Matemática IV- 2023

TP5 - Aritmética Modular

1. Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números 387, 25 y 649

2. Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y -49 *módulo 4*

3. Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números: $(2, 1024)$, $(101, 512)$, $(1501, 1348)$.

4. Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias:
   $5 \equiv_m 4$, $1 \equiv_m 0$, $1197 \equiv_m 286$, $3 \equiv_m -3$

5. Probar que la relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia

6. Probar: todo número es congruente, módulo n, con el resto de su división por n

7. Si $x \equiv_m y$, entonces $mcd(x, m) = mcd(y, m)$.

8. Si reparto en partes iguales m caramelos entre 3 personas, me sobran 2, mientras que si los reparto entre 7, me sobran 4. Sabiendo que m está entre 30 y 70.
   ¿ Cuántos caramelos tengo para repartir? (Usar aritmética modular)

9. Averiguar en qué día de la semana naciste y verificar que es el mismo que cuando cumpliste/cumplas 28 años.
   Mostrar que esto es así para cualquier persona nacida entre el 1 de enero de 1901 y el 31 de diciembre de 2071.

   (Obs: un año normal tiene 365 días, uno bisiesto, 366. Los años bisiestos son aquellos no seculares divisibles por 4. Los años seculares son bisiestos si y sólo si son divisibles por 400.)

10. Averiguar qué día de la semana cayó cuando se aprobó la creación de la Facultad.

11. Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

12. ¿ A qué número de Z_3 es congruente 187110?

13. Probar las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in Z$:

    (a) $a \equiv_n a$
    (b) $a \equiv_n b \Rightarrow b \equiv_n a$
    (c) $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c \Rightarrow a \equiv_n c$
    (d) $a \equiv_n b \Leftrightarrow a + c \equiv_n b + c$
    (e) $a \equiv_n b \Rightarrow ac \equiv_n bc$
    (f) $a \equiv_n b \Rightarrow (a, n) = (b, n)$
    (g) $a \equiv_n 0 \Leftrightarrow n|a$

14. Calcular el resto de dividir 7 elevado a la 11 por 12

15. Sea m un entero impar, probar que $m^2 \equiv_4 1$

16. Hallar los resultados de las siguientes operaciones realizadas entre enteros módulo 4 y 5 : $\bar{3} + \bar{1}$; $\bar{5} + \bar{9}$; $\bar{40}.\bar{3}$; $(\bar{3} + \bar{2}).(\bar{6}.\bar{8})$

17. Construir las tablas de sumar y multiplicar de los enteros módulo 2 y 5

18. Dar todos los elementos invertibles de Z_6

Ejercicios Adicionales

1. Dado su número de alumno, Leg: $abcde/f$ y sean $m = abcde$ y $k = f + 10$.
   (a) Calcular, si existe el ***inverso modular*** de k en:
   - Z_8 si su f es **impar**,
   - Z_9 si su f es **par**.

   (b) Como debe ser q para que los últimos 3 dígitos de qx91xm coincidan con los últimos 3 dígitos de su número de alumno.

2. Averiguar qué día de la semana cayó 05/11/1968, fecha del natalicio de Ricardo Fort.

3. Un grupo de chicos de primer año (aprox 900 alumnos) está armando equipos para jugar al fútbol. Si arman equipos para fútbol 5 me quedan 3 sin equipo, pero si van a usar canchita de 11 ahora me quedan 7 amigos sin equipo ¿puede decir cuantos chicos son? la respuesta es única? (usar aritmética modular)

4. Si $\bar{a}$ es invertible entonces no es *divisor de cero*

5. Probar que $(t, m) = 1$ si y s´olo si t es invertible módulo m

6. Si p es primo entonces Z_p es un cuerpo