Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2013

Prof. Catalina Mostaccio
Prof. Alejandra Schiavoni

Facultad de Informática - UNLP

GRAFOS

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos
4. Sort topológico

Agenda - Grafos

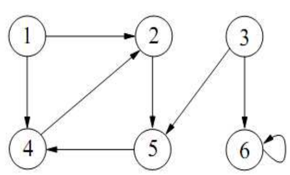
1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos
4. Sort topológico

Terminología

- *Grafo→ modelo para representar relaciones entre elementos de un conjunto.*
- ***Grafo**: (V ,E), V es un conjunto de vértices o nodos, con una relación entre ellos; E es un conjunto de pares (u,v), u,v Є V , llamados aristas o arcos.*
- ***Grafo dirigido**: la relación sobre V no es simétrica. Arista ≡ par ordenado (u,v).*
- ***Grafo no dirigido**: la relación sobre V es simétrica. Arista ≡ par no ordenado {u,v}, u,v Є V y u ≠ v*

Terminología (cont. 1)

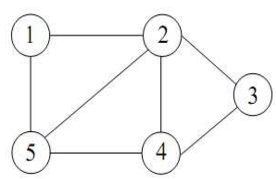
Ejemplo 1



Grafo dirigido G(V , E).

V = {1,2,3,4,5,6}

E={(1,2),(1,4),(2,5),(3,5),(3,6), (4,2), (5,4),(6,6)}



Grafo no dirigido G(V , E).

V = {1,2,3,4,5}

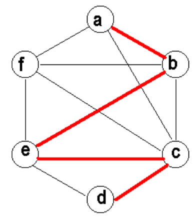
E= {{1,2},{1,5},{2,3},{2,4}, {2,5},{3,4},{4,5}}

Terminología (cont. 2)

- *v es **adyacente** a u si existe una arista (u,v) Є E.*
  - *en un grafo no dirigido, (u,v) Є E **incide** en los nodos u, v.*
  - *en un grafo dirigido, (u,v) Є E **incide** en v, y **parte** de u.*
- *En grafos no dirigidos:*
  - *El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él.*
- *En grafos dirigidos:*
  - *existen el grado de salida (**grado_out**) y el grado de entrada (**grado_in**).*
    - ***el grado_out** es el número de arcos que parten de él y*
    - *el **grado_in** es el número de arcos que inciden en él.*
  - *El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.*
- ***Grado de un grafo**: máximo grado de sus vértices.*

Terminología (cont. 3)

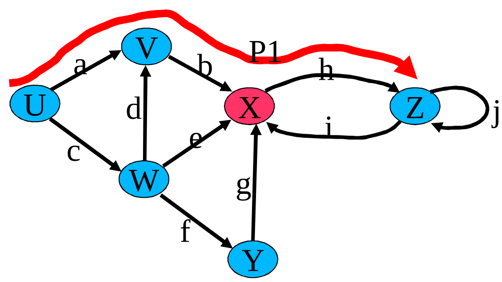
- ***Camino** desde u Є V a v Є V : secuencia $v_1, v_2, \dots, v_k$ tal que $u=v_1$, $v=v_k$, y (v_{i-1},v_i) Є E, para $i = 2, \dots, k$.*
  *Ej: camino desde **a** a **d** → <a,b,e,c, d>.*



- ***Longitud de un camino**: número de arcos del camino.*
  *Ejs: long. del camino desde **a** a **d** → <a,b,e,c,d> es 4. (a)*
  *long. del camino desde **a** a **d** → <a,b,e,f,b,e,c,d> es 7. (b)*

Terminología (cont. 4)

- ***Camino simple***: *camino en el que todos sus vértices, excepto, tal vez, el primero y el último, son distintos. P1 es un camino simple desde U a Z.*

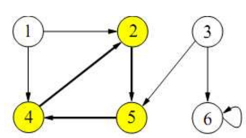


Ejemplos anteriores: (a) es camino simple , (b) no lo es.

Terminología (cont. 5)

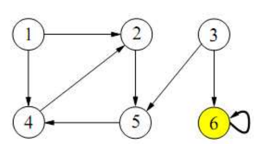
- ***Ciclo***: *camino desde $v_1, v_2, \ldots , v_k$ tal que $v_1=v_k$*

  Ej: <2,5,4,2> es un ciclo de longitud 3.

