
Serie 05: Spezielle Verteilungen

Aufgabe 1

Die PDF einer stetigen Zufallsvariablen X ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} a(2x - x^2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Wie gross muss a sein, damit f eine PDF ist?
 - b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
 $P(X \leq 1.2)$ $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ $P(X > 1)$
 - c) Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$
-

Diskrete Verteilungen

Aufgabe 2

In einer Urne sind drei weisse und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln zufällig herausgezogen

- a) gleichzeitig
- b) nacheinander, ohne Zurücklegen der Kugeln (mit Reihenfolge)
- c) nacheinander, mit Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel (mit Reihenfolge).

Geben Sie für jeden der Fälle a)-c) einen geeigneten Ergebnisraum Ω mit Zähldichte an.

Geben Sie für die Fälle b) und c) einen Wahrscheinlichkeitsbaum an.

Im Fall b) bzw. c) gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln an. Bestimmen Sie die Zähldichte (PMF) $f(k) = P(X = k)$, die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) $F(k) = P(X \leq k)$.

Fertigen Sie Plots der CDF und PMF an.

Aufgabe 3

Eine faire Münze mit den Seiten Zahl und Kopf wird viermal geworfen. Verwenden Sie die Zufallsvariable X = „Anzahl Zahl“.

- a) Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der CDF $F(x) = P(X \leq x)$ von X aus: $P(X = 2)$, $P(X > 2)$, $P(X > 0)$, $P(1 \leq X < 3)$, $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(1 < X \leq 3)$, $P(1 < X < 4)$.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal Zahl auftritt.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zweimal Zahl auftritt.
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal Zahl auftritt.
- e) Fertigen Sie eine Tabelle und eine Skizze der PMF $f(x) = P(X = x)$ und der CDF $F(x) = P(X \leq x)$ von X an.

Aufgabe 4

Ein Spieler nimmt an drei aufeinanderfolgenden, unabhängigen Ausspielungen einer Lotterie teil. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei bei jeder der Ausspielungen 20%. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Erfolge. Bestimmen Sie einen geeigneten Ergebnisraum mit Zähldichte für dieses Spiel. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X . Skizzieren Sie die PMF und CDF von X .

Aufgabe 5

Die Zufallsvariable X zählt die defekten Maschinenteile in einer Stichprobe von 100 Stück. Die Wahrscheinlichkeit, ein fehlerhaftes Maschinenteil zu erhalten, beträgt 0.01.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 Stück höchstens drei fehlerhaft sind.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von

Aufgabe 6

Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist 0.515. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit unter 10 zufällig ausgewählten Geburten genau 6 Knaben zu finden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 6 Knaben zu finden. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Knaben. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X .

Aufgabe 7

Eine Telefonvermittlung erhält während der Hauptbetriebszeit durchschnittlich 300 Anrufe stündlich. Sie kann maximal 10 Verbindungen pro Minute herstellen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Vermittlung während einer beliebigen gegebenen Minute in der Hauptbetriebszeit überlastet ist, d. h. mehr Anrufe erhält, als sie Verbindungen herstellen kann?

Aufgabe 8

Es ist bekannt, dass 0.01% einer Bevölkerungsgruppe jährlich durch einen gewissen Unfall getötet werden. Bei einer Versicherung sind 10000 Personen der genannten Bevölkerungsgruppe gegen diesen Unfall versichert. Betrachten Sie die Zufallsvariable X = Anzahl Versicherte, die in einem bestimmten Jahr durch diesen Unfall umkommen.

- Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt die Zufallsvariable X ?
- Welches sind die Werte der Parameter dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- Welche Approximation eignet sich für diesen Fall? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Berechnen Sie mit Hilfe dieser Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen Jahr mehr als zwei dieser Versicherten durch den genannten Unfall umkommen.

Aufgabe 9

Wie oft muss mit zwei Würfeln gewürfelt werden, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 oder mehr mindestens einmal die Augensumme 12 zu erhalten? Vergleichen Sie die exakte Lösung mit der Abschätzung, die sich aus der Poissonapproximation ergibt.

Aufgabe 10

Herr Meier, der in seiner Firma für den Wareneinkauf zuständig ist, erhält eine Lieferung von 5000 elektronischen Bauteilen. Auf dem Transport wurden genau 10 Bauteile (von aussen nicht erkennbar) beschädigt. Herr Meier möchte die Qualität der erhaltenen Ware überprüfen. Darum wählt er zufällig 100 verschiedene Bauteile aus und testet ihre Funktion. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eines der getesteten Bauteile fehlerhaft ist. Verwenden Sie eine geeignete Approximation.

