Minimalne ploskve in Björlingov problem

Lucija Fekonja
Mentor: Doc. dr. Uroš Kuzman

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

19. december 2022

Definicija

Enotsko normalo N regularne ploskve s parametrizacijo $\phi(u, v)$ definiramo kot vektor $N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$.

Definicija

Binormala B v točki $p \in S$ je vektor $B = N \times T$, kjer je N enotska normala in T izbrani tangentni vektor iz T_pS.

Definicija

Normalna ukrivljenost κ_n je komponenta ukrivljenosti κ ploskovne krivulje γ v smeri normale.

$$\kappa_n = \frac{dT}{ds} \cdot N.$$

Definicija

Geodetska ukrivljenost κ_g je komponenta ukrivljenosti κ ploskovne krivulje γ v smeri stranske normale.

$$\kappa_g = \frac{dT}{ds} \cdot B.$$

Definicija

Naj bo p točka na ploskvi. Poglejmo vse krivulje γ_i na ploskvi, ki gredo skozi točko p. Naj bo κ_1 maksimalna izmed normalnih ukrivljenosti teh krivulj v točki p, κ_2 pa minimalna. Srednja ukrivljenost H je definirana kot $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$.

Definicija

Ploskev se imenuje minimalna ploskev, če je njena srednja ukrivljenost enaka nič.

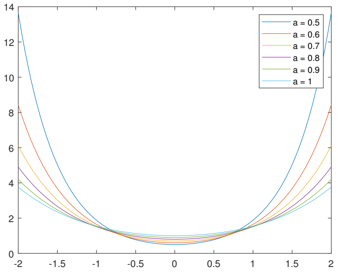
Od kod prihaja ime minimalna ploskev?

Definicija

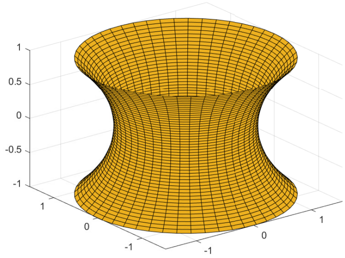
Ploskev $M \subset \mathbb{R}$ je minimalna ploskev natanko tedaj, ko ima vsaka točka $p \in M$ okolico, za katero ima M najmanjšo ploščino med vsemi z enakim robom.

- Definicija je lokalna.
- Definicija je povezana z milnimi filmi.

Katenoida

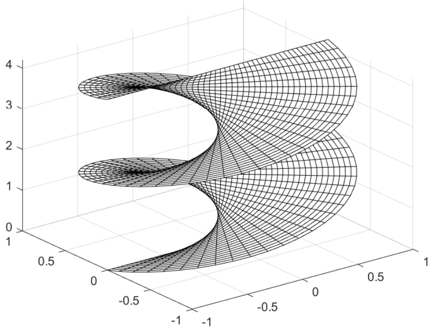


Slika: Verižnica za $a \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$



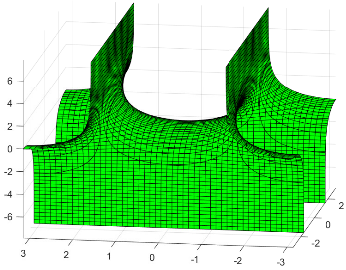
Slika: Katenoida

Helikoid

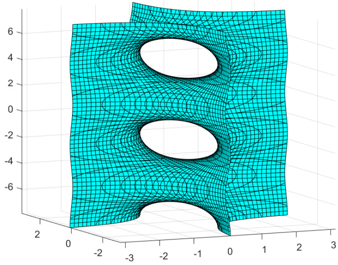


Slika: Helikoid

Scherkova prva in druga ploskev



Slika: Del prve Scherkove ploskve



Slika: Del druge Scherkove ploskve

Björlingov problem

Definicija

Funkcija $f(x)$ realne spremenljivke x je realno analitična, če je $f(z)$ holomorfna za kompleksno spremenljivko z.

Naj velja:

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) : I \mapsto \mathbb{R}^3 &\text{realno analitična krivulja} \\
\eta : I \mapsto \mathbb{R}^3 &\text{realno analitično vektorsko polje} \\
|\eta| &= 1 \\
\eta(t) \cdot \alpha'(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Najdi parametrizacijo minimalne ploskve $\phi(u, v)$, za katero velja:

1. Ploskev M naj vsebuje krivuljo α pri $v = 0$. To pomeni, $\forall u \in I . \alpha(u) = \phi(u, 0)$.
2. Normale na ploskev M se naj vzdolž celotne krivulje α ujemajo z vektorji vektorskega polja η: $\forall u \in I . \eta(u) = N(u, 0)$.

Rešitev:

$$\phi(u, v) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{z_0}^{z} \eta(w) \times \alpha'(w)dw\right)$$