

Afina in projektivna geometrija

July 7, 2022

1 Uvod

1. Kaj je n -razsežna geometrija?
2. V kakšni relaciji so elementi množic? Elementi katerih množic so v relaciji?
3. Naštej 3 geometrije
4. Definiraj transformacijo.
5. Kaj pomeni, da so transformacije usklajene?
6. Kaj ohranjajo transformacije Evklidske ravnine?
7. Navedi razlog o aksiomu, zakaj je dobro vpeljati neevklidske geometrije
8. Katera geometrija se je potem vpeljala?
9. Navedi drugi in tretji programerski razlog za vpeljavo neevklidske geometrije
10. Navedi četrti lepotni razlog za vpeljavo neevklidske geometrije
11. Katera geometrija se zaradi tega vpelje?

AFINA GEOMETRIJA

2 Afini podprostor v vektorskem prostoru

1. Definiraj afin podprostor
2. Kaj pomeni beseda afin?
3. Definiraj afin prostor
4. LEMA - Kako zamenjamo element okoli katerega naredimo afin prostor? Dokazi.

5. POSLEDICA - V kakšnem velikostnem razmerju sta dva vektorska prostora afinih prostorov? Dokaži.
6. POSLEDICA - Kdaj sta vektorska prostora afinih prostorov enaka? Dokaži.
7. Definiraj razsežnost afinega prostora
8. Kaj so 1-razsežni afini prostori? Kaj so dvorazsežni?
9. V Z_2^2 najdi 6 afinih premic
10. Definiraj afino kombinacijo
11. TRDITEV - O afini kombinaciji. Nad kakšnim obsegom mora biti afin prostor definiran?
12. Zakaj obseg ne sme imeti karakteristike 2?
13. LEMA - Navedi lemo, s katero razširimo trditev
14. Dokaz leme
 - S katerim matematičnim načelom dokazujemo?
 - Razdeli primer $n = 3$ na dva dela
 - Dokaži za $n \geq 4$, če vsota prvih $n - 1$ elementov ni 0
 - Dokaži za $n \geq 4$, če vsota prvih $n - 1$ elementov 0
15. Dokaz trditve
 - Dokaži da: A afin - λ lin. kombinacija je v A
 - Definiraj tak vektorski prostor, da bo zanj A afin prostor
 - Pokaži, da je res vektorski podprostor afinega prostora
16. TRDITEV - Kaj sledi iz leme in trditve?
17. TRDITEV - Kaj velja za presek družine afinih podprostorov. Dokaži
18. Ali velja kaj podobnega za unije? Zakaj?
19. Definiraj afino ogrinjačo
 - Kaj je oznaka?
 - Ali je sama afin prostor? Zakaj?
20. TRDITEV - Čemu je afina ogrinjača enaka? Dokaži obojestransko vsebovanost
21. Od česa je odvisno, če se afina podprostora sekata? Nariši skico, ko se ne
22. TRDITEV - Kdaj se afina prostora sekata? Dokaži

23. Kaj bi veljalo, če bi bil ta vektor vsebovan v direktnem produktu podprostorov W in U ?
24. LEMA - Formalno zapiši: Afina ogrinjača vsebuje A , B in morda tudi premico, ki povezuje a in b
 - Definiraj prostor T in z njim dokaži \subseteq
 - Definiraj prostor C in z njim dokaži \supseteq
25. TRDITEV - Kaj je dimenzija unije dveh disjunktnih afinih prostorov? Dokaži
26. Definiraj kdaj sta dva afina prostora vzporedna
 - Oznaka
27. IZREK - Natanko kdaj sta \mathcal{A} in \mathcal{B} vzporedna, če njun presek ni prazen? Dokaz
28. IZREK - Natanko kdaj sta \mathcal{A} in \mathcal{B} vzporedna, če je njun presek prazen? Dokaz
29. Definiraj afino neodvisnost
30. Definiraj afino bazo
31. IZREK - Kako iz baze za A dobimo bazo za W ?
32. IZREK - Kako iz baze za W dobimo bazo za A ?
33. POSLEDICA - Dopolnitev do baze. Dokaži

