Matemática IV- 2023

TP7 - Espacios Vectoriales - Transformaciones Lineales

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

   (a) R^3

   (b) Las matrices reales de $2x2$

   (c) Los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3, también es un espacio vectorial?

2. Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que si $\alpha.v = 0_V$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0_V$ (o ambos son nulos)

3. Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

   (a) $S = \{(x, 0) : x \in R\}$

   (b) $S = \{(1, y) : y \in R\}$

   (c) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$

   (d) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 1\}$

   (e) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x - y\}$

   (f) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y + w = 1\}$

   (g) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

   (h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R \right\}$

4. Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de R^3:

   (a) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

   (b) $S = \{(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)\}$

   (c) $S = \{(1, 0, 1); (0, 1, 0)\}$

5. Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2×2 $S = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$

6. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 0, 1); (1, 1, 0)\}$

7. Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 1, 1); (1, -1, 0)\}$

8. Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:
   (a) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,2,3)\}$
   (b) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$
   (c) $S = \{(1,0); (0,1); (2,3)\}$
   (d) $S = \{(1,-3); (1,-1)\}$
   (e) $S = \{(0,2,-1); (1,7,1); (1,3,-1); (0,0,0)\}$
   (f) $S = \{(4,1,0,0); (-3,0,1,0); (1,0,0,1)\}$
   (g) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$
   (h) $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

9. Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

10. Si el conjunto de vectores $M = \{u, v, w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u + 2v, u + 2v + 3w\}$ es linealmente independiente.

11. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores pueden ser base de R^2.
    (a) $\{(2,-1); (1,3)\}$
    (b) $\{(2,1); (1,1); (3,2)\}$
    (c) $\{(1,-1); (1,0)\}$
    (d) $\{(1,2)); (2,4)\}$

12. Dar las coordenadas de $v = (1,2)$ en los conjuntos que en el ejercicio anterior resultaron ser bases

13. Hallar una base para cada conjunto del ejercicio 3 que sea un subespacios.

14. Analizar si las siguiente aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

    (a) $L : R^2 \to R^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$
    (b) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$
    (c) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2, y + 3x, 1)$
    (d) $L : R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$
    (e) $L : R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$
    (f) $L : R^{2x2} \to R^2$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$
    (g) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (0, 0)$

15. Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del punto anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

16. Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

17. (a) Es la aplicación identidad una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.
    (b) Es la aplicación nula una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.

18. Sean $C = C\,[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en R y $L : C \to R$ definida por $L(f) = \int_a^b f(x)dx$. Mostrar que L es una transformación lineal.

19. Sean $C = C\,[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en R y sea $D : C \to C$ dado por $D(f) = f'$ (esto es, para cada función $f \in C$ el operador Derivación, D, devuelve la derivada f' de f). Mostrar que D es una transformacion lineal.

20. Demostrar que dada cualquier transformación lineal $L : V \to W$ (con V, W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W respectivamente.

21.
- Hallar $L : R^2 \to R^2$ sabiendo que:
  $L(1,0) = (1,-2)$, $L(0,1) = (1,-1)$
- Hallar $L : R^3 \to R^2$ sabiendo que :
  $L(1,0,0) = (1,0)$, $L(0,1,0) = (-1,-6)$, $L(0,0,1) = (0,4)$
- Hallar $L : R^2 \to R^2$ sabiendo que:
  $L(1,1) = (4,2)$, $L(0,3) = (1,0)$
- Hallar $L : R^3 \to R^3$ sabiendo que :
  $L(1,1,1) = (1,2,3)$, $L(0,1,0) = (1,-1,0)$, $L(-1,-1,1) = (5,4,3)$

22. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

    (a) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x,y,z) = (z-y, z-x)$ con las bases canónicas de R^3 y R^2.

    (b) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x,y,z) = (3x+z, y-x, 2z+2y)$ con la base canónica de R^3.

    (c) $L : R^{2x2} \to R^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x+y, z+w)$ con B la base canónica de las matrices de R^{2x2} y $B_1 = \{(1,1); (-1,5)\}$ una base de R^2.

Ejercicios Adicionales

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:
   (a) R^n con n natural.
   (b) Las matrices reales de nxn
   (c) Los polinomios de grado menor o igual a ($\mathcal{P}_3$). ¿El conjunto de los polinomios de grado n, también es un espacio vectorial?

