

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Lucija Fekonja

**Minimalne ploskve in Björlingov problem**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: Doc. dr. Uroš Kuzman

Ljubljana, 2022

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Definicija minimalne ploskve	5
3. Prva in druga fundamentalna forma	6
4. Primeri minimalnih ploskev	7
5. Enačba minimalne ploskve	12
6. Izotermne koordinate	13
7. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija	15
8. Princip identičnosti	18
9. Björlingov problem	19

# Minimalne ploskve in Björlingov problem

POVZETEK

# Minimal surfaces and Björling problem

ABSTRACT

**Math. Subj. Class. (2020):** navedite vsaj eno klasifikacijsko oznako – dostopne so na [www.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html](http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html)

**Ključne besede:** navedite nekaj ključnih pojmov, ki nastopajo v delu

**Keywords:** angleški prevod ključnih besed

## 1. UVOD

Matematika opisuje svet okoli nas. Še posebej lepo in nadzorno lahko z njo opišemo razne oblike, ki jih opazujemo v naravi. Tako lahko parametriziramo mnogo različnih ploskev - od ravnine do najzanimivejših oblik. S preslikavami lahko navedemo, kakšna bo oblika milnega filma, ki nastane, ko neko prazno telo potopimo v milnico. Ko je milni mehurček v ravnovesju, to se zgodi, ko je njegova vizkoznost - odpor tekočine na spremembo svoje oblike - enaka nič, je njegova oblika takšna, da ima kar se da malo površino. Matematično temu rečemo, da je milni mehurček minimalna ploskev. V nadaljevanju bomo z uporabo idej geometrije ploskev, diferencialne geometrije, kompleksne analize in variacijskega računa spoznali ideje, ki se tičejo minimalnih ploskev, nato pa bomo na podlagi teh spoznanj navedli Björlingov problem ter ga dokazali.

V 18. stoletju, ko so se minimalne ploskve komaj začeli raziskovati, so jih matematiki poznali le malo. Kot eno od teh minimalnih ploskev so opredelili ravnino, leta 1741 je Leonhard Euler odkril katenoido, še kasneje je Jean Baptiste Meusnier odkril helokoid leta 1776. Naslednji je novi minimalni ploskvi odkril Scherk leta 1835. V 19. stoletju so minimalne ploskve dobile veliko pozornosti in s tem novih naukov zahvaljujoč matematikom kot so Riemann, Scherk, Schwarz, Enneper in Weierstrass. S pomočjo takrat na novo odkrite kompleksne analize so ploskve analitično opisali. V tem času je deloval tudi fizik in matematik Plateau, ki je raziskoval površinsko napetost, s čimer se je izkazalo, da imajo minimalne ploskve precejšen fizikalni pomen, in niso le abstraktni pojem. Raziskovanje minimalnih ploskev se je nadaljevalo v 20. stoletje, ko se je govorilo o diferencialnih enačbah, konformnih funkcijah, Riemannovih ploskvah, funkcionalni analizi in mnogem drugem. Iznajdba računalnika je pripomogla k odkrivanju novih minimalnih ploskev, s čemer pa so nastajali tudi novi problemi in razni načini klasifikacij. Raziskovanje minimalnih ploskev še zdaleč ni končano. Ostajajo še nerešeni problemi in odprta vprašanja, ki čakajo, da bodo odgovorjena.

## 2. DEFINICIJA MINIMALNE PLOSKVE

Minimalno ploskev lahko definiramo na 8 različnih, a med sabo ekvivalentnih načinov. Intuitivno je minimalna ploskev takšna ploskev, ki ima najmanjšo površino pri nekih robnih pogojih. Lokalno lahko definicijo minimalne ploskve zapišemo na sledeč način.

**Definicija 2.1.** Ploskev  $M \subset \mathbb{R}^3$  je *minimalna ploskev*, če in samo če obstaja okolica vsake točke  $p \in M$ , omejena s sklenjeno krivuljo, ki ima najmanjšo površino med vsemi ploskvami z isto omejitvijo.

Pogostejše jih definiramo z uporabo srednje ukrivljenosti. Na ta način jih podamo globalno. Zavoljo te definicije spoznajmo nekaj osnovnih pojmov vezanih na ploskve v splošnem.

**Definicija 2.2.** Vektorja hitrosti ploskve parametrizirane z

$$\begin{aligned}\phi : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

sta definirana kot

$$\begin{aligned}\phi_u &= \frac{d\phi}{du} = \left( \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right) \\ \phi_v &= \frac{d\phi}{dv} = \left( \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv} \right)\end{aligned}$$

**Definicija 2.3.** Ploskev  $S$  s parametrizacijo  $\phi = (x, y, z)$  je *regularna*, če za njo velja:

- parametrizacija  $\phi$  je gladka, kar pomeni, da imajo funkcije  $x, y$  in  $z$  zvezne parcialne odvode vseh redov,
- $\phi$  je homeomorfizem,
- regularnostni pogoj, ki pravi, da v nobeni točki  $p \in S$  vektorski produkt vektorjev hitrosti ni enak nič:  $\phi_u \times \phi_v \neq 0$ . To pomeni, da sta vektorja hitrosti linearno neodvisna.

**Definicija 2.4.** *Tangentni prostor*  $T_p S$  je prostor, ki ga raztezata vektorja hitrosti v točki  $p$ .

$$T_p S = \text{Lin}\{\phi_u(p), \phi_v(p)\}$$

Vsi tangentni vektorji na ploskev v točki  $p \in S$  ležijo na tangentni ravnini, ki jo raztezata linearno neodvisna vektorja hitrosti.

**Definicija 2.5.** Naj bo  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja v evklidskem prostoru, kjer je  $I \subset \mathbb{R}$  interval. *Ploskovna krivulja*  $\gamma$  je projekcija krivulje  $\alpha$  glede na projekcijo  $\phi$ . Dana je s predpisom:

$$\begin{aligned}\gamma : [0, \epsilon] &\rightarrow S \\ s &\mapsto \phi(\alpha(s))\end{aligned}$$

**Definicija 2.6.** *Ukrivljenost*  $K$  krivulje  $\gamma$  je definirana kot  $K = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ , kjer je  $T$  enotski tangentni vektor dane krivulje  $T = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}$ .

**Definicija 2.7.** *Enotsko normalo*  $N$  regularne ploskve s parametrizacijo  $\phi(u, v)$  definiramo kot vektor  $N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$ .

**Definicija 2.8.** *Stranska normala*  $B$  v točki  $p \in S$  je vektor  $B = N \times T$ , kjer je  $N$  enotska normala in  $T$  tangentni vektor iz  $T_p S$ .

**Definicija 2.9.** *Normalna ukrivljenost*  $K_n$  je komponenta ukrivljenosti  $K$  ploskovne krivulje  $\gamma$  v smeri normale.

$$K_n = \frac{dT}{dS} \cdot N$$

**Definicija 2.10.** *Geodetična ukrivljenost*  $K_g$  je komponenta ukrivljenosti  $K$  ploskovne krivulje  $\gamma$  v smeri stranske normale.

$$K_n = \frac{dT}{dS} \cdot B$$

**Lema 2.11.** *Ukrivljenost*  $K$  lahko izrazimo kot  $K = \sqrt{K_n^2 + K_g^2}$

**Definicija 2.12.** *Srednja ukrivljenost*  $H$  je definirana kot  $H = \frac{K_1 + K_2}{2}$ , kjer sta  $K_1$  in  $K_2$  normalni ukrivljenosti dveh pravokotnih si tangent.

Sedaj lahko globalno definiramo minimalno ploskev.

**Definicija 2.13.** Ploskev se imenuje *minimalna ploskev*, če je njena srednja ukrivljenost enaka nič.

### 3. PRVA IN DRUGA FUNDAMENTALNA FORMA

V tem poglavju bomo navedli še eno ekvivalentno definicijo minimalne ploskve.