3 Semilinearne preslikave

1. Definiraj semilinearne preslikavo
2. Navedi semilinearne preslikavo in njen njen avtomorfizem nad obsegom C
3. Kaj je grupa avtomorfizmov obsegov R , Q , Z_p ? Kaj so zato njihove semilinearne preslikave?
4. S čem je semilinearna preslikava enolično določena?
5. TRDITEV - Semilinearna preslikava slika podprostore v podprostore. Dokaži
6. TRDITEV - Inverz semilinearne preslikave slika podprostore v podprostore. Dokaži
7. POSLEDICA - Kateri dve algebraični strukturi sta zato vektorska posprostor?

8. TRDITEV - Kakšna preslikava slika linearno neodvisne vektorje v linearno neodvisne? Dokaži
9. Dokaži: Kompozitum semilinearnih preslikav je semilinearna preslikava
10. Dokaži: Kompozitum semilinearne preslikave je semilinearna preslikava
11. Kaj sledi iz teh dveh trditev?
12. Kdaj je vsota semilinearnih preslikav semilinearna preslikava?

4 Afine transformacije

1. Definiraj afino transformacijo
2. IZREK - O premicah
3. OPOMBA - Zakaj izrek ne sledi direktno iz definicije?
4. Kdaj je slika premice vedno kar cela premica? Povej to isto stvar z inj, surj, bij
5. LEMA - Navedi pogoje in formaliziraj, da poljubna točka iz afine ogrinjače unije dveh afinih prostorov leži na premici
6. Zakaj je potrebno privzeti, da obseg ni Z_2 ?
7. Zakaj je potrebno privzeti, da presek ni prazen?
8. Dokaz leme
 - Definiraj bazo preseka in dopolni do baz A in B
 - Zapiši točko c s pomočjo baznih vektorjev
 - Definiraj α in β
 - Pokaži, ko sta α in β različna od 0
 - Pokaži, ko en od α oziroma β enak 0
9. LEMA - Tri trditve, ki veljajo za dve premici, kjer je slika ene vsebovana v drugi
10. Dokaz leme
 - Pravilno izberi a
 - Definiraj \mathcal{A}_2 . Koliko je dimenzija?
 - Pokaži, da je $\tau(\mathcal{A}_2)$ vsebovan v q
 - Kaj iz tega sledi za dimenzijo slike \mathcal{A}_2 ?
 - Koliko je dimenzija \mathcal{A}_i ?
 - Koliko je dimenzija $\tau(\mathcal{A}_i)$?

11. Dokaži izrek o premici
12. Kam afina transformacija slika nakolinearne točke? Dokaži
13. Dokaži, da je množica afinih transformacij grupa.
14. Kam afina transformacija preslika koplanarne točke?
 - Dokaži, če so tri kolinearne
 - Dokaži, če so po tri nekolinearne
15. Kam afina transformacija slika vzporedne premice? Dokaži

5 Osnovni izrek afine geometrije

1. Navedi osnovni izrek aritmetike
2. Dokaz
 - (\Leftarrow) Kam se slika afina premica?
 - (\Rightarrow) Definiraj preslikavo A . Kompozitum katerih preslikav je?
 - (\Rightarrow) Dokaži njeno aditivnost
 - (\Rightarrow) Kako dosežemo linearno neodvisnost, če sta dani točki x in y odvisni?
 - (\Rightarrow) Dokaži njeno semihomogenost
 - (\Rightarrow) Poišči avtomorfizem in dokaži, da je neodvisen od izbire vektorja. Kaj pa če sta x in y linearno odvisna?
 - (\Rightarrow) Pokaži, da je avtomorfizem
3. Kaj velja za afino transformacijo iz izreka?
4. Definiraj dilatacijo
5. IZREK - Kaj ohranja dilatacija? Dokaži
6. Navedi osnovni izrek afine geometrije za dilatacije
 - (\Leftarrow) Pokaži, da sta afina podpostor in njegova slika vzporedna
 - (\Rightarrow) Kakšen predpis takoj velja?
 - (\Rightarrow) Definiraj premico skozi 0 in x , prestavi jo. Kam se slika translirana premica?
 - (\Rightarrow) Kako dobimo skalar?
 - (\Rightarrow) Pokaži, da je skalar neodvisen od izbire vektorja
7. Definiraj translacijo
8. Kdaj je dilatacija translacija? Dokaži

9. Definiraj afino geometrijo
10. Definiraj kdaj sta afini geometriji izomorfni
11. Kaj pomeni, da preslikava ohranja inkluzije?
12. Kdaj sta afini geometriji izomorfni, če sta afina prostora definirana nad istim obsegom?

