USTC

https://github.com/Luciennnnnnn/ustc-functional-analysis-exercise-set

实变函数与泛函分析习题集

2024 年 9 月 9 日

By: Xin

1 集合与实数

1.1 题目

1. [**选择题**] 下列条件哪些是实数列 $\{a_n\}$ 为基本列的充分条件: (1) $\lim_{n,m\to\infty}(a_n-a_m)=0$; (2) 对任意的 k, 均有 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$; (3) 存在一个收敛到零的数列 $\{b_n\}$, 使对任意的 k 及充分大的 n, 均有 $|a_{n+k}-a_n|\le b_n$ [C]

   (A) 3 个结论都正确　　(B) (2) 与 (3) 正确, (1) 不正确

   (C) (1) 与 (3) 正确, (2) 不正确　　(D) (1) 正确, (2) 与 (3) 不正确

2. [**选择题**] 下列是一些关于稠密性的结论，判断它们的正确性:（1）在无理数中稠密的数集必在整个实数中稠密;（2）若两个数集的并集在实数中稠密，则其中必有一个数集在实数中稠密;（3）若两个数集分别在关于实数集互为余集的两个数集中稠密，则它们的并集必在整个实数中稠密 [C]

   （A）3 个结论都不正确　　（B）3 个结论都正确

   （C）（1）与（3）正确，（2）不正确　　（D）（1）正确，（2）与（3）不正确

3. [**选择题**] 设 $F_1,F_2,\cdots$ 为一列闭实数集, 则下列结论正确的是: [D]

   (A) 若 $G_1,G_2,\cdots$ 为一列互不相交的开集, 且 $F_n\subset G_n, n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 为闭集

   (B) 若 $G_1,G_2,\cdots$ 为一列互不相交的闭集, 且 $F_n\subset G_n, n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 为闭集

   (C) 若每个 F_n 均无极限点, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 为闭集

   (D) 若 $F_n\subset(n,n+1), n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 为闭集

   解析: (A) 的一个反例考虑一系列单点集 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，其中 n 是正整数，这些闭集互不相交，它们的并为 $\left\{\frac{1}{n}\mid n\in N\right\}$，然后这个集合不是闭集，因为它的闭包包含 0，但是 0 并不在原集合中。

4. [**选择题**] 设 $F_n\subset(n,n+1), n=1,2,\cdots$, 且每个 F_n 为闭集，判断下列结论的正确性:（1）$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 为闭集;（2）定义 $f(x)=a_n, x\in(n-1,n), n=1,2,\cdots$, 其中每个 a_n 为常数，则 f 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 上连续。 [B]

   (A) 2 个结论都不正确　　(B) 2 个结论都正确

   (C) （1）正确，（2）不正确　　(D) （1）不正确，（2）正确

   解析:（2）的证明见例 1.4.1。

5. [**选择题**] 设 $F_n, n=1,2,\cdots$ 为实数集中一列互不相交的非空闭集，$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，在 F 上定义函数 f 如下: 当 $x\in F_n$ 时，$f(x)=a_n$，其中 $a_n, n=1,2,\cdots$ 均为实常数，则下列条件:（1）$(a_n,b_n), n=1,2,\cdots$ 是一列互不相交的开区间，$F_n\subset(a_n,b_n)$，且点集 $\{a_n\}\cup\{b_n\}$ 无极限点;（2）对任意的 $x_n\in F_n, n=1,2,\cdots$，点集 $\{x_n\}$ 无极限点，哪些是函数 f 在 F 上连续的充分条件? [B]

   (A) 2 个都不是　　(B) 2 个都是

   (C) （1）是，（2）不是　　(D) （1）不是，（2）是

   解析: 函数 f 在孤立点处是连续的。函数 f 在 x 点连续 $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x\in E\cap\delta(x)$ 时，均有 $f(x)\in\epsilon(f(x))$。而根据孤立点的定义，对于孤立点 x_0，$\exists\delta>0$，使得 $E\cap\delta(x_0)=\{x_0\}$，因此对于 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x\in E\cap\delta(x_0)$ 时，x 只能取 x_0，有 $f(x)=f(x_0)\in\epsilon(f(x))$ 成立。也因此，f 一定在孤立集上连续。对于（1），f 一定在闭集 F_n 上连续，又点集 $\{a_n\}\cup\{b_n\}$ 无极限点，因此 f 在 F 上的所有极限点上连续。对于（2），F 是一个孤立集，f 一定在 F 上连续。

6. [**选择题**] 设 $F_n, n=1,2,\cdots$ 为实数集中一列互不相交的非空闭集，$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，在 F 上定义函数 f 如下: 当 $x\in F_n$ 时，$f(x)=a_n$，其中 $a_n, n=1,2,\cdots$ 均为实常数，则下列条件:（1）若每个 F_n 均无极限点;（2）若 $F_n\subset(n-1,n), n=1,2,\cdots$, 则 F 为闭集; 哪些是 F 为闭集的充分条件? [A]

   (A) 2 个都不是　　(B) 2 个都是

   (C) （1）是，（2）不是　　(D) （1）不是，（2）是

   解析: 注意 $F_n\subset(n-1,n)$ 和 $F_n\subset(n,n+1)$ 的区别。如果是前者，那么 $F_1\subset(0,1)$，如果 $F_1=\left\{\frac{1}{n}\right\}, n=1,2,\cdots$，那么显然 F_1 不为闭集，因为 F_1 的闭包包含 0，则 F 不为闭集。

1.2 有用的结论

1. 几类点：内点，外点，边界点，聚点，孤立点
2. E = 聚点（内点 + 边界点）+ 孤立点
3. 单点集没有聚点，单点集的导集为空集，单点集是闭集

2 测度与积分

2.1 题目

1. [**选择题**] 设数集 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 在实数 R 中稠密，$E \subset R$，f 和 g 为 E 上的实函数，对 $\forall \sigma \in R$，记 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > a_n) \cap E(g < a_n - \sigma)]$，$C = E(f - g > \sigma)$。则: [A]

   (A) B=C　　(B) C 是 B 的真子集
   (C) B 是 C 的真子集　　(D) B 与 C 互不包含

2. [**选择题**] 设 f 为 $E \subset R$ 上的一个实函数，对 $\sigma \in R$，若数列 $\{\sigma_n\}$ 严格单减，且 $\sigma_n \to \sigma$，则 $E(f > \sigma) =$: [B]

   (A) $\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f \geq \sigma_n)$　　(B) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f \geq \sigma_n)$
   (C) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f \leq \sigma_n)$　　(D) $\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f \leq \sigma_n)$

3. [**选择题**] 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个条件收敛级数, 定义

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x \in (n-1, n), n = 1, 2, \cdots, \\ -a_n, & x \in (-n, -n+1), n = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

   则: [D]

   (A) f R 上 Lebesgue 可积　　(B) f 在 R 上 Lebesgue 不可积，但有积分值
   (C) $|f|$ 在 R 上 Lebesgue 不可积，且无积分值　　(D) $|f|$ 在 R 上 Lebesgue 不可积，但有积分值

4. [**判断题**] 设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上有积分值。

   答：错。有界可测集上的有界可测函数一定有积分值，对于一般函数则不成立。比如 $[-1, 1]$ 上的函数 $\frac{1}{x}$，可测但无积分值。

5. [**判断题**] 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个条件收敛级数, 定义

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x \in (n-1, n), n = 1, 2, \cdots, \\ -a_n, & x \in (-n, -n+1), n = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

   则 f 在 R 上 Lebesgue 可积;

   相关知识:

   (a) 条件收敛级数：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但是 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 不收敛。
   (b) $f \in L(E) \Leftrightarrow |f| \in L(E)$

   答：错。
   $\int_R f(x)dx = \int_R f^+(x)dx - \int_R f^-(x)dx = \int_{[0,+\infty)} |f(x)|dx - \int_{[0,+\infty)} |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty - \infty$，因此 L 不可积。
   或者由 fL 可积和 $|f|$L 可积的等价性，$\int_R |f(x)|dx = 2\int_{[0,+\infty)} |f(x)|dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$，因此 L 不可积。

6. [**判断题**] 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个条件收敛级数, 定义

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & x \in (n-1, n), n = 1, 2, \cdots, \\ -a_n, & x \in (-n, -n+1), n = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

则 $|f|$ 在 R 上 Lebesgue 不可积，但有积分值;

答：正确。$\int_R |f(x)|dx = 2\int_{[0,+\infty)} |f(x)|dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$，因此 $f(x)$L 不可积，但 $f(x)$ 有积分值，为 $+\infty$。

7. [**判断题**] 设 $\{a_n\}$ 为一个单调减的实数列, 且 $a_n \to 0$, 在区间 $[0,+\infty)$ 上定义

$$f(x) = (-1)^{n-1}a_n, x \in [n-1,n), n = 1,2,\cdots,$$

则 f 在 $[0,+\infty)$ 上 Lebesgue 可积。

答：错。令 $a_n = \frac{1}{n}$，则 f^+ 和 f^- 虽然在 $[0,+\infty)$ 上都有积分值，但同时为 $+\infty$；或者由于 $|f|$ 在 $[0,+\infty)$ 上 Lebesgue 不可积，故 f 也不可积。

8. [**证明题**] 设 f 为 $[0,1]$ 上的非负有界可测函数，Q 为 $[0,1]$ 中的无理数集。(1) 若对任意的 $x \in Q$, 均有 $f(x) = 0$, 证明 f 在 $[0,1]$ 上存在子集式分割 D, 使其积分大和 $S_D = 0$, 用上积分、下积分等概念证明 f 在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积, 并求积分值: (2) 若对任意的 $x \in Q$, 均有 $f(x) > 0$, 证明 $\int_{[0,1]} fdx > 0$ 。