**Definicija 3.1.** *Prva fundamentalna forma*  $I(u, v)$  za  $u, v \in T_p S$  je simetrični operator

$$I(u, v) = u \cdot v$$

Kvadratna forma prve fundamentalne forme je  $I(v) = I(v, v) = v \cdot v = |v|^2$

Naj bo zdaj  $\gamma$  krivulja z enotsko hitrostjo, to pomeni, da je  $|\gamma'| = 1$  povsod na njenem definicijskem območju. Potem je  $\gamma' \cdot \gamma' = 1$ . Navedeno lahko razpišemo:

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma' \cdot \gamma' \\ &= (u' \phi_u + v' \phi_v) \cdot (u' \phi_u + v' \phi_v) \\ &= (\phi_u \cdot \phi_u) u'^2 + (\phi_u \cdot \phi_v + \phi_v \cdot \phi_u) u' v' + (\phi_v \cdot \phi_v) v'^2 \\ &= I(\phi_u) u'^2 + 2I(\phi_u, \phi_v) u' v' + I(\phi_v) v'^2 \\ &= E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 \end{aligned}$$

Označili smo:

$$E = I(\phi_u) = \phi_u \cdot \phi_u = |\phi_u|^2$$

$$F = I(\phi_u, \phi_v) = \phi_u \cdot \phi_v$$

$$G = I(\phi_v) = \phi_v \cdot \phi_v = |\phi_v|^2$$

Koeficienti  $E, F$  in  $G$  se imenujejo *koeficienti prve fundamentalne forme*  $I$ .

**Definicija 3.2.** *Weingartenova preslikava*  $\Omega_p : T_p S \rightarrow T_p S$  je sebi-adjungirana linearna preslikava s predpisom

$$\Omega_p(v_1 \phi_u(p) + v_2 \phi_v(p)) = -v_1 N_u(p) - v_2 N_v(p)$$

, kjer je  $\phi : D \rightarrow S$  parametrizacija ploskve,  $p \in D$  in  $N$  enotski normalni vektor.

**Opomba 3.3.** Sebi-adjungirano pomeni:

$$\forall u, v \in T_p S. \Omega_p(u) \cdot v = u \cdot \Omega_p(v)$$

**Definicija 3.4.** Druga fundamentalna forma  $II(u, v)$  za  $u, v \in T_p S$  je simetrični operator

$$II(u, v) = \Omega_p(u) \cdot v$$

**Lema 3.5.** Koeficiente druge fundamentalne forme lahko izračunamo kot:

$$l = \phi_{uu} \cdot N$$

$$m = \phi_{uv} \cdot N$$

$$n = \phi_{vv} \cdot N$$

*Dokaz.* Normalni vektor  $N$  je pravokoten na tangentna vektorja  $\phi_u$  in  $\phi_v$ . To pomeni, da sta skalarna produkta  $\phi_u \cdot N = 0$  in  $\phi_v \cdot N = 0$ . Ko odvajajmo enačbi po  $u$  in  $v$  dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(\phi_u \cdot N) &= 0 & \frac{d}{dv}(\phi_v \cdot N) &= 0 \\ \frac{d}{du}(\phi_v \cdot N) &= 0 & \frac{d}{dv}(\phi_u \cdot N) &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega sledijo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned} \phi_{uu} \cdot N &= -\phi_u \cdot N_u = l \\ \phi_{vv} \cdot N &= -\phi_v \cdot N_v = n \\ \phi_{uv} \cdot N &= -\phi_v \cdot N_u \\ \phi_{vu} \cdot N &= -\phi_u \cdot N_v \end{aligned}$$

Seštejmo zadnji dve enačbi:

$$(\phi_{uv} + \phi_{vu}) \cdot N = -(\phi_v \cdot N_u + \phi_u \cdot N_v) = 2m$$

□

Srednjo ukrivljenosti lahko sedaj podamo še nekoliko drugače:

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

, kjer so  $E, F, G, l, m$  in  $n$  kot v zgoraj izpeljanem.

To nam zagotavlja nov kriterij preverjanja ali je ploskev minimalna. Na minimalni ploskvi mora namreč veljati

$$En + Gl - 2Fm = 0$$

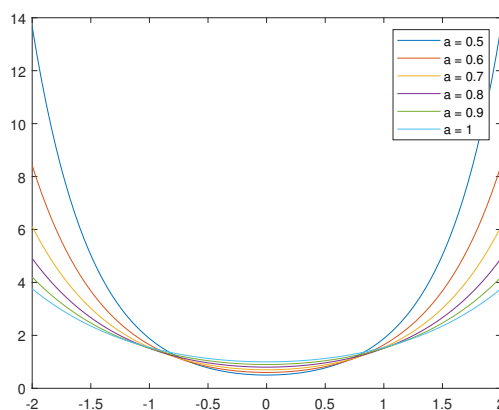
#### 4. PRIMERI MINIMALNIH PLOSKEV

V tem poglavju bomo opisali nekaj primerov minimalnih ploskev in s pomočjo rezultatov iz prejšnjih poglavij pokazali, da so res minimalne.

**Primer 4.1** (Katenoida). Predstavljajmo si verigo vpeto med dva pola. Parametrično jo lahko podamo kot:

$$\begin{aligned}x(t) &= t \\y(t) &= \frac{1}{2}a \left( e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right) \\&= a \cdot \cosh \left( \frac{t}{a} \right)\end{aligned}$$

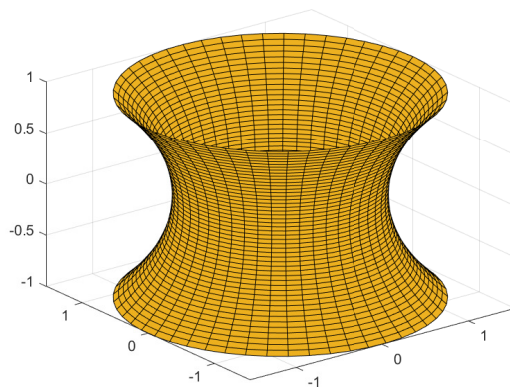
kjer je  $(0, a)$  točka, ki je najbližje abscizni osi.



SLIKA 1. Verižnica za  $a \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$

Če verižnico zarotiramo okoli abscizne osi, dobimo ploskev imenovano katenoida. Je ena od dveh rotacijskih ploskev - druga je ravnina. Parametriziramo jo na naslednji način:

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\(t, \varphi) &\mapsto \left( t, a \cdot \cosh \left( \frac{t}{a} \right) \cdot \cos \varphi, a \cdot \cosh \left( \frac{t}{a} \right) \cdot \sin \varphi \right)\end{aligned}$$



SLIKA 2. Katenoida



Preverimo zdaj, da je katenoida res minimalna ploskev. To bomo dosegli z izračunom koeficientov prve in druge fundamentalne forme.

Izračunajmo najprej vektorja hitrosti:

$$\begin{aligned}\phi_t &= \left( 1, \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\varphi), \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\varphi) \right) \\ \phi_\varphi &= \left( 0, -a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\varphi), a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\varphi) \right)\end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo ploskovno normalo:

$$\begin{aligned}\phi_t \times \phi_\varphi &= \left( a \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \cosh\left(\frac{t}{a}\right), -a \cos(\varphi) \cosh\left(\frac{t}{a}\right), -a \sin(\varphi) \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \right) \\ |\phi_t \times \phi_\varphi| &= a \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) \\ \Rightarrow N &= \left( \tanh\left(\frac{t}{a}\right), -\cos(\varphi) \operatorname{sech}\left(\frac{t}{a}\right), -\sin(\varphi) \operatorname{sech}\left(\frac{t}{a}\right) \right)\end{aligned}$$

Izračunajmo še druge odvode parametrizacije  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\phi_{tt} &= \left( 0, \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\varphi), \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\varphi) \right) \\ \phi_{t\varphi} &= \left( 0, -\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\varphi), \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\varphi) \right) \\ \phi_{\varphi\varphi} &= \left( 0, -a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \cos(\varphi), -a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \sin(\varphi) \right)\end{aligned}$$

Sedaj imamo vse, da izračunamo koeficiente v prvi fundamentalni formi:

$$\begin{aligned}E &= I(\phi_t) = \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) \\ F &= I(\phi_t, \phi_\varphi) = 0 \\ G &= I(\phi_\varphi) = a^2 \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)\end{aligned}$$

in tudi v drugi fundamentalni formi:

$$\begin{aligned}l &= \phi_{tt} \cdot N = -\frac{1}{a} \\ m &= \phi_{t\varphi} \cdot N = 0 \\ n &= \phi_{\varphi\varphi} \cdot N = a\end{aligned}$$

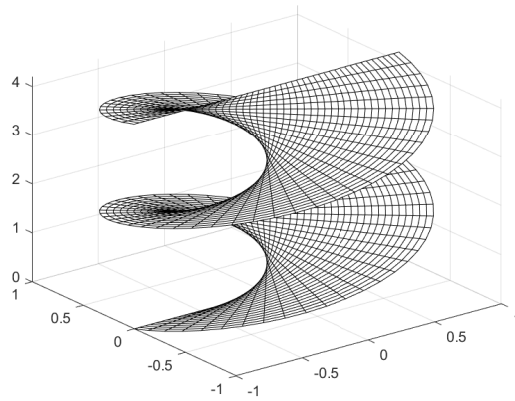
Iz izračunanega sedaj sledi, da je srednja ukrivljenost enaka 0:

$$H = En + Gl - 2Fm = a \cdot \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) - a \cdot \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) = 0$$