6 Aksiomatsko definirana afina ravnina

1. Definiraj aksiomatsko definirano afino ravnino
2. Kdaj sta premici vzporedni?
3. katerim aksiomom zadošča aksiomatsko definirana afina ravnina (3)?
4. katerih razsežnosti O^n so in katerih niso aksiomatsko definirane afine ravnine? Zakaj ni?
5. Definiraj Moultonovo ravnino
6. Navedi prvi Desarguesov izrek
7. Ali prvi Desarguesov izrek velja v Moultonovi ravnini? Zakaj ja/ne?
8. Definiraj afino transformacijo
9. Definiraj dilatacijo
10. Definiraj translacijo
11. Kaj velja za afine transformacije?
12. Ali obstaja afina transformacija iz Moultonove ravnine?
13. Čemu je ekvivalenten prvi Desarguesov izrek?
 - Dokaži (A4 \Rightarrow prvi Desarguesov)
 - Izberi potrebne točke in premice
 - Uporabi A4
 - Kaj bi veljalo, če $\tau(Q) \neq Q'$
 - Dokončaj dokaz
 - Dokaži (prvi Desarguesov \Rightarrow A4)
 - Konstruiraj τ
 - Preveri, da je dobro definirana
14. Definiraj usmerjeno daljico

15. Kdaj sta usmerjeni daljici ekvivalentni?
16. Definiraj vektor
17. Navedi drugi Desarguesov izrek
18. Kateremu aksiomu A5 je ekvivalenten izrek?
19. Kaj omogoča aksiom A4?
20. Kaj omogoča aksiom A5?
21. IZREK - Kaj velja za afin prostor, ki zadošča aksiomom A1 do A5?
22. Navedi Pappusov izrek
23. Nad kakšnim obsegom velja Pappusov izrek?

7 PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

1. Kako iz afine ravnine dobimo projektivno?
2. Kako zgleda vložitev afine Z_2^2 v projektivno?
3. Kaj dobimo, če hiperboli dodamo točke v neskončnosti?
4. Zapiši predpis s katerim preslikamo hiperbolo
5. Zapiši predpis s katerim preslikamo parabolo
6. Kakšen mora biti obseg nad katerim delamo? Zakaj?
7. Kam vložimo realno afino ravnino A ?
8. Kaj so točke v projektivni geometriji?
9. Kaj so premice v projektivni ravnini?
10. Kaj je presek dveh afinih premic v projektivnem? (izpelji)
11. Definiraj projektivno geometrijo
 - Oznaka?
12. Kaj so v projektivnem 1-razsežni podprostor, 2-razsežni podprostor?
13. Definiraj projektivno razsežnost?
14. Kolikšna je razsežnost geometrije $P(V)$?
15. Kako iz projektivnih točk konstruiramo projektivno premico?
16. Kaj je dimenzija preseka projektivnih premic v projektivni geometriji projektivne razsežnosti 2?
17. Kje se sekata različni projektivni premici?

