

Teoría de Grafos

OBJETIVOS

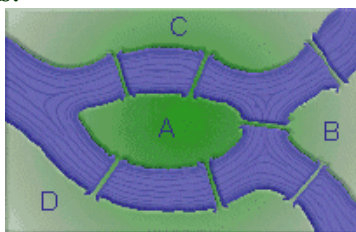
Unidad	Tema	Subtema	Objetivos
VIII Teoría de Grafos			
	7.1 Definiciones		
	7.2 Trayectorias y circuitos de Euler		
	7.3 Trayectorias y circuitos de Hamilton		
	7.4 Árboles		
			Definir, reconocer un grafo para establecer la solución de un problema. Reconocer Camino, Camino cerrado, Recorrido, Circuito, Camino simple y Ciclo.
			Definir, distinguir un circuito de Euler y una trayectoria de Euler
			Definir, distinguir un circuito de Euler y una trayectoria de Hamilton
			Definir y distinguir un árbol, árbol enraizado árboles de expansión, notación polaca.

Introducción

LOS SIETE PUENTES DE LA ISLA KUEIPHOF

La isla Kueiphof en Koenigsberg (Pomerania) el río que la rodea se divide en dos brazos.

Sobre los brazos estaban contruidos *siete puentes* y para los habitantes era motivo de distracción descubrir un itinerario de manera que pudieran regresar al punto de partida, después de haber cruzado por los siete puentes pero pasando sólo una vez por cada uno de ellos.



Leonardo Euler estudió el asunto, representó las distintas zonas A, B, C y D por medio de puntos, mientras que los puentes estaban representados por líneas que unían estos puntos. A la figura la llamó grafo, a los puntos los llamó vértices y a las líneas las denominó aristas.

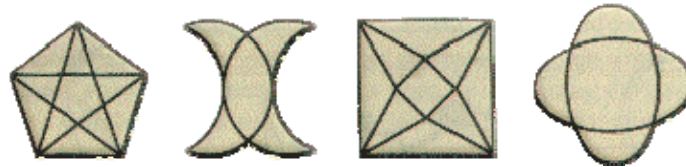
Estudió si una figura lineal se podía dibujar con un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo sitio.

Llegó a la siguiente conclusión:

1. Es *imposible* si hay *más de dos vértices impares*.
 2. Es *posible* cuando:
 - a) *Todos los vértices son pares* y el punto de partida puede ser cualquiera.
 - b) Cuando *no hay más de dos vértices impares* y en este caso el comienzo del recorrido comienza en uno de ellos y termina en el otro.
- (Impar es un vértice si de él parten un número impar de caminos).
- A la isla A llegan 5 puentes; a la B llegan 3 puentes; a la orilla C llegan 3 puentes y a la orilla D llegan 3 puentes, por tanto, según las conclusiones anteriores, *el problema no tiene solución*.

Ejemplos:

Estos dibujos pueden hacerse de un solo trazo:



Estos no pueden hacerse en las condiciones exigidas:

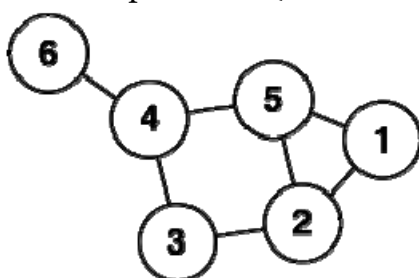


Este estudio de Euler dio origen a la teoría de los grafos, que se emplean en el estudio de los circuitos eléctricos, en problemas de transporte, programación con ordenador, etc.

7.1 Teoría de grafos

La Teoría de Grafos juega un papel importante en la fundamentación matemática de las Ciencias de la Computación. Los grafos constituyen una herramienta básica para modelar fenómenos discretos y son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos.

En matemáticas y ciencias de la computación, la **teoría de grafos** estudia las propiedades de los grafos, que son colecciones de objetos llamados vértices (o nodos) conectados por líneas llamadas aristas (o arcos) que pueden tener orientación (dirección asignada). Típicamente, un grafo está diseñado por una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).



