

Physique Numérique I-II – Exercice 7

à rendre jusqu'au **mardi 30 avril 2019** sur le site moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=830166



7 Équation d'onde dans un milieu inhomogène : modes propres et propagation d'une vague de tsunami.

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel à vitesse de propagation variable $u(x)$. On donne trois équations régissant l'évolution d'une perturbation $f(x, t)$:

$$\text{Équation A : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\text{Équation B : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\text{Équation C : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 f)$$

Le domaine est tel que $x \in [0, L]$. Diverses conditions aux bords seront considérées. L'état initial du système est non perturbé : $f(x, t = 0) = 0 \forall x$.

7.1 Implémentation [5pts]

- (a) On écrira et implémentera le schéma explicite à 3 niveaux (section 4.2.1 du cours), en l'adaptant : pour les dérivées en x , utiliser les différences finies centrées aux points de maillage :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i) \approx \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1}))}{2h}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1}))}{h^2}$$

où g est soit f , soit u^2 , et $h = x_{i+1} - x_i$ (maillage régulier). Programmer les trois cas A, B et C à partir du squelette de code [Exercice7.zip](#).

- (b) Implémenter les conditions aux bords fixe, libre, harmonique, et sortie de l'onde à droite et à gauche.
- (c) On programmera aussi le calcul de "l'énergie de l'onde", définie par

$$E(t) = \int_0^L f^2(x, t) dx.$$

7.2 Vitesse de propagation constante [16pts]

On considère le cas $u(x) = \text{const}$. Les équations A, B et C sont alors identiques. Le système considéré est tel que $L = 20$ m et $u = 6$ m/s.

(a) Réflexion aux bords :

On simule une condition harmonique au bord gauche : $f(0, t) = A \sin(\omega t)$, avec $\omega = 5$ rad/s. Illustrer le phénomène de réflexion au bord droit pour les conditions fixes et libres. (Simuler 2 allers-retours de l'onde.)

Illustrer le cas de la condition au bord droite "sortie de l'onde". Faire une étude de convergence de la solution en $x = 5$ m, $t = 1.5$ s en variant Δx et Δt à β_{CFL} constant.

(b) Modes propres :

On considère les conditions aux limites harmonique à gauche : $f(0, t) = A \sin(\omega t)$, et fixe à droite.

Calculer analytiquement les fréquences ω_n et modes propres du système sans excitation.

(c) Excitation de modes propres :

Par une série de simulations à des fréquences différentes, étudier la dépendance en fréquence du maximum de l'énergie

$$\hat{E}(\omega) = \max_{t \in [0, t_{fin}]} E(t)|_{\omega}$$

pour une plage de fréquences ω appropriée. Choisir une durée t_{fin} égale à plusieurs dizaines de transits.

Que se passe-t-il lorsque $\omega \approx \omega_n$?

Comparer les résultats obtenus pour quelques valeurs de t_{fin} et discuter vos résultats.

Comparer la solution $f(x, t)$ pour $t \approx t_{fin}$ avec un mode propre analytique.

7.3 Application à une vague de tsunami sur la grande barrière [24pts]

En eau peu profonde, la vitesse de propagation d'une vague peut être approximée par

$$u(x) = \sqrt{gh(x)}$$

où $g = 9.81$ m/s² et $h(x)$ est la profondeur d'eau.

On représente la profondeur de l'océan par le profil suivant :

$$h(x) = \begin{cases} h_{\text{océan}}, & x \in [0, x_a] \\ h_{\text{océan}} + (h_{\text{récif}} - h_{\text{océan}}) \sin^2 \left(\frac{\pi(x-x_a)}{2(x_b-x_a)} \right), & x \in [x_a, x_b] \\ h_{\text{récif}}, & x \in [x_b, x_c] \\ h_{\text{récif}} - (h_{\text{récif}} - h_{\text{océan}}) \sin^2 \left(\frac{\pi(x_c-x)}{2(x_c-x_d)} \right), & x \in [x_c, x_d] \\ h_{\text{océan}}, & x \in [x_d, L] \end{cases}, \quad (1)$$

(voir figure 1), où $h_{\text{océan}} = 8000$ m, $h_{\text{récif}} = 20$ m, $L = 800$ km, $x_a = 200$ km, $x_b = 370$ km, $x_c = 430$ km, et $x_d = 600$ km.

