Vector aleatorio

3. Se debe seleccionar un comité de tres personas elegidas al azar de un grupo constituido por cuatro docentes y cinco estudiantes. Sea X_1: número de docentes en el comité y X_2: número de estudiantes en el comité.

a) Determine la distribución de probabilidad conjunta de X_1 y X_2.
b) Determine las distribuciones marginales de X_1 y X_2.
c) ¿Son X_1 y X_2 independientes?
d) Calcule $P(X_1 = 1/X_2 \geq 1)$.

X_1:"número de docentes en el comité"
X_2:"número de estudiantes en el comité"
Primero calcularemos las distribuciones marginales y luego la de probabilidad conjunta.

b) Las distribuciones marginales de X_1 y X_2 son hipergeométricas (¿por qué?), es decir
$X_1 \sim H(9,4,3)$

$$p_{X_1}(x_1) = \frac{\binom{4}{x_1}\binom{5}{3-x_1}}{\binom{9}{3}} \qquad x_1 = \overline{0,3}$$

$X_2 \sim H(9,5,3)$

$$p_{X_2}(x_2) = \frac{\binom{5}{x_2}\binom{4}{3-x_2}}{\binom{9}{3}} \qquad x_2 = \overline{0,3}$$

Luego

$$p_{X_1}(0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{1 \cdot 10}{84} = \frac{5}{42}$$
$$p_{X_1}(1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{84} = \frac{4 \cdot 10}{84} = \frac{10}{21}$$
$$p_{X_1}(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{84} = \frac{6 \cdot 5}{84} = \frac{5}{14}$$
$$p_{X_1}(3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}}{84} = \frac{4 \cdot 1}{84} = \frac{1}{21}$$

$$p_{X_2}(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}}{84} = \frac{1 \cdot 4}{84} = \frac{1}{21}$$
$$p_{X_2}(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{84} = \frac{5 \cdot 6}{84} = \frac{5}{14}$$
$$p_{X_2}(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{84} = \frac{10 \cdot 4}{84} = \frac{10}{21}$$
$$p_{X_2}(3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{84} = \frac{1 \cdot 10}{84} = \frac{5}{42}$$

a)
Sabemos que $X_1+X_2=3$, por lo tanto la distribución de probabilidad conjunta
$p(x_1, x_2) = 0 \ \forall \ x_1, x_2 / \ x_1 + x_2 \neq 3$

Armamos una tabla completando con 0 donde $x_1+x_2 \neq 3$ y colocando las distribuciones marginales en la última columna y fila. Teniendo en cuenta la definición de probabilidad marginal, podemos completar las celdas faltantes de la tabla.

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	3	$p_{X_2}(x_2)$
0	0	0	0	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$
1	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{5}{14}$
2	0	$\frac{10}{21}$	0	0	$\frac{10}{21}$
3	$\frac{5}{42}$	0	0	0	$\frac{5}{42}$
$p_{X_1}(x_1)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

Finalmente, podemos expresar la distribución de probabilidad conjunta p(x_1,x_2) como

$$\mathrm{p}(x_1, x_2) = 0 \ \forall\, x_1, x_2 / \ x_1 + x_2 \neq 3$$

$$\mathrm{p}(3,0) = \frac{1}{21} \qquad \mathrm{p}(2,1) = \frac{5}{14} \qquad \mathrm{p}(1,2) = \frac{10}{21} \qquad \mathrm{p}(0,3) = \frac{5}{42}$$

c)Para que X_1 y X_2 sean independientes, debe cumplirse alguna de las tres condiciones vistas en la teoría para todos los valores posibles de X_1 y X_2.

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{p}(3,0) = \frac{1}{21} \\ \mathrm{p}_{X_1}(3)\, \mathrm{p}_{X_2}(0) = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{441} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{p}(3,0) \neq \mathrm{p}_{X_1}(3)\, \mathrm{p}_{X_2}(0) \Rightarrow X_1 \text{ y } X_2 \text{ no son independientes}$$

Podría haberse probado la no independencia evaluando esta condición con cualquier otro valor de X_1 y X_2.

d)

