Afina in projektivna geometrija

July 21, 2022

1 Uvod

- 1. Kaj je *n*-razsežna geometrija?
- 2. V kakšni relaciji so elementi množic? Elementi katerih množic so v relaciji?
- 3. Naštej 3 geometrije
- 4. Definiraj transformacijo.
- 5. Kaj pomeni, da so transformacije usklajene?
- 6. Kaj ohranjajo transformacije Evklidske ravnine?
- 7. Navedi razlog o aksiomu, zakaj je dobro vpeljat neevklidske geometrije
- 8. Katera geometrija se je potem vpeljala?
- 9. Navedi drugi in tretji programerski razlog za vpeljavo neevklidske geometrije
- 10. Navedi četrti lepotni razlog za vpeljavo neevklidske geometrije
- 11. Katera geometrija se zaradi tega vpelje?

AFINA GEOMETRIJA

2 Afini podprostori v vektorskem prostoru

- 1. Definiraj afin podprostor
- 2. Kaj pomeni beseda afin?
- 3. Definiraj afin prostor
- 4. LEMA Kako zamenjamo element okoli katerega naredimo afin prostor? Dokaži.

- 5. POSLEDICA V kakšnem velikostnem razmerju sta dva vektorska prostora afinih prostorov? Dokaži.
- 6. POSLEDICA Kdaj sta vektorska prostora afinih prostoroc enaka? Dokaži.
- 7. Definiraj razsežnost afinega prostora
- 8. Kaj so 1-razsežni afini prostori? Kaj so dvorazsežni?
- 9. V \mathbb{Z}_2^2 najdi 6 afinih premic
- 10. Definiraj afino kombinacijo
- 11. TRDITEV O afini kombinaciji. Nad kakšnim obsegom mora biti afin prostor definiran?
- 12. Zakaj obseg ne sme imeti karakteristike 2?
- 13. LEMA Navedi lemo, s katero razširimo trditev
- 14. Dokaz leme
 - S katerim matematičnim načelom dokazujemo?
 - Razdeli primer n=3 na dva dela
 - Dokaži za n >= 4, če vsota prvih n-1 elementov ni 0
 - Dokaži za n >= 4, če vsota prvih n-1 elementov 0
- 15. Dokaz trditve
 - Dokaži da: A afin -¿ lin. kombinacija je v A
 - Definiraj tak vektorski prostor, da bo zanj A afin prostor
 - Pokaži, da je res vektorski podprostor afinega prostora
- 16. TRDITEV Kaj sledi iz leme in trditve?
- 17. TRDITEV Kaj velja za presek družine afinih podprostorov. Dokaži
- 18. Ali velja kaj podobnega za unije? Zakaj?
- 19. Definiraj afino ogrinjačo
 - Kaj je oznaka?
 - Ali je sama afin prostor? Zakaj?
- TRDITEV Čemu je afina ogrinjača enaka? Dokaži obojestransko vsebovanost
- 21. Od česa je odvisno, če se afina podprostora sekata? Nariši skico, ko se ne
- 22. TRDITEV Kdaj se afina prostora sekata? Dokaži

- 23. Kaj bi veljalo, če bi bil ta vektor vsebovan v direktnem produktu podprostorov W in U?
- 24. LEMA Formalno zapiši: Afina ogrinjača vsebuje A, B in morda tudi premico, ki povezuje a in b
 - Definiraj prostor T in z njim dokaži \subseteq
 - Definiraj prostor C in z njim dokaži \supseteq
- 25. TRDITEV Kaj je dimenzija unije dveh disjunktnih afinih prostorov? Dokaži
- 26. Defniraj kdaj sta dva afina prostora vzporedna
 - Oznaka
- 27. IZREK Natanko kdaj sta ${\mathcal A}$ in ${\mathcal B}$ vzporedna, če njun presek ni prazen? Dokaz
- 28. IZREK Natanko kdaj sta ${\mathcal A}$ in ${\mathcal B}$ vzporedna, če je njun presek prazen? Dokaz
- 29. Definiraj afino neodvisnost
- 30. Definiraj afino bazo
- 31. IZREK Kako iz bate za A dobimo bazo za W?
- 32. IZREK Kako iz bate za W dobimo bazo za A?
- 33. POSLEDICA Dopolnitev do baze. Dokaži

3 Semilinearne preslikave

- 1. Definiraj semilinearno preslikavo
- 2. Navedi semilinearno preslikavo in njen njen avtomorfizem nad obsegom C
- 3. Kaj je grupa avtomorfizmov obsegov $R,\,Q,\,Z_p$? Kaj so zato njihove semilinearne preslikave?
- 4. S čem je semilinearna preslikava enolično določena?
- 5. TRDITEV Semilinearna preslikava slika podprostore v podprostore. Dokaži
- 6. TRDITEV Inverz semilinearne preslikave slika podprostore v podprostore. Dokaži
- 7. POSLEDICA Kateri dvve algebraični strukturi sta zato vektorska posprostora?

