

# Estructuras Algebraicas Introducción a la teoría de grupos

Las estructuras de datos mediante las cuales es posible representar los datos en un ordenador y manipularlos para resolver problemas, son estructuras algebraicas.

Con buenas estructuras algebraicas de datos es posible obtener buenas soluciones algorítmicas a problemas computacionales. La estructura en la que nos vamos a concentrar es la de **Grupos**.

La teoría de grupos es una teoría que se aplica en distintos temas de la informática como por ejemplo en el estudio de máquinas de estado finito y de lenguajes formales.

Es una teoría moderna en la historia de la matemática que aunque tuvo resultados importantes antes se consolidó en pleno siglo XXI.

## 1 Estructuras Algebraicas

Una **Estructura Algebraica** es un conjunto no vacío dotado con una o más operaciones. Estas operaciones están definidas en el producto cartesiano (pueden ser n-arias aunque aquí vamos a concentrarnos en operaciones unarias y binarias) y serán cerradas.

Esto es, supongamos que  $A$  es el conjunto no vacío, si a cada elemento del producto cartesiano se le asigna unívocamente un elemento del conjunto  $A$  diremos que la operación está bien definida, o que es una operación n-aria en  $A$ .

Dependiendo de las propiedades que tengan estas operaciones la estructura recibirá un nombre diferente.

Por ejemplo, dado un conjunto no vacío  $A$  y una operación  $*$  sobre  $A$ , si  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  se llamará operación binaria.

### Ejemplo 1.1.

*Sea  $A$  el conjunto de los números naturales.*

*Si a cada par de números naturales se le asigna el número natural que corresponde a su suma se estará definiendo una operación binaria sobre  $A$ , pero si en lugar de asignar el correspondiente a la resta no se definirá una operación cerrada (para cada par de elementos de  $A$ ) y por lo tanto no será una operación binaria.*

*Tampoco se tendrá una operación binaria si se pretende asignar a cada par de naturales un natural cualquiera mayor que cualquiera de ellos: aquí, si bien el resultado será siempre natural, no estará unívocamente determinado*

Cuando tenemos conjuntos finitos podemos definir las operaciones por medio de tablas:  
por ejemplo, si  $A = \{a, b\}$

$*$	$a$	$b$
$a$	$b$	$a$
$b$	$b$	$a$

Veamos que *hace* esta operación:

$$a * a = b$$

$$a * b = a$$

$$b * a = b$$

$$b * b = a$$

Definida la operación binaria  $*$  sobre  $A$  se diremos que:

$*$  es **conmutativa** si, para todo  $a$  y  $b$  en  $A$ , resulta  $a * b = b * a$

$*$  es **asociativa** si, cualesquiera sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $A$ , resulta  $a * (b * c) = (a * b) * c$

$(A, *)$  tiene **elemento neutro** si existe en  $A$  un elemento  $e$  tal que para todo  $a$  en  $A$  valga que  $a * e = e * a = a$ .

Si  $(A, *)$  tiene un elemento neutro  $e$ , se dirá que un elemento  $a$  de  $A$  tiene **inverso** si existe  $a'$  en  $A$  tal que  $a * a' = a' * a = e$ .

### Propiedades de las operaciones (binarias)

Existen algunos resultados generales que sólo dependen de las propiedades que verifique la operación, esto es: para demostrarlas no se necesita especificar ni  $A$  ni la operación en particular sino sólo a las propiedades que cumple la operación.

- Si para una operación  $*$  en  $A$  existe un elemento neutro, éste es único.

*Supongamos que hay dos neutros,  $e_1$ ,  $e_2$  y veamos que son iguales*

*Como  $e_1$  es neutro,  $e_2 * e_1 = e_2$ . De la misma forma,  $e_1 * e_2 = e_1$  ya que  $e_2$  es neutro*

*Entonces:  $e_1 = e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_2$*

- Si para una operación asociativa  $*$  en  $A$  existe un elemento neutro  $e$  y un elemento del conjunto,  $a$ , tiene inverso  $a^{-1}$  entonces éste es único. *La demostración se deja como ejercicio*

- Si para una operación  $*$  asociativa en  $A$  existe un elemento neutro  $e$  y todo elemento tiene su inverso, entonces vale en  $A$  la llamada *propiedad cancelativa* :  $a * b = a * c \Rightarrow b = c$  (de modo similar,  $b * a = c * a \Rightarrow b = c$ )

*Suponemos que  $a * b = a * c$  (vamos a ver que  $b = c$ )*

*Como por hipótesis todo elemento de  $A$  tiene inverso por la operación  $*$ , operamos a cada lado de la igualdad con el inverso de  $a$ ,  $a'$ , que sabemos que existe*

*$a' * (a * b) = a' * (a * c)$ , y como la operación es asociativa,  $(a' * a) * b = (a' * a) * c$ .*

*Luego,  $e * b = e * c$  y entonces  $b = c$ .*

El nombre de una estructura algebraica  $(A, *)$  (conjunto  $A$  dotado de una operación  $*$ ) indica qué propiedades verifica la operación y permite asegurar que se cumplirán ciertos resultados, sin importar los elementos o la operación en particular de que se trate.

- Se dirá que  $(A, *)$  tiene estructura de **grupoide** si la operación  $*$  es una operación binaria.
- Se dirá que  $(A, *)$  tiene estructura de **semigrupo** si  $*$  es asociativa. Si además  $*$  es conmutativa se dirá un **semigrupo conmutativo**.
- Se dirá que  $(A, *)$  tiene estructura de **monoide** si  $*$  es asociativa y existe en  $A$  elemento neutro para  $*$ . Será **monoide conmutativo** si  $*$  es además conmutativa.
- Se dirá que  $(A, *)$  tiene estructura de **grupo** si  $*$  es asociativa, existe en  $A$  elemento neutro para  $*$  y cada elemento de  $A$  tiene inverso.  
Si  $*$  es además conmutativa se llamará **grupo conmutativo** (o **Abeliano**)

**Ejemplos 1.2.**    1. Los enteros con la multiplicación constituyen un monoide conmutativo.

2. Los racionales positivos con la multiplicación:  $(\mathbb{Q}^+, +)$  forman un grupo conmutativo

3. Las matrices cuadradas con el producto forman un monoide (no conmutativo). El neutro es la matriz Identidad

4. - Dado un conjunto  $C$ , el conjunto de partes de  $C$  con la operación unión,  $(P(C), \cup)$ , constituye un monoide conmutativo cuyo elemento neutro es el  $\emptyset$

- el conjunto de partes de  $C$  con la operación intersección,  $(P(C), \cap)$ , constituye un monoide conmutativo cuyo elemento neutro es  $C$

Sea  $(S, *)$  un semigrupo. Para cualquier  $a \in S$  definimos

$$a^1 = a$$

$$a^n = a * a^{n-1} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

**Observación:** Cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$  se indicará con  $a^n$  el resultado de operar  $a$  consigo mismo  $n$  veces, esto es  $a * a * \dots * a = a \cdot \dots \cdot a$

A partir de esto, es sencillo demostrar las leyes de los exponentes (y queda como ejercicio para la práctica) :

Dado un semigrupo  $(S, *)$ ,  $a \in S$  y  $m, n$  naturales, valen:

- $a^m * a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

## 2 Grupos

Como dijimos más arriba, consideraremos un conjunto no vacío  $G$ , sobre el que se ha definido una operación binaria asociativa  $*$ , para la cual existe un elemento neutro  $e \in G$ , y de modo tal que para cada elemento exista un inverso (en el conjunto).

Es común usar una notación especial cuando trabajamos con grupos. En lugar  $*$  se use simplemente  $\cdot$  (aunque no signifique multiplicación convencional, salvo que se lo aclare) y en ese caso el neutro se suele indicar 1 (sin que necesariamente signifique el número 1) y el inverso de  $a$  se indica  $a^{-1}$  (notación multiplicativa). También puede usarse una notación aditiva en cuyo caso la operación se indica con  $+$ , el neutro con 0 y el inverso de  $a$  con  $-a$  (tampoco  $+$  y 0 significan suma y el número 0, excepto que se lo aclare).

*En general, en las demostraciones usaremos notación multiplicativa por comodidad. Más aún, también omitiremos el punto y terminará escribiéndose, simplemente,  $ab$  en lugar de  $a \cdot b$*

A veces se da por sobrentendida la operación y se dice, haciendo abuso de lenguaje, que  $G$  es grupo, en lugar de decir que  $(G, *)$  lo es.

**Notación:** será muy útil la siguiente cuestión de notación (multiplicativa):

- Cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$  se indicará con  $a^n$  el resultado de operar  $a$  consigo mismo  $n$  veces, esto es  $a * a * \dots * a = a \cdot \dots a$
- $a^{-n}$  será el resultado de la operación  $a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1}$
- $(a^n)^{-1} = a^{-n}$

**Obs:** Se tiene, por definición,  $a^n * a^{-n}$ , por lo que obtenemos  $a^0 = e$

Por lo visto y demostrado antes, podemos asegurar que en cualquier grupo

- *el elemento neutro es único*
- *todo elemento tiene un único inverso*
- *valen las propiedades cancelativas*

También se verifica en todo grupo  $(G, \cdot)$  que:

1. Cualquiera sea  $a \in G$ ,  $(a^{-1})^{-1} = a$

*Para cualquier  $a \in G$ , existe  $a^{-1}$  tal que  $a.a^{-1} = e$  (por definición de inverso*

*Por otro lado, sabemos que  $(a^{-1})^{-1}$  es el inverso de  $a^{-1}$ , es decir  $(a^{-1})^{-1}.a^{-1} = e$*

*luego, y como el inverso es único, vale que  $(a^{-1})^{-1} = a$*

2. Cualesquiera sean  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

*Queremos probar que el inverso del producto es el producto de los inversos PERO con el orden de los factores cambiados*

*Nuevamente usaremos la definición de inverso y su unicidad, también que la operación es asociativa*

*por un lado,  $(ab)^{-1}.(ab) = e$  pero por otro, si hacemos  $(ab).(b^{-1}a^{-1})$  y nos devuelve el neutro, como los inversos son únicos nos quedará que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$*

*$(ab).(b^{-1}a^{-1}) = a(b.b^{-1})a^{-1} = a.e.a^{-1} = e$ , como queríamos mostrar*

**Teorema 2.1.** Si  $(G_1, *_1), (G_2, *_2), \dots, (G_m, *_m)$  son grupos, entonces  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$  es un grupo con la operación  $*$  definida por

$$(a_1, \dots, a_m) * (b_1, \dots, b_m) = (a_1 *_1 b_1, \dots, a_m *_m b_m)$$

La demostración queda como ejercicio.

**Definición 2.2.** Un grupo  $G$  se dice que es **cíclico** si existe  $a \in G$  tal que para todo elemento  $b \in G$  existe un entero  $k$  tal que  $b = a^k$ .

En este caso decimos que  $a$  es un **generador** de  $G$  y escribimos  $G = \langle a \rangle$

**Ejemplos 2.3.** • El grupo de los números enteros con la suma usual es un grupo cíclico infinito, generado por el número **1**

- El grupo  $(\mathbb{Z}_4, +)$  es un grupo cíclico de orden 4 (tiene 4 elementos), generado por  $\bar{1}$ .  
Observar que  $\bar{3}$  es otro generador, pero por el contrario  $\bar{2}$  no genera al grupo.

**Teorema 2.4.** Todo grupo cíclico es abeliano

La demostración queda como ejercicio



## 2.1 Subgrupos

**Definición 2.5.** Dado un grupo  $(G, *)$  y dado  $H \subset G$ , si  $(H, *)$  constituye en sí mismo un grupo se dice que es un **subgrupo** de  $G$ .

Observar que es la misma operación  $*$

**Ejemplo 2.6.** Sabemos que si sumamos dos números pares obtenemos un número par, entonces podemos pensar que si nuestro grupo son los enteros con la suma usual  $(\mathbb{Z}, +)$  el subconjunto  $H = \{\text{enteros pares}\}$  ya que además el  $0 = 2 \cdot 0$ , es decir, tiene neutro y el opuesta (para la suma) de cualquier par es un número par. Obviamente la suma sigue siendo asociativa. Queda para pensar si vale lo mismo para el subconjunto de los enteros impares.

Como se ve en el ejemplo, al heredar la operación del grupo se heredan sus propiedades. Es decir, la asociatividad de  $*$  en  $H$  está garantizada pues se cumple para todos los elementos de  $G$ , en particular se cumple para los de  $H$ .

También si  $*$  es conmutativa en  $G$  será conmutativa en  $H$ .

Luego, para que  $H$  sea subgrupo (o sea, un grupo) sólo será necesario que:

- $e \in H$ , el elemento neutro de  $*$  en  $G$  debe estar en  $H$  (recordemos que el neutro es único)
- $a, b \in H \rightarrow a * b \in H$ , la operación debe ser cerrada en  $H$  (era cerrada en  $G$ )
- $a \in H \rightarrow a^{-1} \in H$ , cada elemento de  $H$  tiene su inverso en  $H$  (sabemos que el inverso existe pero en  $G$ , hay que asegurar que esté en  $H$ )

Si bien con esta idea ya ahorramos pasos se puede enunciar aún en forma más concisa la condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de un grupo resulte un subgrupo del mismo:

**Proposición 2.7.** *Dado un grupo  $(G, *)$ , un subconjunto  $H \subset G$  resultará un subgrupo de  $G$  si y sólo si :*

- $e \in H$
- si  $a, b \in H$  entonces  $a * b^{-1} \in H$

***Demostración:***

*vamos a usar notación multiplicativa en lugar de  $*$  en la demostración* Supongamos primero que  $H$  es un subgrupo.

Como es un grupo contiene al neutro, que al ser único debe ser el mismo neutro de  $G$ , ya tenemos entonces que  $e \in H$ .

Ahora probemos la segunda condición, sean  $a, b \in H$ , como estamos suponiendo que es un subgrupo ambos elementos tendrán su inverso en  $H$ , en particular  $b^{-1} \in H$ , luego como la operación es cerrada en el subgrupo,  $ab^{-1} \in H$ .

Veamos que las condiciones son suficientes. Ya sabemos que la asociatividad se cumple en  $H$  por cumplirse en  $G$ . El neutro está en  $H$  por la primera condición de la hipótesis. Falta ver que la operación es cerrada en  $H$  y que todo elemento tiene a su inverso en  $H$  (que ya sabemos que existe y está en  $G$ ) .

Comencemos viendo que todo elemento tiene inverso en  $H$ . Sea  $b \in H$ , como por hipótesis  $e \in H$  y vale la segunda condición,  $eb^{-1} \in H$ , pero esto muestra que el inverso de  $b$  está en  $H$  como queríamos demostrar.

Por último, sean  $a, b \in H$ , recién mostramos que ambos elementos tendrán a sus inversos en  $H$ , en particular  $b$ . Luego tenemos  $a$  y  $b^{-1}$  en  $H$  y como vale la segunda condición,  $a(b^{-1})^{-1} \in H$  pero  $a(b^{-1})^{-1} = ab$ , concluyendo que la operación es cerrada en  $H$ .

**Teorema 2.8.** *Si  $(G, *)$ , es un grupo cíclico y  $(H, *)$  es un subgrupo de  $(G, *)$ , entonces  $(H, *)$  es cíclico.*

## 2.2 Morfismos entre grupos

**Definición 2.9.** Dados dos grupos  $(G_1, *)$  y  $(G_2, \otimes)$  se dirá que una función  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un **morfismo de grupos** si y sólo si “respeta” las operaciones, en la siguiente forma:

$$f(a * b) = f(a) \otimes f(b) \text{ para todo } a, b \in G_1$$

(esto es: cuando se opera en  $G_1$ , las correspondientes imágenes resultan operadas en  $G_2$ ).

