



# ***Algoritmos y Estructuras de Datos***

Cursada 2016  
Redictado

***Prof. Alejandra Schiavoni  
Prof. Catalina Mostaccio***

*Facultad de Informática – UNLP*



# GRAFOS

Algoritmos y Estructuras de Datos



# Agenda - Grafos

- Caminos de costo mínimo
- Árbol de expansión mínimo
  - *Data Structures and Algorithm Analysis in Java; 2nd Ed. Mark Allen Weiss (Capítulo 9)*
  - *Estructuras de datos y algoritmos; Mark Allen Weiss. (Capítulo 9)*



# Agenda - Grafos

- Caminos de costo mínimo
- Árbol de expansión mínimo



# Agenda – Grafos

- ❖ Caminos de costo mínimo
  - ❖ Definición
  - ❖ Algoritmos para el cálculo del camino mínimo desde un origen en:
    - Grafos sin peso
    - Grafos con pesos positivos
      - Algoritmo de Dijkstra: dos implementaciones
    - Grafos con pesos positivos y negativos
    - Grafos acíclicos
  - ❖ Algoritmo para el cálculo de los caminos mínimos entre todos los pares de vértices



# Camino de costo mínimo

## Definición

Sea  $G=(V,A)$  un grafo dirigido y pesado, el costo  $c(i,j)$  está asociado a la arista  $v(i,j)$ .

Dado un camino:  $v_1, v_2, v_3, \dots \dots v_N$

El costo del camino es:

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} c(i, i+1)$$

Este valor también se llama longitud del camino pesado.

La longitud del camino no pesado es la cantidad de aristas



# Camino de costo mínimo

## Definición (cont.)

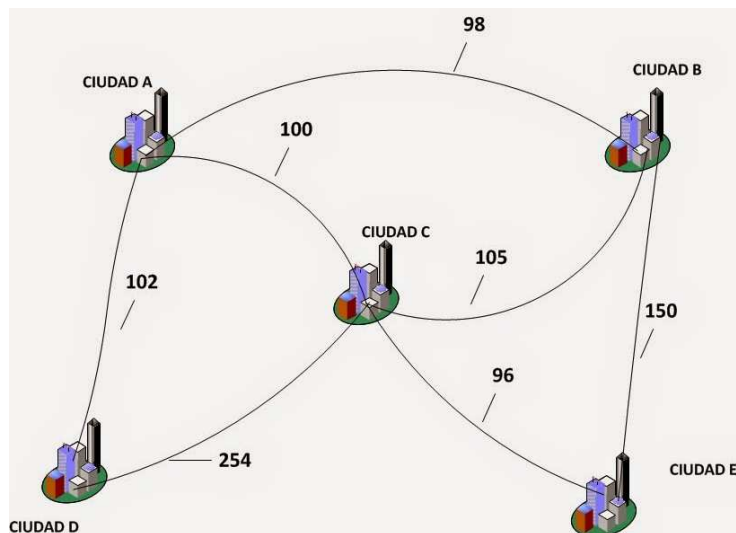
El camino de costo mínimo desde un vértice  $v_i$  a otro vértice  $v_j$  es aquel en que la suma de los costos de las aristas es mínima.

Esto significa que:

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} c(i, i+1) \quad \text{es mínima}$$

# Camino de costo mínimo

Ejemplos:



**Ciudades** conectadas por  
**Rutas** con **distancias**

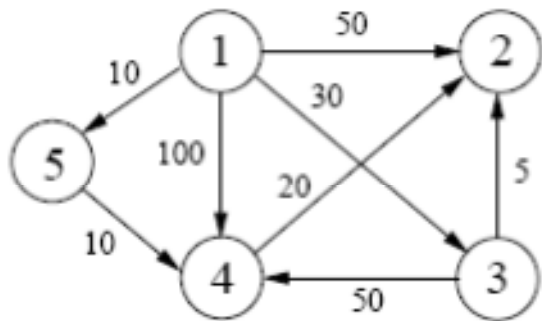


**Personas** conectadas a  
través de las redes sociales

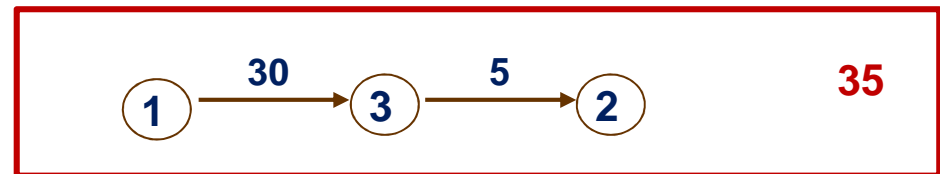


# Camino de costo mínimo

Ejemplo:



Camino posible desde el  
vértice 1 al vértice 2





# Algoritmos de Caminos mínimos

- Grafos sin peso
- Grafos con pesos positivos
- Grafos con pesos positivos y negativos
- Grafos dirigidos acíclicos



# Algoritmos de Caminos mínimos

Los algoritmos calculan los caminos mínimos desde un vértice origen  $s$  a **todos** los restantes vértices del grafo

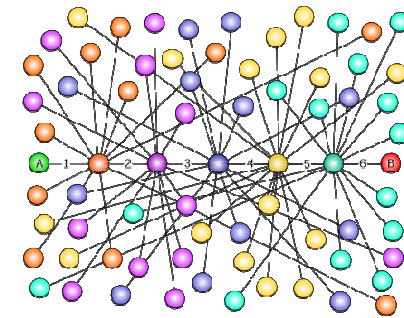
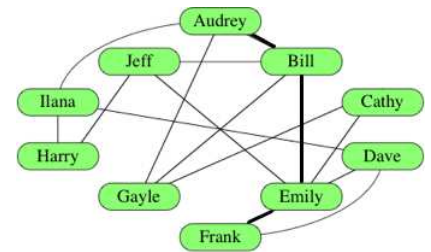
# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso

### Ejemplos

#### ➤ Seis grados de separación

Se le llama *seis grados de separación* a la hipótesis que intenta probar que cualquiera en la Tierra puede estar conectado a cualquier otra persona del planeta a través de una cadena de conocidos que no tiene más de cinco intermediarios (conectando a ambas personas con sólo seis enlaces)



#### ➤ Número de Erdős

Es un modo de describir la distancia colaborativa, en lo relativo a trabajos matemáticos entre un autor y Paul Erdős (matemático húngaro considerado uno de los escritores más prolíficos de trabajos matemáticos)



Si la **mujer de rojo** colabora directamente con Erdős en un trabajo, y luego el **hombre de azul** colabora con ella; entonces el hombre de azul tiene un número de Erdős con valor 2, y está "a dos pasos" de Paul Erdős (asumiendo que nunca ha colaborado directamente con éste).

