高级算法设计与分析作业 #1

XXX：202XX80XXXXXXXX

2023 年 4 月 16 日

1

先证 $(\frac{n}{m})^m \le \binom{n}{m}$。当 $0 \le i < m \le n$ 时，有 $\frac{n-i}{m-i} \ge \frac{n}{m}$

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \prod_{i=0}^{m-1} \frac{n-i}{m-i} \\ &\le \prod_{i=0}^{m-1} \frac{n}{m} \\ &= (\frac{n}{m})^m\end{aligned}$$

得证。

再证 $\binom{n}{m} \le (\frac{ne}{m})^m$。采用数学归纳法。

当 $m = 1 \le n$ 时，$\binom{n}{m} = \binom{n}{1} = n \le (\frac{ne}{1})^1 = ne$，该不等式成立。

当 $m = 2 \le n$ 时，$\binom{n}{m} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \le \frac{n^2e^2}{4} = (\frac{ne}{m})^m$，该不等式成立。

不难验证，归纳假设只需验证当不等式在 $(m-1, n-1)$ 成立时，其在 (m, n) 也成立，就可证明原不等式在对任意的 (m, n) 都成立。

假设当 $2 \le m \le n$ 时，不等式在 $(m-1, n-1)$ 成立，即 $\binom{n-1}{m-1} \le (\frac{(n-1)e}{m-1})^{m-1}$。

首先可以证明：$\frac{(\frac{ne}{m})^m}{(\frac{(n-1)e}{m-1})^{m-1}} \ge \frac{n}{m}$。证明如下：

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{ne}{m})^m}{(\frac{(n-1)e}{m-1})^{m-1}} &= \frac{n}{m} e (\frac{n(m-1)}{m(n-1)})^{m-1} \\ &\ge \frac{n}{m}(1 + \frac{1}{m-1})^{m-1}(\frac{n(m-1)}{m(n-1)})^{m-1} \\ &= \frac{n}{m}(\frac{m}{m-1})^{m-1}(\frac{n(m-1)}{m(n-1)})^{m-1} \\ &= \frac{n}{m}(\frac{n}{n-1})^{m-1} \\ &\ge \frac{n}{m}\end{aligned}$$

则在 (m, n) 处，

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \binom{n-1}{m-1}\frac{n}{m} \\ &\le (\frac{(n-1)e}{m-1})^{m-1} \frac{(\frac{ne}{m})^m}{(\frac{(n-1)e}{m-1})^{m-1}} \\ &= (\frac{ne}{m})^m\end{aligned}$$

得证。

2

第 i 次才第一次出现正面的概率为 $P(T=i)=(1-p)^{i-1}p$
已知级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=(\sum_{1}^{+\infty} x^n)'=(\frac{1}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T)&=\sum_{n=1}^{+\infty} iP(T=i)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1}p\\&=p(\sum_{n=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1})\\&=p(\frac{1}{(1-(1-p))^2})\\&=\frac{1}{p}\end{aligned}$$

已知级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}=(\sum_{n-1}^{+\infty} nx^n)'=(x(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}))'=(\frac{x}{(x-1)^2})'=\frac{x+1}{(1-x)^3}$$

则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2)&=\sum_{n=1}^{+\infty} i^2P(T=i)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty} i^2(1-p)^{i-1}p\\&=p(\sum_{n=1}^{+\infty} i^2(1-p)^{i-1})\\&=p(\frac{1-p+1}{(1-(1-p))^3})\\&=\frac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

故 $\mathbb{D}T=\mathbb{E}(T^2)-(\mathbb{E}T)^2=\frac{1-p}{p^2}$

3

证明：
取 $\lambda > 0$。

$$\begin{aligned}
Pr(X \leq (1-\delta)\mu) &= Pr(e^{\lambda X} \leq e^{\lambda(1-\delta)\mu}) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} && \text{Markov 不等式} \\
&= \frac{\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda Y_i})}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\lambda Y_i)}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n} (p_i e^{\lambda} + 1 - p_i)}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&\leq \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{p_i(e^{\lambda}-1)}}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} && e^x + 1 \geq x \\
&= \frac{e^{(e^{\lambda}-1)(\sum_{i-1}^{n} p_i)}}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= \frac{e^{(e^{\lambda}-1)\mu}}{e^{\lambda(1-\delta)\mu}} \\
&= (\frac{e^{e^{\lambda}-1}}{e^{\lambda(1-\delta)}})^{\mu}
\end{aligned}$$