Un morfismo que es además inyectivo recibe el nombre de **monomorfismo**.

Un morfismo sobreyectivo se denomina **epimorfismo** y si es biyectivo, **isomorfismo**.

**Ejemplo 2.10.** Sean los grupos  $(G_1, *) = (R, +)$  y  $(G_2, \otimes) = (R^+, \cdot)$  (los reales con la suma convencional y los reales no nulos con el producto usual).

La función exponencial  $f(x) = e^x$  es un morfismo de grupos, ya que para cualquier par de reales  $x, y$  se cumple que  $f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$ .

El “respeto” por las operaciones que se menciona en la definición determina que se verifiquen las siguientes correspondencias entre elementos neutros e inversos:

**Proposición 2.11.** Sean los grupos  $(G_1, *)$  y  $(G_2, \otimes)$  y  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un morfismo entre ellos, entonces  $f(e_1) = e_2$  (siendo  $e_1$  y  $e_2$  los neutros respectivos a cada grupo).

Además para cualquier  $a \in G_1$ ,  $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ .

Cualquiera sea  $a \in G_1$  vale que  $a * e_1 = a$ , aplicando el morfismo tenemos que  $f(a) \otimes f(e_1) = f(a * e_1) = f(a)$ , claramente  $f(e_2)$  actúa como un neutro para  $G_2$ , entonces por unicidad del neutro  $f(e_1) = e_2$ .

Por otro lado, para cualquier elemento  $a \in G_1$ , sabemos que existe el inverso en el grupo y se cumple que  $a * a^{-1} = e_1$ , aplicando el morfismo  $f(a) \otimes f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) = f(e_1) = e_2$ , se ve que  $f(a^{-1})$  “juega” de inverso de  $f(a)$  en  $G_2$ , pero como el inverso en un grupo es único,  $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ .

**Definición 2.12.** Sean los grupos  $(G_1, *)$  y  $(G_2, \otimes)$  y  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un morfismo entre ellos.

Se denomina **núcleo** del morfismo  $f$  al conjunto  $Nu(f) = \{a \in G_1 : f(a) = e_2\}$  es decir al subconjunto del dominio formado por todos los elementos cuya imagen es el neutro del codominio.

Se denomina **imagen** del morfismo  $f$  al conjunto  $Im(f) = \{b \in G_2 : \exists a \in G_1, f(a) = b\}$

**Ejemplo 2.13.** Recordando el ejemplo anterior de la función exponencial, es fácil ver que el único elemento del núcleo en ese caso es el neutro del dominio (ya que el único real tal que  $e^x = 1$  es el 0). Por otro lado, como el codominio eran los reales positivos basta tomar logaritmo para ver que la imagen es todo el conjunto.

**Proposición 2.14.** Sean los grupos  $(G_1, *)$  y  $(G_2, \otimes)$ .

Si  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un morfismo de grupos entonces  $Nu(f)$  e  $Im(f)$  son subgrupos de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente

Veamos el caso del núcleo (queda como ejercicio la demostración para la imagen)

Obviamente  $Nu(f)$  es un subconjunto del grupo  $G_1$ , usemos la proposición anteriormente probada para mostrar que es un subgrupo.

Como siempre vale que  $f(e_1) = e_2$ , el neutro de  $G_1$  pertenece al núcleo.

Sólo nos queda mostrar que dados  $a, b \in Nu(f)$  el operado  $a * b^{-1}$  quedará en  $Nu(f)$

(es decir,  $f(a * b^{-1}) = e_2$ )

Como  $a, b \in Nu(f)$  entonces  $f(a) = e_2 = f(b)$ . Ahora, como  $f$  es morfismo,

$$f(a * b^{-1}) = f(a) \otimes f(b^{-1}) = f(a) \otimes (f(b))^{-1} = e_2 \otimes (e_2)^{-1} = e_2 \otimes e_2 = e_2$$