Domača naloga 1, Algoritmi

Lucija Fekonja

16. marec 2024

Naloga 1: Turingov stroj

Turingov stroj je definiran s sedmerko $(\Sigma, \Gamma, q, F, \delta, B, Q)$. V našem primeru je

- $\Sigma = \{0, 1\}$ je množica znakov, ki se lahko pojavijo na vhodnem traku,
- $\Gamma = \{0, 1, \_\}$ je abeceda,
- $q = q0$ je začetno stanje
- $F = \{sprejmi\}$ je množica končnih stanj, ki jih sprejme,
- δ funkcija je definirana v `turing_machine.txt` datoteki,
- $B = \_$ je simbol, ki označuje prazen prostor na traku,
- $Q = \{$ q0, samo0, preveri, preveriB, konecPreverjanja, zacetek, desnoX, desno1, desno0, vpisi, nazaj, vpisi0, nazaj0, naZacetek, brisi, spremeniVEna, sprejmi $\}$ je množica stanj.

Naloga 2: Prevedba

Najprej dokažimo, da je 4-SAT NP-poln, pri čemer izhajamo iz že znane ugotovitve, da je 3-SAT NP-poln. To bomo izvedli v dveh korakih: najprej pokažemo, da je 4-SAT NP problem, nato pa še, da je NP-težek.

Nedeterministično polinomski (NP) odločitveni problem je tisti, pri katerem lahko v polinomskem času preverimo rešitev, vendar je ne moremo najti v polinomskem času. Za problem 4-SAT je enostavno preveriti, ali dana konjunktivna normalna oblika (CNF) vrne TRUE. To lahko storimo tako, da za vsak člen konjunkcije preverimo, ali se vrednost izraza evalvira v TRUE. Tako preverjanje deluje v polinomskem času, kar kaže, da je 4-SAT NP problem.

Dokažimo, da je 4-SAT NP-težek. Vemo, da je 3-SAT NP-težek. V problemu 3-SAT imamo konjunkcijo disjunkcij treh členov. Vsak člen konjunkcije je oblike $(a \vee b \vee c)$, kjer so a, b in c logične spremenljivke. Lahko pa to obliko tudi razpišemo na naslednji način:

$$(a \vee b \vee c) = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d).$$

Preverimo, da sta leva in desna stran enaki.

- Če je leva stran TRUE, mora biti vsaj ena od spremenljivk a, b ali c TRUE. To pomeni, da se tudi oba člena konjunkcije na desni evalvirata v TRUE.

- Če je leva stran FALSE, so vse tri spremenljivke a, b in c FALSE. Da bi bila desna stran TRUE, bi morala biti tako d kot tudi $\neg d$ TRUE, kar ni mogoče.

- Če je desna stran FALSE, so vse tri spremenljivke a, b in c FALSE, zato je tudi leva stran FALSE.

- Če je desna stran TRUE, mora biti vsaj ena od a, b oziroma c TRUE. Če bi bile vse tri spremenljivke FALSE, bi bil en od členov $(a \vee b \vee c \vee d)$ oziroma $(a \vee b \vee c \vee \neg d)$ FALSE, saj ne more hkrati veljati d in $\neg d$.

Opazimo, da smo 3-SAT pretvorili v 4-SAT. Pretvorba ima polinomsko časovno zahtevnost, zato je tudi 4-SAT NP-težek problem.

Na enak način lahko dokažemo, da je 5-SAT NP-poln. V 5-SAT imamo konjunkcijo disjunkcij petih členov. Za nedeterministično izbran vhod $\vec{x}$ lahko v polinomskem času preverimo, ali konjunktivna normalna oblika (CNF) vrne TRUE, zato je 5-SAT NP problem. Nato prevedemo 4-SAT v 5-SAT. Vsak člen v 4-SAT lahko razčlenimo na podoben način kot prej:

$$(a \vee b \vee c \vee d) = (a \vee b \vee c \vee d \vee e) \wedge (a \vee b \vee c \vee d \vee \neg e).$$

Kot prej preverimo, da leva in desna stran vedno vrneta isto vrednost:

- Če je leva stran TRUE, mora biti vsaj ena od spremenljivk a, b, c ali d TRUE. To pomeni, da se tudi oba člena konjunkcije na desni evalvirata v TRUE.

- Če je leva stran FALSE, so vse štiri spremenljivke a, b, c in d FALSE. Da bi bila desna stran TRUE, bi morala biti tako e kot tudi $\neg e$ TRUE, kar ni mogoče.

- Če je desna stran FALSE, so vse štiri spremenljivke a, b, c in d FALSE, zato je tudi leva stran FALSE.

- Če je desna stran TRUE, mora biti vsaj ena od a, b, c ali d TRUE. Če bi bile vse štiri spremenljivke FALSE, bi bil en od členov $(a \vee b \vee c \vee d \vee e)$ oziroma $(a \vee b \vee c \vee d \vee \neg e)$ FALSE, saj ne more hkrati veljati e in $\neg e$.

Poleg tega transformacija iz 4-SAT v 5-SAT zahteva polinomski čas. Tako je 5-SAT NP in NP-težek, kar pomeni, da ga lahko štejemo kot NP-poln problem.