- 8. TRDITEV Kakšna preslikava slika linearno neodvisne vektorje v linearno neodvisne? Dokaži
- 9. Dokaži: Kompozitum semilinearnih preslikav je semilinearna preslikava
- 10. Dokaži: Inverz semilinearne preslikave je semilinearna preslikava
- 11. Kaj sledi iz teh dveh trditev?
- 12. Kdaj je vsota semilinearnih preslikav semilinearna preslikava?

4 Afine transformacije

- 1. Definiraj afino transformacijo
- 2. Kaj pa velja, če je dimenzija 1?
- 3. IZREK O premicah
- 4. OPOMBA Zakaj izrek ne sledi direktno iz definicije?
- 5. Kdaj je slika premice vedno kar cela premica? Povej to isto stvar z inj, surj, bij
- 6. LEMA Navedi pogoje in formaliziraj, da poljubna točka iz afine ogrinjače unije dveh afinih prostorov leži na premici
- 7. Zakaj je potrebno privzeti, da obseg ni \mathbb{Z}_2 ?
- 8. Zakaj je potrebno privzeti, da presek ni prazen?
- 9. Dokaz leme
 - Definiraj bazo preseka in dopolni do baz A in B
 - Zapiši točko c s pomočjo baznih vektorjev
 - Definiraj α in β
 - Pokaži, ko sta α in β različna od 0
 - $\bullet\,$ Pokaži, ko en od α oziroma β enak0
- 10. LEMA Tri trditve, ki veljajo za dve premici, kjer je slika ene vsebovana v drugi
- 11. Dokaz leme
 - Pravilno izberi a
 - Definiraj A_2 . Koliko je dimenzija?
 - Pokaži, da je $\tau(A_2)$ vsebovan v q
 - Kaj iz tega sledi za dimenzijo slike A_2 ?

- Koliko je dimenzija A_i ?
- Koliko je dimenzija $\tau(A_i)$?
- 12. Dokaži izrek o premici
- 13. Kam afina transformacija slika nakolinearne točke? Dokaži
- 14. Dokaži, da je množica afinih transformacij grupa.
- 15. Kam afina transformacija preslika koplanarne točke? Kaki je obseg?
 - Dokaži, če so tri kolinearne
 - Dokaži, če so po tri nekolinearne
- 16. Kam afina transformacija slika vzporedne premice? Dokaži

5 Osnovni izrek afine geometrije

- 1. Navedi osnovni izrek aritmetike
- 2. Dokaz
 - (j=) Kam se slika afina premica?
 - (=;) Definiraj preslikavo A. Kompozitum katerih preslikav je?
 - (=i) Dokaži njeno aditivnost
 - (=;) Kako dosežemo linearno neodvisnost, če sta dani točki x in y odvisni?
 - (=;) Dokaži njeno semihomogenost
 - (=;) Poišči avtomorfizem in dokaži, da je neodvisen od izbire vektorja. Kaj pa če sta x in y linearno odvisna?
 - (=;) Pokaži, da je avtomorfizem
- 3. Kaj velja za afino transformacijo iz izreka?
- 4. Definiraj dilatacijo
- 5. IZREK Kaj ohranja dilatacija? Dokaži
- 6. Navedi osnovni izrek afine geometrije za dilatacije
 - (¡=) Pokaži, da sta afin podpostor in njegova slika vzporedna
 - (=;) Kakšen predpis takoj velja?
 - (= ξ) Definiraj premico skozi 0 in x, prestavi jo. Kam se slika translirana premica?
 - (=;) Kako dobimo skalar?
 - (=;) Pokaži, da je skalar neodvisen od izbire vektorja

- 7. Definiraj translacijo
- 8. Kdaj je dilatacija translacija? Dokaži
- 9. Definiraj afino geometrijo
- 10. Kako jo označimo?
- 11. Definiraj kdaj sta afini geometriji izomorfni
- 12. Kaj pomeni, da preslikava ohranja inkluzije?
- 13. Kdaj sta afini geometriji izomorfni, če sta afina prostora definirana nad istim obsegom?