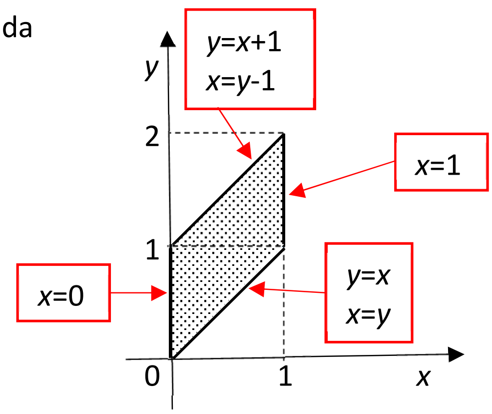
$$\mathrm{P}(X_1 = 1 \,/\, X_2 \geq 1) = \frac{\mathrm{P}(X_1 = 1 \ \cap \ X_2 \geq 1)}{\mathrm{P}(X_2 \geq 1)} = \frac{\mathrm{p}(1,1) + \mathrm{p}(1,2) + \mathrm{p}(1,3)}{\mathrm{p}_{X_2}(1) + \mathrm{p}_{X_2}(2) + \mathrm{p}_{X_2}(3)} = \frac{1}{2}$$

5. Sea f la función densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y), dada por

$$\mathrm{f}(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } 0 < x < 1, \ x < y < x + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de *k*.
b) Obtenga las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.
c) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y.

En el gráfico de la derecha, el área sombreada representa los valores posibles de *x* e *y*. También se muestran las ecuaciones de las rectas que limitan el área sombreada. Este gráfico de coordenadas es de mucha utilidad en el momento de resolver las integrales y determinar los extremos de integración.



a) Determine el valor de *k*.

Para que f(*x*,*y*) sea una función de densidad de probabilidad conjunta, debe cumplir la condición de cierre.

$$\int_0^1 \int_x^{x+1} \mathrm{f}(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_x^{x+1} k\ dy\ dx = k \int_0^1 (y|_x^{x+1})\ dx = k \int_0^1 dx = k \implies k = 1$$

Notar que la integral externa se evalúa sobre la variable *x*, es decir, en "sentido horizontal" si nos referimos al gráfico de coordenadas. *x* varía entre 0 y 1.
La integral interna se evalúa sobre la variable *y*, es decir, en "sentido vertical" si nos referimos al gráfico de coordenadas. *y* varía entre las rectas *y*=*x* e *y*=*x*+1.

b) Obtenga las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.
Para calcular la distribución marginal $\mathrm{f_X}(x)$ se debe integrar sobre todos los valores de *y*, es decir, en "sentido vertical" si nos referimos al gráfico de coordenadas.

$$\mathrm{f_X}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x,y)dy = \int_x^{x+1} dy = 1$$

Finalmente

$$\mathrm{f_X}(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para calcular la distribución marginal $\mathrm{f_Y}(y)$ se debe integrar sobre todos los valores de *x*, es decir, en "sentido horizontal" si nos referimos al gráfico de coordenadas. Por lo tanto, debemos separar el cálculo en dos partes.
Si $0 < y < 1 \Rightarrow 0 < x < y$

$$\mathrm{f_Y}(y) = \int_0^y dx = y$$

Si $1 < y < 2 \Rightarrow y - 1 < x < 1$

$$\mathrm{f_Y}(y) = \int_{y-1}^1 dx = 2 - y$$

Finalmente

$$\mathrm{f_Y}(y) = \begin{cases} y & 0 < y < 1 \\ 2 - y & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Calcule el coeficiente de correlación ρ_{XY}.

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{(\mathrm{V(X)\ V(Y)})^{1/2}} \qquad \mathrm{cov(X,Y) = E(X\ Y) - E(X)\ E(Y)}$$

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \mathrm{f_X}(x)\ dx = \int_{0}^{1} x\ dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E(Y)} = \int_{0}^{1} y\ y\ dy + \int_{1}^{2} y\ (2-y)\ dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1$$

$$\mathrm{E(X\ Y)} = \iint_{\mathrm{R_{X,Y}}} x\ y\ \mathrm{f}(x,y)\ dx\ dy = \int_{0}^{1}\int_{x}^{x+1} x\ y\ dy\ dx = \int_{0}^{1} x \int_{x}^{x+1} y\ dy\ dx$$

Calculamos la integral interna

$$\int_{x}^{x+1} y\ dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+1} = \frac{((x+1)^2 - x^2)}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 1 - x^2\right) = \frac{2x+1}{2}$$

Luego calculamos la integral externa

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{2}\ (2x+1)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\ (2x^2+x)\ dx = \frac{1}{2}\left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Luego: E(X Y)=7/12 cov(X,Y)=7/12-1/2=1/12

Para calcular ρ_{XY} nos resta determinar V(X) y V(Y)