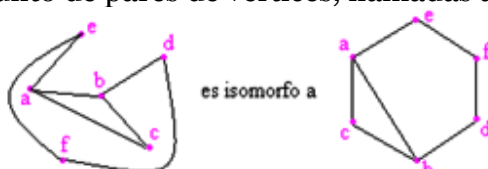
El trabajo de Leonhard Euler, en 1736, sobre el problema de los puentes de Königsberg es considerado como uno de los primeros resultados de la teoría de grafos. También se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría (que no depende de ninguna medida). Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología.

En 1845 Gustav Kirchhoff publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

Grafo

Un grafo es una pareja $G = (V, A)$, donde V es un conjunto de puntos, llamados vértices, y A es un conjunto de pares de vértices, llamadas aristas.



En teoría de grafos, sólo queda lo esencial del dibujo: la forma de las aristas no son relevantes, sólo importa a qué vértices están unidas. La posición de los vértices tampoco importa, y se puede variar para obtener un grafo más claro.

Generalmente, se considera que colocar los vértices en forma de polígono regular da grafos muy legibles.

Prácticamente cualquier red puede ser modelada con un grafo: una red de carreteras que conecta ciudades, una red eléctrica o un alcantarillado.

Aristas dirigidas y no dirigidas



En algunos casos es necesario asignar un sentido a las aristas, por ejemplo, si se quiere representar la red de las calles de una ciudad con sus inevitables direcciones únicas. El conjunto de aristas será ahora un subconjunto de todos los posibles pares ordenados de vértices, con $(a, b) \neq (b, a)$. Los grafos que contienen aristas dirigidas se denominan **grafos orientados**, como el siguiente:

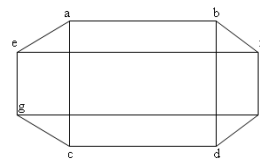
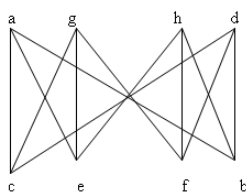
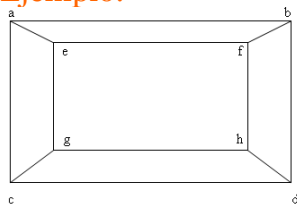
Las aristas no orientadas se consideran bidireccionales para efectos prácticos (equivale a decir que existen dos aristas orientadas entre los nodos, cada una en un sentido).

Se considera la característica de "grado" (positivo o negativo) de un vértice, como la cantidad de aristas que llegan o salen de él; para el caso de grafos no orientados, el grado de un vértice es simplemente la cantidad de aristas que tocan este vértice. Por ejemplo, el grado positivo (salidas) de d es 3, mientras que el grado negativo (llegadas) de b es 1.

Grafos isomorfos

Dos grafos tendrán la misma "forma matemática" cuando la única diferencia entre ambos, en cuanto a su estructura, sea la representación gráfica de sus vértices y aristas. Cuando las conexiones entre vértices tengan las mismas aristas, se dice que son homorfos. [Hortalá, 270]

Ejemplo:



Subgrafo

Un grafo G_1 es subgrafo de otro G si todos los vértices de G_1 están en G pero no necesariamente todos los vértices de G están en G_1 . [Hortalá, 268]

Caracterización de Grafos

Grafos Simples

Un grafo es *simple* si a lo más *sólo* 1 arista une dos vértices cualesquiera. Esto es equivalente a decir que una arista cualquiera es el único que une dos vértices específicos.

Un grafo que *no* es simple se denomina *complejo*.

Grafos Conexos

Un grafo es conexo (más formalmente *fuertemente conexo*) si todos sus vértices están conectados por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (a, b) , existe al menos un camino posible desde a hacia b .

