de loi exponentielles de paramètre  $\theta$ . On pose

$$\mathcal{E} = \sum_{1 \leq n \leq G} \mathcal{E}'_n.$$

Quelle est la loi de  $\mathcal{E}$ ? Conditionnellement à  $\mathcal{E}$ , quelle est la loi de  $G - 1$ ? (Indication : aucun calcul n'est nécessaire pour résoudre cette question.)

**Exercice 6** Soit  $\Pi$  un nuage Poissonnier sur  $\mathbb{R}$  d'intensité la mesure de Lebesgue. On imagine un glouton partant de l'origine 0 qui mange les points de  $\Pi$  de proche en proche : il mange d'abord le point de  $\Pi$  le plus proche de 0, puis le plus proche parmi les points qui restent ... et ainsi de suite. On se demande s'il mange ainsi tous les points de  $\Pi$ .

Formellement, on note  $Y_n$ ,  $n \geq 0$  la suite des points mangés par le glouton : on a  $Y_0 = 0$ ,  $Y_1$  est le point de  $\Pi$  le plus proche de 0 et si  $n \geq 1$ ,  $Y_{n+1}$  est le point de  $\Pi \setminus \{Y_1, \dots, Y_n\}$  le plus proche de  $Y_n$ .

Au temps  $n$ , le glouton se trouve au bord du "trou" qu'il a déjà exploré : c'est un intervalle  $I_n$  contenant 0 et dont les extrémités sont deux points de  $\Pi$ . Si le glouton est dans  $\mathbb{R}_+$ , alors le trou est sur sa gauche et à sa droite, il reste une partie inexplorée de  $\Pi$ . De même si le glouton est dans  $\mathbb{R}_-$ , il est à gauche de 0 et à sa gauche, il reste une partie inexplorée de  $\Pi$ . On dit qu'il effectue une traversée, si à l'instant  $n$  il est à gauche du trou (resp. à droite) et qu'à l'instant  $n + 1$  il se retrouve à droite (resp. à gauche) du trou.

1. Montrer qu'il existe une suite d'exponentielles  $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 0}$  indépendantes de paramètre 1 telles que  $\ell(I_n) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$ .
2. Montrer que le glouton effectue une traversée entre  $n$  et  $n + 1$ ssi  $\mathcal{E}_{n+1} > \ell(I_n)$ .
3. Montrer que  $\mathbf{P}$ -p.s. le glouton ne visite pas tous les points de  $\Pi$  et qu'il en laisse même une infinité de côté.

**Exercice 7** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité complet.

1. Soit  $p$  un entier plus grand que 2. Soient  $X_1, \dots, X_p : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  des v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson non-dégénérées. On note  $\mathbf{E}[X_k] = \theta_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant le lemme IV.1.3, calculer de deux façons  $\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_p = n)$  et montrer la formule du multinôme :

$$(\theta_1 + \dots + \theta_p)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_p = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!} \theta_1^{k_1} \dots \theta_p^{k_p}.$$

Soient  $q_1, \dots, q_p \in [0, 1]$  tels que  $q_1 + \dots + q_p = 1$ . On dit qu'un vecteur aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_p) : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^p$  suit une loi multinômiale de paramètres  $n$  et  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p)$  si pour tous  $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{P}(\mathbf{N} = (k_1, \dots, k_p)) = \begin{cases} \frac{n!}{k_1! \dots k_p!} q_1^{k_1} \dots q_p^{k_p} & \text{si } k_1 + \dots + k_p = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.

2. Soient  $Z_n : \Omega \rightarrow \{1, \dots, p\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , une suite de variables  $\mathcal{F}$ -mesurables i.i.d. Pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , on pose  $N_k = \#\{j \in \{1, \dots, n\} : Z_j = k\}$ . Montrer que  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_p)$  est un vecteur aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable qui suit une loi multinômiale dont on précisera les paramètres.
3. Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré. On suppose  $(E, \mathcal{E})$  séparable et séparé. Soit  $B \in \mathcal{E}$  tel que  $0 < \mu(B) < \infty$ . Soient  $X_n : \Omega \rightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mu(\cdot \cap B)/\mu(B)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\Pi_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . On suppose  $\mu$  diffuse.
  - (a) Soient  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$  deux-à-deux disjoints. Quelle est la loi de  $\mathbf{N} = (N_{A_1}(\Pi_n), \dots, N_{A_p}(\Pi_n))$ ? Est-ce que ce résultat est toujours vrai si  $\mu$  n'est pas diffuse?
  - (b) Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de Poisson  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\Pi \cap B$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | N_B(\Pi) = n)$  a même loi que  $\Pi_n$ .

**Exercice 8** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré. On suppose  $(E, \mathcal{E})$  séparable et séparé et on suppose qu'il existe une partition de  $E$  en ensembles mesurables  $B_p \in \mathcal{E}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tels que  $\mu(B_p) < \infty$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de Poisson  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ .

On cherche à donner un sens à une indexation mesurable de  $\Pi$ , c'est-à-dire à l'existence d'une suite de v.a.  $X_n : \Omega \rightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurables telles que  $\Pi = \{X_n ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$  (avec la convention que  $\Pi = \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$  si  $N_E(\Pi) = \infty$ ). On rappelle que pour tous  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , il existe des fonctions  $Y_n^{(p)} : \mathbb{S}_E \rightarrow E$  qui sont  $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$ -mesurables et telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall p \in \mathbb{N}, \quad \Pi \cap B_p = \{Y_n^{(p)}(\Pi) ; 1 \leq n \leq N_{B_p}(\Pi)\}.$$

Soit  $x^* \in E$ . On pose  $S_0 = 0$  et  $S_{p+1} = N_{B_0}(\Pi) + \dots + N_{B_p}(\Pi)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in ]S_p, S_{p+1}] \cap \mathbb{N}^*$ , on pose  $X_n = Y_{n-S_p}^{(p)}(\Pi)$  et si  $N_E(\Pi) < \infty$ , on pose  $X_n = x^*$  pour tout  $n > N_E(\Pi)$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n : \Omega \rightarrow E$  est  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -mesurable. Montrer que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\Pi = \{X_n ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$ . Les  $X_n$  sont-elles nécessairement indépendantes ? Ont-elles la même loi ?

**Exercice 9** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré. On suppose  $(E, \mathcal{E})$  séparable et séparé et  $\mu$  sigma-finie et diffuse. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de Poisson  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ . On se donne une indexation mesurable de  $\Pi$ , c'est-à-dire que  $\Pi = \{X_n ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$  où  $X_n : \Omega \rightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , est une suite de v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -mesurables (avec les conventions évidentes si  $N_E(\Pi) = \infty$  ou 0).

1. Soit  $(E', \mathcal{E}', \nu)$  un espace de probabilité. On suppose  $(E', \mathcal{E}')$  séparable et séparé. Soient  $Y_n : \Omega \rightarrow E'$ ,  $n \in \mathbb{N}$  une suite i.i.d. de v.a.  $(\mathcal{F}, \mathcal{E}')$ -mesurables de loi  $\nu$ . On pose

$$\Pi' = \{(X_n, Y_n) ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$$

(avec les conventions évidentes si  $N_E(\Pi) = \infty$  ou 0). On munit  $E \times E'$  de la tribu produit. Montrer que  $\Pi' : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{E \times E'}$  est un nuage Poissonnier  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{E \times E'})$ -mesurable dont on précisera l'intensité.

2. (*Un théorème de Dobrushin*). On suppose ici que  $(E, \mathcal{E}) = (E', \mathcal{E}') = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  en conservant les mêmes hypothèses que précédemment. On pose

$$\Pi_* = \{X_n + Y_n ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$$

(avec les conventions évidentes si  $N_E(\Pi) = \infty$  ou 0). Montrer que  $\Pi_* : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}^d}$  est un nuage Poissonnier  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}^d})$ -mesurable dont on précisera l'intensité en fonction de  $\mu$  et  $\nu$ .

3. On suppose ici que  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  en conservant les mêmes hypothèses que précédemment. On suppose que  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un vecteur aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable indépendant de  $\Pi$  et on pose

$$\Pi_0 = \{X_n + Y ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$$

(avec les conventions évidentes si  $N_E(\Pi) = \infty$  ou 0). Montrer que  $\Pi_* : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}^d}$  est un nuage  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}^d})$ -mesurable. Est-il de Poisson ? (*La réponse dépend de  $\mu$* )

4. On suppose que  $(E', \mathcal{E}')$  est régulier selon la définition I.1.11 (voir page 6). Soit  $m : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}' \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une mesure *finie* dont la première marginale est  $\mu$ , c'est-à-dire  $\mu(A) = m(A \times E')$  pour tout  $A \in \mathcal{E}$ . On rappelle le théorème I.1.20 de *représentation des couplages* (voir page 8) qui affirme qu'il existe  $\Psi : E \times ]0, 1[ \rightarrow E'$ , qui est  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(]0, 1[), \mathcal{E}')$ -mesurable et telle que

$$\int_{E \times E'} g dm = \int_{E \times ]0, 1[} g(x, \Psi(x, z)) \mu(dx) \ell(dz)$$

où  $\ell$  désigne la mesure de Lebesgue sur la droite réelle. On se donne une suite  $U_n : \Omega \rightarrow ]0, 1[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , de v.a. indépendantes uniformes sur  $]0, 1[$ . On pose

$$\Pi_\bullet = \{(X_n, \Psi(X_n, U_n)) ; 1 \leq n \leq N_E(\Pi)\}$$

(avec les conventions évidentes si  $N_E(\Pi) = \infty$  ou 0). Montrer que  $\Pi_\bullet : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{E \times E'}$  est un nuage Poissonnier  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{E \times E'})$ -mesurable dont on précisera l'intensité.

**Exercice 10** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu$  diffuse. Soit  $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable telle que  $\int_E \min(1, g(x)) \mu(dx) < \infty$ . Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de Poisson  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ .

1. Montrer que  $\int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu(dx) < \infty$ . Si on suppose que  $g$  est de plus à valeurs dans  $]0, \infty[$ , montrer que cela implique que  $\mu$  est sigma finie.
2. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$Z_g(\omega) = \begin{cases} e^{-N_g(\Pi(\omega))} e^{\int_E (1 - \exp(-g(x))) \mu(dx)} & \text{si } N_g(\Pi(\omega)) < \infty, \\ 1 & \text{si } N_g(\Pi(\omega)) = \infty. \end{cases}$$

Montrer que  $Z_g : \Omega \rightarrow ]0, \infty[$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable. On note  $\mathbf{P}_g : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ , la mesure ayant  $Z_g$  pour densité par rapport à  $\mathbf{P}$ , c'est-à-dire que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{P}_g(A) = \mathbf{E}[Z_g \mathbf{1}_A].$$

Montrer que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_g)$  est un espace de probabilité complet. On notera  $\mathbf{E}_g$  l'espérance par rapport à  $\mathbf{P}_g$  et on rappelle que  $\mathbf{E}_g[X] = \mathbf{E}[Z_g X]$  pour toute variable  $\mathcal{F}$ -mesurable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bornée.

3. Montrer que  $\Pi$  sous  $\mathbf{P}_g$  est un nuage de Poisson dont on précisera l'intensité en fonction de  $\mu$  et  $g$ .
4. On suppose que  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable. On note  $g_+ = \max(g, 0)$  la partie positive de  $g$  et  $g_- = \max(-g, 0)$  la partie négative de  $g$ . On suppose que  $\int_E \min(1, g_-(x)) \mu(dx) < \infty$  et  $\int_E (e^{g_+(x)} - 1) \mu(dx) < \infty$ .
  - (a) Montrer que l'on peut définir une probabilité  $\mathbf{P}_g : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{P}_g(A) = \mathbf{E}[e^{N_g(\Pi)} \mathbf{1}_A] e^{-\int_E (e^{g(x)} - 1) \mu(dx)}.$$

- (b) Montrer que sous  $\mathbf{P}_g$ ,  $\Pi$  est un nuage de Poisson dont on précisera l'intensité.

**Exercice 11** (*Caractérisation des nuages Poissonniens par la formule de Palm (ou de Mecke)*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu$  diffuse et sigma-finie. On suppose  $(E, \mathcal{E})$  séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ . Soit  $F : E \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable. On pose  $\Phi_F(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} F(X, \Pi \setminus \{X\})$ .

1. Montrer à l'aide du lemme IV.2.18 (iv) (page 138) que  $\Phi_F : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable.
2. On suppose que  $\Pi$  satisfait la formule de Palm (ou de Mecke), c'est-à-dire que pour toute fonction  $F : E \times \mathbb{S}_E \rightarrow [0, \infty]$  qui est  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$ -mesurable, on a

$$\mathbf{E}[\Phi_F(\Pi)] = \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[F(x, \Pi)]. \quad (\text{IV.65})$$

- (a) Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable telle que telle que  $\int_E f(x) \mu(dx) < \infty$ . Montrer que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $N_f(\Pi) < \infty$  et montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , on a  $L_f(\lambda) = \mathbf{E}[\exp(-\lambda N_f(\Pi))] > 0$ . Montrer que  $L_f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $L'_f(\lambda) = -\mathbf{E}[N_f(\Pi) \exp(-\lambda N_f(\Pi))]$ .
- (b) À l'aide de la formule de Palm (ou de Mecke) (IV.65), montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad L'_f(\lambda) = -L_f(\lambda) \int_E f(x) e^{-\lambda f(x)} \mu(dx).$$

- (c) Montrer que  $\Pi$  est un nuage Poissonien (*on résoudra l'équation différentielle précédente puis on étendra le résultat obtenu à toutes les fonctions  $f : E \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{E}$ -mesurables*).

**Exercice 12** (*Caractérisation des nuages Poissonniens par événement indépendants.*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable supposé séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable d'intensité  $\mu$ . On suppose que  $\Pi$  satisfait la propriété suivante.

- (\*) Pour tous  $A, B \in \mathcal{E}$  disjoints, les événements  $\{\Pi \cap A = \emptyset\}$  et  $\{\Pi \cap B = \emptyset\}$  sont indépendants.

Le but de cet exercice est de montrer que si  $\Pi$  satisfait (\*) et si  $\mu$  est sigma finie et diffuse, alors  $\Pi$  est un nuage de Poisson.

1. On suppose que  $\Pi$  satisfait (\*) (mais pas nécessairement que  $\mu$  soit sigma finie et diffuse). Soient  $B_n \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , des ensembles deux-à-deux disjoints. Montrer que les événements  $\{\Pi \cap B_n = \emptyset\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont indépendants (mutuellement et pas seulement deux-à-deux).
2. On suppose que  $\Pi$  satisfait (\*) (mais pas nécessairement que  $\mu$  soit sigma finie et diffuse). Comme  $(E, \mathcal{E})$  est séparable et séparé, il existe un sous-ensemble  $C \subset [0, 1[$  et une bijection  $\phi : E \rightarrow [0, 1[$  qui est  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}([0, 1[))$ -mesurable et telle que la réciproque  $\phi^{-1} : [0, 1[ \rightarrow E$  est également  $(\mathcal{B}([0, 1[), \mathcal{E})$ -mesurable. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $0 \leq k < 2^n$ , on pose

$$J_{n,k} = \phi^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]).$$

On voit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les  $(J_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$  forment une partition  $\mathcal{E}$ -mesurable de  $E$ . Soit  $A \in \mathcal{E}$  tel que  $\mu(A) < \infty$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_n = \sum_{0 \leq k < 2^n} \mathbf{1}_{\{\Pi \cap (A \cap J_{n,k}) \neq \emptyset\}}.$$

Montrer que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad Z_n \leq Z_{n+1} \quad \text{et} \quad N_A(\Pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n.$$

(Indication : on considérera les deux cas :  $N_A(\Pi) < \infty$  et  $N_A(\Pi) = \infty$ ).

3. Soient  $X_q^{(n)}$  et  $X_q : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $q, n \in \mathbb{N}$ , des v.a.  $\mathcal{F}$ -mesurables. On suppose que

- pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_q^{(n)} = X_q$ ,

– pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé, sous  $\mathbf{P}$ , les v.a.  $(X_q^{(n)})_{q \in \mathbb{N}}$  sont mutuellement indépendantes sous  $\mathbf{P}$ .

Montrer que les v.a.  $(X_q)_{q \in \mathbb{N}}$  sont mutuellement indépendantes sous  $\mathbf{P}$ .

4. On suppose que  $\Pi$  satisfait  $(*)$  (mais pas nécessairement que  $\mu$  soit sigma finie et diffuse). Soient  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$  des ensembles deux-à-deux disjoints. Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé les variables aléatoires  $\mathbf{1}_{\{\Pi \cap (A_q \cap J_{n,k}) \neq \emptyset\}}$ ,  $1 \leq q \leq p$ ,  $0 \leq k < 2^n$ , sont mutuellement indépendantes. En déduire que les v.a.  $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$  sont indépendantes.
5. On suppose que  $\Pi$  satisfait  $(*)$  et que  $\mu$  est sigma finie et diffuse. Conclure en utilisant le théorème IV.3.3 (page 141).
6. On choisit ici  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et on définit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}}$  en supposant que  $\{\Pi = \emptyset\} \cup \{\Pi = \{12\}\} = \Omega$ ,  $\{\Pi = \emptyset\} \in \mathcal{F}$  et  $\mathbf{P}(\Pi = \emptyset) = 2/3$ . Montrer que  $\Pi$  est un nuage de points  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ -mesurable dont l'intensité (que l'on calculera explicitement) est sigma finie et qui satisfait  $(*)$ . Montrer en revanche que  $\Pi$  n'est pas un nuage de Poisson.

**Exercice.13** (*Théorème de Rényi*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace séparable et séparé. Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_E$ , un nuage de points  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$ -mesurable. On suppose que

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{P}(\Pi \cap A = \emptyset) = e^{-\mu(A)},$$

où  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure sigma finie et diffuse (avec la convention que  $e^{-\infty} = 0$ ). Le but de cet exercice est de montrer que  $\Pi$  est alors un nuage de Poisson (c'est le *théorème de Rényi*). Pour cela on s'appuie sur l'exercice .12 qui précède.

1. Montrer que  $\Pi$  satisfait la propriété  $(*)$  de l'exercice .12 qui précède. On note alors  $\nu$  l'intensité de  $\Pi$ . Par l'exercice .12 qui précède, il suffit donc de montrer que  $\nu$  est diffuse et sigma finie.
2. Soit  $A \in \mathcal{E}$ . On reprend les notations de la question 2 de l'exercice .12. On pose  $Z_n = \sum_{0 \leq k < 2^n} \mathbf{1}_{\{\Pi \cap (A \cap J_{n,k}) \neq \emptyset\}}$ . Montrer que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $Z_n \leq Z_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $N_A(\Pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ .
3. On suppose que  $\mu(A) < \infty$ . On pose  $\delta_n = \max_{0 \leq k < 2^n} \mu(A \cap J_{n,k})$ . En s'inspirant de la preuve du théorème IV.3.3, montrer que  $\mu$  diffuse implique  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ .
4. On suppose que  $\mu(A) < \infty$ . Montrer que  $0 \leq x - 1 + e^{-x} \leq \frac{1}{2}x^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $0 \leq \mu(A) - \mathbf{E}[Z_n] \leq \frac{1}{2}\mu(A)\delta_n$ .
5. Montrer que si  $\mu(A) < \infty$ , alors  $\nu(A) = \mu(A)$ .
6. Conclure.

## IV.6 Processus ponctuels de Poisson.

### IV.6.a Définitions et formule de compensation.

Dans cette section, sauf mention explicite du contraire, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  qui est supposé complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable. Il est toujours supposé séparable et séparé. Soit  $\partial \notin E$ . On pose alors

$$E_{\partial} := E \cup \{\partial\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\partial} = \sigma(\{\partial\}, \mathcal{E}).$$

On introduit la notion de processus ponctuel, définition due à Itô.

**Définition IV.6.1** (*Processus ponctuel*) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , soit  $V_t : \Omega \rightarrow E_{\partial}$ , une fonction. Alors,  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un *processus ponctuel sur E* s'il satisfait les deux conditions suivantes.

- (a)  $\mathbf{P}$ -p.s. l'ensemble de temps  $\{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$  est dénombrable.
- (b) Pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ , la variable de comptage en  $A$  donnée par  $N_A(V) := \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_A(t, V_t)$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable. Ici la somme est au sens des familles sommables (et elle ne porte que l'ensemble des temps  $t \in \mathbb{R}_+$  tels que  $V_t \neq \partial$ ).

Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Le processus ponctuel  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté si de plus

(c) pour tout  $B \in \mathcal{E}$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $N_{[0,t] \times B}(V)$  est  $\mathcal{G}_t$ -mesurable.  $\square$

**Remarque IV.6.2** Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on se donne une fonction  $V_t : \Omega \rightarrow E_\partial$ . Les points (a) et (b) de la définition précédente montrent que  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus ponctuel sur  $E$  si et seulement si  $\Pi := \{(t, V_t) ; V_t \neq \partial\}$  est un nuage de points sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  qui est  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E})$ -mesurable.

Réiproquement, si on part d'un nuage sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  et que l'on veut obtenir un processus ponctuel, il est nécessaire de supposer qu'à chaque temps  $t$  ne correspond qu'une seule valeur d'espace. Plus précisément on introduit l'ensemble de ces nuages de points :

$$\text{Process} := \{\pi \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E} : \forall t \in \mathbb{R}_+, N_{\{t\} \times E}(\pi) \leq 1\}.$$

En général  $\text{Process} \notin \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ . Soit  $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ , un nuage aléatoire  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E})$ -mesurable. On fait l'hypothèse suivante

$$\text{L'événement } \{\Pi \notin \text{Process}\} \text{ est } \mathbf{P}\text{-négligeable.} \quad (\text{IV.66})$$

Comme  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  est supposé complet, on a donc  $\{\Pi \in \text{Process}\} \in \mathcal{F}$  et  $\mathbf{P}(\Pi \in \text{Process}) = 1$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $\omega \in \Omega$ , on définit alors  $V_t(\omega) \in E_\partial$  comme suit

- si  $\omega \notin \{\Pi \in \text{Process}\}$ , on pose  $V_t(\omega) := \partial$ ;
- si  $\omega \in \{\Pi \in \text{Process}\}$  et  $N_{\{t\} \times E}(\Pi(\omega)) = 0$ , on pose  $V_t(\omega) := \partial$ ;
- si  $\omega \in \{\Pi \in \text{Process}\}$  et  $N_{\{t\} \times E}(\Pi(\omega)) \neq 0$ , alors par définition de Process, il existe un unique  $x \in E$  tel que  $(t, x) \in \Pi(\omega)$  et on pose  $V_t(\omega) = x$ .

Par construction, sur l'événement  $\{\Pi \in \text{Process}\}$ ,  $\Pi = \{(t, V_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$  et donc pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$ , on a  $N_A(V) = N_A(\Pi)$ . Comme on suppose  $\mathbf{P}(\Pi \in \text{Process}) = 1$ ,  $N_A(V)$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, ce qui montre que  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus ponctuel, selon la définition IV.6.3.  $\square$

On introduit ensuite la notion de processus ponctuel de Poisson relativement à une filtration comme suit.

**Définition IV.6.3** (*Processus ponctuel de Poisson relativement à une filtration*). Soit  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un processus ponctuel sur  $E$ . Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure. Le processus  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un *processus ponctuel de Poisson relativement à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  d'intensité  $\mu$*  s'il satisfait les conditions suivantes.

- (a)  $\Pi := \{(t, V_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$  est un nuage Poissonnien sur  $\mathbb{R}_+ \times E$  qui est  $(\mathcal{G}_\infty, \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+ \times E})$ -mesurable d'intensité  $\ell \otimes \mu$ , où  $\ell$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- (b) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et  $B \in \mathcal{E}$ ,  $N_{[0,t] \times B}(V)$  est  $\mathcal{G}_t$ -mesurable et  $N_{[t,t+s] \times B}(V)$  est indépendant de  $\mathcal{G}_t$ .  $\square$

Le but de la section est de reformuler la formule de Palm pour des nuages de Poisson muni d'une filtration. Pour cela on introduit les notions de tribu prévisible et de processus prévisible.

**Définition IV.6.4** (*Tribu et processus prévisibles*) Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

- (a) On note  $\mathcal{C}_{\text{prev}}$  les sous-ensembles de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  ayant les formes suivantes :

- $\{0\} \times A$ , avec  $A \in \mathcal{G}_0$ .
- $]s, t] \times A$ , avec  $t \geq s > 0$  et  $A \in \mathcal{G}_s$ .
- $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ .

On vérifie aisément que  $\mathcal{C}_{\text{prev}}$  est un pi-système sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ .

- (b) On pose  $\mathcal{G}_{\text{prev}} := \sigma(\mathcal{C}_{\text{prev}})$ , tribu sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ . C'est la *tribu prévisible associée à  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$* .
- (c) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , soit  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , une fonction. Le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible si  $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto X_t(\omega) \in E$  est  $(\mathcal{G}_{\text{prev}}, \mathcal{E})$ -mesurable.  $\square$

La proposition suivante donne quelques propriétés utiles de la tribu prévisible.