证: (1) 对分割 $D : [0,1] = P \cup Q$, 其中 P 为 $[0,1]$ 的有理数集, 有 $m(P) = 0, m(Q) = 1$。故积分上和 $S_D = m(P)\sup_{x\in P}\{f(x)\} + m(Q)\sup_{x\in Q}\{f(x)\}$，因为 f 是有界函数，所以存在 $K \in N$, 使得 $\underset{x\in P}{sup}\{f(x)\} <= K$，所以 $S_D <= 0 \times K + 1 \times 0 = 0$。

由于 $f \geq 0$, 故有

$$0 \leq \underline{\int}_{[0,1]} fdx \leq \overline{\int}_{[0,1]} fdx \leq S_D = 0,$$

于是 $\underline{\int}_{[0,1]} fdx = \overline{\int}_{[0,1]} fdx = 0$, 故根据定义, f 在 $[0,1]$ 上可积, 且 $\int_{[0,1]} fdx = 0$ 。

(2) 用反证法。若不然, 则有 $\int_{[0,1]} fdx = 0$ 。任取 $a > 0$, 并记 $E = [0,1]$, 则

$$0 = \int_{[0,1]} fdx = \int_{E(f\geq a)} fdx + \int_{E(f<a)} fdx \geq am[E(f \geq a)],$$

从而有, $m[E(f \geq a)] = 0$ 。故 $E(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq \frac{1}{n}\right)$ 为零测集, 这与假设矛盾。

9. [**证明题**] 设 E 为 R 中的一个 Lebesgue 零测集, 在 R 上定义

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

1. 证明 f 在任意闭区间 $[a,b]$ 上存在分割 D, 使其积分大和 $S_D = 0$, 并根据定义, 证明 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积: (10 分) 2. 根据一般可测集上一般函数积分的定义, 证明 f 在 R 上 Lebesgue 可积, 并求 $\int_R fdx$ 。(6 分)

解: 1. 对分割 $D : [a,b] = E_1 \cup E_2$, 其中 $E_1 = [a,b] \cap E, E_2 = [a,b] \cap E^c$。故积分上和 $S_D = m(E_1)\sup_{x\in E_1}\{f(x)\} + m(E_2)\sup_{x\in E_2}\{f(x)\}$，因为 f 在 E_1 上是有界函数，所以存在 $K \in N$, 使得 $\underset{x\in E_1}{sup}\{f(x)\} <= K$，所以 $S_D <= 0 \times K + (b-a) \times 0 = 0$。

由于 $f \geq 0$, 故有

$$0 \leq \underline{\int}_{[a,b]} fdx \leq \overline{\int_{[a,b]}} fdx \leq S_D = 0,$$

于是 $\underline{\int}_{[a,b]} fdx = \overline{\int_{[a,b]}} fdx = 0$, 故根据定义, f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_{[a,b]} fdx = 0$ 。

2. 对任意的 $n \in N$, 根据 1 的证明可知, f 在 $[-n,n]$ 上可积, 且 $\int_{[-n,n]} fdx = 0$, , 故 $\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} fdx = 0$ 。又由于 $f \geq 0$, 故 f 在 R 上 Lebesgue 可积, 且 $\int_R fdx = 0$ 。

10. [**证明题**] 设 E 为 R 中的一个 Lebesgue 零测集, 在 R 上定义

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} xe^{|x|}, & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{array}\right.$$

1. 试用积分证明 f 在任意闭区间 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积，并求 $\int_{[a,b]} f dx$ 的值；2. 问 f 在 R 上是否 Lebesgue 可积，证明你的结论。(必须用定义，即上积分与下积分等概念，否则不给分)

证：参看题8。

11. [**证明题**] 设 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的一个实可测函数，Q 为 $[0,1]$ 中的无理数集。1. 如果对于任意的 $x\in Q$，均有 $f(x)=0$，试用上积分、下积分与积分定义等概念证明 f 在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积，并求积分值。2. 如果对任意的 $x\in Q$，均有 $f(x)>0$，试证明 $\int_{[0,1]} f dx>0$。

证：1. 考虑 f^+ 的第 n 个截断函数

$$f^+_{(n)}(x)=\left\{\begin{array}{ll} f^+(x), & 0\le f^+(x)\le n\\ 0, & f^+(x)>n.\end{array}\right.$$

对分割 $D:[0,1]=Q\cup Q^C$, 其中 P 为 $[0,1]$ 的有理数集, 有 $m(P)=0, m(Q)=1$。故积分上和 $S_D=m(P)\sup_{x\in P}\{f^+_{(n)}(x)\}+m(Q)\sup_{x\in Q}\{f^+_{(n)}(x)\}$，因为 $f^+_{(n)}$ 是有界函数，所以存在 $K\in N$, 使得 $\underset{x\in P}{sup}\{f^+_{(n)}(x)\}<=K$，所以 $S_D<=0\times K+1\times 0=0$。

由于 $f^+_{(n)}\ge 0$, 故有

$$0\le \underline{\int}_{[0,1]} f^+_{(n)}dx\le \overline{\int}_{[0,1]} f^+_{(n)}dx\le S_D=0,$$

于是 $\underline{\int}_{[0,1]} f^+_{(n)}dx=\overline{\int_{[0,1]}} f^+_{(n)}dx=0$, 故根据定义, $f^+_{(n)}$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且 $\int_{[0,1]} f^+_{(n)}dx=0$ 。

因 $\left\{\int_{[0,1]} f^+_{(n)}dx\right\}$ 是一增数列, 故 $\int_{[0,1]} f^+dx=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f^+_{(n)}dx=0$。

同理可得 $\int_{[0,1]} f^-dx=0$，所以 $\int_{[0,1]} fdx=\int_{[0,1]} f^+dx-\int_{[0,1]} f^-dx=0-0=0$。

2. 参看 7 题第二小问。

12. [**证明题**] 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 Riemann 可积，记 E 为 f 的所有不连续点组成的集合。1. 证明 E 为 R 上的 Lebesgue 可测集，并求 E 的测度；2. 定义 $g(x)=\left\{\begin{array}{ll} f(x), & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{array}\right.$，试用上积分、下积分与积分定义等概念证明 g 在闭区间 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积；3. 证明 g 在 R 上也 Lebesgue 可积，并求 $\int_R gdx$ 的值。

证：1. 由 Riemann 可积的必要条件可知，E 为 R 上的一个零测集，而零测集总是 Lebesgue 可测集且测度 $m(E)=0$。

2 和 3. 由 Riemann 可积的必要条件可知，f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。剩下参考第 8 题。

13. [**证明题**] 设 E 为 R 上的 Lebesgue 有界可测集，g 为 R 上的有界函数，$A\subset R$，且 $m(A)=0$，定义 $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} g(x), & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{array}\right.$ 1. 试用定义证明 f 在 E 上 Lebesgue 可积，并求 $\int_E fdx$ 的值；2. 问 f 在 R 上是否 Lebesgue 可积，证明你的结论。(必须用定义，即上积分与下积分等概念，否则不给分)

证：考虑 f^+ 的可积性，令分割 $D:E=E_1\cup E_2$，其中 $E_1=A\cap E$，$E_2=A^C\cap E$，因为 E 为 R 上的 Lebesgue 有界可测集，所以存在 $M\in N$，使得 $m(E)\le M$，则 $m(E_1)=0, m(E_2)\le M$。故积分上和 $S_D=m(E_1)\sup_{x\in E_1}\{f^+(x)\}+m(E_2)\sup_{x\in E_2}\{f^+(x)\}$，因为 f^+ 是有界函数，所以存在 $K\in N$, 使得 $\underset{x\in E_1}{sup}\{f^+(x)\}<=K$，所以 $S_D<=0\times K+M\times 0=0$。

由于 $f^+\ge 0$, 故有

$$0\le \underline{\int}_E f^+dx\le \overline{\int}_E f^+dx\le S_D=0,$$

于是 $\underline{\int}_E f^+dx=\overline{\int}_E f^+dx=0$, 故根据定义, f^+ 在 E 上可积, 且 $\int_E f^+dx=0$ 。
同理可得 $\int_E f^-dx=0$，所以 $\int_E fdx=\int_E f^+dx-\int_E f^-dx=0-0=0$。

2. 由 1 的证明可知，f 在有界可测集 $[-n,n]$ 上 Lebesgue 可积，且积分为 0。剩下参看第 8 题第 2 小问。

14. [**证明题**] 设 f 为可测集 E 上的函数, $A\subset R$, 记 Ω 为 A 的所有上确界不可达的有界子集组成的集合。1. 若数列 $\{\sigma_n\}$ 递增, 且 $\sigma_n\to\sigma$, 证明 $E(f\geq\sigma)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\sigma_n\right)$; 2. 若对 $\forall a\in A, E(f>a)$ 可测, 且 $R=\{\sup B\mid B\in\Omega\}$, 试证 f 在 E 上可测。

   证：1. 对于任意的 $x\in E(f\geq\sigma)$, 我们有 $f(x)\geq\sigma_0$，由于 $\{\sigma_n\}$ 是递增的并且 $\sigma_n\to\sigma$, 所以对于所有的 n, 我们有 $\sigma_n<\sigma\leq f(x)$, 这就意味着 $x\in E\left(f>\sigma_n\right)$ 。因此，$E(f\geq\sigma)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\sigma_n\right)$ 。

   另一方面, 对于任意的 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\sigma_n\right)$, 我们有 $f(x)>\sigma_n$ 对于所有的 n 。由于 $\{\sigma_n\}$ 是递增的并且 $\sigma_n\to\sigma$, 我们可以得到 $f(x)\geq\sigma$, 这就意味着 $x\in E(f\geq\sigma)$ 。因此, $\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\sigma_n\right)\subseteq E(f\geq\sigma)$ 。综上, 我们得到 $E(f\geq\sigma)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\sigma_n\right)$ 。