Es posible determinar si un grafo es fuertemente conexo coleccionando la información de los grados de sus vértices al tiempo que se acumulan las diferentes rutas que salen de un vértice o llegan a él.

En términos matemáticos la propiedad de un grafo de ser fuertemente conexo permite establecer en base a él una relación de equivalencia para sus vértices, la cual lleva a una partición de éstos en "componentes fuertemente conexos", es decir, porciones del grafo, que son fuertemente conexas cuando se consideran como grafos aislados. Esta propiedad es importante para muchas demostraciones en teoría de grafos.

Grafos Completos

Un grafo simple es *completo* si existen aristas uniendo *todos* los pares posibles de vértices. Es decir, todo par de vértices (a, b) debe tener una arista e que los une.

El conjunto de los grafos completos es denominado usualmente \mathbb{K} , siendo \mathbb{K}_n el grafo completo de n vértices.

Un \mathbb{K}_n , es decir, grafo completo de n vértices tiene exactamente

$$n \times (n - 1)$$

2 aristas.

La representación gráfica de los \mathbb{K}_n como los vértices de un polígono regular da cuenta de su peculiar estructura.

Grafos Bipartitos

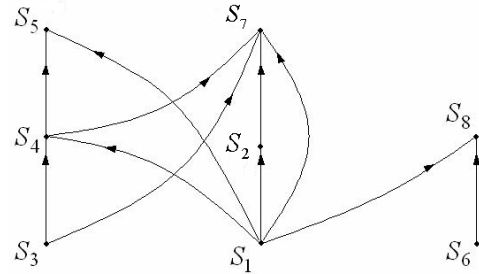
Un grafo G es bipartito si puede expresarse como $G = \{V_1 + V_2, A\}$ (es decir, la unión de dos grupos de vértices), bajo las siguientes condiciones:

- V_1 y V_2 son distintos y tienen más de un elemento cada uno.
- Una arista en A une un vértice de V_1 con uno de V_2 .
- No existen aristas uniendo dos elementos de V_1 ; análogamente para V_2 .

Bajo estas condiciones, el grafo se considera bipartito, y puede describirse informalmente como el grafo que une o relaciona dos conjuntos de elementos diferentes, como aquellos resultantes de los ejercicios y puzzles en los que debe unirse un elemento de la columna A con un elemento de la columna B .

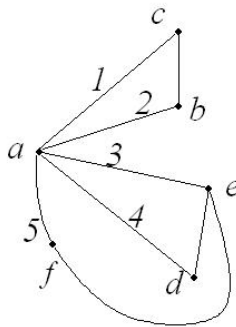
Ejemplos:

S_1	$b = 3$
S_2	$c = b + 2$
S_3	$a = 1$
S_4	$d = a * b + 5$
S_5	$e = d - 1$
S_6	$f = 7$
S_7	$e = c + d$
S_8	$g = b * f$



Relación → se ejecuta primero

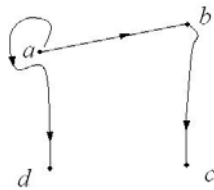
Ejemplo:



$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{a - c, a - b, a - e, a - f, c - b, e - d, e - f\}$$

Ejemplo:



$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, d), (b, c)\}$$

Grafo dirigido

$V \rightarrow$ Conjunto de vértices

$E \rightarrow$ Conjunto de aristas

$G \rightarrow$ Grafo

Donde $G = (V, E)$

Ejemplo 2: $E: (a, b)$ la arista es incidente en los nodos a y b

Ejemplo 2: $E: (a, b)$ a es el vértice origen y b es el vértice terminal.

e vértice aislado

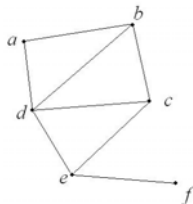
Ejemplo 2: Grafo dirigido.

Ejemplo 1: Grafo no dirigido.