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{E(Y^2)} = \int_0^1 y^2\ y\ dy + \int_1^2 y^2\ (2-y)\ dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 + \left[2\frac{y^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{y^4}{4}\right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \left(\mathrm{E(X)}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\mathrm{V(Y)} = \mathrm{E(Y^2)} - \left(\mathrm{E(Y)}\right)^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$

Finalmente

$$\rho_{\mathrm{XY}} = \frac{\mathrm{cov(X,Y)}}{(\mathrm{V(X)\ V(Y)})^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6. Un sistema electrónico opera con dos tipos de componentes. Sean T_1 y T_2 las variables aleatorias tiempo de duración (en horas) de las componentes de tipo 1 y 2 respectivamente. La función densidad de probabilidad conjunta del vector (T_1, T_2) es

$$f(t_1,t_2)=\begin{cases}\frac{t_1}{8}e^{-\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} & \text{si } 0<t_1,\ 0<t_2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a) Determine $P(T_1 \geq 1, T_2 \geq 2)$. Nota: la notación anterior es equivalente a $P(T_1 \geq 1 \cap T_2 \geq 2)$.
b) Calcule la probabilidad de que una componente de tipo 2 tenga una duración mayor que 2 horas.

Definimos las variables aleatorias
T_1:"duración en horas de componente tipo 1"
T_2:"duración en horas de componente tipo 2"

$$f(t_1,t_2)=\begin{cases}\frac{t_1}{8}e^{-\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} & \text{si } 0<t_1,\ 0<t_2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a)

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_1 \geq 1, \mathrm{T}_2 \geq 2) = \int_1^{\infty}\int_2^{\infty} \frac{t_1}{8}\ e^{-\frac{t1+t2}{2}}\ dt_1\ dt_2 = \frac{1}{8}\int_1^{\infty} t_1\ e^{-\frac{t_1}{2}} dt_1\ \int_2^{\infty} e^{-\frac{t_2}{2}}\ dt_2$$

Para calcular la integral de t_1, usaremos la técnica de integración por partes

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

Identificando a *u* y *dv*

$$u = t_1 \Rightarrow du = dt_1 \qquad dv = e^{-\frac{t_1}{2}}\ dt_1 \Rightarrow v = -2\,e^{-\frac{t_1}{2}}$$

Luego

$$\int t_1\ e^{-\frac{t_1}{2}}\ dt_1 = -2t_1e^{-\frac{t1}{2}} + 2\int e^{-\frac{t1}{2}}\ dt_1 = -2e^{-\frac{t_1}{2}}\ (t_1+2)$$

Finalmente

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_1 \geq 1\ \cap\ \mathrm{T}_2 \geq 2) = \frac{1}{8}\int_1^{\infty} t_1\ e^{-\frac{t_1}{2}}\, dt_1\ \int_2^{\infty} e^{-\frac{t_2}{2}}\, dt_2 = \frac{3}{4}\ e^{-\frac{1}{2}}\ 2\ e^{-1} = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} \cong 0{,}3347$$

b) Calcule la probabilidad de que una componente de tipo 2 tenga una duración mayor que 2 horas.

Debemos calcular la densidad de probabilidad marginal de T_2

$$\mathrm{f}_{\mathrm{T}_2}(t_2) = \int_0^\infty \mathrm{f}(t_1, t_2)\ dt_1 = \int_0^\infty \frac{t_1}{8}\ e^{-\frac{t_1+t_2}{2}} dt_1 = \frac{e^{-\frac{t_2}{2}}}{8} \int_0^\infty t_1 e^{-\frac{t_1}{2}} dt_1 =$$

$$= \frac{e^{-t_2}}{8} \left[-2t_1 e^{-\frac{t_1}{2}} - 4e^{-\frac{t_1}{2}}\right]_0^\infty = \frac{e^{-\frac{t_2}{2}}}{2}$$

Finalmente

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}_2 > 2) = \int_2^\infty \mathrm{f}_{\mathrm{T}_2}(t_2) \cdot dt_2 = \int_2^\infty \frac{e^{-\frac{t_2}{2}}}{2} dt_2 = \frac{1}{2}(-2) \left[e^{-\frac{t_2}{2}}\right]_2^\infty = e^{-1}$$

7. Los tiempos en horas T_a y T_b que dos estudiantes A y B demoran en resolver un problema son variables aleatorias independientes con distribución exponencial y esperanza 0,5 hs. Calcule la probabilidad de que el estudiante A demore a lo sumo una hora y el estudiante B demore como máximo 45 minutos.

