Serie 04: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1

Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ereignisse. Welche dieser Wahrscheinlichkeiten lassen sich auf $P(A =$"mit einem Würfel eine Sechs würfeln") zurückführen?

a) zweimal eine Sechs b) genau eine Sechs c) keine Sechs

d) mindestens eine Sechs e) höchstens eine Sechs f) Augensumme 11

Lösung:

a) $P(2 \text{ mal } 6) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(A)$

b) $P(\text{genau eine } 6) = \frac{10}{36} = P(A) \cdot (1 - P(A)) + (1 - P(A)) \cdot P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

c) $P(\text{keine } 6) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(A)) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

d) $P(\text{mindestens } 6) = 1 - P(\text{keine } 6) = 1 - (1 - P(A))^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

e) $P(\text{höchstens eine } 6) = P(\text{keine } 6) + P(\text{genau eine } 6) = (1 - P(A))^2 + 2P(A) \cdot (1 - P(A))$

$$= \frac{25}{36} + \frac{10}{36} = \frac{35}{36} = 1 - P(2 \text{ mal } 6) = 1 - P(A)^2$$

f) $P(\text{Augensumme } 11) = \frac{2}{36}$ lässt sich nicht direkt auf $P(A)$ zurückführen.

Aufgabe 2

Die Polizei führt in einer Spielhölle eine Razzia durch: Sie testet jeden Spielwürfel wie folgt:
Es wird so oft gewürfelt, bis die 1 erscheint, maximal wird k-mal gewürfelt. Erscheint die 1 nicht, so wird der Würfel als gefälscht eingestuft.

a) Für einen fairen Würfel bestimme man für $k = 1, \ldots, 6$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel für gut befunden wird.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein korrekter Würfel bei $k = 10$ als gefälscht eingestuft?

c) Wie gross muss k festgelegt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, einen fairen Würfel als gefälscht einzustufen, nur 0.005 ist?

Lösung:

a) Wenn der Würfel fair ist, so gilt: $P(\text{Würfel ok}) = 1 - P(1 \text{ erscheint nicht}) = 1 - [\frac{5}{6}]^k$.

b) $P(1 \text{ erscheint nicht}) = [\frac{5}{6}]^{10} \approx 0.1615$

c) $P(1 \text{ erscheint nicht}) = [\frac{5}{6}]^k \leq 0.005 \Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(0.005)}{\ln(5/6)} \approx 29.06$. Demnach 30 Mal.

Aufgabe 3

Die Eingangstür eines Kaufhauses wird innerhalb der nächsten fünf Minuten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 von wenigstens 4 Kunden passiert und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 von höchstens 6 Kunden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der nächsten fünf Minuten 4, 5 oder 6 Kunden das Kaufhaus betreten?

Lösung:

Mit X bezeichnen wir die Anzahl der während 5 Minuten passierenden Kunden.

Voraussetzungen sind: $P(X \geq 4) = 0.9$, $P(X \leq 6) = 0.7$.

$P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = P(X \leq 6) - (1 - P(X \geq 4)) = 0.7 - (1 - 0.9) = 0.6$.

Aufgabe 4

Ein Ausstellungsraum wird durch 9 Lampen beleuchtet, die einzeln eingeschaltet werden können.

An einem Tag wird die Beleuchtung zufällig eingestellt.

a) Wie viele Beleuchtungsarten (Lampe an oder aus) gibt es?

b) Wie viele Beleuchtungsarten, wo genau 4 Lampen brennen gibt es?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennen höchstens 2 Lampen (wenn eine Gleichverteilung angenommen wird)?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt mindestens eine Lampe ?

Lösung:

a) $2^9 = 512$

b) $\binom{9}{4} = 126$

c) Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^9$, Laplace Verteilung mit Dichte $p(\omega) = \frac{1}{512}$.

Sei Xdie Anzahl der brennenden Lampen: $P(X \leq 2) = \frac{\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}}{512} = \frac{1+9+36}{512} = \frac{46}{512} \approx 0.0898$.

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512} \approx 0.9980$.

Aufgabe 5

Finden Sie heraus welche der folgenden Aussagen wahrscheinlicher ist (Problem des Chevalier de Mere):

a) Bei 4 Würfen mit einem Würfel fällt wenigstens eine Sechs.

b) Bei 24 Würfen mit zwei Würfeln fällt wenigstens einmal eine Doppelsechs.

Lösung:

a) Sei X die Anzahl der gewürfelten Sechser. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.5177$.

b) Sei X die Anzahl der gewürfelten Doppelsechser. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0.4914$.

Aufgabe 6

Wenn 30% der Kaninchen-Männchen und 10% der Kaninchen-Weibchen unfruchtbar sind, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Kaninchenpaar **nicht** mit Nachwuchs rechnen?