To pa pomeni, da je katenoida res minimalna ploskev.  $\diamond$

**Primer 4.2** (Helikoid). Helikoid je ploskev, ki nastane s sočasnim vrtenjem in dvigovanjem daljice okrog neke osi. Ploskve, ki nastanejo na tak način, se imenujejo *premostne ploskve*. Parametriziramo ga lahko kot:

$$\phi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$$



SLIKA 3. Helikoid

Vektorja hitrosti sta:

$$\phi_u = (-v \sin(u), v \cos(u), 1)$$

$$\phi_v = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

Izračunajmo normalo:

$$\phi_u \times \phi_v = (-\sin(u), \cos(u), -v)$$

$$|\phi_u \times \phi_v| = v^2$$

$$\Rightarrow N = \left( -\frac{1}{v^2} \sin(u), \frac{1}{v^2} \cos(u), -\frac{1}{v} \right)$$

Drugi odvodi parametrizacije  $\phi$ :

$$\phi_{uu} = (-v \cos(u), -v \sin(u), 0)$$

$$\phi_{uv} = (-\sin(u), \cos(u), 0)$$

$$\phi_{vv} = (0, 0, 0)$$

Izračunajmo zdaj koeficiente v prvi in drugi fundamentalni formi:

$$\begin{aligned} E &= v^2 + 1 & l &= 0 \\ F &= 0 & m &= \frac{1}{v^2} \\ G &= 1 & n &= 0 \end{aligned}$$

Vnesimo dobljene podatke v kriterij za minimalne ploskve:

$$H = En + Gl - 2Fm = 0$$

Ker je srednja ukrivljenost ničelna, helikoid res zadošča pogoju za minimalne ploskve.

◇

Katenoida in helikoid sta homeomorfna, saj lahko z deformacijo  $\xi$  prehajamo med njima:

$$\begin{aligned} \xi(t) = & (\cos(t) \sin(u) \sinh(v) + \sin(t) \cos(u) \cosh(v), \\ & -\cos(t) \cos(u) \sinh(v) + \sin(t) \sin(u) \sinh(v), \\ & u \cos(t) + v \sin(t)) \end{aligned}$$

Katenoido dobimo v primeru, ko je  $t = \frac{\pi}{2}$ , helikoid pa v primeru  $t = 0$ .

**Primer 4.3** (Enneperjeva ploskev). Enneperjeva ploskev je minimalna ploskev, ki seka samo sebe. Parametrično jo lahko podamo kot:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi) \mapsto \left( r \cos(\varphi) - \frac{1}{3}r^3 \cos(3\varphi), -\frac{1}{3}r \left( 3 \sin(\varphi) + r^2 \sin(3\varphi) \right), r^2 \cos(2\varphi) \right)$$

Izračunamo koeficiente prve in druge fundamentalne forme za ta problem in dobimo:

$$\begin{aligned} E &= -2 \cos(2\varphi) & l &= (1 + r^2)^2 \\ F &= 4r \cos(\varphi) \sin(\varphi) & m &= 0 \\ G &= 2r^2 \cos(2\varphi) & n &= r^2(1 + r^2)^2 \end{aligned}$$

Opazimo, da je sredna ukrivljenost ničelna  $H = 0$ , torej je Enneperjeva ploskev res minimalna.  $\diamond$

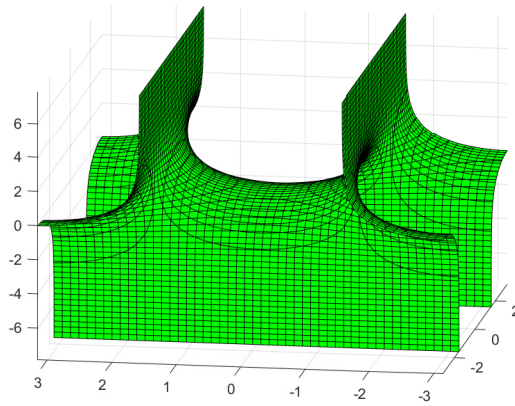
**Primer 4.4** (Prva Scherkova ploskev). Heinrich Scherk je odkril dve novi minimalni ploskvi leta 1834. Prva schreckova ploskev je dvojno periodična, tj. če sta  $u$  in  $v$  periodi, potem je  $f(z+u) = f(z+v) = f(z)$ . Opišemo jo lahko z implicitno enačbo:

$$e^z \cos(y) = \cos(x)$$

Parametrično pa jo lahko opišemo kot:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi) \mapsto \left( \ln \left( \frac{1 + r^2 + 2r \cos(\varphi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi)} \right), \frac{1 + r^2 - 2r \sin(\varphi)}{1 + r^2 + 2r \sin(\varphi)}, 2 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{2r^2 \sin(2\varphi)}{r^4 - 1} \right) \right)$$



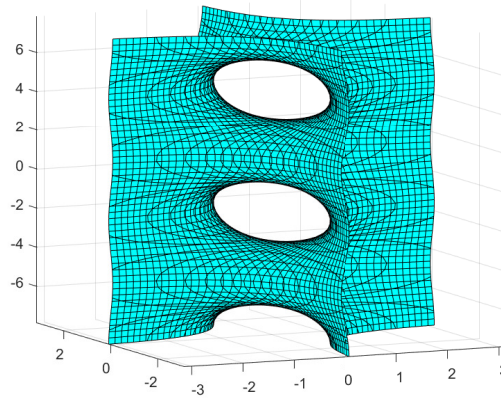
SLIKA 4. Del prve Scherkove ploskve

Kot prej lahko izračunamo, da je srednja ukrivljenost enaka nič.  $\diamond$

**Primer 4.5** (Druga Scherkova ploskev). Druga Scherkova minimalna ploskev je podana z enačbo

$$\sinh(x) * \sinh(y) - \sin(z)$$

$\diamond$



SLIKA 5. Del druge Scherkove ploskve

## 5. ENAČBA MINIMALNE PLOSKVE

V tem poglavju bomo opisali ploskev, ki je graf funkcije v dveh spremenljivkah. Označimo jo z  $z = f(x, y)$ . Potem ploskev dobimo s parametrizacijo  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .

Vektorja hitrosti sta potem

$$X_u = (1, 0, f_u) \quad X_v = (0, 1, f_v)$$

Drugi odvodi so torej

$$X_{uu} = (0, 0, f_{uu}) \quad X_{uv} = (0, 0, f_{uv}) \quad X_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

Iz tega lahko dobimo enotsko normalo  $N = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$ .

Želimo izvesti pri kakšnih pogojih je definirana ploskev minimalna. Zato želimo izračunati koeficiente iz prve in druge fundamentalne forme. Dobimo sledeče podatke:

$$E = 1 + f_u^2 \quad F = f_u \cdot f_v \quad G = 1 + f_v^2$$

$$l = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \quad m = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \quad n = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

Izračunamo, da je srednja ukrivljenost

$$\begin{aligned} H &= En + Gl - 2Fm \\ &= \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Vemo, da je ploskev minimalna natanko takrat, ko je njena srednja ukrivljenost ničelna. Iz tega sledi naslednja predpostavka:

**Trditev 5.1.** *Ploskev  $M$  podana kot graf funkcije  $z = f(x, y)$  je minimalna natanko tedaj, ko je*

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0$$

Enačbo iz trditve imenujemo enačba minimalne ploskve. V splošnem ni rešljiva, z dodatnimi robnimi pogoji, pa jo lahko rešimo in determiniramo različne tipe minimalnih ploskev.

En izmed primerov, ki ga lahko rešimo z uporabo enačbe minimalne ploskve je Scherkova prva minimalna ploskev.

**Primer 5.2.**

◇

## 6. IZOTERMNE KOORDINATE

Minimalno ploskev lahko definiramo tudi s pomočjo pojma harmoničnosti funkcije in parametrizacije, ki ji pravimo izotermna.