   2. 对于任意的 $a\in A$, 我们知道 $E(f>a)$ 是可测的。由于 $R=\{\sup B\mid B\in\Omega\}$, 我们可以找到一个序列 $\{a_n\}$ 属于 A 使得 $a_n\to\sup B$ 。由于 $E\left(f>a_n\right)$ 是可测的并且 $a_n\to\sup B$, 我们可以得到 $E(f>\sup B)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>a_n\right)$ 是可测的。因此, 对于任意的 $r\in R, E(f>r)$ 是可测的, 这就意味着 f 在 E 上是可测的。

2.2 知识点

1. **判断可积的思路**：首先用 $f=f^+-f^-$ 转化为两个非负函数的差，如果 f^+ 和 f^- 均在 E 上有积分值，且不同时为 $+\infty$，则 f 在 E 上有积分值。若 f^+ 和 f^- 均在 E 上可积，则称 f 在 E 上可积。然后:

   (1). 对于有界集有界函数 f，因为有界集有界函数可测与可积等价，可以通过判别 f 是否可测来判断是否可积。(2). 对于有界集无界函数 f，通过截断函数转为有界函数处理，然后讨论截断函数的极限。(3). 对于无界集上的函数 f，考虑在 $[-n,n]$ 上是否可积（转化为有界集），然后套用 (1), (2) 判断是否可积，最后考察 $n\to\infty$ 的情况。

3 距离空间

3.1 题目

1. [**选择题**] 设 A 为一个至少含有 2 个实数的集合, 且存在 $\delta>0$, 使对 $\forall x,y\in A, x\neq y$, 有 $|x-y|\geq\delta$ 。令 $X=\{\{x_n\}\mid x_n\in A\}$, 在 X 中定义距离 $\rho\left(\{x_n\},\{y_n\}\right)=\sup_n\left|x_n-y_n\right|$, 则: [B]

   （A）(X,ρ) 是可分的完备距离空间　（B）(X,ρ) 是不可分的完备距离空间
   （C）(X,ρ) 是不完备的可分距离空间　（D）(X,ρ) 是不完备的不可分距离空间

   解析：由定义可知，X 是一个不可数的离散距离空间，因此一定完备不可分。

2. [**选择题**] 设 X 与 Y 是两个距离空间, $D\subset X$，$f:D\to Y$ 为 $1-1$ 的连续映射, 则下列结论正确的是: [A]

   （A）如果 D 为 X 可分的子空间，则 $f(D)$ 为 Y 可分的子空间　（B）如果 D 为 X 中的全有界集, 则 $f(D)$ 为 Y 中的全有界集
   （C）如果 D 为 X 中的致密集, 则 $f(D)$ 为 Y 中的致密集　（D）如果 D 为 X 的完备子空间，则 $f(D)$ 为 Y 的完备子空间

3. [**选择题**] 设 X 与 Y 是两个赋范空间, $D\subset X$，$f:D\to Y$ 为 $1-1$ 的连续映射, 则下列结论正确的是: [A]

(A) 如果 D 为 X 可分的子空间，则 $f(D)$ 为 Y 可分的子空间

(B) 如果 D 为 X 中的有界集, 则 $f(D)$ 为 Y 中的有界集

(C) 如果 D 为 X 中的致密集, 则 $f(D)$ 为 Y 中的致密集

(D) 如果 D 为 X 的完备子空间，则 $f(D)$ 为 Y 的完备子空间

4. [**选择题**] 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 为一个实数集，令 $X = \{\{x_n\} | x_n \in A\}$，在 X 中定义距离 $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \max_n |x_n - y_n|$，则: [A]

   (A) (X, ρ) 是可分的完备距离空间

   (B) (X, ρ) 是不可分的完备距离空间

   (C) (X, ρ) 是不完备的可分距离空间

   (D) (X, ρ) 是不完备的不可分距离空间

   解析: X 是一个有限距离空间，有限距离空间一定是完备可分的。

5. [**选择题**] 对 $x = x(t), y = y(t) \in C_{[a,b]}$，定义

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 + \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, & x \ne y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

   则 $(C_{[a,b]}, \rho)$ 是一个距离空间，且为 [B]

   (A) 可分的完备的

   (B) 完备的不可分的

   (C) 可分的不完备的

   (D) 不完备的不可分的

   解析: 由定义 $(C_{[a,b]}, \rho)$ 是一个不可数的离散距离空间，一定是完备不可分的。

6. [**选择题**] 设 X 为有理数集, 对 $x, y \in X$, 定义。

$$\rho(x,y) = \begin{cases} a, & x \ne y, \\ 0, & x = y, \end{cases}.$$

   其中 $a > 0$ 为常数, 则: [A]

   (A) (X, ρ) 是可分的完备距离空间

   (B) (X, ρ) 是不可分的完备距离空间

   (C) (X, ρ) 是不完备的可分距离空间

   (D) (X, ρ) 是不完备的不可分距离空间

7. [**判断题**] 记有界数列全体为 X，对 $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X$，定义 $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$，则其中的每个非空有界集都是全有界集。

   答: 错。$A = \{\{x_n\} \mid x_n \in \{0, 1\}\}$，显然 A 非空，A 中任意两个不同点之间的距离均为 1，当然在 X 中有界，由于 A 不可分，故其不是全有界集。

8. [**判断题**] 设 $A \subset R$ 为有界集，且 A 无聚点，令 $X = \{\{x_n\} | x_n \in A\}$, 并在 X 中定义距离 $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n|$，则 (X, ρ) 是完备的距离空间。

   答: 对。因为 A 无聚点，故存在 $\epsilon > 0$，使对任意的 $x, y \in A$，$|x - y| \ge \epsilon$，于是可知，对任意的 $\{x_n\}, \{y_n\} \in X, \{x_n\} \ne \{y_n\}$，有 $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n| \ge \epsilon$，即 (X, ρ) 是离散的距离空间，故其完备。

9. [**判断题**] 设 X 是一个距离空间，$M \subset X$，则 M 是 X 完备子空间的充分必要条件是 M 为 X 中的闭集。

   答: 错。M 为 X 中的闭集并不能推出 M 是 X 完备子空间。令 X 为 Q，X 上的距离是标准的欧几里得距离，则 $M = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\{|x - \sqrt{2}| \le \frac{1}{n} \mid x \in Q\right\}$ 是 Q 中的一个闭集。但存在 M 的一个 Cauchy 列收敛于 $\sqrt{2} \notin M$，因此 M 不是 Q 中的完备子空间。

10. [**判断题**] 设 X, Y 是一个距离空间，$D \subset X$，f 为 D 到 Y 的一个连续算子，若 D 为 X 中的闭集，则 $f(D)$ 为 Y 中的闭集。

    答: 错。设 $X = Y = R$，$D = [0, +\infty)$。定义 D 到 Y 的连续算子 f 为 $f(x) = \frac{1}{x+1}$。D 是闭集，但是 $f(D) = (0, 1]$，不是 R 中的闭集。

11. [**判断题**] 设 X,Y 是一个距离空间，$D\subset X$，f 为 D 到 X 的一个连续算子，若 D 为 X 中的致密集，则 $f(D)$ 为 Y 中的致密集。

    答：错。考虑 $X=Y=R$，$D=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 为 X 上的有界集，tan 为 D 到 Y 的连续算子。$tan(D)=(-\infty,+\infty)$ 是 Y 上的无界集。因此连续算子不保持有界性，又致密集一定是有界集，因此连续算子也不保持致密性。

12. [**判断题**] 设 X 是一个距离空间，M 为 X 中的致密集，若把 M 看作是 X 中的子距离空间，则其是一个紧空间。

    答：正确。若把 M 看作是一个距离空间，则 M 一定是闭的，且 M 为 X 中的致密集，因此 M 一定是紧空间。

13. [**判断题**] 假设 F，是 X 中的一个，$A:F\to X$ 是一个压缩映像，则 A 在 F 上存在唯一的不动点。

    答：错误。

14. [**证明题**] 令 X 表示极限为零的实数列全体, 在 X 中定义距离 $\rho(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|$, 其中, $x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in X$ 。(1) 证明 X 完备；(2) 记 M 为仅有限项不为零的实数列全体, 证明 M 在 X 中稠；(3) 证明 X 可分；(4) 令 $l=\{\{x_n\}\subset R\,|\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<+\infty\}$, 则 $l\subset X$，证明 l 不是 X 的完备子空间，并求 l 的完备化空间。

    证: (1) 设 $\{x_k\}$ 为 X 中的基本列, 其中 $x_k=\left\{\zeta_n^{(k)}\right\}$, 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists K$, 当 $k,m\geq K$ 时, 有 $\rho(x_k,x_m)=\sup_n\left|\zeta_n^{(k)}-\zeta_n^{(m)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, 故对每一个 $n\in N$, 均有

    $$\left|\zeta_n^{(k)}-\zeta_n^{(m)}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

    于是, 对每个固定的 n, $\left\{\zeta_n^{(k)}\right\}$ 为 R 中的基本列, 而 R 完备，因而收敛。设 $\zeta_n^{(k)}\to\zeta_n(k\to\infty)$, 令 $x=\{\zeta_n\}$，在不等式 $(*)$ 中，令 $m\to\infty$，即知，对 $\forall n\in N$，有

    $$\left|\zeta_n^{(k)}-\zeta_n\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}(k\geq K)$$

    即当 $k\geq K$ 时, 有 $\rho(x_k,x)\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, 故 $x_k\to x(k\to\infty)$ 。

