Anwendungen der Integralrechnung: Teil 2

Yannis Bähni

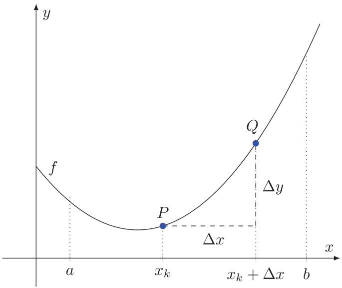
XXM1.AN2

13.03.2024

Überblick

Bogenlänge einer Kurve: Konzept

Ziel: *Länge* einer Kurve berechnen



Berechnungsidee:

- Approximation der Kurve durch Geradenstücke
- Approximative Länge als Summe der Längen aller Geradenstücke
- Exakte Länge im Limes unendlich feiner Unterteilung

Bogenlänge einer Kurve: Berechnung

- Zerlegung in n Stücke; Länge l_k des k-ten Geradenstücks:

$$l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \Delta x_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}.$$

- Approximation für die Gesamtlänge:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$$

- Exaktes Resultat im Limes $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}.$$

- Notation als Integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Bogenlänge einer Kurve: Resultat, Beispiel

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Die Länge der Funktionskurve von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ist

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Beispiel

Berechnen Sie die Länge der Funktionskurve der Funktion $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$ im Intervall $I = [0, 2]$

i) mit einer elementargeometrischen Formel,

ii) mit der Integralformel.

Bogenlänge einer Kurve: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie die Länge der Funktionskurve der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $I = [0, 1]$.

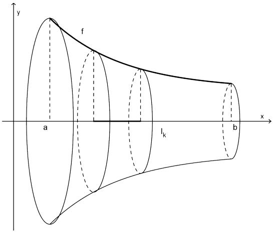
Bogenlänge einer Kurve: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie die Länge der Funktionskurve der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ im Intervall $I = [-2, 2]$.

Mantelfläche: Konzept

Rotationskörper einer Funktionskurve:



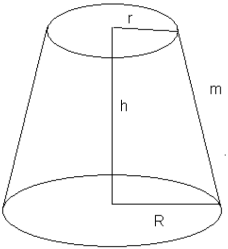
Ziel: Berechnung der Mantelfläche, d.h. der Oberfläche ohne Boden/Deckel

Vorgehen zur Berechnung der Mantelfläche:

- Approximation des Körpers durch *Kegelstümpfe*
- Approximative Mantelfläche als Summe der Mantelflächen aller Kegelstümpfe
- Exakte Mantelfläche im Limes unendlich feiner Unterteilung
- Kombination von Elementen der Berechnung von Rotationsvolumina und Bogenlängen

Mantelfläche: Kegelstumpf

Vorbereitung: *Kegelstumpf*



Tatsachen über einen Kegelstumpf:

- Mantelfläche: $M = \pi \cdot m \cdot (R + r)$
- Länge der Mantellinie m: $m = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$
- Also

$$M = \pi \cdot \sqrt{h^2 + (R - r)^2} \cdot (R + r)$$

Mantelfläche: Berechnung

- Zerlegung in n Kegelstümpfe (Zylinderstücke genügt nicht);
  Mantelfläche M_k des k-ten Kegelstumpfs:

$$M_k = \pi \cdot \sqrt{h_k^2 + (R_k - r_k)^2} \cdot (R_k + r_k)$$

- Mit $h_k = \Delta x_k$, $r_k = f(x_k)$, $R_k = f(x_{k+1})$, also
  $R_k - r_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = \Delta y_k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} M_k &= \pi \cdot (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \\ &= \pi \cdot (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

- Approximation für die ganze Mantelfläche:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Mantelfläche: Berechnung [Fortsetzung]

- Exakte Formel im Limes $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k. \end{aligned}$$

- Notation als Integral:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Mantelfläche: Resultat

Satz

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Die Mantelfläche des durch Rotation von $f(x)$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers ist

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mantelfläche: Beispiel

Beispiel

Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

im Intervall $I = [0, 2]$

i) mit der elementargeometrischen Formel,

ii) mit der Integralformel.

Mantelfläche: Beispiel

Beispiel

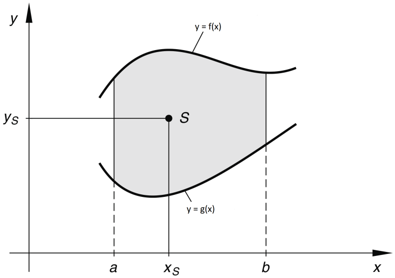
Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

im Intervall $I = [0, 1]$.

Schwerpunkt ebener Flächen: Konzept

Ziel: *Schwerpunkt* einer ebenen Fläche berechnen



Berechnungsidee:

- Approximation der Fläche durch Rechtecke
- Approximativer Schwerpunkt als gewichtetes Mittel aller Teilschwerpunkte
- Exaktes Resultat im Limes unendlich feiner Unterteilung

Schwerpunkt ebener Flächen: Berechnung

- Teilungspunkte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, Approximation der Fläche durch n Rechtecke
  Schwerpunkt S_k des k-ten Rechtecks:
  $$S_k \approx \left(\xi_k; \frac{1}{2}(f(\xi_k) + g(\xi_k))\right),$$
  wobei $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
- Schwerpunkt der Gesamtfigur, durch Rechtecke approximiert:
  $$\vec{r}(S) \approx \sum_{k=1}^{n} \vec{r}(S_k) \cdot \frac{\Delta A_k}{A}$$
  wobei ΔA_k: Fläche des k-ten Rechtecks, A: Gesamtfläche
- x-Koordinate von S:
  $$x_S \approx \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \frac{(f(\xi_k) - g(\xi_k)) \cdot \Delta x_k}{A} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot (f(\xi_k) - g(\xi_k)) \cdot \Delta x_k$$

Schwerpunkt ebener Flächen: Berechnung [Fortsetzung]

- x-Koordinate von S:

$$x_S \approx \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \frac{(f(\xi_k) - g(\xi_k)) \cdot \Delta x_k}{A} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot (f(\xi_k) - g(\xi_k)) \cdot \Delta x_k$$

- y-Koordinate von S:

$$\begin{aligned} y_S &\approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\xi_k) + g(\xi_k)) \cdot \frac{(f(\xi_k) - g(\xi_k)) \cdot \Delta x_k}{A} \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k)^2 - g(\xi_k)^2) \cdot \Delta x_k . \end{aligned}$$

- Exakte Formeln im Übergang zu unendlich vielen und unendlich dünnen Rechtecken!

- Im Limes $n \to \infty$ Übergang von Summe zu Integral:

Satz

Schwerpunkt $S = (x_S; y_S)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A, die von den Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ berandet wird:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A}\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\ y_S &= \frac{1}{2A}\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Berechnung von A ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

- Wenn möglich Symmetrien ausnutzen!

Beispiel

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Quadrats mit Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Beispiel

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks mit Eckpunkten $(0,0)$, $(-1,0)$ und $(0,1)$.

Satz

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_S; 0; 0)$ eines Rotationsköpers mit Volumen V, der durch Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ gebildet wird, wobei $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$ gilt, ist durch folgende Formel gegeben:

$$x_S = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Beispiel

Berechnen Sie den Schwerpunkt des durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{4 - x}$ um die x-Achse, $0 \leq x \leq 4$, entstehenden Rotationskörpers.