**Definicija 6.1.** Parametrizacije ploskve  $\phi$  je *izotermna*, če velja

$$E = \phi_u \cdot \phi_u = \phi_v \cdot \phi_v = G \quad \text{in} \quad F = \phi_u \cdot \phi_v = 0$$

Ko ima neka ploskev izotermne koordinate, se njena srednja ukrivljenost posploši na  $H = \frac{n+l}{2E}$ , kjer so  $n, l$  in  $E$  ravno koeficienti iz prve in druge fundamentalne forme. To pa pomeni, da je ploskev z izotermno parametrizacijo minimalna natanko tedaj, ko je  $n + l = 0$ .

Izkaže se, da izotermne koordinate obstajajo za vsako ploskev. Ker nas zanimajo predvsem minimalne ploskve, pride v poštev naslednja lema.

**Lema 6.2.** *Za vsako minimalno ploskev  $M$  obstajajo izotermne koordinate.*

*Dokaz.* Naj bo  $m \in M$  točka in določimo koordinatni sistem tako, da bo  $m$  ravno njegovo izhodišče. Koordinatni sistem naj bo obrnjen tako, da je tangentna ravnina  $T_m M$  natanko ravnina  $z = 0$ . Ploskev  $M$  lahko potem podamo kot graf funkcije  $z = f(x, y)$ .

Izračunajmo naslednja izraza:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + f_x^2}{w} \right)_y - \left( \frac{f_x f_y}{w} \right)_x &= -\frac{f_y}{w} [f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)] \\ \left( \frac{1 + f_y^2}{w} \right)_x - \left( \frac{f_x f_y}{w} \right)_y &= -\frac{f_x}{w} [f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2)] \end{aligned}$$

kjer je  $w = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

Na desni strani prepoznamo enačbo za minimalne ploskve. Ker je  $M$  minimalna, sta torej oba izraza na desni strani enaka nič. Označimo še  $p = f_x$  in  $q = f_y$ . Sedaj sledita naslednji enakosti:

$$\left( \frac{1 + p^2}{w} \right)_y - \left( \frac{pq}{w} \right)_x = 0 \quad \left( \frac{1 + q^2}{w} \right)_x - \left( \frac{pq}{w} \right)_y = 0$$

Definirajmo naslednja vektorska prostora:

$$V = \left( \frac{1 + p^2}{w}, \frac{pq}{w} \right) \quad W = \left( \frac{1 + q^2}{w}, \frac{pq}{w} \right)$$

Na definiranih vektorskih prostorih uporabimo Greenovo formulo in dobimo:

$$\begin{aligned} \int_C V(dx, dy) &= \int \int_R \left( \frac{pq}{w} \right)_x - \left( \frac{1 + p^2}{w} \right)_y dx dy = 0 \\ \int_C W(dx, dy) &= \int \int_R \left( \frac{1 + p^2}{w} \right)_x - \left( \frac{pq}{w} \right)_y dx dy = 0 \end{aligned}$$

kjer je  $R$  območje z robom  $C$ , ki je pozitivno orientirana sklenjena krivulja.

Iz vektorske analize vemo, da je integral potencialnega polja po sklenjeni usmerjeni krivulji ničeln. To pomeni, da sta vektorski polji  $V$  in  $W$  potencialni, torej po definiciji potencialnega polja obstajata taki skalarni funkciji  $\mu$  in  $\rho$ , da je  $V = \text{grad}(\mu)$  in  $W = \text{grad}(\rho)$ . Zanju veljajo naslednje zveze:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{1+p^2}{w} & \rho_x &= \frac{pq}{w} \\ \mu_y &= \frac{pq}{w} & \rho_y &= \frac{1+q^2}{w}\end{aligned}$$

Definirajmo preslikavo

$$\begin{aligned}T: R &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + \mu(x, y), y + \rho(x, y))\end{aligned}$$

Izračunajmo Jacobijevo matriko preslikave  $T$ :

$$J(T) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_x & \mu_y \\ \rho_x & 1 + \rho_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & \frac{pq}{w} \\ \frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{bmatrix}$$

Determinanta Jacobijeve matrike  $J(T)$  ni ničelna, zato po izreku inverzne funkcije obstaja inverzna preslikava  $T^{-1}(u, v) = (x, y)$  v okolici točke  $m = (0, 0)$

$$J(T^{-1}) = J(T)^{-1} = \frac{1}{\det(J(T))} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & \frac{pq}{w} \\ \frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+w)^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & -\frac{pq}{w} \\ -\frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

Iz vsega dobljenega bomo sedaj pokazali, da je parametrizacija

$$\xi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$$

izotermna parametrizacije minimalne ploskve  $M$ .

Ker smo koordinatni sistem postavili tako, da je  $M$  ravno graf preslikave  $f$ ,  $\xi$  res parametrizira našo ploskev. Pokažimo še, da zadošča pogojem izotermnosti.

$$\begin{aligned}\xi_u &= \left( \frac{w^2 + 1 + q^2}{(1+w)^2}, -\frac{pq}{(1+w)^2}, p \left( \frac{w^2 + 1 + q^2}{(1+w)^2} \right) + q \left( -\frac{pq}{(1+w)^2} \right) \right) \\ \xi_v &= \left( -\frac{pq}{(1+w)^2}, \frac{w^2 + 1 + q^2}{(1+w)^2}, p \left( -\frac{pq}{(1+w)^2} \right) + g \left( \frac{w^2 + 1 + q^2}{(1+w)^2} \right) \right)\end{aligned}$$

Sledi, da je  $E = \xi_u \cdot \xi_u = \xi_v \cdot \xi_v = G$  in  $F = \xi_u \cdot \xi_v = 0$ .  $\square$

Ker sedaj vemo, da izotermne koordinate za vsako minimalno ploskev res obstajajo, lahko navedemo še definicijo minimalne ploskve s harmoničnostjo njene parametrizacije.

**Trditev 6.3.** *Naj bo  $M$  regularna ploskev z izotermno parametrizacijo  $\phi$ . Velja, da je  $M$  minimalna natanko tedaj, ko je  $\phi$  harmonična.*

*Dokaz.* Vemo, da je  $\phi$  izotermna, torej velja enakost  $H = \frac{n+l}{2E}$ . Iz tega sledi

$$2EH = n + l = \phi_{uu} \cdot N + \phi_{vv} \cdot N = N \cdot (\phi_{uu} + \phi_{vv}) = N \cdot \Delta\phi$$

Če je  $M$  minimalna, potem je  $H = 0$ , zato je  $N \cdot \Delta\phi = 0$ .  $N$  je enotska normala, torej dolžine  $|N| = 1$ , zato je  $\Delta\phi = 0$ , kar pa je ravno definicija harmonične funkcije.

Naj bo sedaj parametrizacija  $\phi$  harmonična. Potem je  $2EH = 0$ , saj  $|N| = 1$ . Ker je ploskev regularna,  $E \neq 0$ , zato pa je  $H = 0$ .  $\square$

## 7. WEIERSTRASS-ENNEPERJEVA REPREZENTACIJA

Do zdaj smo ugotovili, da se da vsako minimalno ploskev parametrizirati. V tem poglavju bomo poiskali to parametrizacijo. Naj bo  $\phi(u, v)$  izotermna parametrizacija minimalne ploskve  $M$  in označimo kompleksno koordinato  $z$ . Vemo, da lahko  $u$  in  $v$  izrazimo z  $z$  in njeno konjugiranko  $\bar{z}$  kot:

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad v = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Zato lahko našo parametrizacijo zapišemo v odvisnosti od  $z$  in  $\bar{z}$  kot  $\phi(z, \bar{z}) = (\varphi^1(z, \bar{z}), \varphi^2(z, \bar{z}), \varphi^3(z, \bar{z}))$ , kjer so  $\varphi^i$  kompleksne funkcije, ki zasedajo realne vrednosti.

Odvod naše parametrizacije je  $\phi_z = (\varphi_z^1, \varphi_z^2, \varphi_z^3)$

Označimo sedaj:

$$\begin{aligned} (\phi_z)^2 &= (\varphi_z^1)^2 + (\varphi_z^2)^2 + (\varphi_z^3)^2 \\ |\phi_z|^2 &= |\varphi_z^1|^2 + |\varphi_z^2|^2 + |\varphi_z^3|^2 \end{aligned}$$

V nadaljevanju bomo pokazali povezavo med  $(\phi_z)^2$  oziroma  $|\phi_z|^2$  in izotemnostjo preslikave  $\phi$ . Zavoljo tega bi najprej radi izračunali  $(\phi_z)^2$  in  $|\phi_z|^2$ , torej tudi  $(\varphi_z^i)^2$  oziroma  $|\varphi_z^i|^2$ .

