1 Lineare zeitinvariante Systeme

1.1 Eigenschaften

Eigenschaften LTI-Systeme

1. Stabilität
   $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < N < \infty$
2. Linearität
   $W\left\{\sum_{k=1}^{N} a_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} W\{a_n x_n(t)\}$
3. Zeitinvarianz
   $W\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$
4. Kausalität
   $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

1.2 Systemantwort

Die Sprung-/Impulsantwort beschreibt Systemantwort vollständig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

$$a(t-\tau) = W\{s(t-\tau)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

$$h(t-\tau) = W\{\delta(t-\tau)\}$$

1.3 Abtasttheorem

Durch die Abtastung wird das Spektrum von $f(t)$ unendlich oft um die Frequenzen $n \cdot \omega_a$ reproduziert.

$$F_A(\omega) = \frac{1}{T_A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \tag{3}$$

$$2\omega_g \leq \omega_A$$

2 Transformationen

2.1 Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

2.2 Fourierreihe, komplex

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{5}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

2.3 Fourierintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{6}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

2.3.1 Eigenschaften

1. Linearität
   $af_1(t) + bf_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
2. Zeitverschiebung
   $f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. Frequenzverschiebung
   $f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(\omega \mp \omega_0)$
4. Faltung
   $f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
   $f_1(\omega) \cdot f_2(\omega) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi} F_1(t) * F_2(t)$

2.4 DFT

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i2\pi kn/N} \tag{8}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N} \tag{9}$$

2.5 Hilbert Transformation

$$x_{\mathrm{ht}}(t) = x_{\mathrm{r}}(t) * h(t) \tag{10}$$
$$H(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) \tag{11}$$

2.6 z Transformation

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{12}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) z^{n-1}\,\mathrm{d}z \tag{13}$$

2.6.1 Übertragungsfunktion

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}} = k \frac{\prod_{k=1}^{q} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p} (1 - p_k z^{-1})} \tag{14}$$

2.6.2 Verschiebung im Zeitbereich

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [x(n-m)] z^{-n} = z^{-m} X(z) \tag{15}$$
$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+m)] z^{-n} = z^{m} \left[x(t) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n} \right] \tag{16}$$

3 Filter

3.1 FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k) \tag{17}$$

3.2 IIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a_k y(n-k) \tag{18}$$

4 Entropie

4.1 Informationsgehalt

$$I_i = \log_2 \frac{1}{p_i} \tag{19}$$

4.2 Entropie

Mittlerer Informaionsgehalt

$$H(s) = E\{I\} = -\sum_{i=0}^{n-1} p_i \log_2 p_i \tag{20}$$
$$0 \leq H(s) \leq \log_2 n \tag{21}$$

$$x_1 = 2 \tag{22}$$

Für $H(s) = \log_2 n$ Gleichverteilung und völlige Ungewissheit.