Minimalne ploskve in Björlingov problem

Lucija Fekonja
Mentor: Doc. dr. Uroš Kuzman

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

30. maj 2023

Minimalna ploskev

Definicija

Ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ *je minimalna ploskev, če in samo če obstaja okolica vsake točke* $p \in M$*, omejena s sklenjeno krivuljo, ki ima najmanjšo površino med vsemi ploskvami z isto omejitvijo.*

Minimalna ploskev

Definicija

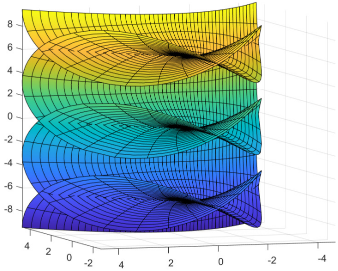
Ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ je minimalna ploskev, če in samo če obstaja okolica vsake točke $p \in M$, omejena s sklenjeno krivuljo, ki ima najmanjšo površino med vsemi ploskvami z isto omejitvijo.

Definicija

Ploskev se imenuje minimalna ploskev, če je njena srednja ukrivljenost enaka nič.

Catalanova minimalna ploskev

$$\phi(u,v) = (1 - cos(u)cosh(v), 4sin(u/2)sinh(v/2), u - sin(u)cosh(v))$$



Slika: Catalanova minimalna ploskev

Björlingov problem

Naj velja:

$$\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3 \text{realno analitična krivulja}$$
$$\eta : I \mapsto \mathbb{R}^3 \text{realno analitično vektorsko polje}$$
$$|\eta(t)| = 1$$
$$\eta(t) \cdot \alpha'(t) = 0$$

Najdi parametrizacijo minimalne ploskve $\phi(u, v)$, za katero velja:

1. Ploskev naj vsebuje krivuljo α pri $v = 0$. To pomeni, $\forall u \in I . \alpha(u) = \phi(u, 0)$.
2. Normale na ploskev se naj vzdolž celotne krivulje α ujemajo z vektorji vektorskega polja η: $\forall u \in I . \eta(u) = N(u, 0)$.

Rešitev Björlingovega problema

$$\phi(u, v) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{z_0}^{z} \eta(w) \times \alpha'(w)dw\right)$$

Princip identičnosti

Izrek

Naj bosta f in g holomorfni funkciji na povezanem odprtem območju $D \subseteq \mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$). Če ima $S \subseteq D$ stekališče, potem je $f = g$ na D.

Izotermna parametrizacija

Izotermna parametrizacija

Lema

ϕ *ima izotermne koordinate natanko tedaj, ko velja* $(\phi')^2 = 0$.

Izotermna parametrizacija

Lema

ϕ ima izotermne koordinate natanko tedaj, ko velja $(\phi')^2 = 0$.

Lema

Ploskev M z izotermno parametrizacijo $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ je minimalna natanko tedaj, ko so ϕ^1, ϕ^2 in ϕ^3 harmonične.

Dokaz rešitve Björlingovega problema

$$\phi(u,v) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{z_0}^{z} \eta(w) \times \alpha'(w)dw\right)$$

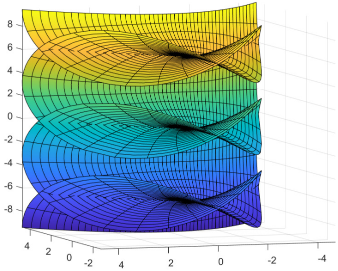
Konstrukcija minimalne ploskve

Krivulja: $\alpha(u) = (\beta(u), 0, \gamma(u))$
Normale: $N = \frac{(-\gamma', 0, \beta')}{\sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}}$
Izračunamo vektorski produkt $N \times \alpha' = \left(0, \sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}, 0\right)$
Rešitev problema je torej:

$$Re\left(\alpha - i\int N \times \alpha'\right) = \left(Re\beta, Im\int\sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}, Re\gamma\right)$$

Catalanova minimalna ploskev

$$\phi(u, v) = (1 - cos(u)cosh(v), 4sin(u/2)sinh(v/2), u - sin(u)cosh(v))$$



Slika: Catalanova minimalna ploskev