信安数基作业 #2

XXX : 202XX80XXXXXXXX

2023 年 4 月 16 日

求均匀分布的期望

$X~U(a,b)$ 区间 (a,b) 上的均匀分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},\ a<x<b\\ 0,\ other\end{cases} \tag{1}$$

其数学期望为：

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{a}x\times 0dx+\int_{a}^{b}x\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}x\times 0dx\\&=0+\frac{x^2}{2(b-a)}|_a^b+0\\&=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

求指数分布的期望和方差

设 ξ 服从指数分布：

$$f(x)=\begin{cases}be^{-bx},\ x\geq 0\\ 0,\ x<0\end{cases} \tag{2}$$

其数学期望为：

$$
\begin{aligned}
E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi) d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \xi \times 0 dx + \int_{0}^{+\infty} \xi b e^{-b\xi} d\xi \\
&= 0 - \int_{0}^{+\infty} \xi d e^{-b\xi} \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-b\xi} d\xi - \xi e^{-b\xi}|_0^{+\infty} \\
&= (-\frac{1}{b} e^{-b\xi})|_0^{+\infty} - 0 \\
&= \frac{1}{b}
\end{aligned}
$$

其方差为

$$
\begin{aligned}
D(\xi) &= E(\xi^2) - (E\xi)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 f(\xi) d\xi - (\frac{1}{b})^2 \\
&= \int_{0}^{+\infty} \xi^2 b e^{-b\xi} d\xi - \frac{1}{b^2} \\
&= -\int_{0}^{+\infty} \xi^2 d e^{-b\xi} - \frac{1}{b^2} \\
&= -\xi^2 e^{-b\xi}|_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2\xi e^{-b\xi} d\xi - \frac{1}{b^2} \\
&= 2\frac{1}{b} \int_{0}^{+\infty} \xi b e^{-b\xi} d\xi - \frac{1}{b^2} \\
&= 2\frac{1}{b} E(X) - \frac{1}{b^2} \\
&= \frac{1}{b^2}
\end{aligned}
$$