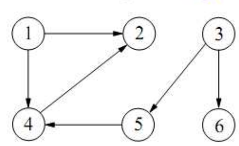


El ciclo es simple si el camino es simple.

- ***Bucle***: *ciclo de longitud 1.*



- ***Grafo acíclico***: *grafo sin ciclos.*



Terminología (cont. 6)

- *Un grafo es **conexo** si entre cada dos nodos hay un camino.*
- *Un **bosque** es un grafo sin ciclos.*
- *Un **árbol libre** es un bosque conexo.*
- *Un **árbol** es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.*

Terminología (cont. 7)

- *Sea G un grafo no dirigido con **n** vértices y **m** arcos, entonces*

$$\sum_{v \in G} deg(v) = 2*m$$

✓*Siempre:* $m \leq (n*(n-1))/2$

✓*Si G conexo:* $m \geq n-1$
✓*Si G árbol:* $m = n-1$
✓*Si G bosque:* $m \leq n-1$

Terminología (cont. 8)

- *G' = (V', E') es un **subgrafo** de G = (V , E) si V'⊆V y E' ⊆E.*
- ***Subgrafo inducido** por V' ⊆ V : G' = (V',E') tal que E' = {(u,v) ∈ E | u,v ∈ V'}.*

Ejemplos de Subgrafos del grafo de la Fig. a

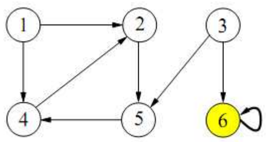


Fig. a

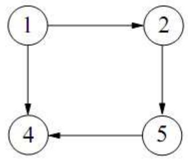


Fig. b

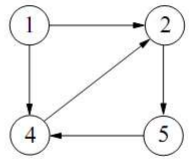


Fig. c

Fig. b : Subgrafo

V'={1,2,4,5}

E'={(1,2),(1,4),(2,5),(5,4)}

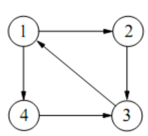
Fig. c : Subgrafo inducido por

V'={1,2,4,5}

E'={(1,2),(1,4),(2,5),(4,2),(5,4)}

Terminología (cont. 9)

- *v es **alcanzable desde** u, si existe un camino de u a v.*
- *Un grafo no dirigido es **conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro.*
- *Un grafo dirigido con esta propiedad se denomina **fuertemente conexo**:*



- *Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.*

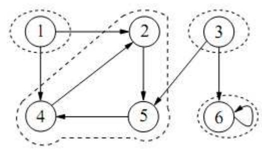
Terminología (cont. 10)

➢*En un grafo no dirigido, una* ***componente conexa es un*** *subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga. Es un* ***subgrafo conexo maximal****.*

➢*Un grafo no dirigido es* ***no conexo*** *si está formado por varias componentes conexas.*

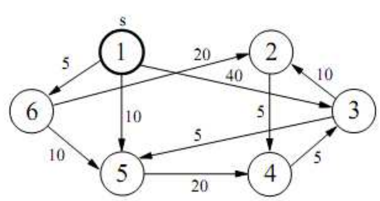
➢*En un grafo dirigido, una* ***componente fuertemente conexa****, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

➢*Un grafo dirigido es* ***no fuertemente conexo*** *si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



Terminología (cont. 11)

➢ *Un grafo* ***ponderado, pesado o con costos****: cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta.*



Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos
4. Sort topológico

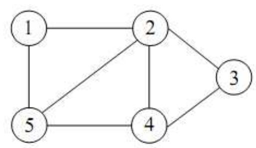
Agenda - Grafos

- Representaciones
  - Matriz de Adyacencias
  - Lista de Adyacencias

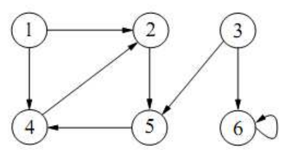
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- $G=(V,E)$: matriz A de dimensión $|V|\times|V|$.
- Valor a_{ij} de la matriz:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

