

Repaso de conceptos de teoría (ver bibliografía: Meyer)

En la unidad anterior se estudiaron variables aleatorias discretas, cada una con su respectiva *función de probabilidad puntual* $p_X(x)=P(X=x)$ y su *función de distribución acumulada* $F_X(x)=P(X\leq x)$.

Ahora estudiaremos las variables aleatorias continuas, cada una con su respectiva *función de densidad de probabilidad* $f_X(x)$ y su *función de distribución acumulada* $F_X(x)=P(X\leq x)$.

A diferencia del caso anterior, **$f_X(x)$ no es la probabilidad $P(X=x)$** . Para evaluar probabilidades debemos calcular la integral de $f_X(x)$ en un cierto intervalo. Es decir

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Si queremos calcular la probabilidad que X asuma un determinado valor particular, la integral anterior resulta 0. Por lo tanto, no podemos hablar de la probabilidad que $X=x$ porque siempre será 0. Por otra parte, tiene sentido calcular probabilidades en un intervalo de valores, como por ejemplo $P(a \leq x \leq b)$. Además, podemos decir que $P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a < x < b)$.

La función de distribución acumulada $F_X(x)$ es

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tau) d\tau$$

Durante el desarrollo de los ejercicios se usará, cuando sea necesaria, la notación con subíndices como la usada en la integral precedente para indicar a qué variable aleatoria corresponde una dada función.

Generalidades

3. La duración en horas de un cierto tipo de tubos es una variable aleatoria con función densidad dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{100}{t^2} & \text{si } t \geq 100 \\ 0 & \text{si } t < 100 \end{cases}$$

En este problema se define la variable aleatoria continua

T : "duración en horas de un cierto tipo de tubos"

A partir de la fdp $f(t)$, se calcula la función de distribución acumulada $F(t)$. Para ello deberemos integrar en cada uno de los tramos en que está definida $f(t)$.

Si $t < 100$

$$P(T \leq t) = F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = 0$$

Si $t \geq 100$

$$P(T \leq t) = F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^{100} 0 dx + \int_{100}^t \frac{100}{x^2} dx = 1 - \frac{100}{t}$$

Finalmente

$$P(T \leq t) = F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{100}{t} & \text{si } t \geq 100 \\ 0 & \text{si } t < 100 \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que un tubo dure menos de 200 horas cuando se sabe que aún funciona después de 150 horas.

Calcularemos la probabilidad del suceso “el tubo dura menos de 200 horas” condicionada al suceso “el tubo dura más de 150 horas” usando la definición de probabilidad condicional. Por simplicidad en la notación, emplearemos desigualdades para denotar a los sucesos anteriores y sus combinaciones.

Luego:

$$P(T < 200 / T > 150) = \frac{P(150 < T < 200)}{P(T > 150)} = \frac{1}{4}$$

De (1) y (2)

$$P(150 < T < 200) = P(T < 200) - P(T < 150) = F(200) - F(150) = \dots \quad (1)$$

$$P(T > 150) = 1 - P(T \leq 150) = 1 - F(150) = \dots \quad (2)$$

b) Si se instalan tres de tales tubos, calcule la probabilidad de que uno de ellos dure a lo sumo 150 horas.

Definimos la variable aleatoria discreta

X: “número de tubos que duran a lo sumo 150 horas de un total de 3 tubos”

Suponiendo que la duración T de cada tubo es independiente de la duración de los demás, podemos decir que:

$$X \sim \text{Bi}(3, p) \quad \text{donde } p = P(T \leq 150) \quad (\text{Completar con la expresión de la distribución de } X)$$

Finalmente

$$P(X=1) = \dots$$

c) ¿Cuál es el número mínimo de tubos que hay que colocar en conjunto para que la probabilidad de que todos funcionen más de 150 horas sea menor o igual que 0,5?

Definimos la variable aleatoria discreta

Y: “número de tubos que duran a más de 150 horas de un total de n tubos”

Suponiendo que la duración T de cada tubo es independiente de la duración de los demás, podemos decir que:

$$Y \sim \text{Bi}(n, p) \quad \text{donde } p = P(T > 150) \quad (\text{Completar con la expresión de la distribución de } Y)$$

Del enunciado:

$$P(Y=n) \leq 0,5$$

A partir de esta expresión se puede despejar el valor de n, o se puede probar para diferentes valores de n hasta encontrar el que satisface el enunciado.

4. Un proceso químico puede producir un organismo de tipo A o B difíciles de distinguir. Un organismo de tipo A contiene una proporción x de una sustancia química que varía aleatoriamente con función densidad

$$f(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para un organismo de tipo B, la correspondiente función densidad es

$$g(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se propone clasificar el tipo de un organismo, en función de la proporción x de la sustancia química, con el siguiente criterio: si $x \leq \frac{1}{3}$ el organismo es clasificado de tipo A, y, en otro caso, es clasificado de tipo B. Calcule la probabilidad de que un organismo de tipo A sea clasificado de tipo B.

De acuerdo al enunciado, el valor hallado de la variable aleatoria continua X : "proporción de una sustancia química que varía con la densidad" servirá como criterio de clasificación entre dos organismos A y B.

Definimos los sucesos

O_A : "el organismo es tipo A"

C_B : "el organismo es clasificado tipo B"

No definimos más sucesos porque no serán necesarios en la resolución.

Sabemos que, si $X > \frac{1}{3}$ el organismo se clasifica como tipo B. Además, si el organismo es de tipo A, la función de densidad de probabilidad de X es $f(x)$.

Entonces

$$P(C_B / O_A) = P\left(X > \frac{1}{3} / O_A\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} f(x) dx = \frac{16}{81}$$

Distribuciones exponencial y Erlang

9. El número de diarios que vende un canillita es una variable aleatoria X con distribución de Poisson con tasa 50 diarios/hora.

a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de dos minutos entre dos ventas.

b) Si el canillita tarda 5 minutos en preparar y tomar un café, calcule la probabilidad de que realice esas acciones sin ser interrumpido por un cliente.

c) Calcule el tiempo promedio que transcurre entre dos ventas.

d) Calcule la probabilidad de que transcurran en total más de siete minutos para la siguiente venta, dado que ya han transcurrido cinco minutos desde la última.

e) Calcule la probabilidad de que transcurran más de ocho minutos hasta la quinta venta.

f) Calcule el tiempo promedio que transcurre hasta la quinta venta.

Como trabajaremos los intervalos de tiempo en minutos, convertimos la tasa del proceso de Poisson a diarios/minuto

$$\lambda = 50 \text{ diarios/hora} = 50/60 \text{ diarios/minuto} = 5/6 \text{ diarios/minuto}$$

Luego definimos la colección de variables X_t de nuestro proceso de Poisson con tasa λ

X_t : "número de diarios vendidos en un intervalo de tiempo de duración t minutos"

$$X_t \sim \text{Po}(\lambda t) \quad (\text{Completar con la expresión de la distribución de } X_t)$$

$$E(X_t) = \lambda t \quad V(X_t) = \lambda t$$

a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de dos minutos entre dos ventas.

Definimos la variable aleatoria continua

Y : "tiempo en minutos entre dos ventas sucesivas de diarios"

Se puede demostrar (la demostración no entra en el contenido de la materia) que

$Y \sim \text{Exp}(\alpha)$ donde $\alpha = \lambda$

$$E(Y) = 1/\alpha = 1/\lambda \quad V(Y) = 1/\alpha^2 = 1/\lambda^2$$

En este caso particular

$$Y \sim \text{Exp}(5/6) \quad (\text{Completar con la expresión de la distribución de } Y)$$

$$\text{Luego } P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F_Y(2) = \dots$$

Nota: como en el problema aparecen diferentes variables aleatorias, agregaremos un subíndice a la notación que usamos para la función de densidad de probabilidad f y para la función de distribución acumulada F para identificar claramente a qué variable aleatoria corresponden.

d) Calcule la probabilidad de que transcurran en total más de siete minutos para la siguiente venta, dado que ya han transcurrido cinco minutos desde la última.

$$P(Y > 7/Y > 5) = P(Y > (2+5)/Y > 5) = P(Y > 2) = \dots$$

Justificar

e) Calcule la probabilidad de que transcurran más de ocho minutos hasta la quinta venta.

Definimos la variable aleatoria continua

Z : "tiempo en minutos hasta la k -ésima venta sucesiva de diarios" (En este caso, la quinta venta)

Se puede demostrar (la demostración no entra en el contenido de la materia) que Z tiene una distribución de *Erlang*

$$Z \sim \text{Erl}(\alpha, k)$$

$$E(Z) = k/\alpha \quad V(Z) = k/\alpha^2$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} \frac{(\alpha z)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\alpha z} \frac{(\alpha z)^n}{n!} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para reflexionar: es posible pensar a Z como la suma de k vv.aa.cc. de distribución $\text{Exp}(\alpha)$.

En este caso particular

$Z \sim \text{Erl}(5/6, 5)$ (Completar con la expresión de la distribución de Z para este caso particular)

$$E(Z) = k/\alpha = k/\lambda = 5/(5/6) = 6$$

$$V(Z) = k/\alpha^2 = k/\lambda^2 = 5/(25/36) = 36/5$$

$$P(Z > 8) = 1 - F_Z(8) = \dots \approx 0,2056$$

Distribución normal

12. Los alambres que se utilizan en cierta computadora deben tener una resistencia entre 0,12 y 0,14 ohms. Las resistencias de los alambres producidos por una empresa tienen una distribución normal con media $\mu = 0,13$ ohms y desviación estándar $\sigma = 0,005$ ohms. Si se utilizan cuatro de estos alambres, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro cumplan con las especificaciones?

Definimos la v.a.c.

X: "resistencia de los alambres producidos por una empresa"

$$X \sim N(\mu = 0,13, \sigma = 0,005)$$

Nota: se usaron los símbolos μ y σ para expresar claramente que el segundo parámetro es el desvío estándar.

La probabilidad que uno de estos alambres cumpla con las especificaciones es:

$$P(0,12 < X < 0,14) = P(X < 0,14) - P(X < 0,12) = \dots = 0,9545$$

Si se seleccionan cuatro alambres, y suponiendo que la resistencia de cada uno de ellos es independiente de la resistencia de los demás, la v.a.d.

Y: "número de alambres que cumple con las especificaciones de un total de 4 alambres" tiene una distribución

$$Y \sim \text{Bi}(0,9545, 4)$$

(Completar con la expresión de la distribución de Y)

$$P(Y=4) = \dots \approx 0,83005$$

Otra forma de resolución sin usar la distribución binomial:

Definimos los sucesos:

A₁: "el alambre 1 cumple con las especificaciones"

A₂: "el alambre 2 cumple con las especificaciones"

A₃: "el alambre 3 cumple con las especificaciones"

A₄: "el alambre 4 cumple con las especificaciones"

B: "los cuatro alambres cumplen con las especificaciones"

Suponiendo que la resistencia de cada uno de los alambres es independiente de la resistencia de los demás, podemos decir

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,9545^4 \approx 0,83005$$

16. La producción anual en una fábrica es una variable aleatoria X con distribución normal con media μ y desvío estándar σ . El 90% de los años la producción es inferior a 1300 y el 40% de los

años es superior a 1100. Halle la probabilidad de que la producción durante un año sea superior a 1000.

Definimos la v.a.c.

X: "producción anual en una fábrica"

$X \sim N(\mu, \sigma)$

Suponiendo que se estudió la producción durante un número suficientemente grande de años, que el 90% de los años la producción sea inferior a 1300 significa que

$$P(X < 1300) = 0,9$$

De la misma manera, que el 40% de los años la producción sea superior a 1100 significa que

$$P(X > 1100) = 0,4$$

Para poder usar las tablas de la distribución normal estandarizada, es necesario hacer un cambio de variables. Definimos la variable estandarizada

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Luego

$$P(X < 1300) = P(Z < z_1) = 0,9$$

$$P(X > 1100) = 1 - P(X < 1100) = 1 - P(Z < z_2) = 0,4$$

De tablas

$$z_1 = \frac{1300 - \mu}{\sigma} \approx 1,285$$

$$z_2 = \frac{1100 - \mu}{\sigma} \approx 0,255$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta

$$\mu \approx 1050,49$$

$$\sigma \approx 194,17$$

La probabilidad de que la producción durante un año sea superior a 1000 resulta

$$P(X > 1000) = 1 - P(X < 1000) = 1 - P(Z < z_3) = 1 - 0,39743 = 0,60257$$

De (1) y de tabla de distribución normal estandarizada

Nuevamente, debemos usar la variable estandarizada para obtener $P(X < 1000) = P(Z < z_3)$

$$z_3 = \frac{1000 - \mu}{\sigma} \approx -0,26 \quad (1)$$

18. La bebida "Delicia Jamaiquina" se vende en latas de 315 ml. El volumen promedio que vierte la máquina llenadora en una lata es 300 ml, con desvío estándar 6 ml. Si se supone que el volumen de bebida vertido por la llenadora sigue una distribución normal,

a) ¿Cuál es la probabilidad que la máquina llenadora provoque un derrame en una lata?

b) Las especificaciones del contenido son 300 ± 20 ml. ¿Qué proporción de latas cumple con el requisito?

a) Definimos la v.a.c.

X: "volumen de líquido que vierte la máquina llenadora"

$X \sim N(300 \text{ ml}, 6 \text{ ml})$

Como el contenido máximo de una lata es de 315 ml, habrá derrame si $X > 315$. Luego

$P(X > 315) = \dots$

b) Definimos la v.a.c.

Y: "volumen de líquido que contiene una lata"

donde $Y = \begin{cases} X & \text{si } x \leq 315 \\ 315 & \text{si } x > 315 \end{cases} \quad (1)$

Según las especificaciones, el contenido debe estar entre 280 ml y 320 ml. Como siempre es $Y \leq 315$, solamente habrá que determinar la probabilidad que $Y \geq 280$.

$P(Y \geq 280) = P(X \geq 280) = \dots = 0,99957$

De (1)

De tabla de distribución normal estandarizada

Finalmente, el 99,957% de latas cumple con el requisito del contenido de líquido en la lata.

Función de variable aleatoria

20. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $p_X(x) = x/6$, donde $x = 1, 2, 3$ e $Y = (X - 2)^2$.

a) Determine la distribución de probabilidad de Y.

b) Calcule $E(Y)$ y $V(Y)$.

Resolución:

X es una variable aleatoria discreta cuya distribución de probabilidad $p_X(x)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} x/6 & \text{si } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$Y = H(X) = (X - 2)^2$ es una variable aleatoria discreta

a) Analicemos los valores posibles de Y

Si $X=1 \Rightarrow Y=H(1)=1$

Si $X=2 \Rightarrow Y=H(2)=0$

Si $X=3 \Rightarrow Y=H(3)=1$

Luego, calculamos la distribución de probabilidad $p_Y(y)$ de la variable Y en base a los valores de $p_X(x)$

X	$p_X(x)$
1	1/6
2	2/6
3	3/6



Y	$p_Y(y)$
1	$p_X(1) + p_X(3) = 4/6$
0	$p_X(2) = 2/6$

Por lo tanto

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } y = 1 \\ 1/3 & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b)

Esperanza de Y: $E(Y) = 2/3 * 1 + 1/3 * 0 = 2/3$

$E(Y^2) = 2/3 * 1^2 + 1/3 * 0^2 = 2/3$

Varianza de Y: $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2/3 - 4/9 = 2/9$

23. Un cierto tipo de instrumento electrónico tiene una duración X (en unidades de 1.000 hs.) que varía aleatoriamente con función densidad $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. El costo de fabricar tal instrumento es de \$2. El fabricante vende el instrumento por \$5, pero garantiza un reembolso total si $X \leq 0,9$. Determine la esperanza matemática de la utilidad por instrumento.

Resolución:

X: "duración de un instrumento electrónico en unidades de 1000 horas"

X es una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ es

$$X \sim \text{Exp}(1) \quad f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Por ser una distribución exponencial, sabemos que su función de distribución acumulada $F_X(x)$ resulta

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

y además

$E(X) = 1$

$V(X) = 1$

Definimos:

C: "costo de fabricación del instrumento en pesos"

V: "precio de venta del instrumento"

R: "reembolso en pesos si la duración es menor a 900 horas"

T: "utilidad por instrumento en pesos"

Veamos los valores que asumen estas variables:

$C=2$ es una constante

$V=5$ es una constante

$$R = H(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0,9 \\ 0 & \text{si } x > 0,9 \end{cases} \quad \text{es una variable aleatoria discreta}$$

La utilidad T resulta

$$T=5-2-R=\begin{cases} -2 & \text{si } r=5 \\ 3 & \text{si } r=0 \end{cases} = J(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 0,9 \\ 3 & \text{si } x > 0,9 \end{cases} \text{ es una variable aleatoria discreta}$$

Calculamos la probabilidad para cada valor posible de T:

$$P(T=-2)=P(X \leq 0,9)=F_X(0,9)=1-e^{-0,9} \approx 0,59$$

$$P(T=3)=P(X > 0,9)=1-F_X(0,9)=e^{-0,9} \approx 0,41$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad $p_T(t)$ es

$$p_T(t) = \begin{cases} 0,59 & \text{si } t = -2 \\ 0,41 & \text{si } t = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, la esperanza matemática de T es

$$E(T) = 0,59 * (-2) + 0,41 * 3 = 0,05$$

Luego, la utilidad promedio por instrumento será \$0,05.

25. Considere una v.a $X \sim U[0, 1]$. Halle la función de densidad de la v.a. Y cuando:

a) $Y = a + (b - a)X, b > a.$

b) $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X, \lambda > 0.$

Resolución:

Sabemos que X es una variable aleatoria continua y

$$X \sim U[0,1] \quad f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como X tiene una distribución uniforme, su función de distribución acumulada $F_X(x)$ es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (7)$$

a) Definimos $Y=H(X)=a+(b-a)X$, con $b>a$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (b-a)x \leq b-a \Leftrightarrow a \leq a+(b-a)x \leq b \Leftrightarrow a \leq y \leq b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo $[a,b]$ porque X es v.a. continua y $H(X)$ es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Sabemos que $H(X)$ es continua, estrictamente monótona creciente y derivable en el conjunto de números reales por ser la ecuación de una recta, en particular lo sigue siendo en el intervalo $[0,1]$.

Por lo tanto, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$Y = H(X) = a + (b-a)X \Rightarrow \frac{Y-a}{b-a} = X = H^{-1}(Y)$$

Luego, podemos escribir

$$f_X(H^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq H^{-1}(y) \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.a.1)$$

$$\left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{1}{b-a} \right| = \frac{1}{b-a} \quad \text{porque } b > a \quad (7.a.2)$$

Por lo tanto, utilizando los resultados encontrados en (7.a.1) y (7.a.2), podemos decir que

$$X \sim U[a, b] \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$, es posible obtener otra variable aleatoria distribuida uniformemente en un intervalo $[a,b]$ deseado usando la función $H(X) = a + (b-a)X$, con $b > a$.

Otra forma: resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (b-a)x \leq b-a \Leftrightarrow a \leq a + (b-a)x \leq b \Leftrightarrow a \leq y \leq b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo $[a,b]$ porque X es v.a.c. y $H(X)$ es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + (b-a)X \leq y) = P(X \leq \frac{y-a}{b-a}) = F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$$

Utilizando la ecuación (7), podemos escribir

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{y-a}{b-a} < 0 \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } 0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1 \\ 1 & \text{si } \frac{y-a}{b-a} > 1 \end{cases}$$

Analizando cada expresión para $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{si } \frac{y-a}{b-a} < 0 \Leftrightarrow y < a$$

$$F_Y(y)=1 \quad \text{si } \frac{y-a}{b-a} > 1 \Leftrightarrow y > b$$

$$F_Y(y)=\frac{y-a}{b-a} \quad \text{si } 0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y-a \leq b-a \Leftrightarrow a \leq y \leq b$$

Por lo tanto, $F_Y(y)$ resulta

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 1 & \text{si } y > b \end{cases}$$

Luego, la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ resulta

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En base a la expresión hallada para $f_Y(y)$ es posible afirmar que Y es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo $[a,b]$, es decir $Y \sim U[a,b]$.

b) Definimos $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$, $\lambda > 0$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X. Como $\ln X$ no está definido para $X=0$, analizaremos el intervalo $(0,1]$

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(1) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{\lambda} \ln x \Leftrightarrow 0 \leq y$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el conjunto de reales positivos porque X es una v.a.c. y $H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ es una función continua en el intervalo $(0,1]$.

Como $H(X)$ es continua, estrictamente monótona y derivable en el conjunto de números reales positivos, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$Y = H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X \Rightarrow e^{-\lambda Y} = X = H^{-1}(Y)$$

Luego, podemos escribir

$$f_X(H^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < H^{-1}(y) \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.b.1)$$

Por otra parte

$$\left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| e^{-\lambda y} \cdot (-\lambda) \right| = \lambda e^{-\lambda y} \quad \text{porque } \lambda > 0 \quad (7.b.2)$$

Luego, de (7.b.1) y (7.b.2), podemos decir que

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \quad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Debemos aclarar que se asignó 0 a la función de distribución de probabilidad cuando $y \leq 0$.