    下面证 $x\in X$ 。由于 $\zeta_n^{(k)}\to 0(n\to\infty)$, 故 $\exists N$, 当 $n\geq N$ 时, 有 $\left|\zeta_n^{(k)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, 于是有

    $$|\zeta_n|\leq\left|\zeta_n-\zeta_n^{(k)}\right|+\left|\zeta_n^{(k)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

    即 $\zeta_n\to 0(n\to\infty)$, 故 $x\in X$，X 完备。

    (2) 对 $\forall x=\{x_n\}\in X$, 令 $z_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots\},n=1,2,\cdots$, 则显然, $\{z_n\}\subset M$, 且由于 $x_n\to 0$, 故 $\rho(z_n,x)=\sup_{k\geq n+1}|x_k|\to 0(n\to\infty)$, 即 $z_n\to x$, 故 M 在 X 中稠。

    (3) 令 $F=\{\{r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots\}\mid r_k\in Q,n\in N\}$，其中，$Q$ 为有理数集，则 F 可数，且对 $\forall x=\{x_1,\cdots,x_n,0,\cdots\}\in M$, 根据有理数在实数中的稠密性, 对于任意的 ϵ, 存在 $r_i\in Q,i=1,2,\cdots,n$, 使得 $|r_i-x_i|<\epsilon$。令 $w=\{r_1,\cdots,r_n,0,\cdots\}$, 则 $w\in F$，且 $\rho(w,x)=\sup_i|r_i-x_i|<\epsilon$ 。故 F 在 M 中稠，又 M 在 X 中稠，于是 F 在 X 中稠，从而 X 可分。

    (也可以这样写: 令 $F=\{\{r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots\}\mid r_k\in Q,n\in N\}$, 其中, Q 为有理数集, 则 F 可数, 且对 $\forall x=\{x_1,\cdots,x_n,0,\cdots\}\in M$，根据有理数在实数中的稠密性，存在 $r_{ik}\in Q,i=1,2,\cdots,n,k=1,2,\cdots$，使 $r_{ik}\to x_i(k\to\infty),i=1,2,\cdots,n$ 。令 $w_k=\{r_{1k},\cdots,r_{nk},0,\cdots\}$, 则 $\{w_k\}\subset F$，且 $\rho(w_k,x)=\sup_i|r_{ik}-x_i|\to 0(k\to\infty)$ 。故 F 在 M 中稠，又 M 在 X 中稠，于是 F 在 X 中稠，从而 X 可分。)

    (4) 只要证 l 不为闭集即可。令 $x_n=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots\right\},n=1,2,\cdots$, 则 $\{x_n\}\subset l$, 令 $x=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots\right\}$, 显然 $x\in X$, 且 $\rho(x_n,x)=\sup_{k\geq n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$, 故 $x_n\to x(n\to\infty)$，x 为 l 的一个极限点，但 $x\notin l$。

    l 的完备化空间为 X，因为 M 在 X 中稠，而 $M\subset l$，因此 l 在 X 中稠。

15. [**证明题**] 令 X 表示极限为零的实数列全体，在 X 中定义距离 $\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$，其中，$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X$ 。(1) 证明 X 完备；(2) 证明 X 是可分的；(3) 令 $l = \{\{x_n\} \subset R \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$，证明 l 不是 X 中的闭集。

证：参考题 13。

16. [**证明题**] 令 X 表示极限为零的实数列全体，在 X 中定义距离 $\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$，其中，$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X$ 。(1) 证明 X 完备；(2) 证明 X 是可分的；(3) 令 $l = \left\{\{x_n\} \subset R \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$，证明 l 不是 X 中的闭集。

证：参考题 13。

17. [**证明题**] 令 Y 表示所有收敛的实数列全体，对 $x = \{\xi_n\}, y = \{\zeta_n\} \in Y$，如果 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n$，规定 $x = y$ 。现在 Y 中定义 $\rho(x,y) = |\lim_{n\to\infty} \xi_n - \lim_{n\to\infty} \zeta_n|$ 。1. 验证 ρ 为 Y 上的一个距离；(5 分) 2. 证明 Y 完备且可分；(8 分) 3. 令 X 表示极限为有理数的实数列全体，问 X 是不是 Y 中的闭集，证明你的结论。(5 分)

解：1. 非负性显然。规定性：如果 $x = y$，则 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n$，故 $\rho(x,y) = 0$；反之，如果 $\rho(x,y) = 0$，则 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n$，故 $x = y$ 。三角不等式：对任意的 $x = \{\xi_n\}, y = \{\zeta_n\}, z = \{\varsigma_n\} \in Y$，显然对任意的 n，有 $|\xi_n - \zeta_n| \le |\xi_n - \varsigma_n| + |\zeta_n - \varsigma_n|$，取极限即得，$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$ 。

2. 法一：定义 $T : Y \to R, \{\xi_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} \xi_n$，则对任意的 $\xi \in R$，令 $\xi_n = \xi$，则有，$T\{\xi_n\} = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$，故 T 是满的。又对任意的 $x = \{\xi_n\}, y = \{\zeta_n\} \in Y$，显然有

$$|Tx - Ty| = \left|\lim_{n\to\infty} \xi_n - \lim_{n\to\infty} \zeta_n\right| = \rho(x,y),$$

故 T 是等距的，于是 Y 与 R 等距同构，由于 R 完备且可分，故 Y 完备且可分。

法二：设 $\{x_n\}$ 为 Y 中的一个基本列，其中 $x_n = \left\{\xi_k^{(n)}\right\}$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n,m \ge N$ 时，有 $\rho(x_n, x_m) = \left|\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(n)} - \lim_{k\to\infty} \xi_k^{(m)}\right| < \varepsilon$ 。设 $\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi^{(n)}$，令 $x = \{\xi^{(n)}\}$，则当 $n,m \ge N$ 时，有 $\left|\xi^{(n)} - \xi^{(m)}\right| < \varepsilon$，故 $\{\xi^{(n)}\}$ 为 R 中的基本列，而 R 完备，故 $\{\xi^{(n)}\}$ 收敛，即 $x \in Y$ 。设 $\xi^{(n)} \to \xi$，则 $\rho(x_n, x) = \left|\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(n)} - \lim_{k\to\infty} \xi^{(k)}\right| = \left|\xi^{(n)} - \xi\right| \to 0$，故 Y 完备；

令 $M = \{\{r, r, \cdots, r, \cdots\} \mid r \in Q, n \in N\}$，其中，$Q$ 为有理数集，则显然 M 为可数集。又对任意的 $x = \{\xi_n\} \in Y$，记 $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$。由于有理数在实数中稠密，故对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $r \in Q$，使得 $|r - \xi| < \epsilon$，令 $w = \{r, r, \cdots, r, \cdots\}$，则 $w \in M$，且 $\rho(w,x) = |r - \xi| < \epsilon$ 。故 M 在 Y 中稠，从而 Y 可分。

(这种写法也可以：令 $M = \{\{r, r, \cdots, r, \cdots\} \mid r \in Q, n \in N\}$，其中，$Q$ 为有理数集，则显然 M 为可数集。又对任意的 $x = \{\xi_n\} \in Y$，记 $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$。由于有理数在实数中稠密，故存在 $\{r_k\}, r_k \in Q$，使 $r_k \to \xi (k \to \infty)$ 。令 $w^{(k)} = \{r_k, r_k, \cdots, r_k, \cdots\}$，则 $\{w^{(k)}\} \subset M$，且 $\rho\left(w^{(k)}, x\right) = \left|\lim_{n\to\infty} w_n^{(k)} - \lim_{n\to\infty} \xi_n\right| = |r_k - \xi| \to 0 \,(k \to \infty)$ 。故 M 在 Y 中稠，从而 Y 可分。)

3. 法一：根据 2 中法一的结论可知，Y 与 R 等距同构，由于有理数集不是 R 中的闭集，故 X 不是 Y 中的闭集。

法二：令 $x_n = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} - \frac{1}{n}, \cdots, \sqrt{2} - \frac{1}{n}, \cdots\right\}, n = 1, 2, \cdots$，则 $\{x_n\} \subset X$，令 $x = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{2}, \cdots\right\}$，显然 $x \in Y$，且 $\rho(x_n, x) = \left|\sqrt{2} - \frac{1}{n} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{n} \to 0 (n \to \infty)$，故 $x_n \to x (n \to \infty)$，x 为 X 的一个极限点，但 $x \notin X$，因此 X 不是闭集。

18. [**证明题**] 令 $X = \left\{\{x_n\} \subset R \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$，对 $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X$，定义距离

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

1. 证明 X 完备；2. 证明 X 可分；3. 令 M 为所有仅有限项不为零的实数列全体，试问 M 是不是 X 中的闭集。证明你的结论。

证明：1. 设 $\{x_n\}$ 为 X 中的一个 Cauchy 列，其中 $x_n = \left\{\xi_k^{(n)}\right\}$，则对任意的 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n, m \geq N$ 时，有

$$\rho(x_n, x_m) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2} < \epsilon \qquad (*)$$

则对任意固定 k，都有 $\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right| < \epsilon$。也即 $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}$ 为 R 中的基本列，而 R 完备，因而 $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}$ 收敛, 存在 ξ_k，使得 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k(n \to \infty)$。令 $x = \{\xi_k\} \in X$，在不等式 $(*)$ 中，令 $m \to \infty$，有 $\rho(x_n, x) < \epsilon(n \geq N)$，故 $x_n \to x(n \to \infty)$，所以 X 完备。

2. 取 $E_0 = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, \cdots, 0, \cdots) \mid r_i \in Q, n \in N\} \subset X$，显然 E_0 等价于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$，可知 E_0 可数，下面证 E_0 在 X 中稠密。

$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in X$，有 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$，因此 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N$，当 $n > N$ 时，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