Naloga 3: Rodovne funkcije

Rodovna funkcija za izbiro avta

Rodovna funkcija za vsak del avta:

- *Motor:* $A(x) = 4x \cdot 2x = 8x^2$, kjer $4x$ predstavlja 4 vrste motorja, $2x$ pa dve vrsti pogona. Ker moramo izbrati vrsto motorja kot tudi vrsto pogona, faktorja $4x$ in $2x$ med sabo pomnožimo.
- *Zunanjost:* $B(x) = 6x$, saj lahko izberemo 6 različnih barv.
- *Notranjost:* $C(x) = 2x + 2x^2$, kjer člen $2x = x + x$ predstavlja izbiro ustnjenih sedežev ali športnih. Člen $2x^2 = x^2 + x^2$ pa, da smo izbrali obojne ustnjene in športne sedeže. Izbiri sta dve, saj lahko izberemo sprednje sedeže športne in zadnje ustnjene ali pa obratno.
- *Dodatna oprema:* $D(x) = 1 + 3x + \binom{3}{2}x^2 + x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$, saj lahko ne izberemo nobene dodatne opreme, odtod člen 1, lahko izberemo eno od treh možnosti dodatne opreme, odtod člen $3x$, lahko izberemo dve možnosti, dobimo člen $3x^2$, ali pa izberemo vse tri dodatke, dobimo člen x^3.

Rodovna funkcija, ki nam našteje vse možne kombinacije, je produkt zgornjih, saj izbiramo motor, zunanjost, notranjos in dodatno opremo. Dobimo

$$\begin{aligned}
f(x) &= A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdot D(x) \\
&= 8x^2 \cdot 6x \cdot (2x + 2x^2) \cdot (1 + 3x + 3x^2 + x^3) \\
&= 96x^4 + 96x^5 + 288x^5 + 288x^6 + 288x^6 + 288x^7 + 96x^7 + 96x^8 \\
&= 96x^4 + 384x^5 + 576x^6 + 384x^7 + 96x^8
\end{aligned}$$

Fibonaccijeva števila drugega reda

n-to Fibonaccijevo število drugega reda je definirano kot

$$\mathfrak{F}_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ \mathfrak{F}_{n-1} + \mathfrak{F}_{n-2} + F_n, & n > 1 \end{cases}.$$

Rodovna funkcija zanje je $\mathfrak{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n x^n$. Izrazimo $\mathfrak{G}(x), x\mathfrak{G}(x)$ in $x^2\mathfrak{G}(x)$ s koeficienti Fibonaccijevih števil in Fibonaccijevih števil druge vrste:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}(x) &= \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 x + \mathfrak{F}_2 x^2 + \cdots + \mathfrak{F}_k x^k + \cdots \\
&= \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 x + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0 + F_2)x^2 + \cdots + (\mathfrak{F}_{k-1} + \mathfrak{F}_{k-2} + F_k)x^k \\
x\mathfrak{G}(x) &= \mathfrak{F}_0 x + \mathfrak{F}_1 x^2 + \mathfrak{F}_2 x^3 + \cdots + \mathfrak{F}_{k-1} x^k + \cdots \\
&= \mathfrak{F}_0 x + \mathfrak{F}_1 x^2 + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0 + F_2)x^3 + \cdots + (\mathfrak{F}_{k-2} + \mathfrak{F}_{k-3} + F_{k-1})x^k \\
x\mathfrak{G}(x) &= \mathfrak{F}_0 x^2 + \mathfrak{F}_1 x^3 + \mathfrak{F}_2 x^4 + \cdots + \mathfrak{F}_{k-2} x^k + \cdots \\
&= \mathfrak{F}_0 x^2 + \mathfrak{F}_1 x^3 + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0 + F_2)x^4 + \cdots + (\mathfrak{F}_{k-3} + \mathfrak{F}_{k-4} + F_{k-2})x^k
\end{aligned}$$

Vstavimo v naslednji izraz in ga poenostavimo:

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)\mathfrak{G}(x) = {} & \mathfrak{F}_0 + (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_0)x + (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0 + F_2 - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_0)x^2 + \\ & + (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1 + F_3 - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_0 - F_2 - \mathfrak{F}_1)x^3 + \\ & + (\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_2 + F_4 - \mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1 - F_3 - \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_0 - F_2)x^4 + \cdots + \\ & + (\mathfrak{F}_{k-1} + \mathfrak{F}_{k-2} + F_k - \mathfrak{F}_{k-2} - \mathfrak{F}_{k-3} - F_{k-1} - \mathfrak{F}_{k-3} - \mathfrak{F}_{k-4} - F_{k-2})x^k\end{aligned}$$

Sedaj uporabimo definicijo Fibonaccijevih števil drugega reda. Natančneje, uporabimo

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_0 &= 0, \\ \mathfrak{F}_1 &= 1, \\ \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_{n-1} - \mathfrak{F}_{n-2} - F_n &= 0.\end{aligned}$$

Dobimo

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)\mathfrak{G}(x) &= \mathfrak{F}_0 + (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_0)x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k \\ &= x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k \\ &= x + \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k - F_0 - F_1 x \\ &= x + \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k - x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k\end{aligned}$$

Označimo s $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ rodovno funkcijo za Fibonaccijeva števila. Potem je

$$\mathfrak{G}(x) = \frac{1}{1-x-x^2} F(x).$$

Rodovno funkcijo Fibonaccijevih števil lahko zapišemo tudi s $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, zato imamo posplošitev

$$\mathfrak{G}(x) = \frac{1}{x} F(x)^2.$$

Vemo, da je koeficient vrste $F(x)^2$ pri členu z x^k enak $\frac{(n-1)F_n + 2nF_{n-1}}{5}$, torej je koeficient vrste $\frac{1}{x}F(x)^2$ pri členu z x^k enak

$$\mathfrak{F}_n = \frac{nF_{n+1} + 2(n+1)F_n}{5}.$$