8 Dualnost

1. Definiraj dualni vektorski prostor
 - Oznaka?
 - Zakaj rabimo polje in ne obseg?
2. Kaj je dualna baza baze V ?
3. Kaj sta si torej V in V^* ?
4. Kaj pa V in V^{**} ?
5. Poišči izomorfizem med V in V^{**}
6. Definiraj zgornji anihilator
7. Definiraj spodnji anihilator
8. Kaj sta anihilatorja?
9. Definiraj bijekcijo med $P(V)$ in $P(V^*)$ in njen inverz
10. Dokaži, da sta si inverzni (v dveh točkah)
11. IZREK - Uporabi zgornji anihilator na $W_1 \leq W_2 \leq V$. Dokaži
12. IZREK - Čemu je enak zgornji anihilator $(W_1 \cap W_2)$? Dokaži obojestransko vsebovanost
13. IZREK - Čemu je enak zgornji anihilator $(W_1 + W_2)$? Dokaži obojestransko vsebovanost
14. IZREK - Kaj je kodimenzija V ? Dokaži
15. Kaj je izjava o geometriji $P(V)$?
16. Kaj je dualna trditev?
17. Kaj je dualna izjava k izjavi: V projektivni ravnini skozi poljubni točki poteka natanko ena premica
 - Zapiši izjavo v formalni obliki
 - Zapiši njej dualno izjavo
18. Kaj je dualna izjava k izjavi: A, B, C so kolinearne točkev projektivni ravnini $P(V)$
 - Zapiši izjavo v formalni obliki
 - Zapiši njej dualno izjavo
19. IZREK - Navedi PRINCIP DUALNOSTI

20. Definiraj trikotnik
21. Definiraj kdaj sta trikotnika ABC in $A'B'C'$ v perspektivni legi
22. Navedi DESARGUESOV IZREK v projektivni geometriji
23. Dokaz
 - ($=_l$) Izberi 7 neničelnih vektorjev
 - Kako bi z njimi zapisala presečišče AA' , BB' in CC' ?
 - Kako bi z njimi zapisala točke, ki so presečišča stranic?
 - Kaj moramo dokazati za te točke?
 - Kaj je dualna izjava k tej izjavi?
 - Kako dokažemo nasprotno implikacijo?

9 Vložitev afine geometrije v projektivno

1. Definiraj kake dimenzije naj bo V , $W \leq V$ in afin podprostor prostora V
2. Kako afinemu prostoru priredimo projektivni podprostor? Definiraj preslikavo
3. LEMA - Koliko je $l(x + U)$? Dokaži
4. LEMA - Koliko je $l(x + U) \cap A$?
5. LEMA - Formalno zapiši, da vsak Z , ki ni cel vsebovan v W , je slika nečesa
 - Pokaži, da je presek neprazen
 - Pokaži, da je Z slika
6. Naštej 7 lastnosti, ki veljajo za preslikavo l
7. Dokaži, da je l injektivna
8. Kaj je slika l aka kdaj je Z v zalogi vrednosti l ? Dokaži
9. Dokaži, da l ohranja inkluzije
10. Kaj velja za družino afinih podprostorov z nepraznim presekom? Dokaži
11. Kaj velja za družino afinih podprostorov? Dokaži
12. Kaj je dimenzija podprostora afine ravnine? Dokaži
13. Kdaj sta afina podprostora vzporedna? Dokaži
14. Kaj je l ?

15. Kako označimo vse točke v $P(V)$?
16. Kaj sledi iz vzporednosti p in q za projektivno ravnino?
17. Kaj sledi iz vzporednosti p , q in r za projektivno ravnino? Kako to imenujemo?
18. Navedi drugi Desarguesov izrek za afino ravnino
19. Dokaz
 - Kdaj moramo vse translirati?
 - Definiraj vložitev afine v projektivno
 - Kaj sledi iz ohranjanja inkluzij?
 - Kaj velja za trikotnika v projektivnem?
 - Kaj velja po Desarguesovem izreku za projektivno ravnino?
 - Kaj torej sledi (točke v neskončnosti)
20. Navedi prvi Desarguesov izrek za afino ravnino. Začni dokaz

10 Kolineacije in projektivnosti

1. Definiraj kolineacijo
2. PRIMER - Definiraj kolineacijo za bijektivno semilinearno preslikavo in pokaži, da je kolineacija
3. Kaj velja če $L < L_1 + \dots + L_k$, kjer so $L, L_i \in PV$. Dokaži z indukcijo
4. Do česa lahko razširimo kolinealizacijo? Definiraj njen predpis
5. Kaj je kolineacija vsote projektivnih podprostorov? Dokaz
6. Kaj je kolineacija preseka projektivnih podprostorov? Dokaz - poglej kako so povezane dimenzije vsot in preseka + uporabi ohranjanje inkluzij
7. Navedi osnovni izrek projektivne geometrije (dokaz)
8. Kaj je kolineacija porojena s semilinearno preslikavo?
9. Definiraj projektivnost
10. V katerih primerih je kolineacija kar projektivnost?
11. Kakšen algebraičen objekt je množica vseh kolineacij? Za katero operacijo?
12. Definiraj grupo obrnljivih linearnih preslikav
13. Definiraj grupo obrnljivih semilinearnih preslikav

