Matemática IV- 2023

TP4 - Relaciones entre conjuntos

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 0, -1\}$ y $B = \{2, 3, 1\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justifica.

   (a) $R = \{(1; 2), (0; 3)\}$

   (b) $R = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$

   (c) $R = \{(3; 1)\}$

   (d) $R = \emptyset$

2. Sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = Z$ y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si *y es el cuadrado de x*.

   Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.

3. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $V = \{vocales\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones. Justifica.

   (a) $R = \{(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)\}$ en $A \times A \times A$

   (b) $R = \{(a, a, a); ((c, e, 2); (a, b, 1)\}$ en $A \times V \times B$

   (c) $R = \{(a, b, 1); (e, c, 2) : (i, j, 3)\}$ en $V \times A \times B$

   (d) $R = \{(a, z, 3); ((b, i, 2); (c, x, 1)\}$ en $A \times V \times B$

4. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación R en $A \times A \times A$ definida en la forma: $(x, y, z) \in R$ si y sólo si $x < y \quad \& \quad y < z$. Escribe R por extensión

5. Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no; indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.

   (a) En el conjunto de los números reales

   - xRy si y sólo si $x \geq 4 \quad \& \quad y \geq 5$.
   - xRy si y sólo si $y \leq x \leq y + 3$.

   (b) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $P(A)$ el conjunto de partes de A

   - en $P(A)$, XRY si y sólo si $X \cap Y = \emptyset$
   - en $P(A)$, XRY si y sólo si $X \subset Y$

6. Determinar si las siguientes relaciones definidas en $A = \{a, b, c, d\}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:
   - $R_0 = \emptyset$
   - $R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (c, d)\}$
   - $R_2 = \{(a, a); (b, b); (b, c); (c, b); (d, d); (c, c)\}$
   - $R_3 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)\}$
   - $R_4 = A \times A$

7. Escribir la matriz y los digrafos asociados a las relaciones anteriores

8. Sea $A = \{a, b, c\}$
   (a) Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A
   (b) Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A
   (c) Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A
   (d) Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A
   (e) Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A

9. Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces aRa y bRb.

10. Sea A un conjunto arbirtario. Sea $R = \Delta_A$ (diagonal de A) . Analizar qué propiedades tiene R.

11. Proponer una relación en el conjunto de los números naturales.
    Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

12. Proponer una relación en el conjunto de los *alumnos de Informática.*
    Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

13. Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, se define la relación *complemento de R*, $\bar{R}$ por: *$a\bar{R}b$ si y sólo si a no está relacionada con b por R*
    - Dar un ejemplo de una relación R y su complemento
    - Probar que si $R \subset S$ entonces $\bar{S} \subset \bar{R}$

14. Dada R una relación binaria sobre A, probar que:
    (a) R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es
    (b) R es simétrica si y sólo si $R^{-1} = R$
    (c) R es simétrica si y sólo si R^{-1} y $\bar{R}$ también lo son
    (d) R es antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} \subset \Delta_A$

15. Sean R y S dos relaciones en A. Probar que:
    (a) Si $R \subset S$ entonces $R^{-1} \subset S^{-1}$
    (b) Si R y S son reflexivas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son
    (c) Si R y S son simétricas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son

16. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en H el conjunto de los seres humanos:
    (a) Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x *es hermano de* y
    (b) Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x *es hijo de* y
    (c) Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc..
    R es la relación en H definida por xRy si y sólo si x *es descendiente de* y

17. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:
    (a) Sea N el conjunto de los números naturales.
    Sea $\leq$ la relación en N dada por $x \leq y$ si y sólo si x *es menor o igual a* y
    (b) Sea N el conjunto de los números naturales.
    Sea $|$ la relación en N dada por $x|y$ si y sólo si x *divide a* y
    (c) Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.

18. Dado un conjunto de números reales A probar que la relación sobre $A \times A$ dada por $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$ es un orden.
    Es total?

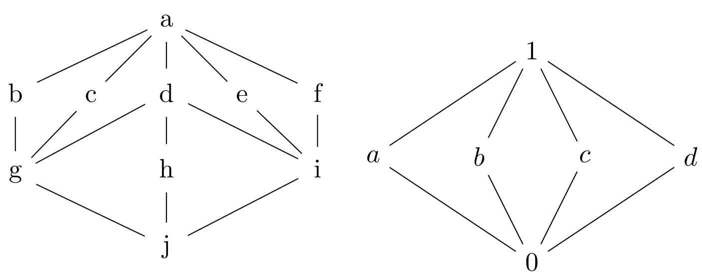
19. Analizar que tipo de orden es el usual en el conjunto de los números rales. ¿qué pasa con los números complejos?¿están ordenados?

