Serie 05: Spezielle Verteilungen

Aufgabe 1

Die PDF einer stetigen Zufallsvariablen X ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} a(2x - x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie gross muss a sein, damit f eine PDF ist?

b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(X \leq 1.2)$ $\quad$ $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ $\quad$ $P(X > 1)$

c) Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$

Lösung:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 a(2x - x^2)\,dx = \left[a\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2 = a\left(4 - \frac{8}{3}\right) = a \cdot \frac{4}{3} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$

b) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_0^u \frac{3}{4}(2u - u^2)\,du = \frac{3}{4} \cdot \left[u^2 - \frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{3}{4} \cdot \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$

$$P(X \leq 1.2) = F(1.2) = \frac{3}{4} \cdot \left(1.2^2 - \frac{1.2^3}{3}\right) = 0.648$$

$$P(0.5 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = \frac{3}{4} \cdot \left(1.5^2 - \frac{1.5^3}{3}\right) - \frac{3}{4} \cdot \left(0.5^2 - \frac{0.5^3}{3}\right) = 0.6875$$

$$P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \left(1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 0.5$$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\,dx = \int_0^2 \frac{3}{4} \cdot (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = 1$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2\,dx = \int_0^2 \frac{3}{4} \cdot (2x^3 - x^4)\,dx = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{32}{4} - \frac{32}{5}\right) = 1.2$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.2 - 1^2 = 0.2$

Diskrete Verteilungen

Aufgabe 2

In einer Urne sind drei weisse und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln zufällig herausgezogen

a) gleichzeitig
b) nacheinander, ohne Zurücklegen der Kugeln (mit Reihenfolge)
c) nacheinander, mit Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel (mit Reihenfolge).

Geben Sie für jeden der Fälle a)-c) einen geeigneten Ergebnisraum Ω mit Zähldichte an.
Geben Sie für die Fälle b) und c) einen Wahrscheinlichkeitsbaum an.
Im Fall b) bzw. c) gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln an. Bestimmen Sie die Zähldichte (PMF) $f(k) = P(X = k)$, die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) $F(k) = P(X \leq k)$.
Fertigen Sie Plots der CDF und PMF an.

<u>Lösung:</u>

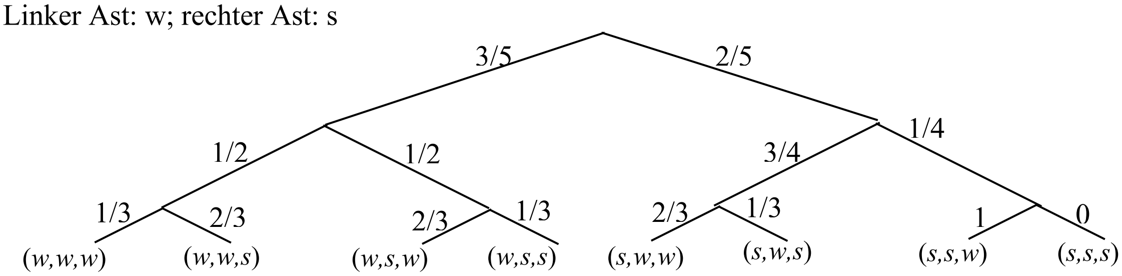
a) Reihenfolge interessiert nicht.
$\Omega = \{www, wws, wss\}$:

Ω	www	wws	wss
$P(\{\omega\})$	0.1	0.6	0.3

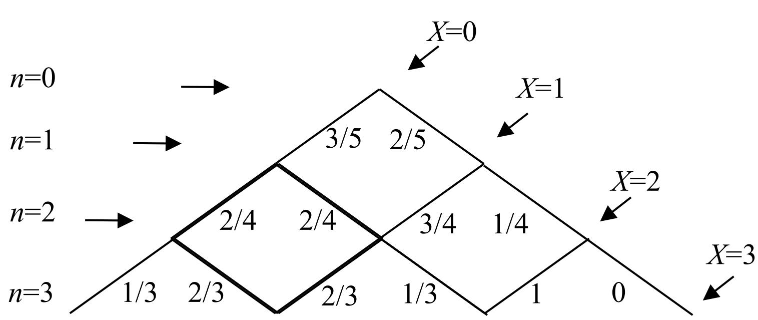
b) $\Omega = \{(w,w,w),(w,w,s),(w,s,w),(s,w,w),(w,s,s),(s,w,s),(s,s,w)\}$

Ω	(w,w,w)	(w,w,s)	(w,s,w)	(s,w,w)	(w,s,s)	(s,w,s)	(s,s,w)
$P(\{\omega\})$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

Linker Ast: w; rechter Ast: s



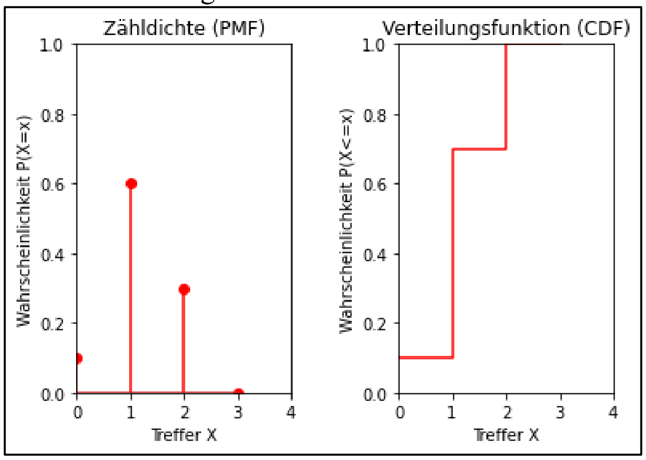
In den Fällen a) und b) ist X hypergeometrisch verteilt:



Schwarze Kugeln:

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$	$3\cdot[\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}]=\frac{3}{5}$	$3\cdot[\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}]=\frac{3}{10}$	0
$P(X\leq k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}+\frac{3}{5}=\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=1$	$\frac{1}{10}+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}+0=1$