➤ El número de Bacon es una aplicación de la misma idea en la industria fílmica- un cálculo que conecta actores que han aparecido junto al actor *Kevin Bacon* en alguna película.



# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso

- Para cada vértice  $v$  mantiene la siguiente información:
    - $D_v$  : distancia mínima desde el origen (inicialmente  $\infty$  para todos los vértices excepto el origen con valor 0)
    - $P_v$  : vértice por donde paso para llegar
    - Conocido : dato booleano que me indica si está procesado (inicialmente todos en 0)
- (este último campo no va a ser necesario para esta clase de grafos)



# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso

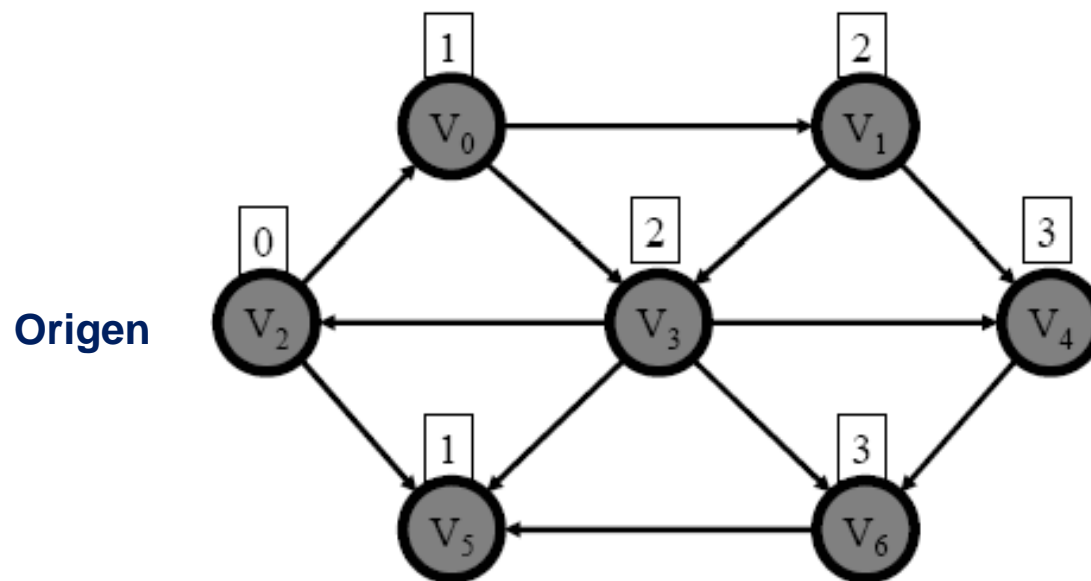
### ➤ Estrategia: Recorrido en amplitud (BFS)

Pasos:

- Avanzar por niveles a partir del origen, asignando distancias según se avanza (se utiliza una cola)
- Inicialmente, es  $D_w = \infty$ . Al inspeccionar  $w$  se reduce al valor correcto  $D_w = D_v + 1$
- Desde cada  $v$ , visitamos a todos los nodos adyacentes a  $v$

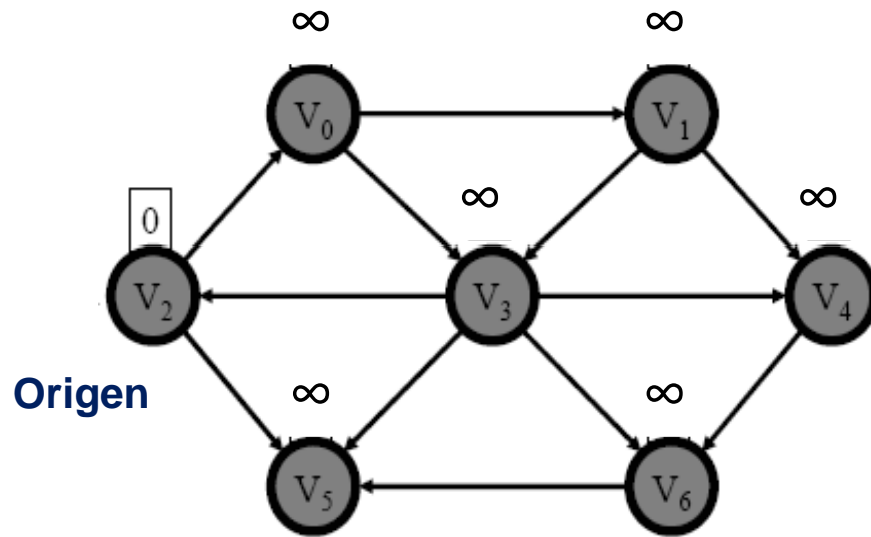
# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso (cont.)



# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso (cont.)



Valores iniciales de la tabla

$V_i$	$D_v$	$P_v$	Conoc
$V_0$	$\infty$	0	0
$V_1$	$\infty$	0	0
$V_2$	0	0	0
$V_3$	$\infty$	0	0
$V_4$	$\infty$	0	0
$V_5$	$\infty$	0	0
$V_6$	$\infty$	0	0