Lösung:

$P(\text{kein Nachwuchs}) = 1 - P(\text{Nachwuchs})$

$= 1 - P(\text{fruchtbar männlich}) \cdot P(\text{fruchtbar weiblich})$

$=1\text{-}0.7 \cdot 0.9 = 1 - 0.63 = 0.37$

Aufgabe 7

In einer Tüte sind Gummibärchen in 5 Farben. Jemand entnimmt durch Zufall 4 Gummibärchen und legt sie nach Helligkeit geordnet hin.

a) Wie viele verschiedene Ziehungen gibt es?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man 4 verschiedene Farben, wenn diese etwa gleich häufig vorkommen?

<u>Lösung:</u>

a) Kombination von 4 Objekten aus einer Gesamtheit von 5 Objekten mit Wiederholung:

$$\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = 70.$$

b) Wir nehmen an, dass in der Tüte von jeder der 5 Farben n Gummibärchen sind. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für 4 verschiedene Farben:

$$\frac{5! \cdot n^4}{5n(5n-1)(5n-2)(5n-3)} = \frac{5!}{5(5-1/n)(5-2/n)(5-3/n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5!}{5^4} \approx 0.192$$

Bei grossem n ist der Einfluss des nicht Zurücklegens des jeweils gezogenen Gummibärchens auf den Zufall sehr klein. Gehen wir von der Annahme aus, dass **<u>mit</u>** Zurücklegen gezogen wird so erhält man als Wahrscheinlichkeit 4 verschiedene Farben zu ziehen:

$$\frac{5!}{5^4} \approx 0.192$$

Aufgabe 8

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es unter n Personen (mindestens) 2 Personen, die am gleichen Tag Geburtstag haben (Man rechne mit 365 Tagen pro Jahr und und setze voraus, dass die Geburtstage zufällig verteilt sind). Man berechne die Wahrscheinlichkeiten für $n = 2,3, \dots$. Ab welchem n könnte man mit guten Erfolgschancen eine Wette abschliessen?

<u>Lösung:</u>

$P(min\, d$. zwei gleiche Geb.)=1-P(keine zwei am selben Tag)=$1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$

Personen	P(X<2)	P(X>=2)
1	1	0
2	0.9973	0.0027
3	0.9918	0.0082
4	0.9836	0.0164
5	0.9729	0.0271
6	0.9595	0.0405
7	0.9438	0.0562
8	0.9257	0.0743
9	0.9054	0.0946
10	0.8831	0.1169
11	0.8589	0.1411
12	0.8330	0.1670
13	0.8056	0.1944
14	0.7769	0.2231
15	0.7471	0.2529
16	0.7164	0.2836
17	0.6850	0.3150
18	0.6531	0.3469
19	0.6209	0.3791
20	0.5886	0.4114
21	0.5563	0.4437
22	0.5243	0.4757
23	0.4927	0.5073
24	0.4617	0.5383
25	0.4313	0.5687
26	0.4018	0.5982
27	0.3731	0.6269
28	0.3455	0.6545
29	0.3190	0.6810
30	0.2937	0.7063

```
#Aufgabe 4.9
#Geburtstagsproblem berechnet
n=30
pr=1
for j in range(1,n):
    pr= pr*((365-j)/365)
    print('n = ', j+1, ', p = ', 1-pr)
```

Aufgabe 9

Eine Maschinenanlage besteht aus den Blöcken I, II und III. Die drei Blöcke können **unabhängig** voneinander ausfallen. Ausfall von I: $P(A) = 0.05$; Ausfall von II: $P(B) = 0.05$; Ausfall von III: $P(C) = 0.10$. Die Anlage als Ganzes kann nicht mehr arbeiten, wenn I und II zugleich ausfallen oder wenn III ausfällt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage ausfällt.

Lösung:

Ausfall von I und II gleichzeitig und III läuft korrekt: $0.05^2 \cdot 0.9 = 0.00225$, Ausfall von III: 0.1,

Ausfall des Systems: $0.00225 + 0.1 = 0.10225$.

In Formeln mengentheoretisch ausgedrückt:

$$P((A \cap B) \cup C) = P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(C) = P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(C) = 0.05^2 \cdot 0.9 + 0.1 = 0.10225$$

Aufgabe 10

a) Wie viele (unabhängige) Komponenten mit einer Zuverlässigkeit von je 35% müssen mindestens parallel geschaltet werden, damit die Zuverlässigkeit des Parallelsystems mehr als 99% beträgt? Dabei soll angenommen werden, dass das Parallelsystem funktioniert, solange mindestens eine der Komponenten funktioniert.

b) Ein Sicherheitssystem besteht aus 10 voneinander unabhängigen Komponenten mit einer Zuverlässigkeit von je 35%. Es funktioniert solange mindestens zwei (drei) Komponenten funktionieren. Berechnen Sie die Zuverlässigkeit des Gesamtsystems.