Po verižnem pravilu velja  $\frac{\delta \varphi^i}{\delta z} = \frac{\delta \varphi^i}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta \varphi^i}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta \varphi^i}{\delta u} - i \frac{\delta \varphi^i}{\delta v} \right)$

Krajše zapisano je to  $\varphi_z^i = \frac{1}{2} (\varphi_u^i - i \varphi_v^i)$

$$\begin{aligned} (\varphi_z^i)^2 &= \left( \frac{1}{2} (\varphi_u^i - i \varphi_v^i) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} ((\varphi_u^i)^2 - (\varphi_v^i)^2 - 2i \varphi_u^i \varphi_v^i) \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} (\phi_z)^2 &= (\varphi_z^1)^2 + (\varphi_z^2)^2 + (\varphi_z^3)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 (\varphi_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (\varphi_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 \varphi_u^j \varphi_v^j \right) \\ &= \frac{1}{4} (|\phi_u|^2 - |\phi_v|^2 - 2i(\phi_u \cdot \phi_v)) \\ &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF) \end{aligned}$$

Sedaj lahko pokažemo naslednjo lemo.

**Lema 7.1.**  $\phi$  ima izotermne koordinate natanko tedaj, ko je  $(\phi_z)^2 = 0$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\phi$  izotermna parametrizacija. Potem je  $(\phi_z)^2 = \frac{1}{4} (E - G - 2iF) = \frac{1}{4} (E - E - 2i \cdot 0) = 0$

Obratno, naj bo  $(\phi_z)^2 = 0$ . Potem je  $\frac{1}{4} (E - G - 2iF) = \frac{E}{4} - \frac{G}{4} - i \frac{F}{2} = 0 + i \cdot 0$ . Dobimo sistem dveh enačb  $\frac{E}{4} - \frac{G}{4} = 0$  in  $\frac{F}{2} = 0$  iz česar seveda sledi  $E = G$  in  $F = 0$ . Tako je naša lema dokazana.  $\square$

Izračunajmo še kvadrat absolutne vrednosti odvoda parametrizacije in najdimo njegovo povezavo z izotermnostjo.

$$|\varphi_z^i|^2 = \frac{1}{4} \left( (\varphi_u^i)^2 + (\varphi_v^i)^2 \right)$$

Zato velja

$$\begin{aligned} |\phi_z|^2 &= |\varphi_z^1|^2 + |\varphi_z^2|^2 + |\varphi_z^3|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 |\varphi_u^j|^2 + \sum_{j=1}^3 |\varphi_v^j|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (|\phi_u|^2 + |\phi_v|^2) \\ &= \frac{1}{4} (E + G) \end{aligned}$$

Iz izračunanega sedaj sledi lema:

**Lema 7.2.** Če je  $\phi$  regularna parametrizacija minimalne ploskve, potem je  $|\phi_z|^2 = \frac{E}{2} \neq 0$

*Dokaz.* Naj bo  $\phi$  izotermna. Potem je  $E = G$ , in zato  $|\phi_z|^2 = \frac{E+G}{4} = \frac{E}{2}$ . Ker je  $\phi$  tudi regularna, velja  $E \neq 0$   $\square$

Potrebovali bomo še dve lemi, ki veljata v splošnem za kompleksne funkcije. Označimo to funkcijo z  $f(z) = r(u, v) + is(u, v)$ , kjer sta  $r$  in  $s$  realni funkciji realnih spremenljivk.

**Lema 7.3.**  $f$  je holomorfna natanko tedaj, ko velja enakost  $\frac{\delta f}{\delta \bar{z}} = 0$ .

*Dokaz.* Naj bo najprej  $f$  holomorfna funkcija. Potem izračunamo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\delta f}{\delta u} + i \frac{\delta f}{\delta v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\delta r}{\delta u} + i \frac{\delta s}{\delta u} + i \left( \frac{\delta r}{\delta v} + \frac{\delta s}{\delta v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\delta r}{\delta u} + i \frac{\delta s}{\delta u} - i \frac{\delta s}{\delta u} - \frac{\delta r}{\delta u} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tukaj smo v tretji enakosti uporabili Cauchy - Riemannova pogoja.  $\square$

**Lema 7.4.** Velja enakost  $\Delta f = f_{uu} + f_{vv} = 4 \left( \frac{1}{\delta z} \left( \frac{\delta f}{\delta \bar{z}} \right) \right)$

*Dokaz.* Računamo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{\delta f}{\delta \bar{z}} \right) &= \frac{\delta}{\delta z} \left( \frac{1}{2} (f_u + i f_v) \right) \\ &= \frac{1}{4} (f_{uu} + f_{vv}) \\ &= \frac{1}{4} \Delta f \end{aligned}$$

Enakost je dokazana.  $\square$



Pripravili smo vse, da lahko navedemo še zadnjo definicijo minimalne ploskve.

**Trditev 7.5.** *Naj bo  $M$  ploskev z izotermno parametrizacijo  $\phi$ . Velja, da je  $M$  minimalna, če in samo če je  $\phi'$  holomorfn.*

*Dokaz.* V trditvi (4.3) smo že povedali, da je izotermna parametrizacija minimalne ploskve harmonična. Dodatno po lemi () sledi zveza:

$$4\Delta\phi = 0 = \frac{\delta}{\delta\bar{z}} \left( \frac{\delta\phi}{\delta z} \right) = \frac{\delta\phi'}{\delta\bar{z}}$$

Po lemi () pa še velja, da je  $\phi'$  holomorfn natanko tedaj kadar je  $\frac{\delta\phi'}{\delta\bar{z}} = 0$ . Ker povsod v zgornjih izjavah veljajo ekvivalence, smo dokazali v obe smeri.  $\square$

Če je torej  $\phi' = (\varphi_z^1, \varphi_z^2, \varphi_z^3)$  holomorfn funkcija za katero velja  $(\phi')^2 = 0$ , je po lemi (5.1) izotermna parametrizacija in zato po ravnokar dokazani trditvi parametrizacija minimalne ploskve. Minimalno ploskev lahko torej zapišemo kot trojico holomorfnih funkcij, parametrizacijo  $\phi(z, \bar{z}) = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$  pa lahko zapišemo eksplicitno.

Poglejmo kako.

Poznamo že zvezi  $\varphi_z^i = \frac{1}{2}(\varphi_u^i - i\varphi_v^i)$  in  $dz = du + idv$  ter  $d\bar{z} = du - idv$ .

$$\begin{aligned} d\varphi^i &= d\varphi_z^i dz + d\varphi_{\bar{z}}^i d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2}(\varphi_u^i - i\varphi_v^i)(du + idv) + \frac{1}{2}(\varphi_u^i + i\varphi_v^i)(du - idv) \\ &= \varphi_u^i + i\varphi_v^i \\ &= 2\operatorname{Re}(\varphi_z^i dz) \end{aligned}$$

Integriramo in dobimo:

$$\varphi^i(z, \bar{z}) = c_i + 2\operatorname{Re} \left( \int \varphi_z^i dz \right)$$

Sedaj bi radi še poiskali trojice holomorfnih funkcij  $\phi' = (\varphi_z^1, \varphi_z^2, \varphi_z^3)$ , ki res zadoščajo pogoju  $(\phi')^2 = 0$ . Za to sta poskrbela Weierstrass in Enneper in podala kar dve reprezentaciji minimalne ploskve.

**Izrek 7.6** (Weierstrass - Enneperjeva reprezentacija I). *Če je  $f$  holomorfn na domeni  $D$  in  $g$  meromorfn na  $D$  tako, da je  $fg^2$  holomorfn na  $D$ , potem je minimalna ploskev definirana s parametrizacijo  $\phi(z, \bar{z}) = (\varphi^1(z, \bar{z}), \varphi^2(z, \bar{z}), \varphi^3(z, \bar{z}))$ , v kateri so:*

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \operatorname{Re} \left( \int f(1 - g^2) dz \right) \\ \varphi^2 &= \operatorname{Re} \left( \int if(1 + g^2) dz \right) \\ \varphi^3 &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left( \int fg dz \right) \end{aligned}$$

*Dokaz.* Pokazati moramo, da je  $\phi' = (\varphi_z^1, \varphi_z^2, \varphi_z^3)$  trojica holomorfnih funkcij, za katero velja  $(\phi')^2 = 0$ .

$\varphi_z^1, \varphi_z^2$  in  $\varphi_z^3$  so res holomorfne, saj jih dobimo iz holomorfnih funkcij z uporabo osnovnih operacij.