# Algoritmo Caminos mínimos basado en *BFS*

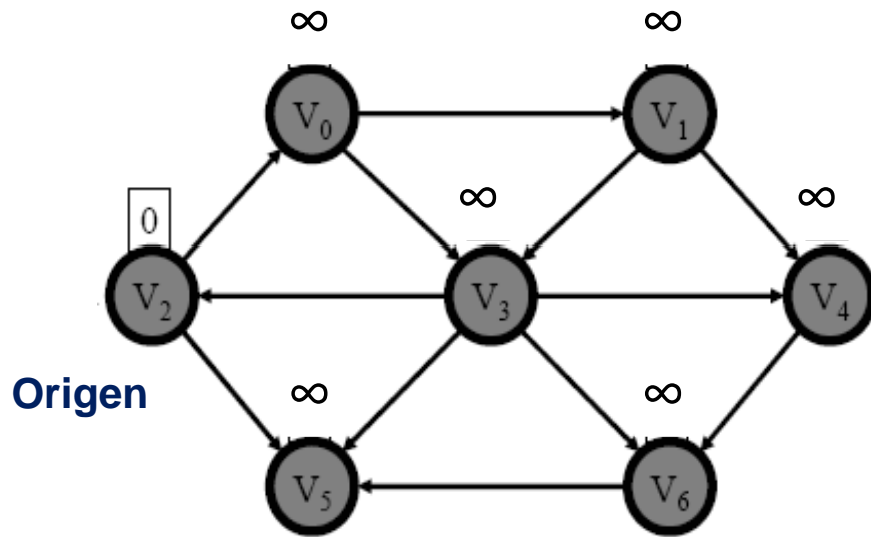
```
Camino_min_GrafoNoPesadoG,s) {  
(1)   para cada vértice  $v \in V$   
(2)        $D_v = \infty$ ;  $P_v = 0$ ;  $Conoc_v = 0$ ;  
(3)    $D_s = 0$ ; Encolar (Q,s);  $Conoc_v = 1$ ;  
(4)   Mientras (not esVacio(Q)) {  
(5)       Desencolar (Q,u);  
(6)       Marcar u como conocido;  
(7)       para c/vértice  $w \in V$  adyacente a u {  
(8)           si ( $w$  no es conocido) {  
(9)                $D_w = D_u + 1$ ;  
(10)               $P_w = u$ ;  
(11)              Encolar(Q,w);  $Conoc_w = 1$ ;  
(12)          }  
(13)      }  
(14)  }
```

# Algoritmo Caminos mínimos basado en *BFS*

```
Camino_min_GrafoNoPesadoG,s) {  
(1)   para cada vértice  $v \in V$   
(2)        $D_v = \infty$ ;  $P_v = 0$ ; Conocv = 0;  
(3)    $D_s = 0$ ; Encolar (Q,s); Conocv = 1;  
(4)   Mientras (not esVacio(Q)) {  
(5)       Desencolar (Q,u);  
(6)       Marcar u como conocido;  
(7)       para c/vértice  $w \in V$  adyacente a u {  
(8)           si (w no es conocido) {  
(9)                $D_w = D_u + 1$ ;  
(10)               $P_w = u$ ;  
(11)              Encolar(Q,w); Conocw = 1;  
(12)          }  
(13)      }  
(14)  }
```

# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso (cont.)

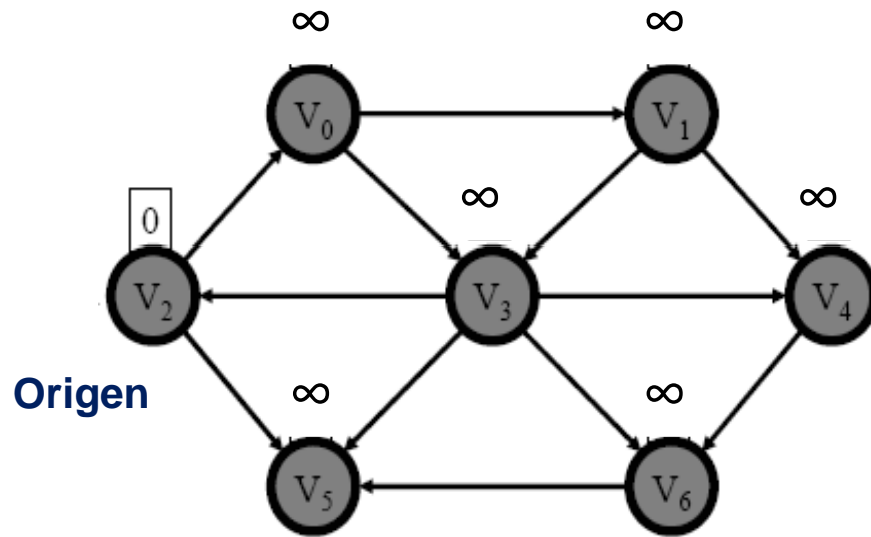


Valores iniciales de la tabla

$V_i$	$D_v$	$P_v$	Conoc
$V_0$	$\infty$	0	0
$V_1$	$\infty$	0	0
$V_2$	0	0	0
$V_3$	$\infty$	0	0
$V_4$	$\infty$	0	0
$V_5$	$\infty$	0	0
$V_6$	$\infty$	0	0

# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos sin peso (cont.)



Valores iniciales de la tabla

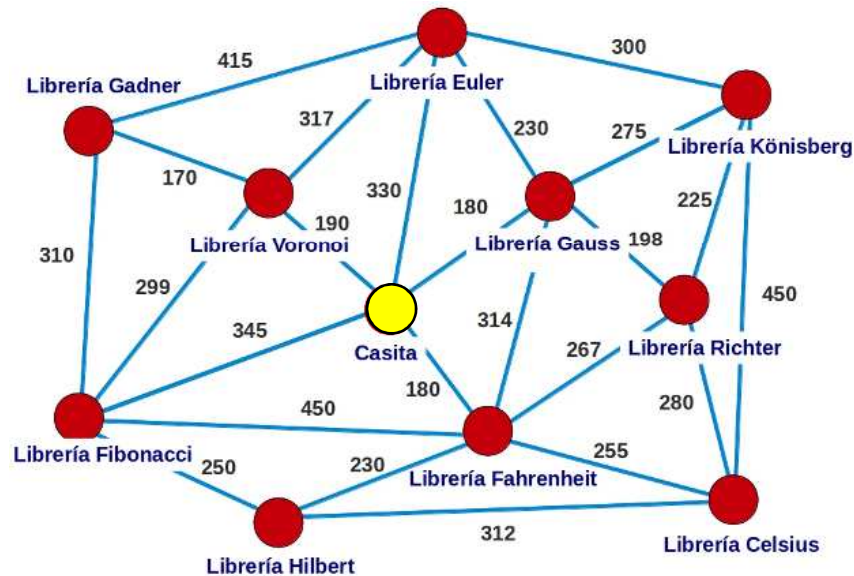
$V_i$	$D_v$	$P_v$
$V_0$	$\infty$	0
$V_1$	$\infty$	0
$V_2$	0	0
$V_3$	$\infty$	0
$V_4$	$\infty$	0
$V_5$	$\infty$	0
$V_6$	$\infty$	0