Lösung:

a) $P('System$ funktioniert') =1-$P('System$ fällt aus') =1-$0.65^n \geq 0.99$

$\Leftrightarrow 0.65^n \leq 0.01 \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.65)} \approx 10.69$,

Antwort: Mindestens 11 Komponenten.

b) Fall: Mindestens 2 Komponenten müssen funktionieren:

$P(\text{System funktioniert}) = 1 - P(\text{System fällt aus})$

$= 1 - P(\text{10 Komponenten ausgefallen}) - P(\text{9 Komponenten ausgefallen})$

$= 1 - 0.65^{10} - \binom{10}{9} 0.65^9 \cdot 0.35 \approx 0.9140$

Fall: Mindestens drei Komponenten müssen funktionieren:

$P(\text{System funktioniert}) = 1 - P(\text{System fällt aus})$

$= 1 - P(\text{10 Komponenten ausgefallen}) - P(\text{9 Komponenten ausgefallen})$

$\quad - P(\text{8 Komponenten ausgefallen})$

$= 1 - 0.65^{10} - \binom{10}{9} 0.65^9 \cdot 0.35 - \binom{10}{8} 0.65^8 \cdot 0.35^2 \approx 0.7384$

Zufallsvariable

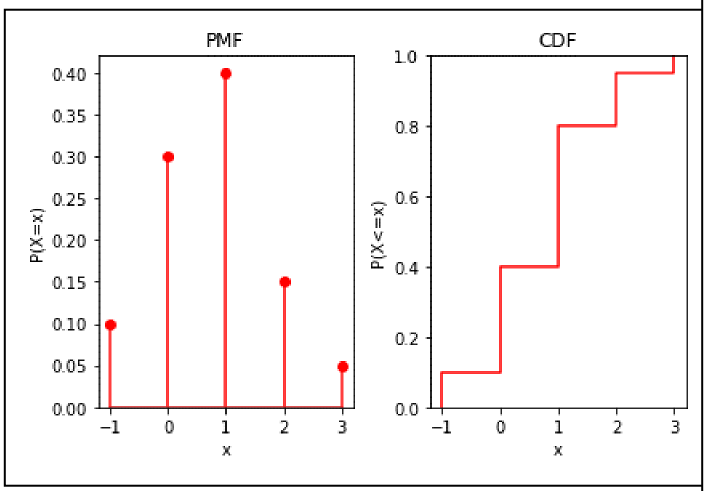
Aufgabe 11

Welchen **Erwartungswert**, welche **Varianz** und welche **Standardabweichung** besitzt die durch die folgende Tabelle beschriebene diskrete Zufallsvariable X? Schreiben Sie ein Programm, welches aus einem X Vektor und einem P Vektor die verlangten statistischen Grössen berechnet und die PMF und CDF der Verteilung plottet.

X	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.3	0.4	0.15	?

Lösung:

$E(X) = 0.75$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1.55 - 0.75^2 = \frac{79}{80} \approx 0.9875$, $S(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0.99373$




```
#Aufgabe 4.12
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.array([-1,0,1,2,3]) #Zufallsvariable
Px=np.array([0.1,0.3,0.4,0.15,0.05]) #pmf
Fx=np.cumsum(Px) #cdf

plt.figure(1)
plt.subplot(121)
plt.stem(x,Px,linefmt                    ='red',mark-
erfmt='ro',use_line_collection='true')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('P(X=x)')
plt.title('PMF')
plt.ylim(ymin=0)

plt.subplot(122)
plt.step(np.append(x[0],x),np.ap-
pend([0],Fx),color='red',where='post')
plt.ylabel('P(X<=x)')
plt.xlabel('x')
plt.title('CDF')
plt.ylim(ymin=0,ymax=1)
plt.tight_layout()
```

Aufgabe 12

Durch die folgende Tabelle wird die diskrete Zufallsvariable X beschrieben:

X	-2	-1	1	3	4
$P(X=x)$	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

a) Geben Sie die entsprechenden Tabellen für die Zufallsvariablen $Y = 2X + 1$und $Z = X^2$ an.

b) Berechnen Sie $E(Y)$, $E(Z)$, $V(Y)$, $V(Z)$, $S(Y)$.

Lösung:

a)

$Y = 2X + 1$	-3	-1	3	7	9
$P(Y = y)$	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

$Z = X^2$	4	1	9	16
$P(Z = z)$	0.1	0.3	0.3	0.3

b) $E(X) = 2$, $E(Z) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 8.2$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 8.2 - 4 = 4.2$,
$E(Y) = E(2X + 1) = E(2X) + E(1) = 2E(X) + 1 = 5$,
$V(Y) = V(2X + 1) = V(2X) = 4 \cdot V(X) = 16.8$, $S(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 4.099$,
$E(Z^2) = 103$, $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 103 - 8.2^2 = 35.76$.