Aufgabe 11

Fünf Arbeiter, die unabhängig arbeiten, benötigen elektrischen Strom, und zwar jeder mit Unterbrechungen durchschnittlich etwa 10 Minuten pro Stunde. Genügt es, die Stromversorgung so einzurichten, dass 3 Arbeiter gleichzeitig Strom entnehmen können, oder entstehen dann erhebliche Wartezeiten, indem 4 oder 5 Arbeiter gleichzeitig Strom entnehmen wollen?

Aufgaben 12

Ein fairer Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der gewürfelten 2-er und Y bezeichne die Anzahl der gewürfelten 5-er.

- Bestimmen Sie die Matrix mit der gemeinsamen Verteilung von X und Y und die Randverteilungen.
 - Welchen Verteilungen folgen X bzw. Y ? Welche Werte haben die Parameter?
 - Bestimmen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen von X und von Y .
 - Bestimmen Sie die Verteilung des Produktes $X \cdot Y$.
 - Berechnen Sie $E(X \cdot Y)$ und $V(X \cdot Y)$.
-

Normalverteilung

Aufgabe 13

Gegeben ist die $N(0,1)$ verteilte Zufallsvariable U . Berechnen Sie mit Hilfe der Tabelle (z.B. Papula) der Standard-normalverteilung folgende Wahrscheinlichkeiten:

- a) $P(U \leq 1.52)$ b) $P(U \leq -0.42)$ c) $P(0.2 \leq U \leq 2.13)$ d) $P(-1.01 \leq U \leq 0.25)$ e) $P(|U| \leq 1.69)$
f) $P(U \geq 0.95)$ g) $P(U \leq 1.327)$ h) $P(U > 0.842)$

Aufgabe 14

Gegeben ist die $N(2; 0.5)$ -verteilte Zufallsvariable X . Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- a) $P(X \leq 2.52)$ b) $P(X \leq 0.84)$ c) $P(1.12 \leq X \leq 3.14)$ d) $P(0.91 \leq X \leq 1.63)$
e) $P(|X| \leq 2.13)$ f) $P(X \geq 0.98)$ g) $P(|X - 2| \leq 1)$

Aufgabe 15

Die Grösse von 2000 Schülern sei normalverteilt mit Mittelwert 1.55 m und Standardabweichung 0.2 m. Geben Sie die erwartete Zahl der Schüler an, deren Grösse

- a) unter 1m, b) zwischen 1.2 und 1.3 m, c) über 2 m liegt.

Aufgabe 16

Der Durchmesser von Gewindeschrauben sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 10$ mm (Solldurchmesser) und $\sigma = 0.2$ mm. Als Ausschussware gelten Schrauben mit Abweichungen vom Solldurchmesser von 0.3 mm. Zeigen Sie, dass der erwartete Anteil von Ausschussware 13.4% beträgt.

Aufgabe 17

Die Kapazität eines in grosser Stückzahl hergestellten Kondensators kann als eine normalverteilte Zufallsvariable X angesehen werden.

- a) Mit welchem Ausschussanteil ist zu rechnen, wenn die Kapazität höchstens um 8% vom Sollwert $E(X) = 150\mu F$ (Einheit Mikrofarad μF) abweichen darf und die Standardabweichung $S(X) = 8\mu F$ beträgt?
 - b) Der Toleranzbereich $[150 - c; 150 + c]\mu F$ soll so festgelegt werden, dass sich darin 75.8% der Kondensatoren befinden. Wie muss die Konstante c gewählt werden?
-

Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 18

Die Messfehler X eines Messgerätes sind normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 4.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung um weniger als 2 vom wahren Wert abweicht?
- b) Wir messen viermal (unabhängig) und nehmen das arithmetische Mittel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Wert um weniger als 2 vom wahren Wert abweicht?
- c) Wie oft müssen wir (unabhängig) messen, dass das arithmetische Mittel der Messungen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als 2 vom wahren Wert abweicht?

Aufgabe 19

Anstatt 400 Rechnungsposten genau zu addieren, addiert eine Kauffrau diese nur auf ganze Franken gerundet. Wir nehmen an, dass der Fehler pro Posten auf dem Intervall $(-0.5; 0.5]$ gleichverteilt ist. Wie gross ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Rechnung insgesamt um weniger als 10 Franken vom tatsächlichen Wert abweicht?

Aufgabe 20

Jemand testet einen Spielwürfel so, dass er 1200 Mal würfelt und die auftretenden 6er zählt. Weicht die Anzahl 6er um mehr als 5% von 200 ab, so wird der Würfel als gefälscht eingestuft. Wie viele % der Würfel werden abgelehnt

- a) wenn sie korrekt sind?
- b) wenn sie gefälscht sind, so dass die 6 mit Wahrscheinlichkeit 0.15 erscheint?