# Algoritmo Caminos mínimos basado en *BFS*

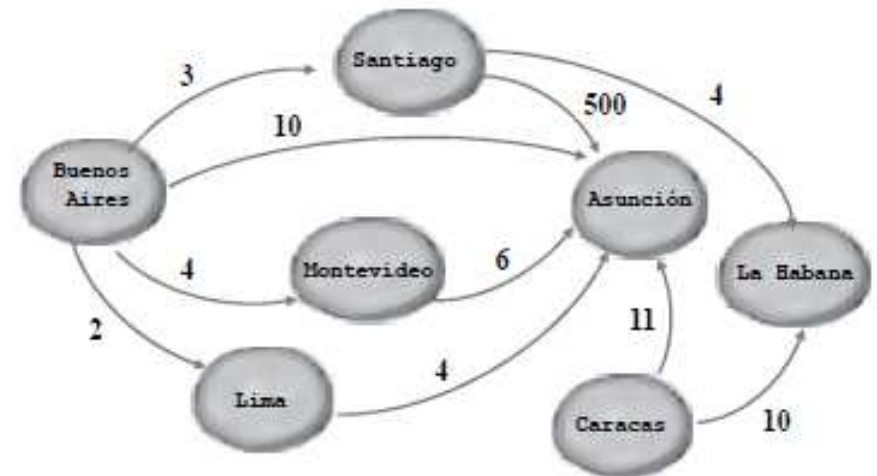
```
Camino_min_GrafoNoPesadoG,s) {  
(1)   para cada vértice  $v \in V$   
(2)        $D_v = \infty$ ;  $P_v = 0$ ;  
(3)    $D_s = 0$ ; Encolar ( $Q,s$ );  
(4)   Mientras (not esVacio( $Q$ )) {  
(5)       Desencolar( $Q,u$ );  
(6)       para c/vértice  $w \in V$  adyacente a  $u$  {  
(7)           si ( $D_w = \infty$ ) {  
(8)                $D_w = D_u + 1$ ;  
(9)                $P_w = u$ ;  
(10)            Encolar( $Q,w$ );  
(11)        }  
(12)    }  
(13) }  
}
```

# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos con pesos positivos – Algoritmo de Dijkstra



Encontrar los caminos más cortos desde Casita a cada una de las librerías



Encontrar la ruta aérea más corta desde Buenos Aires a Asunción



# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos con pesos positivos – Algoritmo de Dijkstra

### ➤ Estrategia: Algoritmo de Dijkstra

#### Pasos:

- Dado un vértice origen  $s$ , elegir el vértice  $v$  que esté a la menor distancia de  $s$ , dentro de los vértices no procesados
- Marcar  $v$  como procesado
- Actualizar la distancia de  $w$  adyacente a  $v$



## Algoritmo de Dijkstra (cont.)

- Para cada vértice  $v$  mantiene la siguiente información:
  - $D_v$  : distancia mínima desde el origen (inicialmente  $\infty$  para todos los vértices excepto el origen con valor 0)
  - $P_v$  : vértice por donde paso para llegar
  - Conocido : dato booleano que me indica si está procesado (inicialmente todos en 0)



## Algoritmo de Dijkstra (cont.)

- La actualización de la distancia de los adyacentes  $w$  se realiza con el siguiente criterio:

- Se compara  $D_w$  con  $D_v + c(v,w)$

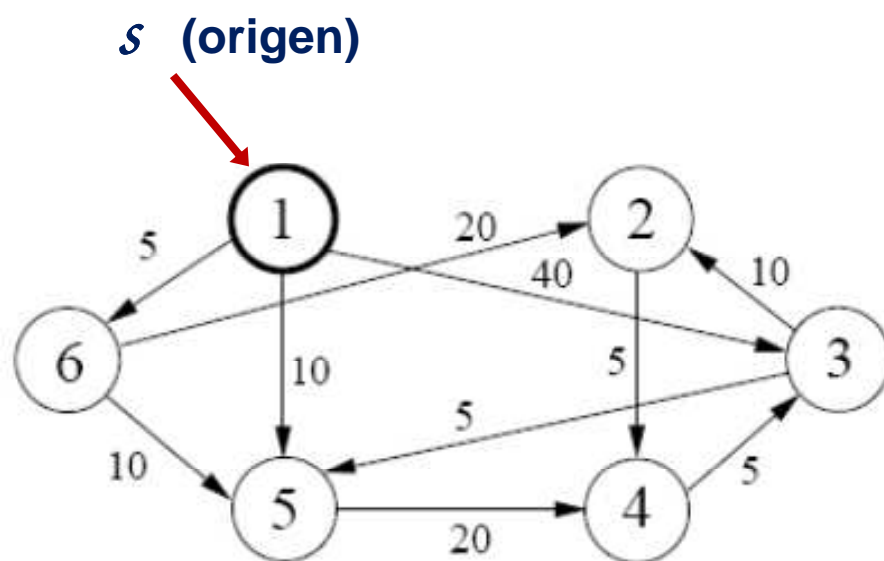
Distancia de  $s$  a  $w$   
(sin pasar por  $v$ )

Distancia de  $s$  a  $w$ ,  
pasando por  $v$

- Se actualiza si  $D_w > D_v + c(v,w)$

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo

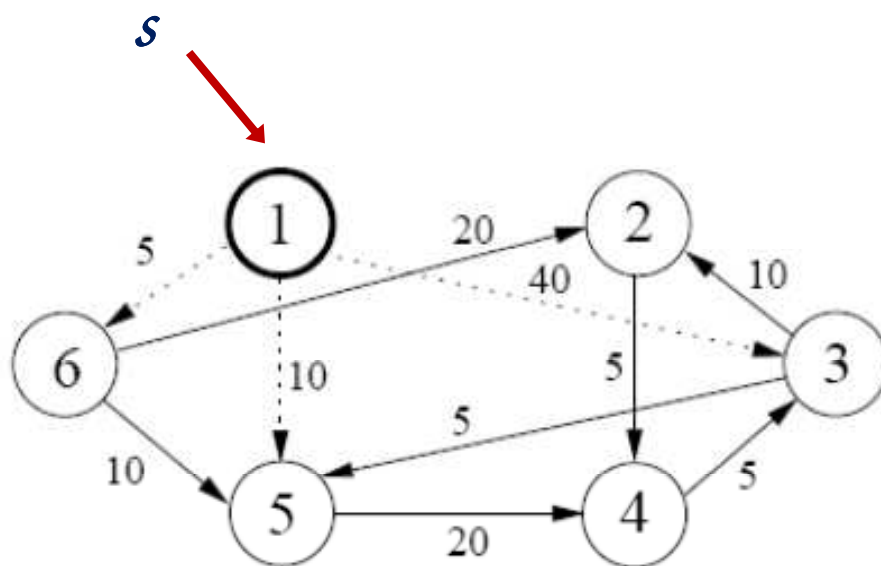


Valores iniciales de la tabla

V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	0
2	$\infty$	0	0
3	$\infty$	0	0
4	$\infty$	0	0
5	$\infty$	0	0
6	$\infty$	0	0

