Anwendungen der Integralrechnung: Teil 1

Yannis Bähni

XXM1.AN2

06.03.2023

Überblick

(+/−)

≙ signierter Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse

1. **Das bestimmte Integral (Repetition)**
   - Einführung und Definition
   - Hauptsätze der Integralrechnung

unbestimmtes Integral:

$$\int f \, dx = F(x) + C,$$

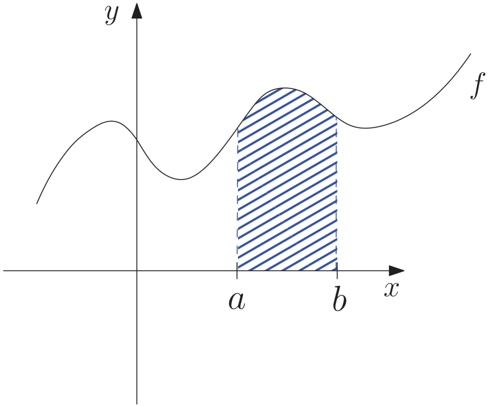
wobei $F'(x) = f(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

2. **Mittelwert einer Funktion**

3. **Volumen eines Rotationskörpers**

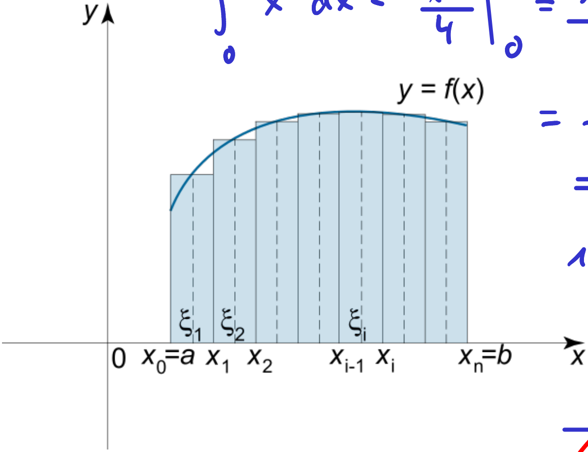
Fragestellung

Ziel: Fläche zwischen Kurve und x-Achse berechnen:



Grundidee

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$



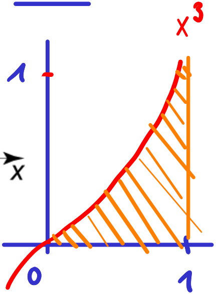


Abbildung: Approximatives Verfahren zur Berechnung von Flächen

Vorgehen zur Flächenberechnung

- Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle, durch Einfügen von Zwischenwerten:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Wahl von Zwischenstelle/Messpunkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $1 \leq i \leq n$
- Approximation des Flächeninhalts im Bereich $[x_{i-1}, x_i]$ durch

$$A_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- Näherungswert für die ganze Fläche im Bereich $[a, b]$:

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

- Exakte Fläche im Limes $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$:

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Definition des bestimmten Integrals

Definition

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

heisst, falls er existiert, *bestimmtes Integral von f über* $[a, b]$. Man schreibt dafür

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bemerkung

- Das bestimmte Integral ist eine *Zahl*.
- Umbenennung der Integrationsvariablen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \dots$$

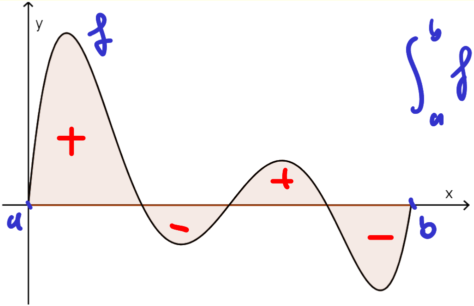
Zusammenhang mit Flächenberechnungen

- Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

  die *Fläche zwischen der Funktionskurve von $f(x)$ und der x-Achse* im Bereich $[a, b]$.
- Falls $f(x) \geq 0$ *nicht* überall gilt auf $[a, b]$, ist das bestimmte Integral immer noch definiert, aber es ist dann *nicht* mehr die Fläche zwischen der Funktionskurve und der x-Achse.

signiert



$$\int_a^b f(x)dx \neq \text{Fläche}$$

Flächenberechnung: Beispiel

Beispiel

- *Ziel:* Fläche A zwischen Kurve $y = x^2$ und x-Achse im Intervall $I = [0, 2]$ berechnen
- *Resultat:* $A = \frac{8}{3}$
- *Variable obere Grenze*, beliebige untere Grenze a: Fläche $F_a(x)$ unter der Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ im Bereich $I = [a, x]$:

$$F_a(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Die Integralfunktion $F_a(x)$ der Funktion $f(x) = x^2$

- für die untere Grenze $a = 0$ ist $F_0(x) = \frac{x^3}{3}$.
- für die untere Grenze $a = 2$ ist $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$.
- für die untere Grenze $a \in \mathbb{R}$ ist $F_a(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

Alle Integralfunktionen sind *Stammfunktionen* von $f(x) = x^2$.