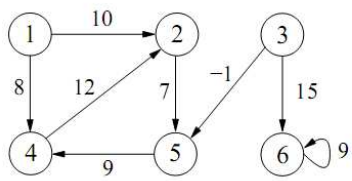
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Costo espacial:* $O(|V|^2)$
- *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos* $(|E|\approx|V|\times|V|)$
- *Comprobar si una arista* (u,v) *pertenece a* $E \rightarrow$ *consultar posición* $A(u,v)$
  - *Costo de tiempo* $T(|V|,|E|) = O(1)$

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El peso de (i,j) se almacena en A (i, j).*

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 \; o \; \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

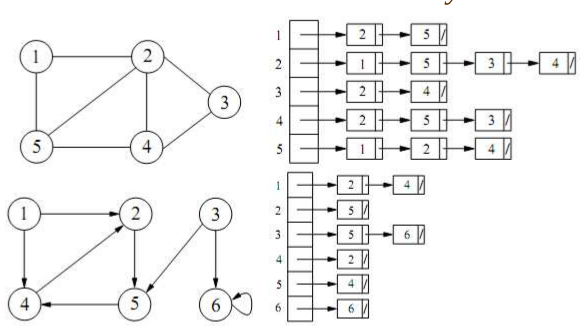


	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	−1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

Representaciones: Lista de Adyacencias

- *G =(V ,E): vector de tamaño |V|.*
- *Posición* ***i*** *→ puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).*

  Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a ***i***



Representaciones: Lista de Adyacencias

- *Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $|E|$.*

- *Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $2|E|$.*

- *Costo espacial, sea dirigido o no: $O(|V|+|E|)$.*

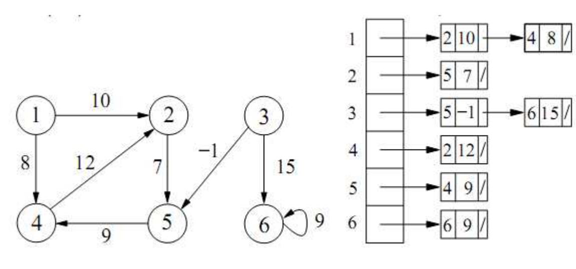
- *Representación apropiada para grafos con $|E|$ menor que $|V|^2$.*

- ***Desventaja**: si se quiere comprobar si una arista (u,v) pertenece a E $\Rightarrow$ buscar **v** en la lista de adyacencia de u.*

  - *Costo temporal $T(|V|,|E|)$ será O (Grado G) $\subseteq O(|V|)$.*

Representaciones: Lista de Adyacencias

- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El **peso de (u,v)** se almacena en el nodo de **v** de la lista de adyacencia de **u**.*



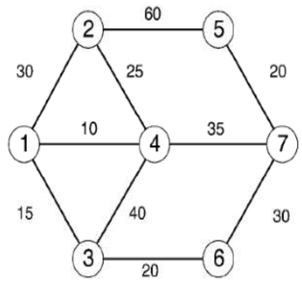
Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos
4. Sort topológico

El Guía de Turismo

El señor H es un guía de turismo de la ciudad de Buenos Aires. Su trabajo consiste en mostrar a grupos de turistas diferentes puntos de interés de la ciudad. Estos puntos de interés están conectados por rutas en ambos sentidos. Dos puntos de interés vecinos tienen un servicio de bus que los conecta, con una limitación en el número máximo de pasajeros que puede transportar. No es siempre posible para el señor H transportar de una única vez a todos los turistas a un destino en particular.

Por ejemplo, consideremos el siguiente mapa con 7 puntos de interés, donde las aristas representan las rutas y el número sobre ellas representa el límite máximo de pasajeros a transportar por el servicio de bus. Su misión es indicarle al Sr. H cuál es el menor número de viajes que deberá realizar para llevar al grupo de turistas a destino.



En este ejemplo, para transportar a 99 turistas de la ciudad 1 a la ciudad 7, le tomará 5 viajes, eligiendo la ruta con menor número de viajes a realizar: 1 - 2 - 4 - 7.

En cada viaje el servicio de bus puede transportar como máximo a 25 pasajeros, 24 turistas + al señor H, en los cuatro primeros viajes transporta a 96 turistas y en el último a los restantes 3.

Agenda - Grafos

- Recorridos
  - en profundidad : DFS (Depth First Search)
  - en amplitud : BFS (Breath First Search)
  - Bosque de expansión DFS
  - Aplicaciones

Recorrido en profundidad : DFS

→ Generalización del recorrido preorden de un árbol.

