Serie 03: Kombinatorik

Aufgabe 1
Aus zehn verschiedenen Bewerbern um eine Stelle, sollen drei ausgesucht und aus diesen drei eine Rangliste (nach Stelleneignung) erstellt werden. Wie viele unterschiedliche solche Ranglisten gibt es?

Lösung:
Variation ohne Wiederholung, $\frac{10!}{7!}=720$

Aufgabe 2
a) Bei der Trio-Wette müssen die drei bestplatzierten Pferde eines Pferderennens in der richtigen Reihenfolge vorausgesagt werden.
Wie viele verschiedene Trio-Wetten gibt es bei einem Pferderennen bei dem sechs Pferde teilnehmen?
b) Bei der Tiercé-Wette müssen die drei bestplatzierten Pferde eines Pferderennens vorausgesagt werden. Die Reihenfolge wird dabei nicht berücksichtigt.
Wie viele verschiedene Tiercé-Wetten gibt es bei einem Pferderennen bei dem sechs Pferde teilnehmen?

Lösung:
a) Variation ohne Wiederholung, $\frac{6!}{3!}=120$ (b) Kombination ohne Wiederholung, $\binom{6}{3}=20$

Aufgabe 3
Wie viele dreiziffrige Zahlen können aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gebildet werden, wenn keine Ziffer wiederholt werden darf?

Lösung:
Variation ohne Wiederholung, $\frac{5!}{2}=60$

Aufgabe 4
Beim deutschen Fussballtoto muss man die Ergebnisse aus 11 Fussballspielen vorhersagen. Wie das Ergebnis getippt werden muss, sei für ein Spiel erklärt.

Hamburger SV gegen Schalke 04
1 = Hamburger SV gewinnt
2 = Schalke 04 gewinnt
0 = unentschieden.

Wie viele mögliche Tippergebnisse gibt es?

Lösung:
Variation mit Wiederholung, $3^{11}=177147$

Aufgabe 5

Vor ihnen stehen 5 verschiedene Objekte A, B, C, D, E. Sie sollen neunmal auf irgendeines der Objekte zeigen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielen soll?

<u>Lösung</u>:

Kombination mit Wiederholung, $\binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{4} = 715$

Aufgabe 6

Sie planen in einem Weinseminar die Qualität von 5 Weinen zu testen. Dabei soll für alle möglichen Weinpaare getestet werden, welcher von den 2 Weinen der bessere ist. Ein Weinkenner behauptet nun, es käme sehr darauf an, welcher Wein beim Paarvergleich zuerst gekostet wird. Sie legen deshalb fest, dass bei jedem möglichen Paarvergleich auch die Reihenfolge getestet werden muss, also z.B. einmal die Reihenfolge Wein A Wein B sowie auch die Reihenfolge Wein B Wein A. Wie viele Vergleiche sind notwendig, um alle Weine in dieser Art gegeneinander zu testen?

<u>Lösung</u>:

Variation ohne Wiederholung $\frac{5!}{3!} = 20$

Aufgabe 7

a) Auf wie viele Arten lassen sich 10 Bücher in ein Regal reihen.

b) Wie viele Möglichkeiten sind es wenn nach den Buchtiteln aufgestellt wird und von den 10 Büchern 4 Exemplare denselben Titel tragen (also als nicht unterscheidbar gelten).

<u>Lösung</u>:

a) Permutation ohne Wiederholung, $10! = 3628800$ b) $\frac{10!}{4!} = 151200$

Aufgabe 8

Bei einem Sonderangebot kann man aus 7 verschiedenen Werkzeugtypen beliebig 3 Werkzeuge auswählen.

a) Wie viele verschiedenen Sortimente lassen sich zusammenstellen, wenn die 3 Werkzeuge verschieden sein müssen?

b) Wie viele gibt es ohne Beschränkung der Wahlmöglichkeit?

<u>Lösung</u>:

a) Kombination ohne Wiederholung, $\binom{7}{3} = 35$ b) Kombination mit Wiederholung, $\binom{7+2}{3} = 84$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Anzahl aller direkten Wege, welche auf einem Schachbrett ein Eckfeld mit dem diagonal gegenüberliegenden Eckfeld verbinden. Hierbei dürfen Felder horizontal (H) oder vertikal (V), aber nicht diagonal verbunden werden. Ein möglicher Weg wäre zum Beispiel: HHVVVHHHVHVHVV. Wie viele solcher Wege gibt es?

