Minimalne ploskve in Björlingov problem

Lucija Fekonja
Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

February 3, 2023

1 Definicija minimalne ploskve

Minimalno ploskev lahko definiramo na 8 različnih, a med sabo ekvavilentnih načinov. Lokalno definicijo minimalne ploskve lahko zapišemo na sledeč način.

Definicija 1 *Ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ je* minimalna ploskev*, če in samo če obstaja okolica vsake točke $p \in M$, omejena s sklenjeno krivuljo, ki ima najmanjšo površino med vsemi ploskvami z isto omejitvijo.*

Intuitivno je minimalna ploskev takšna ploskev, ki ima najmanjšo površino pri nekih robnih pogojih. Pogosteje jih definiramo z uporabo srednje ukrivljenosti. Na ta način jih podamo globalno. Zavoljo te definicije spoznajmo nekaj osnovnih pojmov vezanih na ploskve v splošnem.

Definicija 2 Enotsko normalo *N regularne ploskve s parametrizacijo $\phi(u, v)$ definiramo kot vektor $N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$.*

Definicija 3 Normalna ukrivljenost *K_n je komponenta ukrivljenosti K ploskovne krivulje γ v smeri normale*

$$K_n = \frac{dT}{dS} \cdot N.$$

Definicija 4 *Naj bo p točka na ploskvi. Poglejmo vse krivulje γ_i na ploskvi, ki gredo skozi točko p. Naj bo κ_1 maksimalna izmed normalnih ukrivljenosti teh krivulj v točki p, κ_2 pa minimalna.* Srednja ukrivljenost H *je definirana kot $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.*

Sedaj lahko globalno definiramo minimalno ploskev.

Definicija 5 *Ploskev se imenuje* minimalna ploskev*, če je njena srednja ukrivljenost enaka nič.*

2 Prva in druga fundamentalna forma

Prva in druga fundamentalna forma sta operatorja, s katerima lahko med drugim tudi izrazimo definicijo srednje ukrivljenosti in iz tega dobimo še eno ekvivalentno definicijo minimalne ploskve. Zagotavljata nam preprost kriterij za ugotavljanje minimalnosti ploskve.

Definicija 6 Prva fundamentalna forma $I(u, v)$ *za* $u, v \in T_pS$ *je simetrični operator*

$$I(u, v) = u \cdot v$$

Kvadratna forma prve fundamentalne forme je $I(v) = I(v, v) = v \cdot v = |v|^2$
Označili bomo:

$$E = I(\phi_u) = \phi_u \cdot \phi_u = |\phi_u|^2$$
$$F = I(\phi_u, \phi_v) = \phi_u \cdot \phi_v$$
$$G = I(\phi_v) = \phi_v \cdot \phi_v = |\phi_v|^2$$

Koeficienti E, F in G se imenujejo *koeficienti prve fundamentalne forme* I.

Definicija 7 Weingartenova preslikava $\Omega_p : T_pS \to T_pS$ *je sebi-adjungirana linearna preslikava s predpisom*

$$\Omega_p(v_1\phi_u(p) + v_2\phi_v(p)) = -v_1N_u(p) - v_2N_v(p),$$

kjer je $\phi : D \to S$ *parametrizacija ploskve,* $p \in D$ *in* N *enotski normalni vektor.*

Sebi-adjungirano pomeni:

$$\forall u, v \in T_pS. \quad \Omega_p(u) \cdot v = u \cdot \Omega_p(v)$$

.

Definicija 8 Druga fundamentalna forma $II(u, v)$ *za* $u, v \in T_pS$ *je simetrični operator*

$$II(u, v) = \Omega_p(u) \cdot v$$

Koeficiente druge fundamentalne forme lahko izračunamo kot:

$$l = \phi_{uu} \cdot N$$
$$m = \phi_{uv} \cdot N$$
$$n = \phi_{vv} \cdot N$$

Srednjo ukrivljenosti lahko sedaj podamo še nekoliko drugače:

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)},$$

kjer so E, F, G, l, m in n koeficienti prve oziroma druge fundamentalne forme.

