

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
КАФЕДРА "ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА"

ОТЧЁТ  
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
"МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА"

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ:  
САЛИХОВ С.Р.  
ГРУППА: 3630102/70401

ПРОВЕРИЛ:  
К.Ф-М.Н., ДОЦЕНТ  
БАЖЕНОВ АЛЕКСАНДР НИКОЛАВИЧ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2020 г.

# Содержание

	Стр.
<b>1. Постановка задачи</b> .....	<b>5</b>
<b>2. Теория</b> .....	<b>5</b>
2.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения	5
2.2. Доверительные интервалы для математического ожидания $m$ и среднего квадратического отклонения $\sigma$ произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход .....	5
<b>3. Реализация</b> .....	<b>6</b>
<b>4. Результаты</b> .....	<b>6</b>
<b>5. Обсуждение</b> .....	<b>6</b>
<b>6. Литература</b> .....	<b>6</b>
<b>7. Приложения</b> .....	<b>7</b>

## Список иллюстраций

## Список таблиц

1	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения .	6
2	Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход .....	6

## 1 Постановка задачи

Для двух выборок размерами 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону  $N(x, 0, 1)$ , для параметров положения и масштаба построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик  $\chi^2$  и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять  $\gamma = 0.95$ .

## 2 Теория

### 2.1 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Оценкой максимального правдоподобия для математического ожидания является среднее арифметическое:  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Оценка максимального правдоподобия для дисперсии вычисляется по формуле:  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

Доверительным интервалом или интервальной оценкой числовой характеристики или параметра распределения  $\theta$  с доверительной вероятностью  $\gamma$  называется интервал со случайными границами  $(\theta_1, \theta_2)$ , содержащий параметр  $\theta$  с вероятностью  $\gamma$ .

Функция распределения Стьюдента:

$$T = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - \mu}{\delta}$$

Функция плотности распределения  $\chi^2$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Интервальная оценка математического ожидания:

$$P = \left( \bar{x} - \frac{\sigma t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} \right) = \gamma,$$

где  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  – квантиль распределения Стьюдента порядка  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .

Интервальная оценка дисперсии:

$$P = \left( \frac{\sigma \sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}} < \sigma < \frac{\sigma \sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}} \right) = \gamma,$$

где  $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ ,  $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$  – квантили распределения Стьюдента порядков  $1 - \frac{\alpha}{2}$  и  $\frac{\alpha}{2}$  соответственно.

### 2.2 Доверительные интервалы для математического ожидания $m$ и среднего квадратического отклонения $\sigma$ произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход

Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания:

$$P = \left( \bar{x} - \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = \gamma,$$

где  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  – квантиль нормального распределения  $N(x, 0, 1)$  порядка  $1 - \frac{\alpha}{2}$ .

$$\sigma(1 - 0.5t_{1-\alpha/2}\sqrt{e+2}/\sqrt{n}) < \sigma < \sigma(1 + 0.5t_{1-\alpha/2}\sqrt{e+2}/\sqrt{n})$$

### 3 Реализация

Для генерации выборки был использован *Python 3.7* и модуль *numpy*. Для отрисовки графиков использовался модуль *matplotlib*. *scipy.stats* для обработки функций распределений.

### 4 Результаты

Таблица 1: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

n = 20	m	$\sigma$
	$-0.5 < m < 0.42$	$0.75 < \sigma < 1.44$
n = 100	m	$\sigma$
	$-0.25 < m < 0.12$	$0.81 < \sigma < 1.07$

Таблица 2: Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

n = 20	m	$\sigma$
	$-0.46 < m < 0.38$	$0.82 < \sigma < 1.2$
n = 100	m	$\sigma$
	$-0.24 < m < 0.12$	$0.86 < \sigma < 0.99$

### 5 Обсуждение

### 6 Литература

Модуль *numpy*

Модуль *matplotlib*

Модуль *scipy*

## 7 Приложения

Код лаборатрной  
Код отчёта