Lösung:
$\binom{14}{7}$=3432

Aufgabe 10
Wie viele Worte lassen sich aus den Buchstaben des Wortes ABRAKADABRA bilden? (Nur Worte in denen alle Buchstaben vorkommen!)

Lösung:
$\binom{11}{5} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 83160$

Aufgabe 11
Ein moderner Künstler erhält den Auftrag ein Bild mit drei Farben zu malen. Der Künstler hat sich entschlossen, dass das Bild aus 12 nebeneinander angeordneten Streifen bestehen soll und 4 Streifen silber, 4 Streifen gold und 4 Streifen bronze sein sollen. Unter wie vielen Möglichkeiten kann der Künstler auswählen?

Lösung:
$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 34650$

Aufgabe 12
Beim Verteilen der Skatkarten bekommt ein Spieler zwei der vier Asse, drei der vier Buben und fünf der vierundzwanzig sonstigen Karten. Wie viele Möglichkeiten gibt es für ein solches „Blatt".

Lösung:
$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{24}{5}$=1020096

Aufgabe 13
Auf wie viele Arten lässt sich aus 5 Ehepaaren eine Gruppe von 4 Personen auswählen, die keines der Ehepaare enthält.

Lösung:
Anzahl der Möglichkeiten aus 5 Ehepaaren 4 Ehepaare auszuwählen:
Kombination ohne Wiederholung: $\binom{5}{4}$=5 ist die.
Von jedem der 4 Ehepaare die man ausgewählt hat kann man nun je einen der Partner auswählen;
dies kann auf 2^4=16 Arten erfolgen.
Die gesuchte Anzahl ist $5 \cdot 16=80$.

Aufgabe 14
Beim Rommé spielt man mit 110 Karten: sechs davon sind Joker. Zu Beginn eines Spiels erhält jeder Spieler genau 12 Karten. In wieviel Prozent aller möglichen Fälle sind darunter
a) genau zwei bzw. b) mindestens ein Joker?

Lösung:

a) $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{104}{10}}{\binom{110}{12}}\cdot 100\% \approx 11.13\%$, b) $100\%-\frac{\binom{104}{12}}{\binom{110}{12}}\cdot 100\% \approx 50.85\%$

Aufgabe 15

Sind in mehr als 60% aller Fälle von vier (nicht gleichaltrigen) Geschwistern mindestens zwei im gleichen Monat geboren?

Lösung:

Nein, $100\%-\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{12^4}\cdot 100\% \approx 42.71\%$

Aufgabe 16

Wie viele Möglichkeiten gibt es 12 Personen in drei gleich grosse Mannschaften aufzuteilen? Wie gross sind die Chancen, dass bei einer zufälligen Mannschaftsauswahl, Sie und ihr Freund in die gleiche Mannschaft kommen?

Lösung:

$\frac{1}{3!}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = 5775$ Möglichkeiten für 12 Personen auf drei gleich grosse Mannschaften

$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{2} = 1575$ Möglichkeiten für 12 Personen auf drei gleich grosse Mannschaften, wobei Sie und ihr Freund immer in derselben Mannschaft sind.

$\frac{1575}{5775} \approx 27.27\%$

Aufgabe 17

Von 100 Glühbirnen sind genau drei defekt. Es werden nun 6 Glühbirnen zufällig ausgewählt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn sich mindestens eine defekte Glühbirne in der Auswahl befinden soll. Mit wie viel Prozent Chancen ist bei einer Auswahl von 6 Glühbirnen keine defekt.

