

Étude d'un modèle de mouvement collectif

Extension du modèle tri-zonal avec la dynamique des prédateurs

Yuguang XIAO

Sorbonne Univeristé

28/04/2024

Plan de l'exposé

- 1 Introduction du Projet
- 2 Rappel du modèle tri-zonal (noté 3-Z)
- 3 3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)
- 4 Paramètres de la simulation
- 5 Résultats et Discussion
- 6 Conclusion et Amélioration
- 7 Questions

Introduction du projet

- Modèle tri-zonal (noté 3-Z)
- Ajout de M prédateurs
- Ajout des conditions de bords

Introduction du projet

Partie I : Modèle tri-zonal (noté 3-Z)

- **Reproduction de l'article de Cao Fei¹ avec une petite avance *** :
 - Construction du modèle tri-zonal (noté 3-Z)
 - Choix de la méthode d'analyse numérique (RK4+Euler explicite)
 - Démonstration du théorème
 - Conditions initiales
 - Présentation des résultats en 2D et 3D
 - Collaboration par nous trois (Yuguang, Jean et Albert)

1. **cao_asymptotic_2020.**

1. * Des méthodes d'analyse numérique différentes et exploration des résultats en 3D.

Introduction du projet

Partie II : Modèle tri-zonal ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

- **Modèle tri-zonal avec ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P) :**
 - Construction du 3-Z-P
 - Conditions initiales
 - Étude de deux scénarios : un prédateur et trois prédateurs (nombre des proies fixé)
 - Présentation des résultats sous forme de GIF
 - Réalisé principalement par moi.

Introduction du projet

Partie III : Modèle tri-zonal ajout des conditions de bords

- **3-Z ajout des conditions de bords :**
 - Construction du mur carré et circulaire
 - Configuration du rebondissement au contact des bords
 - Conditions initiales
 - Présentation des résultats en 2D
 - Collaboration par Jean et Albert

Rappel du 3-Z

Modèle de Base

- **N individus** (e.g., poissons) en interaction dans un espace
- Chaque individu est caractérisé par un vecteur de position \mathbf{x}_i et un vecteur de vitesse \mathbf{v}_i .

Rappel du 3-Z

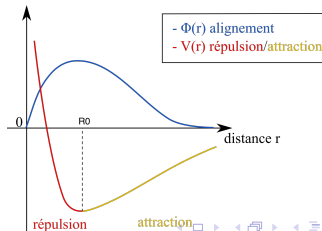
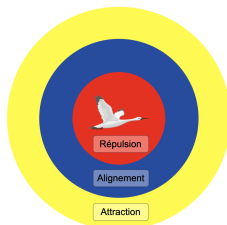
Dynamique des Interactions

- **Distance** $r_{ij} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$: mesure la séparation entre deux individus.
- **Force d'alignement** $\phi_{ij} = \phi(r_{ij})$: indique l'influence mutuelle pour s'aligner.
- **Force d'attraction et de répulsion exprimées par** $\nabla_{\mathbf{x}_{ij}} V(r_{ij})$: gèrent la proximité entre les individus.

Rappel du 3-Z

Dynamique des Interactions

- **Distance** $r_{ij} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$: mesure la séparation entre deux individus.
- **Force d'alignement** $\phi_{ij} = \phi(r_{ij})$: indique l'influence mutuelle pour s'aligner.
- **Force d'attraction et de répulsion** exprimées par $\nabla_{\mathbf{x}_{ij}} V(r_{ij})$: gèrent la proximité entre les individus.



Rappel du 3-Z

Formule mathématique

- **Notation ponctuelle** : $\dot{\square} = \frac{d\square}{dt}$ indique son taux de changement dans le temps.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \\ \ddot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N -\nabla_{\mathbf{x}_{ij}} V(r_{ij}) \end{cases} \quad (1)$$

force d'alignement *force d'attraction et de répulsion*

Rappel du 3-Z

Formule mathématique

- **Notation ponctuelle** : $\dot{\square} = \frac{d\square}{dt}$ indique son taux de changement dans le temps.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \\ \ddot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N -\nabla_{\mathbf{x}_{ij}} V(r_{ij}) \end{cases}$$

force d'alignement
force d'attraction et de répulsion

(1)

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Ajout de M prédateurs

- **N proies** (*preys* en anglais) et **M prédateurs** en interaction dans un espace
- Pour N proies :
 - Dynamique interne
 - Impact externe
- Pour M prédateurs :
 - Dynamique interne
 - Influence externe

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Ajout de M prédateurs

- **N proies** (*preys* en anglais) et **M prédateurs** en interaction dans un espace
- Pour N proies :
 - Dynamique interne
 - Impact externe
- Pour M prédateurs :
 - Dynamique interne
 - Influence externe