To nam zagotavlja nov kriterij preverjanja ali je ploskev minimalna. Na minimalni ploskvi mora namreč veljati

$$En + Gl - 2Fm = 0 \tag{1}$$

3 Enačba minimalne ploskve

Nekatere ploskve lahko podamo kot graf funkcije v dveh spremenljivkah. Parametrizacija take ploskve je $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

Vektorja hitrosti sta potem

$$X_u = (1, 0, f_u) \qquad X_v = (0, 1, f_v)$$

Drugi odvodi pa so

$$X_{uu} = (0, 0, f_{uu}) \qquad X_{uv} = (0, 0, f_{uv}) \qquad X_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

Iz tega lahko dobimo enotsko normalo $N = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$.

Izvedeti želimo pri kakšnih pogojih je definirana ploskev minimalna, zato izračunamo koeficiente prve in druge fundamentalne forme.

$$E = 1 + f_u^2 \qquad F = f_u \cdot f_v \qquad G = 1 + f_v^2$$

$$l = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \qquad m = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \qquad n = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

Iz enačbe 1 izračunamo srednjo ukrivljenost.

$$\begin{aligned} H &= En + Gl - 2Fm \\ &= \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Vemo, da je ploskev minimalna natanko takrat, ko je njena srednja ukrivljenost ničelna. Iz tega sledi naslednja trditev.

Trditev 1 *Ploskev M podana kot graf funkcije $z = f(x,y)$ je minimalna natanko tedaj, ko je*

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0$$

Enačbo iz trditve imenujemo enačba minimalne ploskve. V splošnem ni rešljiva, z dodatnimi robnimi pogoji, pa jo lahko rešimo in s tem dobimo različne primere minimalnih ploskev.

4 Izotermne koordinate

Definicija 9 *Parametrizacija ϕ je* izotermna*, če je $E = \phi_u \cdot \phi_u = \phi_v \cdot \phi_v = G$ in $F = \phi_u \cdot \phi_v = 0$.*

Če je ϕ izotermna parametrizacija ploskve, je srednja ukrivljenost $H = \frac{n+l}{2E}$. Zato je ploskev z izotermno parametrizacijo minimalna že, če je $n + l = 0$.

Izrek 1 *Za vsako minimalno ploskev obstaja minimalna parametrizacija.*

5 Björlingov problem

Da lahko problem navedemo, moramo poznati definicijo realno analitične funkcije.

Definicija 10 *Funkcija $f(x)$ realne spremenljivke x je* realno analitična *v točki $a \in \mathbb{R}$, če obstaja $R > 0$, da lahko na intervalu $(a - R, a + R)$ funkcijo f predstavimo s konvergentno potenčno vrsto.*

Pravimo, da je f realno analitična na $I \subseteq \mathbb{R}$, če je realno analitična v vsaki točki $a \in I$. Podobno definiramo tudi realno analitično vektorsko polje na I. V tem primeru morajo biti vse komponente polja realno analitične na I.

Recimo sedaj, da je $\alpha(t) : I \mapsto \mathbb{R}^3$ realno analitična krivulja in $\eta : I \mapsto \mathbb{R}^3$ realno analitično vektorsko polje, za katerega velja $|\eta| = 1$ in $\eta(t) \cdot \alpha'(t) = 0$ za vse točke t iz intervala I.

Zanimalo nas bo, ali obstaja minimalna ploskev, ki vsebuje krivuljo α, njen normalni vektor pa se vzdolž nje ujema s poljem η. Iskanju tovrstne ploskve pravimo Bjorlingov problem. Povedano drugače, iščemo parametrizacijo $\phi(u, v)$ minimalne ploskve M, za katero velja:

1. Ploskev M naj vsebuje krivuljo α pri $v = 0$. Tj. $\forall u \in I.\alpha(u) = \phi(u, 0)$.

2. Normale na ploskev M se naj vzdolž celotne krivulje α ujemajo z vektorji vektorskega polja η Tj. $\forall u \in I.\eta(u) = N(u, 0)$.

