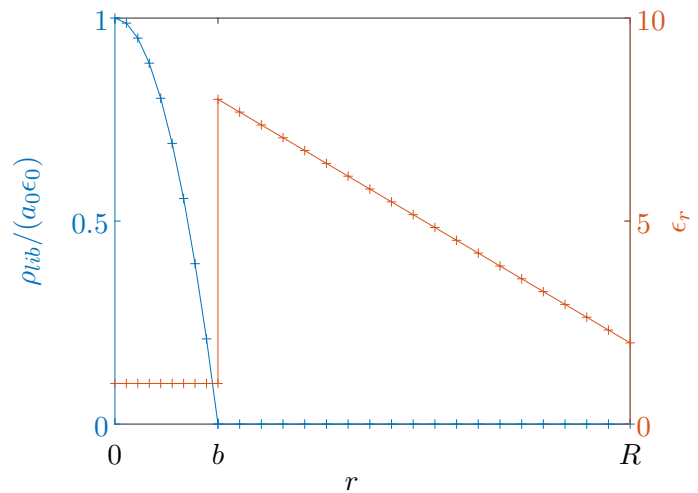


Physique Numérique II – Exercice 6

à rendre jusqu'au **Mardi 26 Mars 2019 à 23h55** sur le site <http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=835972>

6 Électrostatique : cylindre avec diélectrique variable et charges libres. Éléments finis.

Soit un diélectrique occupant un volume Ω , avec un bord $\partial\Omega$ au potentiel V_0 donné. Le milieu est de constante diélectrique variable $\epsilon_r(\vec{x})$ et contient des charges d'espace libres $\rho_{\text{lib}}(\vec{x})$.



6.1 Équation différentielle et forme variationnelle

(a)(b)(c) : [15pts]

- Écrire l'équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$.
- Écrire la forme variationnelle du problème. *Indication : suivre la démarche formelle de la section 3.2.4 des notes de cours.*
- Expliciter cette forme variationnelle dans le cas d'un cylindre de rayon R et longueur L_z , avec $\phi(r)$, $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$. (On considérera le cylindre suffisamment long pour négliger les effets aux extrémités.)

6.2 Éléments finis

(a)(b) : [5pts], (c) : [10pts], (d) (i) : [8pts], (d) (ii) : [7pts]

On discrétise le problème 1-D avec la méthode des éléments finis linéaires (Sections 3.2.4 et 3.2.5 des notes de cours) avec N_1 intervalles équidistants entre $r = 0$ et $r = b$, et N_2 intervalles équidistants entre $r = b$ et $r = R$. La condition au bord est $\phi(R) = V_0$, avec V_0 donné. Voir figure ci-dessus.

- Écrire les éléments de matrice et du membre de droite. *Indication : suivre la méthode des notes de cours en s'inspirant des équations (3.52) à (3.59).*
- Programmer l'implémentation de 6.2 (a) à partir du squelette de code C++ **Exercice6.cpp**. Noter que la matrice, tridiagonale, est stockée sous la forme de l'Eq.(3.65) des notes de cours. Implémenter

la condition au bord. (La fonction pour résoudre le système d'équations algébriques linéaires est déjà implémentée.) On choisira la règle des trapèzes pour les intégrales sur les intervalles [Annexe B, Eq. (B.3)]. *Attention à prendre la bonne valeur de $\epsilon_r(r)$ dans la limite $r \rightarrow b$ selon l'intervalle considéré (à gauche, respectivement à droite, de $r = b$).* On implémentera aussi le calcul du champ électrique E_r (**en utilisant la représentation en éléments finis**) et du champ de déplacement D_r aux points milieux des intervalles.

- (c) On prend $V_0 = 0$, $b = 0.06$ m, $R = 0.12$ m et $N_1 = N_2$. Tester votre algorithme pour le cas trivial $\rho_{\text{lib}}(r) = \epsilon_0$ et $\epsilon_r(r) = 1$. Comparer votre résultat numérique pour le potentiel avec le résultat analytique. Faire une étude de convergence de $\phi(0)$ en fonction de $N_1 (= N_2)$.
- (d) Maintenant on choisira $b = 0.02$ m, $R = 0.12$ m, et

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r < b), \\ 8 - 6 \frac{r-b}{R-b} & (b \leq r \leq R). \end{cases} \quad (1)$$

et $\rho_{\text{lib}}(r)$ de la forme

$$\rho_{\text{lib}}(r) = \begin{cases} \epsilon_0 a_0 \left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2\right) & (0 \leq r < b), \\ 0 & (b \leq r \leq R), \end{cases} \quad (2)$$

avec $a_0 = 10^4$ V/m².

- (i) Obtenir et discuter la solution numérique pour $\phi(r)$ et $E_r(r)$ pour diverses valeurs de N_1 et N_2 . On examinera par exemple la convergence de $\phi(r = b)$ avec N_2 proportionnel à N_1 .
- (ii) Vérifier que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho_{\text{lib}}(\vec{x})$ **en utilisant les différences finies pour l'opérateur d/dr** . Calculer la densité de charges de polarisation, $\rho_{\text{pol}}(r)$. Quelle est la charge de polarisation en $r = b$?
- (e) **Facultatif**
 - Choisir d'autres fonctions pour $\rho_{\text{lib}}(r)$ et $\epsilon_r(r)$ et/ou changer les dimensions du système.
 - Implémenter l'intégrale mixte trapèze-point milieu, Eq.(3.48), pour la construction de la matrice et du membre de droite.

6.3 Rédaction du rapport en L^AT_EX

Avec tous ces résultats en main, on passe à la rédaction du rapport.

- (a) Télécharger le fichier source en `tex` ([SqueletteRapport.tex](#)) sur "Moodle", ou partir d'un rapport précédent.
- (b) Rédiger un rapport dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessus sont présentés et discutés en détail.

N.B. On trouve plusieurs documents L^AT_EX (introduction, exemples, références) dans un dossier spécifique sur notre site "Moodle" ([Dossier L^AT_EX](#)).

6.4 Soumission du rapport en format pdf et du fichier source C++

- (a) Préparer le fichier source L^AT_EX du rapport : **RapportExercice6_Nom1_Nom2.tex**
- (b) Préparer le fichier du rapport en format pdf : **RapportExercice6_Nom1_Nom2.pdf**
- (c) Préparer le fichier source C++ **Exercice6_Nom1_Nom2.cpp**.
- (d) Préparer le fichier script Matlab **Analyse_Nom1_Nom2.m**
- (e) Déposer les fichiers sur Moodle avec [ce lien](#).