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)

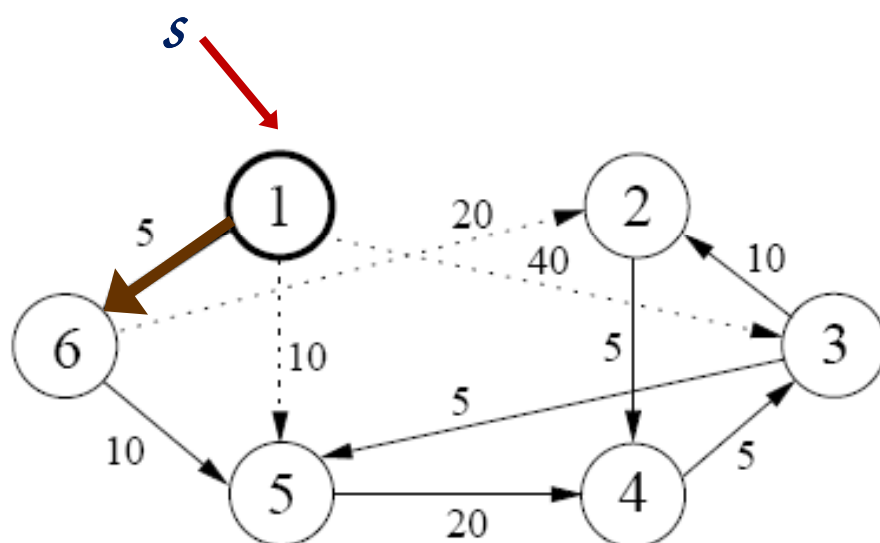


- Valores al seleccionar el vértice 1
- Actualiza la distancia de 3, 5 y 6

V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	①
2	$\infty$	0	0
3	<b>40</b>	<b>1</b>	0
4	$\infty$	0	0
5	<b>10</b>	<b>1</b>	0
6	<b>5</b>	<b>1</b>	0

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)



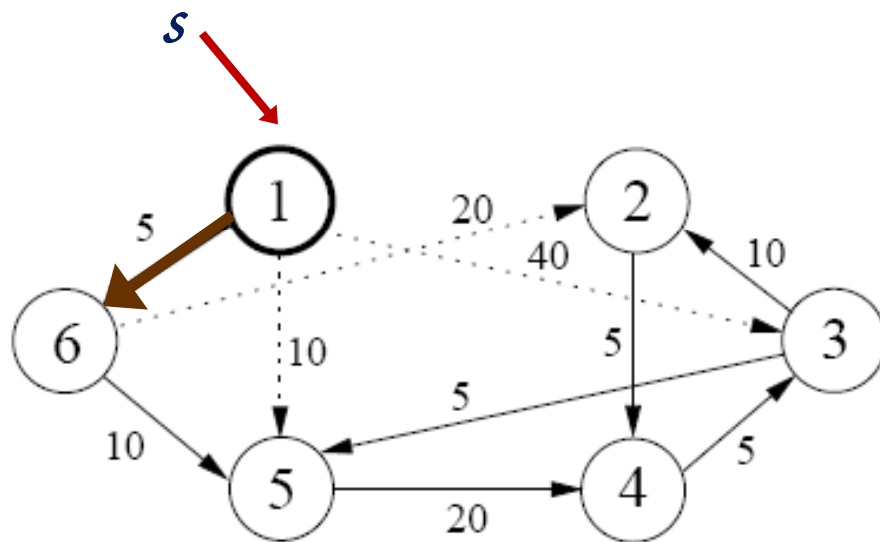
Próximo vértice a elegir



V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	$\infty$	0	0
3	40	1	0
4	$\infty$	0	0
5	10	1	0
6	5	1	0

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)

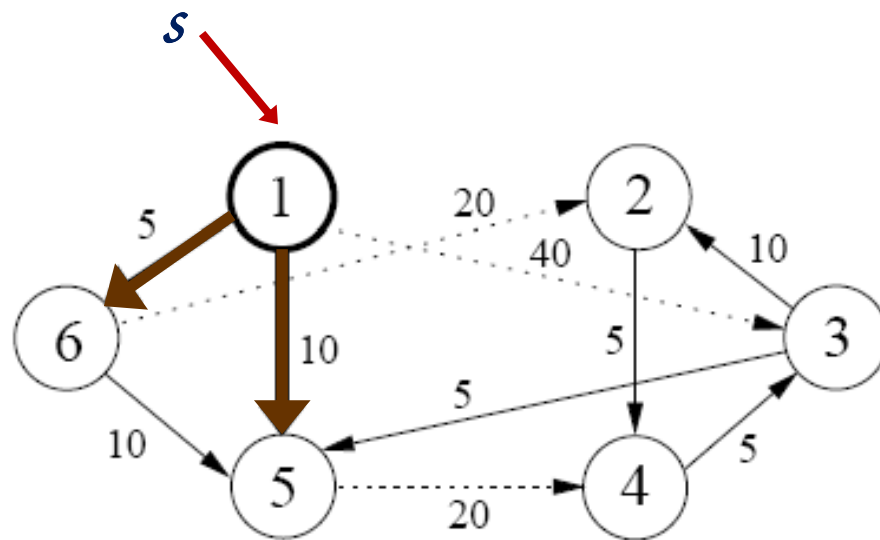


V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	<b>25</b>	<b>6</b>	0
3	40	1	0
4	$\infty$	0	0
5	10	1	0
6	5	1	<b>1</b>

