Od zdaj naprej naj $K$ označuje konveksen lik v $\mathbb{R}^2$ in naj bo $S$ množica točk, imenovanih *mesta*, v $K$. Za $p \in S$ je *Voronijeva celica*

$$V_S(p) = \{q \in K \quad | \quad \forall p \in S \setminus \{p\}. \quad H_K(q,p) \leq H_K(q,p')\}.$$

Voronijeve celice so *zvezdaste oblike* glede na njihova mesta $p$, to pomeni, da za vsako točko $q \in V_S(p)$ daljica $pq$ v celoti leži v $V_S(p)$. *Voronijev diagram* v Hilbertovi metriki glede na lik $K$ je terica celic $Vor_K(S) = (V_S(p))_{p \in S}$.

Točka, ki ločuje eno Voronojevo celico od druge, je enako oddaljena od obeh mest, ki definirata celici. Take točke ležijo na t.i. *simetrali.*

**Definicija 1** *$(p,p')$-bisektor je množica točk*

$$\{z \in K \quad | \quad H_K(z,p) = H_K(z,p')\},$$

*kjer sta $p,p' \in S$ mesti.*

Označimo vožlišča $m$-kotnika z $\{v_1 \dots v_m\}$. Potem za $p \in S$ obstaja $m$ tetiv $\chi(v_i,p)$, ki celico razdelijo na $2m$ trikotnikov, imenovanih *sektorji. Daljice $(p,p')$-bisektorja* so robovi sektorjev, ki ležijo na $(p,p')$-bisektorju.

Ko se premikamo vzdolž bisektorja opazimo do $2m$ sektorjev celice z mestom $p$ v ciklični redu, in do $2m$ sektorjev celice z mestom $p'$ v obratnem cikličnem redu. Bisektor je torej sestavljen iz največ $4m$ segmentov.

Presek dveh Voronijevih celic je del bisektorja, imenovan *Voronoijev rob. Voronoijevo vozlišče* je presek dveh robov. Ker je Voronijev diagram planarni, z direktno aplikcijo Eulerjeve formule dobimo naslednjo lemo.

**Lema 1** *Za dani konveksni $m$-kotnik $K \subset \mathbb{R}^2$ in $n$ mest $S \subset K$, ima Voronijev diagram $n$ celic, kvečemu $3n$ Voronijevih robov, in kvečemu $2n$ Voronijevih vozlišč. Vsak Voronijev rob sestoji iz največ $4m$ segmentov bisektorja, torej ima celoten diagram kombinatorično kompleksnost $\mathcal{O}(mn)$.*

Za konstrukcijo Voronijevega diagrama je potrebno najti bisektorje. Naj bo $z$ točka na $(p,p')$-bisektorju, $e$ in $f$ robova $K$, ki se ju dotika tetiva $\chi(z,p)$ in simetrično za $e'$ in $f'$. Izkaže se, da lahko bisektor parametriziramo s $p,p',e,e',f$ in $f'$, vendar lahko parametrizacjo prevedemo na enodimenzionalno.

Naj bo $a$ presek nosilk robov $e$ in $f$ in naj bo $a'$ presek nosilk robov $e'$ in $f'$. Če je $a = a'$ je bisektor ravna crta skozi $a$. Denimo torej, da $a \neq a'$. Naj bo $l$ premica skozi $p$ in $p'$. Definirajmo točki $x$ in $y$ kot presek med $l$ in nosilko robov $e$ oziroma $f$. Podobno definiramo $x'$ in $y'$ za $e'$ in $f'$. Ta projekcija ohrani dvorazmerje in s tem tudi Hilbertove razdalje. Naj bo $o$ točka na $l$, da velja enakost dvorazmerji $(o,p;y,x) = (o,p';y',x')$. Točka $o$ mora ležati med $p$ in $p'$. Definirajmo še $\alpha$ tako, da je $o+\alpha$ točka na $l$, v kateri premica skozi $z$ in $a$ seka $l$. Analogno definirajmo $\alpha'$. Po zgornji konstrukciji lahko vsako točko bisektorja opišemo s parom $(\alpha,\alpha')$. Še več, $\alpha$ in $\alpha'$ sta odvisni po naslednji lemi.

**Lema 2** *Naj bo $K$ konveksen večkotnik in $p$ in $p'$ mesti v notranjosti $K$. Vsaka točka na $(p,p')$-bisektorju je lahko opisana z $\alpha$ in $\alpha'$ definiranima zgoraj. Potem obstaja linearna funkcija s parametroma $1/\alpha$ in $1/\alpha'$.+*

Bisektor lahko torej parametriziramo z enim od parametrov $\alpha$ oziroma $\alpha'$.