Variable obere Grenze: Resultate

Wir beobachten im vorigen Beispiel, dass $F_a'(x) = f(x)$ gilt. Dies ist eine allgemeine Tatsache:

Satz (Erster Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist die Integralfunktion $F_a(x)$ von $f(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$F_a'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

Die Integralfunktion $F_a(x)$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Flächenberechnungen mit beliebigen Stammfunktionen

($\int f(x)\,dx$ ist eine Menge von Stammfunktionen)

Satz (Zweiter Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, und sei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

ist eine Zahl!

Bemerkung

- Für die Differenz $F(b) - F(a)$ gibt es auch die Schreibweisen
$$F(x)\big|_a^b, \qquad [F(x)]_a^b.$$
- Falls für $a \leq x \leq b$ (teilweise) $f(x) < 0$ gilt, ist die Grösse $\int_a^b f(t)\,dt$ nicht mehr die Fläche zwischen Kurve und x-Achse!

Integration ist viel schwieriger als Differentiation:

$$f(x) = e^{\sqrt{\sin(x)}\cos(\ln(x^3))}$$

$f'(x)$ kann man berechnen (auch wenn mühsam)

$$\int e^{x^2}\,dx = ?$$

Es gibt dafür keine elementare Stammfunktion!

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx = ?$$ $x^2 = u$

Partielle Integration funktioniert nicht!

__Idee:__ Substitution $u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{du}{2x} = dx$

$$\int x e^{x^2}\,dx = \int x e^{u}\,dx$$

$$= \int \cancel{x} \cdot e^u \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}}$$

$u = \sin(x)$
$du = \cos(x)\,dx$ $\Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos(x)}$

$$\int \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \int e^u\,du = \underline{\underline{e^{\sin(x)} + C}}$$

$u = \sin(x)$

$$\int \cos^2(x)\cdot e^{\sin(x)}\,dx = \cancel{\int \cos(x)\, e^u\,du}$$

__Partialbruchzerlegung__

$$\int_a^b \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 5x^2 + x}\,dx$$

Flächenberechnungen/bestimmte Integrale: Beispiele

Beispiel

- Berechnen Sie die Fläche, die durch die Kurve der Funktion $f(x) = x^5$ und die x-Achse im Intervall $I = [0, 2]$ begrenzt wird.

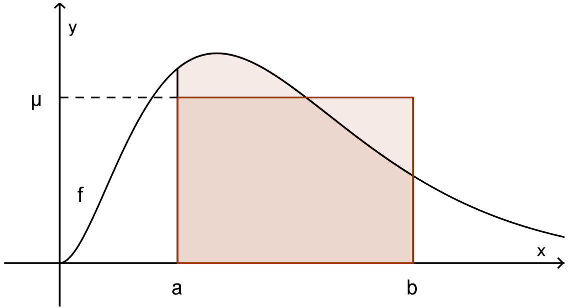
$$\int_0^2 x^5 \, dx = \left. \frac{x^6}{6} \right|_0^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{32}{3}$$

- Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_a^b x \, dx$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\int_a^b x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Bemerkung: Dieses Resultat kann auch elementar erhalten werden, indem man die Formel für die Fläche eines Trapezes anwendet!

Mittelwert einer Funktion: Konzept



- *Idee* des Mittelwerts von $f(x)$ auf $[a, b]$: Durchschnitt aller Funktionswerte
- *Definition* des *Mittelwert* μ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das
  - eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat und
  - dessen Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht.

Mittelwert einer Funktion: Berechnung

(In 2 Dimensionen $\hat{=}$ Schwerpunkt einer Fläche)

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Der Mittelwert μ von $f(x)$ auf $[a, b]$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.}$$

Bemerkung

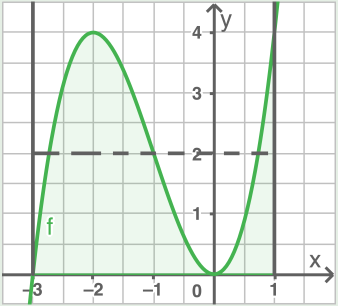
Man beachte, dass bei dieser Formel nicht vorausgesetzt wird, dass $f(x) \geq 0$ gilt!