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Ajout de M prédateurs

- **N proies** (*preys* en anglais) et **M prédateurs** en interaction dans un espace
- Pour N proies :
 - Dynamique interne
 - Impact externe
- Pour M prédateurs :
 - Dynamique interne
 - Influence externe

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Dynamique interne pour N proies

- **Position et Vitesse** chaque proie i est caractérisée par des vecteurs de position \mathbf{x}_i et de vitesse \mathbf{v}_i .
- **Force d'alignement** ϕ_{ij} : ajuste l'alignement mutuel.
- **Force d'attraction et de répulsion** : représentées par $\nabla_{\mathbf{x}_{ji}} V(r_{ij})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \overbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_{ij} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N -\nabla_{\mathbf{x}_{ji}} V(r_{ji}) + \dots}^{=I_1 \quad (\text{dynamique interne})} \end{array} \right.$$

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Impact externe pour N proies

- Phénomène biologique de prédation cité dans l'article de Tamás Vicsek² :
 - À une certaine distance, la tactique des proies pour échapper à un prédateur consiste à fuir perpendiculairement à la direction dans laquelle se déplace le prédateur.
 - L'éloignement du prédateur pour accélérer l'évasion.

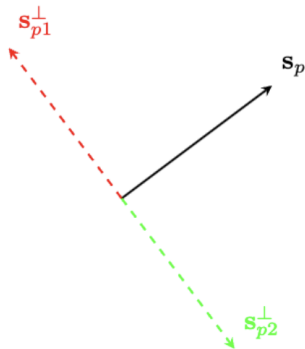
3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Impact externe pour N proies

- **Position et Vitesse** chaque prédateur p est caractérisée par des vecteurs de position \mathbf{w}_p et de vitesse \mathbf{s}_p avec vitesse perpendiculaire \mathbf{s}_p^\perp
- **Distance** $r_{pi} = \|\mathbf{w}_p - \mathbf{x}_i\|$: mesure la séparation entre le prédateur p et la proie i .
- **Force d'alignement** : $\psi_{pi} = \psi(r_{pi})$ qui incite la proie i à s'aligner parallèlement à \mathbf{s}_p^\perp .
- **Force de répulsion** par $\nabla_{\mathbf{x}_{pi}} \bar{V}(r_{pi})$: gèrent la proximité par le prédateur p sur la proie i .

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Impact externe pour N proies



- Dans l'espace \mathbb{R}^2 , deux directions du s_p^\perp
- s_{p1}^\perp en rouge, s_{p2}^\perp en vert, mêmes normes que s_p
- $\tilde{s}_p^\perp = \sum_{i=1}^{i=2} s_{pi}^\perp \mathbb{1}(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{s}_{pi}^\perp > 0)$

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Impact externe pour N proies

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i = I_1 + \overbrace{\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \psi_{pi}(\mathbf{s}_p^\perp - \mathbf{v}_i)}^{=I_2 \quad (\text{impact externe})} + \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M -\nabla_{\mathbf{x}_{pi}} \bar{V}(r_{pi}) \end{array} \right.$$

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Dynamique interne pour M prédateurs

- Les réactions sont négligées au sein de la population de prédateurs
 - La faible quantité de prédateurs.
 - La prédominance de l'influence externe sur la réaction interne.
 - La simplicité du modèle souhaitée.

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Dynamique interne pour M prédateurs

- Les réactions sont négligées au sein de la population de prédateurs
 - La faible quantité de prédateurs.
 - La prédominance de l'influence externe sur la réaction interne.
 - La simplicité du modèle souhaitée.

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Influence externe pour M prédateurs

- **Centre de masse des proies** : $\mathbf{x}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$
- **Distance** $r_{cp} = \|\mathbf{x}_c - \mathbf{w}_p\|$: la distance entre le prédateur p et le centre de masse des proies
- **Force d'attraction** par $\nabla_{\mathbf{x}_{cp}} A(r_{cp})$ gèrent l'attraction par les proies sur le prédateur p .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}}_p = \mathbf{s}_p, \\ \dot{\mathbf{s}}_p = -\nabla_{\mathbf{x}_{cp}} A(r_{cp}) \end{cases}$$

3-Z ajout de M prédateurs (noté 3-Z-P)

Formulation mathématique finale

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\
 \dot{\mathbf{v}}_i = \overbrace{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N -\nabla_{\mathbf{x}_{ji}} V(r_{ji})}^{\text{dynamique interne}} \\
 \quad + \overbrace{\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \psi_{pi}(\tilde{\mathbf{s}}_p^\perp - \mathbf{v}_i) + \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M -\nabla_{\mathbf{x}_{pi}} \bar{V}(r_{pi})}^{\text{impact externe}} \\
 \dot{\mathbf{w}}_p = \mathbf{s}_p \\
 \dot{\mathbf{s}}_p = -\nabla_{\mathbf{x}_{cp}} A(r_{cp})
 \end{array} \right. \quad (2)$$

