Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра "Прикладная математика"

**Отчёт по лабораторной работе №1**
**"Решение задачи линейного программирования симплекс-методом"**

Выполнили студенты:
Салихов С.
Шарапов С.
Мальцов Д.
группа: 3630102/70401

Проверил:
к.ф-м.н.
Родионова Е.А.

Санкт-Петербург
2020 г.

# Содержание

# 1 Постановка задачи

Требуется с помощью симплекс-метода с использованием начального приближения методом искусственного базиса и метода крайних точек решить прямую и двойственную задачу линейного программирования, включающую 4 переменных, 1 имеет ограничение на знак, и состоящую из 2 неравенств разных знаков и 2 равенств.
Также требуется написать алгоритм позволяющий восстановить решение прямой задачи по решению двойственной.

## 1.1 Постановка задачи ЛП

Составим задачу подходящую под наши требования:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_4 >= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 <= 8 \\ x_1 >= 0 \end{cases}$$

$$C = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \text{ -> } \min$$

# 2 Условие применимости

Любая задача ЛП сводится к канонической форме. Каноническая форма имеет следующий вид:
AX = b
X >= 0, b>=0 C = < $c_i$, x> -> extr Сведём нашу систему к каноническому виду, для применения методов:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 5 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_6 - 2x_7 - x_8 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_9 = 8 \\ x_1, .., x_9 >= 0 \end{cases}$$

$$C = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 4x_7 \text{ -> } \min$$

# 3 Описание алгоритма

## 3.1 Метод искуственного базиса

Метод заключается в специальном выборе начального приближения(Реализуется, если матрица полного ранга). Алгоритм выбора данного приближения следующий:
1)Вводится вспомогательная задача: $\sum_{i \in M}$y[i] -> min
A[M,N]X[N] + E[M,M]y[M] = b[M]
x[N]>=0
y[N]>=0
2)Начальный опорный вектор : x[N] = 0
y[N] = b[M], где b[M] >= 0

В качестве базиса столбца E[M,M]
3)По завершении работы симплекс-метода отбрасываем y[N], которые мы ввели и получаем решение исходной задачи.

### 3.2 Симплекс-метод

Симплекс-метод позволяет переходить от одного опорного вектора к другому так, что значение целевой функции не увеличивается.
В результате не более, чем за $C_n^m$(максимальное количество опорных векторов) шагов достигается оптимальное значение, либо опровергается его существование.

### 3.3 Метод крайних точек

В свою очередь метод крайних точек заключается в переборе возможных базисных векторов и выявление того, при котором функция цели будет наименьшей. Своего рода это полный переборный алгоритм.

### 3.4 Восстановление решения по решению двойственной задачи

Обозначим через $C_\sigma$=$(c_{i1},..,c_{im})$ вектор строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции задачи. А через $P^-1$ - матрицу обратную матрице P, где P состоит из компонент векторов $P_{i1}$,.., $P_{im}$
Тогда имеет место теорема: Если основная задача имеет оптимальный план $X^*$, то $Y^*$ = $C_\sigma P^-1$ является оптимальным планом двойственной задачи.

## 4 Результаты

### 4.1 Результат решения симплекс методом с начальным приближением методом искуственного базиса

#### 4.1.1 Начальный базис вектор полученный методом искуственного базиса

В нашей задаче базис будет выглядеть следующим образом:
X0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 4, 7, 8]

#### 4.1.2 Интерпретация решения

Условие оптимальности полученного решения:
· Если задача на максимум – в строке функционала нет отрицательных коэффициентов (т.е. при любом изменении переменных значение итогового функционала расти не будет).
· Если задача на минимум – в строке функционала нет положительных коэффициентов (т.е. при любом изменении переменных значение итогового функционала уменьшаться не будет).

### 4.2 Ответ в поставленной задаче

X = [2.0, 1.0, 0.0, 3.0, 0.0, 0.0, 0.5, 0.0, 0.0]

N = [0, 1, 3, 6]

Оптимальное значение функции цели: C = 11.0

### 4.3 Результат методом крайних точек

X = [1.9999999999999998, 1.0000000000000004, 0.0, 3.0, 0.0, 0.0, 0.49999999999999956, 0.0, 0.0]

Оптимальное значение функции цели: C = 11.000000000000002

### 4.4 Двойственная задача

Двойственная к поставленной задаче(из канонического вида поставленной задачи) в каононическом виде:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 + 4x_4 - 4x_5 + 2x_6 - 2x_7 + x_8 = 1 \\ x_2 - x_3 + 4x_6 - 4x_7 + x_9 = 2 \\ x_2 - x_3 + 4x_6 - 4x_7 - x_{10} = 2 \\ x_0 - 1x_1 + x_2 + -x_3 + x_{11} = 3 \\ x_0 - x_1 + x_2 - x_3 - x_{12} = 3 \\ 2x_4 - 2x_5 + x_{13} = 4 \\ 2x_4 - 2x_5 - x_{14} = 4 \\ -x_4 + x_5 + x_{15} = 0 \\ x_6 - x_7 + x_{16} = 0 \\ x_0..x_{16} >= 0 \end{cases}$$

$$= 5 * x_0 - 5 * x_1 + 4 * x_2 - 4 * x_3 + 7 * x_4 - 7 * x_5 + 8 * x_6 - 8 * x_7 - > max$$

### 4.5 Результаты двойственной задачи

#### 4.5.1 Симплекс методом

X = [0.0, 4.333333333333334, 7.333333333333333, 0.0, 2.0, 0.0, 0.0, 1.3333333333333333, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 2.0, 1.3333333333333335]

N = [1, 2, 4, 7, 15, 16]

Оптимальное значение функции цели: C = 10.99999999999999

#### 4.5.2 методом крайних точек

X = [0.0, 4.333333333333334, 7.333333333333333, 0.0, 2.0, 0.0, 0.0, 1.3333333333333333, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 2.0, 1.3333333333333335]

Оптимальное значение функции цели: C = 10.99999999999999

## 5 Обоснование оптимальности решений

Обратимся к теореме: допустимое базисное решение системы определяет крайнюю точку области, заданной неравенствами.
Эта теорема позволяет утверждать следующее: если задача имеет оптимальное решение, то существует хотя бы одно оптимальное базисное решение.
Симплекс-метод может быть определен теперь как метод, предполагающий последовательный анализ базисных решений системы.
Предварительно исследуем вопрос существования решений, симплекс метод исключает

необходимость таких исследований, т. е. он не связан с априорными предположениями о свойствах систем. Симплекс- метод он состоит из двух этапов. Для 1-го этапа характерно следующее: начальные действия производятся с системой, входящей составной частью в стандартную форму задачи, причем не нужно ничего знать об этой системе или предварительно ее преобразовывать; в результате либо окажется найденным исходное базисное решение системы, либо последует вывод об отсутствии решения рассматриваемой задачи линейного программирования.
Если возможность решения подтверждена, начинается второй этап реализации симплекс-метода, приводящий к отысканию экстремума.
Обратимся теперь к теореме: допустимое базисное решение $x_i = B_i$ (i = 1,...,m), $x_j = 0$ (j = m + 1,....,n) является оптимальным тогда, когда коэффициенты $c_j$ при не базисных переменных в z = $z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$ не отрицательны.
Из теоремы следует: всякое решение системы, которому соответствует нулевая сумма (z - $z_0 = 0$) при $\forall$ $c_j > 0$ и $\forall x_j >= 0$ (j = m + 1,..., n), также будет оптимальным. Наконец, допустимое оптимальное базисное решение окажется единственным, если $\forall c_j$ > 0.

# 6 Приложения

Код лаборатрной