14. Definiraj grupo projektivnosti
15. Definiraj grupo kolineacij
16. Od kod kam slikajo preslikave v teh grupah?
17. Kateri grupi sta projektivni?
18. Kaj enačimo z $GL(v)$ in $\Gamma L(v)$?
19. Navedi dva izomorfizma med definiranimi grupami. Dokaži, da sta res izomorfizma
20. Definiraj projektivno ogrodje
21. Kaj je projektivno ogrodje, če je $\dim V = 2$? Zakaj?
22. Kaj je projektivno ogrodje, če je $\dim V = 2$?
23. TRDITEV - Kaj velja za projektivnost, ki vsako točko iz projektivnega ogrodja preslika vase? Dokaži
24. POSLEDICA - Poišči projektivnost, ki slika projektivno ogrodje PV v projektivno ogrodje PV' . Dokaži
25. Zakaj je projektivnost $PR^2 \rightarrow PR^2$ določena s tremi točkami?

11 Perspektivnost

1. Definiraj perspektivnost s centrom T
2. Navedi lemo o distributivnosti in jo dokaži
3. Koliko je dimenzija slike prostora z dimenzijo 1?
4. Čemu je enaka direktna vsota X in T ? Dokaži
5. Kaj je inverz perspektivnosti s ventrom T ? Dokaži
6. Kaj je vsaka perspektivnost? Dokaz

12 Homogene koordinate

1. Definiraj ekvavilenčno relacijo na $O^n \setminus 0$
2. Kako označimo ekvavilenčni razred?
3. Kako točki L priredimo homogene koordinate glede na projektivo ogrodje?
4. Pokaži, da so homogene koordinate dobro definirane
5. Pokaži, da so homogene koordinate odvisne le od izbire projektivnega ogrodja in ne od izbire vektorjev u_i
6. Kako prehajamo med homogenimi in nehomogenimi koordinatami?

13 Dvorazmerje

1. Kaj je motivacija, da definiramo dvorazmerje?
2. Definiraj Dvorazmerje
3. TRDITEV - Katere zveze obstajajo med dvorazmerji glede na različna ogrodja? Dokaži
4. IZREK - Katera preslikava ohranja dvorazmerje? Dokaži
5. Definiraj dvorazmerje šopa
6. Kaj je dvorazmerje šopa v projektivni?
7. Kaj pa če bi izbrali drugo premico t ?
8. Definiraj harmonično četverko
9. Kaj je dvorazmerje realnih števil x, y, u, v ?
10. Kaj velja za dvorazmerje, če je C točka v neskončnosti?
11. IZREK - Kako konstruiramo harmonično četverko? Dokaži s pomočjo prejšnega izreka
12. TRDITEV - Kdaj je projektivnost, ki ni identiteta, involucija?

14 Stožnice

1. Definiraj algebraično množico
2. Kaj je stožnica?
3. Definiraj kdaj je polinom homogen?
4. Kaj so homogeni polinomi za $d = 0$?
5. Kaj so homogeni polinomi za $d = 1$?
6. Kaj so homogeni polinomi za $d = 2$ in $n = 0$?
7. Ali homogen polinom definira preslikavo $PV \rightarrow O$?
8. Definiraj projektivno algebraično množico
9. Kaj je stožnica?
10. Kako lahko podamo stožnico v projektivnem?
11. Definiraj kvadratno formo in matriko, ki pripadata stožnici
12. Definiraj simetrično bilinearno formo

13. Kako dobimo simetrično bilinearno formo iz kvadratne forme?
14. Kdaj sta si kvadratni formi ekvivalentni?
15. Kdaj sta si stožnici ekvivalentni?
16. Kako sta ti dve definiciji povezani? Dokaži
17. Ali trditev velja v drugo smer?
18. SYLVESTROV IZREK - Čemu je ekvivalentna forma na R in čemu na C ?