**Proposition IV.6.5** Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i)  $\mathcal{G}_{\text{prev}}$  est la plus petite tribu sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  rendant mesurables les processus  $X : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$  qui sont càg sur  $]0, \infty[$  et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adaptés.
- (ii) Soit  $(E, d)$ , métrique séparable muni des Boréliens  $\mathcal{B}(E)$ . Soit  $X : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \in E$ , un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté et càg sur  $]0, \infty[$ . Alors, il est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible.
- (iii) Soit  $X : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \in E$ , un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible. Alors, il est adapté.

**Preuve :** on montre (i) tout d'abord. Pour cela on observe facilement que l'ensemble des processus à valeurs réelles qui sont  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisibles, forment un espace vectoriel. Soient  $t_0, s_0 \in \mathbb{R}_+$  tels que  $t_0 \geq s_0$  et soit  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une v.a.  $\mathcal{G}_{s_0}$ -mesurable. On pose  $X : (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto \mathbf{1}_{]s_0, t_0]}(t)Y(\omega) \in \mathbb{R}$ . Alors  $X$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible. En effet, soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ; si  $0 \notin B$ ,  $\{X \in B\} = ]s_0, t_0] \times \{Y \in B\} \in \mathcal{C}_{\text{prev}}$ ; si  $0 \in B$ , alors  $\{X \in B\} = (]s_0, t_0] \times \{Y \in B\}) \cup ([0, s_0] \times \Omega) \cup (]t_0, \infty[ \times \Omega)$ . Cet événement est dans  $\mathcal{G}_{\text{prev}}$  car  $[0, s_0] \times \Omega = (\{0\} \times \Omega) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, s_0] \times \Omega$  et car  $]t_0, \infty[ \times \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]t_0 + n, t_0 + n + 1] \times \Omega$ .

Soit  $X$  un processus à valeurs réelles qui est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté càg. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $X_t^n(\omega) = X_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(0) + \sum_{0 \leq k < n} X_{k2^{-n}} \mathbf{1}_{]k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]}(t)$ . Ce qui précède montre que  $X^n$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible. Comme  $X$  est càg sur  $]0, \infty[$ ,  $X$  est la limite ponctuelle des  $X^n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ce qui entraîne que  $X$  est également  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible.

Si on note  $\mathcal{H}$  la tribu sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  engendrée par les processus qui sont càg sur  $]0, \infty[$  et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adaptés. On a clairement  $\mathcal{C}_{\text{prev}} \subset \mathcal{H}$  et donc  $\mathcal{G}_{\text{prev}} \subset \mathcal{H}$ . Par ailleurs, ce qui précède montre que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_{\text{prev}}$ , et donc  $\mathcal{H} = \mathcal{G}_{\text{prev}}$ , ce qui prouve (i).

Pour montrer (ii) on effectue la même approximation qu'au (i) : nous laissons les détails au lecteur. Le points (iii) se démontre en raisonnant par classe monotone : on note  $\mathcal{Q}$  l'espace des processus à valeurs réelles qui sont  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisibles et  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adaptés. C'est clairement un espace vectoriel. On vérifie immédiatement que  $\mathbf{1}_C \in \mathcal{Q}$ , pour tout  $C \in \mathcal{C}_{\text{prev}}$ . Il est facile de vérifier que  $\mathcal{Q}$  est également stable par limite ponctuelle croissante uniformément bornées. Le théorème de la classe monotone, dans sa version fonctionnelle, implique alors que  $\mathcal{Q}$  contient tous les processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisibles bornés. On passe au cas général par troncature : les détails sont laissés au lecteur.  $\blacksquare$

**Notation.** Soit  $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $[0, \infty]$ . Sauf mention explicite du contraire, on suppose :

$$\forall (s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad H_s(\omega, \partial) = 0. \quad (\text{IV.67})$$

Soit  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un processus ponctuel sur  $E$ ; on pose  $\Pi := \{(t, V_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\sum_{s \in [0, t]} H_s(\omega, V_s) \quad \text{signifie} \quad \sum_{(T, X) \in \Pi} \mathbf{1}_{[0, t]}(T) H_T(\omega, X) \quad \text{au sens des familles sommables}$$

Cette expression a toujours un sens lorsque  $H$  est à valeurs dans  $[0, \infty]$ ; si  $H$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , alors, cette expression a un sens dès que  $\sum_{s \in [0, t]} |H_s(\omega, V_s)| < \infty$ .  $\square$

L'énoncé suivant, appelé *formule de compensation*, est une réécriture de la formule de Palm (qui ne lui est pas strictement équivalente).

**Théorème IV.6.6 (Formule de compensation)** Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus ponctuel de Poisson sur  $E$  d'intensité  $\mu$ , qui est supposée sigma-finie. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Soit  $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \rightarrow [0, \infty]$ , un processus  $(\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}_\partial)$ -mesurable satisfaisant (IV.67). Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\omega \mapsto \sum_{s \in [0, t]} H_s(\omega, V_s) \quad \text{et} \quad \omega \mapsto \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x) ds$$

sont deux v.a. à valeurs dans  $[0, \infty]$ ; elles sont  $\mathcal{G}_t$ -mesurables et on a

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{s \in [0, t]} H_s(\omega, V_s) \right] = \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[H_s(\cdot, x)] ds. \quad (\text{IV.68})$$

(ii) Soit  $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \rightarrow \mathbb{C}$ , un processus  $(\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}_\partial)$ -mesurable satisfaisant (IV.67). On suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[|H_s(\cdot, x)|] ds < \infty$ . Alors, (IV.68) a lieu et

$$t \mapsto M_t := \sum_{s \in [0, t]} H_s(\omega, V_s) - \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x) ds$$

est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale bien définie et càd.

(iii) Soit  $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \rightarrow \mathbb{R}$ , un processus  $(\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}_\partial)$ -mesurable satisfaisant (IV.67). On suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[|H_s(\cdot, x)|] ds < \infty$  et  $\int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[H_s(\cdot, x)^2] ds < \infty$ . On a alors

$$\mathbf{E}[M_t^2] = \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[H_s(\cdot, x)^2] ds. \quad (\text{IV.69})$$

avec la notation  $M_t$  introduite au (ii).

**Preuve :** on considère d'abord le cas où  $\mu$  est de masse finie. Soient  $B \in \mathcal{E}$ ,  $s_0, t_0 \in \mathbb{R}_+$  et  $A \in \mathcal{G}_{t_0}$ . On pose

$$I := ]t_0, t_0 + s_0] \quad \text{et} \quad \forall (s, \omega, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial, \quad H_s(\omega, x) := \mathbf{1}_I(s) \mathbf{1}_A(\omega) \mathbf{1}_B(x).$$

Il est clair que  $H$  est  $(\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}_\partial)$ -mesurable, qu'il satisfait (IV.67). On pose  $\Pi := \{(t, V_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$ , qui est un nuage Poissonnien d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . On observe que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$X_t := \sum_{s \in [0, t]} H_s(\cdot, V_s) = \mathbf{1}_A(\cdot) N_{([0, t] \cap I) \times B}(\Pi) \quad \text{et} \quad \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x) dr = \mathbf{1}_A(\omega) \mu(B) \ell([0, t] \cap I).$$

Ce sont des variables  $\mathcal{G}_t$ -mesurables. On remarque que  $X_{t+s} - X_t = \mathbf{1}_A(\cdot) N_{([t, t+s] \cap I) \times B}(\Pi)$ . Comme  $V$  est un processus ponctuel de Poisson la v.a.  $N_{([t, t+s] \cap I) \times B}(\Pi)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu(B) \ell([t, t+s] \cap I)$  et elle est indépendante de  $\mathcal{G}_{t \vee t_0}$ . Donc  $\mathbf{E}[X_{t+s} | \mathcal{G}_{t \vee t_0}] = X_t + \mathbf{1}_A(\omega) \mu(B) \ell([t, t+s] \cap I)$ , puisque  $A \in \mathcal{G}_{t \vee t_0}$ . On a donc

$$\mathbf{E}[X_{t+s} | \mathcal{G}_t] = X_t + \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_A | \mathcal{G}_t \right] \mu(B) \ell([t, t+s] \cap I) = X_t + \mathbf{E} \left[ \int_E \mu(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_{A \times I \times B}(\cdot, r, x) dr \middle| \mathcal{G}_t \right]. \quad (\text{IV.70})$$

Pour tout  $C \in \mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$  on pose

$$X_t(C) := \sum_{s \in [0,t]} \mathbf{1}_C(\cdot, s, V_s) \quad \text{et} \quad Y_t(C) := \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{1}_C(\cdot, s, x) ds.$$

On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des  $C \in \mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$  tels que

$$\mathbf{E}[X_{t+s}(C)|\mathcal{G}_t] = X_t(C) + \mathbf{E}[Y_{t+s}(C) - Y_t(C)|\mathcal{G}_t] = X_t(C) + \mathbf{E}\left[\int_E \mu(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_C(\cdot, r, x) dr \mid \mathcal{G}_t\right]. \quad (\text{IV.71})$$

Il est facile de montrer que  $\mathcal{L}$  est une classe monotone : nous laissons les détails au lecteur. D'autre part (IV.70) montre que  $\mathcal{L}$  contient le pi-système  $\mathcal{P} := \{Q \times B; Q \in \mathcal{C}_{\text{prev}}, B \in \mathcal{E}\}$  qui génère  $\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ . Le théorème de la classe monotone implique alors que  $\mathcal{L} = \mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ . Autrement dit (IV.71) est vérifiée pour tout  $C \in \mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ .

Ce résultat s'étend tout d'abord lorsque  $\mu$  est sigma-finie : il existe une partition de  $E$   $B_n \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; on pose  $\mu_n = \mu(\cdot \cap B_n)$  et pour tout  $C \in \mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ , on pose  $C_n := C \cap (\Omega \times \mathbb{R}_+ \times B_p)$ . Comme  $\mu_n$  est finie on a

$$\mathbf{E}[X_{t+s}(C_n)|\mathcal{G}_t] = X_t(C_n) + \mathbf{E}\left[\int_E \mu_n(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_{C_n}(\cdot, r, x) dr \mid \mathcal{G}_t\right] = X_t(C_n) + \mathbf{E}\left[\int_{B_n} \mu(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_C(\cdot, r, x) dr \mid \mathcal{G}_t\right].$$

En sommant sur  $n$ , et en utilisant l'interversion série/intégrale et série/espérance conditionnelle, on obtient (IV.71) avec  $\mu$  sigma-finie.

Soit  $H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow [0, \infty]$ , une fonction  $\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable. Par le lemme ??, page ??, il existe  $a_p \in ]0, \infty[$ ,  $C_p \in \mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tels que  $H = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \mathbf{1}_{C_p}$ . Par intervversion positives, on en déduit que pour tout  $t$ ,  $\sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s) = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p X_t(C_p)$  et en appliquant (IV.71) aux  $C_p$  et en sommant sur  $p \in \mathbb{N}$ , on obtient

$$\mathbf{E}\left[\sum_{r \in [0,t+s]} H_r(\cdot, V_r) \mid \mathcal{G}_t\right] = \sum_{r \in [0,t]} H_r(\cdot, V_r) + \mathbf{E}\left[\int_E \mu(dx) \int_t^{t+s} H_r(\cdot, x) dr \mid \mathcal{G}_t\right]. \quad (\text{IV.72})$$

On obtient (i) en prenant l'espérance de cette égalité avec  $t=0$ .

Montrons (ii) : (IV.72) implique que  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale lorsque  $H$  est positive. On montre ce résultat pour une fonction  $H$  à valeurs réelles, en prenant sa partie positive et sa partie négative ; le cas des fonctions à valeurs complexes se déduit du cas réel en considérant la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions  $H$ . Il reste donc à montrer que  $t \mapsto M_t$  est càd : il est tout d'abord clair que  $t \mapsto \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x) ds$  est continu par ailleurs, le théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage implique que  $t \mapsto \sum_{s \in [0,t]} H_s(\omega, V_s)$  est càd, ce qui termine la preuve de (ii).

Soit,  $H$  satisfaisant les hypothèses du (iii). On pose

$$X_t(H) := \sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s) \quad \text{et} \quad Y_t(H) := \int_0^t \int_E \mu(dx) H_s(\cdot, x).$$

On suppose dans un premier temps que  $H$  satisfait l'hypothèse suivante

$$\forall (s, \omega, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E, \quad |H_s(\omega, x)| \leq c \mathbf{1}_B(x) \quad \text{où } B \in \mathcal{E} \text{ est tel que } \mu(B) < \infty \text{ et où } c \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{IV.73})$$

On suppose d'abord que  $H \geq 0$ . On a alors

$$X_t(H)^2 = \sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s)^2 + 2 \sum_{0 \leq u < s \leq t} H_u(\cdot, V_u) H_s(\cdot, V_s) = X_t(H^2) + 2 \sum_{s \in [0,t]} A_{s-}(H) H_s(\cdot, V_s),$$

car  $s \mapsto A_s$  est croissant càd et car la limite à gauche  $A_{s-}$  est donnée par  $\sum_{u < s} H_u(\cdot, V_u)$ . Il est facile de vérifier que  $(s, \omega, x) \mapsto A_{s-}(\omega) H_s(\omega, x)$  est  $\mathcal{G}_{\text{prev}} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable car  $s \mapsto A_{s-}$  est càg. Par (i) on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_t(H)^2] &= \int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x)^2] + 2 \int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[A_s H_s(\cdot, x)] \\ &\leq c^2 \mu(B)t + c\mu(B)t \mathbf{E}[A_t] = c^2 \mu(B)t + 2c\mu(B)t \int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x)] \\ &\leq c^2 \mu(B)t + 2c^2 \mu(B)^2 t^2 < \infty\end{aligned}\quad (\text{IV.74})$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}X_t(H)Y_t(H) &= \sum_{s \in [0, t]} H_s(\cdot, V_s) \int_0^s du \int_E \mu(dx) H_u(\cdot, x) + \sum_{s \in [0, t]} H_s(\cdot, V_s) \int_s^t du \int_E \mu(dx) H_u(\cdot, x) \\ &= \sum_{s \in [0, t]} H_s(\cdot, V_s) Y_s(H) + \int_0^t du \int_E \mu(dx) H_u(\cdot, x) A_u\end{aligned}$$

On a donc par (i)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_t(H)Y_t(H)] &= \int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) Y_s(H)] + \int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) A_s] \\ &\leq \iint_{0 \leq s < u \leq t} \iint_E \mu(dy) \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) H_u(\cdot, y)] + \int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) A_s] \\ &\leq 2c^2 \mu(B)^2 t^2 < \infty\end{aligned}\quad (\text{IV.75})$$

On observe également que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y_t(H)^2] &= \iint_{0 \leq s, u \leq t} ds du \iint_E \mu(dy) \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) H_u(\cdot, y)] \\ &= 2 \iint_{0 \leq s < u \leq t} ds du \iint_E \mu(dy) \mu(dx) \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) H_u(\cdot, y)] \\ &\leq c^2 \mu(B)^2 t^2 < \infty\end{aligned}\quad (\text{IV.76})$$

On a  $M_t(H) := X_t(H) - Y_t(H)$ , qui est une martingale d'après le (ii). Comme

$$\mathbf{E}[M_t(H)^2] = \mathbf{E}[X_t(H)^2] - 2\mathbf{E}[X_t(H)Y_t(H)] + \mathbf{E}[Y_t(H)^2]$$

par (IV.74), (IV.75) et (IV.76), on obtient (IV.69), qui est le résultat voulu. Ce résultat s'étend à une fonction  $H$  à valeurs réelles satisfaisant une hypothèse du type (IV.73). D'autre part, soit  $G : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème et satisfaisant également (IV.73) avec un ensemble  $B' \in \mathcal{E}$  et une constante  $c'$ . Alors  $H + G$  et  $H - G$  satisfont également (IV.73) avec un ensemble  $B \cup B' \in \mathcal{E}$  et une constante  $c + c'$ . On a donc

$$\begin{aligned}4\mathbf{E}[M_t(H)M_t(G)] &= \mathbf{E}[M_t(H+G)^2] - \mathbf{E}[M_t(H-G)^2] \\ &= 4 \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[H_s(\cdot, x) G_s(\cdot, x)] ds\end{aligned}\quad (\text{IV.77})$$

Passons au cas général. Comme  $\mu$  est sigma-finie, il existe  $B_p \in \mathcal{E}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , une partition de  $E$  telle que  $0 \leq \mu(B_p) < \infty$ . Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\forall (s, \omega, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E, \quad H_s^{p,q}(\omega, x) = \mathbf{1}_{B_p}(x) H_s(\omega, x) \mathbf{1}_{\{|H_s(\omega, x)| \in [q, q+1]\}}.$$

Il est clair que  $H^{p,q}$  satisfait les hypothèses du théorème et (IV.73) avec  $B = B_p$  et  $c = q + 1$ . Par ailleurs pour tout  $(s, \omega, x)$ , il existe au plus une paire  $(p, q)$  telle que  $H_s^{p,q}(\omega, x) \neq 0$  donc d'une part

$$M_t(H) = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} M_t(H^{p,q}) \tag{IV.78}$$

et d'autre part  $H_s^{p,q}(\omega, x) H_s^{m,n}(\omega, x)$  dès que  $(p, q) \neq (m, n)$  et donc, par (IV.77),

$$\mathbf{E}[M_t(H^{p,q}) M_t(H^{m,n})] = 0 \quad \text{dès que } (p, q) \neq (m, n).$$

Ceci, combiné avec (IV.78) et un argument élémentaire, implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_t(H)^2] &= \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[M_t(H^{p,q})^2] \\ &= \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[\mathbf{1}_{B_p}(x) H_s(\cdot, x)^2 \mathbf{1}_{\{|H| \in [q, q+1]\}}] \\ &= \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}[H_s(\cdot, x)^2], \end{aligned}$$

par interversion série/intégrale positive. Cela termine la preuve du théorème.

#### IV.6.b Processus ponctuels régénératifs : le théorème de Greenwood-Pitman.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  qui est supposé complet. Soit  $(E, \mathcal{E})$ , un espace mesurable séparable et séparé. Soit  $\partial \notin E$ . On rappelle la notation  $E_\partial := E \cup \{\partial\}$  et  $\mathcal{E}_\partial = \{B, B \cup \{\partial\}; B \in \mathcal{E}\}$ . On introduit tout d'abord la définition suivante.

**Définition IV.6.7 (Ensembles ordonnables en croissant)** Un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}_+$  est dit *ordonnable en croissant* s'il est vide ou s'il est l'ensemble des valeurs d'une suite croissante.  $\square$

**Remarque IV.6.8** Soit  $D \subset \mathbb{R}_+$  ordonnable en croissant. Alors  $D$  est fini et contient sa borne supérieure ou bien  $D$  est l'image d'une suite strictement croissante :  $D = \{t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$  dans ce cas  $D$  ne contient pas sa borne supérieure sup  $D$  qui est la limite de  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $[0, \infty]$ . Dans tous les cas  $D$  n'a au plus qu'un point d'accumulation dans  $[0, \infty]$ .  $\square$

**Définition IV.6.9 (Processus ponctuels extraits)** Soit  $B \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on se donne une fonction  $V_t : \Omega \rightarrow E_\partial$  (sans hypothèse de mesurabilité a priori). On note  $V_\infty$  la fonction constante à  $\partial$ . On suppose que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \in B\} \text{ est ordonnable en croissant.}$$

Cela permet de définir récursivement les *temps de retour successifs de  $V$  en  $B$* , notés  $(T_n(B))_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$T_0(B) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(B) = \inf \{t > T_{n-1}(B) : V_t \in B\}$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose également  $Y_n(B) = V_{T_n(B)}$ .  $\square$

**Remarque IV.6.10** On garde les notations et hypothèses de la définition précédente et on introduit

$$N_B = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n(B) < \infty\}.$$

On observe que si  $N_B < \infty$ , alors pour tout  $n > N_B$ , on a  $Y_n(B) = \partial$  dans la définition précédente car  $V_\infty$  est constante à  $\partial$ . D'autre part on observe que

$$\{(t, V_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : V_t \in B\} = \{(T_n(B), Y_n(B)) ; n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } T_n(B) < \infty\},$$

les deux ensembles étant vides si  $N_B = 0$ .  $\square$

**Définition IV.6.11 (Processus régénératifs et régénératifs stoppés)** Soient  $A, B \in \mathcal{E}$  avec  $A \subset B$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on se donne une fonction  $V_t : \Omega \rightarrow E_\partial$  (sans hypothèse de mesurabilité a priori). On note  $V_\infty$  la fonction constante à  $\partial$ .

- (1) Le processus  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit *B-régénératif* s'il satisfait les conditions suivantes.
  - (a)  $\mathbf{P}$ -p.s. l'ensemble de temps  $\{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \in B\}$  est ordonnable en croissant et n'est pas borné.
  - (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les v.a.  $T_n(B)$  et  $Y_n(B)$  de la définition IV.6.10 sont  $\mathcal{F}$ -mesurables.
  - (c) Les v.a.  $(Y_n(B))_{n \geq 1}$  sont i.i.d.
- (2) Le processus  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit *B-régénératif stoppé en A* s'il satisfait les conditions suivantes.
  - (a')  $\mathbf{P}$ -p.s. l'ensemble de temps  $\{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \in B\}$  est ordonnable en croissant (mais il peut être borné)
  - (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les v.a.  $T_n(B)$  et  $Y_n(B)$  de la définition IV.6.9 sont  $\mathcal{F}$ -mesurables.
  - (c') Les v.a.  $(Y_n(B))_{n \geq 1}$  sont i.i.d. stoppées en  $A$  (cf. définition IV.5.14).  $\square$

Nous énonçons ici un résultat de P. Greenwood et J. Pitman qui a de nombreuses applications dont l'une permet de définir les excursions et le temps local d'un processus de Markov.

**Théorème IV.6.12 (Greenwood-Pitman)** Soient  $A$  et  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  tels que

$$A \subset E_k \subset E_{k+1} \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on se donne une fonction  $V_t : \Omega \rightarrow E_\partial$ . On fait les hypothèses suivantes.

- (a)  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$  n'est pas ordonnable en croissant.
- (b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est  $E_k$ -régénératif (resp.  $E_k$ -régénératif stoppé en  $A$  : cf. définition IV.6.11).

Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Il existe une mesure sigma finie  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  et il existe processus un processus positif  $(L_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  issu de 0, continu et croissant tel que le nuage de points  $\Pi$  sur  $\mathbb{R}_+ \times E$

$$\Pi = \{(L_t, V_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$$

soit un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \mu$  (resp. de Poisson stoppé en  $A$  d'intensité  $\ell \otimes \mu$  : cf. définition IV.5.14). De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \mu(E_k) < \infty$  et  $\mu(E) = \infty$  (et resp.  $0 < \mu(A) < \infty$ ).

- (ii) On a l'approximation suivante.

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{1}{\mu(E_k)} \# \{r \in [0, s] : V_r \in E_k\} - L_s \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{IV.79})$$

(iii) On pose

$$D = \{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}, \quad D_{\text{iso}} = \{t \in D : \exists \varepsilon > 0, [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap D = \{t\}\} \quad \text{et} \quad D_{\text{acc}} = \overline{D} \setminus D_{\text{iso}}.$$

où  $\overline{D}$  est l'adhérence de  $D$ . Alors,

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall t > s \geq 0, \quad (L_s < L_t) \iff ([s, t] \cap D_{\text{acc}} \neq \emptyset). \quad (\text{IV.80})$$

(iv) Soient  $L'$ ,  $\Pi'$  et  $\mu'$  satisfaisant les propriétés de (i). Alors, il existe un réel  $c > 0$  tel que  $\mu' = \frac{1}{c}\mu$  et tel que  $\mathbf{P}\text{-p.s. pour tout } t \in \mathbb{R}_+, L'_t = cL_t$ .

**Preuve.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\nu_k$  la loi de  $Y_1(E_k)$  et on observe tout d'abord que pour tout entier  $l > k$ ,  $(Y_n(E_k))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite  $E_k$ -extraite de  $(Y_n(E_l))_{n \in \mathbb{N}^*}$  : comme ce sont des suites i.i.d. (resp. i.i.d. stoppées en  $A$ ) par l'hypothèse (b), on en déduit que  $\nu_k = \nu_l(\cdot \cap E_k)/\nu_l(E_k)$ .

Montrons tout d'abord que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_1) = 0$ . Ce qui précède implique que  $\nu_k(E_1)\nu_l(E_k) = \nu_l(E_1)$  dès que  $l > k$  ; la suite  $(\nu_k(E_1))_{k \in \mathbb{N}^*}$  décroît et converge. On rappelle la définition IV.6.9 des temps  $(T_n(E_k))_{n \in \mathbb{N}}$  de retours successifs de  $V$  en  $E_k$  et la notation  $N_{E_k} = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n(E_k) < \infty\}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $D_k = \{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \in E_k\} = \{T_{n+1}(E_k) ; 0 \leq n < N_{E_k}\}$ . On a  $D_k \subset D_{k+1}$  car  $E_k \subset E_{k+1}$  et on observe que  $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} D_k = \{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$  car  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k = E$ . Pour tout entier  $0 \leq n < N_{E_1}$  on pose

$$\xi_n^k = \#\{m \in \mathbb{N}^* : T_m(E_1) < T_n(E_k) \leq T_{n+1}(E_1)\} = \#(D_k \cap [T_n(E_1), T_{n+1}(E_1)]).$$

L'hypothèse (b) combiné au fait que les v.a.  $(Y_n(E_k))_{k,n \in \mathbb{N}^*}$  sont cohérentes par extraction permet de voir d'une part que  $\mathbf{P}\text{-p.s. pour tous } l > k, \xi_n^k \leq \xi_n^l$  et d'autre part que conditionnellement à  $\{n < N_B\}$ ,  $\xi_n^k$  suit une loi géométrique de paramètre de moyenne  $1/\nu_k(E_1)$ . Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_1) > 0$ , alors cela implique  $\mathbf{P}\text{-p.s. pour tout } n < N_{E_1}, \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_n^k = \#(D \cap [T_n(E_1), T_{n+1}(E_1)]) < \infty$ . Or, puisque  $D = \bigcup_{0 \leq n < N_{E_1}} (D \cap [T_n(E_1), T_{n+1}(E_1)])$ , cela contredit l'hypothèse (a) (i.e.  $D$  n'est  $\mathbf{P}\text{-p.s. pas ordonnable en croissant}$ ). Par conséquent, on obtient bien  $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E_1) = 0$ .