Paramètres de la simulation

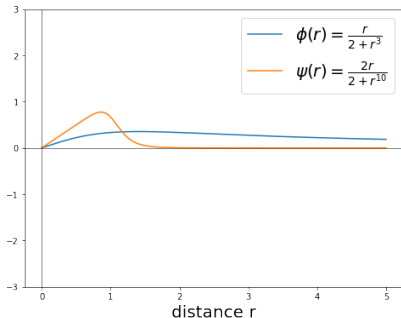
Configuration des fonctions

- $\phi(r) = \frac{r}{2+r^3}^*$
- $V(r) = r(\ln(r) - 1)^*$
- $\psi(r) = \frac{2r}{2+r^{10}}$
- $\bar{V}(r) = -\frac{1}{5}\ln(r)$
- $A(r) = \sqrt{r}$, si $r \leq 2$; $r^2 + (\frac{1}{2\sqrt{2}} - 4)r + \frac{\sqrt{2}}{2} + 4$, sinon. De plus, A est de classe C^1

2. *Fonctions du Cas 1, présenté par Albert avant

Paramètres de la simulation

Fonctions ϕ et ψ

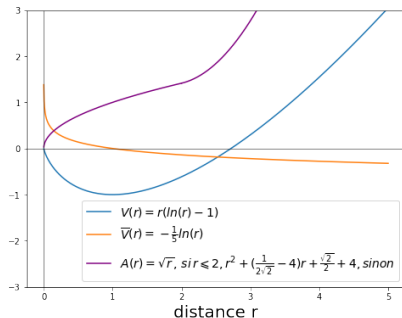


- $\phi = \frac{r}{2+r^3}$: force d'alignement entre les proies
- $\psi = \frac{2r}{2+r^{10}}$: force d'alignement qui incite les proies à s'aligner perpendiculairement à la vitesse du prédateur

Figure – Fonctions ϕ et ψ

Paramètres de la simulation

Fonctions V , \bar{V} et A



- ∇V : force combinée d'attraction et de répulsion entre les proies
- $\nabla \bar{V}$: force de répulsion exercée sur la proie par le prédateur
- ∇A : force d'attraction exercée sur le prédateur par les proies totales

Figure – Fonctions V , \bar{V} et A

Paramètres de la simulation

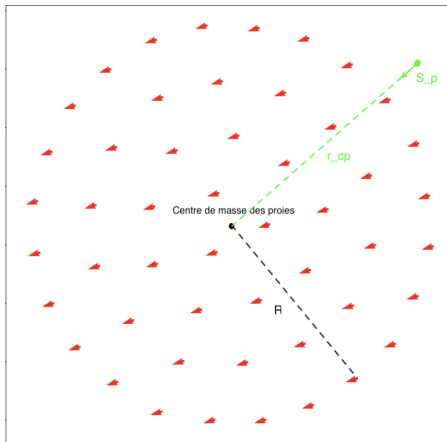
Conditions initiales

- $N = 50$ fixé et $M = 1$ ou $M = 3$
- **Conditions initiales des proies** : Proies en *flocking*, rayon de *flocking* $R \approx 0.9^*$, vitesse de *flocking* $\mathbf{v}_f \approx 0.24^*$. Centre de masse du *flocking* situé en $(0,0)$.
- **Conditions initiales des prédateurs** : Prédateurs hors du *flocking* ($r_{cp} = 1$), la vitesse des prédateurs ($\mathbf{s}_p = 0.5$) plus rapides que \mathbf{v}_f et ciblant $(0,0)$

2. * Resultats du Cas 1 en $N = 50$, présenté par Albert avant

Paramètres de la simulation

Illustration des conditions initiales



Paramètres de la simulation

Conditions technique

- **Méthode analyse numérique** : Méthode d'Euler explicite
- **Temps** : Pas de temps de 0,05, durée totale de la simulation : 200 unités de temps.