Definimos las variables aleatorias
T_a:"tiempo en que el estudiante A demora en hacer un ejercicio"
T_b:"tiempo en que el estudiante B demora en hacer un ejercicio"

Se pide calcular $P(T_a<1, T_b<0{,}75)$ que es lo mismo que $P(T_a<1 \cap T_b<0{,}75)$.

Del enunciado sabemos que
$E(T_a)=0{,}5$ $E(T_b)=0{,}5$

T_a~Exp(2)

$$\mathrm{f}_{\mathrm{T_a}}(t_\mathrm{a}) = \begin{cases} 2e^{-2t_\mathrm{a}} & \text{si } t_\mathrm{a} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

T_b~Exp(2)

$$\mathrm{f}_{\mathrm{T_b}}(t_\mathrm{b}) = \begin{cases} 2e^{-2t_\mathrm{b}} & \text{si } t_\mathrm{b} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como sabemos que T_a y T_b son independientes, la distribución de probabilidad conjunta es

$$\mathrm{f}(t_\mathrm{a}, t_\mathrm{b}) = \mathrm{f}_{\mathrm{T_a}}(t_\mathrm{a}) \cdot \mathrm{f}_{\mathrm{T_b}}(t_\mathrm{b})$$

Por lo tanto

$$\mathrm{f}_{(t_a,t_b)} = \begin{cases} 4e^{-2(t_a+t_b)} & t_a > 0, t_b > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente

$$\mathrm{P}(\mathrm{T_a} < 1, \mathrm{T_b} < \frac{3}{4}) = 4 \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{4}} e^{-2(t_a+t_b)}\ dt_a\ dt_b = 4 \int_0^1 e^{-2t_a}\ dt_a \int_0^{\frac{3}{4}} e^{-2t_b}\ dt_b =$$

$$= 4 \left[\frac{e^{-2t_a}}{-2}\right]_0^1 \left[\frac{e^{-2t_b}}{-2}\right]_0^{\frac{3}{4}} = (1 - e^{-2})(1 - e^{-\frac{3}{2}}) \approx 0,6717$$

Otra forma de resolver el problema:
Como sabemos que T_a y T_b son independientes, es posible calcular $P(T_a<1)$ y $P(T_b<0,75)$ mediante sus distribuciones marginales y luego multiplicar ambos resultados.

8. Se escoge al azar un punto de coordenadas reales en el triángulo limitado por $y = 0$, $x = 0$, $y = 2n - x$.
Suponiendo que todos los puntos tienen la misma probabilidad de ser elegidos, determine
a) la distribución conjunta de las coordenadas (X, Y)
b) las distribuciones marginales de X e Y
c) la distribución condicional de X dado Y=y

En este ejercicio se recomienda hacer un gráfico cartesiano similar al del ejercicio 5.
a) Del enunciado, sabemos que la función de distribución de probabilidad conjunta de X e Y es uniforme. Luego, planteamos la ecuación de f(x,y)

$$\mathrm{f}(x,y) = \begin{cases} k & 0 < x < 2n, \quad 0 < y < 2n - x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como f(x,y) es una f.d.p. conjunta, debe cumplir con la condición de cierre.
Entonces

$$\int_0^{2n} \int_0^{2n-x} k\ dy\ dx = k \int_0^{2n} \int_0^{2n-x}\ dy\ dx = k \int_0^{2n} [y]_0^{2n-x}\ dx =$$

$$k \int_0^{2n} (2n - x)\ dx = k \left[2nx - \frac{x^2}{2}\right]_0^{2n} = k(4n^2 - \frac{4n^2}{2}) = \frac{k}{2} 4n^2 = 2kn^2$$

Para cumplir con la condición de cierre debe ser

$$2kn^2 = 1 \implies k = \frac{1}{2n^2}$$

Finalmente

$$\mathrm{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2n^2} & 0 < x < 2n, \quad 0 < y < 2n - x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) las distribuciones marginales de X e Y
La distribución marginal de X es $f_X(x)$ y calculamos la integral

$$\mathrm{f_X}(x) = \int_0^{2n-x} \mathrm{f}(x,y)\; dy = \int_0^{2n-x} \frac{1}{2n^2}\; dy = \frac{1}{2n^2}(2n-x)$$

Luego

$$\mathrm{f_X}(x) = \begin{cases} \frac{2n-x}{2n^2} & 0 < x < 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para el caso de la distribución marginal $\mathrm{f_Y}(y)$ calculamos

$$\mathrm{f_Y}(y) = \int_0^{2n-y} \mathrm{f}(x,y)\; dx = \int_0^{2n-y} \frac{1}{2n^2}\; dx = \frac{2n-y}{2n^2}$$

