

---

## Serie 07: Schliessende Statistik

---

### Punktschätzung

---

#### Aufgabe 1

Wir betrachten eine Grundgesamtheit mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Es sei  $X_1, X_2, X_3$  eine einfache Zufallsstichprobe aus dieser Grundgesamtheit. Folgende drei Schätzfunktionen sind gegeben:

$$\theta_1 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \theta_2 = \frac{1}{4}(2X_1 + 2X_3), \theta_3 = \frac{1}{3}(2X_1 + X_2)$$

- a) Welche dieser Schätzfunktionen sind erwartungstreu?
- b) Welche dieser Schätzfunktionen ist am effizientesten, welche am wenigsten effizient?

**Hinweis:** Verwenden Sie die Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz aus 4.3 sowie den Satz zur Varianz einer Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen aus 4.5.

#### Aufgabe 2

Wir betrachten eine Grundgesamtheit, die nach der Verteilungsdichte (PDF)  $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$  verteilt ist. Es wird daraus eine Zufallsstichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  entnommen, um den unbekannten Parameter  $\lambda > 0$  zu schätzen. Definieren Sie die Likelihood-Funktion für dieses Problem und bestimmen Sie durch Differenzieren eine Schätzfunktion für den unbekannten Parameter  $\lambda > 0$ .

#### Aufgabe 3

Im Vorfeld einer Abstimmung soll mithilfe einer 0,1-wertigen Zufallsstichprobe  $X_1, \dots, X_n$  der unbekannte Anteil  $p$  an Ja-Stimmen geschätzt werden (1 für ja, 0 für nein). Definieren Sie eine Likelihood-Funktion für dieses Problem und bestimmen Sie durch Differenzieren eine Schätzfunktion für den unbekannten Parameter  $0 < p < 1$ .

---

## Intervallschätzung

---

### Aufgabe 4

Wir nehmen an, dass der Durchmesser  $X$  der auf einer Maschine hergestellten Schrauben eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 100$ , entnommen aus einer Tagesproduktion, ergab das folgende Ergebnis:  $\bar{x} = 0.620$  cm,  $s = 0.035$  cm. Bestimmen Sie die Vertrauensgrenzen für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 5\%$ .

### Aufgabe 5

Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit dem unbekannten Mittelwert  $\mu$  und der ebenfalls unbekannten Varianz  $\sigma^2$ . Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  ergab den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x} = 102$  und die empirische Varianz  $s^2 = 16$ . Bestimmen Sie für  $\mu$  und  $\sigma^2$  jeweils ein Vertrauensintervall zum Vertrauensniveau von  $\gamma = 99\%$ .

### Aufgabe 6

Für einen Autotyp wurde ein bestimmter Motor weiterentwickelt, dessen Leistung als eine normalverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann. Eine Stichprobenuntersuchung an  $n = 8$  zufällig herausgegriffenen Motoren ergab das folgende Ergebnis:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$ in PS	100.5	96.5	99.0	97.8	100.4	103.5	100.3	98.0

Bestimmen Sie für  $\mu$  und  $\sigma^2$  jeweils ein Vertrauensintervall zu einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$ .

### Aufgabe 7

Bei einer Qualitätskontrolle eines elektronischen Bauteils befanden sich 27 defekte Teile in einer Stichprobe vom Umfang  $n = 500$ . Bestimmen Sie den Schätzwert für den unbekannten Ausschussanteil  $p$  der Gesamtproduktion und ein Vertrauensintervall für diesen Parameter zum Vertrauensniveau

(a)  $\gamma = 95\%$  und (b)  $\gamma = 99\%$ .

### Aufgabe 8

Aus einer Sonderprägung wurden  $n = 100$  Münzen nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und ihre Masse  $m$  bestimmt. Man erhielt dabei den Stichprobenmittelwert  $\bar{x} = 5.43$  g mit der Streuung  $s^2 = 0.09$  g<sup>2</sup>. Der Verteilungstyp der Zufallsvariablen ist jedoch unbekannt. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Normalapproximation die Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  und die unbekannte Standardabweichung  $\sigma$  auf einem Vertrauensniveau von  $\gamma = 95\%$ .

**Aufgabe 9**

Ein Drehautomat fertigt Bolzen. Es ist bekannt, dass der Durchmesser der von dem Automaten gefertigten Bolzen normalverteilt ist mit Standardabweichung  $\sigma = 0.5$  mm. Wie gross muss die Stichprobe mindestens sein, damit die Länge des 99%-Vertrauensintervalls für  $\mu$  höchstens 0.4 mm beträgt?

**Aufgabe 10**

Bei einer Stichprobe von  $n = 5$  Robotern wird die maximale Dauergreifkraft eines Greifers gemessen. Es ergeben sich die folgenden Werte (in N): 200, 199, 198, 200, 198. Wir gehen davon aus, dass die Werte normalverteilt sind. Berechnen Sie ein 99%-Vertrauensintervall für den Mittelwert  $\mu$  der maximalen Dauergreifkraft in der gesamten Produktion.