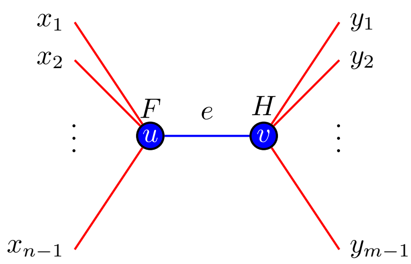
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

高级算法设计与分析作业 #2

XXX：202XX80XXXXXXXX

2023 年 4 月 16 日



如图即为第一种基本张量网络，其中该网络有一条内部边 e，顶点 u, v 对应的函数分别为 $F(e, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 和 $H(e, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1})$。

F 和 H 分别是 n 元和 m 元函数，则他俩合成的张量网络 S 是一个 $n+m-2$ 元的函数 $S(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1})$。该张量网络的所有边，即所有变元的定义域均为 $D = \{0, 1\}$。

我们要证明此开放张量网络的函数 S 是一个斐波那契门，即须证明 S 是对称函数，以及 S 的函数值满足递推关系 $s_{i+2} = s_i + s_{i+1}$。

而证明 S 是对称函数的含义是，在输入为 i 个 1 和 $n + m - 2 - i$ 个 0 时，S 的函数值都相同（将其记做 s_i）。

当张量网络 S 的输入为 i 个 1 和 $n + m - 2 - i$ 个 0，且其中的 j 个 1 来自于 F 的变元，另外 $i - j$ 个 1 来自于 H 的变元时，将张量网络的函数值记为 $s_{i,j}$。要证 S 是对称函数，即证 $s_{i,0} = s_{i,1} = \cdots = s_{i,i}$

只需证明当 $j = 1, 2, \cdots, i$ 时，都有 $s_{i,j} = s_{i,j-1}$ 成立即可。

下面我们开始推导 $s_{i,j}$ 的表达式。

由张量网络的定义知 $S = \sum_{e \in D} F(e, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) H(e, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1})$

计算 $s_{i,j}$：

$$\begin{aligned}
s_{i,j} &= \sum_{e \in D} F(e, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) H(e, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}) \\
&= F(0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) H(0, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}) + F(1, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) H(1, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}) \\
&= f_j h_{i-j} + f_{j+1} h_{i-j+1}
\end{aligned}$$

以 $j-1$ 代 j，得 $s_{i,j-1} = f_{j-1} h_{i-j+1} + f_j h_{i-j+2}$

$$\begin{aligned}
s_{i,j} - s_{i,j-1} &= (f_j h_{i-j} + f_{j+1} h_{i-j+1}) - (f_{j-1} h_{i-j+1} + f_j h_{i-j+2}) \\
&= f_j (h_{i-j} - h_{i-j+2}) + h_{i-j+1} (f_{j+1} - f_{j-1}) \\
&= f_j (-h_{i-j+1}) + h_{i-j+1} f_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

故 S 是对称函数得证。且有 $s_i = s_{i,0} = f_0 h_i + f_1 h_{i+1}$。

下证 S 满足递推关系 $s_{i+2} = s_i + s_{i+1}$。

$$\begin{aligned}
s_{i+2} &= f_0 h_{i+2} + f_1 h_{i+3} \\
&= f_0 (h_i + h_{i+1}) + f_1 (h_{i+1} + h_{i+2}) \\
&= (f_0 h_i + f_1 h_{i+1}) + (f_0 h_{i+1} + f_1 h_{i+2}) \\
&= s_i + s_{i+1}
\end{aligned}$$