- Valores al seleccionar el vértice 6
- Actualiza la distancia de 2
- La distancia de 5 es mayor que la de la tabla (no se actualiza)

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)

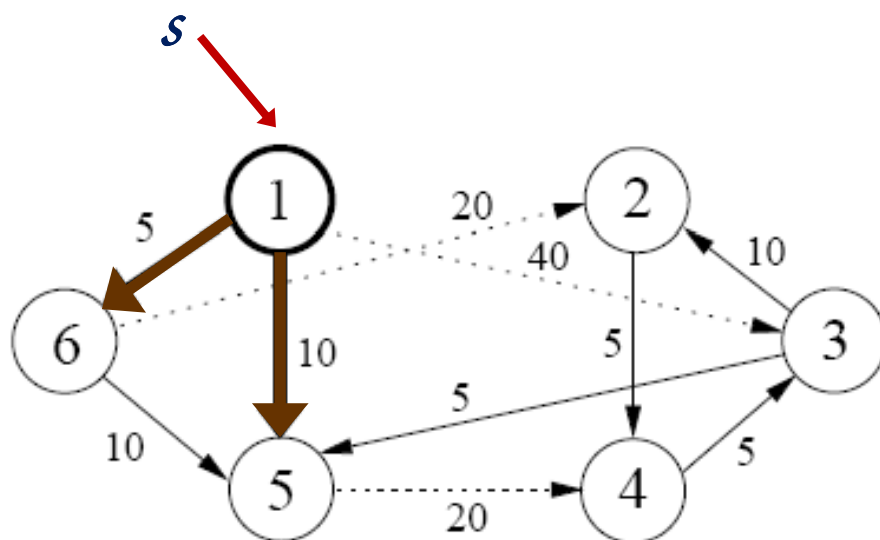


Próximo vértice a elegir

V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	0
3	40	1	0
4	$\infty$	0	0
5	10	1	0
6	5	1	1

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)

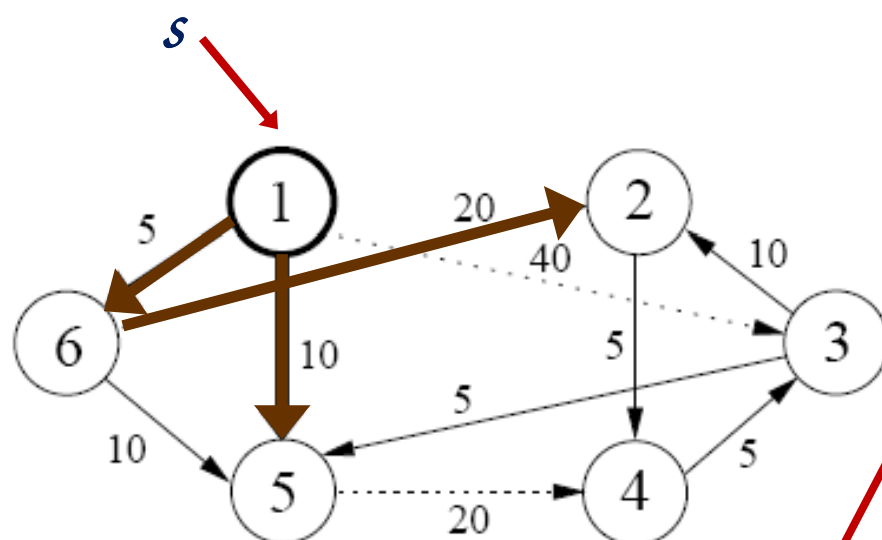


- Valores al seleccionar el vértice 5
- Actualiza la distancia de 4

V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	0
3	40	1	0
4	<b>30</b>	<b>5</b>	0
5	10	1	<b>1</b>
6	5	1	1

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)



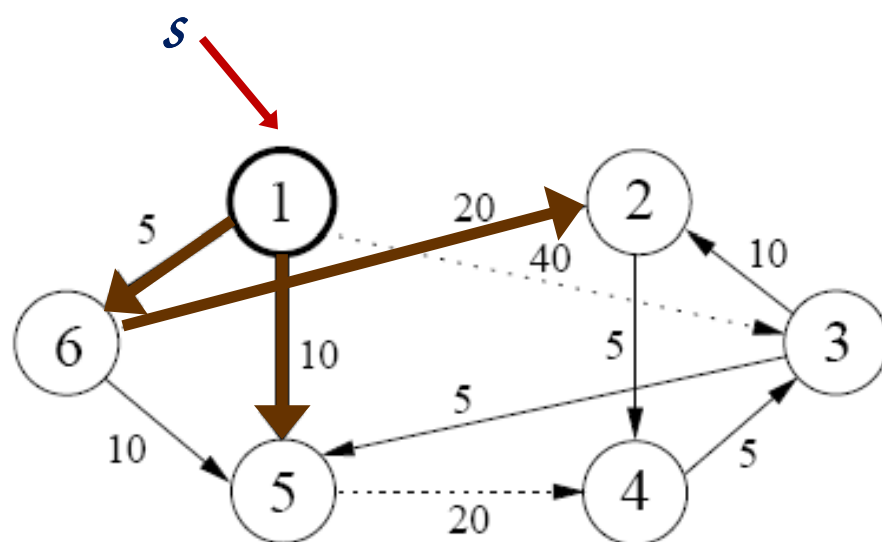
Próximo vértice a elegir

V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	0
3	40	1	0
4	<b>30</b>	<b>5</b>	0
5	10	1	1
6	5	1	1



# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)



V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	1
3	40	1	0
4	30	5	0
5	10	1	1
6	5	1	1

- Valores al seleccionar el vértice 2
- La distancia de 4 es igual que la de la tabla (no se actualiza)

# Algoritmo de Dijkstra

## Ejemplo (cont.)

- Los próximos vértices a elegir son: 2, 4 y 3 en ese orden.