Aufgabe 13

Von 5 nebeneinanderliegenden Feldern 1 bis 5 sollen 2 Felder zufällig angekreuzt werden. Die Zufallsvariable X sei die Summe der beiden Feldnummern. Im folgenden Beispiel sind die Felder 1 und 3 angekreuzt und X hätte den Wert 4:

1	2	3	4	5
x		x		

Bestimmen Sie die Zähldichte (PMF) und die Verteilungsfunktion (CDF) von X. Fertigen Sie Plots der PMF und CDF an. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.

Lösung:

Ergebnisraum $\Omega = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$.

Laplace Verteilung (Gleichverteilung): $p(\omega) = \frac{1}{10} = \frac{1}{\binom{5}{2}}$

X	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
$P(X \leq x)$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1
X^2	9	16	25	36	49	64	81

$E(X) = 0.3 + 0.4 + 1 + 1.2 + 1.4 + 0.8 + 0.9 = 6$,
$E(X^2) = 0.9 + 1.6 + 5 + 7.2 + 9.8 + 6.4 + 8.1 = 39$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 39 - 36 = 3$, $S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3}$.

Aufgabe 14

Für das Zufallsexperiment des einmaligen Werfens eines fairen Würfels definieren wir auf dem Ergebnisraum $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, die Zufallsvariable (Gewinnfunktion) $X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega) = 10 \cdot \frac{\omega-3}{\omega}$.

a) Bestimmen Sie die Mengen: $\{X \leq 2.5\}$, $\{X < 0\}$, $\{2 < X \leq 4.5\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = -5\}$, $\{X > 2.5\}$.

b) Fertigen Sie eine Tabelle mit der Zähldichte (PMF) und Verteilungsfunktion (CDF) von X an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit jeder der Mengen aus a).

d) Berechnen Sie die Werte der Verteilungsfunktion von X an den Stellen $x = 3.5$, $x = 10$, $x = 0.01$, $x = -5.4$.

e) Berechnen Sie $E(X)$, $V(X)$ und $S(X)$.

f) Fertigen Sie ein Stabdiagramm für die PMF und eine Skizze der CDF von X an.

Lösung:

a) $\{X \leq 2.5\} = \{1,2,3,4\}$, $\{X < 0\} = \{1,2\}$, $\{2 < X \leq 4.5\} = \{4,5\}$, $\{X = 2\} = \emptyset$, $\{X = -5\} = \{2\}$, $\{X > 2.5\} = \{5,6\}$.

b)

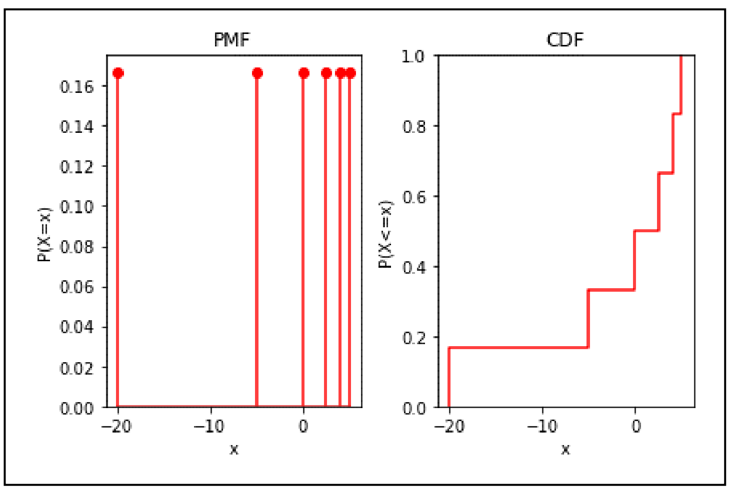
	-20	-5	0	2.5	4	5
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
P(X<=x)	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

c) $P(X \leq 2.5) = 2/3$, $P(X < 0) = 1/3$, $P(2 < X \leq 4.5) = 1/3$, $P(X = 2) = 0$, $P(X = -5) = 1/6$, $P(X > 2.5) = 1/3$

d) $P(X \leq 3.5) = 2/3$, $P(X \leq 10) = 1$, $P(X \leq 0.01) = 1/2$, $P(X \leq -5.4) = 1/6$.

e) $E(X) = \sum_{k=1}^{6} 10 \cdot \frac{k-3}{k} \cdot \frac{1}{6} = -2.25$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 73.6458$, $S(X) = \sqrt{V(X)} \approx 8.5817$.

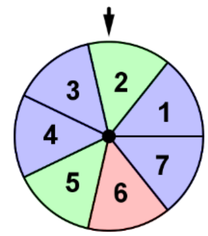
f) Beachte: Die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ ist rechtsseitig stetig!



Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 15

Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeiten jeweils in der Form $P(...)$ und berechnen Sie sie. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass das abgebildete Glücksrad auf einem Feld mit der angegebenen Eigenschaft stehen bleibt.



a) auf einem grünen Feld

b) auf einem Feld mit einer Primzahl

c) auf einem blauen Feld oder auf einem Feld mit einer Zahl ≥ 6

d) auf einem grünen Feld oder auf einem Feld mit einer geraden Zahl

e) Das Glücksrad bleibt auf einem blauen Feld stehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die angegebene Zahl ungerade ist?

f) Das Glücksrad bleibt auf einem Feld mit einer Primzahl stehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Feld grün ist?

<u>Lösung:</u>

a) $P(\text{grün}) = \frac{|\{2;5\}|}{|\{1;2;3;4;5;6;7\}|} = \frac{2}{7}$ b) $P(\text{prim}) = \frac{|\{2;3;5;7\}|}{|\{1;2;3;4;5;6;7\}|} = \frac{4}{7}$

c) $P(\text{blau } \cup \geq 6) = P(\text{blau}) + P(\geq 6) - P(\text{blau} \cap \geq 6) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

d) $P(\text{grün} \cup \text{gerade}) = P(\text{grün}) + P(\text{gerade}) - P(\text{grün gerade}) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$

e) $\text{blau} = \{1; 3; 4; 7\}$ $\quad \text{ungerade} = \{1; 3; 5; 7\}$

$\text{blau} \cap \text{ungerade} = \{1; 3; 7\}$

$$P(\text{ungerade}|\text{blau}) = \frac{P(\text{blau} \cap \text{ungerade})}{P(\text{blau})} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4}$$

f) $\text{prim} = \{2; 3; 5; 7\}$ $\quad \text{grün} = \{2; 5\}$

$\text{prim} \cap \text{grün} = \{2; 5\}$

$$P(\text{grün}|\text{prim}) = \frac{P(\text{prim} \cap \text{grün})}{P(\text{prim})} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 16

In einer Klasse von 35 Studierenden haben 27 in Mathematik eine genügende Note (Ereignis M) und 24 in Chemie (Ereignis C); 18 sind in beiden Fächern genügend.

a) Erstellen Sie aus diesen Angaben eine Vierfeldertafel.

b) Schreiben Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten in der Form $P(\ldots)$und berechnen Sie sie:

   i) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dieser Klasse ausgewählte Person in Mathematik oder in Chemie eine genügende Note hat.

   ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der in Chemie genügend ist, in Mathematik eine ungenügende Note hat.

Lösung:

a)

	M	$\bar{M}$	Summe
C	18	6	24
$\bar{C}$	9	2	11
Summe	27	8	35

b) i) $P(M \cup C) = 1 - P(\bar{M} \cap \bar{C}) = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}$ oder

$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = \frac{27}{35} + \frac{24}{35} - \frac{18}{35} = \frac{33}{35}$

ii) $P(\bar{M}|C) = \frac{P(C \cap \bar{M})}{P(C)} = \frac{\frac{6}{35}}{\frac{24}{35}} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 17

In einer Gruppe von 20 Personen haben 13 braune Augen (Ereignis A) und 9 tragen eine Brille (Ereignis B), wobei 5 der Brillenträger braune Augen haben.

a) Erstellen Sie aus diesen Angaben eine Vierfeldertafel.

b) Schreiben Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten in der Form $P(\ldots)$und berechnen Sie sie:

i) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dieser Gruppe ausgewählte Person braune Augen hat **und** keine Brille trägt bzw. dass eine zufällig aus dieser Gruppe ausgewählte Person braune Augen hat **oder** keine Brille trägt.

ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes braunäugiges Gruppenmitglied keine Brille trägt.

iii) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Brillenträger aus dieser Gruppe braune Augen hat.

Lösung:

a)

	A	$\bar{A}$	Summe
B	5	4	9
$\bar{B}$	8	3	11
Summe	13	7	20

b) i) …und: $P(A \cap \bar{B}) = \frac{8}{20}$

…oder: $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{13}{20} + \frac{11}{20} - \frac{8}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

bzw. $P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(B \cap \bar{A}) = 1 - \frac{4}{20} = \frac{4}{5}$

ii) $P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{\frac{8}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{8}{13}$

iii) $P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$

Aufgabe 18

Eine Urne enthält 6 grüne und 4 rote Kugeln. Man zieht nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen.

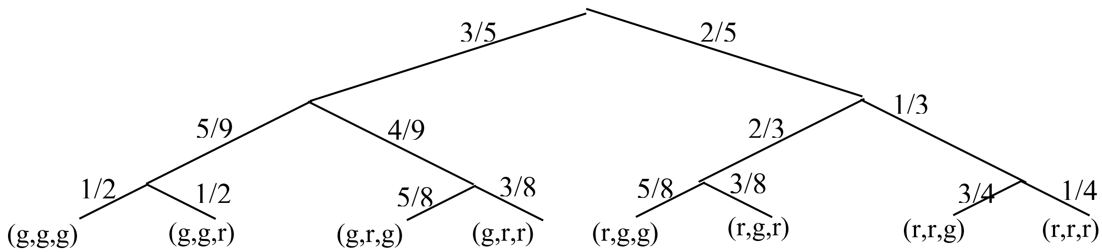
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint die Farbfolge ggr ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 rote Kugeln dabei?

c) Eine rote Kugel wird als letzte Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde bei den vorhergehenden Zügen mindestens (bzw. genau) eine grüne Kugel gezogen?