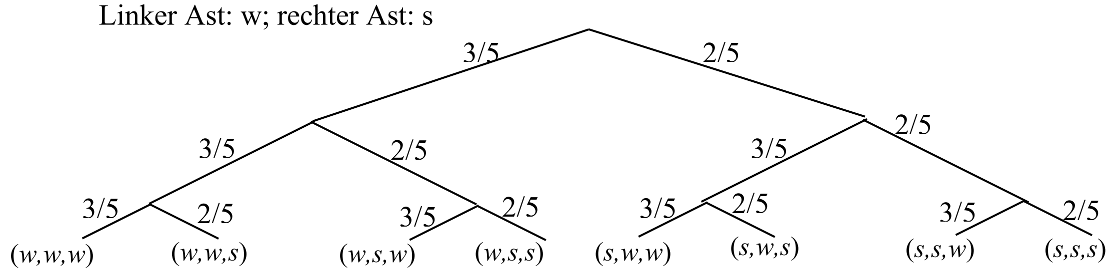
Verteilungsfunktion (CDF) und Zähldichte (PMF)
für schwarze Kugeln:



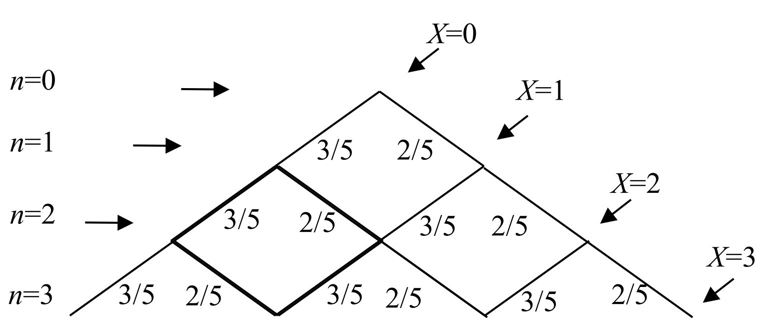
c) $\Omega=\{(w,w,w),(w,w,s),(w,s,w),(s,w,w),(w,s,s),(s,w,s),(s,s,w),(s,s,s)\}$

Ω	(w,w,w)	$(w,w,s),(w,s,w),(s,w,w)$	$(s,s,w),(s,w,s),(w,s,s)$	(s,s,s)
$P(\{\omega\})$	0.216	0.144	0.096	0.064

Linker Ast: w; rechter Ast: s



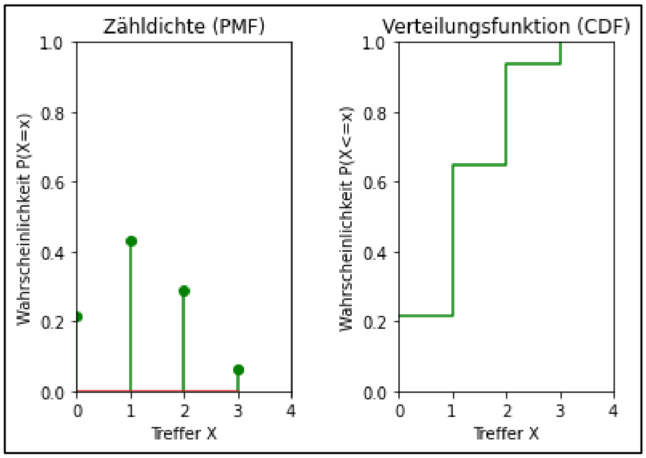
Im Fall c) ist die Zufallsvariable X binomialverteilt:



Schwarze Kugeln:

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$	$3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$	$3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{36}{125}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125}$
$P(X\le k)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{27}{125}+\frac{54}{125}=\frac{81}{125}$	$\frac{27}{125}+\frac{54}{125}+\frac{36}{125}=\frac{117}{125}$	$\frac{27}{125}+\frac{54}{125}+\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=\frac{125}{125}=1$

Verteilungsfunktion (CDF) und Zähldichte (PMF) für schwarze Kugeln:



Aufgabe 3

Eine faire Münze mit den Seiten Zahl und Kopf wird viermal geworfen. Verwenden Sie die Zufallsvariable $X =$ „Anzahl Zahl“.

a) Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der CDF $F(x) = P(X \le x)$ von X aus: $P(X = 2)$, $P(X > 2)$, $P(X > 0)$, $P(1 \le X < 3)$, $P(1 \le X \le 3)$, $P(1 < X \le 3)$, $P(1 < X < 4)$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal Zahl auftritt.

c) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zweimal Zahl auftritt.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal Zahl auftritt.

e) Fertigen Sie eine Tabelle und eine Skizze der PMF $f(x) = P(X = x)$ und der CDF $F(x) = P(X \le x)$ von X an.

Lösung:

Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^4$. Jedes Ergebnis ist gleichwahrscheinlich: $p(\omega) = \frac{1}{16}$.

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit

Zähldichte (PMF) $P(X = k) = \binom{4}{k}\frac{1}{16}$ und der unten angegebenen

Verteilungsfunktion (CDF) $F(x) = P(X \le x)$.

a) $P(X = 2) = F(2) - F(1)$, $P(X > 2) = 1 - F(2)$, $P(X > 0) = 1 - F(0)$,
$P(1 \le X < 3) = F(2) - F(0)$, $P(1 \le X \le 3) = F(3) - F(0)$,
$P(1 < X \le 3) = F(3) - F(1)$, $P(1 < X < 4) = F(3) - F(1)$.

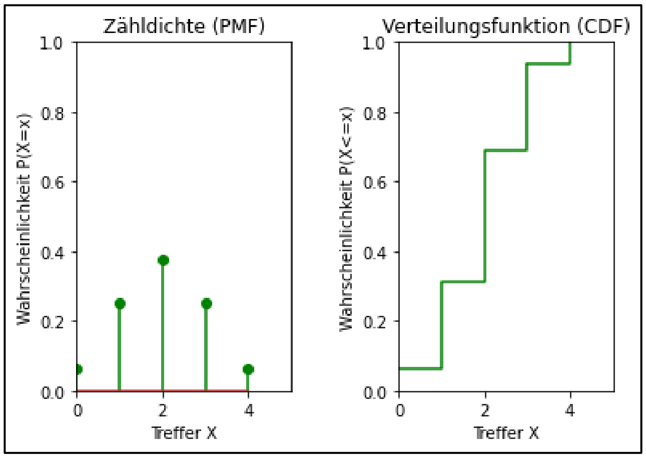
b) $P(X = 2) = \binom{4}{2}\frac{1}{16} = \frac{3}{8}$

c) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{5}{16}$.

d) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

e)

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\binom{4}{0}\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$	$\binom{4}{1}\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$	$\binom{4}{2}\frac{1}{16}=\frac{6}{16}$	$\binom{4}{3}\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$	$\binom{4}{4}\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$
$P(X\le k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}=\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}=\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}=\frac{15}{16}$	$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}$



Aufgabe 4

Ein Spieler nimmt an drei aufeinanderfolgenden, unabhängigen Ausspielungen einer Lotterie teil. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei bei jeder der Ausspielungen 20%. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Erfolge. Bestimmen Sie einen geeigneten Ergebnisraum mit Zähldichte für dieses Spiel. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. Skizzieren Sie die PMF und CDF von X.