Le tableau de v.a.  $(Y_n(E_k))_{k,n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les hypothèses de la proposition IV.5.13 (resp. proposition IV.5.17) d'étiquetage temporel version 1 (resp. version 2). Il existe donc des v.a.  $(\Lambda_n^k)_{k,n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurables à valeurs dans  $]0, \infty[$  (resp. à valeurs dans  $]0, \infty]$  telles que

$$\Pi := \{(\Lambda_n^k, Y_n(E_k)) ; k, n \in \mathbb{N}^* : \Lambda_n^k < \infty\}$$

soit un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \mu$  (resp. un nuage de Poisson stoppé en  $A$  d'intensité  $\mu$ ) où  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  est une mesure qui satisfait pour tout  $k \in \mathbb{N}^*, 0 < \mu(E_k) < \infty$  et  $\mu(E) = \infty$  (resp. et aussi  $0 < \mu(A) < \infty$ ).

On se place d'abord dans le cas non stoppé où  $\Pi$  est un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \mu$ . On veut utiliser le second lemme de Dini (lemme IV.5.8) pour définir  $L$  par la limite (IV.79). Pour cela, pour tous  $k, l \in \mathbb{N}^*$ , on définit récursivement les variables suivantes  $(\tau_n^{k,l})_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\tau_0^{k,l} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_n^{k,l} = \inf \{m > \tau_{n-1}^{k,l} : Y_m(E_l) \in E_k\}$$

(avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ ). Puisque  $1/\mu(E_l) = \nu_l(E_1)$ , le point (IV.56) dans la proposition IV.5.13 permet d'affirmer que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall k, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Lambda_n^k = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{k,l}}{\mu(E_l)}.$$

On définit  $L : D \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant  $L_{T_n(E_k)} = \Lambda_n^k$  pour tous  $k, n \in \mathbb{N}^*$  et on pose également

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(t) = \frac{1}{\mu(E_k)} \# \{r \in [0, t] : V_r \in E_k\}$$

On observe que pour tout  $k, l, n \in \mathbb{N}^*$  avec  $l > k$ ,  $f_l(T_n(E_k)) = \tau_n^{k,l} / \mu(E_l)$ . On en déduit que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall t \in D, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(t) = L_t \in \mathbb{R}_+ .$$

De plus, comme  $V$  est  $E_1$ -régénératif  $D_1$  n'est  $\mathbf{P}$ -p.s. pas borné et donc  $D$  non plus car  $D_1 \subset D$ . Enfin, comme  $\mu(E) = \infty$  et puisque  $\{L_t ; t \in D\} = \{\Lambda_n^k ; k, n \in \mathbb{N}^*\}$  est l'ensemble des temps où  $\mathbf{I}$  a une marque, le lemme IV.5.6 (page 159) montre que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\{\Lambda_n^k ; k, n \in \mathbb{N}^*\}$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ .

On voit donc qu'il existe  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$  et tel que pour tout  $\omega$  fixé dans  $\Omega_0$ ,  $D$  est dénombrable non-borné, pour tout  $t \in D$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$  existe dans  $\mathbb{R}_+$  et vaut  $L_t$ , et  $\overline{\{L_t ; t \in D\}} = \mathbb{R}_+$ . Le second lemme de Dini (le lemme IV.5.8) implique alors que  $L$  se prolonge de manière unique en une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, t]} |f_k(s) - L_s| = 0$ . Si on prend  $L$  comme le processus nul sur  $\Omega \setminus \Omega_0$ , on en déduit (IV.79) et donc (ii) dans les cas des processus ponctuels non-stoppés.

Le cas des processus ponctuels stoppés en  $A$  se traitent de la même manière à l'aide de (IV.63) (proposition IV.5.17, étiquetage temporel version 2), et à l'aide du second lemme de Dini, à la différence qu'au lieu de considérer  $D$ , qui peut être borné dans le cas des processus stoppés, on considère  $D = D \cup (\mathbb{Q} \cap [T_1(A), \infty[)$ . Les détails de l'adaptation de la preuve précédente sont laissés en exercice.

Montrons (iii). On remarque que les  $(\Lambda_{n+1}^k)_{0 \leq n < N_{E_k}}$  sont des sommes de variables exponentielles de paramètre  $\mu(E_k) \in ]0, \infty[$ . Il existe donc  $\Omega_1 \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$  et tel que sur  $\Omega_1$ , on ait d'une part  $\Lambda_n^k < \Lambda_{n+1}^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $0 \leq n < N_{E_k}$ , et d'autre part telle que la limite (IV.79) ait lieu. On raisonne ensuite de manière déterministe en se plaçant sur  $\Omega_1$ .

Soient  $t > s \geq 0$ . On suppose que  $L_s < L_t$ . Comme  $L$  est continu, il existe  $t > u > r > s$  tels que  $L_r < L_u$  et par (i), on constate que  $\#\{t \in ]r, u] : V_t \in E_k\} / \mu(E_k) \rightarrow L_u - L_r$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . L'ensemble  $D \cap ]r, u]$  est donc infini : cela implique que  $D_{\text{acc}} \cap ]s, t[ \neq \emptyset$ , ce qui montre une première implication de (IV.80).

Réciproquement, supposons  $D_{\text{acc}} \cap ]s, t[ \neq \emptyset$  ; alors  $D \cap ]s, t[$  est infini. Cela implique l'existence de  $k \geq 1$  et de  $p < q$  tels que  $s < T_p(E_k) < T_q(E_k) < t$  ce qui entraîne que  $L_{T_p(E_k)} = \Lambda_p^k < \Lambda_q^k = L_{T_q(E_k)}$  et donc  $L_s < L_t$ . Cela termine la preuve de (iii).

Montrons (iv). On observe que  $\mu(\cdot \cap E_k) / \mu(E_k)$  et  $\mu'(\cdot \cap E_k) / \mu'(E_k)$  sont égales à la loi de  $Y_1(E_k)$ . Cela implique facilement que  $c\mu' = \mu$  où on a posé  $c = \mu(E_1) / \mu'(E_1)$ . Par IV.79 appliqué à  $L$  et  $L'$  on a sur  $\Omega_0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{s \in [0, t]} |L'_s - cL_s| \leq |L'_s - \frac{1}{\mu'(E_k)} \# \{r \in [0, s] : V_r \in E_k\}| + c \left| \frac{1}{\mu(E_k)} \# \{r \in [0, s] : V_r \in E_k\} - L_s \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui montre que  $L' = cL$  et ce qui termine la preuve du théorème. ■



# Chapitre V

## Processus de Lévy.

### V.1 Définitions et lois infiniment divisibles.

#### V.1.a Définitions des processus de Lévy, premières propriétés.

**Définition V.1.1** (*Processus de Lévy*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité sur lequel est défini un processus  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . C'est un processus de Lévy s'il satisfait les conditions suivantes.

- (a)  $X$  est  $\mathbf{P}$ -p.s. càdlàg.
- (b) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_{t+s} - X_t$  a même loi que  $X_s - X_0$ .
- (c) Pour tous  $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , les v.a.  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.  
□

On montre facilement la propriété élémentaire suivante.

**Lemme V.1.2** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité. Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un processus défini sur cet espace à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On le suppose  $\mathbf{P}$ -p.s. càdlàg. On rappelle que  $(\mathcal{F}_t^0(X))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est la filtration naturelle de  $X$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $X$  est un processus de Lévy.
- (b) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_{t+s} - X_t$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t^0(X)$  et même loi que  $X_s - X_0$ .

**Preuve :** exercice. ■

Cette propriété suggère d'introduire la deuxième définition qui suit.

**Définition V.1.3** (*Processus de Lévy relativement à une filtration*) Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité sur lequel est défini un processus  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . C'est un processus de Lévy relativement à la filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  s'il satisfait les conditions suivantes.

- (a)  $X$  est un processus  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté et il est  $\mathbf{P}$ -p.s. càdlàg.
- (b) Pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_{t+s} - X_t$  est indépendant de  $\mathcal{G}_t$  et a même loi que  $X_s - X_0$ . □

Le lemme V.1.2 montre qu'un processus de Lévy selon la première définition V.1.3 est un processus de Lévy relativement à sa filtration naturelle. Le lemme suivant affirme que les processus de Lévy sont des processus de Feller.

**Lemme V.1.4** Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Pour toute fonction  $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ , tout  $t \in \mathbb{R}^d$  et tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$P_t f(\mathbf{x}) = \mathbf{E}[f(\mathbf{x} + X_t - X_0)].$$

Alors,  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un semi-groupe de Feller-Dynkin conservatif.

**Preuve :** le théorème de convergence dominée entraîne facilement que  $P_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ . La continuité à droite de  $X$  ainsi que le théorème de convergence dominée implique facilement que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . Il reste donc à vérifier la propriété de semi-groupe : pour cela on fixe  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ; la propriété (b) du lemme V.1.2 implique que

$$\mathbf{E}[f(\mathbf{x} + X_{t+s} - X_0) | \mathcal{F}_t^o(X)] = \mathbf{E}[f(\mathbf{x} + X_{t+s} - X_t + X_t - X_0) | \mathcal{F}_t^o(X)] = P_s f(\mathbf{x} + X_t - X_0)$$

ce qui implique que  $P_{t+s} f(\mathbf{x}) = P_t(P_s f)(\mathbf{x})$ . Le semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est clairement conservatif. ■

**Définition V.1.5** (Processus de Lévy comme processus de Feller) Soit

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)),$$

un processus de Feller-Dynkin conservatif càdlàg satisfaisant les hypothèses habituelles. C'est un processus de Lévy si pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  et tous  $t, s \in \mathbb{R}_+$ , sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,  $X_{t+s} - X_t$  est indépendant de  $\mathcal{G}_t$  et à même loi que  $X_s$  sous  $\mathbf{P}_0$ . □

La propriété de Markov forte peut se réécrire de la manière suivante.

**Proposition V.1.6** On reprend les notation de la définition V.1.5 qui précède. Soit  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt fini partout. Pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , le processus  $X_{T+} - X_T$  sous  $\mathbf{P}_\mu$  est indépendant de  $\mathcal{G}_T$  et a même loi que  $X$  sous  $\mathbf{P}_0$ .

**Preuve :** il est facile de déduire de la définition V.1.5 que pour tous  $t_n \geq \dots \geq t_1 \geq 0$ ,  $(X_{t_n} - X_0, \dots, X_{t_1} - X_0)$  sous  $\mathbf{P}_\mu$  a même loi que  $(X_{t_n}, \dots, X_{t_1})$  sous  $\mathbf{P}_0$  (on peut faire une récurrence sur  $n$ ). On en déduit que  $X - X_0$  sous  $\mathbf{P}_\mu$  a même loi que  $X$  sous  $\mathbf{P}_0$ . Soit  $A \in \mathcal{G}_T$  et  $F : (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurable bornée. La propriété de Markov forte et ce qui précède impliquent que  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.

$$\mathbf{E}_\mu[1_A F(X_{T+} - X_T) | \mathcal{G}_T] = 1_A \mathbf{E}_{X_T}[F(X - X_0)] = 1_A \mathbf{E}_0[F(X)],$$

ce qui entraîne le résultat voulu lorsque qu'on prend l'espérance de cette égalité. ■

### V.1.b Lois infiniment divisibles, semi-groupes de convolution et processus de Lévy.

Un outil important utilisé dans ce chapitre est la transformée de Fourier : pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  on la note  $\widehat{\mu}$  :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mu}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle} \mu(d\mathbf{x}).$$

On rappelle l'*injectivité de la transformée de Fourier des mesures finies sur  $\mathbb{R}^d$*  : pour toutes  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(\widehat{\mu} = \widehat{\nu}) \iff (\mu = \nu).$$

On utilise aussi le :

**Théorème de Paul Lévy :** soient  $\nu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; on suppose que les transformées de Fourier  $\widehat{\nu}_n$  convergent ponctuellement sur  $\mathbb{R}^d$  vers une fonction  $f$  qui est continue dans un voisinage de 0; alors il existe  $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \nu$  étroitement et on donc  $\widehat{\nu} = f$ .

**Définition V.1.7 (Lois infiniment divisibles)** La loi  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  est dite *infiniment divisible* s'il existe une suite de lois  $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $n \geq 2$  telles que  $\mu = \mu_n^{*n}$ , où  $*$  est le produit de convolution sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

Commençons par prouver la propriété suivante sur la transformée de Fourier d'une loi infiniment divisible.

**Lemme V.1.8** Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , infiniment divisible. Alors sa transformée de Fourier  $\widehat{\mu}$  ne s'annule pas.

**Preuve :** pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , on note  $\nu^s = \nu * (\nu(-\cdot))$  où  $\nu(-\cdot)$  est la mesure image de  $\nu$  par  $x \mapsto -x$ . On remarque que  $\widehat{\nu^s} = |\widehat{\nu}|^2$ . Soient  $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  telles que  $\mu = \mu_n^{*n}$ ,  $n \geq 2$ . La commutativité du produit de convolution implique facilement que  $\mu^s = (\mu_n^s)^{*n}$ . Donc pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , on a  $|\widehat{\mu}(\mathbf{u})|^2 = \widehat{\mu^s}(\mathbf{u}) = \widehat{\mu_n^s}(\mathbf{u})^n$ . Comme il s'agit de quantités positives, on peut en prendre la racine  $n$ -ième et on constate que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  la limite suivante a lieu :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mu_n^s}(\mathbf{u}) = \mathbf{1}_{\{\widehat{\mu}(\mathbf{u}) \neq 0\}}$ . Or dans un voisinage de 0,  $\widehat{\mu}$  est non-nulle (car  $\widehat{\mu}(0) = 1$  et  $\widehat{\mu}$  est continue); par conséquent, la fonction  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbf{1}_{\{\widehat{\mu}(\mathbf{u}) \neq 0\}}$  vaut 1 dans une voisinage de 0 : elle y est donc continue et le théorème de P. Lévy rappelé ci-dessus implique que  $\mu_n^s \rightarrow \nu$  étroitement pour une certaine loi  $\nu$ . Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , on a donc  $\widehat{\nu}(\mathbf{u}) = \mathbf{1}_{\{\widehat{\mu}(\mathbf{u}) \neq 0\}}$ . Comme  $\widehat{\nu}$  est continue cela implique le résultat voulu. ■

Nous caractérisons plus loin les mesures infiniment divisibles via leur transformée de Fourier : c'est la formule de Lévy-Khintchine, qui est prouvé dans ce cours en même temps que la construction des processus de Lévy. Plus précisément, la formule de Lévy-Khintchine donne la forme de l'*exposant caractéristique* des mesures infiniment divisible, exposant défini dans la proposition suivante.

**Proposition V.1.9 (Existence de l'exposant caractéristique des lois infiniment divisibles)** Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  infiniment divisible. Il existe une fonction continue  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mu}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle} \mu(d\mathbf{x}) = \exp(\psi(\mathbf{u})).$$

La fonction  $\psi$  est appelée exposant caractéristique de la loi infiniment divisible  $\mu$ .

**Preuve :** Comme  $\mathbf{u} \mapsto \widehat{\mu}(\mathbf{u})$  est continue et non-nulle par le lemme V.1.8, il en est de même pour  $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{u}) = \widehat{\mu}(\mathbf{u})/|\widehat{\mu}(\mathbf{u})|$ . On a donc  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  continue telle que  $|f| = 1$ ; le théorème du relèvement implique l'existence d'une fonction continue  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(\mathbf{u}) = \exp(ig(\mathbf{u}))$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . On pose alors  $\psi(\mathbf{u}) = \log|\widehat{\mu}(\mathbf{u})| + ig(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  qui satisfait les propriétés désirées. ■

**Proposition V.1.10 (Semi-groupe de convolution et processus de Lévy)** Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , une mesure infiniment divisible. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , il existe une unique famille de mesures  $\mu_t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  telles que

- (a)  $\mu_t * \mu_s = \mu_{s+t}$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ;
- (b)  $\mu_0 = \delta_0$  et  $\mu_1 = \mu$ ;
- (c)  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mu_t$  est continu pour la convergence en loi sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mu}_t(\mathbf{u}) = e^{t\psi(\mathbf{u})}$$

où  $\psi$  est l'exposant caractéristique de  $\mu$ .

La famille de lois  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est appelé un **semi-groupe de convolution** associé à  $\mu$ . Pour toute  $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ , tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , on pose  $P_t f(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \mu_t(d\mathbf{y})$ . Alors  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est le semi-groupe d'un processus de Lévy.

Réciproquement, si  $X$  est un processus de Lévy tel que  $X_0 = 0$ , alors la loi  $\nu$  de  $X_1$  est infiniment divisible et les lois  $\nu_t$  de  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , forment le semi-groupe de convolution associé à  $\nu$ . Si on note  $\psi$  l'exposant caractéristique de  $\nu$ , alors la loi de  $X$  est caractérisée par  $\psi$  appelé l'exposant caractéristique de  $X$ . On a donc

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}[e^{i\langle \mathbf{u}, X_t \rangle}] = e^{t\psi(\mathbf{u})}.$$

Il y a donc une correspondance bijective entre les exposants caractéristiques des lois infiniment divisibles sur  $\mathbb{R}^d$  et les semi-groupes des processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Preuve :** pour tout  $n \geq 2$ , soit  $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\mu = \mu_n^{*n}$ . On note par ailleurs  $\psi$  l'exposant caractéristique de  $\mu$  comme à la proposition V.1.9. Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , on a donc  $\widehat{\mu}_n(\mathbf{u})^n = \widehat{\mu}(\mathbf{u}) = \exp(\psi(\mathbf{u}))$ . Comme  $\psi$  et  $\widehat{\mu}_n$  sont des fonctions continues, on en déduit que  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \mapsto \widehat{\mu}_n(\mathbf{u}) \exp(-\frac{1}{n}\psi(\mathbf{u}))$  est une fonction continue à valeurs dans l'ensemble discret des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité : cette fonction est donc constante et comme elle vaut 1 en l'origine, on a

$$\forall n \geq 2, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mu}_n(\mathbf{u}) = e^{\frac{1}{n}\psi(\mathbf{u})}. \quad (\text{V.1})$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mu_{m/n} := \mu_n^{*m}$  et par (V.1), on a  $\widehat{\mu}_{m/n}(\mathbf{u}) = \exp(\frac{m}{n}\psi(\mathbf{u}))$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . Par injectivité de la transformée de Fourier des mesures finies sur  $\mathbb{R}^d$ , il existe donc une unique famille de mesures  $\mu_r \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $r \in \mathbb{Q}_+$ , telles que  $\widehat{\mu}_r(\mathbf{u}) = \exp(r\psi(\mathbf{u}))$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $r_n \in \mathbb{Q}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite de rationnels tels que  $\lim_n r_n = t$ . Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , on a donc  $\lim_n \widehat{\mu}_{r_n}(\mathbf{u}) = \exp(t\psi(\mathbf{u}))$ . Le théorème de P. Lévy implique l'existence d'une unique mesure  $\mu_t \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\widehat{\mu}_t(\mathbf{u}) = \exp(t\psi(\mathbf{u}))$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . L'injectivité de la transformée de Fourier implique encore que  $\mu_0 = \delta_0$  et  $\mu_1 = \mu$ . Comme pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto \widehat{\mu}_t(\mathbf{u})$  est continue, le théorème de P. Lévy implique que  $t \mapsto \mu_t$  est continu pour la convergence étroite. Enfin, pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\widehat{\mu}_s(\mathbf{u}) \widehat{\mu}_t(\mathbf{u}) = \exp((s+t)\psi(\mathbf{u})) = \widehat{\mu}_{s+t}(\mathbf{u})$  et l'injectivité de la transformée de Fourier implique que  $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ , ce qui prouve le premier point de la proposition.

Soit  $X$  est un processus de Lévy issu de 0. On a  $X_t = \sum_{1 \leq k \leq n} X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n}$ . Comme les accroissements sont indépendants et homogènes en loi, la loi  $\nu_t$  de  $X_t$  est une loi infiniment divisible. De même  $X_{t+s} = X_{t+s} - X_t + X_t$  : comme la v.a.  $X_{t+s} - X_t$  est indépendante de  $X_t$  et puisqu'elle a même loi que  $X_s$ , c'est-à-dire  $\nu_s$ , on a bien  $\nu_{t+s} = \nu_t * \nu_s$ . Le reste des assertions du théorème suivent immédiatement. ■

## V.2 Structure des processus de Lévy.

### V.2.a Caractérisation des processus de Lévy continus.

On rappelle que  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne associée au produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{R}^d$ . Dans cette section,

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)),$$

désigne un processus de Lévy, vu comme un processus de Feller-Dynkin (comme à la définition V.1.5). Le théorème concerne les processus de Lévy dont les sauts sont bornés

**Théorème V.2.1** *On suppose que  $X$  a des saut bornés, c'est-à-dire qu'il existe  $c > 0$  tel que*

$$\mathbf{P}_{0\text{-p.s.}} \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\Delta X_t\| \leq c,$$

où on rappelle que  $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$  est le saut (éventuel) de  $X$  en  $t$ . Alors,  $X$  a des moments exponentiels, c'est-à-dire il existe un réel  $\theta > 0$  tel que  $\sup_{t \in [0, t_0]} \mathbf{E}_0[e^{\theta \|X_t\|}]$ , pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ . Cela que  $X$  admet des moments de tous ordres :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \sup_{t \in [0, t_0]} \mathbf{E}_0[\|X_t\|^p] < \infty. \quad (\text{V.2})$$

**Preuve :** on définit par récurrence la suite de temps  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $T_0 := 0$  et

$$T_{n+1} = \inf \{t > T_n : \|X_t - X_{T_n}\| > 1\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . Il est facile de montrer que les  $T_n$  sont des  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. On remarque que si  $T_n < \infty$ , alors  $T_{n+1} - T_n = T_1(X_{+T_n} - X_{T_n})$ , avec une notation évidente. Donc, pour toute loi initiale  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  et pour toute fonction  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable, la propriété de Markov en  $T_n$  pour les processus de Lévy (proposition V.1.6, page 182) implique que

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}} f(T_{n+1} - T_n) | \mathcal{G}_{T_n}] = \mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}} \mathbf{E}_0[f(T_1)]. \quad (\text{V.3})$$

On pose alors  $a = \mathbf{E}_0[e^{-T_1} \mathbf{1}_{\{T_1 < \infty\}}]$ . Si  $a = 0$ , alors  $\mathbf{P}_0(T_1 = \infty)$  et donc  $\mathbf{P}_0$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\|X_t\| \leq 1$ , ce qui implique (V.2). Supposons que  $a > 0$ . Comme  $X$  est continu à droite au temps 0, on a  $\mathbf{P}_0(T_1 > 0) = 1$  et donc  $a < 1$ . La propriété de Markov (V.3) implique que

$$\mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\{T_{n+1} < \infty\}} e^{-T_{n+1}} | \mathcal{G}_{T_n}] = \mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}} e^{-T_n} \mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\{T_1 < \infty\}} e^{-T_1}] = \mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}} e^{-T_n} a,$$

ce qui entraîne que  $\mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}} e^{-T_n}] = a^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Raisonnons ensuite sur l'événement  $\{T_n < \infty\}$  : pour tout  $k \leq n$ , on a  $T_k < \infty$  et  $\|X_t - X_{T_{k-1}}\| \leq 1$ ,  $t \in [T_{k-1}, T_k]$ , ce qui implique que  $\|X_{T_k} - X_{T_{k-1}}\| \leq 1$ . Puisque  $\|\Delta X_{T_k}\| \leq c$ , on en déduit que  $\|X_{T_k} - X_{T_{k-1}}\| \leq 1 + c$ . Cela prouve que  $\mathbf{P}_0$ -p.s. sur l'événement  $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ ,

$$\|X_t\| \leq \|X_t - X_{T_n}\| + \sum_{1 \leq k \leq n} \|X_{T_k} - X_{T_{k-1}}\| \leq 1 + n(1 + c) \leq (n + 1)(1 + c)$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $\mathbf{1}_{\{\|X_t\| > (1+c)(n+1)\}} \leq \mathbf{1}_{\{t \geq T_{n+1}\}} \leq e^{t-T_{n+1}} \mathbf{1}_{\{T_{n+1} < \infty\}}$ . En prenant l'espérance, les résultats précédents impliquent pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{P}_0(\|X_t\| > (1 + c)(n + 1)) \leq e^t a^{n+1}.$$

Pour simplifier les notations, on pose  $b := (1 + c)^{-1}$ . Soit  $\theta > 0$  tel que  $e^\theta a < 1$ . Fubini positif implique alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0[e^{b\theta\|X_t\|}] - 1 &= \mathbf{E}_0\left[\int_0^\infty dx \theta e^{\theta x} \mathbf{1}_{\{b\|X_t\| > x\}}\right] = \int_0^\infty dx \theta e^{\theta x} \mathbf{P}_0(b\|X_t\| > x) \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \theta e^{\theta(n+1)} \mathbf{P}_0(\|X_t\| > (1 + c)n) \leq \theta + \sum_{n \geq 1} \theta e^{\theta(n+1)} e^t a^n < \infty \end{aligned}$$

Cela prouve que  $X$  admet des moments exponentiels et (V.2) en découle simplement. ■

On rappelle le lemme III.3.4, page 115, qui permet de définir l'opérateur caractéristique (voir la définition III.3.5, page 115). On démontre le théorème suivant par le calcul explicite de l'opérateur caractéristique de Dynkin d'un processus de Lévy continu en dimension 1.