Lösung:

Ergebnisraum $\Omega = \{g, r\}^3$. Die Zähldichte ist durch den folgenden Ereignisbaum definiert.



a) $P(\{g, g, r\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

b) $P(\{(r, r, g), (r, g, r), (g, r, r)\}) = \frac{3}{10}$

c) Mindestens eine grüne Kugel bei den ersten beiden Zügen unter der Bedingung, dass als letzte Kugel eine rote gezogen wurde:

$$P(\{(g, g, r), (r, g, r), (g, r, r)\} | \{(r, r, r), (r, g, r), (g, r, r), (g, g, r)\})$$
$$= \frac{P(\{(g, g, r), (r, g, r), (g, r, r)\}}{P(\{(g, g, r), (r, g, r), (g, r, r), (r, r, r)\}} = \frac{11}{12}$$

Genau eine grüne Kugel bei den ersten beiden Zügen unter der Bedingung, dass als letzte Kugel eine rote gezogen wurde:

$$P(\{(r, g, r), (g, r, r)\} | \{(r, r, r), (r, g, r), (g, r, r), (g, g, r)\}) = \frac{P(\{(r, g, r), (g, r, r)\}}{P(\{(g, g, r), (r, g, r), (g, r, r), (r, r, r)\}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 19

Die in einem Warenhaus angebotenen Steckdosen stammen aus 2 Fabriken $F1$ und $F2$. Dabei liefert $F1$ 80% des Angebots. Man weiss, dass Lieferungen aus $F1$ zu 5% und Lieferungen von $F2$ zu 10% fehlerhaft sind.

Es bedeuten

A: Steckdose stammt aus $F1$

B: Steckdose ist fehlerhaft.

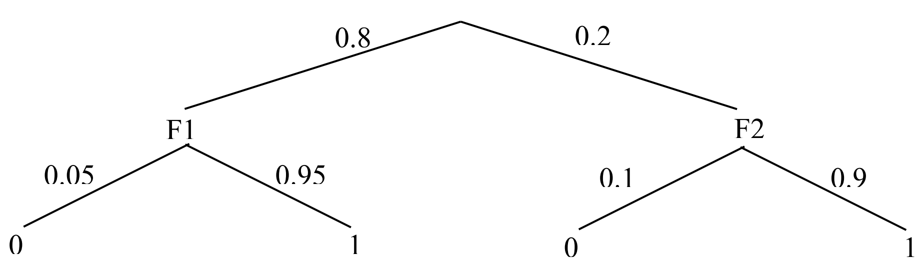
$\overline{B}$: Steckdose ist nicht fehlerhaft

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaumes:

a) $P(A \cap \overline{B})$ b) $P(B)$ c) $P(A \cup B)$

d) $P(A|B)$ e) $P(B|A)$ f) $P(\overline{A}|B)$

Lösung:



a) $P(A \cap \overline{B}) = 0.8 \cdot 0.95 = 0.76$

b) $P(B) = 0.8 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.06$

c) $P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B}) = 0.06 + 0.76 = 0.82$

d) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.06} = \frac{2}{3}$

e) $P(B|A) = 0.05$

f) $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{1}{3}$

Aufgabe 20

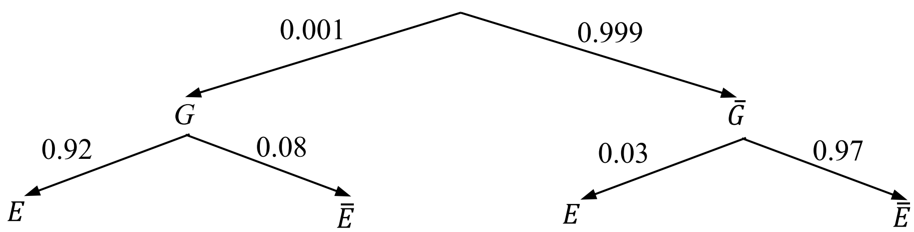
Eine Sicherheitssoftware für die Analyse von Videoaufnahmen an einer Flughafen-Sicherheitsschleuse kann das Gesicht von gesuchten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% erkennen. Allerdings identifiziert die Software in 3% aller Fälle eine nicht gesuchte Person irrtümlich als gesucht. Die Sicherheitsbehörden gehen davon aus, dass an einem bestimmten Tag eine Gruppe von zehn gesuchten Personen versuchen wird, die Schleuse zu passieren. Das Personenaufkommen pro Tag liegt bei 10‘000 Fluggästen. Mit der Präsenz weiterer gesuchter Personen ist am betrachteten Tag nicht zu rechnen.

a) Mit wie vielen fälschlicherweise als “gesucht” identifizierten Personen ist zu rechnen?

b) Die Software schlägt Alarm. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich eine gesuchte Person entdeckt wurde?