令 $\lambda = \ln(1-\delta)$，则 $(\frac{e^{e^{\lambda}-1}}{e^{\lambda(1-\delta)}})^{\mu} = (\frac{e^{-\delta}}{e^{(1-\delta)\ln(1-\delta)}})^{\mu} = (\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}})^{\mu}$
我们将 $\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}$ 取对数，则

$$\begin{aligned}
\ln \frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} &= -\delta - (1-\delta)\ln(1-\delta) \\
&= -\delta - (1-\delta)(\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{-\delta^n}{n}) \\
&= -\delta - (-\delta + \frac{\delta^2}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}\delta^n) \\
&= -\frac{\delta^2}{2} - (\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}\delta^n) \\
&\leq -\frac{\delta^2}{2}
\end{aligned}$$

故 $(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}})^{\mu} \leq e^{-\frac{\delta^2}{2}\mu}$

4

定义随机变量 $X_i, i=1,\cdots,|V|$,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{顶点 } u_i \in A \\ 1, & \text{顶点 } u_i \notin A \end{cases}$$

则有 $\Pr(X_i=0)$=$\Pr(X_i=1)$=$\frac{1}{2}$。

对于边集 E 中的任意一条边 (u_i,u_j)，有

$$\Pr((u_i,u_j)\in E(A,B)) = \Pr(X_i \neq X_j) = \frac{1}{2}$$

对于任意的 $(u_i,u_j)\in E$，定义随机变量 $Y_{i,j}$ 如下，

$$Y_{i,j} = \begin{cases} 0, & (u_i,u_j)\notin E(A,B) \\ 1, & (u_i,u_j)\in E(A,B) \end{cases}$$

则 $\mathbb{E}(Y_{i,j}) = \frac{1}{2}, \mathbb{D}(Y_i, j) = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(|E(A,B)|) &= \mathbb{D}[\sum_{(u_i,u_j)\in E} Y_{i,j}] \\ &= \sum_{(u_i,u_j)\in E} \mathbb{D}(Y_{i,j}) \\ &= \frac{|E|}{4} \end{aligned}$$

5

记图 G 中的顶点个数为 n，并将其分别编号为 1，2，⋯⋯，n。假设图中恰好存在一个完美匹配。设计的算法描述如下：

1 根据图中的边颜色等信息构造一个 n 阶方阵 A，其每一项定义为：

$$A(i,j) = \begin{cases} y, & e=(i,j)\in E \ and \ c(e)=red \\ 1, & e=(i,j)\in E \ and \ c(e)=blue \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

2 随机选择 n+1 个数，$y_0, y_1, \cdots, y_n$，分别以这 $n+1$ 个数代 y，计算 $det(A)$，得到 $n+1$ 个对应的值 $p(y_0), p(y_2), \cdots, p(y_n)$。用这 $n+1$ 个点 $\{(y_0,p(y_0)),(y_1,p(y_1)),\cdots,(y_n,p(y_n))\}$ 进行拉格朗日插值。得到一个多项式函数 $p(y)$。

3 若拟合出来的多项式包含 $\pm y^k$ 项，则输出 Yes。

若拟合出来的多项式不包含 $\pm y^k$ 项，则输出 No。

分析：这样拟合出来的多项式是唯一的吗？

回答：这样拟合出来的多项式是唯一的，因为根据 $A(i,j)$ 的定义，能计算出 A 的行列式是关于 y 的多项式函数，这个多项式函数是唯一的。

分析：若不存在 $\pm y^k$ 项，那么是否可能是因为存在多个红蓝匹配，它们由于符号的原因互相抵消了呢？

回答：这种情况也是可能存在的，而且这个问题可能无法通过多次运行上述算法解决。因为多项式函数是唯一的，选取其他点进行拟合也只能拟合出一样的结果。问题的解决办法暂无。但是如果假设图中只存在一个红蓝匹配，那么这个算法将是始终有效的。

分析：为什么需要选取 $n+1$ 个点进行拟合？

回答：因为 $det(A)$ 最多是关于 y 的 n 次函数，而拟合 n 次函数需要 $n+1$ 个点确定该函数的 $n+1$ 个系数。