# Matemática IV- 2023

# TP6 - Estructuras Algebraicas - Teoría de Grupos

1. Determinar cuales de las siguientes operaciones están bien definidas sobre el conjunto $A$ dado. Analizar las propiedades en los casos afirmativos

   (a) $A = N$, $a * b = 3ab$

   (b) $A = Z$, $a * b = \frac{a+b}{3+ab}$

   (c) $A = R$, $x * y = x + y - xy$

   (d) $A = \{0, 1, 2, 3\}$,

| $*$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 1 |

2. Demostrar que:

   (a) Dado $M = \{m \in N : m > 0\}$, $(M, +)$ es un semigrupo pero no es un monoide

   (b) El conjunto de un solo elemento $M = \{e\}$ con la operación definida por $e * e = e$ es un monoide

   (c) Dado un conjunto no vacío $A$, el conjunto de las partes de A $P(A)$ con la operación *intersección* de conjuntos es un monoide conmutativo

3. Demostrar que si para una operación asociativa $*$ en A existe un elemento neutro $e$ y un elemento del conjunto, $a$, tiene inverso entonces éste es único.

4. Sea $R$ una relación de *congruencia* sobre un semigrupo $(S, *)$ demostrar que $(S/R, \circledast)$ (el conjunto cociente y la operación inducida por $*$ sobre las clases de equivalencia) es un semigrupo llamado ***Semigrupo Cociente***

5. Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:
    (a) $(Z, +)$, los enteros con la suma usual
    (b) $(Z, \cdot)$, los enteros con el producto usual
    (c) $(R^2, +)$, los pares ordenados de reales con la suma usual
    (d) $(M_{2x2}, +)$ las matrices de 2x2 con la suma usual de matrices
    (e) $(P(A), \cup)$, $A$ cualquier conjunto y $P(A)$ indica el conjunto de partes de $A$
    (f) $(Z_4, +)$ enteros módulo 4 con la suma modular
    (g) $(Z_4, .)$ enteros módulo 4 con el producto modular
    (h) $(Z_3, .)$ enteros módulo 3 con el producto modular

6. Probar que en todo Grupo el único elemento ***idempotente*** es el neutro

7. Mostrar que en todo grupo vale la *propiedad cancelativa*

8. Sea $(G, *)$ un grupo tal que todo elemento es su propio inverso, probar que $G$ es abeliano

9. Dado un grupo $(G, *)$, probar que $G$ es abeliano si y sólo si para cualquier $x$,$y$ en $G$ vale que: $(x * y)^2 = x^2 * y^2$

10. Dados los Grupos $(G, *)$ y $(F, \diamondsuit)$ se define en el conjunto $G \times F$ la ley $\bullet$ tal que $(x, y) \bullet (z, t) = (x * z, y \diamondsuit t)$. Probar que $(G \times F, \bullet)$ es Grupo (***Grupo Producto***)

11. Estudiar si son Subgrupos de los grupos indicados:
    (a) Los enteros pares de $(Z, +)$
    (b) Las matrices simétricas de 2x2
    (c) Las clases *pares* de $Z_4$

12. Demostrar que si $H$ y $K$ son subgrupos de $(G, *)$ entonces $H \cap K$ es un subgrupo de $(G, *)$

13. Sean $A_1 = \{\overline{0}, \overline{5}\}$ y $A_2 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$ subconjuntos de $Z_{10}$.

   - Probar que $A_1$ y $A_2$ son subgrupos de $Z_{10}$
   - Mostrar que todo elemento de $Z_{10}$ puede escribirse como suma de elementos de $A_1$ y $A_2$ (es decir, para todo $x$ de $Z_{10}$, $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$

14. Mostrar que $\overline{3}$ es un generador del grupo cíclico $(Z_8, +)$. Cuál es el orden del subgrupo cíclico generado por $\overline{2}$ ?

15. Encontrar los generadores del grupo cíclico $(Z_6, +)$.

16. Probar que todo grupo cíclico es abeliano

17. Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y en caso afirmativo hallar núcleo e imagen.

   (a) $f : G \to F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (R, +)$ los reales con la suma usual, $F = (R_0, \cdot)$ los reales sin el 0 con el producto usual

   (b) $f : G \to F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (Z, *)$ los enteros con la operación $a*b = a+b+ab$ , $F = (Z, \circ)$ los enteros con la operación $a \circ b = a+b-ab$

   (c) $f : (P(A), \cup) \to (P(A), \cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo $A$ cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de $A$ y $X^c$ el complemento de un conjunto)

18. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si $G$ es abeliano

19. Si $f : G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces es monomorfismo si y sólo si $Nu(f) = \{e_1\}$ .

20. Sea $(G, *)$ un grupo y sea $a \in G$. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a * x * a^{-1}$ es un isomorfismo

21. Sea $R$ una relación de *congruencia* sobre un semigrupo $(S, *)$ y $(S/R, \circledast)$ el semigrupo cociente correspondiente.
    Demostrar que la función $f_R : S \longrightarrow S/R$ definida por $f_R(a) = \overline{a}$ es un homomorfismo.

22. Probar que hay un isomorfismo entre en grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales $R^4$ con la suma usual

23. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y sólo si $G$ es abeliano

## Ejercicios Adicionales

1. Determinar si $a * b = mcm[a, b]$ está bien definida en $A = N$, y en caso afirmativo analizar las propiedades

2. Probar que $GL(n, K) = \{A \in K^{n\times n}; det(A) \neq 0, con\ K\ cuerpo\}$ (conjunto de las matrices de orden $n$ invertibles) es un grupo con el producto usual

3. Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo abeliano, entonces $(a * b)^n = a^n * b^n$ para todo $n$ entero

4. Sea $(G, *)$ un grupo, sea $a \in G$ y sea $H$ un subgrupo de $G$. Demostrar que el conjunto $aHa^{+1} = \{a * h * a^{-1} : h \in H\}$ es un subgrupo de $G$.

5. Sea $(G, *)$ un grupo, sea $a \in G$ y sea $H$ un subgrupo de $G$. Si $a, b \in G$, probar que la relación dada por $a \equiv b$ mod(H) si $a * b^{-1} \in H$ es una relación de equivalencia

6. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que la imagen de $f$ es un subgrupo de $H$

7. Dado un grupo $(G, *)$ y sea $a \in G$, se considera el conjunto **normalizador** $N(a) = \{x \in G / \forall a \in G : a * x = x * a\}$. Probar que $N(a)$ es un Subgrupo de $G$.

8. Probar que todo grupo cíclico de orden $m$ es isomorfo a $(Z_m, +)$