Preverimo še pogoj izotermne parametrizacije.

$$\begin{aligned}
 (\phi')^2 &= \left(\frac{1}{2}f(1-g^2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}if(1+g^2)\right)^2 + (fg)^2 = \\
 &= \frac{1}{4}f^2(-4g^2) + f^2g^2 = \\
 &= f^2g^2 - f^2g^2 = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Pogoje v izreku bi radi zamenjali z enim samim, zato denimo, da je  $f$  holomorfnna in  $g$  holomorfnna s holomorfnim inverzom  $g^{-1}$ . Definirajmo novo spremenljivko  $\tau = g$ . Potem je  $d\tau = g'dg$ . Definirajmo še funkcijo  $F(\tau) = \frac{f}{g}$ . Velja  $F(\tau)d\tau = f dg$ .

V izreku lahko torej zamenjamo  $g$  za  $\tau$  in  $fdz$  za  $F(\tau)d\tau$  in dobimo:

**Izrek 7.7** (Weierstrass - Enneperjeva reprezentacija II). *Za holomorfnno funkcijo  $F(\tau)$  je minimalna ploskev definirana s parametrizacijo  $\phi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ , kjer je*

$$\begin{aligned}
 \varphi^1 &= \operatorname{Re} \left( \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau \right) \\
 \varphi^2 &= \operatorname{Re} \left( \int i(1 - \tau^2) F(\tau) d\tau \right) \\
 \varphi^3 &= 2 \cdot \operatorname{Re} (\tau F(\tau))
 \end{aligned}$$

## 8. PRINCIP IDENTIČNOSTI

To poglavje je namenjeno izpeljavi izreka, ki je nujen za dokaz Björlingovega problema in njegovih posledic. Pove nam kdaj lahko dve funkciji identificiramo kot enaki na nekem območju.

**Izrek 8.1.** *Naj bosta  $f$  in  $g$  holomorfni funkciji na povezanem odprtem območju  $D \subseteq \mathbb{C}(\text{ali } \mathbb{R})$ . Če ima  $S = \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$  stekališče, potem je  $f = g$  na  $D$ .*

Da lahko izrek dokažemo, potrebujemo dodatno lemo.

**Lema 8.2.** *Naj bo  $f$  holomorfnna na  $D \in \mathbb{C}$  in  $L$  množica stekališč množice  $z \in D \mid f(z) = 0$  v  $D$ . Potem je  $L$  zaprta in odprta v  $D$ .*

*Dokaz.* Po definiciji stekališča je  $L$  zaprta množica.

Naj bo  $z_o \in L$  in izberimo odprto kroglo  $K(z_o, r) \subseteq D$ . Zapišimo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ , kjer je  $z \in K(z_o, r)$ . Potem je  $f(z_o) = 0$ . Zato ima bodisi  $f$  ničlo reda  $m$ , za  $m \in \mathbb{N}$  bodisi je  $a_n = 0$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

V primeru, da ima  $f$  ničlo reda  $m$ , obstaja taka analitična funkcija  $g$ , da je  $f(z) = (z - z_o)^m g(z)$  za  $z \in D$ , kjer  $g(z_o) \neq 0$ . Ker je  $g$  zvezna, je  $g(z) \neq 0$  za  $z$  blizu  $z_o$ . Posledično je  $z_o$  izolirna točka množice  $z \in D \mid f(z) = 0$ . Torej velja  $z_o \notin L$ . Ker ta točka ne velja, mora veljati  $a_n = 0$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

V kolikor za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja  $a_n = 0$ , je  $f(z) = 0$  za vse točke v krogli  $K(z_o, r)$ . Zato je krogla  $K(z_o, r)$  vsebovana v množici  $L$ . Posledično je  $L$  odprta množica. □

S pomočjo leme lahko sedaj dokažemo še princip identitete.

*Dokaz.* Po predpostavki vemo, da ima množica  $S = \{z \in D \mid f(z) - g(z) = 0\}$  stekališe. Zato je po predpostavki zaprta in odprta. Vemo tudi, da je množica  $D$  povezana. Edina podmnožica povezane množice, ki je hkrati odprta in zaprta, pa je množica sama.

Torej je  $D = \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$  in zato identificiramo  $f = g$  na množici  $D$ .  $\square$

## 9. BJÖRLINGOV PROBLEM

Da lahko problem navedemo, moramo poznati definicijo realno analitične funkcije.

**Definicija 9.1.** Funkcija  $f(x)$  realne spremenljivke  $x$  je *realno analitična*, če je  $f(z)$  holomorfná za kompleksno spremenljivko  $z$ .

Ekvivalentno bi lahko realno analitično funkcijo definirali kot funkcijo, katere Taylorjeva vrsta konvergira k njej sami.  $f(z)$  se imenuje *holomorfná razširitev* funkcije  $f(x)$ .

Recimo sedaj, da je  $\alpha(t) : I \mapsto \mathbb{R}^3$  realno analitična krivulja in  $\eta : I \mapsto \mathbb{R}^3$  realno analitično vektorsko polje, da velja  $|\eta| = 1$  in  $\eta(t) \cdot \alpha'(t) = 0$  za vse točke  $t$  iz intervala  $I$ . Drugi pogoj pove, da je  $\eta$  pravokoten na vse tangentne vektorje krivulje  $\alpha$ .

Björlingov problem zahteva, da najdemo takšno parametrizacijo  $\phi(u, v)$  minimalne ploskve  $M$ , za katero velja:

- (1) Ploskev  $M$  naj vsebuje krivuljo  $\alpha$  pri  $v = 0$ . Tj.  $\forall u \in I. \alpha(u) = \phi(u, 0)$
- (2) Normale na ploskev  $M$  se naj vzdolž celotne krivulje  $\alpha$  ujemajo z vektorji vektorskega polja  $\eta$  Tj.  $\forall u \in I. \eta(u) = \mathcal{N}(u, 0)$

Ker sta  $\alpha(t)$  in  $\eta(t)$  realno analitični funkciji, sta njuni holomorfní funkciji  $\alpha(z)$  in  $\eta(z)$  kompleksni holomorfní funkciji na  $D \mapsto \mathbb{C}^3$ , kjer je  $I \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ .

Izkaže se, da je rešitev Björlingovega problema ena sama in jo lahko zapišemo eksplicitno:

$$\phi(u, v) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) - i \int_{z_0}^z \eta(w) \times \alpha'(w) dw \right)$$

Zgornjo izjavo bomo dokazali v dveh korakih. Najprej bomo privzeli, da je  $\phi$  rešitev in pokazali, da je takšna kot v izreku. Iz tega bo sledilo, da je vsaka rešitev Björlingovega problema takšne oblike kot smo jo navedli in je torej enolična. Nato bomo še pokazali, da rešitvena parametrizacija zadošča obema pogojema Björlingovega problema, kar pa pomeni, da res obstaja.

*Dokaz.* Recimo, da je  $\phi$  rešitev Björlingovega problema.  $\phi$  torej parametrizira minimalno ploskev  $M$ . Ker za vsako minimalno ploskev obstaja izotermna parametrizacija, predpostavimo, da je  $\phi$  izotermna. Po trditvi (4.3) je  $\phi$  harmonična:  $\Delta\phi = 0$ .

Naj bo  $\varphi^j$  harmonična konjugiranka  $\phi^j$  tako, da je  $\phi^i + i\varphi^i$  holomorfná. Definirajmo holomorfnó funkcijo

$$\beta(z) : D \mapsto \mathbb{C}^3$$

$$\beta(z) = \phi(z) + i\varphi(z) = \begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{bmatrix}.$$

$\phi$  in  $\varphi$  sta funkciji v realnih spremenljivkah  $u$  in  $v$ , zato lahko tudi  $\beta$  odvajamo po  $u$  in  $v$ . Odvod  $\beta$  po  $u$  je  $\frac{\delta}{\delta u}\beta(z) = \frac{\delta}{\delta u}(\phi + i\varphi) = \phi_u + i\varphi_u$ . Ker je  $\beta$  holomorfná, ustreza Cauchy-Riemannovim pogojem, zato lahko odvod zapišemo kot  $\frac{\delta}{\delta u}\beta(z) = \phi_u - i\phi_v$ .

Predpostavili smo, da je  $\phi$  izotermna. Po definiciji izotermnosti velja, da sta si vektorja hitrosti  $\phi_u$  in  $\phi_v$  pravokotna. Normala  $N$  na ploskev pa je pravokotna na oba vektorja hitrosti, zato je  $\phi_v = N \times \phi_u$ .