又因 Q 在 R 中稠密，对每个 $x_i (1 \leq i \leq N)$, 存在 $r_i \in Q$，使得

$$|x_i - r_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{2N}, \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

于是得

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - r_i|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

令 $x_0 = (r_1, r_2, \cdots, r_N, 0, \cdots, 0, \cdots) \in E_0$，则

$$\rho(x_0, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i - r_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$$

因此 E_0 为 X 的一个可数稠子集，X 可分。

3. 取 $x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right\} \in M$，则有 $\{x_n\} \to x = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \notin M$，故 M 不是 X 中的闭集。

19. [**证明题**] 令 $X = \left\{\{x_n\} \subset R \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$，对 $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in X$，定义距离

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

1. 证明 X 完备；2. 证明 X 可分；3. 令 M 为只有有限项不为零的实数列全体，证明 M 不是 X 中的完备子空间，并求 M 的完备化空间。

证：1. 同 17 题。

2. 同 17 题。

3. 见 17 题，因为 M 不是 X 中的闭集，因此 M 也不是 X 的完备子空间。

M 的完备化空间为 X，因为 M 是 X 中的稠子集。

下面证明 M 在 X 中稠，给定 $x=\{x_n\}\in X$。因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty$，所以对于任意 $\epsilon>0$，存在 N，使得当 $n\geq N$ 时，有

$$\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2}<\epsilon,$$

则令 $m=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots,0,\cdots\}\in M$，有

$$\rho(x,m)=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2}<\epsilon.$$

因此，M 在 X 中稠。

20. [**证明题**] 令 X 表示极限为零的实数列全体, 对 $x=\{x_n\}\in X$，定义范数

$$\|x\|=\sup_n|x_n|$$

1. 记 M 为只有有限项不为零的实数列全体，证明 M 在 X 中稠密；2. 证明 X 可分；3. 证明 X 完备；4. 令 $l=\left\{\{x_n\}\subset R\mid\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty\right\}$, 则 $l\subset X$，试问 l 是否为 X 中的完备子空间，证明你的结论。

证：对于线性赋范空间 X，按照距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|=\sup_n|x_n-y_n|$ 成为距离空间。剩下的参考 13 题。

21. [**证明题**] 令 X 表示仅有限项不为零的实数列全体，对 $x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in X$，定义距离 $\rho(x,y)=\max_n|x_n-y_n|$ 。1. 证明 X 不完备；2. 证明 X 可分；3. 给出 X 的完备化空间 Y，证明 Y 完备且 X 在 Y 中稠密。

证：1. 令 $x_n=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right\}$，则对于任意 $\epsilon>0$，存在 $N,\frac{1}{N}<\epsilon$，当 $n,m>N$，有 $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$。因此 x_n 是一个 Cauchy 序列，但是 x_n 收敛到 $x=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}\notin X$，因此 X 不完备。

2. 用仅有限项不为零的有理数列全体作为可数稠子集。

3. X 的完备化空间 Y 为极限为零的实数列全体。Y 完备：见 13 题 1 小问。X 在 Y 中稠密：见 13 题 2 小问。

3.2 知识点

1. 离散距离空间是完备的：给定一个离散距离空间中的 Cauchy 序列 $\{A_n\}$，对于任意的 $\epsilon>0$，存在一个正整数 k，使得当 $n,m>k$ 时，我们有 $|A_n-A_m|<\epsilon$。由于是离散距离空间，这意味着只有当 $A_n=A_m$ 时，$|A_n-A_m|$ 才能小于任意小的 ϵ。因此，对于所有的 $n,m>k$，我们有 $A_n=A_m$。从某一点开始，序列 $\{A_n\}$ 的所有项都相等。我们可以说序列 $\{A_n\}$ 收敛于 A_k，因为对于所有的 $n>k,A_n=A_k$。

2. 不可数的离散距离空间不可分（例 3.2.4）。

3. 距离空间上的连续映射可以保持可分性

连续映射：在数学中，连续映射是一种在拓扑空间中保持连续性的函数。在度量空间或者距离空间中, 连续映射可以被定义为对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $d(x,y)<\delta$ 时, 有 $d(f(x),f(y))<\epsilon$。

证明：假设我们有一个可分的距离空间 (X,d_X)，和一个距离空间 (Y,d_Y)，以及一个从 X 到 Y 的连续映射 f。我们需要证明的是，$f(X)$ 是 Y 的一个可分子集。

由于 X 是可分的，所以存在一个可数的子集 D，使得 D 在 X 中是稠密的。我们需要证明 $f(D)$ 在 Y 中是稠密的。为了证明这一点，我们需要证明对于任意的 $y\in Y$ 和任意的 $\epsilon>0$，存在一个 $d\in D$，使得 $d_Y(f(d),y)<\epsilon$。

由于 f 是连续的，所以对于任意的 $y \in Y$ 和任意的 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得当 $d_X(x, f^{-1}(y)) < \delta$ 时，有 $d_Y(f(x), y) < \epsilon$。由于 D 在 X 中是稠密的，所以存在一个 $d \in D$，使得 $d_X(d, f^{-1}(y)) < \delta$。因此，$d_Y(f(d), y) < \epsilon$。

所以，我们证明了 $f(D)$ 在 Y 中是稠密的，因此 $f(X)$ 是 Y 的一个可分子集。这就证明了距离空间上的连续映射可以保持可分性。

4. 距离空间上的连续映射不保持完备性
   设 D 为 X 的完备子空间，我们证明 $f(D)$ 不一定是 Y 的完备子空间。

   证明：

   为了证明这个结论，我们可以构造一个反例。假设我们有两个距离空间 X 和 Y，其中 X 是实数集合，Y 是 $(0,1)$ 区间，距离函数分别是标准的欧几里得距离。定义映射 $f : X- > Y, f(x) = 1/(1 + e^{-x})$。这是一个连续的、1-1 的映射。

   我们取 X 的子空间 D 为整数集合 Z，它是完备的，因为任何 Z 中的 Cauchy 序列都收敛到 Z 中的一个元素。然而，$f(D)$ 是 $(0,1)$ 区间中的一个离散集合，存在 $f(D)$ 中的 Cauchy 序列，其极限点不在 $f(D)$ 中。考虑序列 $\{x_n\}$，其中 $x_n = -n, \{f(x_n)\}$ 为一个 $f(D)$ 中的 Cauchy 序列，但是并不是收敛列，因为该序列的极限为 0，而 0 不在 $f(D)$ 中，因此 $f(D)$ 不是完备的。

5. 距离空间上的连续映射不保持有界性
   证明：考虑 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 到 R 的一个连续映射 $tan(x)$，则显然不保持有界性。

6. $(0,1)$ 是一个全有界集
   证明：对于任意正实数 ϵ，存在正整数 N，使得 $\frac{1}{N} < \epsilon$。令 $x_i = \frac{i}{N}, i = 1, 2, \ldots, N$，则 $\{x_i\}$ 构成 $(0,1)$ 的一个有限 $\epsilon-$ 子网

7. 全有界集 $\Rightarrow$ 可分

8. 致密集 $\Rightarrow$ 全有界集 $\Rightarrow$ 有界集

9. 在 R^n 中，致密集 $\Leftrightarrow$ 全有界集 $\Leftrightarrow$ 有界集

10. Q 不是 R 中的一个闭集，当然 Q 也不是 R 中的一个完备子空间

11. L^p 空间，p 次可积的函数构成的空间，p 越大元素越少， $1 \le q \le p, L^p \subset L^q$，$L^\infty \subset L^p$（p50）。

12. l^p 空间，p 次可和的序列构成的空间，p 越大元素越多， $1 \le q \le p, l^q \subset l^p$，$l^p \subset l^\infty$（p61）。

13. 在拓扑空间中，全集和空集同时是开集也是闭集。因此距离空间总是闭集，如果距离空间是致密集，则也是紧集。

4 有界线性算子

4.1 题目

1. [**选择题**] 下列哪些条件是结论“线性赋范空间 X 为有限维”的充分条件: (1) X 中的单位球而 $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 是全有界集：(2) X 中的单位球面 $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 是致密集：（3）X 中的每个有界集都是全有界集。 [A]

   （A）3 个都是　　（B）3 个都不是

   （C）(2) 与 (3) 是, (1) 不是　　（D）(3) 是, (1) 与 (2) 不是

2. [**判断题**] 设 X 与 Y 为两个赋范空间，T 为 X 到 Y 的一个线性算子，若对 $\forall x \in X$，均有 $\|Tx\| = \|x\|$，则 X 与 TX 同构。

   答：正确。T 是保范的，且 T 是 X 到 TX 的 1-1 映射，因此 T 是 X 到 TX 的一个线性等距映射，X 与 TX 保范线性同构。

3. [**判断题**] 设 X 为一个线性赋范空间，如果 X 中的单位球面 $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 是一个全有界集，则 X 为一个有限维空间。

   答：正确。

4. [**判断题**] 设 X 是一个 Banach 空间，$D \subset X$，T 为 D 到 X 的一个线性算子，若对任意的 $\{x_n\} \subset D$，$x_n \to x$，$Tx_n \to y$，有 $x \in D$，且 $y = Tx$，如果 T 无界，则 D 一定不是 X 中的闭集。

   答：正确。根据习题 4.13 可知，T 为闭算子，如果 D 为 X 中的闭集，由于 X 为 $Banach$ 空间，故 D 也为 $Banach$ 空间，于是根据闭图像定理，T 有界，矛盾。

5. [**判断题**] 设 X 是一个 Banach 空间, $D \subset X$, T 为 D 到 X 的一个无界线性算子, 若对任意的 $\{x_n\} \subset D$，$x_n \to x$，$Tx_n \to y$，均有 $x \in D$，且 $y = Tx$，则 D 一定不是 X 中的闭集。