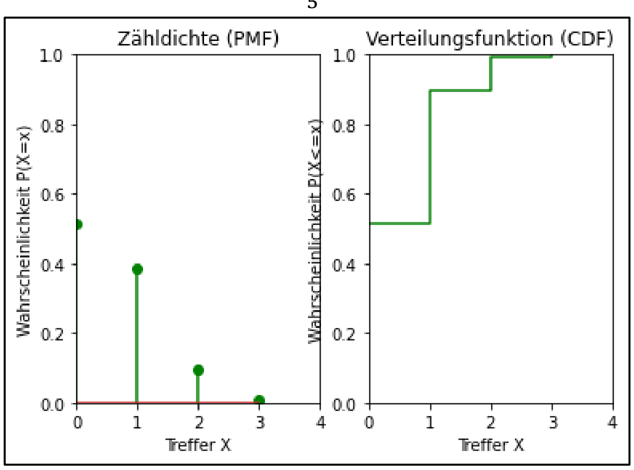
Lösung:

$\Omega = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$ gibt die möglichen Ergebnisse an (1: Erfolg; 0: Misserfolg). Die Zufallsvariable $X \in \{0,1,2,3\}$ bezeichne die Anzahl der Treffer.

Zähldichte (Binomialverteilung) $P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{3-k}$.

$p(0)=0.512$, $p(1)=0.384$, $p(2)=0.096$, $p(3)=0.008$.

Erwartungswert: $E(X)=\frac{3}{5}$.



Aufgabe 5

Die Zufallsvariable X zählt die defekten Maschinenteile in einer Stichprobe von 100 Stück. Die Wahrscheinlichkeit, ein fehlerhaftes Maschinenteil zu erhalten, beträgt 0.01.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 Stück höchstens drei fehlerhaft sind.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von

Lösung:

$X \sim B(10; 0.1)$

a) Binomialverteilung: $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k} \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{100-k} \approx 0.981626$

b) $E(X) = np = 100 \cdot 0.01 = 1, \quad V(X) = npq = 100 \cdot 0.99 \cdot 0.01 = 0.99$

Aufgabe 6

Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist 0.515. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit unter 10 zufällig ausgewählten Geburten genau 6 Knaben zu finden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 6 Knaben zu finden. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Knaben. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung:

Binomialverteilung:

$P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0.515^6 \cdot 0.485^{10-k} \approx 0.2168,$

$P(X \geq 6) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0.515^k \cdot 0.485^{10-k} \approx 0.414376,$

$E(X) = \sum_{k=0}^{10} k \cdot P(X = k) = 10 \cdot 0.515 = 5.15.$

Aufgabe 7

Eine Telefonvermittlung erhält während der Hauptbetriebszeit durchschnittlich 300 Anrufe stündlich. Sie kann maximal 10 Verbindungen pro Minute herstellen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Vermittlung während einer beliebigen gegebenen Minute in der Hauptbetriebszeit überlastet ist, d. h. mehr Anrufe erhält, als sie Verbindungen herstellen kann?

Lösung:

Die Zufallsvariable X Anzahl der Anrufe in einer Minute, ist poissonverteilt mit Parameter

$\lambda = \frac{300}{60} = 5$ [Anrufe pro Minute].

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - e^{-5} \cdot \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} \approx 0.0137$

Aufgabe 8

Es ist bekannt, dass 0.01% einer Bevölkerungsgruppe jährlich durch einen gewissen Unfall getötet werden. Bei einer Versicherung sind 10000 Personen der genannten Bevölkerungsgruppe gegen diesen Unfall versichert. Betrachten Sie die Zufallsvariable $X =$ Anzahl Versicherte, die in einem bestimmten Jahr durch diesen Unfall umkommen.

a) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt die Zufallsvariable X?

b) Welches sind die Werte der Parameter dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung?

c) Welche Approximation eignet sich für diesen Fall? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen Jahr mehr als zwei dieser Versicherten durch den genannten Unfall umkommen.

Lösung:

a), b) Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $p = 0.0001$ und $n = 10000$.

c) Poisson Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p = 1$.

d) Exakt mit Binomialverteilung:

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - 0.9999^{10000} - 10^4 \cdot 0.9999^{9999} \cdot 10^{-4} - \frac{10^4 \cdot 9999}{2} \cdot 0.9999^{9998} \cdot 10^{-8} \approx 0.0803$

Approximiert mit Poisson Verteilung: $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-1}(1 + 1 + 0.5) \approx\ 0.0803$

Aufgabe 9

Wie oft muss mit zwei Würfeln gewürfelt werden, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 oder mehr mindestens einmal die Augensumme 12 zu erhalten? Vergleichen Sie die exakte Lösung mit der Abschätzung, die sich aus der Poissonapproximation ergibt.

Lösung:

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Würfe mit Augensumme 12 bei insgesamt n Würfen. Die Wahrscheinlichkeit mit zwei fairen Würfeln die Augensumme 12 zu würfeln ist 1/36. X ist demnach binomialverteilt mit den Parametern $p = 1/36$ und der unbekanntem Anzahl der Würfe n.

$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - [\frac{35}{36}]^n \geq 0.9 \Leftrightarrow [\frac{35}{36}]^n \leq 0.1 \Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0.1)}{ln(35) - ln(36)} \approx 81.7364$

Also mindestens 82 Mal muss gewürfelt werden.

Mit der Poisson Approximation $\lambda = n \cdot p = \frac{n}{36}$ gilt:

$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-n/36} \geq 0.9 \Leftrightarrow e^{-n/36} \leq 0.1 \Leftrightarrow -n/36 \leq ln(0.1)$

$\Leftrightarrow n \geq -36 \cdot 1\, ln(0.1) \approx 82.8931$

Aufgabe 10

Herr Meier, der in seiner Firma für den Wareneinkauf zuständig ist, erhält eine Lieferung von 5000 elektronischen Bauteilen. Auf dem Transport wurden genau 10 Bauteile (von aussen nicht erkennbar) beschädigt. Herr Meier möchte die Qualität der erhaltenen Ware überprüfen. Darum wählt er zufällig 100 verschiedene Bauteile aus und testet ihre Funktion. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eines der getesteten Bauteile fehlerhaft ist. Verwenden Sie eine geeignete Approximation.

