Санкт-Петербургский Политехнический
Университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра "Прикладная математика"

Отчёт
Лабораторная работа №8
по дисциплине
"Математическая статистика"

Выполнил студент:
Салихов С.Р.
группа: 3630102/70401

Проверил:
к.ф-м.н., доцент
Баженов Александр Николавич

Санкт-Петербург
2020 г.

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Постановка задачи

Для двух выборок размерами 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону N(x, 0, 1), для параметров положения и масштаба построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик χ^2 и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять $\gamma = 0.95$.

2 Теория

2.1 Доверительные интервалы для параметров нормального распредееления

Оценкой максимального правдоподобия для математического ожидания является среднее арифметическое: $\mu = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Оценка максимального правдоподобия для дисперсии вычисляется по формуле: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Доверительным интервалом или интервальной оценкой числовой характеристики или параметра распределения θ с доверительной вероятностью γ называется интервал со случайными границами (θ_1, θ_2), содержащий параметр θ с вероятностью γ.

Функция распределения Стьюдента:

$$T = \sqrt{n-1}\frac{\overline{x} - \mu}{\delta}$$

Функция плотности распределения χ^2:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Интервальная оценка математического ожидания:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma t_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{x} + \frac{\sigma t_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma,$$

где $t_{1-\frac{a}{2}}$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1 - \frac{a}{2}$.

Интервальная оценка дисперсии:

$$P = \left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n-1)}} < \sigma < \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{a}{2}}(n-1)}}\right) = \gamma,$$

где $\chi^2_{1-\frac{a}{2}}$, $\chi^2_{\frac{a}{2}}$ – квантили распределения Стьюдента порядков $1-\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}$ соответственно.

2.2 Доверительные интервалы для математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход

Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma u_{1-\frac{a}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\frac{a}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

где $u_{1-\frac{a}{2}}$ – квантиль нормального распределения $N(x, 0, 1)$ порядка $1 - \frac{a}{2}$.

$$\sigma(1 - 0.5t_{1-\alpha/2}\sqrt{e+2}/\sqrt{n}) < \sigma < \sigma(1 + 0.5t_{1-\alpha/2}\sqrt{e+2}/\sqrt{n})$$

3 Реализация

Для генерации выборки был использован *Python* 3.7 и модуль numpy. Для отрисовки графиков использовался модуль matplotlib. scipy.stats для обработки функций распределений.

4 Результаты

Таблица 1: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

n = 20	m	σ
	-0.48 < m < 0.54	0.83 < σ < 1.59
n = 100	m	σ
	-0.25 < m < 0.15	0.9 < σ < 1.19

Таблица 2: Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

n = 20	m	σ
	-0.43 < m < 0.49	0.93 < σ < 1.25
n = 100	m	σ
	-0.25 < m < 0.15	0.95 < σ < 1.09

5 Обсуждение

Генеральные характеристики m = 0, $\sigma = 0$ накрываются построенными доверительными интервалами.

По полученным результатам видно, что лучший результат достигается на выборках большого объема.
При сравнении результатов при объеме n = 20, видим, что интервал меньше для парамаетров произвольного распределения.

6 Литература

Модуль numpy

Модуль scipy

Нормальное распределение

Доверительные интервалы

7 Приложения

Код лаборатрной
Код отчёта