

Spojena kubična Bézierjeva krpa

Nik Mrhar in Lucija Fekonja

Februar 2025

1 Uvod

Kubične Bézierjeve krpe se v računalniški grafiki uporabljajo za interpolacijo vhodnih točk in omogočajo konstrukcijo gladkih površin. V tem članku konstruiramo shemo za interpolacijo podanih točk in njihovih prvih odvodov s kubičnimi Bézierjevimi krpami.

Najprej predstavimo osnovne definicije kubičnih Bézierjevih krp in njihovih odvodov, nato pa razvijemo metodo za določitev kontrolnih točk, ki zagotavljajo želeno natančnost in gladkost interpolacije. Na koncu prikažemo praktične primere in ocenimo učinkovitost predlagane sheme.

2 Kubična Bézierjeva krpa

V nadaljevanju podajamo definicijo kubične Bézierjeve krpe, ki jo uporabimo v konstrukciji sheme predstavljene v poglavju 3. Krpa je definirana nad trikotnikom T z oglišči V_1 , V_2 in V_3 .

Definicija 1 (Kubična Bézierjeva krpa) Kubična Bézierjeva krpa, definirana nad trikotnikom T , je določena s kontrolnimi točkami $b_{ijk} \in \mathbb{R}^3$, kjer velja $i + j + k = 3$. Podana je s parametrizacijo $p : T \mapsto \mathbb{R}^3$ s predpisom

$$P(u, v, w) = u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 6uvw b_{111} + \\ 3uv^2 b_{120} + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + w^3 b_{003},$$

kjer so u , v in w baricentrične koordinate, za katere velja $u + v + w = 1$.

V konstrukciji C^1 interpolacijskega zlepka smerni odvod zagotavlja gladkost med posameznimi krpami. Ker je Bézierjeva krpa definirana nad trikotnikom s pomočjo baricentričnih koordinat, mora biti njen odvod pravilno izražen v tem koordinatnem sistemu.

Definicija 2 (Smerni odvod Bézierjeve krpe) Naj bo P zvezno odvedljiva funkcija, ki določa Bézierjevo krpo, in naj bo smer podana z vektorjem $z = (z_1, z_2, z_3)$, določenim z oglišči trikotnika kot

$$z = z_1 V_1 + z_2 V_2 + z_3 V_3,$$

pri čemer velja $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tedaj je smerni odvod funkcije P v točki V v smeri vektorja z določen z izrazom

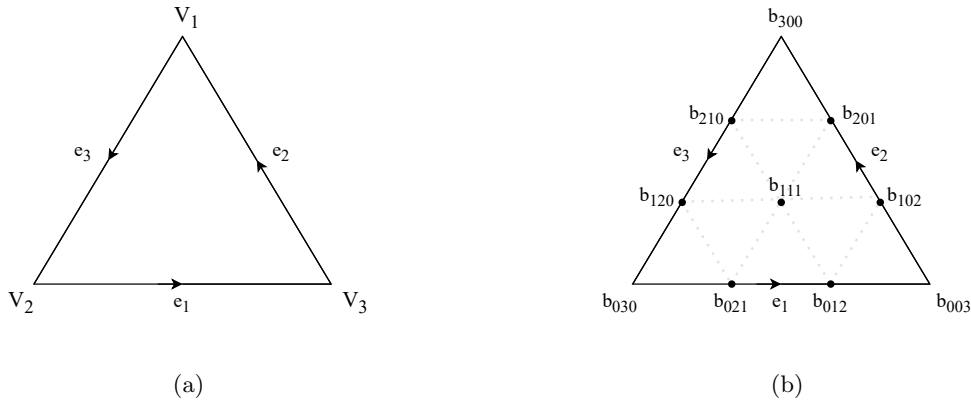
$$\frac{\partial P(V)}{\partial z} = \frac{\partial P(V)}{\partial u} z_1 + \frac{\partial P(V)}{\partial v} z_2 + \frac{\partial P(V)}{\partial w} z_3.$$

Ta definicija nam omogoča izračun tangencialnih odvodov, ki so potrebni za določitev robnih pogojev pri konstrukciji C^1 interpolacijskega zlepka.

