# Minimalne ploskve in Björlingov problem

Lucija Fekonja
Mentor: Doc. dr. Uroš Kuzman

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

30. maj 2023

# Minimalna ploskev

## Definicija

*Ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ je minimalna ploskev, če in samo če obstaja okolica vsake točke $p \in M$, omejena s sklenjeno krivuljo, ki ima najmanjšo površino med vsemi ploskvami z isto omejitvijo.*

# Minimalna ploskev

## Definicija

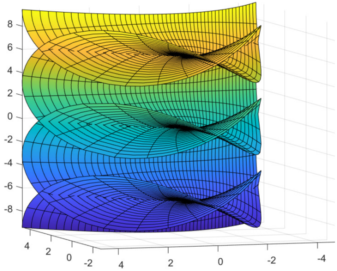
*Ploskev* $M \subset \mathbb{R}^3$ *je minimalna ploskev, če in samo če obstaja okolica vsake točke* $p \in M$*, omejena s sklenjeno krivuljo, ki ima najmanjšo površino med vsemi ploskvami z isto omejitvijo.*

## Definicija

*Ploskev se imenuje minimalna ploskev, če je njena srednja ukrivljenost enaka nič.*

# Catalanova minimalna ploskev

$$\phi(u,v) = (1 - cos(u)cosh(v), 4sin(u/2)sinh(v/2), u - sin(u)cosh(v))$$




Slika: Catalanova minimalna ploskev

# Björlingov problem

Naj velja:

$$\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3 \text{realno analitična krivulja}$$
$$\eta : I \mapsto \mathbb{R}^3 \text{realno analitično vektorsko polje}$$
$$|\eta(t)| = 1$$
$$\eta(t) \cdot \alpha'(t) = 0$$

Najdi parametrizacijo minimalne ploskve $\phi(u, v)$, za katero velja:

1. Ploskev naj vsebuje krivuljo $\alpha$ pri $v = 0$. To pomeni, $\forall u \in I. \alpha(u) = \phi(u, 0)$.
2. Normale na ploskev se naj vzdolž celotne krivulje $\alpha$ ujemajo z vektorji vektorskega polja $\eta$: $\forall u \in I. \eta(u) = N(u, 0)$.

# Rešitev Björlingovega problema

$$\phi(u, v) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{z_0}^{z} \eta(w) \times \alpha'(w)dw\right)$$

# Princip identičnosti

**Izrek**

*Naj bosta $f$ in $g$ holomorfni funkciji na $D \subseteq \mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$) in naj velja $f = g$ na $S \subset D$. Če ima $S \subseteq D$ stekališče, potem je $f = g$ na $D$.*

# Izotermna parametrizacija

# Izotermna parametrizacija

**Lema**

*$\phi$ ima izotermne koordinate natanko tedaj, ko velja $(\phi')^2 = 0$.*

# Izotermna parametrizacija

**Lema**

*$\phi$ ima izotermne koordinate natanko tedaj, ko velja $(\phi')^2 = 0$.*

**Lema**

*Ploskev M z izotermno parametrizacijo $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ je minimalna natanko tedaj, ko so $\phi^1, \phi^2$ in $\phi^3$ harmonične.*

# Dokaz rešitve Björlingovega problema

$$\phi(u, v) = Re\left(\alpha(z) - i\int_{z_0}^{z} \eta(w) \times \alpha'(w)dw\right)$$

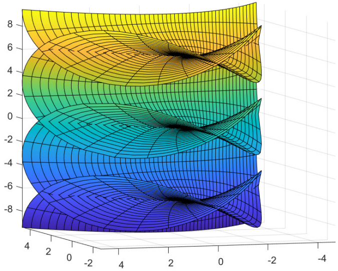
# Konstrukcija minimalne ploskve

Krivulja: $\alpha(u) = (\beta(u), 0, \gamma(u))$
Normale: $N = \frac{(-\gamma', 0, \beta')}{\sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}}$
Izračunamo vektorski produkt $N \times \alpha' = \left(0, \sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}, 0\right)$
Rešitev problema je torej:

$$Re\left(\alpha - i\int N \times \alpha'\right) = \left(Re\beta, Im\int \sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}, Re\gamma\right)$$

# Catalanova minimalna ploskev

$$\phi(u,v) = (1 - cos(u)cosh(v), 4sin(u/2)sinh(v/2), u - sin(u)cosh(v))$$




Slika: Catalanova minimalna ploskev