Serie 08: Hypothesentests

Aufgabe 1

Ein Hersteller produziert in grosser Stückzahl elektrische Widerstände mit dem Sollwert $\mu_0 = 100\,\Omega$. Der ohmsche Widerstand X kann dabei als eine annähernd normalverteilte Zufallsvariable angesehen werden. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ ergab ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} = 102\,\Omega$. Man teste mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ die Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ gegen die Alternativhypothese $H_A: \mu \neq \mu_0$. Aufgrund langjähriger Erfahrung darf dabei von einer Standardabweichung von $\sigma = 3\Omega$ ausgegangen werden.

<u>Lösung</u>:

Zeile 1 von Tabelle (Normalverteilung, $\sigma = 3\,\Omega$ bekannt)

$H_0: \mu = 100\,\Omega, \quad H_A: \mu \neq 100\,\Omega$

Testvariable $U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (standardnormalverteilt)

Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$

Kritische Grenzen: $c_u = -2.576$, $c_o = 2.576$

Testwert $\hat{u} = \frac{102-100}{3/\sqrt{10}} = 2.1082$

H_0 wird angenommen; der Sollwert wird eingehalten.

Aufgabe 2

Eine Maschine produziert Bleche für die Beplankung von Flugzeugen. Als Genauigkeitsmass wird dabei die Standardabweichung σ_0 der Blechdicke X betrachtet. Die Maschine wurde dabei so eingestellt, dass $\sigma_0 = 5\,\mu m$ beträgt. Zu Kontrollzwecken wurde eine Stichprobe vom Umfang $n = 12$ entnommen. Ihre Auswertung ergab eine empirische Standardabweichung von $s = 10\,\mu m$. Muss die Maschine neu eingestellt werden? Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ die Nullhypothese $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ gegen die Alternativhypothese $H_A: \sigma^2 > \sigma_0^2$ und treffen Sie eine Entscheidung. Ändert sich diese, wenn dieser Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\%$ durchgeführt wird?

<u>Lösung</u>:

Zeile 7 von Tabelle (Normalverteilung)

$H_0: \sigma = 5\,\mu m, \quad H_A: \sigma > 5\,\mu m$

Testvariable $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ (Chi-Quadrat-verteilt $f = 11$)

Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ($\alpha = 0.01$)

Kritische Grenze: $c_o = 19.67$ ($c_o = 24.73$)

Testwert $\hat{z} = \frac{11 \cdot 10^2}{5^2} = 44$

H_0 wird bei jeder der beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten abgelehnt; die Maschine muss neu eingestellt werden.

Aufgabe 3

Die Reisslast X eines Seiles ist laut Hersteller eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert $\mu_0 = 5.20$ kN. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ führte jedoch zu den folgenden Kennwerten: $\bar{x} = 5.02$ kN, $s = 0.12$ kN. Prüfen Sie mit einer Irrtumswahr-scheinlichkeit von $\alpha = 5\%$, ob die aufgrund der Stichprobe geäusserte Vermutung, die Herstellerangabe $\mu_0 = 5.20$ kN sei zu hoch, berechtigt ist.

Lösung:

Zeile 2 von Tabelle (Normalverteilung, Varianz unbekannt)

$H_0: \mu = 5.20$ kN, $H_A: \mu < 5.20$ kN

Testvariable $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (t-verteilt verteilt $f = 19$)

Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

Kritische Grenze: $c_u = -1.729$

Testwert $\hat{t} = \frac{5.02-5.20}{\frac{0.12}{\sqrt{20}}} = -6.708$

H_0 wird abgelehnt; die Herstellerangabe ist unglaubwürdig.

Aufgabe 4

Der Hersteller eines Massenartikels behauptet, seine Ware enthalte einen Ausschussanteil von höchstens 3%. Bei einer Qualitätskontrolle werden in einer Stichprobe von $n = 400$ Teilen 20 unbrauchbare gefunden. Steht diese Untersuchung im Einklang mit der Behauptung des Herstellers oder ist der Ausschussanteil höher? Rechnen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$.

Lösung:

Zeile 8 von Tabelle (Bernoulli-Verteilung)

$H_0: \mu = 0.03$, $H_A: \mu > 0.03$

Testvariable $U = \frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ (standardnormalverteilt)

Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

Kritische Grenze: $c_o = 1.645$

Testwert $\hat{u} = \frac{(\frac{20}{400})-0.03}{\sqrt{0.03\cdot(1-0.03)/400}} = 2.345$

H_0 wird abgelehnt; der Ausschussanteil ist wahrscheinlich höher, als der Händler angegeben hat.

Aufgabe 5

In einem Werk werden Leuchtkörper für Signallampen hergestellt, deren Lebensdauer X als eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert $\mu_0 = 1500$ h und der Standardabweichung $\sigma = 80$ h betrachtet werden kann. Durch eine geringfügige Materialänderung erhofft sich der Hersteller eine Vergrösserung der mittleren Lebensdauer. Eine Stichprobenuntersuchung an 50 Leuchtkörpern der neuen Serie scheint dies zu bestätigen. Für die mittlere Lebensdauer erhielt man den Wert $\bar{x} = 1580$ h. Können wir aus dieser Stichprobe den Schluss ziehen, dass sich die Lebensdauer signifikant erhöht hat? Testen sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ die

Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ gegen die Alternativhypothese $H_A: \mu > \mu_0$. Bei dem Test wird vorausgesetzt, dass sich die Standardabweichung durch die Materialänderung nicht verändert hat.