2. Decidir si el siguiente conjunto es un subespacio , en caso afirmativo hallar base y dimensión: $S = \{(x, y) \in R^2 : x = y\}$

   Qué sucede con $S = \{(x, y) \in R^2 : x \geq y\}$??

3. Analizar si forman un subespacio (de las matrices cuadradas) las matrices reales no invertibles de $2x2$ y las matrices reales invertibles de nxn.

4. $S = \{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_3 = 4a_0, a_i \in R\}$ es un subepacio del Espacio de polinomios?

5. Decidir si $S = \{(1, 2, 3); (2, 3, 1); (-4, 1, -1)\}$ genera R^3

6. Defina el subespacio generado por los vectores $\{(1, 1, 1); (2, -1, 3); (-1, 2, 2)\}$

7. Analizar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes:
   (a) $S = \{(5, -3); (1, 2)\}$
   (b) $S = \{(3, 2, 1); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

8. Analizar si el conjunto de vectores $\{(0, 2, -1); (1, 1, 1); (1, 3, 0)\}$ es base de R^3.

9. Analizar si $\{x, x^2, x^3\}$ es base de $\{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in R\}$ (los polinomios reales de grado menor o igual a 3)

10. Analizar sin son transformaciones lineales, en caso afirmativo hallar núcleo e imagen.

   (a) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2z, y + 3x, -z)$

   (b) $L : \mathcal{P}_3 \to R^4$ definida por $L(p(x)) = (a_3, a_2, a_1, a_0)$
   con $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y siendo $\mathcal{P}_3$ el espacio de los polinomios de grado 3 (i.e todos los polinomios con grado menor o igual a 3, con las operaciones usuales)

   (c) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (xy, x + y + z)$

   (d) $L : R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (z, y, 1)$

   (e) $L : R^{2x2} \to R$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + w$

   (f) $L : R^{2x2} \to R$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = z.y$

11. Dada L una transformación lineal en el espacio vectorial V y $B = \{b_1....b_i...b_n\}$ una base de V. Probar:

   (a) Si $L(b_i) = 0$ para cada elemento b_i de la base B, entonces L es la transformación nula.

   (b) Si $L(b_i) = b_i$ para cada elemento b_i de la base B, entonces L es la transformación identidad.

   (c) Si hay un escalar r tal que $L(b_i) = r.b_i$ para cada vector de la base B, entonces $L(v) = r.v, \forall v \in V$.

12. Hallar $L : R^3 \to R^2$ sabiendo que :
   $L(1, 0, 1) = (1, 0)$, $L(0, 1, 0) = (1, 2)$, $L(-1, 1, 1) = (-1, 3)$

13. Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

   (a) $L : R^4 \to R^3$ definida por $L(x, y, z, w) = (x + y, y + z, z + w)$ con las bases canónicas de R^4 y R^3.

   (b) $L : R^2 \to R^3$ definida por $L(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$ con $B_2 = \{(1, 1); (-2, 0)\}$ base de R^2 y la base canónica de R^3.

   (c) $L : R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (z, x+y)$ con $B_3 = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (0, 2, 1)\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1, 2); (0, 3)\}$ base de R^2.

14. Sea $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ es base de un espacio V. ¿ Podrá el conjunto $\{b_1; b_1 + b_2\}$ ser linealmente independiente? .

15. Dar un conjunto de vectores que genere al subespacio de las matrices triangulares superiores

16. Si el conjunto de vectores $M = \{u, v, w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u + 2v, u + 2v + 3w\}$ es linealmente independiente.

17. Analizar si la siguiente aplicación es transformación lineal. En caso afirmativo hallar matriz de representación, núcleo e imagen (con sus respectivas bases y dimensiones). ¿ Qué relación hay entre las dimensiones de estos subespacios?

$$L : R^{2x2} \to R^3 \quad : \quad L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x, y + z, w)$$

18. Hallar $L : R^3 \to R^3$ sabiendo que :
    $L(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $L(0, 1, 0) = (1, -1, 0)$, $L(-1, -1, 1) = (4, 5, 6)$