3 Shema

V tem poglavju bomo konstruirali linearen C^1 interpolant funkcije F , ki je zvezno odvedljiva nad trikotnikom $T = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$. Aproksimacijski polinom $P \in \mathbb{P}_3^2$ je določen z interpolacijo vrednosti in prvih odvodov v ogliščih trikotnika ter interpolacijo smernega odvoda v središču vsake izmed njegovih stranic v smeri normal. Pri konstrukciji bomo sledili shemi opisani v [1].

Oglišča trikotnika bomo označevali kot $V_i = (x_i, y_i)$, kjer je $i = 1, 2, 3$. Predpostavimo, da poznamo vrednosti funkcije v ogliščih $F(V_i)$, ter njena prva odvoda $F_x(V_i)$ in $F_y(V_i)$. Z e_i označimo stranico trikotnika, ki leži nasproti oglišča V_i , in povezuje V_{i+1} z V_{i-1} , kjer so indeksi označeni po modulu 3. Oznake stranic so prikazane na sliki 1(a).



Slika 1: “Domenski trikotnik” z (a) oglišči in stranicami ter (b) kontrolnimi točkami.

Odvod funkcije F po stranici e_i lahko zapišemo po verižnem pravilu kot

$$\frac{\delta F}{\delta e_i} = (x_{i-1} - x_{i+1}) \frac{\delta F}{\delta x} + (y_{i-1} - y_{i+1}) \frac{\delta F}{\delta y}. \quad (1)$$

Z interpolacijo vrednosti funkcije F in in njenih odvodov izrazimo kontrolne točke, ki ležijo na na stranicah trikotnika. Tako v okolici oglišča V_1 dobimo naslednje kontrolne točke:

$$\begin{aligned} b_{300} &= F(V_1) \\ b_{210} &= F(V_1) + \frac{F_{e_3}(V_1)}{3} \\ b_{201} &= F(V_1) - \frac{F_{e_2}(V_1)}{3} \end{aligned}$$

Simetrično izrazimo kontrolne točke v okolici oglišč V_2 in V_3 . Preostane nam izračun kontrolne točke b_{111} , tako da bo pogoj C^1 izpolnjen na vseh stranicah trikotnika in bo interpolant linearen. Poiščemo jo v dveh korakih.

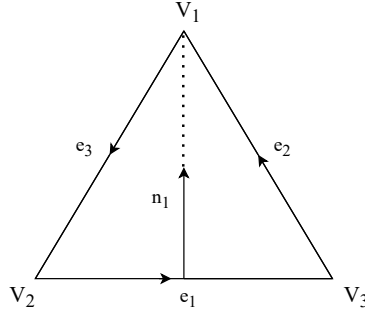
Najprej bomo določili točko b_{111}^i , da bo aproksimacijski polinom zvezno odvedljiv vzdolž stranice e_i . Z zamenjavo b_{111} z b_{111}^i v definiciji kubične Bézierjeve krpe konstruiramo lokalno shemo

$$\begin{aligned} P_i(u, v, w) &= u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 6u v w b_{111}^i + \\ &\quad 3u v^2 b_{120} + 3u w^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + w^3 b_{003}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ko to storimo za vsako stranico, smo ustvarili tri lokalne sheme, ki jih v drugem koraku s konveksno kombinacijo povežemo v končno aproksimacijo ploskve.

3.1 Lokalna shema

Za konstrukcijo lokalne sheme P_i uporabimo linearno interpolacijo smerne odvoda v središču stranice e_i , ki kaže proti središču trikotnika v smeri normale n_i , kot je prikazano na sliki 2. Omejili se bomo na obravnavo sheme P_1 , saj P_2 in P_3 izrazimo na simetričen način.



Slika 2: Normala n_1 na stranico e_1 .

Normalo n_1 lahko izrazimo s stranicami trikotnika kot

$$\begin{aligned} n_1 &= -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2} e_1 \\ &= (1, -1, 0) - h_1(0, -1, 1) \\ &= (1, h_1 - 1, -h_1), \end{aligned}$$

kjer smo uporabili baricentrične koordinate vektorjev e_1 in e_3 ter označili

$$h_1 = -\frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2}.$$

Po definiciji smerne odvoda Bézierjeve krivulje (2) izrazimo $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$. Pri tem upoštevamo, da je vrednost baricentrične koordinate u vzdolž stranice e_1 ničelna. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial n_1} &= 3(b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030}))v^2 \\ &\quad + 6(b_{111}^1 - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021}))vw \\ &\quad + 3(b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012}))w^2. \end{aligned}$$

