

Matemática IV- 2023

TP3 - Números

1. Probar que no hay naturales simultáneamente pares e impares
2. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
 - (a) $1|a$ y $a|0$
 - (b) $a|b$ y $c|b$ entonces $ac|b$
 - (c) $a(a+1)$ es par
 - (d) $a|b$ entonces $a|bc$
3. Si a un número se lo divide por 4, el resto es 2 y si se lo divide por 3, el resto es 1.
¿Cuál es el resto si se lo divide por 12 ?
4. Calcular el máximo común divisor entre:
 - (i) (16, 38) (ii) (120, 50) (iii) (31, 57) (iv) (-60, 45) (v) (9834, 1430)
5. Probar que si a y b son enteros:
 - (a) $(a, 1) = 1$
 - (b) si a es no nulo, $(a, 0) = |a|$
 - (c) $(a, a) = |a|$
6. Hallar $\text{mcd}(5k+3, 3k+2)$, para cualquier k entero
7. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y sea p primo. Demostrar que si $p|ab$ entonces $p|a$ ó $p|b$
Mostrar que ésto no se cumple si p no es primo.
8. Hallar el menor entero positivo q tal que $6552q$ es el cuadrado de un entero.
9. Demostrar que dados a y b en \mathbb{Q} tales que $a < b$, existe otro número racional x tal que $a < x < b$.
10. Probar que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 3

11. Indique la parte real $\text{Re}(z)$ y la parte imaginaria $\text{Im}(z)$ de los siguientes complejos:
- a) $\sqrt{-49}$ b) $\sqrt{-20}$ c) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$ d) $z = -8$ h) $z = 7i$
f) $z = (3 + i) + (5 - 4i)$ g) $z = 3i - (5 - 2i)$ h) $\frac{1+3i}{3-i}$ i) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$
12. La suma de un número complejo y su conjugado es -8 y la suma de sus módulos es 10. De qué números complejos se trata?
13. Hallar, si existe, x real tal que $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ siendo $z = \frac{x+2i}{4-3i}$
14. Encontrar, si existe, un valor de k real para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un número real.
15. Calcular las siguientes potencias:
a) i^{489} b) $-i^{1026}$ c) $(3i)^{168}$
16. Dados los siguientes números complejos, encontrar la forma más adecuada para realizar las operaciones pedidas:
- $z_1 = 3 + 3i$ $z_2 = -1 + i$ $z_3 = 5 + 4i$ $z_4 = 9$ $z_5 = 5i$ $z_6 = -7$
 $z_7 = -4 - 4i$ $z_8 = -8i$ $z_9 = 2 - 2i$ $z_{10} = 3 - 4i$
- a) $z_1 + z_7$ b) $z_5 - z_3$ c) $z_9 \cdot z_6$ d) z_8 / z_{10} e) $z_3 + z_6$ f) $z_2 - z_6$
g) $z_3 \cdot z_{10}$ h) z_1^3 i) z_9^9 j) z_5^{15} k) z_{10}^3
- l) hallar las raíces cuartas de z_2
m) hallar las raíces cúbicas de z_4
n) hallar las raíces séptimas de i

Ejercicios Adicionales

1. Dados a, b, c enteros coprimos, probar que si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$
2. Sean a y b dos enteros coprimos, demostrar que :
 - (a) $a + b$ es coprimo con a
 - (b) $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$
3. Demostrar que : Si $(a, b) = d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$
4. El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?
5. * Intente codificar (en el lenguaje que Ud prefiera) el *algoritmo de Euclides*. Pruebe que funciona con alguno de los ejercicios
6. * Investigue que dice *La criba de Eratóstenes* y trate de escribir un código que realice el procedimiento.
7. Sean u y v números racionales. Probar que:
 - (a) $u + v \in Q$ y $u - v \in Q$
 - (b) $u.v \in Q$
 - (c) Si u es no nulo, $u^{-1} \in Q$
8. Dados $a, b, c, d \in Z$, suponiendo que los denominadores no se anulen y que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ no es cero, probar:
 - (a) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
 - (b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
 - (c) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
9. Demostrar que si p es primo y $n \in N$, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional
10. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. De qué números complejos se trata?
11. Demostrar que para cualquier complejo z vale que
 - $z.\bar{z} = |z|^2$
 - $z + \bar{z} = 2Re(z)$
 - $z - \bar{z} = 2Im(z)i$

12. Encontrar el valor de h para que el complejo $\frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$ sea un imaginario puro.
13. Realizar las operaciones con los complejos del último ejercicio (antes de los adicionales):
- *) hallar las raíces cúbicas de z_5
 - **) hallar las raíces quintas de z_6
 - ***) hallar las raíces séptimas de z_8