15 Klasifikacija stožnic v R in C

1. Definiraj neizrojeno stožnico
2. Glede na rang matrike M določi kvadratno formo in stožnico
3. Katera stožnica je neizrojena?
4. Kaj je signatura?
5. Glede na signaturo določi kvadratno formo in stožnico
6. V katerem primeru dobimo neizrojeno neprazno stožnico?
7. IZREK - Koliko točk je v preseku neizrojene stožnice in projektivne premice?
8. IZREK - Kdaj je presek neprazen?
9. Kdaj je presek stožnice in projektivne premice prazen? (v realnem)
10. Kdaj je presek stožnice in projektivne premice ena točka? (v realnem)
11. Kdaj je presek stožnice in projektivne premice dve točki? (v realnem)

16 Pol in polara

1. Definiraj tangento
2. Ali je ta definicija dobra v evklidski ravnini?
3. Definiraj polaro
4. TRDITEV - Kdaj je polara projektivna premica? Dokaži
5. TRDITEV - Kdaj je polara tangenta na S v A ?
6. TRDITEV - Ali v vsaki točki obstaja tangenta?
7. Pokaži, da je $A \in p_B \Leftrightarrow B \in p_A$

8. Pokaži, da če $A \neq B$, potem tudi njuni polari nista enaki
9. Zapiši predpis za bijekcijo med točkami in premicami v projektivni ravnini. Pokaži, da je bijekcija
10. Definiraj pol premice p glede na neizrojeno stožnico S
11. Kako konstruiramo polaro? (3 načini)
 - Za točke na stožnici
 - Za točke, za katere obstajajo tangente na stožnico
 - Za točke za katere ne obstajajo tangente na stožnico

17 Dvorazmerja na stožnici

1. TRDITEV - Katere štiri točke, ki jih tvorimo iz A in premic, tvorijo harmonično četverko?
2. Dokaz
 - Definiraj harmonično četverko
 - Kaj sledi iz tega, da je B na polari A ?
 - Zakaj $\Phi(d, c) \neq 0$?
3. Navedi SETINERJEV IZREK
4. OPOMBA - Kaj je polara, če je $T = A$?
5. Dokaz
 - Ali lahko ležijo točke A, B, C in D na isti premici?
 - Kaj tvorijo D, A, B, C ?
 - Kako lahko zapišemo d in kako t ?
 - Zapiši matriko na bazi a, c, d
 - Izberi d' . Kaj je potem β' ?
 - Kakšna so razmerja med α', β' in γ' ?
 - Kakšno enačbo dobimo, ker D leži na stožnici?
 - Kakšno enačbo dobimo, ker T leži na stožnici?
 - Kaj je dvorazmerje, če so točke A, B, C, D, T različne?
 - Uvedi oznake za C' in D' .
 - Zakaj so koordinate različne?
 - Kako računamo dvorazmerje A, B, C', D' ?
 - Uporabi izpeljani enačbi (D in T na stožnici)

- Kaj je dvorazmerje, če je $A = T$?
 - Uvedi kaj sta D' in A'
 - Kako zračunamo p_A ?
 - Kako izračunamo dvorazmerje A', B, C, D'
6. Definiraj dvorazmerje točk na stožnici
 7. A, B, C so dane točke na stožnici. Kako konstruiramo točko D na stožnici, da A, B, C, D tvorijo harmonično četverko?
 8. Navedi PASCALOV IZREK
 9. Dokaz (najprej sekaj dvorazmerje $D(A, B, C, B')$ z A' in E , potem pa še z C' in E)
 10. Ali velja obrat?
 11. Navedi BRAINCHONOV IZREK
 12. Dokaz
 - Označi dotikališča
 - Kaj so njihove polare?
 - Kaj so polare točk v izreku?
 - Kaj označimo z X, Y, Z ?
 - Kaj so polare teh točk?
 - Dokoči dve točki (presečišči) kot v izreku in pokaži, da sta ista točka