***Estrategia**:*

- *Partir de un vértice determinado **v**.*
- *Cuando se visita un nuevo vértice, explorar cada camino que salga de él.*
- *Hasta que no se haya finalizado de explorar uno de los caminos no se comienza con el siguiente.*
- *Un camino deja de explorarse cuando se llega a un vértice ya visitado.*
- *Si existían vértices no alcanzables desde **v** el recorrido queda incompleto; entonces, seleccionar alguno como nuevo vértice de partida, y repetir el proceso.*

Recorrido en profundidad : DFS

***Esquema recursivo**: dado G = (V , E)*

1. Marcar todos los vértices como no visitados.

*2. Elegir vértice **u** como punto de partida.*

*3. Marcar **u** como visitado.*

*4. ∀ **v** adyacente a **u**,**(u,v)** Є E, si **v** no ha sido visitado, repetir recursivamente (3) y (4) para **v**.*

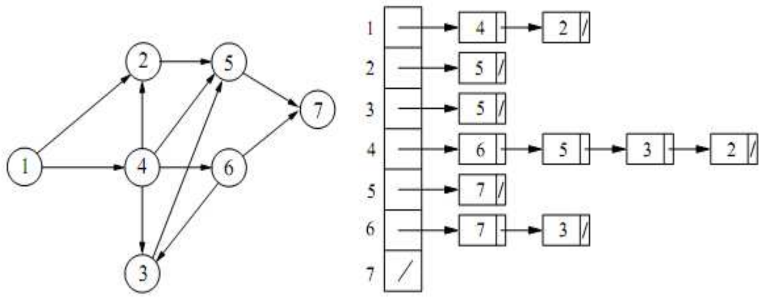
• Finalizar cuando se hayan visitado todos los nodos alcanzables desde u.

*• Si desde **u** no fueran alcanzables todos los nodos del grafo: volver a (2), elegir un nuevo vértice de partida **v** no visitado, y repetir el proceso hasta que se hayan recorrido todos los vértices.*

Recorrido en profundidad : DFS

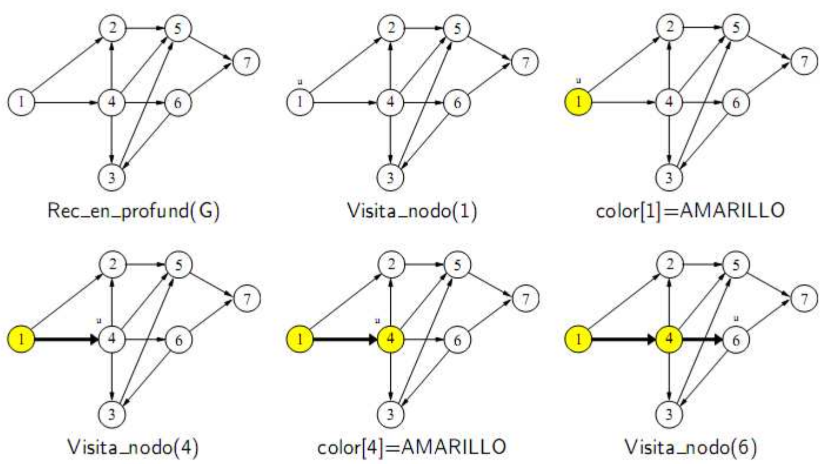
```
dfs (v: nodo)
    marca[v]:= visitado
    para cada nodo w adyacente a v hacer
            si marca[w] == noVisitado entonces
                    dfs(w)
    finpara

main_dfs
      var  marca: array [1, ..., n] de (visitado, noVisitado)
      para i:= 1, ..., n hacer
           marca[i]:= noVisitado
      para v:= 1, ..., n hacer
           si marca[v] == noVisitado entonces
            dfs(v)
      finpara
```