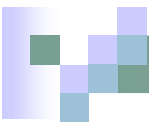
El resultado final es:

V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
1	0	0	1
2	25	6	1
3	35	4	1
4	30	5	1
5	10	1	1
6	5	1	1



# Algoritmo de Dijkstra


```
Dijkstra( $G, w, s$ ) {  
(1)   para cada vértice  $v \in V$   
(2)        $D_v = \infty$ ;    $P_v = 0$ ;  
(3)    $D_s = 0$ ;  
(4)   para cada vértice  $v \in V$  {  
(5)        $u = \text{vérticeDesconocidoMenorDist}$ ;  
(6)       Marcar  $u$  como conocido;  
(7)       para cada vértice  $w \in V$  adyacente a  $u$   
(8)           si ( $w$  no está conocido)  
(9)               si ( $D_w > D_u + c(u, w)$ ) {  
(10)                    $D_w = D_u + c(u, w)$ ;  
(11)                    $P_w = u$ ;  
(12)               }  
(13)       }  
(14) }  
}
```



# Algoritmo de Dijkstra

## Tiempo de ejecución (I)

- El bucle *para* de la línea (4) se ejecuta para todos los vértices  
→  $|V|$  iteraciones
- La operación *vérticeDesconocidoMenorDist* es  $O(|V|)$  y dado que se realiza  $|V|$  veces  
→ el costo total de *vérticeDesconocidoMenorDist* es  $O(|V|^2)$
- El bucle *para* de la línea (7) se ejecuta para los vértices adyacentes de cada vértice. El número total de iteraciones será la cantidad de aristas del grafo.  
→  $|E|$  iteraciones
- El costo total del algoritmo es  $(|V|^2 + |E|)$  es  $O(|V|^2)$




# Algoritmo de Dijkstra

## Tiempo de ejecución (II)

Optimización: la operación *vérticeDesconocidoMenorDist* es más eficiente si almacenamos las distancias en una heap.

- La operación *vérticeDesconocidoMenorDist* es  $O(\log|V|)$  y dado que se realiza  $|V|$  veces
  - ➔ el costo total de *vérticeDesconocidoMenorDist* es  $O(|V| \log |V|)$
- El bucle *para* de la línea (7) supone modificar la prioridad (distancia) y reorganizar la heap. Cada iteración es  $O(\log|V|)$ 
  - ➔ realiza  $|E|$  iteraciones,  $O(|E| \log|V|)$
- El costo total del algoritmo es  $(|V| \log|V| + |E| \log|V|)$  es  $O(|E| \log|V|)$



# Algoritmo de Dijkstra

## Tiempo de ejecución (III)

Variante: usando heap la actualización de la línea (10) se puede resolver insertando  $w$  y su nuevo valor  $D_w$  cada vez que éste se modifica.

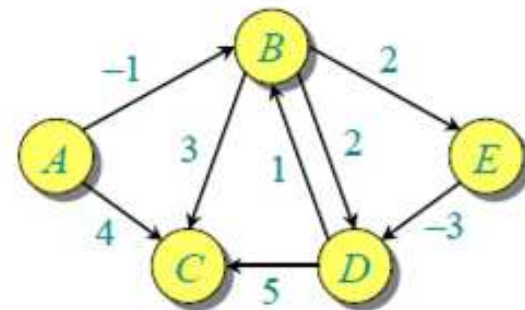
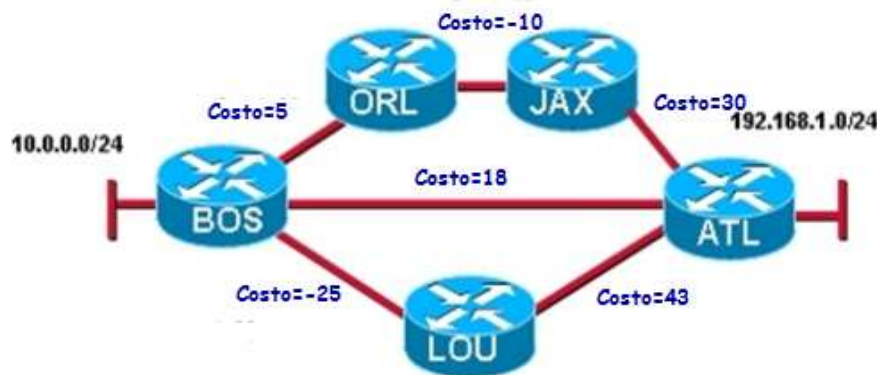
- El tamaño de la heap puede crecer hasta  $|E|$ .  
Dado que  $|E| \leq |V|^2$ ,  $\log |E| \leq 2 \log |V|$ , el costo total del algoritmo no varía
- El costo total del algoritmo es  $O(|E| \log |V|)$

# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos con pesos positivos y negativos

### Ejemplos:

- Simulaciones científicas
- Redes de flujo
- Protocolos de ruteo basados en vector de distancias

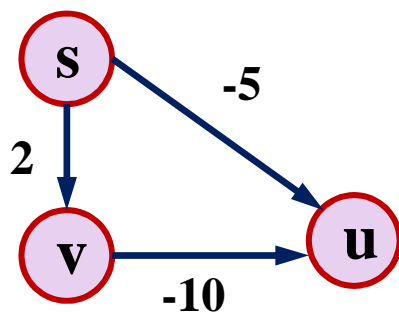


# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos con pesos positivos y negativos

### ➤ Estrategia: Encolar los vértices

Si el grafo tiene aristas negativas, el algoritmo de Dijkstra puede dar un resultado erróneo.



V	$D_v$	$P_v$	Conoc.
s	0	0	1
u	-5	s	1
v	2	s	1

**Error !!**

La distancia mínima de **s** a **u** es -8





# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos con pesos positivos y negativos (cont.)

### Pasos:

- Encolar el vértice origen  $s$ .
- Procesar la cola:
  - Desencolar un vértice.
  - Actualizar la distancia de los adyacentes  $D_w$  siguiendo el mismo criterio de Dijkstra.
  - Si  $w$  no está en la cola, encolarlo.