Aufgabe 21

Bei der digitalen Signalverarbeitung mit BCH-Codes (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem-Codes) werden die Daten in Blöcke (Pakete) der Länge 127 (Bits) eingeteilt und übertragen. Diese Codierungsmethode erlaubt es bei der Übertragung maximal 14 fehlerhafte Bits zu korrigieren. Treten mehr als 14 fehlerhafte Bits auf, so ist das komplette Datenpaket fehlerhaft und die enthaltene Information kann nicht mehr generiert werden. Man spricht

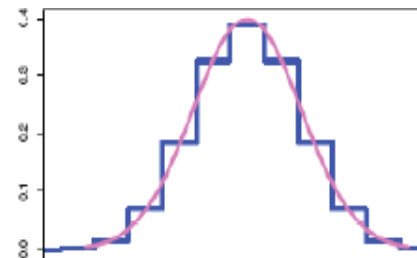
von einem Paketfehler. Zur Bestimmung eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsmodells machen wir die folgenden Annahmen:

- Fehler in verschiedenen Bits (und in verschiedenen Paketen) sind voneinander unabhängig.
- Die vom eingesetzten Modulationsverfahren und Zustand des Übertragungskanals abhängige Bitfehlerwahrscheinlichkeit beträgt $p = 0.1$ für jedes Bit des Datenpakets.
- Mit X bezeichnen wir die Zufallsvariable welche die Anzahl der fehlerhaften Bits in einem Datenpaket von 127 Bits angibt.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte (PMF) und Verteilungsfunktion (CDF) von X ;
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Paketfehlers;
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von mehr als achtzehn fehlerhaften Bits, sowie die Wahrscheinlichkeit zwischen 12 und 5 fehlerhaften Bits in einem Datenpaket;
- Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und Standardabweichung von X .

Hinweis: Beachten Sie, dass für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ für die Summe gilt:
 $V(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \Rightarrow V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus Teilaufgaben (b) und (c) mithilfe einer Approximation durch eine Normalverteilung ohne und mit Stetigkeitskorrektur. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den genauen Werten aus Teilaufgaben (b) und (c).
- Die Zufallsvariable Y bezeichne die Anzahl der fehlerhaften Pakete in einer Nachricht von 10 Paketen. Bestimmen Sie die PMF von Y (Formel angeben!). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für höchstens drei fehlerhafte Pakete in einer Nachricht von 10 Paketen.



Aufgabe 22

Eine faire Münze wird 1000 Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 540 Mal Zahl geworfen wird. Approximieren Sie dann diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer geeigneten Normalverteilung. Fertigen Sie einen Plot der PMF bzw. PDF der Verteilungen an.

Aufgabe 23

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Gerätetyp einer Zuverlässigkeitsprüfung nicht standhält, beträgt $p = 0.06$. Es werden insgesamt 200 Geräte unabhängig voneinander dieser Prüfung unterzogen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Geräten mindestens 10 und höchstens 15 die Zuverlässigkeitsprüfung nicht bestehen.
- Verwenden Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit aus a) die Approximation durch die Normalverteilung.

Aufgabe 24

Bei einem Fährbetrieb zu einer Ausflugsinsel stehen 2 gleiche Fährschiffe gleichzeitig bereit. Man nimmt an, dass sich Passagiere zufällig für ein Schiff entscheiden. Es sollen jeweils 1000 Personen transportiert werden. Wie gross ist das Fassungsvermögen pro Schiff zu kalkulieren, wenn höchstens in 1% der Fälle Fahrgäste auf dem gewählten Schiff keinen Platz bekommen sollen?

Aufgabe 25

Der Zulieferer einer Autofirma garantiert, dass mindestens 95% der gelieferten Zündkerzen einwandfrei sind. Die Autofirma entnimmt den Lieferungen laufend Stichproben vom Umfang 500 zur Überprüfung. Sind mehr als 30 defekt, so wird reklamiert.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird zu Unrecht reklamiert?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nicht reklamiert, wenn der Anteil schlechter Zündkerzen 7% beträgt?

Aufgabe 26

Bei teuren Geräten ist mit 10% Ausfall zu rechnen. Eine Firma braucht 100 einwandfreie Geräte.

- a) Wie viele soll sie kaufen, damit sie mit 97.5%iger Wahrscheinlichkeit genügend brauchbare Geräte bekommt?
- b) Wie viele, wenn sie 1000 brauchbare Geräte braucht?

Aufgabe 27

Ein Schiessbudenbesitzer muss pro Abend im Mittel etwa 20 erste Preise aushändigen. Wie viele sollte er vorrätig haben, damit er nur mit Wahrscheinlichkeit 2% in Verlegenheit kommt? (Poisson Verteilung bzw. Normalapproximation!)