   答：正确。同 4 题。

6. [**判断题**] 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实数域 R 上的线性赋范空间 X 中的一个线性无关组，记 $M = \left\{(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) \in R^n \mid \sum_{k=1}^n |\zeta_k|^2 = 1\right\}$，定义函数 $f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) = \|\sum_{k=1}^n \zeta_k x_k\|$，则 f 在 M 上能取到最小值 a，且 $a > 0$。

   答：正确。因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一个线性无关组，对于任意不全为 0 的实数组 $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$，$\sum_{k=1}^n \zeta_k x_k$ 不为零。又对于范数 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$，因此函数 $f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) = \|\sum_{k=1}^n \zeta_k x_k\|$ 总是大于 0。另一方面，由于 M 是一个紧集 (闭且有界)，而 f 是一个实连续函数，f 在 M 上一定能取到最小值。因此, 存在一个最小值 a, 且 $a > 0$。

7. [**判断题**] 设 X 为闭区间 $[a, b]$ 上所有连续可微函数构成的集合，在 X 中定义范数 $\|x\| = \max_{a \le t \le b} \{|x(t)|, |x'(t)|\}$, 则 $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 一定不是紧集。

   答：正确。（下面的证明不确定）考虑函数列 $sin(nt)$，我们能找到 n 使得 $\|sin(nt)\| = 1$，但是 $\|sin(nt) - sin(mt)\| = \max_{a \le t \le n} \{|sin(nt) - sin(mt)|, |ncos(nt) - mcos(mt)|\} = \max_{a \le t \le n} \left\{|2sin(\frac{n-m}{2}t)cos(\frac{n+m}{2}t)|, |ncos(nt) - mcos(mt)|\right\} \ge 2$，即不存在收敛子列。

8. [**判断题**] 给定赋范空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$，有单位算子 $A : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ 连续，则 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强。

   答: 正确。单位算子 A 是连续的线性算子, 因而 A 有界。存在 $M > 0$, 使得 $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \le M\|x\|_1$，因此 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强。

9. [**证明题**] 在复线性赋范空间 l^1 中, 对每个自然数 n, 定义算子

$$A_n \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \xi_{n+1}, \cdots\}, \{\xi_n\} \in l^1$$

   证明: (1) 对每个自然数 n，有 $A_n \in B\left(l^1 \to l^1\right)$: (2) $\lim_{n\to\infty} \|A_n\| = 1$: (3) 如果 $|\lambda| > 1$, 则 λ 为 A_n 的正则值，如果 $|\lambda| < 1$，则 λ 为 A_n 的特征值。

   证:（1）对于 $\forall \xi, \zeta \in l^1$，有

$$\begin{aligned}
A_n(\alpha\xi + \beta\zeta) &= A_n \{\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \alpha\xi_2 + \beta\zeta_2, \cdots, \alpha\xi_n + \beta\zeta_n, \cdots\} \\
&= \{\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \alpha\xi_2 + \beta\zeta_2, \cdots, \alpha\xi_{n-1} + \beta\zeta_{n-1}, \alpha\xi_{n+1} + \beta\zeta_{n+1}, \cdots\} \\
&= \alpha \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \xi_{n+1}, \cdots\} + \beta \{\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1}, \zeta_{n+1}, \cdots\} \\
&= \alpha A_n(\xi) + \beta A_n(\zeta)
\end{aligned}$$

   则 A_n 为线性算子。

   对于 l^1 的任意元素 ξ，有 $\|A_n\xi\| = \sum_{k\ne n} |\xi_k| < \sum_{k=1}^\infty |\xi_n| = \|\xi\| < +\infty, n = 1, 2, \cdots$，因此 $A_n \in B\left(l^1 \to l^1\right), n = 1, 2, \cdots$。

(2) 由（1），对 $\forall \xi \in l^1, n \in N$, 有 $\|A_n\xi\| \le \|\xi\|$，故有，$\|A_n\| = \sup_{\|\xi\|\neq 0} \frac{\|A_n\xi\|}{\|\xi\|} \le 1$ 。又若令 $e_n = \{\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1}, 1, 0, \cdots\}, n = 1, 2, \cdots$，则 $\|e_n\| = 1$，且 $A_n e_{n+1} = e_n$，故有，$\|A_n\| \ge \frac{\|A_n e_{n+1}\|}{\|e_{n+1}\|} = 1$。于是，$\|A_n\| = 1$。故 $\lim_{n\to\infty} \|A_n\| = 1$。

(3) 根据定理 4.6.1 可知，当 $|\lambda| > 1 = \|A_n\|$ 时，λ 为 A_n 的正则值。由于 A_n 不是 $1-1$ 的，故 $\lambda = 0$ 为 A_n 的特征值，而当 $|\lambda| < 1$，且 $\lambda \neq 0$ 时，令 $x_n = \{\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1}, \lambda, \lambda^2, \cdots\}$，则 $x_n \in l^1, x_n \neq \theta$，且 $(A_n - \lambda I)x_n = \theta, n = 1, 2, \cdots$，即方程 $(A_n - \lambda I)x = \theta$ 有非零解，故 λ 为 A_n 的特征值。

10. [**证明题**] 记 $C^1_{[a,b]}$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续可微的实函数全体, 试证明: 1. $C^1_{[a,b]}$ 作为 $C_{[a,b]}$ 的子空间是不完备的；2. 如果在 $C^1_{(n,b)}$ 中定义范数 $\|x\| = \max_{\alpha\le t\le b}\{|x(t)|, |x'(t)|\}$, 则微分算子 $T = \frac{d}{dt}$ 是 $C^1_{[a,b]}$ 到 $C_{[a,b]}$ 的连续算子；3. 如果 $C^1_{[a,b]}$ 按照 2 中的范数, 则 $\|T\| = 1$。

证明:

1. 考虑在 $[a,b]$ 上的函数序列 $\{f_n\}$，其中 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ 。每个 f_n 都在 $[a,b]$ 上连续可微，因此 $f_n \in C^1_{[a,b]}$ 。然而，当 $n \to \infty$ 时，f_n 在 $C_{[a,b]}$ 中收敛到 $f(x) = |x|$，而 f 在 $x = 0$ 处不可微。因此 $C^1_{[a,b]}$ 不是 $C_{[a,b]}$ 中的闭集，而 $C_{[a,b]}$ 完备，因此 $C^1_{[a,b]}$ 作为 $C_{[a,b]}$ 的子空间是不完备的。

2. 对于任意 $f \in C^1_{[a,b]}$, 我们有

$$\|Tf\|_{C_{[a,b]}} = \max_{a\le t\le b} |f'(t)| \le \max_{a\le t\le b} \{|f(t)|, |f'(t)|\} = \|f\|_{C^1_{[a,b]}},$$

所以 $\|Tf\|_{C_{[a,b]}} \le \|f\|_{C^1_{[a,b]}}$, 这说明 T 有界，因而连续。

3. 由第 2 小问的结论, 我们有

$$\|T\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_{C_{[a,b]}}}{\|f\|_{C^1_{[a,b]}}} \le 1,$$

考虑函数 $f_0(t) = e^t$，我们有 $f_0'(t) = e^t$，所以 $\|f_0\| = \max_{a\le t\le b}\{|e^t|, |e^t|\} = \max_{a\le t\le b}\{|e^t|\}$，且 $\|Tf_0\| = \max_{a\le t\le b}\{|e^t|\}$，有 $\|T\| = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} \ge \frac{\|Tf_0\|}{\|f_0\|} = 1$。因此，我们有 $\|T\| = 1$ 。所以，当 $0 \le a < b \le 1$ 时，$\|T\| = 1$ 。

11. [**证明题**] 记 $C^1_{[a,b]}$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续可微的实函数全体, 对任意的 $x \in C^1_{[a,b]}$，定义

$$\|x\| = \max_{\alpha\le t\le b} \{|x(t)|, |x'(t)|\}$$

1. 验证 $\|\cdot\|$ 为 $C^1_{[a,b]}$ 上的一个范数；2. 证明微分算子 $T = \frac{d}{dt}$ 是 $C^1_{[a,b]}$ 到 $C_{[a,b]}$ 的有界线性算子；3. 若 $0 \le a < b \le 1$，求 $\|T\|$。

证：1. 非负性: 对于任意 $x \in C^1_{[a,b]}$, 我们有 $\|x\| = \max_{a\le t\le b}\{|x(t)|, |x'(t)|\} \ge 0$。规定性：$\|x\| = 0 \Rightarrow \max_{a\le t\le b}\{|x(t)|, |x'(t)|\} = 0 \Rightarrow x(t) = 0, x'(t) = 0, a \le t \le b$，因此 x 为零函数。当 x 为零函数时，显然有 $\|x\| = 0$，则规定性成立。正齐性: 对于任意 $x \in C^1_{[a,b]}$ 和任意实数 λ, 我们有

$$\|\lambda x\| = \max_{a\le t\le b} \{|\lambda x(t)|, |\lambda x'(t)|\} = |\lambda| \max_{a\le t\le b} \{|x(t)|, |x'(t)|\} = |\lambda|\|x\|。$$

次可加性: 对于任意 $x, y \in C^1_{[a,b]}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \max_{a\le t\le b} \{|x(t)+y(t)|, |x'(t)+y'(t)|\} \le \max_{a\le t\le b} \{|x(t)|+|y(t)|, |x'(t)|+|y'(t)|\} \\ &\le \max_{a\le t\le b} \{|x(t)|, |x'(t)|\} + \max_{a\le t\le b} \{|y(t)|, |y'(t)|\} = \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