Ker iščemo linearen interpolant smerne odvoda, se moramo znebiti kvadratnih členov v zgornjem izrazu. Zato uporabimo zvezo med baricentričnimi koordinatami $u + v + w = 1$. Upoštevamo, da je $u = 0$, nakar lahko izrazimo $w = 1 - v$. Zaporedoma označimo koeficiente z α , β in γ in preuredimo izraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial n_1} &= \alpha v^2 + \beta vw + \gamma w^2 \\ &= \alpha v^2 + \beta v(1 - v) + \gamma(1 - v)^2 \\ &= \alpha v^2 + \beta v - \beta v^2 + \gamma - 2\gamma v + \gamma v^2 \\ &= (\alpha - \beta + \gamma)v^2 + (\beta - 2\gamma)v + \gamma. \end{aligned}$$

Od tod sledi $\alpha - \beta + \gamma = 0$ oziroma

$$\begin{aligned} 2(b_{111}^1 - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021})) &= (b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030})) \\ &\quad + (b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012})). \end{aligned}$$

Izrazimo sredinsko kontrolno točko lokalne sheme P_1

$$b_{111}^1 = \frac{1}{2}(b_{120} + b_{102} + h_1(2b_{012} - b_{021} - b_{003}) + (1 - h_1)(2b_{021} - b_{012} - b_{030})).$$

Tako smo b_{111}^1 izrazili z ostalimi kontrolnimi točkami, pri čemer smo uporabili pogoj linearne interpolacije smernega odvoda. Na podoben način izrazimo tudi b_{111}^2 in b_{111}^3 .

3.2 Končna shema

Pri konstrukciji C^1 interpolacijskega zlepka je ključnega pomena zagotavljanje gladkosti med posameznimi Bézierjevimi krpami. Da bi dosegli to lastnost, uporabimo konveksno kombinacijo.

Definicija 3 (Konveksna kombinacija) Naj bodo x_1, \dots, x_n točke v realnem vektorskem prostoru. Konveksna kombinacija teh točk je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

kjer so $\alpha_i > 0$ pozitivna realna števila in velja $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Končno shemo oblikujemo s pomočjo konveksne kombinacije lokalnih shem (2). Ta kombinacija zagotavlja, da interpolacija ostaja gladka in da so prehodi med posameznimi trikotnimi krpami skladni. Ker vsaka lokalna shema zagotavlja ustrezne vrednosti odvodov v svoji regiji, njihova utežena kombinacija omogoča enoten opis celotne površine.

$$\begin{aligned} P(u, v, w) &= \frac{v^2 w^2 P_1 + u^2 w^2 P_2 + u^2 v^2 P_3}{v^2 w^2 + u^2 w^2 + u^2 v^2} \\ &= u^3 b_{300} + v^3 b_{030} + w^3 b_{003} \\ &\quad + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 3u v^2 b_{120} \\ &\quad + 3v^2 w b_{021} + 3u w^2 b_{102} + 3v w^2 b_{012} \\ &\quad + 6u v w \frac{v^2 w^2 b_{111}^1 + u^2 w^2 b_{111}^2 + u^2 v^2 b_{111}^3}{v^2 w^2 + u^2 w^2 + u^2 v^2}. \end{aligned}$$

Da je to res konveksna kombinacija sledi iz dejstva, da so u, v in w baricentrične koordinate, kar pomeni, da zanje velja $0 < u, v, w < 1$. Ker je produkt nenegativnih števil vedno nenegativen, so vsi koeficienti $\frac{v^2 w^2}{S}$, $\frac{u^2 w^2}{S}$ in $\frac{u^2 v^2}{S}$ nenegativni, kjer je $S = v^2 w^2 + u^2 w^2 + u^2 v^2$. Prav tako opazimo, da normalizacija s S pripomore, da se koeficienti seštejejo v ena, kar potrjuje, da je dan izraz res konveksna kombinacija.

Opazimo, da v podanem predpisu nastopajo singularnosti v ogliščih trikotnika. Te se pojavijo, ker je v ogliščih ena izmed baricentričnih koordinat enaka ena, preostali dve pa sta ničelni. Kljub temu lahko te singularnosti odpravimo, saj so vrednosti površine v ogliščih trikotnika znane.