\Rightarrow Grafo: Cuando no se especifica se entiende que es no dirigido

Definición: Sean x, y vértices (no necesariamente diferentes) de un grafo dirigido $G=(V, E)$ un camino $x - y$ en G es una sucesión alternada finita

Camino

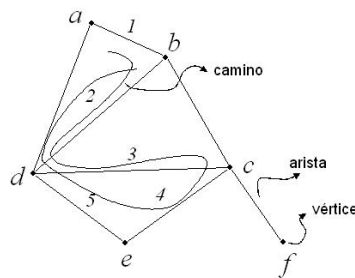


$$a-t: \quad a-b-c-e-f \\ a-d-e-f$$

Camino cerrado: Cualquier camino $x - y$ donde $x = y$; esto es, inicia y termina en el mismo nodo

$$a-a \quad a-b-d-a \\ a-b-c-e-d-a$$

Camino abierto: Cuando $x \neq y$, inicia y termina en vértices diferentes



1. $\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, b\}$

\Rightarrow Camino: $a-b$ longitud = 6

se repiten vértices b y d

$$a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow b$$

Se repite arista: $\{d, b\}$ (2)

$$a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{2} d \xrightarrow{3} c \xrightarrow{4} e \xrightarrow{5} d \xrightarrow{2} b$$

2. $b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow f$

\Rightarrow Camino: $b-f$ longitud = 5

Se repiten vértice c

Arista no se repite

3. $\{f, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, a\}$:

\Rightarrow Camino: $f-a$ longitud = 4

No repite vértice

No repite arista

* Como no es dirigido

Camino $a-b$ también camino $b-a$

Camino $b-f$ también camino $f-b$

Camino $f-a$ también camino $a-f$

4. $\{b, c\}, \{c, d\}, \{d, c\}$

Camino: $b-b$ cerrado: $x-x$ $b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b$

Camino: repite arista $x-y$ repite vértices

Camino cerrado: repite a y v: $x-x$

Recorrido: no repite arista: $(b-d)$

$b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c$

$f-a: f \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow a$

Recorrido cerrado: $b-b: x-x$

Circuito = recorrido cerrado (no repite aristas y llega al mismo vértice)

Ejemplo: $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}, \{d, a\}$

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$: camino a-a

recorrido a-a

cerrado a-a

longitud = 5

Camino simple: no repite vértice: no se repite vértice

$f-a: f \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow d \longrightarrow a$

$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow e: a-e$

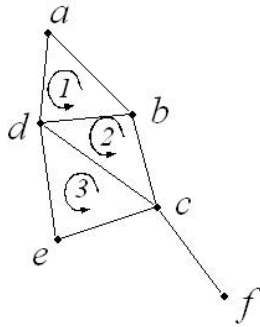
Camino simple cerrado: no repite vértices y lleva al mismo lado. $x-x$

Ciclo: camino simple cerrado

Vértices repetidos	Aristas repetidas	$x-y$ abierto	$x-y$ cerrado	Nombre
X	X	X	-	Camino
X	X	-	X	Camino cerrado
X	-	X	-	Recorrido
X	-	-	X	Circuito
-	-	X	-	Camino simple
-	-	-	X	Ciclo

Matemáticas Discretas
Tc1003
Teoría de Grafos

Ciclos:



$$\begin{aligned} a &\longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow a \\ b &\longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b \\ c &\longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow c \end{aligned}$$

Camino simple:

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow f \\ a &\longrightarrow b \longrightarrow d \\ a &\longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \\ a &\longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow f \end{aligned}$$

Circuito:

$$a \longrightarrow d \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow a$$

Recorrido.