Lösung:

X sei die Anzahl der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe von 100. X ist hypergeometrisch verteilt mit den Parametern $N = 5000$, $M = 10$, $n = 100$.

$P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{4990}{99}}{\binom{5000}{100}} \approx\ 0.1670.$

Approximiert wird mit der Binomialverteilung mit den Parametern $p = 10/5000 = 1/500$ und $n = 100$.

$P(X = 1) = \binom{100}{1} \cdot 0.002 \cdot 0.998^{99} \approx\ 0.1640.$

Aufgabe 11

Fünf Arbeiter, die unabhängig arbeiten, benötigen elektrischen Strom, und zwar jeder mit Unterbrechungen durchschnittlich etwa 10 Minuten pro Stunde. Genügt es, die Stromversorgung so einzurichten, dass 3 Arbeiter gleichzeitig Strom entnehmen können, oder entstehen dann erhebliche Wartezeiten, indem 4 oder 5 Arbeiter gleichzeitig Strom entnehmen wollen?

Lösung:

Sei X die Anzahl der zur gleichen Zeit Strom entnehmenden Arbeiter. X ist binomialverteilt mit den Parametern $p = 10/60 = 1/6$ und $n = 5$.

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [\frac{5}{6}]^5 - 5 \cdot [\frac{5}{6}]^4 \cdot \frac{1}{6} - 10 \cdot [\frac{5}{6}]^3 \cdot [\frac{1}{6}]^2 - 10 \cdot [\frac{5}{6}]^2 \cdot [\frac{1}{6}]^3 \approx 0.0033$

Aufgaben 12

Ein fairer Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der gewürfelten 2-er und Y bezeichne die Anzahl der gewürfelten 5-er.

a) Bestimmen Sie die Matrix mit der gemeinsamen Verteilung von X und Y und die Randverteilungen.

b) Welchen Verteilungen folgen X bzw. Y? Welche Werte haben die Parameter?

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen von X und von Y.

d) Bestimmen Sie die Verteilung des Produktes $X \cdot Y$.

e) Berechnen Sie $E(X \cdot Y)$ und $V(X \cdot Y)$.

Lösung:

a) Die gemeinsame Verteilung ist eine symmetrische Matrix:

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$P(X=x)$
0	$\frac{64}{6^3}$	$\frac{48}{6^3}$	$\frac{12}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{125}{6^3}$
1	$\frac{48}{6^3}$	$\frac{24}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	0	$\frac{75}{6^3}$
2	$\frac{12}{6^3}$	$3/6^3$	0	0	$\frac{15}{6^3}$
3	$1/6^3$	0	0	0	$\frac{1}{6^3}$
$P(Y=y)$	$\frac{125}{6^3}$	$\frac{75}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$	

b) X und Y sind binomialverteilt: $B(3;\frac{1}{6})$.

c) $E(X)=E(Y)=np=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, $V(X)=V(Y)=npq=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$

d)

z	0	1	2	3
$P(X\cdot Y=z)$	$\frac{186}{6^3}$	$\frac{24}{6^3}=\frac{1}{9}$	$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$	0

e) $E(X\cdot Y)=\frac{1}{9}+\frac{2}{36}=\frac{1}{6}\approx 0.1667$, $E((XY)^2)=\frac{1}{9}+\frac{4}{36}=\frac{2}{9}\approx 0.2222$,

$$V(X\cdot Y)=E((XY)^2)-(E(XY))^2=\frac{2}{9}-\frac{1}{6^2}=\frac{7}{36}\approx 0.194$$

Normalverteilung

Aufgabe 13

Gegeben ist die $N(0,1)$ verteilte Zufallsvariable U. Berechnen Sie mit Hilfe der Tabelle (z.B. Papula) der Standardnormalverteilung folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(U \leq 1.52)$ b) $P(U \leq -0.42)$ c) $P(0.2 \leq U \leq 2.13)$ d) $P(-1.01 \leq U \leq 0.25)$ e) $P(|U| \leq 1.69)$
f) $P(U \geq 0.95)$ g) $P(U \leq 1.327)$ h) $P(U > 0.842)$

Lösung:

a) $P(U \leq 1.52) = N(0,1)(1.52) \approx 0.9357$

b) $P(U \leq -0.42) = 1 - P(U \leq 0.42) = 1 - N(0,1)(0.42) \approx 1 - 0.6628 = 0.3372$

c) $P(0.2 \leq U \leq 2.13) = P(U \leq 2.13) - P(U < 0.2) = N(0,1)(2.13) - N(0,1)(0.2)$
$\approx 0.9834 - 0.5793 = 0.4041$

d) $P(-1.01 \leq U \leq 0.25) = P(U \leq 0.25) - P(U \leq -1.01) = P(U \leq 0.25) - \big(1 - P(U \leq 1.01)\big)$
$\approx 0.5987 - 1 + 0.8438 = 0.4425$

e) $P(|U| \leq 1.69) = P(-1.69 \leq U \leq 1.69) = 2P(U \leq 1.69) - 1 \approx 2 \cdot 0.9545 - 1 = 0.9090$

f) $P(U \geq 0.95) = 1 - P(U < 0.95) = 1 - N(0,1)(0.95) \approx 1 - 0.8289 = 0.1711$

g) $P(U \leq 1.327) \approx N(0,1)(1.32) + \frac{7}{10}[N(0,1)(1.33) - N(0,1)(1.32)]$
$\approx 0.9066 + \frac{7}{10}[0.9082 - 0.9066] = 0.9077$

h) $(U > 0.842) = 1 - P(U \leq 0.842) \approx 1 - \left[N(0,1)P(0.84) + \frac{2}{10}[N(0,1)P(0.85) - N(0,1)P(0.84)]\right]$
$= 1 - [0.7995 + \frac{2}{10}[0.8023 - 0.7995]] = 1 - 0.8001 = 0.1999$

Aufgabe 14

Gegeben ist die $N(2; 0.5)$ -verteilte Zufallsvariable X. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(X \leq 2.52)$ b) $P(X \leq 0.84)$ c) $P(1.12 \leq X \leq 3.14)$ d) $P(0.91 \leq X \leq 1.63)$
e) $P(|X| \leq 2.13)$ f) $P(X \geq 0.98)$ g) $P(|X - 2| \leq 1)$