<u>Lösung:</u>

G: Eine Person ist gesucht. E: Eine Person wird von der Software erkannt.



a) $P(E \cap \bar{G}) = 0.999 \cdot 0.03 = 0.02997$

$\Rightarrow$ Man muss mit $0.02997 \cdot 9990 \approx 300$ fälschlicherweise als “gesucht” identifizierten Personen rechnen.

b) $P(G|E) = \frac{0.001 \cdot 0.92}{0.001 \cdot 0.92 + 0.999 \cdot 0.03} \approx 0.030$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine gesuchte Person entdeckt wurde, beträgt etwa 3%.

Aufgabe 21

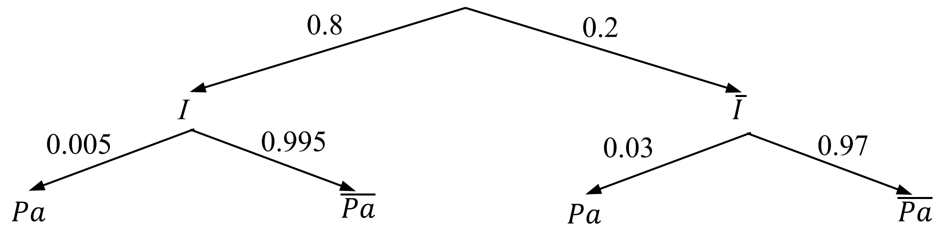
Eine Speditionsfirma transportiert unter anderem Maschinenteile von der Schweiz in die Türkei. Da eine verzögerte Lieferung mit hohen Konventionalstrafen verbunden ist, ist vor jedem dieser Transporte eine Inspektion des LKW vorgesehen, die jedoch von den Fahrern aus Bequemlichkeit in 20% der Fälle nicht durchgeführt wird. Ohne Inspektion erleidet der LKW auf einer Fahrt mit 3% Wahrscheinlichkeit eine Panne, die zu einer unzulässigen Verzögerung führt, mit Inspektion nur mit 0.5%.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter LKW unterwegs eine Panne hat?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein auf der Strecke liegengebliebener Fahrer die Inspektion nicht durchgeführt?

Lösung:

I: Es wurde eine Inspektion durchgeführt. Pa: Der LKW hat unterwegs eine Panne.



a) $P(Pa) = 0.8 \cdot 0.005 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.01$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter LKW eine Panne hat, beträgt 1%.

b) $P(\bar{I}|Pa) = \frac{0.2 \cdot 0.03}{0.8 \cdot 0.005 + 0.2 \cdot 0.03} = 0.6$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein auf der Strecke liegengebliebener Fahrer die Inspektion nicht durchgeführt hat, beträgt 60%.

Aufgabe 22

Strategiespiel: A soll 3 Partien, abwechselnd gegen B und C spielen. A gewinnt das Spiel, wenn er zwei aufeinanderfolgende Partien gewinnt. Die Gewinnchance gegen B ist b, die gegen C ist c, wobei bekannt ist, dass $b < c$ gilt. A darf die Reihenfolge der Gegner wählen, also BCB oder CBC. Welche Wahl gibt A die grössere Gewinnchance?

Spielen Sie das Spiel zuerst mit $b = 0.5$ und $c = 0.7$ durch.

Lösung:

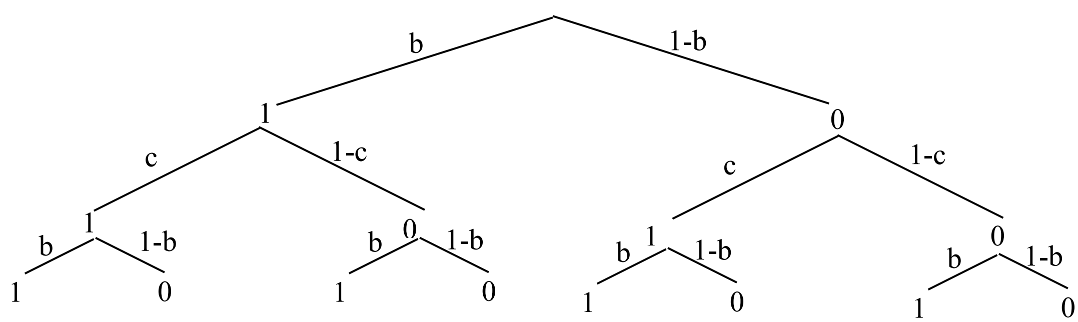
Der Ereignisbaum für das Spiel BCB. Hier müssen die Äste mit zweimal Eins nacheinander gezählt werden.
$P(A \text{ gewinnt bei } BCB) = bc + (1-b)cb = bc(2-b)$.