Ker sta $\alpha(t)$ in $\eta(t)$ realno analitični funkciji, sta njuni holomorfni razširitvi $\alpha(z)$ in $\eta(z)$ kompleksni holomorfni funkcji na $D \mapsto \mathbb{C}^3$, kjer je $I \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$. Izkaže se, da je rešitev Björlingovega problema ena sama in jo lahko zapišemo eksplicitno:

$$\phi(u, v) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{z_0}^{z} \eta(w) \times \alpha'(w)dw\right)$$

Da lahko dokažemo, da je navedena formula res rešitev problema, je potrebno poznati naslednji trditvi.

Izrek 2 *(Princip identičnosti) Če sta f in g holomorfni funkciji na povezanem območju $D \subset \mathbb{C}$, potem je $f = g$ na celotnem D.*

Lema 1 *ϕ ima izotermne koordinate natanko tedaj, ko velja $(\phi')^2 = 0$.*

Dokaz 1 *Naj bo ϕ izotermna. Potem je*

$$(\phi')^2 = \frac{1}{4}(E - G - 2iF)^2 = \frac{1}{4}(E - E - 2i \cdot 0)^2 = 0.$$

Sedaj naj velja $(\phi')^2 = 0$. Potem je

$$\frac{1}{4}(E - G - 2iF)^2 = 0 + i \cdot 0.$$

Sledi $E = G$ in $F = 0$.

Za dokaz rešitve Björlingovega problema najprej predpostavimo, da izotermna parametrizacija obstaja in jo označimo s ϕ. Nato definiramo holomorfno funkcijo

$$\beta(z) : D \mapsto \mathbb{C}^3$$
$$\beta(z) = \phi(z) + i\varphi(z) = \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{bmatrix},$$

kjer je φ^j harmonična konjungiranka ϕ^j oziroma funkcija, za katero je $\phi^i + i\varphi^i$ holomorfna.

Z uporabo holomorfnosti, izotermnosti in pogojev Björlingovega problema, torej $\phi(u, 0) = \alpha(u)$ in $N(u, 0) = \mathcal{N}$ dobimo

$$\beta(u) = \alpha(u) - i \cdot \int_{u_0}^{u} \mathcal{N}(t) \times \alpha'(t)dt.$$

Nato z izrekom identitete pokažemo, da za vsak $z \in D$ velja

$$\beta(z) = \alpha(z) - i \cdot \int_{u_0}^{z} \mathcal{N}(w) \times \alpha'(w)dw.$$

Realni del funkcije β je ravno parametrizacija $\phi = Re(\phi + i \cdot \varphi)$. Torej je

$$\phi(u, v) = Re(\beta(z)) = Re(\alpha(z) - i \cdot \int_{u_0}^{z} \mathcal{N}(w) \times \alpha'(w)dw),$$

kar je rešitev problema.

Tako dokažemo, da če ϕ parametrizira ploskev in zadošča pogojem problema, potem je ravno takšne oblike kot je navedeno v rešitvi. To pomeni, da je rešitev enolična.

Za dokaz obstoja rešitve predpostavimo, da je β holomorfna funkcija oblike

$$\beta(z) = \alpha(z) - i \cdot \int_{u_0}^{z} \mathcal{N}(w) \times \alpha'(w)dw.$$

β skrčimo na $u \in I$ in kvadriramo njen odvod. Ugotovimo, da je $\beta'(u)^2 = 0$. Po principu identičnosti je tudi $\beta'(z)^2 = 0$ za $\forall z \in D$. To pa je pogoj za obstoj izotermnih koordinat ploskve.

Torej realni del funkcije β parametrizira minimalno ploskev M v izotermnih koordinatah. Tako smo dokazali obstoj izotermne parametrizacije ploskve, ki reši Björlingov problem.