Recorrido DFS : Ejemplo

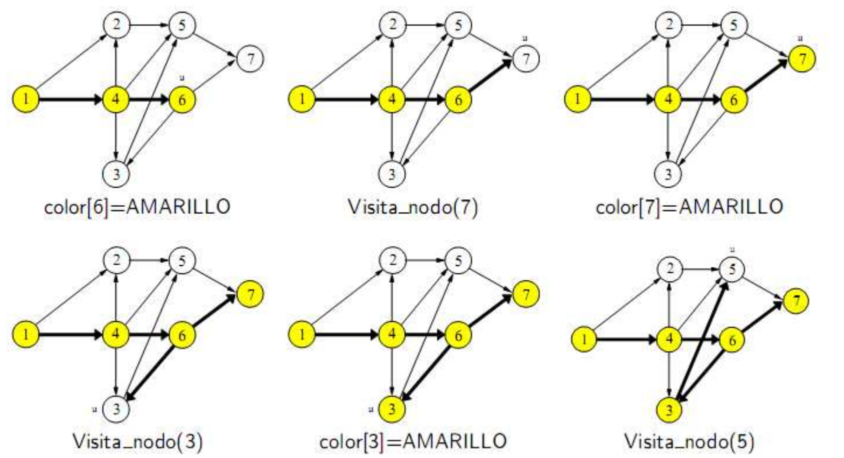


☞ *¡OJO!: el recorrido depende del orden en que aparecen los vértices en las listas de adyacencia.*

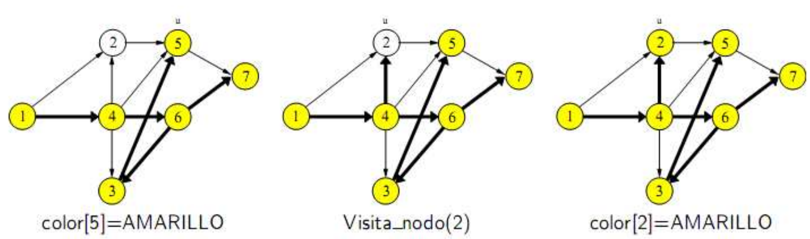
Recorrido DFS : Ejemplo (cont. 1)



Recorrido DFS : Ejemplo (cont. 2)



Recorrido DFS : Ejemplo (cont. 3)



Recorrido DFS : Tiempo de ejecución

➢*G (V , E) se representa mediante listas de adyacencia.*

➢ Visita_nodo *se aplica únicamente sobre vértices no visitados → sólo una vez sobre cada vértice.*

➢ Visita_nodo *depende del número de vértices adyacentes que tenga **u** (longitud de la lista de adyacencia).*

➢ *el tiempo de todas las llamadas a* Visita_nodo *:*

$$\sum_{v \in V} |\mathsf{ady}(v)| = \Theta(|E|)$$

➢ *añadir el tiempo asociado a los bucles de* Recorrido_en _profundidad*: O (|V|).*

⇒ *Tiempo del recorrido en profundidad es O (|V|+|E|) .*

Recorrido en amplitud : BFS

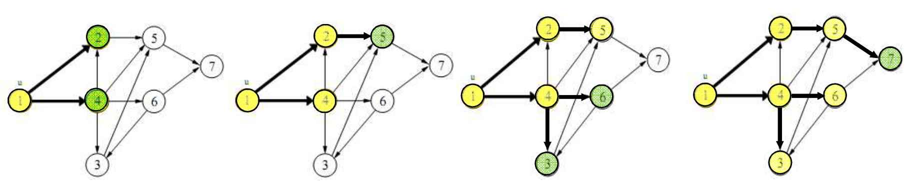
→ *Generalización del recorrido por niveles de un árbol.*

***Estrategia**:*

➢ *Partir de algún vértice **u**, visitar **u** y, después, visitar cada uno de los vértices adyacentes a **u**.*

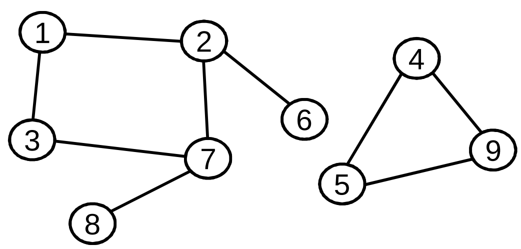
➢ *Repetir el proceso para cada nodo adyacente a **u**, siguiendo el orden en que fueron visitados.*

