

高级算法设计与分析 作业 1

1. 证明: $\left(\frac{n}{m}\right)^m \leq \binom{n}{m} \leq \left(\frac{ne}{m}\right)^m$, 其中 $0 < m \leq n$.

2. 一枚硬币掷出正面的概率为 p , 掷出反面的概率为 $1 - p$, 求首次掷出正面所需次数 T 的期望和方差。

3. X_1, \dots, X_n 是独立的 0-1 随机变量, 有 $\Pr(X_i = 1) = p_i, \Pr(X_i = 0) = 1 - p_i$ 。记 $X = X_1 + \dots + X_n$, $\mathbb{E}(X) = p_1 + \dots + p_n = \mu$, 证明: 当 $0 < \delta < 1$ 时,

$$\Pr(X \leq (1 - \delta)\mu) \leq \left[\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{1-\delta}} \right]^\mu \leq e^{\frac{-\delta^2 \mu}{2}}.$$

4. 分析 MAX-CUT 随机算法的方差。

5. 设计一个多项式时间随机算法求解二部图的红蓝匹配问题。

问题描述: 二部图 G 的边被染成了红和蓝两种颜色, 判定 G 中是否存在一个完美匹配 M , 使得 M 中恰有 k 条红边和 $n - k$ 条蓝边。

输入: 二部图 $G(U \cup V, E)$, 其中顶点集 $U \cap V = \emptyset$, 且对任意 $(x, y) \in E$ 有 $x \in U, y \in V$; 边染色函数 $c: E \rightarrow \{\text{red}, \text{blue}\}$; 以及非负整数 k 。

输出: Yes, 如果 G 中存在一个完美匹配 $M \subseteq E$, 要求 $|\{e \in M : c(e) = \text{red}\}| = k$; 若不存在这样的 M , 则输出 No。