Integrationsmethoden: Teil 1

Yannis Bähni

XXM1.AN2

21.02.2023

Überblick

1. **Das unbestimmte Integral (Repetition)**
   - Stammfunktion und unbestimmtes Integral
   - Stammfunktionen von Polynomen
   - Elementare Integrationsregeln
   - Integrale der Grundfunktionen
   - Elementare Integrationsregeln

2. **Partielle Integration**
   - Grundidee
   - Beispiele

Stammfunktion

Definition

Sei $f(x)$ eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* von $f(x)$, falls für alle $x \in I$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

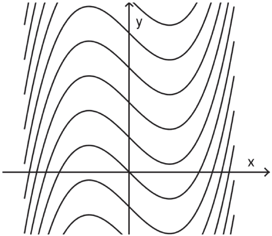

Abbildung: Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Satz

- *Voraussetzung: $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$ auf dem Intervall I, d.h.*
$$F'(x) = f(x).$$
- *Aussage: Für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ ist die Funktion*
$$G(x) = F(x) + C$$
ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beispiel

- Wir suchen Stammfunktionen von $f(x) = 3x + 2$.
- Gesehen: $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$.
- Dann ist auch $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 9$ eine Stammfunktion von $f(x)$, denn es gilt ebenfalls $G'(x) = f(x)$.

Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Satz

- *Voraussetzung: $F(x)$ und $G(x)$ sind zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x)$ auf dem Intervall I, d.h.*
$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = f(x)$$
- *Aussage: $F(x)$ und $G(x)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, d.h. es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass gilt:*
$$F(x) = G(x) + C.$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Wir suchen Stammfunktionen von $f(x) = 3x + 2$.
- Gesehen: $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$.
- Für jedes $C \in \mathbb{R}$ ist $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. *Es gibt keine weiteren Stammfunktionen von $f(x)$.*

Unbestimmtes Integral: Definition

Definition

- Das *unbestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I ist die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$.
- Notation:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Die Funktion $f(x)$ heisst auch der *Integrand* des Integrals.

Beispiel (Fortsetzung)

- Das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = 3x + 2$ ist
$$\int (3x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Integrale der elementaren Funktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von Potenzfunktionen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Beispiel

Unbestimmte Integrale von 1, x, x^2, x^3, $\ldots$:

- $\displaystyle\int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$
- $\displaystyle\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$
- $\displaystyle\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$
- $\displaystyle\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$

Integrale von Linearkombinationen

Satz

- *Voraussetzung: Es seien die unbestimmten Integrale $F(x) + C$ und $G(x) + C$ der Funktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist*

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Integrationsregeln: Beispiele

Beispiel

a) $$\int (-13x^3)\,\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}x^4 + C$$

b) $$\int (x^4 - x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

c) $$\int (8x^3 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x = 2x^4 - 2x^2 + 2x + C$$

Integrale der Grundfunktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von Potenzfunktionen:

a) $$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$

b) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Unbestimmte Integrale von Exponential- und Logarithmusfunktionen:

c) $$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

d) $$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

e) $$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$$

f) $$\int \log_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x\cdot\ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

Integrale der elementaren Funktionen

Satz

Unbestimmte Integrale von trigonometrischen Funktionen:

g) $$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

h) $$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

i) $$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$

Unbestimmte Integrale von weiteren Grundfunktionen:

j) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

k) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

l) $$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$

Integrale von Linearkombinationen

Satz

- *Voraussetzung: Es seien die unbestimmten Integrale $F(x) + C$ und $G(x) + C$ der Funktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist*

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Integrale von verschobenen Funktionen

Satz

- *Voraussetzung: Es sei das unbestimmte Integral $F(x) + C$ der Funktion $f(x)$ bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der um den Betrag k in x-Richtung verschobenen Funktion $g(x) = f(x-k)$ ist*

$$\int f(x-k)\,\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Integrale von gestreckten Funktionen

Satz

- *Voraussetzung: Es sei das unbestimmte Integral $F(x) + C$ der Funktion $f(x)$ bekannt, d.h.*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

- *Aussage: Das unbestimmte Integral der um den Faktor k in x-Richtung gestreckten/gestauchten Funktion $g(x) = f(k \cdot x)$ ist*

$$\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0).$$

Partielle Integration: Theorie

- Ausgangspunkt: Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ der Differentialrechnung
- Wie kann daraus eine Integrationsregel gewonnen werden?
- Umformung:

$$u'(x) \cdot v(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x) \cdot v(x)) - u(x) \cdot v'(x).$$

- Integration:

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

- Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Die Regel ist nur nützlich, wenn die Rollen von $u'(x)$ und $v(x)$ geschickt verteilt werden!

Partielle Integration: Beispiel

Beispiel

- Gesucht ist das unbestimmte Integral
$$\int x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
- Wir setzen $x = v(x)$ und $e^{-x} = u'(x)$, d.h.
$$\int x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{x}_{=v(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{=u'(x)}\,\mathrm{d}x = \ldots$$
- Dann gilt $u(x) \cdot v(x) = -e^{-x} \cdot x$ und $u(x) \cdot v'(x) = (-e^{-x}) \cdot 1$.
- Es folgt
$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{=v(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{=u'(x)}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{(-e^{-x})}_{=u(x)} \cdot \underbrace{x}_{=v(x)} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{=u(x)} \cdot \underbrace{1}_{=v'(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -e^{-x} \cdot x - e^{-x} + C = e^{-x} \cdot (-x-1) + C. \end{aligned}$$

Partielle Integration: Beispiel

Beispiel

Gesucht ist das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x,$$

Hinweis: künstlich einen Faktor 1 ins Integral einfügen und dann partiell integrieren!

Partielle Integration: Beispiel

Beispiel

Gesucht ist das unbestimmte Integral

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: zweimal partiell integrieren!