➢*Costo T(|V|,|E|) es de O(|V|+|E|).*

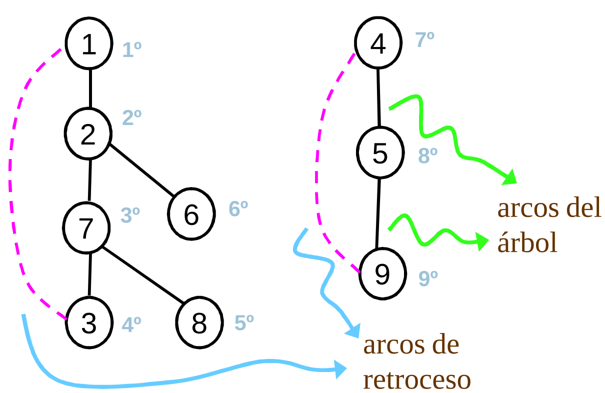


Bosque de expansión del DFS

- *El recorrido* ***no es único****: depende del nodo inicial y del orden de visita de los adyacentes.*
- *El orden de visita de unos nodos a partir de otros puede ser visto como un árbol:* ***árbol de expansión (o abarcador) en profundidad asociado al grafo.***
- *Si aparecen varios árboles:* ***bosque de expansión (o abarcador) en profundidad****.*
- *Ejemplo. Grafo no dirigido.*



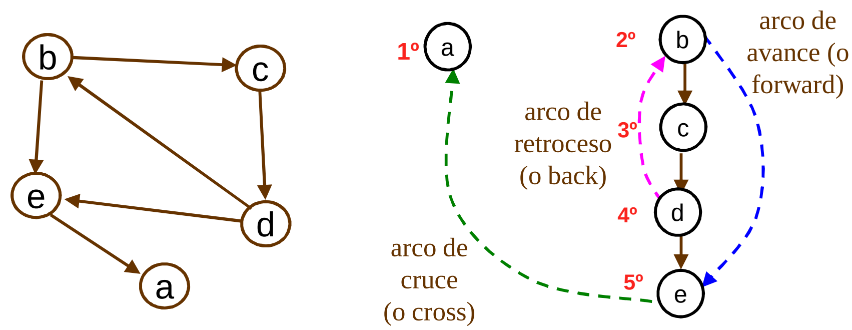
Bosque de expansión del DFS



- **Arcos de retroceso:** si marca[v] == noVisitado ...
- → se detectan cuando la condición es falsa.

Bosque de expansión del DFS

- ***Ejemplo:*** *grafo dirigido.*



Bosque de expansión, empezando el recorrido en el vértice **a**

Bosque de expansión del DFS

***Clasificación de los arcos de un grafo dirigido en el bosque de expansión de un DFS**.*

*•Arcos **tree** (del **árbol**): son los arcos en el bosque depth-first, arcos que conducen a vértices no visitados durante la búsqueda.*

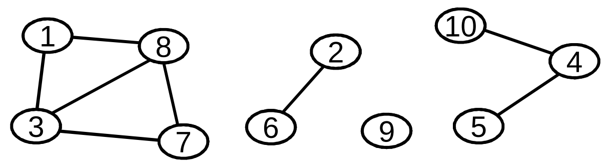
*• Arcos **forward**: son los arcos u→v que no están en el bosque, donde v es descendiente, pero no es hijo en el árbol.*

*•Arcos **backward**: son los arcos u→v, donde v es antecesor en el árbol. Un arco de un vértice a si mismo es considerado un arco back.*

*•Arcos **cross**: son todos los otros arcos u→v, donde v no es ni antecesor ni descendiente de u. Son arcos que pueden ir entre vértices del mismo árbol o entre vértices de diferentes árboles en el bosque depth-first-search*

Aplicaciones del DFS

- **Problema 1:** encontrar las componentes conexas de un grafo no dirigido.



- **Problema 2: prueba de aciclicidad.** Dado un grafo (dirigido o no dirigido) comprobar si tiene algún ciclo o no.
- **Problema 3:** encontrar las componentes fuertemente conexas de un grafo dirigido.