Simuler l'évolution d'une vague sinusoïdale de 1 m d'amplitude arrivant au bord gauche, d'une période de 15 minutes, en utilisant la condition au bord droit "sortie de l'onde".

Indications : Attention de prendre une résolution spatiale suffisante. D'autre part, pour éviter d'obtenir des fichiers de sortie trop volumineux, on peut n'écrire $f(x, t)$ que tous les n_{stride} pas de temps.

(a) Vérifier que la vitesse de propagation est bien donnée par $\sqrt{gh(x)}$ dans les cas A, B et C, et que l'amplitude est proportionnelle à $h(x)^{1/4}$ dans le cas A, $h(x)^{-1/4}$ dans le cas B, et $h(x)^{-3/4}$ dans le cas C (voir Eq. (4.71) des notes de cours). *Indication* : Pour calculer la

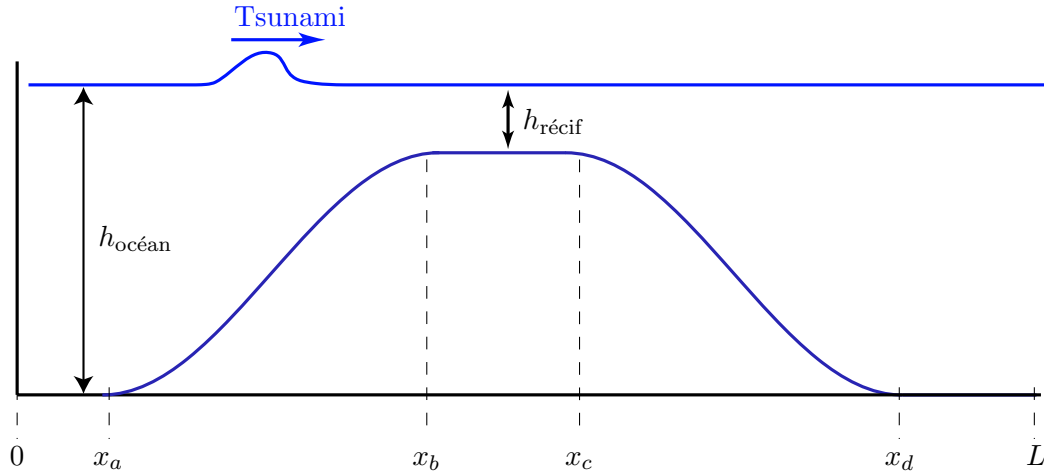


FIGURE 1 – Variation de la profondeur de l'océan sur le trajet du tsunami.

vitesse de propagation, on peut par exemple trouver le premier temps pour lequel f est maximum pour x fixé, afin d'obtenir le mouvement de la crête de la vague. L'amplitude est alors la valeur de f à ce temps.

- (b) Dans le cas B, étudier ce qui passe pour des bords de la barrière de plus en plus raides, i.e. x_a s'approchant de x_b . Comparer avec l'analyse WKB.

7.4 Suppléments facultatifs

- Faire l'analyse WKB des cas A, B et C.
- Etudier l'effet de β_{CFL} sur la stabilité du schéma.

7.5 Rédaction du rapport en \LaTeX

Avec tous ces résultats en main, on passe à la rédaction du rapport.

- (a) Télécharger le fichier source en `tex` ([SqueletteRapport.tex](#)) sur Moodle, ou partir d'un rapport précédent.
- (b) Rédiger un rapport dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessus sont présentés en détail.

N.B. On trouve plusieurs documents \LaTeX (introduction, exemples, références) dans un dossier spécifique sur Moodle ([Dossier \$\text{\LaTeX}\$](#)).

7.6 Soumission du rapport en format pdf et du fichier source C++

- (a) Préparer le fichier source \LaTeX du rapport `RapportExercice7_Nom1_Nom2.tex`
- (b) Préparer le fichier du rapport en format pdf `RapportExercice7_Nom1_Nom2.pdf`
- (c) Préparer le fichier source C++ `Exercice7_Nom1_Nom2.cpp`
- (d) Préparer le fichier source Matlab `Analyse_Nom1_Nom2.m`
- (e) Déposer les fichiers sur Moodle avec [ce lien](#).