Integrationsmethoden: Teil 2

Yannis Bähni

XXM1.AN2

28.02.2024

Überblick

1. Integration durch Partialbruchzerlegung

2. Integration durch Substitution

Partialbruchzerlegung: Motivation durch ein Beispiel

Beispiel

Gesucht ist das Integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$$

- Wir zerlegen den Integranden $\frac{1}{x^2-1}$ in eine *Summe* von möglichst einfachen Termen.
- Es gilt:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

- Wir können jetzt integrieren und erhalten

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$$

- Wie kann man diese Zerlegung systematisch finden?

Partialbruchzerlegung: Erklärung durch ein Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist das Integral

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

- Die Nullstellen des Nenners x^2-1 sind $x_1=1$, $x_2=-1$.
- Wir erhalten damit den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

- Zurückrechnen:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

ergibt die Bedingung:

$$1=A(x+1)+B(x-1)$$

Partialbruchzerlegung: Erklärung durch ein Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht ist das Integral $\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

- ergibt die Bedingung:

$$1 = A(x+1) + B(x-1).$$

  Einsetzen von $x=-1$ bzw. $x=1$ in die letzte Gleichung:

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

- Integration:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Partialbruchzerlegung: Systematisches Vorgehen

- Bestimmung der Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Nennerpolynoms $q(x)$, mit Vielfachheiten
- Zuordnung eines Partialbruchs zu jeder Nullstelle x_k von $q(x)$, $1 \le k \le n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x - x_1}}_{\text{einfache Nullstelle } x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2}}_{\text{doppelte Nullstelle } x_2} + \ldots,$$

  mit noch unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \ldots$.
- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen!
- Integration von $f(x)$ durch Integration der Partialbrüche und Addition:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x - x_1}\,\mathrm{d}x &= \ln|x - x_1| + C, \\
\int \frac{1}{(x - x_1)^r} &= -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{(x - x_1)^{r-1}} + C \quad (r \ge 2).
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung: Bemerkungen

Bemerkung

Partialbruchzerlegung ist nicht in erster Linie eine Integrationstechnik, sondern eine spezielle Art, rationale Funktionen darzustellen, die die Integration erleichtert.

Bemerkung

Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. falls $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$ gilt: Zuerst $f(x)$ in der Form "Polynom $+$ echt gebrochen-rationale Funktion" darstellen. D.h. wir schreiben $f(x)$ in der Form

$$f(x) = n(x) + r(x),$$

wobei $n(x)$ ein Polynom und $r(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$ eine echt gebrochen-rationale Funktion ist, d.h. $\deg(\tilde{p}(x)) < \deg(\tilde{q}(x))$.

Vorgehen bei Problemen mit Faktorisierung des Nenners

Falls das Nennerpolynom sich *nicht* vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt, also z.B. im Fall $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, treten Partialbrüche der Form $\frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\gamma^2}$ oder $\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}$ auf (mit $\gamma \neq 0$). Diese lassen sich wie folgt integrieren:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right) + C, \\ \int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x-\beta}{\gamma} + C. \end{aligned}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung eines Grundintegrals

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

bzw. ein Beispiel für ein Integral vom Typ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ (siehe auch Integration durch Substitution).

Partialbruchzerlegung: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{4x^2 + 9x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4} \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{4x^2+9x-4}{x^3+3x^2-4} \quad \text{Partialbruchzerlegung}$$

1. Nullstellen des Nenners und Zählers bestimmen.

Zähler: $x_\pm = \frac{-9 \pm \sqrt{81+4\cdot 4\cdot 4}}{8} = \underline{\underline{-\frac{9}{8} \pm \frac{\sqrt{145}}{8}}}$

(Mitternachtsformel)

Nenner: $(x^3+3x^2-4):(x-1) = \underline{x^2+4x+4}$

$-(x^3-x^2)$

(Nullstelle raten + Polynom-division)

$4x^2-4$

$-(4x^2-4x)$

$4x-4$

$-(4x-4)$

0

$x^3+3x-4 = (x-1)\cdot(x^2+4x+4) = \underline{\underline{(x-1)(x+2)^2}}$

Wegen Ordnung der Nullstelle -2!