2. 线性: 对于任意 $x, y \in C^1_{[a,b]}$ 和任意实数 λ, μ, 我们有

$$T(\lambda x + \mu y) = \frac{d}{dt}(\lambda x(t) + \mu y(t)) = \lambda \frac{d}{dt} x(t) + \mu \frac{d}{dt} y(t) = \lambda T(x) + \mu T(y),$$

因此 T 是线性算子。

有界: 对于任意 $x \in C^1_{[a,b]}$, 我们有 $\|Tx\| = \max_{a\le t\le b}\{|x'(t)|\} \le \max_{a\le t\le b}\{|x(t)|,|x'(t)|\} = \|x\|$, 所以 T 是有界的，且 $\|T\| \le 1$。

3. 由第 2 小问, 已知 $\|T\| \le 1$ 。考虑函数 $x_0(t) = t$, 我们有 $x_0'(t) = 1$, 所以 $\|x_0\| = \max_{a\le t\le b}\{|t|,|1|\} = 1$，且 $\|Tx_0\| = \max_{a\le t\le b}\{|1|\} = 1$，有 $\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ge \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = 1$。因此，我们有 $\|T\| = 1$ 。所以，当 $0 \le a < b \le 1$ 时，$\|T\| = 1$ 。

12. [**证明题**] $L^\infty_{[a,b]}$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上的所有本性有界可测函数全体, 按照函数的通常加法与数乘构成一个线性空间，规定几乎处处相等的函数为同一个元素，定义

$$\rho(x_1,x_2) = \inf_{E\in\Sigma}\left(\sup_{[a,b]-E}|x_1(t)-x_2(t)|\right), x_1,x_2 \in L^\infty_{[a,b]}$$

其中，$\Sigma = \{E \subset [a,b] \mid m(E) = 0\}$ 为 $[a,b]$ 中的零测集全体。1. 验证 ρ 为 $L^\infty_{[a,b]}$ 上的一个距离；2. 设 $\{x_n\}$ 为 $L^\infty_{[a,b]}$ 中的一个点列，$x \in L^\infty_{[a,b]}$，证明 $\{x_n\}$ 在 $L^\infty_{[a,b]}$ 中收敛到 x 的充分必要条件是函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处一致收敛到 $x(t)$；3. 设 $\{x_n\}$ 为 $L^\infty_{[a,b]}$ 中的一个基本列，证明 $\{x_n\}$ 在 $L^\infty_{[a,b]}$ 中收敛。

13. [**证明题**] 在线性赋范空间 l^∞ 中, 对每个自然数 n, 定义算子

$$A_n\{\xi_1,\xi_2,\cdots\} = \{\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots\}, \{\xi_n\} \in l^\infty$$

又令 $M = \{\{\xi_n\} \subset R \mid \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p < +\infty\}\,(p>1)$，则 $M \subset l^\infty$。1. 证明 $A_n \in B(l^\infty \to l^\infty)$；2. 证明 $\lim_{n\to\infty}\|A_n\| = 1$；3. 问 M 是否为 l^∞ 的完备子空间，证明你的结论。

1. 对于 $\forall \xi,\zeta \in l^\infty$，有

$$\begin{aligned}
A_n(\alpha\xi+\beta\zeta) &= A_n\{\alpha\xi_1+\beta\zeta_1,\alpha\xi_2+\beta\zeta_2,\cdots\}\\
&= \{\alpha\xi_{n+1}+\beta\zeta_{n+1},\alpha\xi_{n+2}+\beta\zeta_{n+2},\cdots\}\\
&= \alpha\{\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots\}+\beta\{\zeta_{n+1},\zeta_{n+2},\cdots\}\\
&= \alpha A_n(\xi)+\beta A_n(\zeta)
\end{aligned}$$

则 A_n 为线性算子。

对于任意的 $\{\xi_n\} \in l^\infty$, 我们有

$$\|A_n\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\|_\infty = \sup_{k\ge 1}|\xi_{n+k}| \le \sup_{k\ge 1}|\xi_k| = \|\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\|_\infty,$$

A_n 有界，所以 $A_n \in B(l^\infty \to l^\infty)$ 。

2. 对于任意的 $\{\xi_k\} \in l^\infty$, 我们有

$$\|A_n\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\|_\infty = \sup_{k\ge 1}|\xi_{n+k}| \le \sup_{k\ge 1}|\xi_k| = \|\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\|_\infty,$$

所以 $\|A_n\| \le 1$ 。

另一方面, 对于序列 $\xi_0 = \{0,0,\cdots,0,1,0,0,\cdots\}$ (第 $n+1$ 项为 1 , 其余项为 0), 我们有 $\|A_n(\xi_0)\|_\infty = \|\xi_0\|_\infty = 1$，所以 $\|A_n\| = \sup_{\|\xi\|\neq 0}\frac{\|A_n(\xi)\|}{\|\xi\|} \ge \frac{\|A_n(\xi_0)\|}{\|\xi_0\|} = 1$ 。因此, $\lim_{n\to\infty}\|A_n\| = 1$ 。

3. 因为 l^∞ 为完备空间，只要证 M 不为闭集即可。令 $x_n = \left\{1,\frac{1}{2}^{\frac{1}{p}},\cdots,\frac{1}{n}^{\frac{1}{p}},0,\cdots\right\}, n = 1,2,\cdots$, 则 $\{x_n\} \subset M$，令 $x = \left\{1,\frac{1}{2}^{\frac{1}{p}},\cdots,\frac{1}{n}^{\frac{1}{p}},\cdots\right\}$，显然 $x \in l^\infty$，且 $\rho(x_n,x) = \sup_{k\ge n+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \to 0(n\to\infty)$, 故 $x_n \to x(n\to\infty)$，x 为 l 的一个极限点，但 $\|x\| = +\infty$，$x \notin M$。

14. [**证明题**] 在复线性赋范空间 l^2 中, 对每个自然数 n, 定义算子。

$$A_n\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}=\{\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots\},\{\xi_n\}\in l^2$$

证明: 1. $A_n\in B\left(l^2\to l^2\right)$; 2. $\lim_{n\to\infty}\|A_n\|=1$; 3. 如果 $|\lambda|>1$, 则 λ 为 A_1 的正则值, 如果 $|\lambda|<1$, 则 λ 为 A_1 的特征值。

证: （1）对于 $\forall\xi,\zeta\in l^2$，有

$$\begin{aligned}A_n(\alpha\xi+\beta\zeta)&=A_n\{\alpha\xi_1+\beta\zeta_1,\alpha\xi_2+\beta\zeta_2,\cdots,\alpha\xi_n+\beta\zeta_n,\cdots\}\\&=\{\alpha\xi_1+\beta\zeta_1,\alpha\xi_2+\beta\zeta_2,\cdots,\alpha\xi_{n-1}+\beta\zeta_{n-1},\alpha\xi_{n+1}+\beta\zeta_{n+1},\cdots\}\\&=\alpha\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1},\xi_{n+1},\cdots\}+\beta\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-1},\zeta_{n+1},\cdots\}\\&=\alpha A_n(\xi)+\beta A_n(\zeta)\end{aligned}$$

则 A_n 为线性算子。

对于 l^2 的任意元素 ξ，有 $\|A_n\xi\|=\sum_{k\neq n}|\xi_k|<\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_n|=\|\xi\|<+\infty,n=1,2,\cdots$，因此 $A_n\in B\left(l^2\to l^2\right),n=1,2,\cdots$。

(2) 由（1），对 $\forall\xi\in l^2,n\in N$, 有 $\|A_n\xi\|\le\|\xi\|$，故有，$\|A_n\|=\sup_{\|\xi\|\neq 0}\frac{\|A_n\xi\|}{\|\xi\|}\le 1$ 。又若令 $e_n=\{\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1},1,0,\cdots\},n=1,2,\cdots$，则 $\|e_n\|=1$，且 $A_ne_{n+1}=e_n$，故有，$\|A_n\|\ge\frac{\|A_ne_{n+1}\|}{\|e_{n+1}\|}=1$。于是，$\|A_n\|=1$。故 $\lim_{n\to\infty}\|A_n\|=1$。

(3) 根据定理 4.6.1 可知，当 $|\lambda|>1=\|A_1\|$ 时，λ 为 A_1 的正则值。由于 A_1 不是 $1-1$ 的，故 $\lambda=0$ 为 A_1 的特征值，而当 $|\lambda|<1$，且 $\lambda\neq 0$ 时，令 $x=\{\lambda,\lambda^2,\cdots\}$，则 $x\in l^2,x\neq\theta$，且 $(A_1-\lambda I)x=\theta,n=1,2,\cdots$，即方程 $(A_1-\lambda I)x=\theta$ 有非零解，故 λ 为 A_1 的特征值。

5 Hilbert 空间

5.1 题目

1. [**选择题**] 设 f 为 $n(n\ge 2)$ 维内积空间 U 上非零的线性泛函，记 $M=\{x\in U\mid f(x)=0\}$，则下列结论不正确的是: [D]

（A）M 是一个 Hilbert 空间　　（B）M 是 U 的真子线性空间

（C）$M^{\perp}$ 是一个 1 维线性空间　　（D）$M^{\perp}$ 是一个 $n-1$ 维线性空间

解析:（1）（2）因为 f 为一个非零的线性泛函，则一定存在 $x\in U$，但是 $x\notin M$，则 M 是 U 的真子线性空间。（3）因为 f 为一个非零的线性泛函，则 f 的像空间 $range(f)$ 至少有一个非 0 元素，维度为 1，根据线性变换的基本定理，$dim(U)=dim(null(f))+dim(range(f))$，因此 f 的零空间 M 的维度为 $n-1$。