**Théorème V.2.2** *On se place en dimension  $d=1$ . On suppose que le processus de Lévy  $X$  est continu. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{E}_0[X_1^2] < \infty$  et on pose alors*

$$v := \mathbf{E}_0[X_1] \quad \text{et} \quad \beta := \sqrt{\mathbf{E}_0[(X_1 - v)^2]},$$

*Les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (i) *Si  $\beta = 0$ , alors pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s.  $X_t - X_0 = vt$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .*
- (ii) *Si  $\beta > 0$ , alors  $X_t = X_0 + \beta B_t + vt$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , où le processus  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est tel que pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , issu de 0 et indépendant de  $X_0$ .*

**Preuve :** nous donnons une preuve ne faisant pas appel au calcul stochastique. Puisque  $X$  n'a pas de saut, il des moments de tous ordres, d'après le théorème V.2.1 qui précède. Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on peut donc poser  $f(t) := \mathbf{E}_0[X_t]$  et  $g(t) := \text{var}(X_t)$ . Comme sous  $\mathbf{P}_0$ ,  $X_{t+s} - X_t$  est indépendant de  $X_{\cdot \wedge t}$  et a même loi que  $X_s$ , on en déduit que  $f(t+s) = f(t) + f(s)$  et  $g(t+s) = g(t) + g(s)$ . On fixe,  $C := \sup_{t \in [0,1]} \mathbf{E}_0[X_t^2]$  et on remarque que pour tout  $t \in [0,1]$ ,  $\mathbf{E}_0[X_t^2] = f(t)^2 + g(t) \leq C$ . Si on pose  $n = \lfloor 1/t \rfloor$ , alors  $nt \leq 1$ . Comme  $f(nt) = nf(t)$  et  $g(nt) = ng(t)$  on en déduit  $n^2 f(t)^2 + ng(t) \leq C$ . Par conséquent,  $|f(t)| \leq \frac{\sqrt{C}}{\lfloor 1/t \rfloor}$  et  $g(t) \leq \frac{C}{\lfloor 1/t \rfloor}$ . Cela implique que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$ . Un argument élémentaire entraîne que  $f$  et  $g$  sont des fonctions linéaires : si on note  $v := f(1) := \mathbf{E}_0[X_1]$  et  $\beta^2 := g(1) = \text{var}(X_1)$ , on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}_0[X_t] = vt \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_0[(X_t - vt)^2] = \beta^2 t.$$

Si  $\beta = 0$ , alors clairement  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $X_t = vt$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et cela prouve (i). On suppose désormais que  $\beta > 0$  et on pose pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y_t = X_0 + \beta^{-1}(X_t - X_0 - vt)$ . On vérifie immédiatement que  $Y$  est un processus de Lévy continu défini sur le même espace que  $X$  et relativement à la même filtration ; on a  $\mathbf{E}_0[Y_t] = 0$  et  $\mathbf{E}_0[Y_t^2] = t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Donc  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $Y$  n'est pas constant et il n'a aucun point absorbant.

Pour tout réel  $h > 0$ , on pose  $\tau_h := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |Y_t - Y_0| \geq h\}$ , avec la convention que  $\inf \emptyset = \infty$ . Il s'agit clairement un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Le lemme III.3.4, page 115, implique l'existence de  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, h_0[$ , on a  $\mathbf{E}_0[\tau_h] < \infty$ . On fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $Y - Y_0$  sous  $\mathbf{P}_x$  a même loi que  $Y$  sous  $\mathbf{P}_0$ , on a également  $\mathbf{E}_x[\tau_h] = \mathbf{E}_0[\tau_h]$ . On vérifie également que sous  $\mathbf{P}_x$ ,  $Y$  est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale continue ; il en est donc de même pour  $(Y_{t \wedge \tau_h})_{t \in \mathbb{R}_+}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\mathbf{E}_x[Y_{t \wedge \tau_h}] = x$ . Or la continuité de  $Y$  implique que  $\mathbf{P}_x$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y_{t \wedge \tau_h} \in [x-h, x+h]$  et comme  $\mathbf{P}_x$ -p.s.  $\tau_h < \infty$ , on a  $Y_{\tau_h} \in \{x-h, x+h\}$ . Par convergence dominée on a donc

$$x = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x[Y_{t \wedge \tau_h}] = \mathbf{E}_x[Y_{\tau_h}] = x - h \mathbf{P}_x(Y_{\tau_h} = x-h) + h \mathbf{P}_x(Y_{\tau_h} = x+h).$$

On a donc montré

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in ]0, h_0[, \quad \mathbf{P}_x(Y_{\tau_h} = x-h) = \mathbf{P}_x(Y_{\tau_h} = x+h) = \frac{1}{2}. \quad (\text{V.4})$$

On remarque ensuite facilement que sous  $\mathbf{P}_x$ ,  $(Y_t^2 - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est également une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale continue : il en est donc de même pour  $(Y_{t \wedge \tau_h}^2 - t \wedge \tau_h)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Donc  $x^2 = \mathbf{E}_x[Y_{t \wedge \tau_h}^2 - t \wedge \tau_h]$  et donc  $\mathbf{E}_x[Y_{t \wedge \tau_h}^2] = x^2 + \mathbf{E}_x[t \wedge \tau_h]$ . Or  $\mathbf{P}_x$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y_{t \wedge \tau_h}^2 \leq (|x| + h)^2$ . Par convergence dominée on a donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x[Y_{t \wedge \tau_h}^2] = \mathbf{E}_x[Y_{\tau_h}^2]$  et par convergence monotone on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x[t \wedge \tau_h] = \mathbf{E}_x[\tau_h]$ . On en déduit donc par (V.4)

$$x^2 + \mathbf{E}_x[\tau_h] = \mathbf{E}_x[Y_{\tau_h}^2] = \frac{1}{2}(x-h)^2 + \frac{1}{2}(x+h)^2 = x^2 + h^2.$$

On a donc montré

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in ]0, h_0[, \quad \mathbf{E}_x[\tau_h] = h^2. \quad (\text{V.5})$$

On note  $L$  l'opérateur caractéristique de  $Y$  comme à la définition III.3.5, page 115 et on note  $D_L \subset C_0(\mathbb{R})$  son domaine : puisqu'il n'y a pas de point absorbant, on a

$$(f \in D_L \text{ et } Lf = g) \iff \left( \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\mathbf{E}_x[f(X_{\tau_h})] - f(x)}{\mathbf{E}_x[\tau_h]} \right).$$

On rappelle le théorème III.2.15, page 113, qui montre que le générateur  $G$  du mouvement Brownien sur  $\mathbb{R}$  est de domaine

$$D := \{f \in C_0(\mathbb{R}) : f'' \in C_0(\mathbb{R}^d)\} \quad \forall f \in D, \quad Gf = \frac{1}{2}f''. \quad (\text{V.4})$$

On fixe ensuite  $f \in D$ . Par (V.4) et (V.5), on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $h \in ]0, h_0[$ ,

$$\frac{\mathbf{E}_x[f(X_{\tau_h})] - f(x)}{\mathbf{E}_x[\tau_h]} = \frac{1}{2}h^{-2}(f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)).$$

La formule de Taylor en  $x$  implique que  $\lim_{h \rightarrow 0+} (\mathbf{E}_x[f(X_{\tau_h})] - f(x)) / \mathbf{E}_x[\tau_h] = \frac{1}{2}f''(x)$ . Cela montre que

$$D \subset D_L \quad \text{et} \quad \forall f \in D, \quad Lf = Gf.$$

Comme  $(D_L, L)$  satisfait clairement le principe du maximum, le lemme III.2.4, page 106 implique que  $D = D_L$  et  $G = L$ . Comme un semi-groupe de Feller-Dynkin est caractérisés par son générateur (théorème de Hille-Yosida III.1.22, page 100)  $Y$  a le même semi-groupe qu'un mouvement Brownien sur  $\mathbb{R}$ , ce qui permet de conclure. ■

Le théorème précédent se généralise aux processus de Lévy continus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Pour cela, rappelons quelques faits d'algèbre linéaire : soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq d}$  une matrice de taille  $r \times d$ . On note  $M^*$  sa transposée qui est la matrice de taille  $d \times r$  dont les coefficients sont  $m_{i,j}^* = m_{j,i}$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Si on note de la même manière le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathbb{R}^d$ , alors  $\langle \mathbf{u}, M\mathbf{v} \rangle = \langle M^*\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r$ . On note  $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ , la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ . Si  $a_1 = \dots = a_r = 1$  et  $a_{r+1} = \dots = a_d = 0$ , alors on pose  $I_r = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ , si bien que  $I_d$  est l'identité sur  $\mathbb{R}^d$ . On utilise le lemme suivant.

**Lemme V.2.3** Soit  $\Gamma$ , une matrice symétrique positive de taille  $d$ . On note  $r$  le rang de  $\Gamma$ . Alors il existe  $M$  de taille  $d \times r$  et  $N$  de taille  $r \times d$  telles que

$$MM^* = \Gamma, \quad N\Gamma N^* = \text{Id}_{\mathbb{R}^r} \quad \text{et} \quad MN\Gamma = \Gamma$$

**Preuve :** ses valeurs propres sont des réels positifs et on note  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$  les  $r$  valeurs propres non-nulles, comptée avec leur multiplicité et dans l'ordre décroissant. On définit deux matrices  $d \times d$ , en posant  $\Delta_0 := \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_r^{1/2}, 0, \dots, 0)$  et  $\Delta_1 := \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_r^{-1/2}, 0, \dots, 0)$ , si bien que  $\Delta_0\Delta_1 = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) =: I_r$ . Comme  $\Gamma$  est symétrique, elle est diagonalisable dans le groupe orthogonal et il existe une matrice orthogonale  $O$  telle que  $O^*\Gamma O = \Delta_0^2$ . On pose ensuite  $M_0 = O\Delta_0$  et  $M_1 := \Delta_1 O^*$ , qui satisfont  $M_0 M_0^* = \Gamma$  et  $M_1 \Gamma M_1^* = I_r$ .

On note ensuite  $R$  l'application qui à  $(x_1, \dots, x_d)$  associe  $(x_1, \dots, x_r)$ . C'est une matrice  $r \times d$  et  $R^*$  associe à  $(x_1, \dots, x_r)$  le vecteur  $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ . On pose  $M = M_0 R^*$  et  $N = R M_1$ . Alors  $MM^* =$

$M_0RR^*M_0 = O\Delta_0RR^*\Delta_0O^*$ . Or  $\Delta_0RR^*\Delta_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = \Delta_0^2$ . Cela implique donc que  $MM^* = \Gamma$ . On vérifie également :  $N\Gamma N^* = RM_1\Gamma M_1^*R^* = RI_rR^* = \text{Id}_{\mathbb{R}^r}$ . De plus,

$$MNT = M_0R^*RM_1\Gamma = M_0I_rM_1\Gamma = O\Delta_0I_r\Delta_1O^*\Gamma = OI_rO^*\Gamma = OI_r\Delta_0^2O^* = O\Delta_0^2O^* = \Gamma ,$$

ce qui termine la preuve. ■

Soit  $Y := (Y_1, \dots, Y_d)$ , un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\mathbf{E}[\|Y\|^2] < \infty$ . Sa matrice de covariance  $\Gamma = (\text{cov}(Y_i, Y_j))_{1 \leq i, j \leq d}$ . Alors, on rappelle que

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \text{cov}(\langle \mathbf{u}, Y \rangle) = \langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle . \quad (\text{V.6})$$

et  $\Gamma$  est une matrice positive symétrique.

**Théorème V.2.4 (Caractérisation des proc. de Lévy continus)** *On se place en dimension  $d \geq 2$ . On suppose que le processus de Lévy  $X$  est continu. On note  $X_1 = (X_1^{(1)}, \dots, X_1^{(d)})$  les composantes du vecteur  $X_1$ . Alors,  $\mathbf{E}_0[\|X_1\|^2] < \infty$ , on pose*

$$\mathbf{v} := \mathbf{E}_0[X_1] = (\mathbf{E}_0[X_1^{(1)}], \dots, \mathbf{E}_0[X_1^{(d)}]) \quad \text{et} \quad \Gamma := (\text{cov}(X_1^{(i)}, X_1^{(j)}))_{1 \leq i, j \leq d}$$

la matrice de covariance étant sous  $\mathbf{P}_0$ . Les assertions suivantes sont vérifiées.

- (i) Si  $\Gamma = 0$ , alors pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t = t\mathbf{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .
- (ii) Supposons que  $\Gamma \neq 0$  et notons  $r$  le rang de  $\Gamma$ , si bien que  $1 \leq r \leq d$ . En application du lemme V.2.3, il existe deux matrices réelles  $M$  et  $N$  de tailles respectives  $r \times d$  et  $d \times r$  telles que pour toute  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\mathbf{P}_\mu\text{-p.s. } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t = X_0 + MB_t + t\mathbf{v} \quad (\text{V.7})$$

où  $B_t := N(X_t - X_0 - t\mathbf{v})$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , est sous  $\mathbf{P}_\mu$  un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ , issu de 0 et indépendant de  $X_0$ .

Dans les deux cas, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{E}_\mu[\exp(it\langle \mathbf{u}, X_t - X_0 \rangle)] = \exp(i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2}t\langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle) . \quad (\text{V.8})$$

**Preuve :** le théorème V.2.1 implique que  $\mathbf{E}_0[\|X_t\|^2] < \infty$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , ce qui permet de définir  $\mathbf{v}$  et  $\Gamma$  et (V.6) implique :

$$\mathbf{E}_0[\langle \mathbf{u}, X_1 \rangle] = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_0[\langle \mathbf{u}, X_1 - \mathbf{v} \rangle^2] = \langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle . \quad (\text{V.9})$$

Or pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ,  $(\langle \mathbf{u}, X_t \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus de Lévy continu à valeurs réelles. Si  $\Gamma = 0$ , la variance de  $\langle \mathbf{u}, X_1 \rangle$  est nulle et le théorème V.2.2 implique que pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\langle \mathbf{u}, X_t - X_0 - t\mathbf{v} \rangle = 0$ . Donc  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{Q}_+$  et tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{Q}^d$ ,  $\langle \mathbf{u}, X_t - X_0 - t\mathbf{v} \rangle = 0$ , ce qui implique (i) par continuité.

On suppose ensuite que  $\Gamma$  n'est pas nulle et on note  $r$  son rang. On note  $M$  et  $N$  comme dans le lemme V.2.3. On pose  $B_t := N(X_t - X_0 - t\mathbf{v})$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , qui est un processus continu à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ . Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ , on observe que sous  $\mathbf{P}_0$ ,  $(\langle \mathbf{u}, B_t \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est processus de Lévy continu issu de 0 et par (V.6) et (V.9), on a  $\mathbf{E}_0[\langle \mathbf{u}, B_1 \rangle] = 0$  et

$$\mathbf{E}_0[\langle \mathbf{u}, B_1 \rangle^2] = \mathbf{E}_0[\langle \mathbf{u}, N(X_1 - \mathbf{v}) \rangle^2] = \mathbf{E}_0[\langle N^* \mathbf{u}, X_1 - \mathbf{v} \rangle^2] = \text{cov}(\langle N^* \mathbf{u}, X_1 \rangle)$$

$$= \langle N^* \mathbf{u}, \Gamma N^* \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, N \Gamma N^* \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + \dots + u_r^2,$$

On déduit du théorème V.2.2 que  $(\|\mathbf{u}\|^{-1} \langle \mathbf{u}, B_t \rangle)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est égal à un mouvement Brownien issu de 0 (cas où  $\beta = \|\mathbf{u}\|$  et  $v = 0$ ). Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ , on a  $\mathbf{E}_0[\exp(i \langle \mathbf{u}, B_t \rangle)] = \exp(-\frac{1}{2} t \|\mathbf{u}\|^2)$ , ce qui implique facilement que  $B$  est un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et issu de 0.

On pose ensuite  $Z_t = MB_t - (X_t - X_0 - t\mathbf{v})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . On constate que  $Z$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy qui est continu. En fait on a  $\mathbf{E}[Z_t] = 0$  et  $Z_t = (MN - I_d)(X_t - X_0 - t\mathbf{v})$  et  $Z_1$  est de matrice de covariance

$$(MN - I_d)\Gamma(MN - Id)^* = MN\Gamma N^* M^* - MN\Gamma - \Gamma N^* M^* + \Gamma = 0$$

par le lemme V.2.3 : car  $MN\Gamma = \Gamma$  implique, par transposition, que  $\Gamma N^* M^* = \Gamma$  et donc  $MN\Gamma N^* M^* = \Gamma$ . Donc  $Z$  est un processus de covariance nulle et de moyenne nulle : par le (i), il est  $\mathbf{P}_\mu$ -p.s. nul pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , ce qui implique (ii).

On a donc pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mu \left[ e^{i \langle \mathbf{u}, X_t - X_0 \rangle} \right] &= e^{it \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{E} \left[ e^{i \langle \mathbf{u}, MB_t \rangle} \right] = e^{it \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{E} \left[ e^{i \langle M^* \mathbf{u}, B_t \rangle} \right] \\ &= e^{i \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2} t \|M^* \mathbf{u}\|^2} = e^{i \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2} t \langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle} \end{aligned}$$

par le lemme V.2.3, ce qui implique (V.8). ■

## V.2.b Décomposition des processus de Lévy, formule de Lévy Khintchine.

Dans cette section, on fixe

$$(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}; \mathbf{P}_\mu, \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)),$$

un processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On introduit les notations suivantes.

- On note  $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ , le saut éventuel de  $X$  en  $t \in \mathbb{R}_+$ .
- On note  $\ell$  la mesure de Lebesgues sur les Boréliens de  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose  $U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne associée au produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- Soit  $T$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ . On suppose que  $\mathbf{P}_\mu(T < \infty) = 1$ . On pose  $X_t^T := X_{T+t} - X_T$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . On rappelle la proposition V.1.6, page 182, qui affirme que sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,  $X^T$  est un processus indépendant de  $\mathcal{G}_T$  et de même loi que  $X$  sous  $\mathbf{P}_0$ .

Le but de cette section est de montrer qu'un processus de Lévy se décompose en la somme de deux processus de Lévy indépendants : l'un continu, l'autre ne progressant que par les sauts du processus. Nous caractérisons également l'exposant caractéristique des processus de Lévy en montrant au passage la formule de Lévy-Khintchine donnant une description des exposants caractéristiques des lois infiniment divisibles. La preuve se décompose en plusieurs lemmes.

### Les sauts d'un processus de Lévy, sa mesure de Lévy.

**Lemme V.2.5 .** *On reprend les notations ci-dessus. Alors, il existe une mesure positive  $\pi$  sur les Boréliens de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  telle que  $\pi(U_\varepsilon) < \infty$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , et telle que pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , sous  $\mathbf{P}_\mu$ , le nuage de points sur  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  défini par*

$$\Pi := \{(t, \Delta X_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : \Delta X_t \neq 0\}$$

est un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \pi$ . Plus précisément,  $(\Delta X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sous  $\mathbf{P}_\mu$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus ponctuel d'intensité  $\pi$ , appelée **mesure de Lévy de  $X$** .

**Preuve :** clairement, il suffit de montrer ce résultat sous  $\mathbf{P}_0$ . Pour éviter les trivialités on suppose que  $X$  n'est pas  $\mathbf{P}_0$ -p.s. continu. Il existe donc  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\mathbf{P}_0(\exists t \in \mathbb{R}_+ : \|\Delta X_t\| > \varepsilon_0) > 0$ . On fixe ensuite  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  et pour toute trajectoire  $w = (w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  càdlàg à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , on pose  $T_1(w) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \|\Delta w_t\| > \varepsilon\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . Par continuité à droite  $T_1(w) > 0$ . Pour simplifier les notations, on pose  $T_1 := T_1(X)$ , qui est clairement un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt. Comme  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , on a également  $\mathbf{P}_0(T_1 < \infty) > 0$ .

On rappelle que  $X^t := X_{t+} - X_t$  et on remarque que si  $T_1 > t$ , alors  $T_1 = t + T_1(X^t)$  et  $\Delta X_{T_1} = \Delta X_{T_1(X^t)}^t$ . Or sous  $\mathbf{P}_0$ , le processus  $X^t$  est indépendant de  $\mathcal{G}_t$  (et donc de  $X_{\cdot \wedge t}$ ) et a même loi que  $X$ . Donc pour toute fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  et tout  $s \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\{T_1 > t+s\}} f(\Delta X_{T_1})] = \mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}} \mathbf{1}_{\{T_1(X^t) > s\}} f(\Delta X_{T_1(X^t)}^t)] = \mathbf{P}_0(T_1 > t) \mathbf{E}_0[\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}} f(\Delta X_{T_1})]. \quad (\text{V.10})$$

En prenant  $f$  constante à 1 dans cette égalité, on obtient  $\mathbf{P}_0(T_1 > t+s) = \mathbf{P}_0(T_1 > t) \mathbf{P}_0(T_1 > s)$ . Puisque  $\mathbf{P}_0(0 < T_1 < \infty) > 0$ , il existe  $a_\varepsilon \in ]0, \infty[$  tel que  $\mathbf{P}_0(T_1 > t) = e^{-a_\varepsilon t}$  :  $T_1$  sous  $\mathbf{P}_0$  suit une loi exponentielle non-dégénérée de paramètre  $a_\varepsilon$ . Par conséquent  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $0 < T_1 < \infty$ . On remarque également qu'en prenant  $s=0$  dans (V.10), on en déduit que  $T_1$  est indépendant de  $\Delta X_{T_1}$  sous  $\mathbf{P}_0$ .

On introduit ensuite les temps successifs  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sauts de norme plus grande que  $\varepsilon$  : pour toute trajectoire  $w = (w_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , càdlàg et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , on pose

$$T_0(w) := 0 \quad \text{et} \quad T_{n+1}(w) := \inf\{t > T_n(w) : \|\Delta w_t\| > \varepsilon\}, \quad (\text{V.11})$$

avec la convention  $\inf \emptyset = \infty$ . On vérifie que si  $T_n(w) < \infty$ , on a  $T_{n+1}(w) = T_n(w) + T_1(w_{\cdot+T_n(w)} - w_{T_n(w)})$ . Pour simplifier les notations, on pose  $T_n := T_n(X)$ . Le résultat concernant  $T_1$  et la définition récursive des  $T_n$  implique immédiatement que les  $T_n$  forment une suite strictement croissante de  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -temps d'arrêt  $\mathbf{P}_0$ -p.s. finis. Or  $(T_{n+1} - T_1, \Delta_{T_{n+1}})_{n \geq 1} = (T_n(X^{T_1}), \Delta X_{T_n(X^{T_1})}^{T_1})_{n \geq 1}$ , donc la proposition V.1.6, page 182 appliquée en  $T_1$  sous  $\mathbf{P}_0$ , implique que sous  $\mathbf{P}_0$ ,

$$(T_1, \Delta X_{T_1}) \text{ indépendant de } (T_{n+1} - T_1, \Delta_{T_{n+1}})_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad (T_{n+1} - T_1, \Delta_{T_{n+1}})_{n \geq 1} \stackrel{\text{loi}}{=} (T_n, \Delta X_{T_n})_{n \geq 1} \text{ sous } \mathbf{P}_0.$$

Cela implique d'une part que les v.a.  $T_n - T_{n-1}, \Delta X_{T_n}, n \geq 1$  sont indépendantes, d'autre part que les v.a.  $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $a_\varepsilon$  et enfin que les v.a.  $(\Delta X_{T_n})_{n \geq 1}$  sont i.i.d. de loi commune notée  $\mu_\varepsilon$ . La proposition IV.5.1, page 155, implique donc que

$$\Pi_\varepsilon := \{(T_n, \Delta X_{T_n}) ; n \geq 1\} = \{(t, \Delta X_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : \|\Delta X_t\| > \varepsilon\} \text{ est un nuage de Poisson d'intensité } \ell \otimes a_\varepsilon \mu_\varepsilon.$$

Soit  $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , une suite décroissant strictement vers 0. Il est clair que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $\Pi_{\varepsilon_p} \subset \Pi_{\varepsilon_{p+1}}$ . Le théorème IV.3.7 (i) de superposition croissante, page 142, implique que  $\{(t, \Delta X_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : \Delta X_t \neq 0\} = \Pi = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Pi_{\varepsilon_p}$  est un nuage de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ , dont l'intensité est notée  $\nu$ . Pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ , on pose alors  $\pi(A) := \nu([0, 1] \times A)$ , qui est une mesure positive. Soit  $\varepsilon > 0$ ; on rappelle la notation  $U_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}$  et on observe que  $\Pi_\varepsilon = \Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon)$ . Cela implique que  $\nu(\cdot \cap (\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon)) = \ell \otimes a_\varepsilon \mu_\varepsilon$  et donc  $\pi(\cdot \cap U_\varepsilon) = a_\varepsilon \mu_\varepsilon$ . Donc  $\pi(U_\varepsilon) = a_\varepsilon < \infty$ . Cela montre que  $\pi$  est une mesure sigma-finie. On en déduit aussi que  $\nu(\cdot \cap (\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon)) = \ell \otimes \pi(\cdot \cap U_\varepsilon) = (\ell \otimes \pi)(\cdot \cap (\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon))$ , ce qui implique immédiatement que  $\nu = \ell \otimes \pi$ . Donc  $\Pi$  est un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \pi$ .