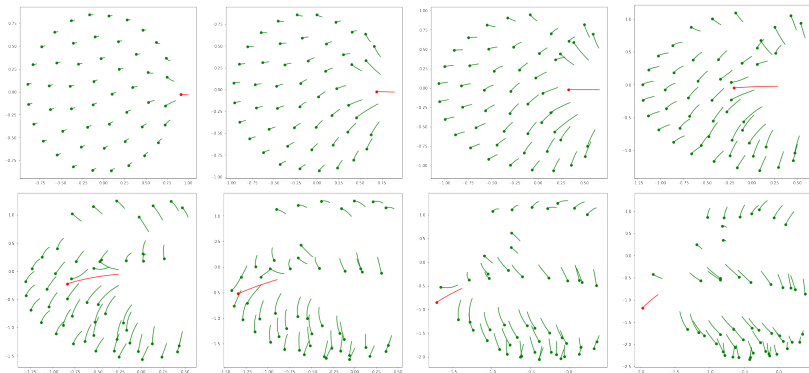
Résultats et Discussion

Résultats

- Cas : $N = 50$, $M = 1$
- Cas : $N = 50$, $M = 3$

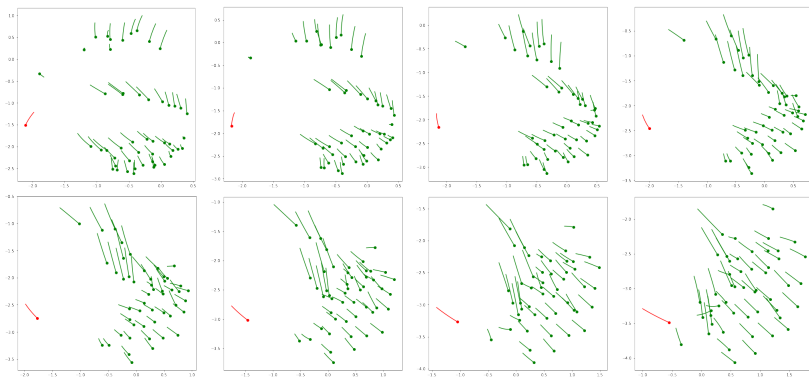
Résultats et Discussion

$N = 50, M = 1$



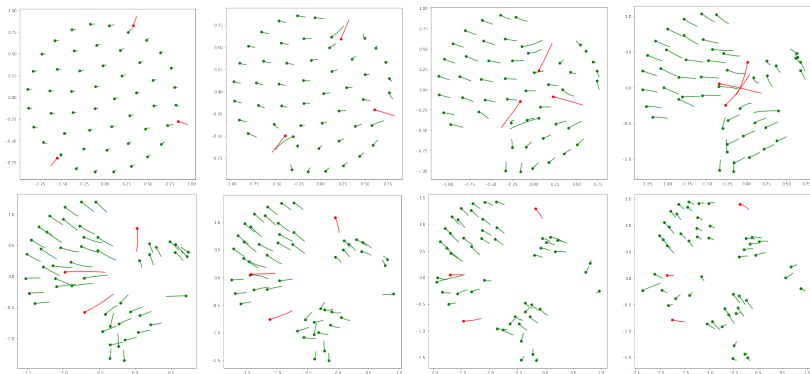
Résultats et Discussion

$N = 50, M = 1$



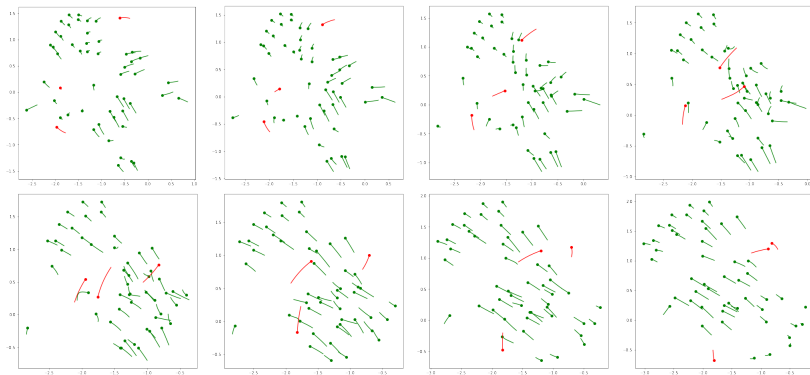
Résultats et Discussion

$N = 50, M = 3$



Résultats et Discussion

$N = 50$, $M = 3$



Résultats et Discussion

Discussion

- 3-Z-P très simpliste
 - Pas de proies consommées par les prédateurs
 - La simplicité de la stratégie de prédation et de fuite
- L'incertitude des configurations des fonctions pour ϕ , ψ , V , \overline{V} et A .

Conclusion et Pistes d'amélioration

Conclusion

- Une stratégie de division des groupes de proies pour mieux chasser.
- Plus de prédateurs, plus de l'efficacité de la prédation
- 3-Z-P peut expliquer certains phénomènes simples de prédation

Conclusion et Pistes d'amélioration

Pistes d'amélioration

- Sur le plan technique :
 - Pas de temps adaptatif
 - Méthodes d'analyse numérique d'ordre supérieur
- Sur le plan de la modélisation :
 - Introduction d'un mécanisme où les prédateurs peuvent capturer les proies
 - Développement de stratégies de prédation et de fuite
 - Prise en compte des différences individuelles, telles que la vitesse et la masse

Questions

- Des Questions ?