4 Uporaba sheme za interpolacijo točk

Obravnavali bomo problem interpolacije točk. Naš cilj je za dane vrednosti $F(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$ uporabiti predlagano shemo za konstrukcijo funkcije F , ki te vrednosti interpolira.

Pristop je sestavljen iz treh delov:

1. Poišči triangulacijo točk (x_i, y_i) .
2. Oцени parcialne odvode v ogliščih.
3. Izračunaj točko v trikotniku z uporabo trikotne sheme.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na uporabo predlagane sheme v tretjem koraku ter si pogledali vpliv izbire triangulacije na natančnost rezultatov.

4.1 Primeri

Pri implementaciji sheme bomo uporabili 36 podatkovnih točk definiranih v [3] in Delaunayevo triangulacijo le-teh, predstavljeno na sliki 3. Ker so eksplicitni predpisi funkcij v tem primeru znani, bomo uporabili točne vrednosti prvih odvodov. V praksi pa funkcije pogosto niso podane, zato moramo uporabiti metodo za oceno parcialnih odvodov. Primer take metode je podrobneje opisan v [2].

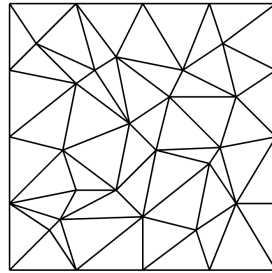
Izbrali smo tri testne funkcije:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0.75 \cdot e^{(-(9x-2)^2+(9y-2)^2)/4} \\
 &\quad + 0.75 \cdot e^{(-(9x+1)^2/49-(9y+1)/10)} \\
 &\quad + 0.5 \cdot e^{(-(9x-7)^2+(9y-3)^2)/4} \\
 &\quad - 0.2 \cdot e^{(-(9x-4)^2-(9y-7)^2)} \\
 F_2 &= (1.25 + \cos(5.4y))/(6 + 6(3x - 1)^2) \\
 F_3 &= (\tanh(9y - 9x) + 1)/9
 \end{aligned}$$

Za analizo natančnosti smo izračunali vrednosti v 725 točkah na enakomerni mreži velikosti 25×25 v enotskem kvadratu ter obravnavali maksimalne absolutne in povprečne napake. Te napake so navedene v Tabeli 1.

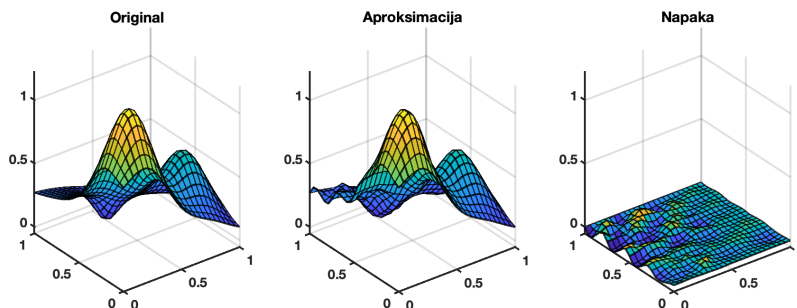
Funkcija	maksimalna napaka	povprečna napaka
F_1	0.058625	0.012040
F_2	0.011070	0.000728
F_3	0.030336	0.002393

Tabela 1: Maksimalne in povprečne napake testnih funkcij.

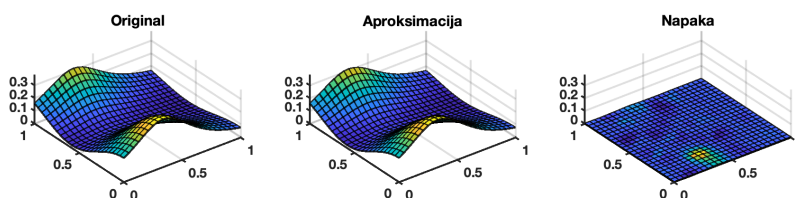


Slika 3: Delaunayeva triangulacija 36 izbranih točk v enotskem kvadratu.