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b$$

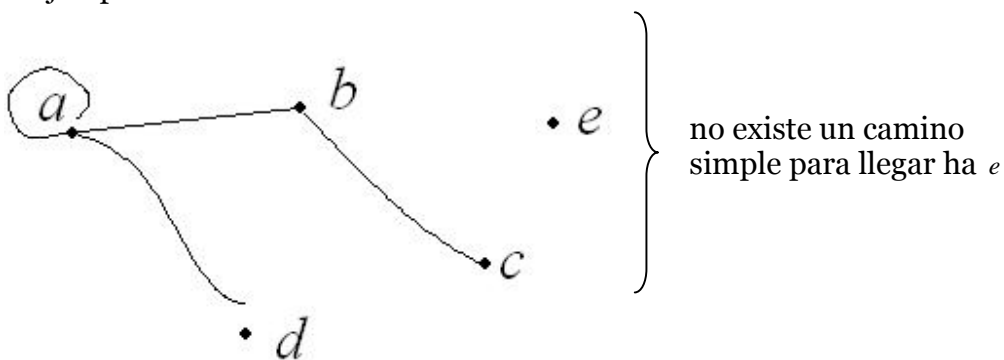
Camino cerrado:

$$a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow a$$

Camino:

$$a \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow e$$

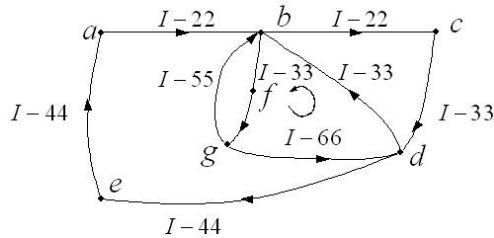
Ejemplo.



Ejemplo:

Siete ciudades a, b, c, d, e, f y g están conectadas por un sistema de autopistas como sigue: (1) I-22 va de a a c, pasando por b; (2) I-33 va de c a d y continúa hacia f; (3) I-44 va de d por e hacia a; (4) I-55 va de f a b pasando por g; y (5) I-66 va de g a d.

a) Dibujar el grafo que modele esta situación:



b) Enumerar los caminos simples de g a a

$g-a$: $g-d, d-e, e-a$
 $g-b, b-c, c-d, d-e, e-a$

c) ¿Cuál es el menor número de segmentos que tendrían que cerrarse para interrumpir el paso de b a d?

$b-c, c-d : b-d$
 $b-f, f-g, g-d :$ } Dos

d) ¿Es posible salir de la ciudad c y regresar a ella, visitando una sola vez las otras ciudades? NO

e) ¿Cuál es la respuesta del inciso anterior si no es necesario regresar a c? Si;

$c-d, d-e, e-a, a-b, b-f, f-g$

f) ¿Es posible comenzar en alguna ciudad y viajar por todas las autopistas exactamente una vez? (se permite visitar una ciudad más de una vez y no es necesario regresar a la ciudad donde se partió). Si;

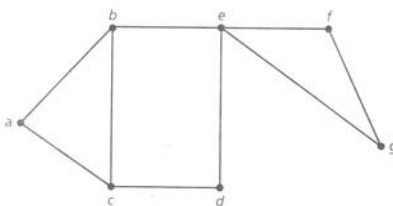
$g-b, b-f, f-g, g-d, d-b, b-c, c-d, d-e, e-a, a-b$

Actividades de Teoría de Grafos

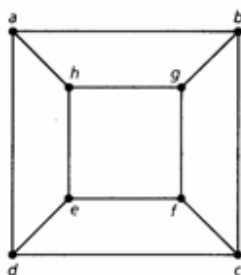
1. Enumera tres situaciones, en que un grafo pueda ser útil.

2. Para el grafo de la figura, determina

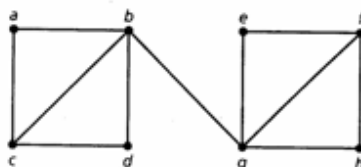
- un camino de b a d que no sea un recorrido;
- un recorrido b-d que no sea un camino simple;
- ¿Cuántos caminos simples existen de b a f?



3. ¿Cuántos caminos simples diferentes existen entre los vértices h y c en el grafo dado en la figura?