6 Aksiomatsko definirana afina ravnina

- 1. Definiraj aksiomatsko definirano afino ravnino
- 2. Kdaj sta premici vzporedni?
- 3. Katerim aksiomom zadošča aksiomatsko definirana afina ravnina (3)?
- 4. Katerih razsežnosti O^n so in katerih niso aksiomtsko definirane afine ravnine? Zakaj ni?
- 5. Definiraj Moultonovo ravnino
- 6. Navedi prvi Desarguesov izrek
- 7. Ali prvi Desarguesov izrek velja v Moultonovi ravnini? Zakaj ja/ne?
- 8. Definiraj afino transformacijo
- 9. Definiraj dilatacijo
- 10. Definiraj translacijo
- 11. Kaj velja za afine transformacije?
- 12. Ali obstaja afina transformacija iz Moultonove ravnine?
- 13. Čemu je ekvavilenten prvi Desarguesov izrek?
 - Dokaži (A4 = ¿ prvi Desarguesov)
 - Izberi potrebne točke in premice
 - Uporabi A4
 - Kaj bi veljalo, če $\tau(Q) \neq Q'$
 - Dokončaj dokaz
 - Dokaži (prvi Desarguesov =; A4)

- Konstruiraj τ
- Preveri, da je dobro definirana
- 14. Definiraj usmerjeno daljico
- 15. Kdaj sta usmerjeni daljici ekvavilentni?
- 16. Definiraj vektor
- 17. Navedi drugi Desarguesov izrek
- 18. Kateremu aksiomu A5 je ekvavilenten izrek?
- 19. Kaj omogoča aksiom A4?
- 20. Kaj omogoča aksiom A5?
- 21. IZREK Kaj velja za afin prostor, ki zadošča aksiomom A1 do A5?
- 22. Navedi Papppusov izrek
- 23. Nad kakšnim obsegom velja Pappusov izrek?

7 PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

- 1. Kako iz afine ravnine dobimo projektivno?
- 2. Kako zgleda vložitev afine \mathbb{Z}_2^2 v projektivno?
- 3. Kako se imenuje?
- 4. Kaj dobimo, če hiperboli dodamo točke v neskončnosti?
- 5. Zapiši predpis s katerim preslikamo hiperbolo
- 6. Zapiši predpis s katerim preslikamo parabolo
- 7. Kakšen mora biti obseg nad katerim delamo? Zakaj?
- 8. Kam vložimo realno afino ravnino A?
- 9. Kaj so točke v projektivni geometriji?
- 10. Kaj so premice v projektivni ravnini?
- 11. Kaj je presek dveh afinih premic v projektivnem? (izpelji)
- 12. Definiraj projektivno geometrijo
 - Oznaka?
- 13. Kaj so v projektivnem 1-razsežni podprostori, 2-razsežni podprostori?

- 14. Definiraj projektivno razsežnost?
- 15. Kolikšna je razsežnost geometrije P(V)?
- 16. Kako iz projektivnih točk konstruiramo projektivno premico?
- 17. Kaj je dimenzija preseka projektivnih premic v projektivni geometriji projektivne razsežnosti 2?
- 18. Kje se sekata različni projektivni premici?

8 Dualnost

- 1. Definiraj dualni vektorski prostor
 - Oznaka?
 - Zakaj rabimo polje in ne obseg?
- 2. Kaj je dualna baza baze V?
- 3. Kaj sta si torej V in V*?
- 4. Kaj pa V in V * *?
- 5. Poišči izomorfizem med V in V * *
- 6. Definiraj zgornji anhilator
- 7. Definiraj spodnji anhilator
- 8. Kaj sta anhilatorja?
- 9. Definiraj bijekcijo med P(V) in P(V*) in njen inverz
- 10. Dokaži, da sta si inverzni (v dveh točkah)
- 11. IZREK Uporabi zgornji anhilator na $W_1 <= W_2 <= V$. Dokaži
- 12. IZREK Čemu je enak zgornji angilator $(W_1\cap W_2)$? Dokaži obojestransko vsebovanost
- 13. IZREK Čemu je enak zgornji angilator (W_1+W_2) ? Dokaži obojestransko vsebovanost
- 14. IZREK Kaj je kodimenzija V? Dokaži z bazami
- 15. Kaj je izjava o geometriji P(V)?
- 16. Kaj je dualna trditev?
- 17. Kaj je dualna izjava k izjavi: V projektivni ravnini skozi poljubni točki poteka natanko ena premica