Soit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ . Pour tout  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , il est clair que  $N_{[0,t] \times A}(\Pi)$  est  $\mathcal{G}_t$ -mesurable et que  $N_{[t,t+s] \times A}(\Pi)$  ne dépend que de  $X^t$  : c'est la somme des sauts de  $X^t$  avant l'instant  $s$  qui sont dans  $A$ . Comme sous  $\mathbf{P}_0$ ,  $X^t$

est indépendant de  $\mathcal{G}_t$  et de même loi que  $X$ , on en déduit que  $N_{[t,t+s]\times A}(\Pi)$  est indépendant de  $\mathcal{G}_t$  et a même loi que  $N_{[0,s]\times A}(\Pi)$ . Cela montre que  $(\Delta X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est, sous  $\mathbf{P}_0$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus ponctuel d'intensité  $\pi$ , selon la définition IV.6.3, page 171. Cela termine la preuve du lemme. ■

On montre ensuite le résultat d'indépendance suivant.

**Lemme V.2.6** *On reprend les notations ci-dessus. On rappelle que  $\Pi = \{(t, \Delta X_t) ; t \in \mathbb{R}_+, \Delta X_t \neq 0\}$  est un nuage de Poisson d'intensité  $\ell \otimes \pi$ , où  $\pi$ , la mesure de Lévy de  $X$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose*

$$\Pi_\varepsilon := \{(t, \Delta X_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : \|\Delta X_t\| > \varepsilon\} = \Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon).$$

Comme  $\pi(U_\varepsilon) < \infty$ , cela permet de définir

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t^{(\varepsilon)} := X_t - \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\|\Delta X_s\| > \varepsilon\}}. \quad (\text{V.12})$$

Alors, pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ , sous  $\mathbf{P}_\mu$ ,

- (i)  $\Pi_\varepsilon$  et  $(X_t^{(\varepsilon)})_{t \in \mathbb{R}_+}$  sont indépendants,
- (ii)  $(X_t^{(\varepsilon)})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy.

**Preuve :** clairement, il suffit de montrer le lemme sous  $\mathbf{P}_0$ . On fixe  $\varepsilon > 0$ . Le fait que  $\pi(U_\varepsilon)$  soit une quantité finie implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(1, \|\mathbf{x}\| \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}}) \pi(d\mathbf{x}) \leq \pi(U_\varepsilon) < \infty.$$

La proposition IV.4.9, page 153 implique que  $\mathbf{P}_0$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sum_{s \in [0, t]} \|\Delta X_s\| \mathbf{1}_{\{\|\Delta X_s\| > \varepsilon\}} < \infty$ , ce qui montre que  $X_t^{(\varepsilon)}$  est bien défini par (V.12). Il est clair que  $X^{(\varepsilon)}$  est càdlàg. Soient  $t, s \in \mathbb{R}_+$ . On vérifie que  $X_t^{(\varepsilon)}$  ne dépend que  $X_{\wedge t}$  : il est donc  $\mathcal{G}_t$ -mesurable. De plus  $X_{t+s}^{(\varepsilon)} - X_t^{(\varepsilon)}$  ne dépend que de  $X^t$ , processus indépendant de  $\mathcal{G}_t$  : on en déduit que  $X_{t+s}^{(\varepsilon)} - X_t^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $\mathcal{G}_t$ . Cela montre que  $(X_t^{(\varepsilon)})_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  processus de Lévy.

Le point technique de la preuve est l'indépendance de  $X^{(\varepsilon)}$  de  $\Pi_\varepsilon$  : on rappelle de (V.11) la définition de  $T_n(w)$ ,  $n$ -ième temps de sauts de norme supérieure à  $\varepsilon$ . Pour simplifier, on note  $T_n(X)$  simplement par  $T_n$ . On prouve d'abord que sous  $\mathbf{P}_0$  et conditionnellement à  $T_1$ ,  $X_{\wedge T_1}^\varepsilon$  est indépendant de  $\Delta X_{T_1}$ . On fixe  $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}_+$  et  $F : (\mathbb{R}^d)^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction continue bornée. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad H_t := \mathbf{1}_{[t, \infty[}(T_1) F(X_{(t_1 \wedge t)_-}, \dots, X_{(t_p \wedge t)_-}).$$

On vérifie que  $(H_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -adapté et càg sur  $]0, \infty[$ . La proposition IV.6.5, page 172, implique que  $H$  est  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -prévisible. Soit  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction mesurable bornée telle que  $f(\cdot, 0) = 0$ . On observe que  $H_{T_1} f(T_1, \Delta X_{T_1}) = \sum_{t \in \mathbb{R}_+} H_t f(t, \Delta X_t) \mathbf{1}_{\{\|\Delta X_t\| > \varepsilon\}}$ , tous les termes de cette somme étant nuls sauf un, qui correspond au temps  $t = T_1$ . Par la formule de compensation (lemme IV.6.6, page 173) appliquée au  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus ponctuel de Poisson  $(\Delta X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  d'intensité  $\pi$ , on obtient

$$\mathbf{E}_0[H_{T_1} f(T_1, \Delta X_{T_1})] = \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \mathbf{E}_0[H_t].$$

On observe que  $H_{T_1} = F(X_{(t_1 \wedge T_1)_-}, \dots, X_{(t_p \wedge T_1)_-}) = F(X_{(t_1 \wedge T_1)_-}^{(\varepsilon)}, \dots, X_{(t_p \wedge T_1)_-}^{(\varepsilon)})$ , car strictement avant  $T_1$ ,  $X$  et  $X^{(\varepsilon)}$  coïncident. Comme  $X$  n'a pas de discontinuité à un temps fixé,  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $X$  est continu en  $t_1, \dots, t_p$

et il en est donc de même pour  $X^{(\varepsilon)}$ . De plus  $X^{(\varepsilon)}$  est par définition continu au temps  $T_1$ . On en déduit donc que  $\mathbf{P}_0$ -p.s.  $H_{T_1} = F(X_{t_1 \wedge T_1}^{(\varepsilon)}, \dots, X_{t_p \wedge T_1}^{(\varepsilon)})$  et  $H_t = \mathbf{1}_{[t, \infty[}(T_1)F(X_{t_1 \wedge t}^{(\varepsilon)}, \dots, X_{t_p \wedge t}^{(\varepsilon)})$ . On a donc montré

$$\mathbf{E}[F(X_{t_1 \wedge T_1}^{(\varepsilon)}, \dots, X_{t_p \wedge T_1}^{(\varepsilon)})f(T_1, \Delta X_{T_1})] = \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \mathbf{E}_0[F(X_{t_1 \wedge t}^{(\varepsilon)}, \dots, X_{t_p \wedge t}^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t\}}].$$

Par classe monotone, pour toute fonction  $G := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui est  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{R}_+}$ -mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}[G(X_{\cdot \wedge T_1}^{(\varepsilon)})f(T_1, \Delta X_{T_1})] = \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t}^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t\}}]. \quad (\text{V.13})$$

Montrons que cela implique l'indépendance de  $X^{(\varepsilon)}$  et de  $(T_1, \Delta X_{T_1})$  : posons  $Y_t := X_{T_1+t}^{(\varepsilon)} - X_{T_1}^{(\varepsilon)}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ;  $Y$  est une fonction mesurable de  $X^{T_1}$ ; par conséquent,  $Y$  a même loi que  $X^{(\varepsilon)}$  et est indépendant de  $\mathcal{G}_{T_1}$  et donc de  $X_{\cdot \wedge T_1}^{(\varepsilon)}$  et de  $(T_1, \Delta X_{T_1})$ . On observe ensuite que  $X_s^{(\varepsilon)} = X_{s \wedge T_1}^{(\varepsilon)} + Y_{(s-T_1)_+}$ . Ceci combiné avec (V.13) implique facilement que

$$\mathbf{E}[G(X^{(\varepsilon)})f(T_1, \Delta X_{T_1})] = \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t\}}]. \quad (\text{V.14})$$

Pour simplifier les notations, on pose  $a := \pi(U_\varepsilon)$ . On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$ . Par (V.14), on a  $\mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t\}}] = a \int_t^\infty dt_1 \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t_1\}}]$ . En itérant  $n$  fois ce calcul on obtient la première égalité qui suit, les autres se déduisant d'un calcul intégral élémentaire.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G(X^{(\varepsilon)})f(T_1, \Delta X_{T_1})] &= a^n \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \int \dots \int_{\{t_n > \dots > t_1 > t\}} dt_n \dots dt_1 \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t_n\}}] \\ &= a^n \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \int \dots \int_{\{s_n > \dots > s_1 > 0\}} ds_n \dots ds_1 \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > s_n + t\}}] \\ &= a^n \int_0^\infty dt \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \int_0^\infty ds \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > s + t\}}] \\ &= \int_0^\infty dt e^{-at} \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \int_0^\infty ds \frac{a^n s^{n-1} e^{-as}}{(n-1)!} \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) | T_1 > s + t] \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

car  $T_1$  suit une loi exponentielle de paramètre  $a$ . On fixe ensuite  $t_0 > 0$ . Si  $T_1 > t_0$ , alors  $T_1 - t_0 = T_1(X^{t_0})$ . La propriété de Markov au temps  $t_0$  implique que si  $s > t_0$ ,

$$\mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > s + t\}}] = \mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) \mathbf{1}_{\{T_1 > t_0\}}] \mathbf{P}_0(T_1 > s + t - t_0) = \mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) | T_1 > t_0] e^{-a(s+t)},$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) | T_1 > s + t] = \mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) | T_1 > t_0]$ . Comme  $s \mapsto a^n s^{n-1} e^{-as} / (n-1)!$  est la densité d'une loi d'Erlang de paramètres  $(n, a)$  qui est la loi de la somme de  $n$  v.a. exponentielles indépendantes de paramètre  $a$ , on a

$$\left| \mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) | T_1 > t_0] - \int_0^\infty ds \frac{a^n s^{n-1} e^{-as}}{(n-1)!} \mathbf{E}_0[G(X^{(\varepsilon)}) | T_1 > s + t] \right| \leq 2 \|G\|_\infty \int_0^{t_0} ds \frac{a^n s^{n-1} e^{-as}}{(n-1)!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini dans (V.15), ceci implique que

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)})f(T_1, \Delta X_{T_1})] = \mathbf{E}_0[G(X_{\cdot \wedge t_0}^{(\varepsilon)}) | T_1 > t_0] \int_0^\infty dt e^{-at} \int_{U_\varepsilon} \pi(d\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}). \quad (\text{V.16})$$

Cela implique que  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $(T_1, \Delta X_{T_1})$ .

On montre ensuite par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $(T_k, \Delta X_{T_k})_{1 \leq k \leq n}$ . On a montré cette propriété d'indépendance au rang  $n = 1$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . On pose  $Y_t = X_{t+T_n}^{(\varepsilon)} - X_{T_n}^{(\varepsilon)}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On remarque que  $(Y, T_{n+1} - T_n, \Delta X_{T_{n+1}})$  est une certaine fonction de  $X^{T_n}$  et que la même fonction appliquée à  $X$  donne  $(X^{(\varepsilon)}, T_1, \Delta X_{T_1})$ . On en déduit d'une part que  $(Y, T_{n+1} - T_n, \Delta X_{T_{n+1}})$  a même loi que  $(X^{(\varepsilon)}, T_1, \Delta X_{T_1})$ . Par conséquent

$$Y, T_{n+1} - T_n \text{ et } \Delta X_{T_{n+1}} \text{ sont trois variables indépendantes.} \quad (\text{V.17})$$

Comme  $X^{T_n}$  est indépendant de  $\mathcal{G}_{T_n}$  on en déduit que

$$(Y, T_{n+1} - T_n, \Delta X_{T_{n+1}}) \text{ est indépendant de } X_{\cdot \wedge T_n}^{(\varepsilon)} \text{ et des } (T_k, \Delta X_{T_k})_{1 \leq k \leq n}. \quad (\text{V.18})$$

Comme  $X_t^{(\varepsilon)} = X_{t \wedge T_n}^{(\varepsilon)} + Y_{(t-T_n)_+}$ , (V.17) et (V.18) impliquent que  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $(T_{n+1} - T_n, \Delta X_{T_{n+1}})$ . Comme par hypothèse de récurrence,  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $(T_k, \Delta X_{T_k})_{1 \leq k \leq n}$ , on en déduit que  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $(T_{n+1}, \Delta X_{T_{n+1}})$  et cela entraîne la propriété au rang  $n + 1$ .

On a donc montré que  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $(T_n, \Delta X_{T_n})_{n \geq 1}$ , c'est-à-dire que  $X^{(\varepsilon)}$  est indépendant de  $\Pi_\varepsilon = \{(T_n, \Delta X_{T_n}) ; n \geq 1\}$ . Cela termine la preuve du lemme. ■

Les deux lemmes précédents combinés avec le théorème V.2.1 sur les processus de Lévy dont les sauts sont uniformément bornés (page 184), sont utilisés pour prouver le lemme suivant.

**Lemme V.2.7** *On reprend les notations ci-dessus. Alors, la mesure de Lévy  $\pi$  de  $X$  satisfait*

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(1, \|\mathbf{x}\|^2) \pi(d\mathbf{x}) < \infty.$$

**Preuve :** on rappelle la notation  $U_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}$ . On sait que  $\pi(U_1) < \infty$ , il reste donc à montrer que  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_1} \|\mathbf{x}\|^2 \pi(d\mathbf{x}) < \infty$ . Dans la suite de la preuve, on raisonne sous  $\mathbf{P}_0$ . Soit  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t^{(\varepsilon)} := X_t - \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\|\Delta X_s\| > \varepsilon\}} \quad \text{et} \quad Y_t^\varepsilon = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\varepsilon < \|\Delta X_s\| \leq 1\}}.$$

On a donc  $X_t^{(1)} := X_t^{(\varepsilon)} + Y_t^\varepsilon$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . On fixe  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . Par la formule de moment d'ordre 1 du théorème IV.4.10 (page 154), on a donc

$$\mathbf{E}_0[|\langle \mathbf{u}, Y_t^\varepsilon \rangle|] \leq \mathbf{E}_0 \left[ \sum_{s \in [0, t]} |\langle \mathbf{u}, \Delta X_s \rangle| \mathbf{1}_{\{\varepsilon < \|\Delta X_s\| \leq 1\}} \right] = t \int_{U_\varepsilon \setminus U_1} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle| \pi(d\mathbf{x}) < t \|\mathbf{u}\| \pi(U_\varepsilon) < \infty.$$

On observe également que  $\int_{U_\varepsilon \setminus U_1} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle|^2 \pi(d\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{u}\|^2 \pi(U_\varepsilon) < \infty$ . La formule de moment d'ordre 2 dans le théorème IV.4.10, page 154, montre que  $\langle \mathbf{u}, Y_t^\varepsilon \rangle$  admet un moment d'ordre 2 et on a

$$\text{var}(\langle \mathbf{u}, Y_t^{(\varepsilon)} \rangle) = t \int_{U_\varepsilon \setminus U_1} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle|^2 \pi(d\mathbf{x}). \quad (\text{V.19})$$

On remarque ensuite que  $X^{(\varepsilon)}$  sont  $X^{(1)}$  sont des processus de Lévy dont les sauts sont de taille uniformément bornée. Le théorème V.2.1, page V.2.1, implique que  $\langle \mathbf{u}, X^{(1)} \rangle$  et  $\langle \mathbf{u}, X^{(\varepsilon)} \rangle$  admettent des moments d'ordre 2

également. Le lemme V.2.6 implique enfin que  $Y^{(\varepsilon)}$ , qui est une fonction mesurable de  $\Pi_\varepsilon$ , est indépendant de  $X^{(\varepsilon)}$ . On a donc

$$\text{var}(\langle \mathbf{u}, X_t^{(1)} \rangle) = \text{var}(\langle \mathbf{u}, X_t^{(\varepsilon)} \rangle) + \text{var}(\langle \mathbf{u}, Y_t^{(\varepsilon)} \rangle).$$

Par (V.19) cela implique que

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \varepsilon \in ]0, 1], \quad t \int_{U_\varepsilon \setminus U_1} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle|^2 \pi(d\mathbf{x}) \leq \text{var}(\langle \mathbf{u}, X_t^{(1)} \rangle).$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_1} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle|^2 \pi(d\mathbf{x}) \leq \text{var}(\langle \mathbf{u}, X_1^{(1)} \rangle)$ . En sommant ces inégalités lorsque  $\mathbf{u}$  parcourt la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , on obtient  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_1} \|\mathbf{x}\|^2 \pi(d\mathbf{x}) < \infty$ , ce qui termine la preuve. ■

En général, la mesure de Lévy  $\pi$  ne satisfait pas de condition d'intégrabilité plus forte ; en particulier, il est possible que  $\int \|\mathbf{x}\| \pi(d\mathbf{x}) = \infty$ . Dans ce cas, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , p.s.  $\sum_{s \in [0, t]} \|\Delta X_s\| = \infty$ , par la proposition IV.4.9, page 153. Autrement dit, *les sauts de  $X$  ne sont pas sommables*. Néanmoins le lemme suivant permet de sommer les sauts pourvu qu'on les “compense” correctement.

**Lemme V.2.8 (Compensation des sauts)** Soit  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Poisson sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  d'intensité  $\pi$  qui satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(1, \|\mathbf{x}\|^2) \pi(d\mathbf{x}) < \infty.$$

Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \infty[$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose

$$R_t := \sum_{\substack{s \in [0, t]: \\ \|V_s\| > 1}} V_s, \quad \text{et} \quad J_t^{(\varepsilon)} := \sum_{\substack{s \in [0, t]: \\ \varepsilon < \|V_s\| \leq 1}} V_s - t \int_{\{\varepsilon < \|\mathbf{x}\| \leq 1\}} \mathbf{x} \pi(d\mathbf{x}).$$

Alors,  $R$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy et il existe un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy  $J$  qui est indépendant de  $R$ , ainsi qu'une suite de réels  $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$  décroissant strictement vers 0 tels que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \sup_{s \in [0, p]} |J_s - J_s^{(\varepsilon_p)}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0. \quad (\text{V.20})$$

Si on pose  $Y_t := R_t + J_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Alors  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy dont la mesure de Lévy est  $\pi$  et dont l'exposant caractéristique est donné pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$  par

$$\mathbf{E}[e^{i\langle \mathbf{u}, Y_t \rangle}] = \exp\left(t \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \pi(d\mathbf{x}) (e^{i\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle} - 1 - i\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{x}\| < 1\}})\right). \quad (\text{V.21})$$

**Preuve :** on pose  $\Pi := \{(t, V_t); t \in \mathbb{R}_+: V_t \neq \partial\}$ , qui est un nuage Poissonnier sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  d'intensité  $\ell \otimes \pi$ . Pour simplifier les notations, on pose également  $U_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon \in ]0, \infty[$ . On remarque que  $R$  dépend de la restriction de  $\Pi$  à  $\mathbb{R}_+ \times U_1$  et  $J^{(\varepsilon)}$  dépend de la restriction de  $\Pi$  à  $\mathbb{R}_+ \times (U_\varepsilon \setminus U_1)$ , qui est un ensemble disjoint de  $\mathbb{R}_+ \times U_1$ . Par le principe de restriction des nuages Poissonniers (théorème IV.3.6, page 142),  $R$  et  $J^{(\varepsilon)}$  sont indépendants. Il est facile de vérifier que  $R$  et  $J^{(\varepsilon)}$  sont des  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy.

Soit  $\varepsilon' \in ]0, \varepsilon[$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . On voit facilement que  $J^{(\varepsilon')} - J^{(\varepsilon)}$  est un processus de Lévy ; ses sauts ont leur norme majorée par  $\varepsilon$ . Par conséquent, ce processus de Lévy admet (au moins) un moment d'ordre deux (théorème V.2.1, page 184). On voit alors que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \langle \mathbf{u}, J_t^{(\varepsilon')} - J_t^{(\varepsilon)} \rangle = \sum_{s \in [0, t]} \langle \mathbf{u}, \Delta X_s \rangle \mathbf{1}_{\{\varepsilon' < \|\Delta X_s\| \leq \varepsilon\}} - t \int_{\{\varepsilon' < \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon\}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \pi(d\mathbf{x})$$

est une  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -martingale. Elle est de carré intégrable par la formule du carré pour les processus de Poisson pour la fonction  $(s, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \mathbf{1}_{U_\varepsilon}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$ , formule donnée à la proposition IV.4.10, page 154 : on a

$$\mathbf{E}[\langle \mathbf{u}, J_t^{(\varepsilon')} - J_t^{(\varepsilon)} \rangle^2] = \text{var}(\langle \mathbf{u}, J_t^{(\varepsilon')} - J_t^{(\varepsilon)} \rangle) = t \int_{\{\varepsilon' < \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon\}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle^2 \pi(d\mathbf{x}).$$

L'inégalité  $L^2$  de Doob pour les martingales càd implique que

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{s \in [0,t]} \langle \mathbf{u}, J_s^{(\varepsilon')} - J_s^{(\varepsilon)} \rangle^2 \right] \leq 4 \mathbf{E}[\langle \mathbf{u}, J_t^{(\varepsilon')} - J_t^{(\varepsilon)} \rangle^2] = 4t \int_{\{\varepsilon' < \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon\}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle^2 \pi(d\mathbf{x}).$$

On somme alors ces inégalités lorsque  $\mathbf{u}$  parcourt la base canonique : puisque le supremum d'une somme est inférieur à la somme des supremums, on en déduit

$$\mathbf{E} \left[ \left( \sup_{s \in [0,t]} \|J_s^{(\varepsilon')} - J_s^{(\varepsilon)}\| \right)^2 \right] \leq 4t \int_{\{\varepsilon' < \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon\}} \|\mathbf{x}\|^2 \pi(d\mathbf{x}). \quad (\text{V.22})$$

D'autre part, l'hypothèse d'intégralité de  $\pi$  implique l'existence d'une suite de réels  $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$  décroissant strictement vers 0 telle que  $\sum_{p \geq 1} 4p^3 \int_{\{\varepsilon_{p+1} < \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon_p\}} \|\mathbf{x}\|^2 \pi(d\mathbf{x}) < \infty$ . Par interversion série/intégrale positive, on en déduit que

$$\mathbf{E} \left[ \sum_{p \geq 1} p^2 \left( \sup_{s \in [0,p]} \|J_s^{(\varepsilon_{p+1})} - J_s^{(\varepsilon_p)}\| \right)^2 \right] = \sum_{p \geq 1} p^2 \mathbf{E} \left[ \left( \sup_{s \in [0,p]} \|J_s^{(\varepsilon_{p+1})} - J_s^{(\varepsilon_p)}\| \right)^2 \right] < \infty.$$

Par Cauchy-Schwarz on en déduit

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \sum_{p \geq 1} \sup_{s \in [0,p]} \|J_s^{(\varepsilon_{p+1})} - J_s^{(\varepsilon_p)}\| \leq \left( \sum_{p \geq 1} p^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{p \geq 1} p^2 \left( \sup_{s \in [0,p]} \|J_s^{(\varepsilon_{p+1})} - J_s^{(\varepsilon_p)}\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Cela implique l'existence d'un processus càdlàg  $J$  tel que  $\mathbf{P}\text{-p.s. } \lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0,p]} \|J_s - J_s^{(\varepsilon_p)}\| = 0$ . Il est facile de montrer que  $J$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de Lévy et qu'il est indépendant de  $R$ . (V.21) sont des conséquences immédiates de la formule exponentielle réelle pour les nuages Poissonniens établie au théorème IV.4.10, page 154. Cela termine la preuve du lemme. ■

**Construction des processus de Lévy.** On introduit les paramètres qui, nous le voyons plus loin, suffisent à décrire la loi des processus de Lévy.

**Définition V.2.9** Un *triplet de Lévy-Khintchine* en dimension  $d$  est la donnée de  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$  qui sont définis comme suit.

(a)  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ , est le coefficient de dérive.

(b)  $\Gamma$  est une matrice réelle symétrique positive de taille  $d$ .