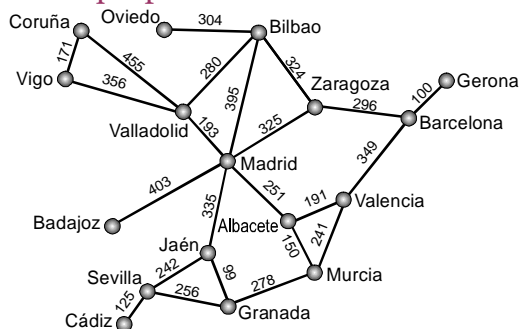


4. Sea $G = (V, E)$ el grafo no dirigido de la figura, ¿cuántos caminos simples existen en g de e a h? ¿Cuántos de ellos son de longitud 5?

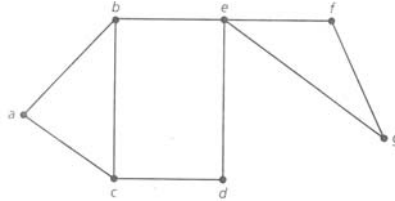


5. Para el grafo de la figura

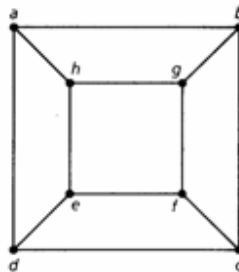
- Determina un camino para ir de Barcelona a Sevilla
- ¿Cuántos ciclos tiene?
- ¿Existe una recorrido en la que puedas visitar todas las ciudades?, si existe, ¿cuál?



6. Para el grafo de la figura, determina
- ¿Cuántos ciclos tiene?, ¿cuáles?
 - Traza un camino simple de g a c

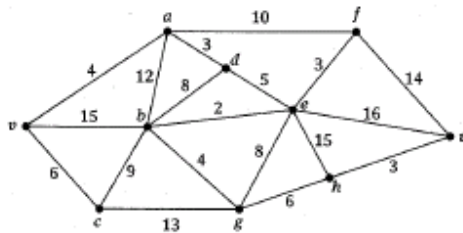


7. ¿Cuántos caminos simples diferentes existen entre los vértices a y c en el grafo dado en la figura?



8. Dibuja, si existen, grafos con
- 5 vértices, 6 aristas y sin ciclos de longitud 3
 - 5 vértices con grados 0, 5, 1, 3 y 2
9. Dibuja, si existen, grafos de cuatro vértices con los siguientes grados:
- 2, 2, 2, 3
 - 2, 2, 2, 4
 - 2, 1, 2, 1

10. En el siguiente grafo, los números en las aristas representan los kilómetros entre un punto y otro. Encuentra el camino más corto del punto v al punto w



Actividades Teoría de Grafos

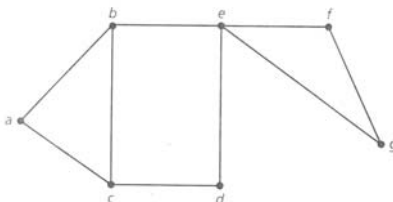
Solución

1. Enumera tres situaciones, en que un grafo pueda ser útil.

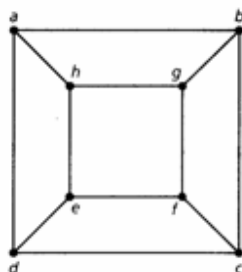
- Diagramas de ejecución de programas
- Representación de rutas de transporte o recorridos
- Gráficas de relaciones

2. Para el grafo de la figura, determina

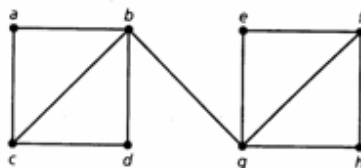
- a) un camino de b a d que no sea un recorrido; $b-c-a-b-e-d$
- b) un recorrido b-d que no sea un camino simple; $b-c-d$
- c) ¿Cuántos caminos simples existen de b a f? $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$