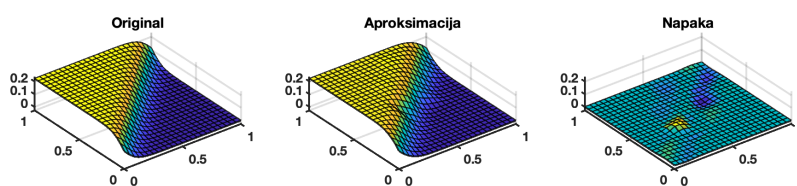
Za ponazoritev metode so na slikah 4(a), 4(b) in 4(c) prikazani rezultati interpolacije z uporabo predlagane sheme. Poleg aproksimacije sta prikazani še originalna ploskev ter razlika vrednosti ploskev.



(a)



(b)



(c)

Slika 4: Interpolacijske ploskve funkcij F_1 , F_2 in F_3 .

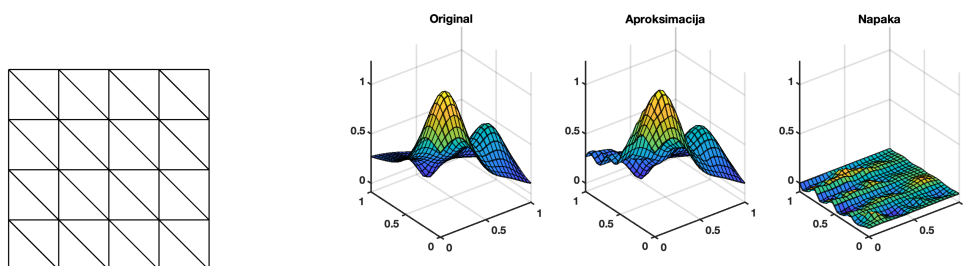
4.2 Odvisnost od izbire triangulacije

Pri zgornjih izračunih smo uporabili Delaunayevo triangulacijo, saj ta zagotavlja čim bolj enakomerne trikotnike. Vendar je natančnost rezultatov močno odvisna od izbrane triangulacije, kar je razvidno iz naslednjega primera za funkcijo F_1 .

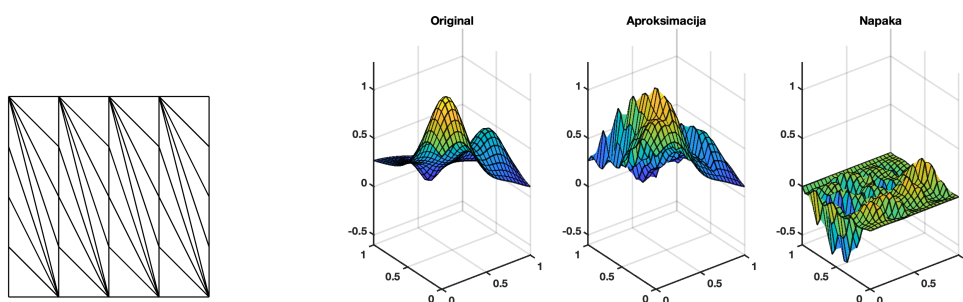
V tabeli 2 so predstavljene maksimalne ter povprečne napake za dve različni triangulaciji mreže točk na enotskem kvadratu. Prav tako so prikazane slike aproksimacije ploskev za obe triangulaciji skupaj z originalno ploskvijo ter napako.

Triangulacija	maksimalna napaka	povprečna napaka
<i>Dobra</i>	0.085645	0.017095
<i>Slaba</i>	0.601206	0.063328

Tabela 2: Maksimalne in povprečne napake za dve različni triangulaciji.



(a) Delaunayeva triangulacija.



(b) Slaba triangulacija.

5 Zaključek

Članek predstavi metodo za konstrukcijo C^1 zlepka, ki temelji na uporabi kubičnih Bézierjevih krp. Metoda omogoča gladek prehod med posameznimi deli zlepka. Natančnost te metode za interpolacijo funkcij, ki je prikazana na treh primerih, je primerljiva z uporabo drugih metod, medtem ko je njena časovna učinkovitost precej boljša.

Literatura

- [1] T. N. T. Goodman and H. B. Said. A c^1 triangular interpolant suitable for scattered data interpolation. *Communications in Applied Numerical Methods*, 7:479–485, 1991.
- [2] R. J. Renka and K. Cline. A triangle-based c^1 interpolation method. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14:223–237, 1984.
- [3] Tracy Whelan. A representation of a c^2 interpolant over triangles. *Computer Aided Geometric Design*, 3:53–66, 1986.