机器学习作业 #5

XXX：202XX80XXXXXXXX

2023 年 4 月 18 日

第一题

a. $p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=p(x_1)p(x_2)p(x_3|x_1,x_2)p(x_5|x_2)p(x_4|x_3)p(x_6|x_3,x_5)$

b. 随机变量 x_1 和 x_6 之间存在路径 (x_1,x_3,x_6)，根据 D-Seperation 定理，顶点 x_3 为 head-to-tail 节点，需要出现在已观测集合中，x_1 和 x_6 才独立。也就是说，x_1 和 x_6 不独立，但是在给定 x_3 的条件下，两者独立。

c. 随机变量 x_1 和 x_5 之间存在路径 (x_1,x_3,x_2,x_5) 和 (x_1,x_3,x_6,x_5)。由于 x_3 和 x_6 为 head-to-head 节点，x_2 为 tail-to-tail 节点。故 x_1 和 x_5 不独立。若要 x_1 和 x_5 独立，则须满足如下条件之一：

- x_3 或其后代节点不在观测的集合 C 中
- x_6 或其后代节点不在观测的集合 C 中
- x_2 在已观测的集合 C 中

d. 根据 c. 中的分析知，给定 x_3 的后代节点 x_4 的条件下，x_1 和 x_5 独立。

第二题

1 最大团为 AB 和 BC

2 联合概率分布函数

记 A，B，C 中的随机变量为 x_A,x_B,x_C。

$p(A,B,C)=\frac{1}{Z}\psi_{AB}(x_A,x_B)\psi_{BC}(x_B,x_C)$

3 证明

$$\begin{aligned}
p(A,C|B)=\frac{p(A,B,C)}{p(B)}&=\frac{p(A,B,C)}{\sum_{x'_A}\sum_{x'_C}\frac{1}{Z}\psi_{AB}(x'_A,x_B)\psi_{BC}(x_B,x'_C)}\\
&=\frac{\frac{1}{Z}\psi_{AB}(x_A,x_B)\psi_{BC}(x_B,x_C)}{\sum_{x'_A}\sum_{x'_C}\frac{1}{Z}\psi_{AB}(x'_A,x_B)\psi_{BC}(x_B,x'_C)}\\
&=\frac{\psi_{AB}(x_A,x_B)}{\sum_{x'_A}\psi_{AB}(x'_A,x_B)}\frac{\psi_{BC}(x_B,x_C)}{\sum_{x'_C}\psi_{BC}(x_B,x'_C)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(A|B)=\frac{p(A,B)}{p(B)}&=\frac{\sum_{x'_C}p(x_A,x_B,x'_C)}{\sum_{x'_A}\sum_{x'_C}p(x'_A,x_B,x'_C)}\\
&=\frac{\sum_{x'_C}\frac{1}{Z}\psi_{AB}(x_A,x_B)\psi_{BC}(x_B,x'_C)}{\sum_{x'_A}\sum_{x'_C}\frac{1}{Z}\psi_{AB}(x'_A,x_B)\psi_{BC}(x_B,x'_C)}\\
&=\frac{\psi_{AB}(x_A,x_B)\sum_{x'_C}\psi_{BC}(x_B,x'_C)}{\sum_{x'_A}\psi_{AB}(x'_A,x_B)\sum_{x'_C}\psi_{BC}(x_B,x'_C)}\\
&=\frac{\psi_{AB}(x_A,x_B)}{\sum_{x'_A}\psi_{AB}(x'_A,x_B)}
\end{aligned}$$

同理可得：$p(C|B)=\frac{\psi_{BC}(x_B,x_C)}{\sum_{x'_C}\psi_{BC}(x_B,x'_C)}$

故有 $p(A,C|B)=p(A|B)p(C|B)$