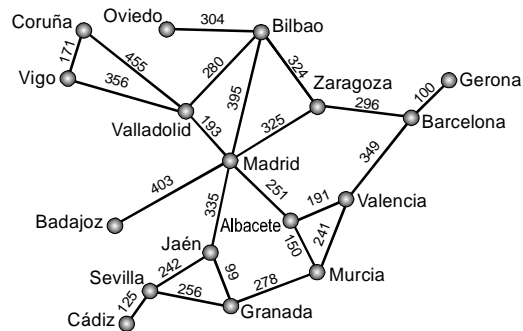
3. ¿Cuántos caminos simples diferentes existen entre los vértices h y c en el grafo dado en la figura? $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$



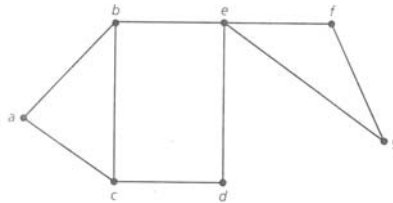
4. Sea $G = (V, E)$ el grafo no dirigido de la figura, ¿cuántos caminos simples existen en g de e a h? $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ ¿Cuántos de ellos son de longitud 5? 3



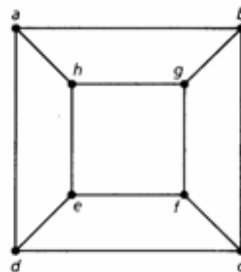
5. Para el grafo de la figura
- a) Determina un camino para ir de Barcelona a Sevilla **Barcelona-Valencia-Murcia-Granada-Sevilla**
 - b) ¿Cuántos ciclos tiene?**8**
 - c) ¿Existe una recorrido en la que puedas visitar todas las ciudades?, **No tiene** si existe, ¿cuál?



6. Para el grafo de la figura, determina
- a) ¿Cuántos ciclos tiene?, ¿cuáles?
4. a-b-c
b-c-d-e
a-b-e-d-c
e-f-g
- b) Traza un camino simple de g a c
- g-e-d-c



7. ¿Cuántos caminos simples diferentes existen entre los vértices a y c en el grafo dado en la figura? $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$

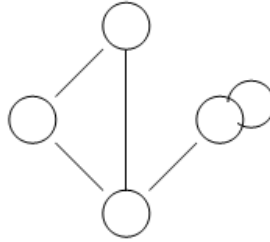


8. Dibuja, si existen, grafos con

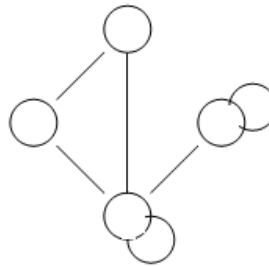
- a. 5 vértices, 6 aristas y sin ciclos de longitud 3 **no existe**
- b. 5 vértices con grados 0, 5, 1, 3 y 2 **no existe**

9. Dibuja, si existen, grafos de cuatro vértices con los siguientes grados:

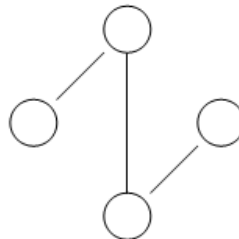
- a. 2, 2, 2, 3



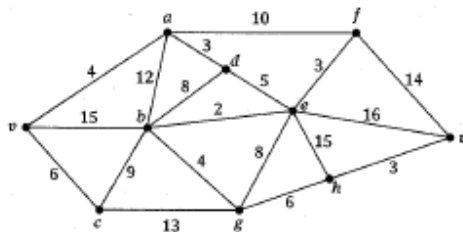
- b. 2, 2, 2, 4



- c. 2, 1, 2, 1



10. En el siguiente grafo, los números en las aristas representan los kilómetros entre un punto y otro. Encuentra el camino más corto del punto v al punto w



- v-15-b-4-g-6-h-3-w=28**
- v-4-a-10-f-14-w=28**
- v-6-c-13-g-6-h-3-w=28**