- Zapiši izjavo v formalni obliki
- Zapiši njej dualno izjavo
- 18. Kaj je dualna izjava k izjavi: A,B,C so kolinearne točkev projektivni ravnini P(V)
 - Zapiši izjavo v formalni obliki
 - Zapiši njej dualno izjavo
- 19. IZREK Navedi PRINCIP DUALNOSTI
- 20. Definiraj trikotnik
- 21. Definiraj kdaj sta trikotnika ABC in A'B'C' v perspektivni legi
- 22. Navedi DESARGUESOV IZREK v projektivni geometriji
- 23. Dokaz
 - (=;) Izberi 7 neničelnih vektorjev
 - Kako bi z njimi zapisala presečišče AA', BB' in CC'?
 - Čemu je to enako?
 - Kako bi z njimi zapisala točke, ki so presečišča stranic?
 - Kaj moramo dokazati za te točke?
 - Kaj je dualna izjava k tej izjavi?
 - Označi dualne premice
 - Definiraj njihova presečišča
 - Kaj so točke dualne k premicam AA', BB' in CC'?
 - Kaj so dualne premice k točkam v presečiščih?
 - Kako dokažemo nasprotno implikacijo?

9 Vložitev afine geometrije v projektivno

- 1. Definiraj kake dimenzije naj bo $V,\,W \mathrel{<=} V$ in afin podprostor prostoraV
- 2. Kako afinemu prostoru priredimo projektivni podprostor? Definiraj preslikavo
- 3. LEMA Koliko je l(x+U)? Dokaži
- 4. LEMA Koliko je $l(x+U) \cap A$?
- 5. LEMA Formalno zapiši, da vsakZ,ki ni cel vsebovan vW,je slika nečesa

- Pokaži, da je presek neprazen
- \bullet Pokaži, da je Z slika
- 6. Naštej 7 lastnosti, ki veljajo za preslikavo l
- 7. Dokaži, da je l injektivna
- 8. Kaj je slika l
 aka kdaj je Z v zalogi vrednosti l? Dokaži
- 9. Dokaži, da l ohranja inkluzije
- 10. Kaj velja za družino afinih podprostorov z nepraznim presekom? Dokaži
- 11. Kaj velja za družino afinih podprostorov? Dokaži
- 12. Kaj je dimenzija podprostora afine ravnine? Dokaži
- 13. Kdaj sta afina podprostora vzporedna? Dokaži
- 14. Kaj je *l*?
- 15. Kako označimo vse točke v P(V)?4
- 16. Kako razpišemo PV?
- 17. Kaj sledi iz vzporednosti p in q za projektivno ravnino?
- 18. Kaj sledi iz vzporednosti p, q in r za projektivno ravnino? Kako to imenujemo?
- 19. Navedi drugi Desarguesov izrek za afino ravnino
- 20. Dokaz
 - Kdaj moramo vse translirati?
 - Definiraj vložitev afine v projektivno
 - Kaj sledi iz ohranjana inkluzij?
 - Kaj velja za trikotnika v projektivnem?
 - Kaj velja po Desarguesovem izreku za projektivno ravnino?
 - Kaj torej sledi (točke v neskončnosti)
- 21. Navedi prvi Desarguesov izrek za afino ravnino. Začni dokaz

10 Kolineacije in projektivnosti

- 1. Definiraj kolineacijo
- 2. PRIMER Definiraj kolineacijo za bijektivno semilinearno preslikavo in pokaži, da je kolineacija
- 3. Kaj velja če $L < L_1 + ... L_k$, kjer so $L, L_i \in PV$. Dokaži z indukcijo
- 4. Do česa lahko razširimo kolinealizacijo? Definiraj njen predpis
- 5. Kaj je kolineacija vsote projektivnih podprostorov? Dokaz
- 6. Kaj je kolineacija preseka projektivnih podprostorov? Dokaz poglej kako so povezane dimenzije vsot in preseka + uporabi ohranjanje inkluzij
- 7. Navedi osnovni izrek projektivne geometrije (dokaz)
 - Definiraj podprostore in njihove slike
 - Definiraj afin podprostor in njegovo sliko
 - Definiraj afino preslikavo
 - Kaj velja za afine podprostore? (vložitev)
 - Pokaži, da je preslikava surjektivna
 - Pokaži, da je injektivna
 - Pokaži, da ohranja inkluzije
 - Pokaži, da ohranja vzporednosti
 - Kaj je torej preslikava med afinimi prostori?
 - Kaj velja po osnovnem izreku afine geometrije?
 - Kam razširimo semilinearno?
 - Definiraj razširitev A
 - Pokaži, da je A aditivna
 - Pokaži, da je A semihomogena
 - Poišči kakšen predpis ima iskana kolineacija za $\lambda \neq 0$
 - Poišči kakšen predpis ima iskana kolineacija za $\lambda=0$
- 8. Kaj je kolineacija porojena s semilinearno preslikavo?
- 9. Definiraj projektivnost
- 10. V katerih primerih je kolineacija kar projektivnost?
- 11. Kakšen algebraičen objekt je množica vseh kolineacij? Za katero operacijo?
- 12. Definiraj grupo obrnljivih linearnih preslikav