Lösung:
Zeile 1 von Tabelle (Normalverteilung, $\sigma = 80$ h bekannt)
$H_0: \mu = 1500$ h, $H_A: \mu > 1500$ h
Testvariable $U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (standardnormalverteilt)
Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$
Kritische Grenze: $c_o = 2.326$
Testwert $\hat{u} = \frac{1580-1500}{80/\sqrt{50}} = 7.071$
H_0 wird abgelehnt; die Materialänderung bewirkt anscheinend eine signifikante Vergrösserung der Lebenserwartung.

Aufgabe 6
In einem Werk werden Schrauben produziert, deren Länge X eine normalverteilte Zufallsgrösse mit dem Mittelwert $\mu_0 = 21$ mm sei. Anhand einer Zufallsstichprobe soll überprüft werden, ob die Maschine richtig eingestellt ist. Die Stichprobe führt zu den folgenden Resultaten: $n = 25$, $\bar{x} = 20.5$ mm, $s = 1.5$ mm. Prüfen Sie mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\%$, ob die Abweichung des beobachteten Stichprobenmittelwertes vom Sollwert signifikant oder zufallsbedingt ist.

Lösung:
Zeile 2 von Tabelle (Normalverteilung, Varianz unbekannt)
$H_0: \mu = 21$ mm, $H_A: \mu \neq 21$ mm
Testvariable $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (t-verteilt verteilt $f = 24$)
Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$
Kritische Grenzen: $c_u = -2.797$, $c_o = 2.797$
Testwert $\hat{t} = \frac{20.5-21}{1.5/\sqrt{25}} = -1.667$
H_0 wird angenommen; man geht davon aus, dass die Abweichung zufallsbedingt ist.

Aufgabe 7
In zwei Werken A und B wird ein bestimmtes elektronisches Bauteil nach dem gleichen Verfahren hergestellt. Es wird jedoch vermutet, dass die im Werk B produzierten Teile eine höhere Lebensdauer besitzen. Die folgende Stichprobenuntersuchung scheint dies zu bestätigen:

Werk A	$n_1 = 100$	$\bar{x} = 1540$	$s_1 = 142$
Werk B	$n_2 = 120$	$\bar{y} = 1600$	$s_2 = 150$

Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ die Behauptung, dass die im Werk B hergestellten Bauelemente eine höhere Lebensdauer besitzen. Wir setzen dabei voraus, dass die Werte aus normalverteilten Grundgesamtheiten mit gleicher, aber unbekannter Varianz stammen.

Lösung:
Zeile 5 von Tabelle (unabhängige Stichproben, Varianzen unbekannt, aber $n > 30$)
$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_A: \mu_1 < \mu_2$
Testvariable $U = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma}$ mit $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ (annähernd standardnormalverteilt)
Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$
Kritische Grenze: $c_u = -2.326$
Testwert $\hat{u} = \frac{1540-1600}{\sqrt{\frac{142^2}{100}+\frac{150^2}{120}}} = -3.042$
H_0 wird abgelehnt; die Bauelemente aus Werk B haben eine signifikant höhere Lebenserwartung.

Aufgabe 8
Zwei verschiedene Messmethoden für Widerstände sollen miteinander verglichen werden. Vergleichswerte an 5 Widerständen ergaben das folgende Messprotokoll:

i	1	2	3	4	5
1. Methode: Messwert x_i in Ω	100.5	102.4	104.3	101.5	98.4
2. Methode: Messwert y_i in Ω	98.2	99.1	102.4	101.1	96.2

Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1\%$ ob beide Messmethoden als gleichwertig angesehen werden können oder ob die beobachteten Abweichungen signifikant sind.

Lösung:
Zeile 4 von Tabelle (abhängige Stichproben, Varianzen unbekannt)
Man untersucht $z_1, \dots, z_5$ mit $z_i = x_i - y_i$.
$\bar{z} = 2.02, \; s^2 = 1.097, \; s = 1.047$
$H_0: \mu = 0$, $H_A: \mu \neq 0$
Testvariable $T = \frac{\bar{Z}}{S/\sqrt{n}}$ (t-verteilt mit $f = 4$)
mit $\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(X_i - Y_i - \bar{Z})^2$
Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$
Kritische Grenzen: $c_u = -4.604$, $c_o = 4.604$
Testwert $\hat{t} = \frac{2.02}{\sqrt{1.097/5}} = 4.313$
H_0 wird angenommen; die Messmethoden können als gleichwertig betrachtet werden.

Aufgabe 9
Bestimmen Sie die p -Werte zu den Aufgaben 4 und 5.

Lösung:
Aufgabe 4
Testvariable $U = \frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ (standardnormalverteilt)
Testwert $\hat{u} = \frac{\frac{20}{400}-0.03}{\sqrt{0.03\cdot(1-0.03)/400}} = 2.345$
einseitige Alternativhypothese: $H_A: \mu > 0.03$
$\Rightarrow \quad p\text{-Wert} = P(U \geq 2.345) \overset{\text{Tabelle 1}}{=} 1 - 0.9905 = 0.0095 < \alpha \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt.

Aufgabe 5
Testvariable $U = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (standardnormalverteilt)
Testwert $\hat{u} = \frac{1580-1500}{80/\sqrt{50}} = 7.071$
einseitige Alternativhypothese: $H_A: \mu > 1500$ h
$\Rightarrow \quad p\text{-Wert} = P(U \geq 7.071) \overset{\text{Tabelle 1}}{\approx} 0 \ll \alpha \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt.