



Procesos de Bernoulli

Considere un experimento que consiste:

- ✓ una sucesión infinita de ensayos realizados en idénticas condiciones.
- ✓ los ensayos son independientes entre sí y
- ✓ sólo pueden tener dos resultados posibles:

“éxito” (E) o “fracaso”(F)

con: $P(E) = p$, $P(F) = 1 - p$,
constante a lo largo de todo el proceso.

Este experimento puede modelarse como la sucesión de infinitos ensayos de Bernoulli.

El espacio muestral común de este experimento es

$$\Omega = \{w : w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots), w_i = E \text{ o bien } w_i = F, i \in \mathbb{N}\}.$$

A la n -ésima repetición del ensayo podemos asociarle una variable aleatoria X_n que toma dos valores posibles

$$X_n(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w_n = E, \\ 0, & \text{si } w_n = F. \end{cases} \quad [1]$$

$$P(X_n = 1) = p; \quad P(X_n = 0) = 1 - p. \quad [2]$$

Se denomina *proceso de Bernoulli* a una colección numerable de variables aleatorias independientes, definidas como en [1] con distribución de prob. [2].

Ejemplo

En una bifurcación de una ruta, aproximadamente el 62% de los automóviles toma la rama izquierda.

Se define:

$X_n = 1$ si el n -ésimo automóvil toma la rama izquierda,

$X_n = 0$ si toma la rama derecha.

Se supone que los conductores eligen su camino independientemente de lo que hacen los otros, eso quiere decir que se puede considerar

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ independientes con $P(X_n = 1) = 0.62 \quad \forall n$

El proceso $X_n: n \in \mathbb{N}$ es un *proceso de Bernoulli*.

Proceso Número de Éxitos

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un proceso de Bernoulli con $P(E) = p$.

La variable aleatoria:

$$N_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad [3]$$

describe el número de éxitos en los primeros n ensayos de Bernoulli.

Si además se define $N_0 = 0$, el proceso estocástico

$$\{N_n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

describe el número de éxitos en un proceso de Bernoulli y tiene a \mathbb{N}_0 como espacio de estados.

Notar que (3) indica que:

$$N_n = k \Leftrightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_n = k \Leftrightarrow$$

exactamente k de los n sumandos es igual a 1 y, por lo tanto, se deduce:

$$N_n \sim Bi(n, p)$$

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \forall k = 0, \dots, n.$$

Las variables aleatorias

$$N_{m+n} - N_m$$

representan el número de éxitos entre el m -ésimo y el $(m + n)$ -ésimo ensayo. Por lo tanto:

$$P(N_{m+n} - N_m = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k = 0, \dots, n,$$

lo cual significa que el número de éxitos sólo depende de la cantidad de ensayos observados y no del instante en que comenzó a observarse el proceso.

Para pensar!

¿Influye la cantidad de éxitos ocurridos en los m primeros ensayos sobre la cantidad de los que ocurrirán entre la m -ésima y la $(m+n)$ -ésima repetición del ensayo de Bernoulli?

La independencia de las X_i asegura que no.

$$P(N_{m+n} - N_m = k | N_0, N_1, \dots, N_m) = P(N_{m+n} - N_m = k), \forall k = 0, \dots, n.$$

dado que el valor de la probabilidad es independiente de m se dice que el proceso es a incrementos estacionarios

Más aún, las variables aleatorias:

$$N_{n_1}, N_{n_2} - N_{n_1}, \dots, N_{n_m} - N_{n_{m-1}} \quad (0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m)$$

son variables aleatorias independientes, por lo tanto:

$$P(N_{m+1} = k | N_0, N_1, \dots, N_m) = P(N_{m+1} = k | N_m).$$

esta igualdad indica que el futuro inmediato del proceso depende sólo del presente y no del pasado.



propiedad markoviana

**Si se conoce cuántos éxitos hubo hasta el instante n -ésimo,
¿cuántos éxitos podemos tener al instante siguiente?**

$$P(N_{n+1} = j | N_n = i) = P(N_n + X_{n+1} = j | N_n = i) = P(X_{n+1} = j - i)$$

$$P(X_{n+1} = j - i) = \begin{cases} p & \text{si } j - i = 1 \\ 1 - p & \text{si } j - i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$P(N_{n+1} = j | N_n = i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{si } j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notar que estas probabilidades son independientes de n .

-
- ✓ Estas probabilidades, que pueden interpretarse como la *probabilidad de transición* en un paso entre dos estados del proceso.
 - ✓ Estas probabilidades pueden representarse en una matriz o a través de un grafo.

Propuesta:

- Armar la matriz de transición

$$P(i, j) = P(N_{n+1} = j | N_n = i)$$

- Construya el grafo correspondiente al proceso planteado

El promedio de N_{n+1} dado que se conoce N_n es:

$$\begin{aligned} E(N_{n+1}|N_n) &= E(N_n + X_{n+1}|N_n) = E(N_n|N_n) + E(X_{n+1}|N_n) \\ &= N_n + p. \end{aligned}$$

En forma análoga:

$$E(N_{n+m}|N_n) = E(N_n|N_n) + E(N_{n+m} - N_n|N_n) = N_n + mp.$$

$$E(N_{n+m}|N_0, N_1, \dots, N_n) = E(N_{n+m}|N_n).$$