Luego

$$\mathrm{f_Y}(y) = \begin{cases} \frac{2n-y}{2n^2} & 0 < y < 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A su vez, las distribuciones de probabilidad marginales recién calculadas deben ambas cumplir la condición de cierre, es decir

$$\int_0^{2n} \mathrm{f_X}(x)\, dx = 1 \qquad\qquad \int_0^{2n} \mathrm{f_Y}(y)\, dy = 1$$

c) la distribución condicional de X dado Y=*y*

Para calcular la distribución condicional usamos la definición

$$\mathrm{f}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}=y}(x) = \frac{\mathrm{f}(x,y)}{\mathrm{f_Y}(y)}$$

$$\mathrm{f}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}=y}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-y} & 0 < y < 2n, 0 < x < 2n-y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El enunciado no lo pide, pero podemos calcular de manera similar $\mathrm{f}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}=x}(y)$

$$\mathrm{f}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}=x}(x) = \frac{\mathrm{f}(x,y)}{\mathrm{f_X}(x)}$$

$$\mathrm{f}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-x} & 0 < x < 2n, 0 < y < 2n-x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Suma de variables aleatorias

10. Un aparato de televisión puede tener dos tipos de roturas: debido a falla de transistores o debido a la falla de condensadores. Ambas fuentes de rotura son independientes. El número de roturas debido a falla de transistores durante los dos primeros años de utilización del aparato es

una v.a. que sigue una ley de Poisson con promedio 1. El número de roturas debido a la falla de condensadores, durante el mismo período, sigue una ley de Poisson con promedio 2. Calcule la probabilidad de que, en el primer año de utilización del aparato, éste tenga exactamente 2 roturas.

En este problema debemos analizar dos v.a.d. con distribución de Poisson. Como el parámetro de cada v.a. está referido a un intervalo de tiempo de dos años, pero lo que se pide es calcular en un período de tiempo diferente, definiremos la colección de variables asociada a cada proceso de Poisson.
Entonces, definimos las colecciones de variables
T_t:"número de roturas debido a falla de transistores durante los primeros *t* años de uso"
C_t:"número de roturas debido a falla de condensadores durante los primeros *t* años de uso"

De acuerdo al enunciado y recordando los conceptos de teoría de procesos de Poisson, las esperanzas de C_2 y T_2 son
$E(T_2)=1=\lambda_T \,.\, 2$
$E(C_2)=2=\lambda_C \,.\, 2$
donde λ_T es la tasa de roturas debido a falla de transistores (roturas por año) y λ_C es la tasa de roturas debido a falla de condensadores (roturas por año).
Luego resulta $\lambda_T = 1/2$ y $\lambda_C = 1$.
Entonces
$T_t \sim Po(1/2\ t)$ y $E(T_t)=1/2 \,.\, t$
$C_t \sim Po(1\ t)$ y $E(C_t)=t$

Definimos una nueva v.a. que representa la totalidad de roturas en un período de tiempo
X_t:"número de roturas durante los primeros *t* años de uso"
$X_t = T_t + C_t$

Como T_t y C_t son independientes, por propiedad reproductiva de distribuciones de Poisson
$X_t \sim Po(\lambda_X\, t)$ donde $\lambda_X\, t = \lambda_T\, t + \lambda_C\, t = 3/2\ t$

El problema pide calcular la probabilidad de que ocurran 2 roturas durante el primer año de uso. Entonces, analizamos la variable X_1.
$X_1 \sim Po(3/2)$

$$P(X_1 = 2) = e^{-\left(\frac{3}{2}\,\cdot\,2\right)}\ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} \cong 0{,}056$$

11. Ciertos elementos de un circuito eléctrico se protegen contra el exceso de voltaje por medio de dos relevadores R_1 y R_2 que se ajustan para ser descargados en períodos X_1 y X_2 respectivamente, después que comienza el exceso de voltaje. Estos períodos de descarga varían debido a pequeños factores incontrolables, por lo que se puede suponer que X_1 y X_2 son v.a. normales independientes con tiempos medios de descarga $\mu_1 = 1$ s y μ_2, y varianzas $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0{,}1$ s^2. Determine μ_2 de manera tal que la probabilidad de que R_2 sea descargada antes que R_1 sea a lo sumo 0,001.