- 13. Definiraj grupo obrnljivih semilinearnih preslikav
- 14. Definiraj grupo projektivnosti
- 15. Definiraj grupo kolineacij
- 16. Od kod kam slikajo preslikave v teh grupah?
- 17. Kateri grupi sta projektivni?
- 18. Kaj enačimo z GL(v) in $\Gamma L(v)$?
- 19. Navedi dva izomorfizma med definiranimi grupami. Dokaži, da sta res izomorfizma
- 20. Definiraj projektivno ogrodje
- 21. Kaj je projektivno ogrodje, če je dimV = 2? Zakaj?
- 22. Kaj je projektivno ogrodje, če je dimV = 3?
- 23. TRDITEV Kaj velja za projektivnost, ki vsako točko iz projektivnega ogrodja preslika vase? Dokaži
- 24. POSLEDICA Poišči projektivnost, ki slika projektivno ogrodje PV v projektivno ogrodje PV'. Dokaži
- 25. Zakaj je projektivnost $PR^2 > PR^2$ določena s tremi točkami?

11 Perspektivnost

- 1. Definiraj perspektivnost s centrom T
- 2. Navedi lemo o distributivnosti in jo dokaži
- 3. Koliko je dimenzija slike prostora z dimenzijo 1?
- 4. Čemu je enaka direktna vsota X in T? Dokaži
- 5. Kaj je inverz perspektivnosti s ventrom T? Dokaži
- 6. Kaj je vsaka perspektivnost? Dokaz

12 Homogene koordinate

- 1. Definiraj ekvavilenčno relacijo na $O^n \setminus 0$
- 2. Kako označimo ekvavilenčni razred?
- 3. Kako točki L priredimo homogene koordinate glede na projektivo ogrodje?
- 4. Pokaži, da so homogene koordinate dobro definirane

- 5. Pokaži, da so homogene koordinate odvisne le od izbire projektivnega ogrodja in ne od izbire vektorjev \boldsymbol{u}_i
- 6. Kako prehajamo med homogenimi in nehomogenimi koordinatami?

13 Dvorazmerje

- 1. Kaj je motivacija, da definiramo dvorazmerje?
- 2. Definiraj Dvorazmerje
- 3. TRDITEV Katere zveze obstajajo med dvorazmerji glede na različna ogrodja? Dokaži
- 4. IZREK Katera preslikava ohranja dvorazmerje? Dokaži
- 5. Definiraj dvorazmerje šopa
- 6. Kaj je dvorazmerje šopa v projektivni?
- 7. Kaj pa če bi izbrali drugo premico t?
- 8. Definiraj harmonično četverko
- 9. Kaj je dvorazmerje realnih števil x, y, u, v?
- 10. Kaj velja za dvorazmerje, če je C točka v neskončnosti?
- 11. IZREK Kako konstruiramo harmonično četverko? Dokaži s pomočjo prejšnega izreka
- 12. TRDITEV Kdaj je projektivnost, ki ni identiteta, involucija?

14 Stožnice

- 1. Definiraj algebraično množico
- 2. Kaj je stožnica?
- 3. Definiraj kdaj je polinom homogen?
- 4. Kaj so homogeni polinomi za d = 0?
- 5. Kaj so homogeni polinomi za d = 1?
- 6. Kaj so homogeni polinomi za d=2 in n=3?
- 7. Ali homogen polinom definira preslikavo PV > O?
- 8. Definiraj projektivno algebraično množico
- 9. Kaj je stožnica?