(c)  $\pi$  est une mesure positive sur les Boréliens de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  telle que  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \|\mathbf{x}\|^2 \pi(d\mathbf{x}) < \infty$ . □

**Théorème V.2.10 (Construction)** Soit  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$ , un triplet de Lévy-Khintchine en dimension  $d$ . On note  $r := \text{rang}(\Gamma)$  et on note également  $M$  et  $N$ , les matrices obtenues par le lemme V.2.3. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité, muni d'une filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et sur lequel sont définis les processus suivants.

- $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ , issu de 0.
- $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , d'intensité  $\pi$ .

On suppose  $B$  et  $V$  indépendants. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \infty[$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose

$$R_t := \sum_{\substack{s \in [0,t]: \\ \|V_s\| > 1}} V_s, \quad J_t^{(\varepsilon)} := \sum_{\substack{s \in [0,t]: \\ \varepsilon < \|V_s\| \leq 1}} V_s - t \int_{\{\varepsilon < \|x\| \leq 1\}} x \pi(dx) \quad \text{et} \quad X_t^{(\varepsilon)} = MB_t + t\mathbf{v} + J_t^{(\varepsilon)} + R_t.$$

Alors il existe deux  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy  $X$  and  $J$  et une suite de réels  $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$  décroissant strictement vers 0 tels que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \sup_{s \in [0,p]} |X_s - X_s^{(\varepsilon_p)}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{s \in [0,p]} |J_s - J_s^{(\varepsilon_p)}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0. \quad (\text{V.23})$$

On a également les propriétés suivantes.

- (i)  $X_t = MB_t + t\mathbf{v} + J_t + R_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .
- (ii)  $\pi$  est la mesure de Lévy de  $X$ .
- (iii)  $B$ ,  $J$  et  $R$  sont indépendants.
- (iv) On rappelle que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{E}[\exp(i\langle \mathbf{u}, X_t \rangle)] = \exp(t\psi(\mathbf{u}))$ , où  $\psi$  est l'exposant caractéristique de  $X$ . Ce qui précède implique

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \psi(\mathbf{u}) = i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \pi(dx) (e^{i\langle \mathbf{u}, x \rangle} - 1 - i\langle \mathbf{u}, x \rangle \mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 1\}}). \quad (\text{V.24})$$

Par conséquent, la loi de  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est caractérisée par  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$ .

**Preuve :** l'existence de  $J$  et la seconde convergence de (V.23) sont une conséquence directe du lemme V.2.8. Ce lemme implique également que  $J$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy, indépendant de  $R$ ; par hypothèse il est également indépendant de  $B$ , ce qui montre (iii). Si on définit  $X$  comme au (i), alors  $X$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy et les sauts de  $X$  sont ceux de  $J$  et de  $R$ , ce qui implique (ii):  $\pi$  est la mesure de Lévy de  $X$ . Comme  $X - X^{(\varepsilon)} = J^{(\varepsilon)} - J$ , on en déduit la première limite de (V.23). Ensuite (V.24) résulte de (V.21) au lemme V.2.8, de l'indépendance de  $R + J$  et de  $B$ , et du fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{E}[\exp(i\langle \mathbf{u}, MB_t \rangle)] = \exp(-\frac{1}{2}t\langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle)$ . La loi du processus de Markov  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est caractérisée par son semi-groupe, qui est lui-même caractérisé par la loi de  $X_1$  (voir la proposition V.1.10, page 183), qui est, elle, caractérisée par sa transformée de Fourier, elle-même fixée par la fonction  $\psi$ , exprimée uniquement à l'aide de  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$ . Par conséquent, la loi de  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est caractérisée par  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$ , ce qui termine la preuve. ■

**Structure des processus de Lévy.** Le théorème suivant se voit comme la réciproque du théorème V.2.10 de construction : tout processus de Lévy s'obtient comme au théorème V.2.10; en effet, on peut voir tout processus de Lévy comme la somme de trois processus de Lévy indépendants : un processus continu, le processus des "petits" sauts compensés et le processus des grands sauts. Plus précisément, on a l'énoncé suivant qui résume les résultats déjà obtenus.

**Théorème V.2.11 (Structure des processus de Lévy)** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité sur lequel sont définis une filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $X$ , un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $X$  a des sauts avec probabilité positive.

(1) Le nuage de points sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  défini par  $\Pi := \{(t, \Delta X_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : \Delta X_t \neq 0\}$  est Poissonien d'intensité  $\ell \otimes \pi$ , où  $\pi$  est une mesure positive sur les Boréliens de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , appelée mesure de Lévy de  $X$ , qui satisfait la condition d'intégrabilité

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(1, \|x\|^2) \pi(dx) < \infty \quad (\text{V.25})$$

Plus précisément,  $(\Delta X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\pi$ .

(2) Pour tous  $\varepsilon \in ]0, \infty[$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose

$$R_t := \sum_{\substack{s \in [0, t] : \\ \|\Delta X_s\| > 1}} \Delta X_s, \quad J_t^{(\varepsilon)} := \sum_{\substack{s \in [0, t] : \\ \varepsilon < \|\Delta X_s\| \leq 1}} \Delta X_s - t \int_{\{\varepsilon < \|x\| \leq 1\}} \mathbf{x} \pi(dx) \quad \text{et} \quad Z_t^{(\varepsilon)} := X_t - J_t^{(\varepsilon)} - R_t.$$

Alors il existe deux  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy, notés  $Z$  and  $J$ , satisfaisant les conditions suivantes.

(a)  $Z$  est un processus de Lévy continu : on peut lui appliquer le théorème V.2.4, page 188.

(b)  $R$ ,  $J$  et  $Z$  sont des processus de Lévy indépendants.

(c) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $X_t = Z_t + J_t + R_t$ .

(d) Il existe une suite de réels  $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$  décroissant strictement vers 0 telle que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \sup_{s \in [0, p]} |Z_s - Z_s^{(\varepsilon_p)}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{s \in [0, p]} |J_s - J_s^{(\varepsilon_p)}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0. \quad (\text{V.26})$$

Le processus  $Z$  est appelé la **composante continue** de  $X$ , le processus  $J$  est appelé la **composante des sauts compensés** et le processus  $R$  est appelé la **composante des grands sauts** de  $X$ . Les processus  $Z$ ,  $J$  et  $R$  sont des fonctions mesurables adaptées de la trajectoire de  $X$ .

(3) On note  $\mathbf{v} := \mathbf{E}[Z_1 - Z_0]$  et  $\Gamma := \mathbf{cov}(Z_1 - Z_0)$ . Alors, l'exposant caractéristique  $\psi$  de  $X$  est donné par la formule (V.24) au théorème V.2.10. Par conséquent la loi de  $(X_t - X_0)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est caractérisée par  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$ .

**Preuve :** le point (1) est une conséquence des lemmes V.2.5 et V.2.7. Prouvons (2) : pour simplifier les notations on pose  $U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| > \varepsilon\}$ . On observe que  $J^{(\varepsilon)}$  et  $R$  sont des fonctions du processus  $\Pi_\varepsilon := \{(t, \Delta_t) ; t \in \mathbb{R}_+ : \|\Delta X_t\| > \varepsilon\}$ , qui est la restriction de  $\Pi$  à  $\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon$ ; le lemme V.2.6 implique immédiatement que  $(J^{(\varepsilon)}, R)$  est indépendant de  $Z^{(\varepsilon)}$  (le lecteur remarque qu'il s'agit du point difficile de la preuve). Par ailleurs,  $J^{(\varepsilon)}$  est une fonction de  $\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times (U_\varepsilon \setminus U_1))$  et  $R$  est une fonction de  $\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times U_1)$ ; par le principe de restriction des nuages Poissonniens (théorème IV.3.6, page 142), ils sont indépendants. On a donc montré que  $R$ ,  $J^{(\varepsilon)}$  et  $Z^{(\varepsilon)}$  sont des processus indépendants. Il est par ailleurs facile de voir que ce sont des  $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -processus de Lévy. On applique le lemme V.2.8 à  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (\Delta X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , ce qui est possible par le point (1) que l'on vient de démontrer, et on obtient l'existence de  $J$  et la seconde limite de (V.26). Comme  $Z - Z^{(\varepsilon)} = J^{(\varepsilon)} - J$ , on en déduit la première limite de (V.26) ce qui prouve (d). À la limite, on a clairement  $X = Z + J + R$ , ce qui montre (c). L'indépendance de  $Z$ ,  $J$  et  $R$  découle très facilement de celle de  $Z^{(\varepsilon)}$ ,  $J^{(\varepsilon)}$  et  $R$ . Enfin, on voit que les sauts de  $Z^{(\varepsilon)}$  sont, en norme, inférieurs à  $\varepsilon$ , ce qui implique, à la limite que  $Z$  est continu, ce qui prouve (a) et ce qui termine la preuve de (2).

La preuve de (3) découle tout d'abord du théorème V.2.4, page 188, de caractérisation des processus de Lévy continus : on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{E}[\exp(i\langle \mathbf{u}, Z_t - Z_0 \rangle)] = \exp(i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2}t\langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle).$$

On montre que l'exposant caractéristique  $\psi$  de  $X$  satisfait bien (V.24) du théorème V.2.10 en combinant ce qui précède avec l'indépendance de  $Z$ ,  $J$  et  $R$  et la formule (V.21) du lemme V.2.8 de compensation des sauts. Cela termine la preuve du théorème. ■

On obtient immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire V.2.12** *Il y a une correspondance bijective entre les semi-groupes de processus de Lévy  $d$ -dimensionnels et les triplets de Lévy-Khintchine  $d$ -dimensionnels.*

**Preuve :** à tout semi-groupe  $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , on associe une réalisation  $X$  issue de l'origine et son triplet  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$  comme dans le théorème V.2.11 (3) qui affirme que ce triplet caractérise sa loi : notamment si deux semi-groupes correspondent au même triplet, alors ils sont égaux. Réciproquement, à un triplet de Lévy-Khintchine  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$ , le théorème V.2.10 de construction des processus de Lévy associe un processus  $X$  et il est facile de vérifier que  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$  est le triplet associé à  $X$  par le théorème V.2.11 (3). Cela termine la preuve. ■

En combinant la proposition V.1.10 (page 183, qui établit une correspondance bijective entre *lois infiniment divisibles* et *semi-groupes de processus de Lévy*), le corollaire précédent (établissant une correspondance bijective entre *semi-groupes de processus de Lévy* et *triplets de Lévy Khintchine*) ainsi que la formule (V.24) du théorème V.2.10, page 195, on obtient directement le théorème suivant dû à Lévy (sur  $\mathbb{R}^d$ ) et Khintchine (sur  $\mathbb{R}_+$ ).

**Théorème V.2.13 (Formule de Lévy-Khintchine)** *Il y a une correspondance bijective entre les lois infiniment divisibles sur  $\mathbb{R}^d$  et les triplets de Lévy-Khintchine  $d$ -dimensionnels. Plus précisément, cette correspondance se fait à travers l'exposant caractéristique et la formule de Lévy-Khintchine : la loi infiniment divisible  $\mu$  correspond au triplet  $(\mathbf{v}, \Gamma, \pi)$  si*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mu}(\mathbf{u}) = \exp\left(i\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{u}, \Gamma \mathbf{u} \rangle + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \pi(dx) (e^{i\langle \mathbf{u}, x \rangle} - 1 - i\langle \mathbf{u}, x \rangle \mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 1\}})\right) \quad (\text{V.27})$$

où  $\widehat{\mu}(\mathbf{u}) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \mathbf{u}, x \rangle} \mu(dx)$  est la transformée de Fourier de  $\mu$ . La formule (V.27) est appelée **formule de Lévy-Khintchine**.

## V.3 Quelques propriétés. Cas spécifiques.

### V.3.a Variation totale des trajectoires.

Dans cette section nous nous restreignons à des processus uni-dimensionnels, bien que la plupart des résultats énoncés dans cette section soient vérifiés pour des dimensions supérieures. Rappelons tout d'abord la notion de variation totale d'une fonction à valeurs réelles.

**Définition V.3.1** On fixe  $a < b$  et  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a)  $\sigma = \{s_0 = a < s_1 < \dots < s_n = b\}$  est une subdivision de  $[a, b]$ ; son pas est la quantité  $\text{pas}(\sigma) = \max\{s_{i+1} - s_i ; 0 \leq i < n\}$ ; on note  $\mathcal{S}([a, b])$  l'ensemble des subdivisions de  $[a, b]$ .

(b) Soit  $\sigma = \{s_0 = a < s_1 < \dots < s_n = b\}$ . On pose  $V(\sigma, F) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} |F(s_{i+1}) - F(s_i)|$ , et

$$\mathbf{v}_F([a, b]) = \sup \{V(\sigma, F) ; \sigma \in \mathcal{S}([a, b])\}.$$

Si ce supremum est fini,  $F$  est dite à variation bornée sur  $[a, b]$ .

(c) Soit  $\sigma = \{s_0 = a < s_1 < \dots < s_n = b\}$ ; on pose également

$$V^+(\sigma, F) := \sum_{0 \leq i \leq n-1} (F(s_{i+1}) - F(s_i))_+ \quad \text{et} \quad V^-(\sigma, F) := \sum_{0 \leq i \leq n-1} (F(s_{i+1}) - F(s_i))_- ,$$

ainsi que

$$\mathbf{v}_F^+([a, b]) = \sup \{V^+(\sigma, F) ; \sigma \in \mathcal{S}([a, b])\} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_F^-([a, b]) = \sup \{V^-(\sigma, F) ; \sigma \in \mathcal{S}([a, b])\}$$

qui sont les variations positive et négative de  $F$  sur  $[a, b]$ .  $\square$

Le théorème suivant décrit la structure des fonctions à variation bornée.

**Théorème V.3.2** Soit une fonction  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i) Si  $F$  est à variation bornée sur  $[a, b]$ , alors les fonctions  $t \in [a, b] \mapsto \mathbf{v}_F([a, t])$ ,  $t \in [a, b] \mapsto \mathbf{v}_F^{+-}([a, t])$  sont croissantes, nulles en  $a$  et on a

$$\forall t \in [a, b], \quad F(t) - F(a) = \mathbf{v}_F^+([a, t]) - \mathbf{v}_F^-([a, t]) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_F([a, t]) = \mathbf{v}_F^+([a, t]) + \mathbf{v}_F^-([a, t]).$$

(ii) On suppose que  $F = g_2 - g_1$ , où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions croissantes sur  $\mathbb{R}_+$ . Alors  $F$  est à variation bornée sur tout intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+$  et

$$\mathbf{v}_F^+([a, b]) \leq g_2(b) - g_2(a) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_F^-([a, b]) \leq g_1(b) - g_1(a).$$

**Preuve :** prouvons (i). La croissance des fonctions est évidente et pour toute subdivision  $\sigma = \{a = s_0 < \dots < s_n = b\}$ , on a

$$V(\sigma, F) + F(t) - F(a) = \sum_{0 \leq i < n} (|F(s_{i+1}) - F(s_i)| + F(s_{i+1}) - F(s_i)) = 2V^+(\sigma, F).$$

En passant au supremum sur  $\sigma \in \mathcal{S}([a, t])$ , on a donc  $\mathbf{v}_F(t) + F(t) - F(a) = \mathbf{v}_F^+(t)$ . De même,  $\mathbf{v}_F(t) - F(t) + F(a) = \mathbf{v}_F^-(t)$ , ce qui prouve (i).

Montrons (ii). Soit  $\sigma = \{a = s_0 < \dots < s_n = b\}$ . On observe que

$$V(\sigma, F) \leq V(\sigma, g_1) + V(\sigma, g_2) = g_1(b) - g_1(a) + g_2(b) - g_2(a),$$

ce qui implique que  $F$  est à variation bornée. Par ailleurs,

$$V^+(\sigma, F) = \sum_{0 \leq i < n} (g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i) - (g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i)))_+.$$

Or  $(g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i) - (g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i)))_+ \leq g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i)$  car  $g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i)$  est une quantité positive et car  $y \mapsto (y)_+$  est croissante. Donc  $V^+(\sigma, F) \leq g_2(b) - g_2(a)$ , ce qui implique  $\mathbf{v}_F^+([a, b]) \leq g_2(b) - g_2(a)$ . L'autre inégalité se montre de façon similaire. ■

Comme une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes, elle n'a que des discontinuités de première espèce, c'est-à-dire qu'elle admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite. Ses discontinuités forment donc un ensemble dénombrable. Dans la suite nous considérons des fonctions à variation bornée càdlàg. Plus précisément, soit  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction qui est à variation bornée sur tout intervalle compact ; pour simplifier les notations on pose  $\mathbf{v}_F(t) := \mathbf{v}_F([0, t])$  et  $\mathbf{v}_F^{+/-}(t) := \mathbf{v}_F([0, t])$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Si on suppose que  $F$  est càdlàg, alors on peut montrer qu'il en est de même pour  $\mathbf{v}_F$  et  $\mathbf{v}_F^{+/-}$  et on a

$$\Delta \mathbf{v}_F(t) = |\Delta F(t)| \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v}_F^{+/-}(t) = (\Delta F(t))_{+/-}$$

et on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{s \in J_F} |\Delta F(s)| \leq \mathbf{v}_F(t) \quad \text{où} \quad J_F := \{s \in \mathbb{R}_+ : \Delta F(s) \neq 0\}. \quad (\text{V.28})$$

Si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $F_a(t) := \sum_{s \in J_F \cap [0, t]} \Delta F(s)$  et  $F_c(t) := F(t) - F_a(t)$ , alors on vérifie facilement que  $F_a$  et  $F_c$  sont à variation bornée, que  $F_c$  est continue et que  $F_a$  est càdlàg : cette fonction est appelée la composante des sauts  $F$ .

On examine ensuite la variation totale de la trajectoire des processus de Lévy. Pour cela on fixe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  sur lequel est défini un processus de Lévy réel  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . On note  $(v, \gamma, \pi)$ , son triplet de Lévy-Khintchine : en dimension 1,  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  et  $\pi$  est une mesure sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , qui satisfait  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min(1, x^2) \pi(dx) < \infty$ . La loi de  $X$  est déterminée par son exposant caractéristique  $\psi$  qui est donné par la formule de Lévy-Khintchine en dimension 1, c'est-à-dire que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{E}[e^{iu(X_t - X_0)}] = e^{tu\psi(u)} \quad \text{où} \quad \psi(u) = iuv - \frac{1}{2}\gamma u^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \pi(dx) (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}).$$

On commence par le cas du mouvement Brownien.

**Proposition V.3.3** *On reprend les notations ci-dessus et on suppose que  $X$  est un mouvement Brownien réel. Alors  $\mathbf{P}$ -p.s.  $X$  est à variation infinie sur tout intervalle, c'est-à-dire que*

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } a < b, \quad \mathbf{v}_X([a, b]) = \infty.$$

**Preuve :** on rappelle d'une part que  $X_{t_0+} - X_{t_0}$  est un mouvement Brownien issu de 0. On rappelle également la propriété de scaling du mouvement Brownien qui affirme que pour tout réel  $c > 0$ , le processus  $(c^{-1}(X_{c^2t} - X_0))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un mouvement Brownien issu de 0. Par ces deux propriétés, il suffit de montrer que  $\mathbf{P}$ -p.s.  $\mathbf{v}_X([0, 1]) = \infty$ . Pour cela on pose  $V_n := \sum_{0 \leq k < 2^n} |X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}|$ . Clairement,  $V_n \leq V_{n+1} \leq \mathbf{v}_B([0, 1])$ . On observe ensuite que les variables  $|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}|$  sont i.i.d. de même loi que  $2^{-n/2}|X_1|$ . On pose  $c = \mathbf{E}[|X_1|]$  ; on obtient alors

$$\mathbf{E}[e^{-V_n}] = \mathbf{E}[e^{-2^{-n/2}|X_1|}]^{2^n} = (1 - 2^{-n/2}c + O(2^{-n}))^{2^n} = \exp(-c2^{n/2} + O(1)).$$

Si on pose  $V := \sup_{n \geq 1} V_n$ , ce qui précède montre que  $\mathbf{E}[e^{-V}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^{-V_n}] = 0$  et donc  $\mathbf{P}$ -p.s.  $V = \infty$ , qui entraîne le résultat voulu. ■

On montre le théorème suivant décrivant la variation totale des trajectoires des processus de Lévy.

**Théorème V.3.4** Soit  $X$ , un processus de Lévy réel dont le triplet de Lévy Khintchine est noté  $(v, \gamma, \pi)$ , comme ci-dessus. Alors, on a l'alternative suivante.

(a) Si  $\gamma = 0$  et si  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min(1, |x|) \pi(dx) < \infty$ , alors  $\mathbf{P}$ -p.s.  $X$  est à variation bornée sur tout intervalle compact et on peut écrire

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X_t = X_0 + td + \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s \quad (\text{V.29})$$

où  $d := v - \int_{[-1, 1] \setminus \{0\}} x \pi(dx)$ .

(b) Si  $\gamma > 0$  ou si  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min(1, |x|) \pi(dx) = \infty$ , alors  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tous  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{v}_X([a, b]) = \infty$ .

**Preuve :** supposons que  $\gamma = 0$  et  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min(1, |x|) \pi(dx) < \infty$ . Alors la proposition IV.4.9, page 153, sur la sommabilité des fonctions additives de nuages Poissonniens, implique que  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sum_{s \in [0, t]} |\Delta X_s| < \infty$  et la composante des petits sauts de  $X$  (comme définie au théorème V.2.11, page 197) est donnée par

$$J_t = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s - t \int_{[-1, 1] \setminus \{0\}} x \pi(dx), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Comme  $\gamma = 0$ , la composante Brownienne de  $X$  est nulle et on a donc  $X_t = X_0 + tv + J_t + R_t$ , où  $R_t$  est composante des grands sauts (comme définie au théorème V.2.11, page 197). Autrement dit, (V.29) a lieu. Dans ce cas, pour tous  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\mathbf{P}$ -p.s.

$$\mathbf{v}_X([a, b]) = (b-a)|d| + \sum_{s \in [a, b]} |\Delta X_s| < \infty.$$

Cela montre (a).

Réciproquement, supposons que  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{v}_X([0, t]) < \infty$ . Par (V.28), page 200, cela implique que  $\sum_{s \in [0, t]} |\Delta X_s| \leq \mathbf{v}_X([0, t]) < \infty$  et la proposition IV.4.9, page 153, sur la sommabilité des fonctions additives de nuages Poissonniens, implique que  $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min(1, |x|) \pi(dx) < \infty$ . On pose  $Y_t = td + \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . En reprenant les notations du théorème V.2.11, page 197, de décomposition des processus de Lévy, on voit que  $Y_t = tv + J_t + R_t$  et donc  $X - Y$  est la composante continue de  $X$ . Par ailleurs, il est clair que

$$\mathbf{v}_Y([0, t]) = t|d| + \sum_{s \in [0, t]} |\Delta X_s| < \infty.$$

Supposons que  $\gamma > 0$  et posons  $B_t = \gamma^{-1}(X_t - X_0 - Y_t)$ . Le théorème V.2.11, page 197 implique que  $B$  est un mouvement Brownien standard. Or on a clairement  $\mathbf{v}_B([0, t]) \leq \mathbf{v}_X([0, t]) + \mathbf{v}_Y([0, t]) < \infty$ , ce qui contredit la proposition V.3.3, page 200. Donc  $\gamma = 0$ . Par contraposée, cela prouve (b). ■

**Remarque V.3.5** Le théorème précédent est vrai en dimension  $d$  : si  $\Gamma = 0$  et si  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(1, \|x\|) \pi(dx) < \infty$ , alors  $\mathbf{P}$ -p.s.  $X$  est à variation bornée sur tout intervalle compact et (V.29) a lieu. Sinon,  $\mathbf{P}$ -p.s.  $X$  est à variation infinie sur tout intervalle compact non réduit à un point. La preuve de ce résultat est en tout point similaire à celle donnée ci-dessus pour la dimension 1. □

### V.3.b Subordonateurs

**Définition V.3.6** (*Subordonateurs*) Un subordonateur est un processus de Lévy réel croissant. De manière équivalente, un subordonateur est un processus réel càdlàg, à accroissements indépendants, homogènes en loi et positifs. Il est naturel de choisir  $\mathbb{R}_+$  comme espace d'états d'un subordonateur. □

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité sur lequel est défini  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un subordonateur. On note  $(v, \gamma, \pi)$  son triplet de Lévy-Khintchine. Les accroissements de  $S$  étant positifs, ses sauts le sont aussi. Comme  $\pi$  est la mesure d'intensité du processus ponctuel  $(\Delta S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , on en déduit que  $\pi$  est une mesure sur  $]0, \infty[$ . La croissance de  $S$  implique qu'il est à variation bornée et le théorème V.3.4, page 201, montre que  $\gamma = 0$  et que  $\int_{]0, \infty[} \min(1, x) \pi(dx) < \infty$ . De plus (V.29), page 201, permet d'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S_t - S_0 = \alpha t + \sum_{s \in [0, t]} \Delta S_s \quad \text{où} \quad \alpha := v - \int_{]0, 1]} x \pi(dx). \quad (\text{V.30})$$

La loi du subordonateur  $S$  est caractérisé par son exposant de Laplace  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , qui est donné comme suit : pour tous  $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda S_t}] = e^{-t\phi(\lambda)} \quad \text{où} \quad \phi(\lambda) = \alpha\lambda + \int_{]0, \infty[} \pi(dx) (1 - e^{-\lambda x}). \quad (\text{V.31})$$

En effet, par (V.30),  $\mathbf{E}[e^{-\lambda S_t}] = e^{\alpha t \lambda} \mathbf{E}[\exp(-\sum_{s \in [0, t]} \lambda \Delta S_s)]$ . On rappelle que  $\{(t, \Delta S_t); t \in \mathbb{R}_+ : \Delta S_t \neq 0\}$  est un nuage Poissonnien sur  $\mathbb{R}_+^2$  d'intensité  $\ell \otimes \pi$  : la formule exponentielle positive pour les nuages de Poisson implique donc (V.31).  $\square$

On observe ensuite que

$$t^{-1} S_t \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{ } \alpha, \quad \text{la limite ayant lieu en probabilité.} \quad (\text{V.32})$$

En effet, on a d'une part  $\mathbf{E}[\exp(-\lambda S_t/t)] = \exp(-t\phi(\lambda/t))$ . Or

$$0 \leq t\phi(\lambda/t) - \alpha\lambda \leq \int_{]0, \infty[} \pi(dx) \min(t, \lambda x) \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{ } 0,$$

par convergence dominée. On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow 0+} \mathbf{E}[\exp(-\lambda S_t/t)] = \exp(-\alpha\lambda)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Donc  $S_t/t$  tend en loi vers  $\alpha$  et donc en probabilité puisque  $\alpha$  est constant.  $\square$

**Remarque V.3.7** La convergence (V.32) a lieu presque sûrement.  $\square$

**Exemple V.3.8** Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et soit un réel  $c > 0$ . Un subordonateur  $\alpha$ -stable est un subordonateur dont l'exposant de Laplace est  $\lambda \in \mathbb{R}_+ \mapsto c\lambda^\alpha$ . Sa dérive est nulle ( $d=0$ ) et la sa mesure de Lévy est donnée par

$$\pi(dx) = \frac{c\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha-1} dx.$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler. Si  $S$  est un subordonateur  $\alpha$ -stable issu de 0, il vérifie la propriété de scaling suivante : pour tout réel strictement positif  $k : (k^{-1} S_{k\alpha t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  a même loi que  $S$ . La loi de  $S_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Sauf lorsque  $\alpha = 1/2$ , cette densité ne s'exprime pas simplement à l'aide des fonctions usuelles, bien qu'il existe plusieurs représentations utiles de cette densité sous forme de série ou d'intégrale à paramètre.  $\square$

Les propositions suivantes fournissent quelques résultats élémentaires sur la trajectoire et l'image d'un subordonateur.