2. $$\boxed{\frac{4x^2+9x-4}{x^3+3x^2-4} \overset{PBZ}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}} \quad A,B,C \in \mathbb{R}$$

$\cdot$ HN

$\Leftrightarrow 4x^2+9x-4 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$

$\Leftrightarrow 4x^2+9x-4 = \cancel{Ax^2} + \cancel{4Ax} + 4A + \cancel{Bx^2} + \cancel{Bx} - 2B + \cancel{Cx} - C$

$\Leftrightarrow 4x^2+9x-4 = (A+B)\underline{x^2} + (4A+B+C)\underline{x} + (4A-2B-C)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 4 & \text{I} \\ 4A + B + C = 9 & \text{II} \\ 4A - 2B - C = -4 & \text{III} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A = 1} \quad \underline{B = 3} \quad \underline{C = 2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{4x^2 + 9x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}}}$$

3. Integral berechnen

$$\int \frac{4x^2 + 9x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4} = \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{3}{x+2} + \int \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$= \underline{\underline{\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + C}}.$$

Wieso

$$\int \frac{2}{(x+2)^2} dx = -\frac{2}{x+2} + C.$$

$$\int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} + C$$

$$= \underline{\underline{-u^{-1} + C}}$$

Integration durch Substitution: Beispiel

Beispiel

- *Vorsicht:* Das Integral
$$\int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$
kann *nicht* analytisch berechnet werden.
- *Ziel:* Berechnung des Integrals
$$\int x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$
- *Idee:* Substitution $u = x^2$ durchführen
- Es müssen aber alle x-abhängigen Terme im Integral substitutiuert werden, auch die Grenzen (bei bestimmten Integralen) und das Symbol $\mathrm{d}x$!
- Um $\mathrm{d}x$ zu substituieren, muss die Substitutionsgleichung $u = x^2$ abgeleitet werden, man erhält dabei $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$, also $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$

Aufgabe

Versuchen Sie, die unbestimmten Integrale

$$\cancel{\int \cos(x^2)\,dx} \quad \text{und} \quad \int x\cos(x^2)\,dx$$

zu berechnen.

Behauptung:

$$\int \cos(x^2)\,dx = \boxed{\frac{1}{2x}\sin(x^2)} + C$$

$$\frac{d}{dx}$$

$$\left(\sin(x^2)\right)' = \cos(x^2)\cdot 2x \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\left(\frac{1}{2x}\sin(x^2)\right)' = \left(\frac{1}{2x}\right)'\cdot \sin(x^2) + \frac{1}{2x}\left(\sin(x^2)\right)'$$

(Produktregel)

Aufgabe

$$\int \ln(x^2)\,dx = 2\int \ln(x)\,dx \quad \checkmark$$

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cos(x^2) + \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2\cdot 2x\,\sin(x^2)\,dx}_{\int x^3\sin(x^2)\,dx}$$

Substitution $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \int x\cos(u)\,dx$$

$$= \int \cancel{x}\cos(u)\,\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$$

Integration durch Substitution: Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:

$$u = x^2, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

- Einsetzen von $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$ ins Integral $\int x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int x \cdot \cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,\mathrm{d}u$$

- Berechnung des Integrals in der neuen Variable u:

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin(u) + C$$

- Rücksubstitution:

$$\frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$$

Integration durch Substitution: Unbestimmte Integrale

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution durch Einsetzen von $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ ins Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \phi(u)\,\mathrm{d}u$$

  (alle x-abhängigen Terme sollten sich wegkürzen)
- Berechnung des Integrals in der neuen Variable u:

$$\int \phi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(u) + C$$

- Rücksubstitution:

$$\Phi(u) + C = \Phi(g(x)) + C.$$

Integration durch Substitution: Bestimmte Integrale

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution durch Einsetzen von $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ ins Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} \phi(u)\,\mathrm{d}u$$

- Berechnung des Integrals in der neuen Variable u:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} \phi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

Integration durch Substitution: Beispiele

Beispiel

Berechnen Sie das bestimmte Integral (Substitution)

$$\int_0^3 \frac{6t}{\sqrt{2+3t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad 6t = (2+3t^2)'$$

$u = 2 + 3t^2 \qquad du = 6t\,dt$

$$\int_0^3 \frac{6t}{\sqrt{2+3t^2}}\,dt = \int_{u(0)}^{u(3)} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_2^{29} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= 2\sqrt{u}\,\Big|_2^{29} = \underline{\underline{2\left(\sqrt{29}-\sqrt{2}\right)}}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

Integration durch Substitution: Beispiele

Beispiel

Sei $f(x)$ eine beliebige Funktion. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$$

Integration durch Substitution: Beispiele

Beispiel

Seien $f(x)$ eine beliebige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die Regeln über Integrale von verschobenen Funktionen

$$\int f(x-k)\,\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

und von gestreckten/gestauchten Funktionen

$$\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

(siehe AN1 / AN2 Vorlesung 1) können als Spezialfälle von Integration durch Substitution aufgefasst werden!