Definimos las variables aleatorias
X_1:"tiempo de descarga de R_1"
X_2:"tempo de descarga de R_2"

Sabemos que X_1 y X_2 son v.a. independientes y
$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ $\mu_1=1$ s $\sigma_1^2=0{,}1$ s^2
$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ $\mu_2=$¿? $\sigma_2^2=0{,}1$ s^2

El problema pide calcular
$P(X_2<X_1)=P(X_2-X_1<0)=P(Y<0)\leq 0{,}001$ completar
Luego, analizamos la variable aleatoria $Y= X_2-X_1$.

12. Sean $X_1,X_2,\ldots,X_n$, n variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo (0,1). Encuentre la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria
$Z= X_1+X_2+\ldots+X_{60}$.

Sabemos que
$X_i \sim U[0,1]$ con $i=1,\ldots,60$

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x_i \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad F_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

completar

$E(X_i)=1/2$ $V(X_i)=1/12$

Como $X_1,X_2,\ldots,X_n$ son independientes y $E(X_i)$ y $V(X_i)$ son finitas para todo $i=1,\ldots,60$, podemos aplicar el teorema central del límite y concluir que la variable $Z= X_1+X_2+\ldots+X_{60}$ tiene una distribución aproximadamente normal de media μ y varianza σ^2.

Luego

$$Z = \sum_{i=1}^{60} X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = E(Z) = \sum_{i=1}^{60} E(X_i) = 60\,.\frac{1}{2} = 30$$

$$\sigma^2 = V(Z) = \sum_{i=1}^{60} V(X_i) = 60\,.\frac{1}{12} = 5$$

Finalmente

$$f_Z(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5}} \quad e^{-\frac{(z-30)^2}{5}}$$

$$R_Z = \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq z \leq 60\}$$

¿Por qué el recorrido de Z no es todo el conjunto de los números reales?

15. Un sistema está formado por 100 componentes que funcionan independientemente. La probabilidad de que cualquier componente falle durante el período de operación es igual a 0,10. Para que funcione el sistema completo, deben funcionar al menos 85 componentes. Calcule la probabilidad de que el sistema funcione.
En este problema conviene usar el teorema central del límite para hallar la solución aproximada.

16. El consumo de combustible en litros de un ómnibus que realiza el trayecto Rosario-Santa Fe es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 20 litros y desviación estándar 2 litros. Calcule la probabilidad de que 640 litros resulten insuficientes para realizar 30 viajes.

En este problema nos interesa analizar las v.a.c.
X_i:"consumo de combustible en el trayecto *i*"
Y:"consumo total de combustible en 30 trayectos"

$$\text{Sabemos que } \mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{30} \mathrm{X}_i$$

Como el consumo en cada trayecto es independiente del consumo en el resto de los trayectos, y que la distribución de probabilidad en cada trayecto es normal, aplicando la propiedad reproductiva de la distribución normal … Completar.

19. Una empresa dedicada a la venta de repuestos sabe que la demanda diaria D varía aleatoriamente con la siguiente distribución de probabilidad

D	0	1	2
P(D=*d*)	0,25	0,5	0,25

Desde el momento en que se hace el pedido hasta que el mismo ingresa al stock transcurren 90 días. Determine cuántas unidades deben tenerse en existencia en momento de hacer el pedido si se quiere que la probabilidad de que la demanda durante los 90 días supere la existencia sea 0,05.
Definimos las variables
D_i:"demanda en el día *i*"
D_T:"demanda total en un período de 90 días"

$$\text{La demanda total será } \mathrm{D_T} = \sum_{i=1}^{90} \mathrm{D}_i$$

Podemos calcular: $E(D_i)=\mu_i=\ldots$ y $V(D_i)=\sigma_i^2=\ldots$. Considerando que la demanda de cada día es independiente de la demanda del resto de los días y que $E(D_i)$ y $V(D_i)$ son finitas para todo $i=1,\ldots,90$, podemos aplicar el teorema central del límite y concluir que la variable D_T tiene una distribución aproximadamente normal de media μ y varianza σ^2.
$\mu=\ldots=90$
$\sigma^2=\ldots=45$
$D_T \sim N(90, 45)$

Sea S:"unidades en existencia"
de acuerdo al enunciado, la probabilidad que la demanda total supere la existencia
$\mathrm{P}(\mathrm{D}_T > \mathrm{S}) = 0{,}05 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{D}_T < \mathrm{S}) = 0{,}95 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathrm{S} \gtrsim 101$