Práctica 7
Cadenas de Markov

A continuación se presentan posibles resoluciones de ejercicios seleccionados de la Práctica 7.

Ejercicio 8

La matriz de transición P es la siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nomenclamos E al conjunto de estados. Es decir, $E = \{a, b, c, d, e, f\}$

a)

A partir del grafo hallamos el conjunto cerrado al cual pertenece cada uno de los estados.

- $C_a = C_b = \{a, b\}$
- $C_c = C_d = \{c, d\}$
- $C_e = \{e, a, b\}$
- $C_f = \{f, e, a, b\}$

Luego, como C_a y C_c son conjuntos cerrados irreducibles finitos, podemos deducir que *a, b, c* y d son estados positivamente recurrentes, mientras que e y f son estados transitorios. A partir de esto, también obtenemos que la cadena no es irreducible y, por lo tanto, tampoco transitoria ni recurrente ni ergódica, ni periódica ni aperiódica.

Además, tenemos que $P(d,d) = 1/2 > 0$. Luego, d es aperiódico y, por lo tanto, c también lo es.

A través del grafo también se puede deducir que a y b son periódicos de período 2.

b)

Nomenclamos $F(i,j)$ a la probabilidad de alcanzar al estado j partiendo desde el estado i en un número finito de pasos.

Como el estado a es recurrente y $C_a = \{a, b\}$ tenemos que $F(a,a) = F(a,b) = 1$ y $F(a,j) = 0$, $\forall j \in \{c, d, e, f\}$

De forma análoga obtenemos lo siguiente:
$F(b, b) = F(b, a) = 1$ y $F(b, j) = 0, \forall j \in \{c, d, e, f\}$

$F(c,c) = F(c,d) = 1$ y $F(c,j) = 0, \forall j \in \{a,b,e,f\}$
$F(d,c) = F(d,c) = 1$ y $F(d,j) = 0, \forall j \in \{a,b,e,f\}$

Hasta ahora, la matriz F nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Nos restan analizar las entradas *F(i,j)*, donde i es un estado transitorio.

Nomenclamos *R(i,j)* al número de visitas promedio al estado j que la cadena realiza cuando parte desde i.

Dado que e y f son transitorios, sabemos que:

- $F(e,e) = 1 - 1/R(e,e)$
- $F(e,f) = R(e,f)/R(e,e)$
- $F(f,f) = 1 - 1/R(f,f)$
- $F(f,e) = R(f,e)/R(f,f)$

Podemos definir la matriz P' como sigue:

$$\begin{array}{c} \\ C_a \\ C_c \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_a & C_c & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & q_{11} & q_{12} \\ b_{21} & b_{22} & q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Los valores pertenecientes a la matriz Q se determinan a partir de P, eliminando filas y columnas correspondientes a estados recurrentes. Por lo tanto Q nos queda como sigue:

$$\begin{array}{c} \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Luego, calculamos S = $(I-Q)^{-1}$, y S queda como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{c} \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

De esta forma, podemos completar algunas componentes de la matriz R, quedando como sigue.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora podemos retomar los cálculos de *F(i,j)* para estados transitorios.

- $F(e,e) = 1 - 1/R(e,e) = 1 - 1 = 0$
- $F(e,f) = R(e,f)/R(e,e) = 0/1 = 0$
- $F(f,f) = 1 - 1/R(f,f) = 1 - 1 = 0$
- $F(f,e) = R(f,e)/R(f,f) = 1/3$

Para calcular el resto de los valores de la matriz F, debemos obtener las componentes de la matriz B que aparecen en P'.

Sabemos que $B(i, C_j) = \sum_{k \in C_j} P(i,k)$, donde i es un estado transitorio y j es uno recurrente. De aquello obtenemos:

- $B(e, C_a) = P(e,a) + P(e,b) = 1 + 0 = 1$
- $B(f, C_a) = P(f,a) + P(f,b) = 1/2 + 1/6 = 2/3$
- $B(e, C_c) = P(e,c) + P(e,d) = 0 + 0 = 0$
- $B(f, C_c) = P(f,c) + P(f,d) = 0 + 0 = 0$

Finalmente, B queda como sigue:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} C_a & C_c \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Luego, calculamos $G = SB$, y obtenemos:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} C_a & C_c \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalmente, F queda como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

c)

Como ya se mencionó anteriormente, nomenclamos *R(i,j)* al número de visitas promedio al estado j que la cadena realiza cuando parte desde i. Hasta el momento, conocemos las siguientes componentes de la matriz R.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para calcular el resto de los valores, basta con mirar la matriz F ya construída.

- Si $F(i,j) = 0$, entonces $R(i,j) = 0$.
- Si j es un estado recurrente y $F(i,j) = 1$, entonces $R(i,j) = \infty$

Luego, la matriz R queda completamente definida:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

d)

Debemos encontrar π tal que cumpla con el siguiente sistema de ecuaciones:

- $\pi P = \pi$
- $\displaystyle\sum_{i \in E} \pi(i) = 1$

Como se vio en el primer apartado, la matriz es reducible. Luego, salvo que exista un único conjunto cerrado, habrá infinitas distribuciones invariantes para toda la cadena.

Para poder calcularlas, primero debemos encontrar distribuciones invariantes para cada conjunto cerrado. Es decir, debemos resolver el respectivo sistema de ecuaciones para C_a y C_b. Las soluciones nos quedan como se muestra:

$$\pi_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ (1/2 \quad 1/2) \end{array}$$

$$\pi_c = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ (1/3 \quad 2/3) \end{array}$$

Dado que e y f son estados transitorios, tenemos $\pi(e) = \pi(f) = 0$.

Luego, si se cumple:

- $\alpha_a, \alpha_c \geqslant 0$
- $\alpha_a + \alpha_c = 1$

Entonces

$$\begin{array}{cccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \pi = & (\alpha_a 1/2 & \alpha_a 1/2 & \alpha_c 1/3 & \alpha_c 2/3 & 0 & 0) \end{array}$$

es una distribución invariante.

Por ejemplo, tomando $\alpha_a = \alpha_c = 1/2$, obtenemos una de las infinitas distribuciones invariantes:

$$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \pi = & (1/4 & 1/4 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0) \end{array}$$

e)

La cadena no posee distribución límite, dado que existen estados periódicos.

Para el caso particular del estado a tenemos $P^{2n}(a, a) > 0, P^{2n+1}(a, a) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, P^n no converge.