Lösung:

a) $P(X \leq 2.52) = P\left(U \leq \frac{2.52-2}{0.5}\right) = \phi(1.04) = 0.850$

b) $P(X \leq 0.84) = P\left(U \leq \frac{0.84-2}{0.5}\right) = 1 - \phi(2.32) = 1 - 0.9898 = 0.0102$

c) $P(1.12 \leq X \leq 3.14) = P\left(\frac{1.12-2}{0.5} \leq U \leq \frac{3.14-2}{0.5}\right) = \phi(2.28) - \big(1 - \phi(1.76)\big)$
$= 0.9887 - (1 - 0.9608) = 0.9495$

d) $P(0.91 \leq X \leq 1.63) = P\left(\frac{0.91-2}{0.5} \leq U \leq \frac{1.63-2}{0.5}\right) = 1 - \phi(0.74) - \big(1 - \phi(2.18)\big)$
$= 1 - 0.7704 - (1 - 0.9854) = 0.2150$

e) $P(|X| \leq 2.13) = P(-2.13 \leq X \leq 2.13) = P\left(\frac{-2.13-2}{0.5} \leq U \leq \frac{2.13-2}{0.5}\right)$
$= 2 \cdot \phi(0.26) - 1 = 2 \cdot 0.6026 - 1 = 0.2052$

f) $P(X \geq 0.98) = P\left(U \geq \frac{0.98-2}{0.5}\right) = 1 - (1 - \phi(2.04)) = 0.9793$

g) $P(|X-2| \leq 1) = P(|U| \leq 2) = 2\phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$

Aufgabe 15

Die Grösse von 2000 Schülern sei normalverteilt mit Mittelwert 1.55 m und Standardabweichung 0.2 m. Geben Sie die erwartete Zahl der Schüler an, deren Grösse

a) unter 1m, b) zwischen 1.2 und 1.3 m, c) über 2 m liegt.

Lösung:

Die Grösse X ist Normalverteilt mit CDF: $P(X \leq c) = N(1.55{,}0.2)(c)$.

a) $P(X < 1) = N(1.55{,}0.2)(1) = \phi\left(\frac{1-1.55}{0.2}\right) = \phi(-2.75) = 1 - \phi(2.75) \approx 0.003 \Rightarrow 2000 \cdot P(X < 1) \approx 6$, also etwa 6 Schüler.

b) $P(1.2 \leq X \leq 1.3) = N(1.55{,}0.2)(1.3) - N(1.55{,}0.2)(1.2) = \phi\left(\frac{1.3-1.55}{0.2}\right) - \phi\left(\frac{1.2-1.55}{0.2}\right) = \phi(-1.25) - \phi(-1.75) = \phi(1.75) - \phi(1.25) \approx 0.0655$
$\Rightarrow 2000 \cdot P(1.2 \leq X \leq 1.3) \approx 131.181$ also etwa 131 Schüler.

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.0122245 \Rightarrow 2000 \cdot P(X > 2) \approx 24.4489$, etwa 24 Schüler.

Aufgabe 16

Der Durchmesser von Gewindeschrauben sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 10$ mm (Solldurchmesser) und $\sigma = 0.2$ mm. Als Ausschussware gelten Schrauben mit Abweichungen vom Solldurchmesser von 0.3 mm. Zeigen Sie, dass der erwartete Anteil von Ausschussware 13.4% beträgt.

Lösung:

Allgemein gilt:

$N(\mu, \sigma)(x) = N(0{,}1)(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

$N(10{,}0.2)(10.3) - N(10{,}0.2)(9.7) = N(0{,}1)(\frac{10.3-10}{0.2}) - N(0{,}1)(\frac{9.7-10}{0.2}) = 2[N(0{,}1)(\frac{10.3-10}{0.2}) - \frac{1}{2}]$
≈ 0.8664

Aufgabe 17

Die Kapazität eines in grosser Stückzahl hergestellten Kondensators kann als eine normalverteilte Zufallsvariable X angesehen werden.

a) Mit welchem Ausschussanteil ist zu rechnen, wenn die Kapazität höchstens um 8% vom Sollwert $E(X) = 150\mu F$ (Einheit Mikrofarad μF) abweichen darf und die Standardabweichung $S(X) = 8\mu F$ beträgt?

b) Der Toleranzbereich $[150 - c; 150 + c]\mu F$ soll so festgelegt werden, dass sich darin 75.8% der Kondensatoren befinden. Wie muss die Konstante c gewählt werden?

Lösung:

$X \sim N(150{,}8)$

a) $P(|X-150|>12)=1-P(150-12\leq X\leq 150+12)=1-\left(2\cdot\phi\left(\frac{12}{8}\right)-1\right)=2-2\cdot 0.9332$

$=0.1336$

$P(150-c\leq X\leq 150+c)=2\cdot\phi\left(\frac{c}{8}\right)-1\overset{!}{=}0.758$

b) $\Rightarrow \phi\left(\frac{c}{8}\right)\overset{!}{=}\frac{1.758}{2}=0.879\overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow}\frac{c}{8}=1.17\Rightarrow c=9.36$

Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 18

Die Messfehler X eines Messgerätes sind normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 4.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung um weniger als 2 vom wahren Wert abweicht?

b) Wir messen viermal (unabhängig) und nehmen das arithmetische Mittel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Wert um weniger als 2 vom wahren Wert abweicht?

c) Wie oft müssen wir (unabhängig) messen, dass das arithmetische Mittel der Messungen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als 2 vom wahren Wert abweicht?

Lösung:

$X \sim N(0;4)$

a) $P(|X|<2) = 2\cdot\phi\left(\frac{2}{4}\right) - 1 = 2\cdot 0.6915 - 1 = 0.3830$

b) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt: $\bar{X}_4 \sim N\left(0;\frac{4}{\sqrt{4}}\right)$

$P(|\bar{X}_4|<2) = 2\cdot\phi\left(\frac{2}{2}\right) - 1 = 2\cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$

c) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt: $\bar{X}_n \sim N\left(0;\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(|\bar{X}_n|<2) = 2\cdot\phi\left(\frac{2}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) - 1 \overset{!}{\geq} 0.95 \Rightarrow \phi\left(\frac{2}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) \geq \frac{1.95}{2} = 0.975$$

$$\overset{\text{Tabelle}}{\Rightarrow} \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \geq 1.96 \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.96\cdot 4}{2} = 3.92 \Rightarrow n \geq 15.4$$

Wir müssen mindestens 16mal messen.

Aufgabe 19

Anstatt 400 Rechnungsposten genau zu addieren, addiert eine Kauffrau diese nur auf ganze Franken gerundet. Wir nehmen an, dass der Fehler pro Posten auf dem Intervall $(-0.5;0.5]$ gleichverteilt ist. Wie gross ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Rechnung insgesamt um weniger als 10 Franken vom tatsächlichen Wert abweicht?

Lösung:

Wir gehen davon aus, dass die Rechnungsfehler voneinander unabhängig sind. Somit sind die Zufallsvariablen X_i identisch verteilt und stochastisch unabhängig und wir können den Zentralen Grenzwertsatz anwenden.

Somit ist der gesamte Rechenfehler $S_{400} = X_1 + \ldots + X_{400}$ näherungweise normalverteilt mit

$E(S_{400}) = 400\cdot E(X_i) = 0$ und $V(S_{400}) = 400\cdot V(X_i) = \frac{400}{12} = \frac{100}{3}$.

Daraus folgt:

$$P(-10 < S_{400} < 10) = 2\cdot\phi\left(\frac{10}{\frac{10}{\sqrt{3}}}\right) - 1 = 2\cdot\phi(\sqrt{3}) - 1 = 2\cdot 0.9584 - 1 = 0.9168.$$

Aufgabe 20

Jemand testet einen Spielwürfel so, dass er 1200 Mal würfelt und die auftretenden 6er zählt. Weicht die Anzahl 6er um mehr als 5% von 200 ab, so wird der Würfel als gefälscht eingestuft. Wie viele % der Würfel werden abgelehnt

a) wenn sie korrekt sind?

b) wenn sie gefälscht sind, so dass die 6 mit Wahrscheinlichkeit 0.15 erscheint?

<u>Lösung:</u>

a) Exakt berechnet mit der Binomialverteilung: X sei die Anzahl der 6er bei $n = 1200$ maligem Würfeln. Dann ist X binomialverteil $B(1200, \frac{1}{6})$ (fairer Würfel). Es gilt $P(190 \leq X \leq 210) = 0.5840$. Das heisst etwa 41.6% der Würfel werden abgelehnt. Mit der Normalapproximation $N(200, \sqrt{1200 \cdot 5/36}) = N(200, 10\sqrt{15}/3)$ gilt:

$P(190 \leq X \leq 210) \approx N(200, 10\sqrt{15}/3)(210.5) - N(200, 10\sqrt{15}/3)(189.5) \approx 0.584$

b) Die Approximation ist in diesem Fall: $X \sim N(1200 \cdot 0.15, \sqrt{1200 \cdot 0.15 \cdot 0.85}) = N(180, 12.3693)$:

$P(X > 210) + P(X < 190) \approx 1 - \phi\left(\frac{210.5 - 180}{12.3693}\right) + \phi\left(\frac{189.5 - 180}{12.3693}\right) \approx 0.7782$

Aufgabe 21

Bei der digitalen Signalverarbeitung mit BCH-Codes (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem-Codes) werden die Daten in Blöcke (Pakete) der Länge 127 (Bits) eingeteilt und übertragen. Diese Codierungsmethode erlaubt es bei der Übertragung maximal 14 fehlerhafte Bits zu korrigieren. Treten mehr als 14 fehlerhafte Bits auf, so ist das komplette Datenpaket fehlerhaft und die enthaltene Information kann nicht mehr generiert werden. Man spricht von einem Paketfehler. Zur Bestimmung eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsmodells machen wir die folgenden Annahmen:

- Fehler in verschiedenen Bits (und in verschiedenen Paketen) sind voneinander unabhängig.
- Die vom eingesetzten Modulationsverfahren und Zustand des Übertragungskanals abhängige Bitfehlerwahrscheinlichkeit beträgt $p = 0.1$ für jedes Bit des Datenpakets.
- Mit X bezeichnen wir die Zufallsvariable welche die Anzahl der fehlerhaften Bits in einem Datenpaket von 127 Bits angibt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte (PMF) und Verteilungsfunktion (CDF) von X;

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Paketfehlers;

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von mehr als achtzehn fehlerhaften Bits, sowie die Wahrscheinlichkeit zwischen 12 und 5 fehlerhaften Bits in einem Datenpaket;

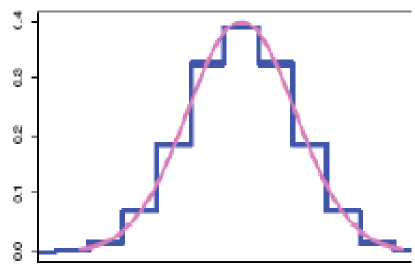
d) Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und Standardabweichung von X.

Hinweis: Beachten Sie, dass für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ für die Summe gilt:

$V(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \Rightarrow V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus Teilaufgaben (b) und (c) mithilfe einer Approximation durch eine Normalverteilung ohne und mit Stetigkeitskorrektur. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den genauen Werten aus Teilaufgaben (b) und (c).

f) Die Zufallsvariable Y bezeichne die Anzahl der fehlerhaften Pakete in einer Nachricht von 10 Paketen. Bestimmen Sie die PMF von Y (Formel angeben!). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für höchstens drei fehlerhafte Pakete in einer Nachricht von 10 Paketen.



<u>Lösung:</u>

a) X ist binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeitsdichte (PMF): $P(X=k)=\binom{127}{k}\cdot 0.1^k\cdot 0.9^{127-k}$

Verteilungsfunktion (CDF) von X: $F(n)=P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{127}{k}\cdot 0.1^k\cdot 0.9^{127-k}$

b) $P(Paketfehler)=P(X>14)=1-F(14)=1-\sum_{k=0}^{14}\binom{127}{k}\cdot 0.1^k\cdot 0.9^{127-k}\approx 0.2876$

c) $P(X>18)=1-F(18)=1-\sum_{k=0}^{18}\binom{127}{k}\cdot 0.1^k\cdot 0.9^{127-k}\approx 0.0490$,

$P(5\le X\le 12)=F(12)-F(4)\approx 0.4890$

d) $E(X)=np=127\cdot 0.1=12.7$, $V(X)=npq=127\cdot 0.1\cdot 0.9=11.43$, $S(X)=\sqrt{V(X)}\approx 3.3808$.

e) X ist näherungsweise $N(12.7;\sqrt{11.43})$ -verteilt. Die Faustregel ist erfüllt: $V(X)>9$.

Ohne Stetigkeitskorrektur:

$P(X>14)\approx 1-F(14)\overset{\text{Python}}{=}0.3503$

$P(X>18)\approx 1-F(18)\overset{\text{Python}}{=}0.0585$

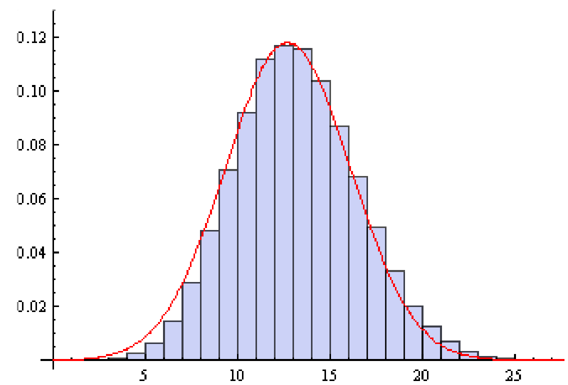
$P(5\le X\le 12)\approx F(12)-F(5)\overset{\text{Python}}{=}0.4066$

Mit Stetigkeitskorrektur:

$P(X>14)\approx 1-F(14.5)\overset{\text{Python}}{=}0.2972$

$P(X>18)\approx 1-F(18.5)\overset{\text{Python}}{=}0.0431$

$P(5\le X\le 12)\approx F(12.5)-F(4.5)\overset{\text{Python}}{=}0.4688$



f) $Y\sim B(10;0.2876)$ ist binomialverteilt mit Zähldichte (PMF): $P(Y=k)=\binom{10}{k}\cdot 0.2876^k\cdot 0.7124^{10-k}$

und Verteilungsfunktion (CDF): $F(n)=P(Y\le n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{10}{k}\cdot 0.2876^k\cdot 0.7124^{10-k}$

$P(Y\le 3)=\sum_{k=0}^{3}\binom{10}{k}\cdot 0.2876^k\cdot 0.7124^{10-k}\approx 0.6825$

Aufgabe 22

Eine faire Münze wird 1000 Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 540 Mal Zahl geworfen wird. Approximieren Sie dann diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer geeigneten Normalverteilung. Fertigen Sie einen Plot der PMF bzw. PDF der Verteilungen an.

Lösung:

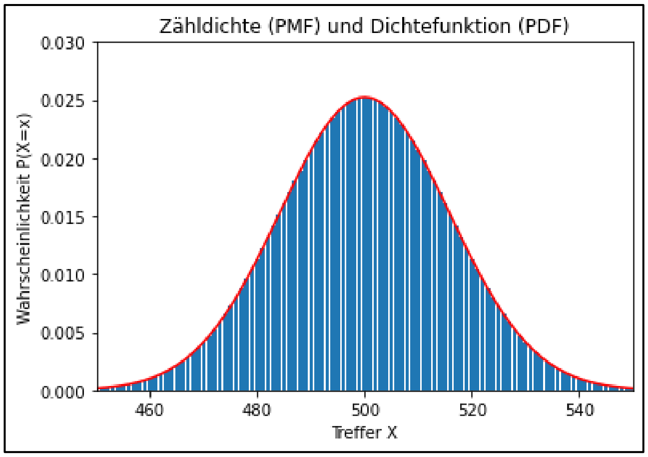
Sei X die Anzahl der geworfenen Zahl. $P(X=540)=\binom{1000}{540}\cdot 0.5^{1000}\approx 0.0010$.

Mit der Approximation durch die Normalverteilung mit $\mu = 1000\cdot 0.5 = 500, \sigma^2 = 1000\cdot 0.5\cdot 0.5 = 250$

$X \sim N\left(500; \sqrt{250}\right) \approx N\left(500; \sqrt{15.8112}\right)$

$P(X=k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$P(X=540) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{250}} e^{-\frac{(540-500)^2}{2\cdot 250}} \approx 0.0010$



Aufgabe 23

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Gerätetyp einer Zuverlässigkeitsprüfung nicht standhält, beträgt $p = 0.06$. Es werden insgesamt 200 Geräte unabhängig voneinander dieser Prüfung unterzogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Geräten mindestens 10 und höchstens 15 die Zuverlässigkeitsprüfung nicht bestehen.

b) Verwenden Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit aus a) die Approximation durch die Normalverteilung.

Lösung:

a) $X \sim B(200; 0.06)$ mit:

$P(X=k) = \binom{200}{k}\cdot 0.06^k \cdot 0.94^{200-k}$,

$E(X) = 200\cdot 0.06 = 12$, $V(X) = 200\cdot 0.06\cdot 0.94 = 11.28$, $S(X) = \sqrt{11.28} \approx 3.35857$,

$P(10 \le X \le 15) = \sum_{k=10}^{15}\binom{200}{k}\cdot 0.06^k\cdot 0.94^{200-k} \approx 0.6169$.

b) Normalapproximation ist zulässig, denn $V(X) = 11.28 > 9$.

X ist näherungsweise $N(12; \sqrt{11.28})$ -verteilt.

Mit Normalapproximation (ohne Stetigkeitskorrektur):

$P(10 \le X \le 15) \approx N\left(12, \sqrt{11.28}\right)(15) - N\left(12, \sqrt{11.28}\right)(10) = \phi\left(\dfrac{15-12}{\sqrt{11.28}}\right) - \phi\left(\dfrac{10-12}{\sqrt{11.28}}\right) \approx 0.5384$

Mit Normalapproximation (mit Stetigkeitskorrektur):

$$P(10 \leq X \leq 15) \approx N\left(12, \sqrt{11.28}\right)(15.5) - N\left(12, \sqrt{11.28}\right)(9.5) = \phi\left(\frac{15.5-12}{\sqrt{11.28}}\right) - \phi\left(\frac{9.5-12}{\sqrt{11.28}}\right)$$
$$\approx 0.6230$$

Aufgabe 24

Bei einem Fährbetrieb zu einer Ausflugsinsel stehen 2 gleiche Fährschiffe gleichzeitig bereit. Man nimmt an, dass sich Passagiere zufällig für ein Schiff entscheiden. Es sollen jeweils 1000 Personen transportiert werden.
Wie gross ist das Fassungsvermögen pro Schiff zu kalkulieren, wenn höchstens in 1% der Fälle Fahrgäste auf dem gewählten Schiff keinen Platz bekommen sollen?