- 10. Kako lahko podamo stožnico v projektivnem?
- 11. Definiraj kvadratno formo in matriko, ki pripadata stožnici
- 12. Definiraj simetrično bilinearno formo
- 13. Kako dobimo simetrično bilinearno formo iz kvadratne forme?
- 14. Kdaj sta si kvadratni formi ekvavilentni?
- 15. Kdaj sta si stožnici ekvavilentni?
- 16. Kako sta ti dve definiciji povezani? Dokaži
- 17. Ali trditev velja v drugo smer?
- 18. SYLVESTROV IZREK Čemu je ekvavilentna forma na R in čemu na C?

15 Klasifikacija stožnic v R in C

- 1. Definiraj neizrojeno stožnico
- 2. Glede na rang matrike M določi kvadratno dormo in stožnico
- 3. Katera stožnica je neizrojena?
- 4. Kaj je signatura?
- 5. Glede na signaturo določi kvadratno formo in stožnico
- 6. V katerem primeru dobimo neizrojeno neprazno stožnico?
- 7. IZREK Koliko točk je v preseku neizrojene stožnice in projektivne premice?
- 8. IZREK Kdaj je presek neprazen?
- 9. Kdaj je presek stožnice in projektivne premice prazen? (v realnem)
- 10. Kdaj je presek stožnice in projektivne premice ena točka? (v realnem)
- 11. Kdaj je presek stožnice in projektivne premice dve točki? (v realnem)

16 Pol in polara

- 1. Definiraj tangento
- 2. Ali je ta definicija dobra v evklidski ravnini?
- 3. Definiraj polaro
- 4. TRDITEV Kdaj je polara projektivna premica? Dokaži

- 5. TRDITEV Kdaj je polara tangenta na S v A?
- 6. TRDITEV Ali v vsaki točki obstaja tangenta?
- 7. Pokaži, da je $A \in p_B \Leftrightarrow Binb_A$
- 8. Pokaži, da če $A \neq B$, potem tudi njuni polari nista enaki
- 9. Zapiši predpis za bijekcijo med točkami in premicami v projektivni ravnini. Pokaži, da je bijekcija
- 10. Definiraj pol premice p glede na neizrojeno stožnico S
- 11. Kako konstruiramo polaro? (3 načini)
 - Za točke na stožnici
 - Za točke, za katere obstajajo tangente na stožnico
 - Za točke za katere ne obstajajo tangente na stožnico

17 Dvorazmerja na stožnici

- 1. TRDITEV Katere štiri točke, ki jih tvorimo iz A in premic, tvorijo harmonično četverko?
- 2. Dokaz
 - Definiraj harmonično četverko
 - ullet Kaj sledi iz tega, da je B na polari A?
 - Zakaj $\Phi(d,c) \neq 0$?
- 3. Navedi SETINERJEV IZREK
- 4. OPOMBA Kaj je polara, če je T = A?
- 5. Dokaz
 - Ali lahko ležijo točke A, B, CinD na isti premici?
 - Kaj tvorijo D, A, B, C?
 - Kako lahko zapišemo d in kako t??
 - Zapiši matriko na bazi a, c, d
 - Izberi d'. Kaj je potem β'
 - Kakšna so razmerja med $\alpha'.\beta'in\gamma'$?
 - $\bullet\,$ Kakšno enačbo dobimo, kerDleži na stožnici?
 - Kakšno enačbo dobimo, ker Tleži na stožnici?
 - Kaj je dvorazmerje, če so točke A, BC, D, T različne?
 - Uvedi oznake za C' in D'.

- Zakaj so koordinate razlčne?
- Kako računamo dvorazmerje A, B, C', D'?
- Uporabi izpeljani enačbi (D in T na stožnici)
- Kaj je dvorazmerje, če je A = T?
- Uvedi kaj sta D' in A'
- Kako zračunamo p_A ?
- Kako izračunamo dvorazmerje A', B, C, D'
- 6. Definiraj dvorazmerje točk na stožnici
- 7. A,B,C so dane točke na stožnici. Kako konstruiramo točko D na stožnici, da A,B,C,D tvorijo harmonično četverko?
- 8. Navedi PASCALOV IZREK
- 9. Dokaz (najprej sekaj dvorazmerje $D(A,B,C,B^\prime)$ z A^\prime in E, potem pa še z C^\prime in E)
- 10. Ali velja obrat?
- 11. Navedi BRAINCHONOV IZREK
- 12. Dokaz
 - Označi dotikališča
 - Kaj so njihove polare?
 - Kaj so polare točk v izreku?
 - Kaj označimo z X, Y, Z?
 - Kaj so polare teh točk?
 - Dokoči dve točki (presečišči) kot v izreku in pokaži, da sta ista točka