**Proposition V.3.9** Soit  $S = (S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un subordonateur défini sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $\mathbf{P}\text{-}p.s. \inf\{t > 0 : S_t > S_0\} = 0$ .
- (b)  $\alpha > 0$  ou  $\pi([0, \infty]) = \infty$ .
- (c)  $\mathbf{P}\text{-}p.s. t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S_t$  est strictement croissant.

**Preuve.** Clairement (c) implique (a). Si  $\alpha > 0$ , alors (V.30) implique que  $S$  est strictement croissant. Si  $\pi([0, \infty]) = \infty$ , alors le lemme IV.5.6 (page IV.5.6) implique que l'ensemble des temps de saut de  $S$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$  et donc que  $S$  est strictement croissant. Donc (b) implique (c) et donc (a). Si  $\alpha = 0$  et  $\pi([0, \infty]) < \infty$  alors  $\inf\{t > 0 : S_t > S_0\}$  est le premier temps de saut de  $S$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\pi([0, \infty])$ , ce qui montre que (a) n'est pas vérifié, et donc (b) non plus. Cela complète la preuve de la proposition. ■

### Rappels sur les fonctions croissantes et leur mesure de Stieltjes associée.

Plusieurs propriétés des trajectoires des subordinateurs ne sont pas spécifiques et valent pour toutes les fonctions croissantes. Nous rappelons ici ces quelques faits et définitions déterministes élémentaires que nous utiliserons ensuite.

**Définition V.3.10** Soit  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , une fonction croissante et continue à droite. On pose  $F(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$ , qui est une quantité possiblement infinie. Soit  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \rightarrow [0, \infty]$ , une mesure positive.

- (a) La *pseudo-réiproque* (ou *pseudo-inverse*) continue à droite de  $F$  est la fonction  $F^{-1}$  définie par

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad F^{-1}(a) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : F(t) > a\} \text{ avec la convention que } \inf \emptyset = \infty. \quad (\text{V.33})$$

On vérifie que  $F^{-1}$  est càd, que  $F^{-1}(a) < \infty$  si  $a < F(\infty)$  et que  $F^{-1}(a) = \infty$  si  $a \geq F(\infty)$ .

- (b) Le *support topologique* de  $\mu$ , noté  $\text{supp}(\mu)$ , est le plus petit fermé  $C \subset \mathbb{R}_+$  tel que  $\mu(\mathbb{R}_+ \setminus C) = 0$ :

$$\text{supp}(\mu) = \bigcap \{C ; C \text{ fermé tel que } \mu(\mathbb{R}_+ \setminus C) = 0\}.$$

Autrement dit, pour tous réels  $t' < t$ , on a  $]t', t[ \cap \text{supp}(\mu) \neq \emptyset$  si et seulement si  $\mu(]t', t[) > 0$ . ■

**Théorème V.3.11** Soit  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  càd croissante. Elle correspond à une unique mesure positive  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \rightarrow [0, \infty]$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu([0, t]) = F(t).$$

On appelle  $\mu$  la mesure de Stieltjes de  $F$  et on la note  $\mu = dF$ . De plus, pour toute  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$  mesurable, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} g \, d\mu = \int_{[0, F(\infty)[} g(F^{-1}(a)) \, da. \quad (\text{V.34})$$

**Preuve.** Soient  $a \in [0, F(\infty)[$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ . On vérifie que si  $a < F(t)$ , alors  $F^{-1}(a) \leq t$  et on vérifie aussi que si  $F^{-1}(a) \leq t$ , alors  $F(t') > a$ , pour tous  $t' > t$  et donc par continuité à droite de  $F$ , on en déduit que  $F(t) \geq a$ . Cela montre que

$$[0, F(t)[ \subset \{a \in [0, F(\infty)[ : F^{-1}(a) \leq t\} \subset [0, F(t)]. \quad (\text{V.35})$$

Pour simplifier les notations, on pose  $G = F^{-1}$  et on définit  $\mu$  comme la mesure image par  $G$  de  $\ell(\cdot \cap [0, F(\infty)[)$ . Alors, le théorème de transfert (ou changement de variable abstrait) implique que  $\mu$  satisfait (V.34). On remarque ensuite que (V.35) signifie pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  que  $[0, F(t)[ \subset [0, F(\infty)[ \cap G^{-1}([0, t]) \subset [0, F(t)]$  et donc en prenant la mesure de Lebesgue,  $F(t) = \ell([0, F(\infty)[ \cap G^{-1}([0, t])) = \mu([0, t])$ . Cela montre l'existence. Le théorème d'unicité du prolongement des mesures garantit l'unicité de l'énoncé (on prend le pi-système des

intervalles de la forme  $[0, t]$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  auxquels on adjoint  $\mathbb{R}_+$  : les tous derniers détails sont laissés au lecteur).

■

On montre ensuite la proposition suivante.

**Proposition V.3.12** Soit  $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  càd croissante telle que  $F(0) = 0$ . Il sera commode de prolonger  $F$  à  $\mathbb{R}$  en la prenant nulle sur  $]-\infty, 0[$ . On note  $dF$  sa mesure de Stieltjes et on pose

$$\mathcal{R} = \{F^{-1}(a); a \in [0, F(\infty)[\} \quad \text{et} \quad J = \{a \in ]0, F(\infty)[; F^{-1}(a-) < F^{-1}(a)\} \quad \text{et}$$

$$G = \{F^{-1}(a-); a \in J\} \text{ si } F(\infty) = \infty \quad \text{et} \quad G = \{F^{-1}(a-); a \in J\} \cup \{F^{-1}(F(\infty)-)\} \text{ si } F(\infty) < \infty.$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Pour tous réels  $t > t'$ ,

$$]t', t[\cap \text{supp}(dF) \neq \emptyset \iff F(t') < F(t). \quad (\text{V.36})$$

(ii) Les  $]F^{-1}(a-), F^{-1}(a)[$ ,  $a \in J$ , sont les composantes connexes de  $]F^{-1}(0), \infty[\setminus \text{supp}(dF)$  :

$$]F^{-1}(0), \infty[\setminus \text{supp}(dF) = \bigcup_{a \in J} ]F^{-1}(a-), F^{-1}(a)[. \quad (\text{V.37})$$

(iii) On a  $\bar{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R} \subset G \subset \bar{\mathcal{R}}$ . De plus, si  $F^{-1}$  croît strictement sur  $[0, F(\infty)[$  alors

$$\bar{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R} = G. \quad (\text{V.38})$$

(iv)  $F$  est continue si et seulement si  $F^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0, F(\infty)[$ . Dans ce cas, on a d'une part  $F(F^{-1}(a)) = F(F^{-1}(a-)) = a$ , pour tout  $a \in [0, F(\infty)[$ , d'autre part, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$F^{-1}(F(t-)) = \sup_{\substack{a \in [0, F(\infty)[: \\ F^{-1}(a) < t}} F^{-1}(a) \quad \text{et} \quad F^{-1}(F(t)) = \inf_{\substack{a \in [0, F(\infty)[: \\ F^{-1}(a) > t}} F^{-1}(a) \quad (\text{V.39})$$

et enfin :

$$\bar{\mathcal{R}} = \text{supp}(dF). \quad (\text{V.40})$$

**Preuve.** Le point (i) n'est qu'une reformulation de la définition du support de  $dF$  et du fait que  $dF([t', t[) = F(t-) - F(t')$  pour tout réels  $t > t'$ , avec la convention mentionnée au début de l'énoncé que  $F$  est nulle sur  $]-\infty, 0[$ . On élimine facilement la limite à gauche car l'ensemble des points de continuité de  $F$  est dense.

Montrons (ii). Soit  $a \in J$  et  $s \in ]F^{-1}(a-), F^{-1}(a)[$ . Il existe donc un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $F^{-1}(a-) < s - \varepsilon < s + \varepsilon < F^{-1}(a)$ . Comme  $a > 0$  (par définition de  $J$ ), on a d'une part  $F^{-1}(0) < s$ . D'autre part, pour tout  $b < a$ , on a  $F^{-1}(b) < s - \varepsilon$ , donc  $b \leq F(s - \varepsilon)$  et donc  $a \leq F(s - \varepsilon)$ . Enfin, puisque  $s + \varepsilon < F^{-1}(a)$ , on a  $F(s + \varepsilon) \leq a$ . Donc  $a = F(s - \varepsilon) = F(s + \varepsilon)$ , ce qui implique par (i) que  $s \notin \text{supp}(dF)$ . Cela montre donc dans (V.37) que le membre de droite est inclus dans le membre de gauche.

Montrons l'inclusion contraire. Soit  $s \in ]F^{-1}(0), \infty[\setminus \text{supp}(dF)$ . On pose  $a = F(s)$  et comme  $s > F^{-1}(0)$ , on a  $a > 0$ . Par (i), il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $a = F(s - \varepsilon) = F(s + \varepsilon)$ . On a donc  $F^{-1}(a) \geq s + \varepsilon$ , d'une part et pour tout  $0 < b < a = F(s - \varepsilon)$ , on a  $F^{-1}(b) \leq s - \varepsilon$ , ce qui entraîne  $F^{-1}(a-) \leq s - \varepsilon$ . On a donc  $s \in ]F^{-1}(a-), F^{-1}(a)[$ . Cela montre que le membre de gauche de (V.37) est inclus dans le membre de droite et cela complète la preuve de (V.37).

Montrons (iii). L'inclusion  $\{F^{-1}(a-); a \in \mathbb{R}_+ \cap [0, F(\infty)]\} \subset \bar{\mathcal{R}}$  est évidente. Montrons la première inclusion de (iii). Pour cela, on fixe  $y \in \bar{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R}$ . Il existe donc une suite  $a_n \in [0, F(\infty)[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , telle que

$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{-1}(a_n) = y$ . On extrait de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite monotone  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (cela est possible de toute suite réelle) ; si  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissait, alors elle convergerait vers  $b \in [0, F(\infty)[$  et la continuité à droite de  $F^{-1}$  impliquerait  $y = F^{-1}(b)$ , ce qui contredirait le fait que  $y \notin \mathcal{R}$ . La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croît donc ; elle ne peut être non plus constante à sa limite  $b$  à partir d'un certain rang car cela impliquerait  $y = F^{-1}(b) \in \mathcal{R}$ , ce qui n'est pas le cas. Quitte à extraire une fois encore, on peut supposer sans perte de généralité que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante. Si  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  était non-bornée, cela impliquerait que  $F(\infty) = \infty$  et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{-1}(b_n) = \sup_{a \in \mathbb{R}_+} F^{-1}(a) = \infty$ , or  $y$  est fini. Donc  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée et converge vers  $b \in \mathbb{R}_+ \cap [0, F(\infty)]$  avec  $b > b_0 \geq 0$  et donc  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{-1}(b_n) = F^{-1}(b-)$ . Si  $b = F(\infty)$  (et donc  $F(\infty) < \infty$ ), alors  $y \in G$ . Supposons que  $b < F(\infty)$ , alors  $F^{-1}(b) \neq F^{-1}(b-) = y$  (sinon on aurait  $y = F^{-1}(b) \in \mathcal{R}$ , ce qui n'est pas le cas) et on a donc  $b \in J$  et  $y = F^{-1}(b-)$ . Donc  $b \in G$ . Cela termine la preuve de la première inclusion de (iii).

Montrons (V.38). On suppose que  $F^{-1}$  croît strictement sur  $[0, F(\infty)[$ . Soit  $y \in G$ . Soit  $a \in J$ . Soit  $b \in [0, F(\infty)[$ . Si  $b < a$ , la stricte croissance de  $F^{-1}$  implique que  $F^{-1}(b) < F^{-1}(a-)$  ; de même si  $b \geq a$ ,  $F^{-1}(b) \geq F^{-1}(a) > F^{-1}(a-)$ . Donc  $F^{-1}(a-) \notin \mathcal{R}$ . Supposons ensuite que  $F(\infty) < \infty$ . La stricte croissance de  $F^{-1}$  sur  $[0, F(\infty)[$  implique clairement que pour tout  $a \in [0, F(\infty)[$ ,  $F^{-1}(a) < \sup\{F^{-1}(b); b \in [0, F(\infty)[\} = F^{-1}(F(\infty)-)$ . Cela complète la preuve de (V.38) et de (iii).

Montrons enfin (iv). Par continuité à droite de  $F$ , pour tout  $a \in [0, F(\infty)[$ , on a  $F(F^{-1}(a)) \geq a \geq F(F^{-1}(a-))$ . Si  $F$  est continue, alors on a  $F(F^{-1}(a)) = a = F(F^{-1}(a-))$  et pour tous réels  $a > b$ , on a  $F(F^{-1}(a)) = a > b = F(F^{-1}(b))$ , ce qui implique que  $F^{-1}(a) > F^{-1}(b)$  et  $F^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0, F(\infty)[$ . Réciproquement, supposons  $F^{-1}$  strictement croissante sur  $[0, F(\infty)[$ . Pour tout  $b \in [0, a[$ ,  $F^{-1}(a) > F^{-1}(b)$  et donc  $F(F^{-1}(a)) \geq a \geq F(F^{-1}(a-)) \geq F(F^{-1}(b)) \geq b$ . En faisant tendre  $b$  vers  $a$ , on a  $F(F^{-1}(a)) = a = F(F^{-1}(a-))$  pour tout  $a \in [0, F(\infty)[$  : l'image de  $F$  est  $[0, F(\infty)[$ , ce qui implique qu'elle n'a pas de point de discontinuité.

On suppose  $F$  continue, ce qui est donc équivalent à ce que  $F^{-1}$  soit strictement croissante sur  $[0, F(\infty)[$ . Si  $a < F(t)$ , alors il existe  $b$  tel que  $a < b < F(t)$ . L'inégalité  $b < F(t)$  implique que  $F^{-1}(b) \leq t$  et la stricte croissance de  $F^{-1}$  implique  $F^{-1}(a) < F^{-1}(b) \leq t$ . Donc cela montre que si  $a < F(t)$ , alors  $F^{-1}(a) < t$ . Réciproquement supposons que  $F^{-1}(a) < t$  ; par définition  $t \leq F^{-1}(F(t))$  et donc  $F^{-1}(a) < t \leq F^{-1}(F(t))$ , donc  $a < F(t)$ . Cela montre que  $a < F(t)$  si et seulement si  $F^{-1}(a) < t$ , ce qui entraîne la première égalité de (VI.53).

On note  $I$  l'infimum du membre de droite de la seconde égalité de (VI.53). Comme  $F^{-1}$  croît strictement, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on a  $F^{-1}(\varepsilon + F(t)) > F^{-1}(F(t)) \geq t$  et donc  $F^{-1}(\varepsilon + F(t)) \geq I$  ; par continuité à droite de  $F^{-1}$ , on en déduit  $F^{-1}(F(t)) \geq I$  en faisant  $\varepsilon$  vers  $0+$ . Par ailleurs, si  $F^{-1}(a) > t$ , alors  $a = F(F^{-1}(a)) \geq F(t)$  et donc  $F^{-1}(a) \geq F^{-1}(F(t))$ , ce qui implique que  $I \geq F^{-1}(F(t))$ . Cela montre donc que  $I = F^{-1}(F(t))$  et complète la preuve de (VI.53).

Montrons (V.40). On observe que  $F^{-1}(0) \in \text{supp}(dF)$  : en effet,  $F(F^{-1}(0)) = 0 < \varepsilon = F(F^{-1}(\varepsilon))$  donc  $\text{supp}(dF) \cap [0, F^{-1}(\varepsilon)] \neq \emptyset$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , or  $F^{-1}(\varepsilon)$  tend vers  $F^{-1}(0)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0+$  par continuité à droite de  $F^{-1}$ , ce qui montre bien que  $F^{-1}(0) \in \text{supp}(dF)$ . Soit  $b \in ]0, F(\infty)[$  ; on voit que  $F^{-1}(b)$  n'appartient pas à  $\bigcup_{a \in J} F^{-1}(a-) \cup F^{-1}(a)[$  et donc par (ii),  $F^{-1}(b) \in \text{supp}(dF)$ . Cela montre donc que  $\mathcal{R} \subset \text{supp}(dF)$  et donc que  $\bar{\mathcal{R}} \subset \text{supp}(dF)$  puisque  $\text{supp}(dF)$  est fermé.

Montrons l'inclusion contraire. Soit  $t \in \text{supp}(dF)$ . Montrons que  $t \in \bar{\mathcal{R}}$ . Comme  $F^{-1}(0)$  est le minimum de  $\text{supp}(dF)$ ,  $t \geq F^{-1}(0)$ . Si  $t = F^{-1}(0)$ , alors  $t \in \bar{\mathcal{R}}$  trivialement. Supposons  $t > F^{-1}(0)$ . Alors pour tout réel  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit on a  $F(t - \varepsilon) < F(t + \varepsilon)$ . Alors pour tout  $a \in ]F(t - \varepsilon), F(t + \varepsilon)[$ , on a  $F(t - \varepsilon) < a = F(F^{-1}(a)) < F(t + \varepsilon)$ , ce qui implique que  $t - \varepsilon \leq F^{-1}(a) \leq t + \varepsilon$ . Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on a  $\bar{\mathcal{R}} \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \neq \emptyset$ , ce qui implique que  $t \in \bar{\mathcal{R}}$ . Cela termine la preuve de (V.40) ■

### Quelques propriétés des trajectoires des surbordonateurs.

On applique la proposition déterministe précédente aux trajectoires des subordonneurs pour obtenir la proposition suivante

**Proposition V.3.13** *Soit  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un subordonneur défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On pose*

$$J = \{t \in ]0, \infty[ : \Delta S_t > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \{S_t ; t \in \mathbb{R}_+\}$$

*et on note  $\bar{\mathcal{R}}$  l'adhérence de  $\mathcal{R}$ . Les assertions suivantes sont alors vérifiées*

- (i) *Les intervalles  $]S_{t-}, S_t[$ ,  $t \in J$ , sont les composantes connexes de l'ouvert  $]S_0, \infty[\setminus \bar{\mathcal{R}}$ , c'est-à-dire  $]S_0, \infty[\setminus \bar{\mathcal{R}} = \bigcup_{t \in J} ]S_{t-}, S_t[$ .*
- (ii) *On a les inclusions suivantes :  $\bar{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R} \subset \{S_{t-} ; t \in J\} \subset \bar{\mathcal{R}}$ . Si  $S$  est de plus, p.s. strictement croissant, alors*

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \bar{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R} = \{S_{t-} ; t \in J\}. \quad (\text{V.41})$$

- (iii) *On note  $\alpha$  le coefficient de dérive de  $S$ . Alors,*

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ell(\mathcal{R} \cap [S_0, S_t]) = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [0, S_t]) = \alpha t. \quad (\text{V.42})$$

**Preuve.** On fixe  $\omega \in \Omega$  et on note  $F$  la pseudo-réciproque càd de  $S$  définie pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  par  $F(t) = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : S_a > t\}$ . On observe que  $F(0) = 0$  et que  $S$  est également la pseudo-réciproque càd de  $F$ , c'est-à-dire que  $S = F^{-1}$ . Les points (i) et (ii) sont donc une conséquence de la proposition déterministe V.3.12.

Montrons (iii). Par le point (ii),  $\ell(\bar{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{R}) = 0$  car  $\{S_{t-} ; t \in J\}$  est dénombrable. On fixe  $t \in \mathbb{R}_+$ . On a donc montré que  $\ell(\mathcal{R} \cap [0, S_t]) = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [0, S_t]) = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [S_0, S_t])$ . Le point (i) implique ensuite que  $(]S_0, \infty[\setminus \bar{\mathcal{R}}) \cap [0, S_t] = \bigcup_{s \in J \cap [0, t]} ]S_{s-}, S_s[$ . Donc

$$\ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [S_0, S_t]) = \ell([S_0, S_t]) - \ell((]S_0, \infty[\setminus \bar{\mathcal{R}}) \cap [S_0, S_t]) = S_t - S_0 - \sum_{s \in J \cap [0, t]} \Delta S_s = \alpha t,$$

par (V.30), ce qui termine la preuve de (iii) et de la proposition. ■

On applique ensuite le point (iii) de la proposition V.3.13 qui précède et le lemme IV.5.10 (p. 161) de reconstruction des nuages de Poisson par leurs marques spatiales (lemme qui est une conséquence de la loi des grands nombres de la proposition IV.5.9, p. 160) pour montrer le résultat suivant qui trouve son application dans l'étude des temps locaux au chapitre VI.

**Proposition V.3.14** *Soient  $S = (S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $S' = (S'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , deux subordonneurs définis sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On suppose que  $S$  et  $S'$  sont p.s. strictement croissants et on suppose que*

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \overline{\{S_t ; t \in \mathbb{R}_+\}} = \overline{\{S'_t ; t \in \mathbb{R}_+\}}. \quad (\text{V.43})$$

*Alors, il existe  $c \in ]0, \infty[$  tel que  $\mathbf{P}\text{-p.s. pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \text{ on ait } S_t = S'_{ct}$ .*

**Preuve.** On note  $\mathcal{R}$  l'image de  $S$ . Par hypothèse,  $\bar{\mathcal{R}}$  est donc aussi l'adhérence de  $\{S'_t ; t \in \mathbb{R}_+\}$ . On observe tout d'abord que (V.48) implique que  $\mathbf{P}\text{-p.s. } S_0 = S'_0$ . On note  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) le coefficient de dérive de  $S$  (resp. de  $S'$ ) et  $\pi$  (resp.  $\pi'$ ) la mesure de Lévy de  $S$  (resp. de  $S'$ ). Par la proposition V.3.9 (p. 202), l'hypothèse de croissance stricte de  $S$  (resp.  $S'$ ) équivaut à ce que  $\alpha > 0$  ou  $\pi([0, \infty[) = \infty$  (resp.  $\alpha' > 0$  ou  $\pi'([0, \infty[) = \infty$ ).

On suppose d'abord que  $\alpha > 0$ . Si  $\alpha' = 0$ , la proposition V.3.13 (iii) implique alors que l'adhérence de l'image de  $S'$  est de mesure de Lebesgue nulle : c'est-à-dire  $\ell(\bar{\mathcal{R}}) = 0$  or la même proposition implique que

$\ell(\bar{\mathcal{R}}) = \infty$  puisque  $\alpha > 0$ , ce qui est contradictoire. Cela montre que si  $\alpha > 0$ , alors  $\alpha' > 0$ . En raisonnant de même, on montre la réciproque et donc  $\alpha > 0$  si et seulement si  $\alpha' > 0$ .