Lösung:

X sei die Anzahl der auf Schiff A kommenden Fahrgäste unter den 1000. Dann ist X binomialverteilt $B(1000, \frac{1}{2})$.
Ansatz: $P(X > c) = 0.01 \Leftrightarrow c = 537$.
Mit der approximierenden Normalverteilung $N(500, \sqrt{250}) = N(500, 5\sqrt{10})$:
$P(X > c) = 0.01 \Leftrightarrow 1 - N(500, 5\sqrt{10})(c) = 0.01 \Leftrightarrow N(500, 5\sqrt{10})(c) = 0.99 \Leftrightarrow \phi(\frac{c-500}{5\sqrt{10}}) = 0.99$
$\Leftrightarrow \frac{c-500}{5\sqrt{10}} \approx 2.3263 \Leftrightarrow c \approx 536.7828$

Aufgabe 25

Der Zulieferer einer Autofirma garantiert, dass mindestens 95% der gelieferten Zündkerzen einwandfrei sind. Die Autofirma entnimmt den Lieferungen laufend Stichproben vom Umfang 500 zur Überprüfung. Sind mehr als 30 defekt, so wird reklamiert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird zu Unrecht reklamiert?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nicht reklamiert, wenn der Anteil schlechter Zündkerzen 7% beträgt?

Lösung:

X sei die Anzahl der defekten Zündkerzen unter 500. Dann ist X binomialverteilt $B(500, 0.05)$.
Ansatz: $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) \approx 0.1309$.
Mit der approximierenden Normalverteilung $N(500 \cdot 0.05, \sqrt{500 \cdot 0.05 \cdot 0.95}) = N(25, \sqrt{23.75})$
$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) \approx 1 - N(25, \sqrt{23.75})(30) \approx 0.1525$. Mit Stetigkeitskorrektur:
$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) \approx 1 - N(25, \sqrt{23.75})(30.5) \approx 0.1295$
Mit der approximierenden Normalverteilung $N(500 \cdot 0.07, \sqrt{500 \cdot 0.05 \cdot 0.95}) = N(35, \sqrt{32.55})$:
$P(X \leq 30) \approx N(35, \sqrt{32.55})(30) \approx 0.1904$
Mit Stetigkeitskorrektur: $P(X \leq 30) \approx N(35, \sqrt{32.55})(30.5) \approx 0.2151$

Aufgabe 26

Bei teuren Geräten ist mit 10% Ausfall zu rechnen. Eine Firma braucht 100 einwandfreie Geräte.

a) Wie viele soll sie kaufen, damit sie mit 97.5%iger Wahrscheinlichkeit genügend brauchbare Geräte bekommt?
b) Wie viele, wenn sie 1000 brauchbare Geräte braucht?

Lösung:

a) X sei die Anzahl der brauchbaren Geräte unter n. Mit der approximierenden Normalverteilung ist X nach dem zentralen Grenzwertsatz annähernd $N(n \cdot 0.9, \sqrt{n \cdot 0.1 \cdot 0.9})$ verteilt.

Ansatz:

$P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 99) = 0.975 \Leftrightarrow P(X \leq 99) = 0.025 \Leftrightarrow N(n \cdot 0.9, \sqrt{n \cdot 0.1 \cdot 0.9})(99) = 0.025$

$\Leftrightarrow N(0,1)(\frac{99-n\cdot 0.9}{\sqrt{n\cdot 0.1\cdot 0.9}}) = 0.025 \Leftrightarrow \frac{99-n\cdot 0.9}{\sqrt{n\cdot 0.1\cdot 0.9}} =$ -1.9600 $\Rightarrow (99 - n \cdot 0.9)^2 = 1.9600^2 n \cdot 0.09$

$\Leftrightarrow 99^2 - (1.9600^2 \cdot 0.09 + 2 \cdot 99 \cdot 0.9) \cdot n + n^2 \cdot 0.9^2 = 0$

$\Leftrightarrow n \approx 103.4$ (nicht korrekt) oder $n \approx 117.1$.

b) $P(X \geq 1000) = 1 - P(X \leq 999) = 0.975 \Leftrightarrow P(X \leq 999) = 0.025$

$\Leftrightarrow N\left(n \cdot 0.9, \sqrt{n \cdot 0.1 \cdot 0.9}\right)(999) = 0.025 \Leftrightarrow N(0,1)\left(\frac{999-n\cdot 0.9}{\sqrt{n\cdot 0.1\cdot 0.9}}\right) = 0.025$

$\Leftrightarrow \frac{999-n\cdot 0.9}{\sqrt{n\cdot 0.1\cdot 0.9}} =$ -1.9600 $\Rightarrow (999 - n \cdot 0.9)^2 = 1.9600^2 n \cdot 0.09$

$\Leftrightarrow 999^2 - (1.9600^2 \cdot 0.09 + 2 \cdot 999 \cdot 0.9) \cdot n + n^2 \cdot 0.9^2 = 0$

$\Leftrightarrow n \approx 1088.0$ (nicht korrekt) oder $n \approx 1132$

Aufgabe 27

Ein Schiessbudenbesitzer muss pro Abend im Mittel etwa 20 erste Preise aushändigen. Wie viele sollte er vorrätig haben, damit er nur mit Wahrscheinlichkeit 2% in Verlegenheit kommt? (Poisson Verteilung bzw. Normalapproximation!)

Lösung:

X sei die Anzahl der Preise. Wir nehmen an, dass X Poisson verteilt ist mit Parameter $\lambda = 20$.

Ansatz: $P(X > c) = 0.02 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq c) = 0.02 \Leftrightarrow P(X \leq c) = 0.98$

Mit der Poisson Verteilung und z.B. der Berechunung der Inversen in Python: $P(X \leq c) = 0.98 \Leftrightarrow c = 30$.

Mit der Normalapproximation $Pois(\lambda) \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda}) = N(20, \sqrt{20})$:

$P(X \leq c) = 0.98 \Leftrightarrow N(20, 2\sqrt{5})(c) = 0.98 \Leftrightarrow N(0,1)(\frac{c-20}{2\sqrt{5}}) = 0.98 \Leftrightarrow \frac{c-20}{2\sqrt{5}} = 2.0537$

$\Leftrightarrow c = 20 + 2\sqrt{5} \cdot 2.0537$=29.1846