Sledi  $\beta'(z) = \phi_u(z) - i \cdot (N(z) \times \phi_u(z))$ . Če se sedaj omejimo le na realne vrednosti  $z$ , dobimo

$$\beta'(u) = \alpha'(u) - i \cdot (\mathcal{N}(u) \times \alpha'(u))$$

za  $u \in I$ , kjer je  $I$  kot v pogojih Björlingovega problema. Enakost velja, ker je  $\phi(u, 0) = \alpha(u)$  in  $N(u, 0) = \mathcal{N}(u)$ .

Izraz lahko integriramo po realni spremenljivki  $u$  in dobimo:

$$\beta(u) = \alpha(u) - i \cdot \int_{u_0}^u \mathcal{N}(t) \times \alpha'(t) dt$$

Recimo sedaj, da je  $\gamma(z) = \alpha(z) - i \cdot \int_{u_0}^z \mathcal{N}(w) \times \alpha'(w) dw$  holomorfna krivulja. Opazimo, da je ta vsak  $u \in I$ ,  $\beta(u) = \gamma(u + i \cdot 0)$ . Zato po izreku identitete velja  $\beta(z) = \gamma(z)$  za vsak  $z \in D$ .

Realni del funkcije  $\beta$  je ravno parametrizacija  $\phi = \text{Re}(\beta + i \cdot \varphi)$ . Torej je

$$\phi(u, v) = \text{Re}(\beta(z)) = \text{Re}(\alpha(z) - i \cdot \int_{u_0}^z \mathcal{N}(w) \times \alpha'(w) dw)$$

, kar je pa ravno rešitev problema.

Dokazali smo, da če  $\phi$  parametrizira ploskev in zadošča pogojem problema, potem je ravno takšne oblike kot je navedeno v rešitvi. To pomeni, da je rešitev enolična.

Za dokaz obstoja, naj bo  $\beta(z)$  holomorfna funkcija definirana kot

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \phi(z) + i \cdot \varphi(z) \\ &= \alpha(z) - i \cdot \int_{u_0}^z \mathcal{N}(w) \times \alpha'(w) dw \end{aligned}$$

Naj bo  $u \in I$ . Vemo, da sta  $\alpha'(u)$  in  $\mathcal{N}(u)$  realni. Omejimo sedaj funkcijo  $\beta$  na  $u$ .

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \alpha(u) - i \cdot \int_{u_0}^u \mathcal{N}(t) \times \alpha'(t) dt \\ \Rightarrow \quad \beta'(u) &= \alpha'(u) - i \cdot (\mathcal{N}(u) \times \alpha'(u)) \end{aligned}$$

Vemo, da je  $\mathcal{N} \times \alpha' \perp \alpha'$ , zato je  $(\mathcal{N} \times \alpha') \cdot \alpha' = 0$ .

Prav tako vemo, da je  $\mathcal{N} \perp \alpha'$ , zato velja  $|\mathcal{N} \times \alpha'| = |\mathcal{N}| \cdot |\alpha'| = |\alpha'|$ .

Izračunajmo:

$$\beta'(u)^2 = (\alpha'(u) - i \cdot (\mathcal{N}(u) \times \alpha'(u)))^2 = \alpha'(u) \cdot \alpha'(u) - 2i\alpha'(u) \cdot (\mathcal{N} \times \alpha'(u)) - (\mathcal{N} \times \alpha'(u)) \cdot (\mathcal{N} \times \alpha'(u))$$

Po izreku identitete iz  $\beta'(u)^2 = 0$  za  $\forall u \in I$  sledi  $\beta'(u)^2 = 0$  za  $\forall u \in D$ . To pa je ravno pogoj za obstoj izotermnih koordinat po lemi (7.1). Torej realni del funkcije  $\beta$  parametrizira minimalno ploskev  $M$  v izotermnih koordinatah. Tako smo dokazali obstoj izotermne parametrizacije ploskve, ki reši Björlingov problem.  $\square$

Predpostavimo sedaj, da imamo naravno parametrizacijo krivulje  $\alpha(s)$ , ki ima enotski tangenti vektor  $T = \alpha'(s)$ . Naj bo  $N = \frac{T'}{|T'|} = \frac{\alpha''}{|\alpha'|}$  njena enotska normala in  $B = T \times N$  njena stranska normala. Preprost primer pogojev Björlingovega problema je, da za krivuljo vzamemo kar  $\alpha$ , za vektorsko polje  $\eta$  pa izberemo  $\eta = N$ . Zanima nas kako izgleda parametrizacija minimalne ploskve, ki reši problem.

Vemo, da lahko splošno rešitev problema zapišemo kot:

$$\phi(u, v) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) - i \int_{z_0}^z \eta(w) \times \alpha'(w) dw \right)$$

Oglejmo si kako lahko razpišemo izraz pod integralom, saj imamo pogoj  $\eta = N$ .

$$\eta \times \alpha' = N \times \alpha'(w) = -\alpha'(w) \times N = -|\alpha'(w)|(T \times N) = -|\alpha'(w)|B$$

Pri danih pogojih se rešitev Björlingovega problema glasi

$$\phi(u, v) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{z_0}^z B|\alpha'(w)|dw \right)$$

Pogoj  $\eta = N$  ni vzet iz zraka, ampak je povezan z naslednjo definicijo krivulje.

**Definicija 9.2.** Krivulja na ploskvi parametrizirana z naravno parametrizacijo je *geodetka*, če je njen drugi odvod povsod vzdolž krivulje vzporeden z enotsko normalo na ploskev.

Ker je smer drugega odvoda ravno smer enotske normale  $N$  po definiciji  $N$ , je v primeru, ko izberemo  $\eta = N$ , izbrana krivulja geodetka na ploskvi, ki zadostuje pogojem Björlingovega problema.

Poglejmo si še primer, ko za vektorsko polje izberemo  $\eta = -N(t)$

**Posledica 9.3.** Naj bo  $\phi(u, v)$  rešitev Björlingovega problema za krivuljo  $\alpha(t)$  in vektorsko polje  $N(t)$ . Potem je rešitev Björlingovega problema za krivuljo  $\alpha(t)$  in vektorsko polje  $-N(t)$  parametrizirana z

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(u, v) &= \operatorname{Re} \left[ \alpha(z) + i \int_{z_0}^z \eta(w) \times \alpha'(w) dw \right] \\ &= \phi(u, -v) \end{aligned}$$

*Dokaz.* Naj bo  $D$  domena kjer je rešitev  $\phi(u, v)$  definirana. Prezrcalimo  $D$  čez  $u$ -os in dobimo domeno  $\tilde{D}$ , na kateri definiramo  $\tilde{\phi}(u, v) = \phi(u, -v)$ . Ker ploskev  $\tilde{\phi}(u, v)$  dobimo z zrcaljenjem, je tudi minimalna, njene normale pa definira zveza  $\tilde{\mathcal{N}}(u, v) = -\mathcal{N}(u, -v)$ . Ploskev  $\tilde{\phi}(u, v)$  je rešitev Björlingovega problema za vektorsko polje  $-N(t)$ . Ker je rešitev enolična, je

$$\tilde{\phi}(u, v) = \operatorname{Re} \left[ \alpha(z) + i \int_{z_0}^z \eta(w) \times \alpha'(w) dw \right]$$

□

S posledico zgoraj smo rešitev definirano na  $D$  razširili na  $\tilde{D}$ . Za  $u \in I$  imajo  $N(u)$ ,  $\alpha'(u)$  in  $z = u$  realne vrednosti, zato je  $\tilde{\phi}(u, 0) = \alpha(u) = \phi(u, 0)$ . Ker sta  $D$  in  $\tilde{D}$  odprti množici, ki vsebujeta  $I$ , se ujemata na neki odprti množici. Po izreku identitete velja, da sta  $\phi(u, v)$  in  $\tilde{\phi}$  parametrizaciji iste ploskve kjer se  $D$  in  $\tilde{D}$  ujemata.

V dokazu naslednje leme privzemamo, da vektorsko polje  $\eta$  zadošča pogojem Björlingovega problema.

**Lema 9.4.** Naj bo  $\phi(u, v)$  parametrizacija minimalne ploskve  $M$  in naj bo  $\phi(u, 0)$  krivulja v  $xy$ -ravnini. Če je ploskev  $M$  pravokotna na  $xy$ -ravnino vzdolž  $\phi(u, 0)$ ,

veljajo naslednje zveze:

$$\begin{aligned}\phi^1(u, -v) &= \phi^1(u, v) \\ \phi^2(u, -v) &= \phi^2(u, v) \\ \phi^3(u, -v) &= -\phi^3(u, v)\end{aligned}$$

*Dokaz.* Vzemimo za  $\alpha(u)$  kar  $\phi(u, 0)$  in naj bo vektorsko polje  $\eta(u) = \mathcal{N}(u, 0)$  enotski normalni vektor na ploskev  $M$  vzdolž krivulje  $\alpha$ . Sedaj si lahko pomagamo z rešitvijo Björlingovega problema.  $\alpha$  leži v  $xy$ -ravnini, zato jo lahko zapišemo kot  $\alpha(u) = (\alpha^1(u), \alpha^2(u), 0)$ . Vemo tudi, da ploskev  $M$  seka  $xy$ -ravnino pravokotno, zato je njeno vektorsko polje normal  $\eta(u) = \mathcal{N}(u, 0) = (\eta^1(u), \eta^2(u), 0)$ .

Del rešitve Björlingovega problema pod integralom lahko zato zapišemo:

$$\eta(u) \times \alpha'(u) = (0, 0, \eta^1(u)(\alpha^2)'(u) - \eta^2(u)(\alpha^1)'(u))$$

Po izreku identitete velja, da za holomorfne razširitve  $\eta$  in  $\alpha$  velja ista zveza, le da  $u$  nadomestimo z  $z$ . Prva in druga koordinata  $\eta(z) \times \alpha'(z)$  sta ničelni, zato nam rešitev Björlingovega problema da  $\phi^1(u, v) = \operatorname{Re} \alpha^1(z)$  in  $\phi^2(u, v) = \operatorname{Re} \alpha^2(z)$ . Z uporabo prejšnje posledice za  $\alpha$  in  $-\eta$  pa veljaza zvezi  $\phi^1(u, -v) = \operatorname{Re} \alpha^1(z)$  in  $\phi^2(u, -v) = \operatorname{Re} \alpha^2(z)$ . Tako smo dokazali prvi dve zvezi.

Tretja koordinata  $\alpha^3(z) = 0$ , zato je  $\phi^3(u, v) = -\operatorname{Re} (i \int \eta \times \alpha' dw)$ . S ponovno uporabo prejšnje posledice za  $\alpha$  in  $-\eta$  dobimo zvezo  $\phi^3(u, -v) = \operatorname{Re} (i \int \eta \times \alpha' dw) = -\phi^3(u, v)$   $\square$

Podobno kot zgoraj, se da dokazati tudi naslednjo lemo.

**Lema 9.5.** *Naj bo  $\phi(u, v)$  parametrizacija minimalne ploskve  $M$  in naj bo  $\phi(u, 0)$  v celoti vsebovana v  $x$ -osi. Potem veljajo naslednje zveze:*

$$\begin{aligned}\phi^1(u, -v) &= \phi^1(u, v) \\ \phi^2(u, -v) &= -\phi^2(u, v) \\ \phi^3(u, -v) &= -\phi^3(u, v)\end{aligned}$$

Zgornji lemi nam dasta rezultat, s katerim lahko ploskev razširimo v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

**Izrek 9.6.** *Schwarzov izrek simetrije ?*

- (1) *Minimalna ploskev je simetrična glede na vsako premico vsebovano v ploskvi.*
- (2) *Minimalna ploskev je simetrična glede na vsako ravnino, ki ploskev seka pravokotno.*

Spomnimo se, da je za  $\alpha$  in  $\eta = N$  krivulja  $\alpha$  geodetka na rešitev Björlingovega problema. Skupaj s Schwarzovim načelom simetrije nam da naslednji rezultat.

**Posledica 9.7.** *Če se  $\eta$  ujema z ukrivljenostjo  $\alpha$ , bo pripadajoča minimalna ploskev simetrična glede na  $\alpha$ .*

**Primer 9.8.** Scherkova prva ploskev, definirana z zvezo

$$z = c \ln \left( \frac{\cos(x/c)}{\cos(y/c)} \right)$$

je definirana na  $-\pi/2 < x/c < \pi/2, -\pi/2 < y/c < \pi/2$ . Ko se bližamo ogliščem kvadrata, se približujemo nedefinirani vrednosti  $0/0$ . V tem primeru si pomagamo s

Schwarzovim izrekom simetrije. Scherkovo ploskev razširimo na diagonalno sosednji kvadrat kot na primer  $\pi/2 < x/c < 3\pi/2, \pi/2 < y/c < 3\pi/2$ .

V primeru Scherkove ploskve opazimo tudi, da je njen presek z  $xy$ -ravnino  $y = \pm x$ . To pa sta ravno simetrijski osi ploskve.  $\diamond$

Poglejmo si še eno konstrukcijo minimalne ploskve s pomočjo Björlingovega problema.

Dano imamo krivuljo v  $xz$ -ravnini  $\alpha(u) = (\beta(u), 0, \gamma(u))$  z vektorskim poljem enotskih normal  $N(u)$ . Poiskati želimo parametrizacijo ploskve, ki reši Björlingov problem.

Tangentni vektor na krivuljo je  $\alpha'(u) = (\beta'(u), 0, \gamma'(u))$ . Če ga zarotiramo v pozitivni smeri in normiramo, dobimo enotsko normalo

$$N = \frac{(-\gamma', 0, \beta')}{\sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}}$$

Izračunamo vektorski produkt  $N \times \alpha' = (0, \sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}, 0)$ . Potem je realni del  $-N \times \alpha'$  imaginarni del  $N \times \alpha'$ . Rešitev problema je torej:

$$Re \left( \alpha - i \int N \times \alpha' \right) = \left( Re\beta, Im \int \sqrt{(\beta')^2 + (\gamma')^2}, Re\gamma \right)$$

Oglejmo si primer konstrukcije ploskve s pomočjo navedene izpeljave. V naslednjem primeru bomo poiskali ploskev, ki vsebuje cikloido kot geodetko.

**Primer 9.9.** Catalanova ploskev Naj bo  $\alpha(u) = (1 - \cos u, 0, u - \sin u)$  cikloida. Definirajmo kompleksno spremenljivko  $z = u + iv$  in izračunamo

$$\phi^1(u, v) = Re(1 - \cos z) = 1 - \cos(u) \cosh(v)$$

$$\phi^2(u, v) = Re(z - \sin z) = u - \sin(u) \cosh(v)$$

Sedaj imamo prvo in tretjo koordinato rešitve. Nadalje izračunamo tangento na krivuljo  $\alpha' = (\sin z, 0, 1 - \cos z)$ . Potem je

$$\begin{aligned} \sin^2(w) + (1 - \cos(w))^2 &= 2 - 2\cos(w) \\ &= 4 \frac{1 - \cos(w)}{2} \\ &= 4\sin^2(w/2) \end{aligned}$$

Druga koordinata je enaka

$$Im \int \sqrt{\sin^2(w) + (1 - \cos(w))^2} dw = Im \int 2\sin(w/2) dw = Im(-4\cos(w/2)) = 4\sin(u/2) \sinh(v)$$

Parametrizacija Catalanove ploskve se glasi

$$\phi(u, v) = (1 - \cos(u) \cosh(v), 4\sin(u/2) \sinh(v/2), u - \sin(u) \cosh(v))$$

$\diamond$

dodaj

- maš 8 ekvivalentnih def
- Definicija - lokalna glede na okolice
- def - s srednjo ukrivljenostjo
- def - s enačbo minimalne ploskve (IZPELJI)
- PRIMERI

- Scherkova prva ploskev - maš izpeljavo v Oprah (str. 78 in 79)
- če je revolucija minimalna  $\rightarrow$  ravnina ali katenoida
- če je ruled surface minimalen  $\rightarrow$  je del ravnine ali helikoida
- Izotermne koo + def minimalne
- Definicija glede na holomorfno
- W-E reprezentacija + def glede na holomorfno

Zanima me, če pravilno razumem dokaz izreka 3.3 v diplomskem delu Katarine Gačnik. Za dokaz v desno predpostavimo, da minimalna ploskev obstaja in z  $X$  označimo njeno parametrizacijo. Potem lahko za poljubno variacijo in za nek  $\eta \in \mathbb{R}$  definiramo  $X_\eta = X + \eta \Phi n$ . Zdaj definiramo preslikavo, ki vsaki  $\eta$  priredi površino ploskve  $X_\eta$ :  $\eta \rightarrow A[X_\eta]$ . Ta preslikava bo imela minimum pri  $\eta = 0$ , ker smo predpostavili, da je  $X$  minimalna. Iz tega potem sledi

$$\left. \frac{d}{d\eta} \right|_{\eta=0} A[X_\eta] = 0$$

.