On pose alors  $c = \alpha/\alpha'$  qui est un réel bien défini et strictement positif. Par la proposition V.3.13, il existe un événement  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$  sur lequel (V.41) et (V.42) ont lieu pour  $S$  et  $S'$ , et sur lequel on a aussi (V.48). On raisonne ensuite de manière déterministe en fixant  $\omega \in \Omega_0$  : soit  $t \in \mathbb{R}_+$ ; puisque  $S'_{ct} \in \bar{\mathcal{R}}$ , la proposition V.3.13 (ii) implique qu'il existe  $t' \in \mathbb{R}_+$  tel que  $S'_{ct} = S_{t'-}$  ou bien  $S'_{ct} = S_{t'}$ ; (V.42) appliquée à  $S'$  et  $S$  entraîne que  $\alpha t' = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [0, S_{t'}]) = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [0, S_{t'-}]) = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [0, S'_{ct}]) = \alpha' ct$ , et donc  $t' = t$ , c'est-à-dire que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , ou bien  $S'_{ct} = S_{t-}$  ou bien  $S'_{ct} = S_t$ . La continuité à droite de  $S$  et  $S'$  implique ensuite que sur  $\Omega_0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $S'_{ct} = S_t$ , ce qui prouve la proposition dans le cas où  $\alpha > 0$ .

On suppose ensuite que  $\alpha = 0$ . On raisonne comme précédemment pour montrer que cela implique que  $\alpha' = 0$  aussi. Les deux mesures de Lévy  $\pi$  et  $\pi'$  sont donc de masse infinie. On note  $J$  (resp.  $J'$ ) les temps de sauts de  $S$  (resp. de  $S'$ ), on pose  $\Pi = \{(t, \Delta S_t); t \in J\}$  (resp.  $\Pi' = \{(t, \Delta S'_t); t \in J'\}$ ) : les nuages  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont des nuages de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times ]0, \infty[$  d'intensité respectives  $\ell \otimes \pi$  et  $\ell \otimes \pi'$ . Comme  $\pi$  n'est, en particulier, pas nulle, il existe un réel  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\pi(]\varepsilon_0, \infty[) > 0$ .

Par la proposition V.3.13 (i) et l'hypothèse (V.48) on a

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \bigcup_{t \in J} ]S_{t-}, S_t[ = ]S_0, \infty[ \setminus \bar{\mathcal{R}} = ]S'_0, \infty[ \setminus \bar{\mathcal{R}} = \bigcup_{t \in J'} ]S'_{t-}, S'_t[ . \quad (\text{V.44})$$

Alors, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , le premier saut de  $S$  strictement plus grand que  $\varepsilon$  est le même que le premier saut de  $S'$  strictement plus grand que  $\varepsilon$  et en particulier, leur lois respectives sont égales : on a donc  $\pi'(]\varepsilon, \infty[) > 0$  et

$$\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0], \quad \frac{\pi(\cdot \cap ]\varepsilon, \infty[)}{\pi(]\varepsilon, \infty[)} = \frac{\pi'(\cdot \cap ]\varepsilon, \infty[)}{\pi'(]\varepsilon, \infty[)} . \quad (\text{V.45})$$

On pose alors,  $c = \pi'(]\varepsilon_0, \infty[)/\pi(]\varepsilon_0, \infty[)$ , qui est un réel bien défini et strictement positif. Comme (V.45) est vérifiée pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit, cela montre que  $c\pi = \pi'$ .

Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , on utilise ensuite les notations

$$\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times ]\varepsilon, \infty[) = \{(T_n(\varepsilon), \Delta_n(\varepsilon)); n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad \Pi' \cap (\mathbb{R}_+ \times ]\varepsilon, \infty[) = \{(T'_n(\varepsilon), \Delta'_n(\varepsilon)); n \in \mathbb{N}^*\} .$$

Par (V.44), on en déduit que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n(\varepsilon) = \Delta'_n(\varepsilon) . \quad (\text{V.46})$$

On utilise ici le lemme IV.5.10 (p. 161) de reconstruction des nuages de Poisson par leurs marques spatiales : on fixe  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante strictement vers 0 et pour tous  $k, l \in \mathbb{N}^*$  tels que  $k < l$ , on définit les indices  $(\tau_n^{k,l})_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n(\varepsilon_k) = \Delta_{\tau_n^{k,l}}(\varepsilon_l) \quad \text{où} \quad \{\tau_1^{k,l} < \tau_2^{k,l} < \dots < \tau_n^{k,l} < \dots\} = \{m \in \mathbb{N}^* : \Delta_m(\varepsilon_l) \in ]\varepsilon_k, \infty[\} .$$

Le lemme IV.5.10 (qui est une conséquence simple de la loi des grands nombres de la proposition IV.5.9 (p. 160)) montre que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \forall k, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n(\varepsilon_k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{k,l}}{\pi(]\varepsilon_l, \infty[)} \quad \text{et} \quad T'_n(\varepsilon_k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{k,l}}{\pi'(]\varepsilon_l, \infty[)} .$$

Puisque  $\pi'(]\varepsilon_l, \infty[) = c\pi(]\varepsilon_l, \infty[)$ , cela montre que  $\mathbf{P}\text{-p.s. pour tous } n, k \in \mathbb{N}^*, cT_n(\varepsilon_k) = T'_n(\varepsilon_k)$  et donc  $\Pi' \cap (\mathbb{R}_+ \times ]\varepsilon_k, \infty[) = \{(cT_n(\varepsilon_k), \Delta_n(\varepsilon_k)); n \in \mathbb{N}^*\}$ . En prenant l'union sur  $k$ , on obtient donc

$$\mathbf{P}\text{-p.s. } \{(t, \Delta S'_t); t \in J'\} = \Pi' = \{(ct, \Delta S_t); t \in J\} .$$

Et par (V.30), puisque  $\alpha = \alpha' = 0$ , on a  $\mathbf{P}\text{-p.s. pour tout } t \in \mathbb{R}_+, S'_{ct} = \sum_{s \in [0, ct]} \Delta S'_s = \sum_{s \in [0, t]} \Delta S_s = S_t$ , ce qui termine la preuve de la proposition. ■

### Subordonateurs tués.

Nous introduisons ensuite les subordonateurs tués à taux constant : cette notion apparaît naturellement lorsque l'on considère les temps locaux des processus de Markov. Plus précisément, on se donne sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un subordonateur  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , de coefficient de dérive  $\alpha$  et de mesure de Lévy  $\pi$ , et  $\tau$ , une variable exponentielle de paramètre  $q \in ]0, \infty[$ . On suppose  $S$  et  $\tau$  indépendants. Le processus  $S$  tué au temps  $\tau$  est le processus  $(S_t^{\dagger\tau})_{t \in \mathbb{R}_+}$  à valeurs dans  $[0, \infty]$  donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S_t^{\dagger\tau} = \begin{cases} S_t & \text{si } t < \tau \\ \infty & \text{si } t \geq \tau. \end{cases}$$

On voit facilement que  $\tau$  est le temps de vie de  $S^{\dagger\tau}$  (ici  $\infty$  est vu comme le point de compactification de  $\mathbb{R}_+$ ). On prolonge  $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \exp(-x)$  par continuité en  $\infty$  en posant  $\exp(-\infty) = 0$ . On vérifie immédiatement que pour tous  $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda S_t^{\dagger\tau}}] = e^{-t\phi(\lambda)} \quad \text{où} \quad \phi(\lambda) = q + \alpha\lambda + \int_{]0, \infty[} \pi(dr)(1 - e^{-\lambda r}),$$

On remarque ensuite que la loi de  $S^{\dagger\tau}$  ne dépend que de  $q, \alpha$  et  $\pi$ . Il y a donc un sens à introduire la définition suivante.

**Définition V.3.15 (Subordonateurs tués)** Soient deux réels  $\alpha \geq 0$  et  $q > 0$  et  $\pi$  une mesure sur les boréliens de  $]0, \infty[$  telle que  $\int_{]0, \infty[} \min(1, x) \pi(dx) < \infty$ . Un processus  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à valeurs dans  $[0, \infty]$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  est un *subordonateur tué à taux  $q$ , de coefficient de dérive  $\alpha$ , de mesure de Lévy  $\pi$*  s'il existe sur un espace de probabilité  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$  un subordonateur  $\tilde{S}$  de coefficient de dérive  $\alpha$  et de mesure de Lévy  $\pi$  et une v.a.  $\tau$  exponentielle de paramètre  $q$  tels que

$$(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ sous } \mathbf{P} \stackrel{\text{(loi)}}{=} (\tilde{S}_t^{\dagger\tau})_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ sous } \mathbf{P}'.$$

Le temps de vie de  $S$  noté  $\zeta = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : S_t = \infty\}$  suit donc une loi exponentielle de paramètre  $q$ .  $\square$

On étend facilement la propriété (V.30) et la proposition V.3.13 aux subordonateurs tués.

**Proposition V.3.16** Sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , on se donne  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un subordonateur tué à taux  $q$ , de coefficient de dérive  $\alpha$  et de mesure de Lévy  $\pi$ . Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) En adoptant la convention que  $x + \infty = \infty$  pour tout  $x \in [0, \infty]$ , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S_t = S_0 + \alpha t + \sum_{s \in [0, t]} \Delta S_s \tag{V.47}$$

(ii) On pose  $J = \{t \in ]0, \infty[ : \Delta S_t > 0\}$ ,  $\mathcal{R} = \{S_t ; t \in [0, \zeta[\}$  et on note  $\bar{\mathcal{R}}$  l'adhérence de  $\mathcal{R}$ . Alors,

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad ]S_0, \infty] \setminus \bar{\mathcal{R}} = \bigcup_{t \in J} ]S_{t-}, S_t[ \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ell(\mathcal{R} \cap [S_0, S_t]) = \ell(\bar{\mathcal{R}} \cap [0, S_t]) = \alpha(t \wedge \zeta).$$

(iii) On pose  $\pi^* = \pi + q\delta_\infty$ . Alors  $\Pi = \{(t, \Delta S_t) ; t \in J\}$  est un nuage de Poisson sur  $\mathbb{R}_+ \times ]0, \infty]$  d'intensité  $\ell \otimes \pi^*$  stoppé en  $\{\infty\}$  (cf. définition IV.5.14 p. 164).

**Preuve.** Cela découle simplement des propriétés analogues des subordonneurs ainsi que des définitions mêmes des subordonneurs tués et des nuages de Poisson stoppés. ■

On adapte facilement la preuve de la proposition V.3.14 pour obtenir le résultat analogue suivant.

**Proposition V.3.17** Soient  $S = (S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $S' = (S'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , deux subordonneurs définis sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On suppose que  $S$  et  $S'$  sont p.s. strictement croissants dans un voisinage de 0 et on suppose que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \overline{\{S_t; t \in \mathbb{R}_+\}} = \overline{\{S'_t; t \in \mathbb{R}_+\}}. \quad (\text{V.48})$$

Alors, il existe  $c \in ]0, \infty[$  tel que  $\mathbf{P}$ -p.s. pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on ait  $S_t = S'_{ct}$ .

**Preuve.** On adapte facilement la preuve de la proposition V.3.14 aux subordonneurs tués en utilisant le point (ii) de la proposition V.3.16 qui précède ainsi que (V.47) et la proposition de reconstruction IV.5.17 (p. 164) valable pour les nuages de Poisson stoppés. Nous laissons l'adaptation de la preuve aux lecteurs. ■

La proposition fournit une condition nécessaire et suffisante intrinsèque pour être un subordonneur tué. Ce critère montre en particulier que les subordonneurs tués sont exactement la classe des processus à accroissements homogènes et indépendants croissants à valeurs dans  $[0, \infty]$ , le point  $\infty$  étant nécessairement absorbant.

**Proposition V.3.18** Soit  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un processus càdlàg à valeurs dans  $[0, \infty]$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . On note  $\zeta = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : S_{t-} \text{ ou } S_t = \infty\}$  son temps de vie, avec les conventions que  $S_{0-} = S_0$  et  $\inf \emptyset = \infty$ . Il y a équivalence entre les assertions suivantes.

(a)  $S$  est un subordonneur tué.

(b)  $\mathbf{P}(S_0 < \infty) = 1$ ,  $\mathbf{P}(\zeta < \infty) > 0$  et pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$  et toute  $g : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée,

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{S_t < \infty\}} g(S_{s+t} - S_t) | \mathcal{F}_t^o(S)] = \mathbf{1}_{\{S_t < \infty\}} \mathbf{E}[g(S_s - S_0)]. \quad (\text{V.49})$$

**Preuve.** (a) implique (b) est facile : nous laissons sa preuve en exercice aux lecteurs. On suppose (b) et on montrer que  $S$  est un subordonneur tué.

Pour cela on montre d'abord que  $\zeta$  suit une loi exponentielle non-dégénérée. Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $\mathbf{P}$ -p.s.  $S_0 < \infty$ , on voit que  $\mathbf{P}(\zeta > t) = \mathbf{P}(S_t - S_0 < \infty)$ . Soit  $s \in \mathbb{R}_+$ ; par (V.49) on a ensuite  $\mathbf{P}(S_{s+t} - S_0 < \infty) = \mathbf{P}(S_t - S_0 < \infty; S_{t+s} - S_t < \infty) = \mathbf{P}(S_t - S_0 < \infty) \mathbf{P}(S_s - S_0 < \infty)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(\zeta > t + s) = \mathbf{P}(\zeta > t) \mathbf{P}(\zeta > s)$ . Comme  $\mathbf{P}(\zeta > 0) = 1$  (par continuité à droite de  $S$  puisque  $\mathbf{P}$ -p.s.  $S_0 < \infty$ ) et puisque  $\mathbf{P}(\zeta < \infty) > 0$ ,  $\zeta$  suit nécessairement une loi exponentielle non-dégénérée.

On montre ensuite pour tous réels positifs  $u \geq t$ , que  $S_{\cdot \wedge t}$  a la même loi sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > t)$  et sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > u)$  qui est celle d'un subordonneur stoppé au temps  $t$ . En effet, pour toutes fonctions mesurable bornées  $F$  et  $g$ , (V.49) implique également pour tous réels positifs  $s, t, u$  tels que  $u \geq t + s$

$$\mathbf{E}[F(S_{\cdot \wedge t})g(S_{t+s} - S_t)\mathbf{1}_{\{\zeta > u\}}] = \mathbf{E}[F(S_{\cdot \wedge t})\mathbf{1}_{\{\zeta > t\}}]\mathbf{E}[g(S_s)\mathbf{1}_{\{\zeta > s\}}]\mathbf{P}(\zeta > u - t - s).$$

On en déduit que sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > u)$ ,  $S_{\cdot \wedge t}$  est indépendant de  $S_{t+s} - S_t$ . On observe également que la loi de  $S_{\cdot \wedge t}$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > t)$  est la même que la loi de  $S_{\cdot \wedge t}$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > u)$ , ce qui prouve ce que l'on voulait.

On suppose que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  est suffisamment riche pour qu'y soit définie une variable uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendante de  $S$ . On montre alors qu'il existe un subordonneur  $S'$  issu de 0 et indépendant de  $\zeta$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on ait :

$$S_t = S'_t \text{ si } t < \zeta \quad \text{et} \quad S_t = \infty \text{ si } t \geq \zeta. \quad (\text{V.50})$$

On observe que cela implique que  $S$  est un subordonneur tué et termine la preuve.

*Prouvons (V.50).* Pour cela, on note  $q$  le paramètre de  $\zeta$ . Comme  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  est supposé suffisamment riche, il est possible d'y définir un subordonneur  $(S_t^*)_{t \in \mathbb{R}_+}$  issus de 0 et indépendant de  $S$  et tel que  $S_1^*$  ait même loi que  $S_1$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > 1)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $S'_t = S_t$  si  $\zeta > t$  et  $S'_t = S_{t-\zeta}^*$  si  $t \geq \zeta$  et on définit le processus  $S \oplus_t S^*$  par  $S \oplus_t S^* = S'_{\cdot - t} + S_{(\cdot - t)_+}^*$ . Le point (ii) implique facilement que  $S \oplus_t S^*$  sous  $\mathbf{P}(\cdot | \zeta > t)$  a même loi que  $S^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose ensuite  $\zeta_n = 2^{-n} \lfloor 2^n \zeta \rfloor$  et alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[F(S \oplus_{\zeta_n} S^*)g(\zeta)] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[F(S \oplus_{k2^{-n}} S^*) \mathbf{1}_{\{\zeta \geq k2^{-n}\}} \mathbf{1}_{[0, 2^{-n}]}((\zeta - k2^{-n})g(\zeta))] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[F(S \oplus_{k2^{-n}} S^*) | \zeta \geq k2^{-n}] \mathbf{P}(\zeta \geq k2^{-n}) \mathbf{E}[g(\zeta + k2^{-n}) \mathbf{1}_{\{\zeta < k2^{-n}\}}] \\ &= \mathbf{E}[F(S^*)] \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-qk2^{-n}} \int_0^{2^{-n}} ds q e^{-qs} g(s + k2^{-n}) \\ &= \mathbf{E}[F(S^*)] \int_0^\infty ds q e^{-qs} g(s).\end{aligned}$$

Autrement dit,  $S \oplus_{\zeta_n} S^*$  a même loi que  $S^*$  et est indépendant de  $\zeta$ . On remarque ensuite que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S \oplus_{\zeta_n} S^*)(t) = S'_t$ . Par conséquent,  $S'$  a même loi que  $S^*$  et est indépendant de  $\zeta$ , ce qui entraîne immédiatement (V.50) et termine la preuve de la proposition. ■

### V.3.c Processus sans saut négatif.

**Définition V.3.19** (*Processus de Lévy sans saut négatif*) Un processus de Lévy réel dont les sauts éventuels sont positifs est appelé processus de Lévy sans saut négatif, ou encore processus spectralement positif. La mesure de Lévy d'un tel processus est donc portée par  $]0, \infty[$ . □

Cette classe de processus de Lévy réels englobe celle des subordonneurs et contient le mouvement Brownien : ils ne sont pas nécessairement à variation bornée. Les processus sans saut négatif sont liés également à des modèles de processus de branchement. Bien qu'ils puissent prendre des valeurs négatives, la proposition montre que leur transformée de Laplace est finie et qu'elle les caractérise.

**Proposition V.3.20** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , un espace de probabilité sur lequel est défini  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , un processus de Lévy sans saut négatif et issu de 0. On note  $(v, \gamma, \pi)$  son triplet de Lévy-Khintchine. Alors, pour tous  $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{E}[\exp(-\lambda X_t)] < \infty$ . Plus précisément, la loi de  $X$  est caractérisée par son exposant de Laplace  $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction continue définie comme suit pour tous  $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda X_t}] = e^{t\psi(\lambda)} \quad \text{où} \quad \psi(\lambda) = -\lambda v + \frac{1}{2} \gamma \lambda^2 + \int_{]0, \infty[} \pi(dx) (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbf{1}_{\{x \leq 1\}}). \quad (\text{V.51})$$

**Preuve :** on fixe un réel  $\varepsilon > 0$  et on note  $J$  la composante des petits sauts comme au théorème V.2.11, page 197 ; comme dans ce théorème, on note  $J^\varepsilon$  l'approximation de  $J$  :

$$J_t^{(\varepsilon)} = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\varepsilon < \Delta X_s \leq 1\}} - t \int_{]\varepsilon, 1]} x \pi(dx).$$

La formule exponentielle positive (IV.39) (théorème IV.4.6, page 152) et la remarque IV.4.8 et par la formule (IV.40), page 153, implique que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[e^{-\lambda J_t^{(\varepsilon)}}] = \exp \left( t \int_{]\varepsilon, 1]} \pi(dx) (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x) \right).$$

On note ici que  $\lambda$  peut prendre aussi bien des valeurs positives que négatives. On utilise ensuite l'inégalité suivante valable pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$|e^{-zx} - 1 + zx| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x|z|)^{n+2}}{(n+2)(n+1)n!} \leq \frac{1}{2} x^2 |z|^2 e^{|z|}. \quad (\text{V.52})$$

On applique cette inégalité comme suit : on fixe  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors pour tout  $x \in ]\varepsilon, 1]$ ,  $|e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x| \leq \frac{1}{2} x^2 \lambda^2 e^{|\lambda|}$ . Puisque  $\int_{]0,1]} x^2 \pi(dx) < \infty$ , par convergence dominée on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{[\varepsilon, 1]} \pi(dx) (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x) = \int_{[0, 1]} \pi(dx) (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x). \quad (\text{V.53})$$

Par le théorème V.2.11, page 197, il existe une suite  $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$  décroissant strictement vers 0 telle que **P**-p.s.  $\lim_{p \rightarrow \infty} J_t^{(\varepsilon_p)} = J_t$ . Par (V.53) et par Fatou, on a donc montré

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}[e^{-\lambda J_t}] \leq \exp \left( t \int_{[0, 1]} \pi(dx) (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x) \right) < \infty. \quad (\text{V.54})$$

On peut donc poser

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = \mathbf{E}[e^{-z J_t}] \quad \text{et} \quad \Lambda(z) = \int_{[0, 1]} \pi(dx) (e^{-zx} - 1 + zx).$$

En effet  $|e^{-z J_t}| \leq e^{-\operatorname{Re}(z) J_t}$  et (V.54) montre que  $F$  est bien définie. Par un résultat élémentaire d'analyse complexe  $F$  est analytique sur  $\mathbb{C}$ . De même, l'inégalité (V.52) et le fait que  $\int_{[0, 1]} x^2 \pi(dx) < \infty$  impliquent que  $\Lambda$  est bien définie et analytique sur  $\mathbb{C}$ . Il en est de même pour  $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(t\Lambda(z))$ . La formule de Lévy-Khintchine appliquée à  $J_t$  implique que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad F(-iu) = \mathbf{E}[e^{iu J_t}] = \exp(t\Lambda(-iu)).$$

Par conséquent les deux fonctions analytiques sur  $\mathbb{C}$ ,  $F$  et  $\exp(t\Lambda(\cdot))$  coïncident sur la droite imaginaire pure : la différence de ces fonctions est donc analytique sur  $\mathbb{C}$  et s'annule sur un ensemble possédant des points d'accumulation dans l'intérieur du domaine d'analyticité (qui est  $\mathbb{C}$ ) ; comme ce domaine est connexe, le principe des zéros isolés implique que cette différence est la fonction nulle, c'est-à-dire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}[e^{-z J_t}] = e^{t\Lambda(z)}. \quad (\text{V.55})$$

Comme dans le théorème V.2.11, page 197, on note ensuite  $Z$  la composante continue de  $X$  et  $R$  sa composante des grands sauts. Clairement  $Z_t = \gamma B_t + tv$ , où  $B$  est un mouvement Brownien réel standard. La transformée de Fourier Laplace de  $Z$  est donc définie sur tout  $\mathbb{C}$  :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}[e^{-z Z_t}] = \exp(-ztv + \frac{1}{2}\gamma z^2). \quad (\text{V.56})$$

On rappelle ensuite que  $R_t = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s > 1\}}$ . La formule exponentielle (IV.39), page 152, implique alors que

$$\forall t, \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{E}[e^{-\lambda R_t}] = \exp \left( t \int_{[0, 1]} \pi(dx) (e^{-\lambda x} - 1) \right). \quad (\text{V.57})$$

Le fait que  $X_t = Z_t + J_t + R_t$ , l'indépendance de  $Z_t$ ,  $J_t$  et de  $R_t$  ainsi que (V.55), (V.56) et (V.57), impliquent (V.51), ce qui termine la preuve du théorème. ■

**Remarque V.3.21** La preuve du théorème V.3.20 qui précède implique un résultat plus fort qui s'énonce comme suit. Comme dans le théorème V.2.11, page 197, on note  $J$  la composante des petits sauts de  $X$ ,  $Z$  sa composante continue et  $R$  la composante des grands sauts, qui sont trois processus de Lévy indépendants dont la somme est  $X$ . L'inégalité (V.52), page 211, permet de définir la fonction

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \psi^*(z) := -\lambda z + \frac{1}{2} \gamma z^2 + \int_{]0,1]} \pi(dx) (e^{-zx} - 1 + zx).$$

Il s'agit d'une fonction analytique sur  $\mathbb{C}$  et on a montré que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \mathbf{E}[e^{-z(Z_t+J_t)}] \text{ est bien définie, analytique et vaut } e^{t\psi^*(z)}. \quad (\text{V.58})$$

On pose ensuite  $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  et  $\overline{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ . Pour tout  $z \in \overline{H}$  et tout réel  $x > 1$ , on a  $|e^{-zx} - 1| \leq 2$ . Comme  $\pi(]1, \infty[) < \infty$ , on en déduit que

$$z \in \overline{H} \mapsto \phi(z) := \int_{]1, \infty[} \pi(dx) (e^{-zx} - 1) \text{ est bien définie et analytique sur } H. \quad (\text{V.59})$$

On montre facilement que pour tout  $z \in \overline{H}$ ,  $\mathbf{E}[\exp(-zR_t)] = \exp(t\phi(z))$ . Cela montre les résultats suivants.

- L'exposant de Laplace  $\psi$  de  $X$  défini au théorème V.3.20 s'étend à  $\overline{H}$  par

$$\forall z \in \overline{H}, \quad \psi(z) = \psi^*(z) + \phi(z) := -\lambda z + \frac{1}{2} \gamma z^2 + \int_{]0, \infty[} \pi(dx) (e^{-zx} - 1 + zx \mathbf{1}_{\{x \leq 1\}}).$$

De plus,  $\psi$  est analytique sur  $H$ .

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $z \in \overline{H} \mapsto \mathbf{E}[\exp(-zX_t)]$  et bien définie, analytique sur  $H$  et vaut  $\exp(t\psi(z))$ . □