Uneigentliche Integrale

Yannis Bähni

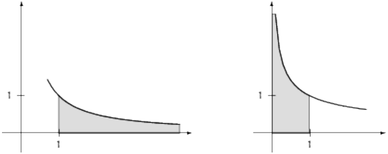
XXM1.AN2

20.03.2024

Überblick

Uneigentliches Integral: Definition

Geometrische Problemstellung:



Definition

Ein *uneigentliches Integral* ist ein Integral vom Typ

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ

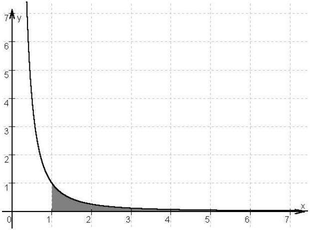
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

Uneigentliche Integrale erster Art: Problemstellung

- Uneigentliche Integrale mit einem unendlichen Integrationsintervall, vom Typ

$$I = \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Geometrisch:



Uneigentliche Integrale erster Art: Berechnung

Vorgehen zur Berechnung eines uneigentlichen Integrals erster Art:

- Statt über das *unendliche* Intervall $[a, \infty)$ integrieren wir über das *endliche* Intervall $[a, \lambda]$ für beliebige $\lambda \geq a$:

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Das gesuchte Integral über dem unendlichen Intervall $[a, \infty)$ ergibt sich als *Grenzwert* $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Definition

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Uneigentliche Integrale erster Art: Beispiel

Beispiel

Wir berechnen das uneigentliche Integral

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

- Integration über $[1, \lambda]$:

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1$$

- Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda} + 1\right) = 1$$

D.h. das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent.

Uneigentliche Integrale erster Art: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Wir berechnen das uneigentliche Integral

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

- Kann man auch direkt die "Zahl" ∞ als obere Grenze in die Stammfunktion einsetzen?
- Im mathematischen strengen Sinn: Nein. Denn mit ∞ kann man nicht rechnen wie mit gewöhnlichen Zahlen
- In vielen praktischen Fällen ist es aber trotzdem möglich, wenn man $\frac{1}{\infty} = 0$ setzt:

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^\infty = 0 + 1 = 1$$

- Ohne Garantie!

Uneigentliche Integrale erster Art: Weitere Beispiele

Beispiel

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Uneigentliche Integrale erster Art: Variante

Uneigentliche Integrale mit einem unendlichen Integrationsintervall, vom Typ

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vorgehen zur Berechnung eines solchen Integrals:

- Statt über das *unendliche* Intervall $[-\infty, b)$ integrieren wir über das *endliche* Intervall $[\lambda, b]$ für beliebige $\lambda \leq b$:

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Das gesuchte Integral über dem unendlichen Intervall $[-\infty, b)$ ergibt sich als *Grenzwert* $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to -\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Uneigentliche Integrale erster Art: Variante

Definition

Falls der Grenzwert $\lim_{\lambda \to -\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Beispiel

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x.$$

Beidseitig unendliches Integrationsintervall

Uneigentliche Integrale mit einem *beidseitig* unendlichen Integrationsintervall, vom Typ

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vorgehen zur Berechnung eines solchen Integrals:

- Einfügen einer künstlichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Beide Teilintegrale einzeln berechnen!
- Das uneigentliche Integral heisst *konvergent*, falls beide Teilintegrale konvergent sind.
- In diesem Fall:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_{c}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Beidseitig unendliches Integrationsintervall: Fortsetzung

Uneigentliche Integrale mit einem *beidseitig* unendlichen Integrationsintervall, vom Typ $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$:

- Zerlegung:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_{c}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

- typischerweise $c = 0$
- In den Beispielen ergeben sich häufig Symmetrien, sodass man nur eines von beiden Teilintegralen explizit berechnen muss!

Beispiel

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Uneigentliches Integral: Verwandtschaft mit Abfall der Funktion

Beispiel

- Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Approximation $I(\lambda)$:

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln|x|)\,\Big|_1^\lambda = \ln(\lambda) - \ln(1) = \ln(\lambda).$$

- Limes $\lambda \to \infty$: Für $\lambda \to \infty$ gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \ln(\lambda) = \infty,$$

  also ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ divergent.

- Das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ist also *divergent*, obwohl $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt!

Uneigentliches Integral: Verwandtschaft mit Abfall der Funktion

- Es gilt allgemein:
$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$
aber nicht in die umgekehrte Richtung!
- Ein ähnliches Resultat haben wir schon bei unendlichen Reihen gesehen (Analysis 1): Es gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;\text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$
aber nicht in die umgekehrte Richtung!
- Das ähnliche Verhalten von unendlichen Summen und uneigentlichen Integralen ist auch nicht erstaunlich, wenn man bedenkt, dass (endliche) bestimmte Integrale als Grenzwert von (endlichen) Summen definiert sind und uneigentliche Integrale als Grenzwert von gewöhnlichen Integralen, genauso wie unendliche Summen als Grenzwert von gewöhnlichen Summen.

Uneigentliches Integral: Konvergenz in Abhängigkeit vom Parameter

Beispiel

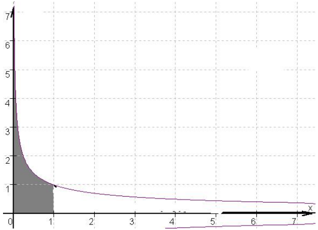
Untersuchen Sie, für welche Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konvergent ist.

Uneigentliche Integrale zweiter Art: Problemstellung

Integrand mit Pol im Integrationsbereich:



Beispiel

Gesucht ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Eine Berechnung via Stammfunktionen liefert das Resultat

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

Wo ist das Problem?

Uneigentliche Integrale zweiter Art: Allgemeines Vorgehen

Vorgehen zur Berechnung eines Integrals $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ und Stetigkeit auf $(a, b]$:

- Statt über das Intervall $[a, b]$ integrieren wir über das Intervall $[a + \epsilon, b]$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Das gesuchte Integral über dem Intervall $[a, b]$ ergibt sich als Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

- Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ heisst *konvergent*, falls der Limes $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$ existiert, andernfalls *divergent*.

Uneigentliche Integrale zweiter Art: Beispiel

Beispiel

- Wir betrachten nochmals das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
- Wir integrieren zuerst über $[\epsilon, 1]$ und erhalten

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\epsilon}.$$

- Im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(2 - 2\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

- Die direkte Rechnung mit den Einsetzen der Polstelle $x_0 = 0$ als Grenze in die Stammfunktion hat also das richtige Ergebnis gebracht.

Uneigentliche Integrale zweiter Art: Beispiele

Bemerkung: Eine spezielle Betrachtung dieser Art von Integralen ist deshalb nötig, weil im Hauptsatz der Integralrechnung vorausgesetzt wird, dass der Integrand auf dem *ganzen* Integrationsintervall stetig ist. Diese Voraussetzung ist verletzt, wenn es einen Pol gibt.

Beispiel

Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Uneigentliche Integrale zweiter Art: Beispiele

Beispiel

Untersuchen Sie, für welche Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

konvergent ist.