Aplicaciones del DFS

- **Problema 1:**
  - Si el grafo es conexo
    - Un recorrido desde cualquier vértice
    - Visitará a TODOS los vértices del grafo
  - Si no lo es
    - Partiendo de un vértice, tendremos una componente conexa → conjunto de vértices recorrido
    - Para descubrir otras
      - Repetir recorrido desde un vértice no visitado
      - Hasta que todos los vértices hayan sido visitados

Aplicaciones del DFS

- **Problema 2: Prueba de aciclicidad**
  - **Grafo no dirigido.** Hacer un dfs (o bfs). Existe algún ciclo si y sólo si aparece algún arco que no es del árbol de expansión.
  - **Grafo dirigido.** Hacer un dfs (o bfs). Existe un ciclo si y sólo si aparece algún arco de retroceso.

- Orden de complejidad de la prueba de aciclicidad: igual que los recorridos.
  - Con matrices de adyacencia: **O(|V|^2)**.
  - Con listas de adyacencia: **O(|V| + |E|)**.

Aplicaciones del DFS

- **Problema 3: Componentes Fuertemente conexas**

Una aplicación clásica del depth-first search es descomponer un grafo dirigido en componentes fuertemente conexas (o conectadas).

Una ***componente fuertemente conexa*** de un Grafo Dirigido G = (V,A) es el conjunto máximo de vértices V'$\subseteq$ V tal que para cada par de vértices *u* y *v* en V', existe un camino tanto $u \rightarrow v$ como $v \rightarrow u$.

Aplicaciones del DFS

Algoritmo para encontrar las Componentes Fuertemente Conexas

Pasos:

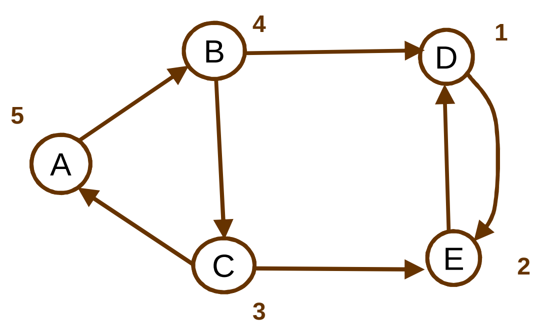
1. Aplicar DFS(G) rotulando los vértices de G en post-orden (apilar).
2. Construir el grafo reverso de G, es decir G^R (invertir los arcos).
3. Aplicar DFS (G^R) comenzando por los vértices de mayor rótulo (tope de la pila).
4. Cada árbol de expansión resultante del paso 3 es una componente fuertemente conexa.

Si resulta un único árbol entonces el digrafo es Fuertemente conexo.

Aplicaciones del DFS

Algoritmo para encontrar las Componentes Fuertemente Conexas (cont.)

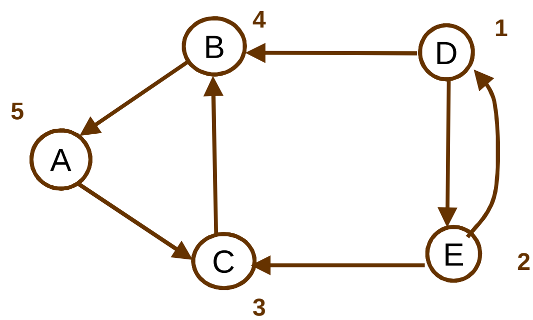
Paso 1: Aplicar DFS a partir de A, y numerar los vértices en post-orden



Aplicaciones del DFS

Algoritmo para encontrar las Componentes Fuertemente Conexas (cont.)

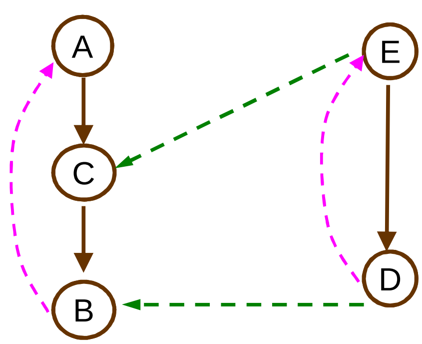
Paso 2: Construir el grafo reverso de G, es decir G^R (invertir los arcos).



Aplicaciones del DFS

Algoritmo para encontrar las Componentes Fuertemente Conexas (cont.)

Paso 3: Aplicar DFS (G^R) comenzando por los vértices de mayor numeración



Componentes fuertemente conexas: {A, B, C}, {E, D}