Entsprechend erhält man durch Vertauschen von C und B:

$P(A \text{ gewinnt bei } CBC) = bc + (1-c)bc = bc(2-c)$.

Da $b < c$ gilt, folgt: $P(A \text{ gewinnt bei } CBC) < P(A \text{ gewinnt bei } BCB)$.

Für mit $b = 0.5, c = 0.7$ folgt: $P(A \text{ gewinnt bei } CBC) = 0.455 < P(A \text{ gewinnt bei } BCB) = 0.525$.



Stochastische Unabhängigkeit

Aufgabe 23

Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist durch folgende Tabelle gegeben:

$y \backslash x$	-1	0	1	PMF
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	
0	$\frac{3}{12}$		$\frac{3}{12}$	
-1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	
PMF				

a) Ergänzen Sie die Tabelle.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Xund Y.

c) Berechnen Sie die Varianzen $V(X)$ und $V(Y)$.

d) Sind X und Y stochastisch unabhängig (Begründung!)?

e) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = 0|Y = 1)$.

Lösung:

a)

$y \backslash x$	-1	0	1	PMF
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{3}{12}$	0	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
PMF	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	1

b) $E(X) = \frac{1}{12}$ und $E(Y) = \frac{1}{6}$.

c) $V(X) = \frac{11}{12} - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{131}{144} = 0.9097$ und $V(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} = 0.4722$

d) Stochastisch abhängig, denn es gilt z.B.

$$0 = P(X = 0|Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

e) $P(X = 0|Y = 1) = \frac{P(Y=1,X=0)}{P(Y=1)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 24

Betrachtet werden 3-stellige Binärcodes (x_1, x_2, x_3), $x_i \in \{0,1\}$. Dabei treten 0 und 1 mit derselben Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ auf. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der 1er im Code und die Zufallsvariable W bezeichne die Anzahl der aufeinanderfolgenden Zahlenwechsel im Code. Zum Beispiel: $X(1,1,0) = 2$ und $W(1,1,0) = 1$.

a) Erstellen Sie eine Tabelle mit der gemeinsamen Verteilung sowie den PMFs von X und W.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen von X und von W.

c) Sind X und W stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = 2|W = 1)$.

Lösung:

a)

Code	x	w	**Code**	x	w
000	0	0	100	1	1
001	1	1	101	2	2
010	1	2	110	2	1
011	2	1	111	3	0

w \ x	0	1	2	3	$P(W = w)$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

b) $E(X) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{12}{8} = 1.5$ und $E(W) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$

$E(X^2) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + \frac{3}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 = \frac{24}{8} = 3$ und $E(W^2) = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1.5$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - 1.5^2 = 0.75$ und

$V(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = 1.5 - 1^2 = 0.5$

c) Stochastisch abhängig, denn es gilt z.B.

$P(X = 1, W = 0) = 0$, aber $P(X = 1) \cdot P(W = 0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \neq 0$

d) $P(X = 2|W = 1) = \frac{P(X=2,W=1)}{P(W=1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 25

Ein Kollege bietet Ihnen ein Spiel aus 2 Runden an, bei dem in jeder der beiden Runden einmal ein fairer Würfel geworfen wird. In der ersten Runde gewinnen Sie im Fall der Zahlen 1-3 und verlieren im Fall der Zahlen 4-6. Falls Sie in der ersten Runde gewinnen, funktioniert die zweite Runde analog zur ersten, d.h. Sie gewinnen in der zweiten Runde im Fall der Zahlen 1-3 und verlieren im Fall 4-6. Falls Sie in der ersten Runde verlieren, gewinnen Sie in der zweiten Runde im Fall der Zahlen 1-4 und verlieren nur im Fall 5-6.

Modellieren Sie dieses Spiel mit den Ereignissen G_1 /G_2:

Sie gewinnen in Runde 1 bzw. 2 sowie $\overline{G_1}$ /$\overline{G_2}$:

Sie verlieren in Runde 1 bzw. 2.

a) Stellen Sie eine Vierfeldertafel für diese Ereignisse auf.

b) Sind die Ereignisse G_1 und G_2 stochastisch abhängig oder unabhängig?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a)

	G_1	$\overline{G_1}$	PDF von G_2
G_2	1/4	1/3	7/12
$\overline{G_2}$	1/4	1/6	5/12
PDF von G_1	1/2	1/2	1

b) Die beiden Ereignisse sind stochastisch abhängig, denn es gilt z.B.
$P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{4}$, aber $P(G_1) \cdot P(G_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} \neq \frac{1}{4}$