20. Probar que el orden lexicográfico es un orden total

21. Sea $S = \{a, b, c\}$ y sea $A = P(S)$ el conjunto de *partes de S*. Mostrar que A está parcialmente ordenado por el orden $\subset$ (inclusión de conjuntos).
    Hallar el diagrama de Hasse.

22. Sea $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (el conjunto de los divisores de 12). Hallar el diagrama de Hasse de $D_1 2$ con la relación ”divide”

23. Describa las parejas ordenadas por las relaciones de cada uno de los siguientes diagramas de Hasse. Determinar, si existen, los elementos máximo, mínimo y cotas inferiores y superiores



24. Considerar el conjunto parcialmente ordenado $L = (N, |)$ (los naturales con el orden "divide"). Mostrar L es un reticulado.

25. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Seam $a.b \in A$, entonces $[a] = [b]$ si y sólo si aRb

26. Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- $\{\{4, 5, 6\}; \{1, 8\}; \{2, 3, 7\}\}$
- $\{\{4, 5\}; \{1, 3, 4\}; \{6, 8\}; \{2, 7\}\}$
- $\{\{1, 3, 4, 7\}; \{2, 6\}; \{5, 8\}\}$

27. Considerando el conjunto A de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

(a) $P = \{\{$*alumnos que aprobaron CADP*$\}; \{$*alumnos que aprobaron Organización*$\};$ $\{$*alumnos que no aprobaron ISO ni Redes*$\}\}$

(b) $P = \{\{$*alumnos que realizaron las dos entregas*$\}; \{$*alumnos que sólo realizaron la entrega 1*$\};$ $\{$*alumnos que sólo realizaron la entrega 2*$\}; \{$*alumnos que no ninguna entrega*$\}\}$

(c) $P = \{\{$*alumnos que están cursando Ciberseguridad*$\}; \{$*alumnos que cursan Sistemas y Organizaciones*$\};$ $\{$*alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial*$\}\}$

28. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia.
¿ Cuál es la partición que induce R sobre A ?

29. Dados el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y una partición $P = \{\{a, b\}; \{c, d\}; \{e\}\}$.
Escribir por extensión la relación de equivalencia sobre A inducida por P.

30. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.
Mostrar que$R$ es una relación de equivalencia y determinar las clases $\bar{1}$, $\bar{2}$ y $\bar{3}$.
¿ Qué partición de A induce R ?

Ejercicios Adicionales

1. Para evitar corazones rotos por amores no correspondidos, ¿cómo debería ser la relación ***xRy*** *si y sólo si* ***x ama a y*** definida en el conjunto de los seres humanos?

2. Se dice que una relación R sobre un conjunto A es *asimétrica* si cada vez que a está relacionado con b no se da que b esté relacionado con a
Dar un ejemplo de una relación asimétrica

3. Probar que dada una relación R sobre un conjunto A, R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$

4. Escribir un código que dado un conjunto y una relación, determinar si la relación cumple con las propiedades de simetría, reflexividad, transitividad y antisimetría

5. Analizar si es un orden parcial la relación sobre los números enteros dada por:

$$aRb \quad \text{si y sólo si} \quad a^2 \leq b^2$$

6. Dados dos relaciones de orden R y S, analizar si $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son

7. Para cada una de las siguientes relaciones: demostrar si es de equivalencia y en caso afirmativo dar 3 elementos de $\overline{(3, 4)}$ (la clase del $(3, 4)$); si la relación no es de equivalencia, dar un contraejemplo de alguna de las propiedades.

   (a) $A = N \times N, \quad (a, b) \sim (c, d) \quad$ *si y sólo si* $a.d = b.c$

   (b) $A = N \times N, \quad (a, b) \sim (c, d) \quad$ *si y sólo si* $a + c = b + d$

   (c) $A = Z, \quad a \sim b \quad$ *si y sólo si a a - b es múltiplo de 4*

   ¿alguna te resulta familiar?

8. Mostrar que toda Algebra de Boole finita es un reticulado.

9. Sea B un algebra booleana y sea $<$ la relación binaria definida por "$a < b$ si y sólo si $ainfb = a$"
Demostrar que $<$ es un orden parcial.

10. Sea A el conjunto de las palabras de longitud 8 del alfabeto $\{0, 1\}$. Mostar que la relación R dada por "aRb si y sólo si a tiene el mismo número de 1 que b" es una equivalencia. Encontrar la partición inducida por la relación.