

1 Описание метода

1.1 Градиентный метод 1-го порядка наискорейшего спуска

Input: $Eps > 0$ - необходимая точность вычисления, $f(x)$, $nullPoint$ - начальное приближение.

Output: x_{min} - значение аргумента, такое, что $\|\nabla f(x_k)\|^2 < Eps^2$.

Алгоритм по шагам:

1) $x_0 = nullPoint$, $k = 0$;

2) while($\|\nabla f(x_k)\|^2 > Eps^2$) {

3) вычислим α_k : $f(x) = f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \rightarrow \min$. Для этого будем использовать метод золотого сечения.

4) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$, $k = k + 1$.
}

Таким образом на момент завершения цикла мы получим $x_k = x_{min}$.

Замечания:

1) Обоснование выбора условия окончания вычисления для метода одномерной минимизации

Для нахождения x_k решаем задачу одномерной минимизации, с помощью метода золотого сечения, необходимо уменьшить интервал неопределенности так, чтобы добиться выполнения условия $\|\nabla f(x_k)\| \leq Eps$. Воспользуемся условием Липшица, задав точность для поиска параметра равную $\frac{Eps}{L}$. Таким образом, движение идёт по направлению к $\nabla f = 0$, что позволит достичь условия окончания цикла.

2) Использование квадрата нормы в условии выхода из цикла:

Выбор условия оправдан тем, что вычисление квадратного корня на каждой итерации значительно повышает время работы приложения. Возводя в квадрат обе части условия остаётся аналогичным.

1.2 Метод Ньютона

В данном методе улучшено представление приближения $f(x)$, удерживая в $e1$ разложении квадратичные члены:

$$f_k(x) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{(x_k - x)^T H(x_k)(x_k - x)}{2}$$

Рассмотрим вектор $d_k = x_{k+1} - x_k$. Определяется из :

$$d_k = -(H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Тогда следующее приближение:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

Данный метод называют методом Ньютона, потому что $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ это примененный к СЛАУ $grad(f(x_k)) = 0$ метод Ньютона, из-за этого получается регулярный шаг $\alpha = 1$.

Input: $Eps > 0$ - необходимая точность вычисления, $f(x)$, $nullPoint$ - начальное приближение.

Output: x_{min} - значение аргумента, такое, что $\|\nabla f(x_k)\|^2 < Eps^2$.

Алгоритм:

1) $x_0 = nullPoint$, $k = 0$.

2) while($\|\nabla f(x_k)\|^2 > Eps^2$) {

3) Вычисляем d_k

4) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. Переходим к следующей итерации, $k = k + 1$.

}

Таким образом на момент завершения цикла мы получим $x_k = x_{min}$.

2 Результаты

Для обоих алгоритмов:

1) Начальное приближение = $[0.00, 0.00]$

2) $Eps = 0.01$

Метод наискорейшего спуска сошёлся к точке $[0.54; -0.72]$ за 649 шагов.

Метод Ньютона сошёлся к точке $[0.17; -0.97]$ за 3 шага.

Оба метода применимы к нашей задаче в некоторой окрестности и выдают решения с требуемой точностью.

Метод Ньютона требовал меньшего числа шагов, чем метод наискорейшего спуска. Но сравнивать скорость работы этих методов лишь по числу итераций было бы некорректно, так как в одном случае нам приходится решать СЛАУ, а в другом - задачу одномерной минимизации.

3 Оценка достоверности результатов

Исходя из условий сходимости, алгоритм наискорейшего спуска и алгоритм Ньютона всегда сходятся к точке, где $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$.

Проведём дополнительный эксперимент для метода наискорейшего спуска: несколько раз запустим алгоритм с разными начальными приближениями.

Таблица 1: Метод наискорейшего спуска

стартовая точка	$x1_{stop}$	$x2_{stop}$	число итераций
[0.0; 0.0]	0.54	-0.72	649
[2.0; 5.0]	0.54	-0.72	913
[-1.0; -1.0]	-0.23	-1.23	542
[-5.0; 5.0]	-0.23	-1.23	925
[-0.25; -1.25]	-0.23	-1.23	76

По итогам данного эксперимента можем видеть, что метод наискорейшего спуска для различных начальных приближений сходится к разным точкам оптимума, и всякий раз достигает точки минимума функции.

4 Замечания к отчёту

4.1 Абсолютная погрешность

Найдём решение системы состоящей из уравнений (равенства нулю частных производных):

$$\begin{cases} -6 * \sin(6 * x_0 + x_1) + 8x_0 - 1 = 0 \\ -\sin(6 * x_0 + x_1) + 2x_1 + 2 = 0 \end{cases}$$

Ответы данной системы:

- 1) $x_0 = 0.1718826465817505, x_1 = -0.968744902278833$
- 2) $x_0 = -0.2338929588802472, x_1 = -1.239261972586831$
- 3) $x_0 = 0.5446624890114693, x_1 = -0.7202250073256872$

Для нахождения абсолютной погрешностью воспользуемся формулой: $\epsilon = \max\{|\hat{x}_0 - x_0|, |\hat{x}_1 - x_1|\}$, где \hat{x}_0, \hat{x}_1 - решения найденный методом Ньютона или градиентным методом, а x_0, x_1 - точные решения.

Решение найденные градиентным методом с точностью до 16 - го знака после запятой:
 $\hat{x}_0 = 0.5440188690581327, \hat{x}_1 = -0.7156045422440964$

Решение найденные методом Ньютона с точностью до 16 - го знака после запятой:
 $\hat{x}_0 = 0.17188264656685368, \hat{x}_1 = -0.9687449022887642$

Теперь найдем абсолютную погрешность:

- 1) Для градиентного метода $\epsilon = 0.004620465081590752$
- 2) Для метода Ньютона $\epsilon = 1.4896833766542272 * 10^{-11}$

Большая точность полученная методом Ньютона обосновывается близостью к точке минимума и малым количеством итераций(3).

4.2 Дополнительные пояснения к странице 3

Рассмотрев значения близь точек минимума можно увидеть это утверждение.