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo (0,1), es posible obtener otra variable aleatoria con distribución exponencial con un

parámetro λ dado usando la función $H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X$, con $\lambda > 0$.

Otra forma: resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.

Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq y\right) = P(-\ln X \leq \lambda y) = P(e^{-\ln X} \leq e^{\lambda y}) = P\left(\frac{1}{X} \leq e^{\lambda y}\right) = P(X \geq e^{-\lambda y}) = 1 - P(X \leq e^{-\lambda y})$$

En el intervalo analizado, y de acuerdo a la ecuación (7), podemos decir que

$$P(Y \leq y) = 1 - P(X \leq e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}$$

Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Finalmente, podemos decir que

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \quad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

27. En una empresa embotelladora de jugos, la cantidad de líquido por botella es una variable aleatoria $X \sim N(500 \text{ ml}, 30 \text{ ml})$.

a) Calcule la probabilidad de que una botella contenga menos de 430 ml.

b) Las botellas se venden en pack de 12 de ellas. Calcule la probabilidad de que en un pack, por lo menos 3 de ellas contengan menos de 430 ml.

c) El costo de producción de cada botella es \$0,20 y cada pack se vende al supermercadista a \$4,80. Si en el pack se detectan 3 o más unidades con menos de 430 ml, el pack se considera defectuoso y la empresa reembolsa al supermercadista el doble del dinero recibido por el pack. Calcule la ganancia promedio por cada pack.

Resolución:

Sabemos que X: "cantidad de líquido de una botella en ml" es una v.a.c. y

$$X \sim N(500 \text{ ml}, 30 \text{ ml}) \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 30} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-500}{30} \right)^2}, x \in \mathbb{R}$$

a) Definimos la variable estandarizada $Z = \frac{X-500}{30}$.

Luego

$$P(X < 430) = P\left(Z < -\frac{7}{3}\right) \approx 0,0099$$

b) Suponiendo que el contenido de líquido de cada botella es independiente del contenido de las demás, definimos la variable aleatoria Y como

Y: "número de botellas que contienen menos de 430 ml en un pack de 12 botellas"

Y es una variable aleatoria discreta que se distribuye como una binomial de esta manera:

$Y \sim \text{Bi}(12, 0,0099)$

$$P(Y = y) = \binom{12}{y} 0,0099^y (1-0,0099)^{12-y}, \quad y = \overline{0,12}$$

Entonces

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) = 0,0002$$

c) Definimos:

C: "costo de producción por pack de 12 botellas en \$"

V: "precio de venta en \$ del pack"

R: "reembolso en \$ si hay al menos 3 botellas con menos de 430 ml"

G: "ganancia por pack en \$"

Veamos los valores que asumen estas variables:

$C = 0,20 \cdot 12 = 2,4$ es una constante

$V = 4,8$ es una constante

$$R = H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 3 \\ 2 \cdot 4,8 = 9,6 & \text{si } y \geq 3 \end{cases} \text{ es una variable aleatoria discreta}$$

La ganancia G resulta

$$G = V - C - R = \begin{cases} 2,4 & \text{si } r = 9,6 \\ -7,2 & \text{si } r = 0 \end{cases} = J(y) = \begin{cases} 2,4 & \text{si } y < 3 \\ -7,2 & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$

G es una variable aleatoria discreta.

$$P(G = -7,2) = P(Y \geq 3) = 0,0002$$

$$P(G = 2,4) = P(Y < 3) = 1 - 0,0002 = 0,9998$$

Entonces, la distribución de probabilidad $p_G(g)$ resulta

$$p_G(g) = \begin{cases} 0,0002 & \text{si } g = -7,2 \\ 0,9998 & \text{si } g = 2,4 \end{cases}$$

Finalmente, la ganancia promedio por pack será la esperanza matemática de G

$$E(G) = -7,2 \cdot P(G = -7,2) + 2,4 \cdot P(G = 2,4) = -7,2 \cdot 0,0002 + 2,4 \cdot 0,9998 = 2,39808$$