

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
КАФЕДРА "ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА"

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
"РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ"

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ:
ШАРАПОВ С.
ГРУППА: 3630102/70401

ПРОВЕРИЛ:
К.Ф-М.Н.
РОДИОНОВА Е.А.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020 г.

Содержание

	Стр.
1. Постановка задачи	3
1.1. Постановка задачи ЛП	3
2. Условие применимости	3
3. Описание алгоритма	3
3.1. Метод искусственного базиса	3
3.2. Симплекс-метод	4
3.3. Метод крайних точек	4
3.4. Восстановление решения по решению двойственной задачи	4
4. Результаты	4
4.1. Результат решения симплекс методом с начальным приближением методом искусственного базиса	4
4.1.1 Начальный базис вектор полученный методом искусственного базиса	4
4.1.2 Интерпретация решения	4
4.2. Ответ в поставленной задаче	4
4.3. Результат методом крайних точек	5
4.4. Двойственная задача	5
4.5. Результаты двойственной задачи	5
4.5.1 Симплекс методом	5
4.5.2 методом крайних точек	5
5. Обоснование оптимальности решений	5
6. Приложения	6

1 Постановка задачи

Требуется с помощью симплекс-метода с использованием начального приближения методом искусственного базиса и метода крайних точек решить прямую и двойственную задачу линейного программирования, включающую 4 переменных, 1 имеет ограничение на знак, и состоящую из 2 неравенств разных знаков и 2 равенств. Также требуется написать алгоритм позволяющий восстановить решение прямой задачи по решению двойственной.

1.1 Постановка задачи ЛП

Составим задачу подходящую под наши требования:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$C = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

2 Условие применимости

Любая задача ЛП сводится к канонической форме. Каноническая форма имеет следующий вид:

$$AX = b$$

$X \geq 0, b \geq 0$ $C = \langle c_i, x \rangle \rightarrow \text{extr}$ Сведём нашу систему к каноническому виду, для применения методов:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 5 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_6 - 2x_7 - x_8 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_9 = 8 \\ x_1, \dots, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

$$C = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 4x_7 \rightarrow \min$$

3 Описание алгоритма

3.1 Метод искусственного базиса

Метод заключается в специальном выборе начального приближения (Реализуется, если матрица полного ранга). Алгоритм выбора данного приближения следующий:

1) Вводится вспомогательная задача: $\sum_{i \in M} y[i] \rightarrow \min$

$$A[M, N]X[N] + E[M, M]y[M] = b[M]$$

$$x[N] \geq 0$$

$$y[N] \geq 0$$

2) Начальный опорный вектор : $x[N] = 0$

$$y[N] = b[M], \text{ где } b[M] \geq 0$$

В качестве базиса столбца $E[M, M]$

3) По завершении работы симплекс-метода отбрасываем $y[N]$, которые мы ввели и получаем решение исходной задачи.

3.2 Симплекс-метод

Симплекс-метод позволяет переходить от одного опорного вектора к другому так, что значение целевой функции не увеличивается.

В результате не более, чем за C_n^m (максимальное количество опорных векторов) шагов достигается оптимальное значение, либо опровергается его существование.

3.3 Метод крайних точек

В свою очередь метод крайних точек заключается в переборе возможных базисных векторов и выявление того, при котором функция цели будет наименьшей. Своего рода это полный переборный алгоритм.

3.4 Восстановление решения по решению двойственной задачи

Обозначим через $C_\sigma = (c_{i1}, \dots, c_{im})$ вектор строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции задачи. А через P^{-1} - матрицу обратную матрице P , где P состоит из компонент векторов P_{i1}, \dots, P_{im}

Тогда имеет место теорема: Если основная задача имеет оптимальный план X^* , то $Y^* = C_\sigma P^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.

4 Результаты

4.1 Результат решения симплекс методом с начальным приближением методом искусственного базиса

4.1.1 Начальный базис вектор полученный методом искусственного базиса

В нашей задаче базис будет выглядеть следующим образом:

$$X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 4, 7, 8]$$

4.1.2 Интерпретация решения

Условие оптимальности полученного решения:

- Если задача на максимум – в строке функционала нет отрицательных коэффициентов (т.е. при любом изменении переменных значение итогового функционала расти не будет).
- Если задача на минимум – в строке функционала нет положительных коэффициентов (т.е. при любом изменении переменных значение итогового функционала уменьшаться не будет).