Lösung:

$\binom{100}{6} = 1192052400$; $\binom{100}{6} - \binom{97}{6} = 203880032$, $\frac{\binom{97}{6}}{\binom{100}{6}}\cdot 100\% \approx 82.9\%$

Aufgabe 18

Beim Ziehen von Stichproben vom Umfang *n* aus *N* Elementen will man die Anzahlen von Stichproben die möglich sind berechnen. Wir bedienen uns des Urnenmodells: Eine Urne enthält 25 weisse, 10 schwarze und 5 rote Kugeln (unterscheidbar, z.B. nummeriert von 1 bis 40). Man zieht eine Stichprobe von 7 Kugeln (Ziehen ohne Zurücklegen).

a) Wie viele verschiedene Stichproben gibt es?
b) Wie viele Stichproben mit lauter weissen Kugeln sind möglich?
c) Wie viele Stichproben mit 5 weissen und 2 schwarzen Kugeln gibt es?
d) Wie viele Stichproben, die alle 5 roten Kugeln enthalten, gibt es?
e) Wie viele Stichproben mit 2 weissen, 3 schwarzen und 2 roten Kugeln gibt es?
f) Wie wahrscheinlich ist es mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen?

Lösung:

a) $\binom{40}{7} = 18643560$ b) $\binom{25}{7} = 480700$ c) $\binom{25}{5}\binom{10}{2} = 2390850$ d) $\binom{35}{2} = 595$

e) $\binom{25}{2}\binom{10}{3}\binom{5}{2} = 360000$ f) $\frac{\binom{40}{7}-\binom{30}{7}}{\binom{40}{7}} = 1 - \frac{30!\cdot 33!}{23!\cdot 40!} \approx 0.8908$, also ungefähr 89 Prozent.

Aufgabe 19

Mit den Ziffern 1, 2, 3. 4 und 5 werden vierstellige Zahlen gebildet. Beispiele solcher Zahlen sind 1234, 5443 und 2222. Wie viele solche Zahlen gibt es

a) insgesamt?
b) mit lauter verschiedenen Stellen?
c) mit den ersten beiden Stellen ungerade und den letzten beiden gerade?
d) mit den ersten beiden Stellen gleich und den letzten beiden gleich, aber verschieden von den ersten beiden?
e) mit entweder nur ungeraden oder nur geraden Stellen?
f) mit den ersten drei Stellen ungerade und der letzten gerade oder umgekehrt mit den ersten drei Stellen gerade und der letzten ungerade?
g) mit mindestens einer Ziffer 5?
h) mit mindestens einer geraden Ziffer?
i) mit höchstens drei Ziffern 5?
j) mit höchstens drei geraden Ziffern?

Lösung:

a) Alle Stellen beliebig (Variation mit Wiederholung):
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 36 = 5^4 = 625$
b) Jede Ziffer max. einmal (Variation ohne Wiederholung):
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
c) 1. und 2. Stelle beliebig mit 3 Möglichkeiten (1,3,5)
3. und 4. Stelle beliebig mit 2 Möglichkeiten (2,4)
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$
d) 1. Stelle beliebig, 2. Stelle wie 1., 3. Stelle nicht wie 1., 4. Stelle wie 3.
$5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 20$
e) Nur ungerade jeweils 3 Möglichkeiten (1,3,5)
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$
nur gerade jeweils 2 Möglichkeiten (2,4)
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Beide Fälle: $81 + 16 = 97$
f) 1., 2. und 3. Stelle beliebig mit 3 Möglichkeiten (1,3,5)
4. Stelle beliebig mit 2 Möglichkeiten (2,4)
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2 = 54$
1., 2. und 3. Stelle beliebig mit 2 Möglichkeiten (2,4)
4. Stelle beliebig mit 3 Möglichkeiten (1,3,5)
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 24$
Beide Fälle: $54 + 24 = 78$
g) mind.1 Ziffer 5 = gesamt – ohne Ziffer 5

$5^4 - 4^4 = 625 - 256 = 369$

h) mind. 1 gerade Ziffer = gesamt – ohne gerade Ziffer
$5^4 - 3^4 = 625 - 81 = 624$

i) höchstens 3 Ziffern 5 = gesamt – mit 4 Ziffern 5
$5^4 - 1^4 = 625 - 1 = 624$

j) höchstens 3 gerade Ziffern = gesamt – mit 4 geraden Ziffern
$5^4 - 2^4 = 625 - 16 = 609$

Aufgabe 20
An einer Party stösst jeder Gast mit seinem Sektglas genau einmal mit jedem anderen Gast an. Es erklingen dabei 253 Mal die Gläser. Wie viele Party Gäste gibt es?

Lösung:
$253 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 0 = n^2 - n - 506 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2024}}{2} = 23, (-22)$. Demnach sind es 23 Gäste.