2. [**选择题**] 设 f 为 $n(n\ge 2)$ 维内积空间 U 上非零的线性泛函，记 $M=\{x\in U\mid f(x)=0\}$，判断下列结论的正确性:（1）M 是一个 Hilbert 空间;（2）M 是 U 的真子线性空间;（3）M 是一个 $n-1$ 维线性空间 [B]

（A）3 个都不正确　　（B）3 个都正确

（C）（2）正确，（1）与（3）不正确　　（D）（1）与（2）正确，（3）不正确

3. [**选择题**] 设 $\{e_k\}$ 为不完备内积空间 U 中的标准直交系，记 $M=span\{e_k\}$，则下列结论不正确的是: [C]

（A）若 $\{e_k\}$ 完备，则 M 在 U 中稠密　　（B）若 $\overline{M}=U$，则 $\{e_k\}$ 完备

（C）若 $\{e_k\}$ 完全，则 M 在 U 中稠密　　（D）若 $\overline{M}=U$，则 $\{e_k\}$ 完全

解析: $\{e_k\}$ 完备，则 U 中所有元素都能由 $\{e_k\}$ 线性表示。因此（A）和（B）是正确的，又由 $\{e_k\}$ 完备一定能推出 $\{e_k\}$ 完全，一定能推出（D）完全。（C）不一定成立。

4. [**判断题**] 设 X 与 Y 为两个内积空间，T 为 X 到 Y 的一个线性算子，若对任意的 $x \in X$，均有 $(Tx,Tx) = (x,x)$，则 X 与 TX 保内积线性同构。

   答：正确。由 $(Tx,Tx) = (x,x)$ 可知 U 上的范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$，满足 $\|Tx\| = \|x\|$，T 是保范算子，且 T 是 X 到 TX 的 1-1 映射，因此 T 是 X 与 TX 之间的一个保范线性映射，X 与 TX 保范线性同构，也因此 X 与 TX 保内积线性同构。

5. [**判断题**] $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$ 为实内积空间 $L^2_{[-\pi,x]}$ 中一个完备的标准直交系，故对 $\forall f \in L^2_{[-\pi,\pi]}$，均有 f 关于上述标准直交系的 Fourier 级数收敛到 f，因此，对 $\forall x \in [-\pi,\pi]$，有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

   成立。其中，

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx, k = 0,1,2,\cdots, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx, k = 1,2,\cdots$$

   答：错误。

6. [**判断题**] 设 $\{e_n\}_{n\in N}$ 为 Hilbert 空间 H 中的标准直交系，$T \in B(H \to H)$，记 $e_{kn} = (Te_k, e_n)$，则对任意的 $n \in N$，$\sum_{k=1}^{\infty} |e_{kn}|^2$ 收敛。

   答：首先，$T \in B(H \to H)$，则存在一个常数 $M < +\infty$，使得 $\|Te_k\|^2 = M$。根据 Bessel 不等式，对于 Hilbert 空间 H 中的标准直交系 $\{e_n\}$，$x \in H$，我们有 $\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 \le \|x\|^2$。因此对于 $Te_k \in H$，有 $\sum_{n=1}^{\infty} |(Te_k,e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |e_{kn}|^2 \le \|Te_k\|^2 = M$，则 $\sum_{k=1}^{\infty} |e_{kn}|^2$ 收敛。

7. [**证明题**] 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in B(H \to H)$, 对给定的 $y \in H$, 定义 $f(x) = (Tx,Ty)$, (1) 证明 f 为 H 上的一个连续线性泛函: (2) 在 T 和 y 已知的条件下, 给出 $\|f\|$ 的一个表达式。

   解: (1) 由于 T 线性，且内积关于第一变元线性，故 f 线性。又 T 连续，且内积关于第一变元连续，故 f 连续; 或者，根据 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$|f(x)| = |(Tx,Ty)| \le \|Tx\|\|Ty\| \le \|Ty\|\|T\|\|x\|,$$

   故 f 有界，从而连续。

   (2) 因为 H 是 Hilbert 空间，则 T 在 H 上存在共轭算子 T^*，故 $f(x) = (Tx,Ty) = (x,T^*Ty)$，于是，根据 Riesz 表示定理可知，$\|f\| = \|T^*Ty\|$ 。

8. [**证明题**] 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 n 维内积空间 X 的一个标准直交系，f 为 X 上的一个线性泛函。1. 证明 f 连续: (8 分) 2. 求 f 的范数。(8 分)

   解: 1. 根据假设和线性空间维数的定义，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 也是 X 完备的标准直交系，故对任意的 $x \in X$, 有 $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$，且 $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$ 。由于 f 线性，有

$$|f(x)| = \left|f(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i f(e_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i f(e_i)|,$$

   又根据 Cauchy 不等式，有

$$|f(x)| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i f(e_i)| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2} = M\|x\|$$

   其中，$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2}$ 。故 f 有界，且 $\|f\| \le M$，从而 f 连续。

   2. 令 $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} e_i$，其中 $\overline{f(e_i)}$ 为 $f(e_i)$ 的共轭复数，显然

$$\|y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\overline{f\left(e_{i}\right)}\right|^{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(e_{i}\right)\right|^{2}}=M,$$

故

$$\|y\|^{2}=\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(e_{i}\right)\right|^{2}=\left|\sum_{i=1}^{n}\overline{f\left(e_{i}\right)}f\left(e_{i}\right)\right|=|f(y)|\leq\|f\|\|y\|,$$

于是又有，$\|f\|\geq\|y\|=M$，故 $\|f\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(e_{i}\right)\right|^{2}}$ 。

9. [**证明题**] 设 f 为无限维内积空间 U 上的线性泛函，令 $M=\{x\in U\mid f(x)=0\}$ 为 f 的零空间，如果 $M^{\perp}$ 不是零维线性空间，试证明 $M^{\perp}$ 是一个 Hilbert 空间。(10 分)

   证: 根据假设存在 $x\in M^{\perp}$, 且 $x\neq\theta$ 。设 $x,y\in M^{\perp}$, 且 $x\neq\theta,y\neq\theta$, 则由于 $M\cap M^{\perp}\subset\{\theta\}$, 故有 $f(x)\neq 0$ 。又 f 线性, 故 $f\left(y-\frac{f(y)}{f(x)}x\right)=0$, 于是 $y-\frac{f(y)}{f(x)}x\in M$ 。而 $M^{\perp}$ 是线性空间，故 $y-\frac{f(y)}{f(x)}x\in M^{\perp}$ 。于是, $y-\frac{f(y)}{f(x)}x=\theta$, 即 x,y 线性相关。故 $M^{\perp}$ 只能是 1 维线性空间, 当然是 Hilbert 空间。

10. [**证明题**] 设 M 为内积空间 U 的一个完备子空间，对固定的一个 $a\in U$，定义 M 上的一个泛函 $f(x)=\|x-a\|,x\in M$，试证明 f 可在 M 上取到最小值，且取到最小值的点是唯一的。

    证：由投影定理，因为 M 为内积空间 U 的一个完备子空间，则对于任意 $a\in U$，存在唯一的投影 p，有 $\|a-p\|=\min_{x\in M}\|a-x\|$，对于任意的 $x\in M$，我们都有 $\|a-p\|\leq\|a-x\|$，也就是说 $f(p)\leq f(x)$。因此，$f(x)$ 在 M 上能取到唯一的最小值 $f(p)$。

11. [**证明题**] 设 M 为内积空间 U 的一个线性子空间，且 U 中的每个元素均在 M 上存在直交投影，对固定的一个 $a\in U$，定义 M 上的一个泛函 $f(x)=\|x-a\|,x\in M$，试证明 f 可在 M 上取到最小值，且取到最小值的点是唯一的。

    证：先证对于任意的 $a\in U$，如果 a 在 M 上的投影存在，则唯一。设 $p,q\in M$ 为 a 在 M 上两个不同的投影，则 $(a-p,p-q)=0,(a-q,p-q)=0$，两式相减有 $(a-q,p-q)-(a-p,p-q)=(a-q-a+p,p-q)=(p-q,p-q)=0$，与 $p\neq q$ 矛盾。

    剩下与第 10 题相同。

12. [**证明题**] 设 $\{e_n\}$ 为内积空间 X 中不完备的标准直交系，如果 M 在 X 中稠密，试证明：在 M 中至少存在一个元素，它不能由 $\{e_n\}$ 中的有限个元素线性表示。

    反证法：假设 M 中的任一元素都能由 $\{e_n\}$ 线性表示。

    因为 $\{e_n\}$ 不完备，则存在 $x\in X$，使 $\epsilon=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2>0$。又因为 M 在 X 中稠密，则对于 $\sqrt{\epsilon}>0$，存在 $m=\sum_{k=1}^{N}a_ke_k\in M$，使得 $\|x-m\|<\sqrt{\epsilon}$，则有

$$\begin{aligned}\epsilon=\|x\|^{2}-\sum_{k=1}^{\infty}|c_{k}|^{2}&\leq\|x\|^{2}-\sum_{k=1}^{N}|c_{k}|^{2}=\|x-\sum_{k=1}^{N}c_{k}e_{k}\|^{2}\\&\leq\|x-\sum_{k=1}^{N}a_{k}e_{k}\|^{2}=\|x-m\|^{2}\\&<\epsilon\end{aligned}$$

    显然矛盾，则在 M 中至少存在一个元素，它不能由 $\{e_n\}$ 中的有限个元素线性表示。

13. [**证明题**] 设 f 为 $n(n\geq 2)$ 维内积空间 U 上非零的线性泛函, 令 $M=\{x\in U\mid f(x)=0\}$ 为 f 的零空间, 记 $\mathrm{Dim}(V)$ 为线性空间 V 的维数, 证明: 1. $\mathrm{Dim}(M)+\mathrm{Dim}\left(M^{\perp}\right)=n$; 2. $\mathrm{Dim}(M)=n-1$。