4.2 Ответ в поставленной задаче

$$X = [2.0, 1.0, 0.0, 3.0, 0.0, 0.0, 0.5, 0.0, 0.0]$$

$$N = [0, 1, 3, 6]$$

Оптимальное значение функции цели: $C = 11.0$

4.3 Результат методом крайних точек

$X = [1.9999999999999998, 1.0000000000000004, 0.0, 3.0, 0.0, 0.0, 0.49999999999999956, 0.0, 0.0]$

Оптимальное значение функции цели: $C = 11.000000000000002$

4.4 Двойственная задача

Двойственная к поставленной задаче (из канонического вида поставленной задачи) в каноническом виде:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 + 4x_4 - 4x_5 + 2x_6 - 2x_7 + x_8 = 1 \\ x_2 - x_3 + 4x_6 - 4x_7 + x_9 = 2 \\ x_2 - x_3 + 4x_6 - 4x_7 - x_{10} = 2 \\ x_0 - 1x_1 + x_2 - x_3 + x_{11} = 3 \\ x_0 - x_1 + x_2 - x_3 - x_{12} = 3 \\ 2x_4 - 2x_5 + x_{13} = 4 \\ 2x_4 - 2x_5 - x_{14} = 4 \\ -x_4 + x_5 + x_{15} = 0 \\ x_6 - x_7 + x_{16} = 0 \\ x_0 \dots x_{16} \geq 0 \end{cases}$$

$$= 5 * x_0 - 5 * x_1 + 4 * x_2 - 4 * x_3 + 7 * x_4 - 7 * x_5 + 8 * x_6 - 8 * x_7 - > \max$$

4.5 Результаты двойственной задачи

4.5.1 Симплекс методом

$X = [0.0, 4.333333333333334, 7.333333333333333, 0.0, 2.0, 0.0, 0.0, 1.333333333333333, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 2.0, 1.333333333333335]$

$N = [1, 2, 4, 7, 15, 16]$

Оптимальное значение функции цели: $C = 10.999999999999999$

4.5.2 методом крайних точек

$X = [0.0, 4.333333333333334, 7.333333333333333, 0.0, 2.0, 0.0, 0.0, 1.333333333333333, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 2.0, 1.333333333333335]$

Оптимальное значение функции цели: $C = 10.999999999999999$

5 Обоснование оптимальности решений

Обратимся к теореме: допустимое базисное решение системы определяет крайнюю точку области, заданной неравенствами.

Эта теорема позволяет утверждать следующее: если задача имеет оптимальное решение, то существует хотя бы одно оптимальное базисное решение.

Симплекс-метод может быть определен теперь как метод, предполагающий последовательный анализ базисных решений системы.

Предварительно исследуем вопрос существования решений, симплекс метод исключает

необходимость таких исследований, т. е. он не связан с априорными предположениями о свойствах систем. Симплекс- метод он состоит из двух этапов. Для 1-го этапа характерно следующее: начальные действия производятся с системой, входящей составной частью в стандартную форму задачи, причем не нужно ничего знать об этой системе или предварительно ее преобразовывать; в результате либо окажется найденным исходное базисное решение системы, либо последует вывод об отсутствии решения рассматриваемой задачи линейного программирования.

Если возможность решения подтверждена, начинается второй этап реализации симплекс-метода, приводящий к отысканию экстремума.

Обратимся теперь к теореме: допустимое базисное решение $x_i = B_i$ ($i = 1, \dots, m$), $x_j = 0$ ($j = m + 1, \dots, n$) является оптимальным тогда, когда коэффициенты c_j при не базисных переменных в $z = z_0 + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j$ не отрицательны.

Из теоремы следует: всякое решение системы, которому соответствует нулевая сумма ($z - z_0 = 0$) при $\forall c_j > 0$ и $\forall x_j \geq 0$ ($j = m + 1, \dots, n$), также будет оптимальным. Наконец, допустимое оптимальное базисное решение окажется единственным, если $\forall c_j > 0$.

6 Приложения

Код лаборатрной