Mittelwert einer Funktion: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie den Mittelwert von $f(x) = x^3 + 3x^2$ auf dem Intervall $[-3, 1]$.

$$\mu = \frac{1}{1-(-3)} \int_{-3}^{1} (x^3 + 3x^2)\,dx = \frac{1}{4} \cdot 8 = \underline{\underline{2}}$$

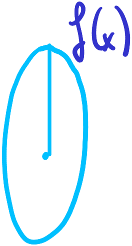


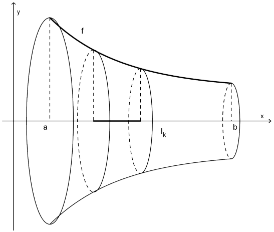
$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

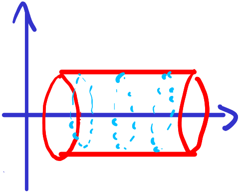
arithmetische Mittel

Rotationsvolumen: Konzept

Rotationskörper einer Funktionskurve:







Idee zur Berechnung des Rotationsvolumens:

- Approximation des Körpers durch Zylinderstücke
- Approximatives Volumen als Summe der Volumina aller Zylinderstücke
- Exaktes Volumen im Limes unendlich feiner Unterteilung

Fläche der Kreisscheibe $= \pi r^2 = \pi(f(x))^2$

Rotationsvolumen: Berechnung

- Volumen eines senkrechten Kreiszylinders mit Radius r und Höhe h:
$$V = \pi r^2 h$$
- Zerlegung in n Stücke; Volumen v_k des k-ten Zylinderstücks:
$$v_k = \pi \cdot (f(\xi_k))^2 \cdot \Delta x_k \quad (x_k \le \xi_k \le x_{k+1})$$
- Approximation des Gesamtvolumens:
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$
- Exakte Formel im Limes $n \to \infty$:
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k))^2 \cdot \Delta x_k.$$
- Notation als Integral:
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Rotationsvolumen: Resultat und Beispiel

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Das Volumen des durch Rotation von $f(x)$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers ist

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.}$$

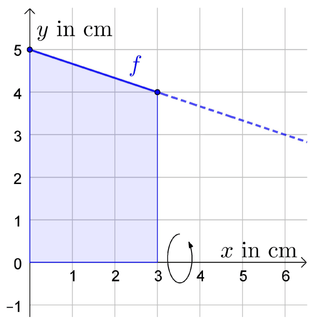
Beispiel

Das Volumen einer Kugel vom Radius R ist $V = \frac{4\pi}{3} R^3$. Wir bestätigen diese Formel durch die Anwendung der Formel für ein Rotationsvolumen auf eine geeignete Funktion.

Rotationsvolumen: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der abgebildeten Gerade im Intervall $[0, 3]$ um die x-Achse entsteht.



1 Gleichung für f finden

$$f(x) = mx + q = \underline{\underline{-\frac{1}{3}x + 5}}$$

2 Rotationsvolumen $V = 61\pi$

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x + 5\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 25\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{27}x^3 \Big|_0^3 - \frac{5}{3}x^2 \Big|_0^3 + 25x \Big|_0^3 \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{27} 3^3 - \frac{5}{3} 3^2 + 25 \cdot 3 \right]$$

$$= \pi \left[1 - 15 + 25 \cdot 3 \right]$$

$$= \underline{\underline{\pi \cdot 61}}$$

Gesucht: Rotationsvolumen von $f(x) = \cos(x)$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$u = \cos(x)$

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} u^2 dx \quad \cancel{= -\pi \int_0^{\pi/2} \frac{u^2}{\sin(x)} du}$$

$du = -\sin(x) dx$

P.I.

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx$$

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

$$= \pi \left[\cancel{\sin(x) \cdot \cos(x) \Big|_0^{\pi/2}} + \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2 dx \right]$$

$$= \pi \left[\sin(\tfrac{\pi}{2}) \cdot \cancel{\cos(\tfrac{\pi}{2})}^{0} - \cancel{\sin(0)}^{0} \cdot \cos(0) + \int_0^{\pi/2} \left(1 - (\cos(x))^2\right) dx \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} dx - \pi \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^2 dx}$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} - V \Leftrightarrow 2V = \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{V = \frac{\pi^2}{4}}}$$

$$\int \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx \overset{\text{P.I.}}{=} (\sin(x))^2 - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \cos(x) \sin(x)\, dx = (\sin(x))^2$$

$$\Leftrightarrow \int \cos(x) \sin(x)\, dx = \frac{1}{2} (\sin(x))^2 + C$$

Rotationsvolumen: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f(x) = \cos(x)$ im Intervall $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.