El costo total del algoritmo es  $O(|V| |E|)$



# Algoritmos de Caminos mínimos

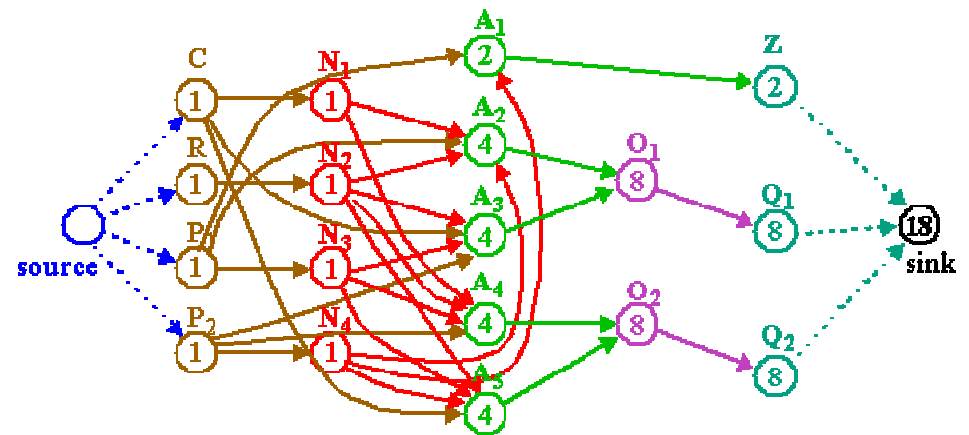
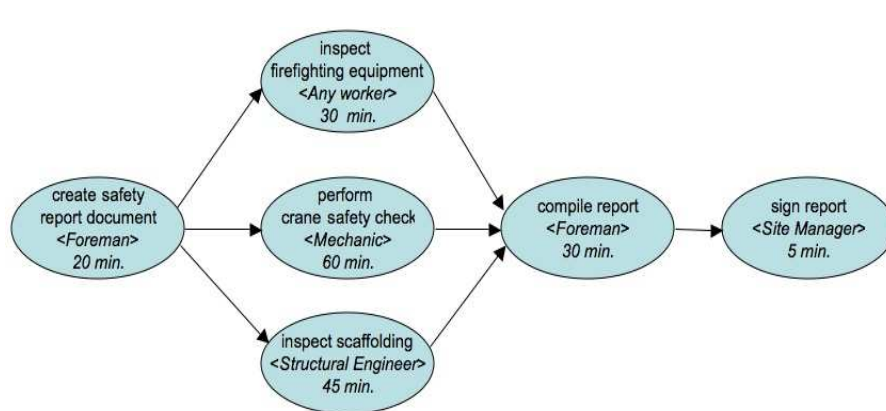
## Grafos con pesos positivos y negativos (cont.)

```
Camino_min_GrafoPesosPositivosyNegativosG,s) {  
(1)    $D_s = 0$ ; Encolar (Q,s);  
(2)   Mientras (not esVacio(Q)) {  
(3)       Desencolar(Q,u);  
(4)       para c/vértice  $w \in V$  adyacente a  $u$  {  
(5)           si ( $D_w > D_u + c(u,w)$ ) {  
(6)                $D_w = D_u + c(u,w)$ ;  
(7)                $P_w = u$ ;  
(8)               si (w no está en Q)  
(9)                   Encolar(Q,w);  
(10)          }  
(11)      }  
(12)  }
```

# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos acíclicos

- Encontrar la ganancia máxima en un período de tiempo
- Determinar el tiempo requerido para completar una tarea





# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos acíclicos

- Estrategia: Orden Topológico
  - Optimización del algoritmo de Dijkstra
  - La selección de cada vértice se realiza siguiendo el orden topológico
  - Esta estrategia funciona correctamente, dado que al seleccionar un vértice  $v$ , no se va a encontrar una distancia  $d_v$  menor, porque ya se procesaron todos los caminos que llegan a él

El costo total del algoritmo es  $O(|V| + |E|)$



# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos acíclicos

```
Camino_min_GrafoDirigidoAcíclico(G,s){
```

```
    Ordenar topológicamente los vértices de G;
```

```
    Inicializar Tabla de Distancias(G, s);
```

```
    para c/vértice u del orden topológico
```

```
        para c/vértice  $w \in V$  adyacente a u
```

```
            si ( $D_w > D_u + c(u,w)$ ) {
```

```
                 $D_w = D_u + c(u,w);$ 
```

```
                 $P_w = u;$ 
```

```
            }
```

```
}
```



# Algoritmos de Caminos mínimos

## Grafos acíclicos

```
Camino_min_GrafoDirigidoAcíclico( $G, s$ ) {  
    Calcular el grado_in de todos los vértices;  
    Encolar en  $Q$  los vértices con grado_in = 0;  
    para cada vértice  $v \in V$   
         $D_v = \infty$ ;  $P_v = 0$ ;  
     $D_s = 0$ ;  
    Mientras (!esVacio( $Q$ )) {  
        Desencolar( $Q, u$ );  
        para  $c$ /vértice  $w \in V$  adyacente a  $u$  {  
            Decrementar grado de entrada de  $w$   
            si (grado_in[ $w$ ] = 0)  
                Encolar( $Q, w$ );  
            si ( $D_u \neq \infty$ )  
                si  $D_w > D_u + c(u, w)$  {  
                     $D_w = D_u + c(u, w)$ ;  
                     $P_w = u$ ;  
                }  
        }  
    }  
}
```



# Camínos mínimos entre todos los pares de vértices

## ➤ Estrategia: Algoritmo de Floyd

- Lleva dos matrices D y P, ambas de  $|V| \times |V|$



Matriz de costos  
mínimos



Matriz de vértices  
intermedios

El costo total del algoritmo es  $O(|V|^3)$

# Algoritmo de Floyd

Toma cada vértice como intermedio, para  
calcular los caminos

```
para k=1 hasta cant_Vértices(G)
  para i=1 hasta cant_Vértices(G)
    para j=1 hasta cant_Vértices(G)
      si ( $D[i,j] > D[i,k] + D[k,j]$ ) {
         $D[i,j] = D[i,k] + D[k,j]$ ;
         $P[i,j] = k$ ;
      }
```

Distancia entre los  
vértices  $i$  y  $j$ , pasando  
por  $k$





<b>Grafos</b>	<b>BFS <math>O(V+E)</math></b>	<b>Dijkstra <math>O(E \log V)</math></b>	<b>Algoritmo modificado (encola vértices) <math>O(V \cdot E)</math></b>	<b>Optimización de Dijkstra (sort top) <math>O(V+E)</math></b>
<b>No pesados</b>	Óptimo	Correcto	Malo	Incorrecto si tiene ciclos
<b>Pesados</b>	Incorrecto	Óptimo	Malo	Incorrecto si tiene ciclos
<b>Pesos negativos</b>	Incorrecto	Incorrecto	Óptimo	Incorrecto si tiene ciclos
<b>Grafos pesados acíclicos</b>	Incorrecto	Correcto	Malo	Óptimo

Correcto → adecuado pero no es el mejor

Malo → una solución muy lenta