Programación 3

Cursada 2016

Prof. Alejandra Schiavoni

Ingeniería en Computación - UNLP

Agenda

- Análisis de algoritmos
- Algoritmos recursivos vs. Iterativos
- Optimizando algoritmos

Agenda
Análisis de algoritmos

- Introducción al concepto T(n)
  - Tiempo, entrada, peor caso, etc.
- Notación Big-Oh
  - Definición y ejemplos
  - Reglas (suma, producto)
- Cálculo del T(n)
  - En algoritmos iterativos y recursivos

Análisis de algoritmos

- *Nos permite comparar algoritmos en forma independiente de una plataforma en particular*

- *Mide la eficiencia de un algoritmo, dependiendo del tamaño de la entrada*

Análisis de algoritmos

Pasos a seguir:

- Caracterizar los datos de entrada del algoritmo
- Identificar las operaciones abstractas, sobre las que se basa el algoritmo
- Realizar un análisis matemático, para encontrar los valores de las cantidades del punto anterior

Introducción al concepto T(n)

Criterios de elección

Recursos de computadora

espacio de memoria

tiempo de ejecución

Medida de eficiencia

enfoque empírico (a posteriori)

enfoque teórico (a priori)

T(n) **n**: tamaño de la entrada de los datos

se calcula en forma teórica.

tiempo en el peor de los casos.

Definiciones

- **Big-Oh**
- **Omega**
- **Theta**

Notación Big-Oh

- Definición y ejemplos
- Regla de la suma y regla del producto

Notación Big-Oh
Definición

Decimos que

$$\mathcal{T}(n) = O(f(n))$$

si existen constantes c > 0 y n_0 tales que:

$$\mathcal{T}(n) \leq c\, f(n) \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o$$

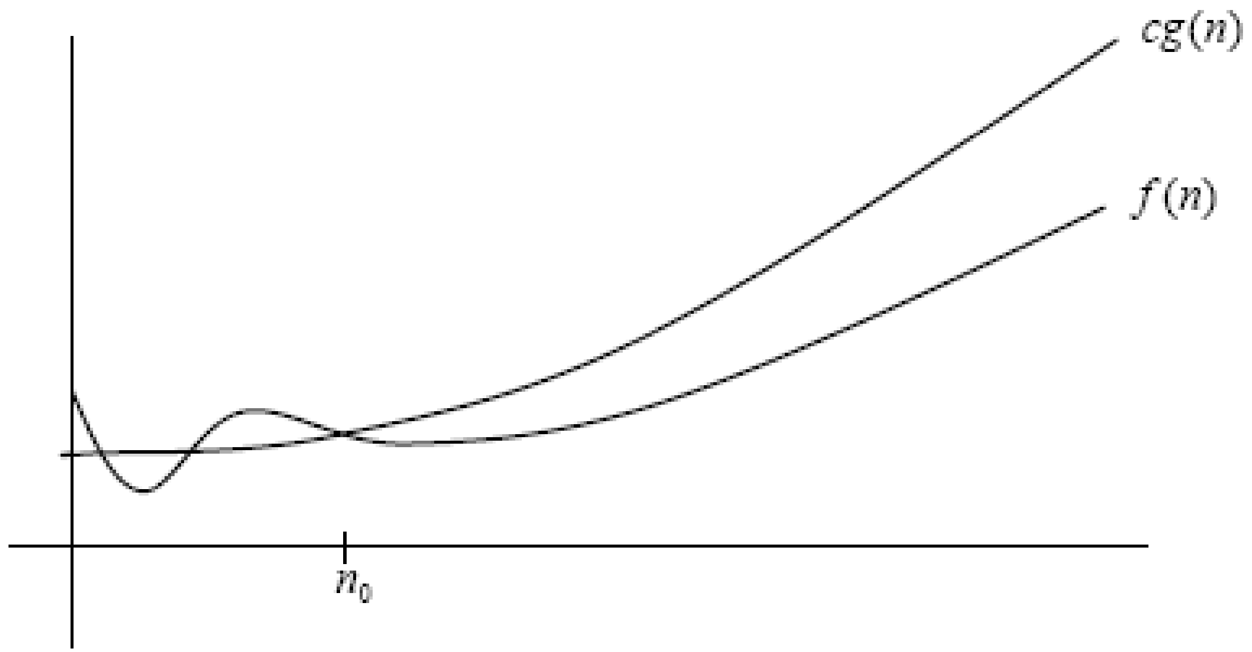
Se lee: T(n) es de orden de f(n)

f(n) representa una cota superior de T(n)

La tasa de crecimiento de T(n) es menor o igual que la de f(n)

Notación Big-Oh

Geométricamente $f(n) = O(g(n))$ es:



Notación Big-Oh

- Regla de la suma y regla del producto

Si $T_1(n)=O(f(n))$ y $T_2(n)=O(g(n))$, entonces:

1. $T_1(n)+T_2\,(n)=\max(O(f(n)),O(g(n)))$
2. $T_1(n)\cdot T_2\,(n)=O(f(n)\cdot g(n))$

Notación Big-Oh

- Otras reglas :

  - T(n) es un polinomio de grado ***k*** $\Rightarrow$ $T(n) = O(n^k)$
  - $T(n) = \log^k(n) \Rightarrow O(n)$ para cualquier k

    n siempre crece más rápido que cualquier potencia de log(n)

  - $T(n) = cte \quad \Rightarrow \quad O(1)$
  - $T(n) = cte * f(n) \Rightarrow \; T(n) = O(\, f(n)\,)$

Notación Big-Oh

Ejemplos

1.- $T(n) = 3n^3 + 2n^2$ es $O(n^3)$? **Verdadero**

2.- $T(n) = 3n^3 + 2n^2$ es $O(n^4)$? **Verdadero**

3.- $T(n) = 1000$ es $O(1)$? **Verdadero**

4.- $T(n) = 3^n$ es $O(2^n)$? **Falso**

Omega
Definición

Decimos que

$$\mathcal{T}(n) = \Omega(g(n))$$

si existen constantes $c > 0$ y n_0 tales que:

$$\mathcal{T}(n) \geq c\, g(n) \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o$$

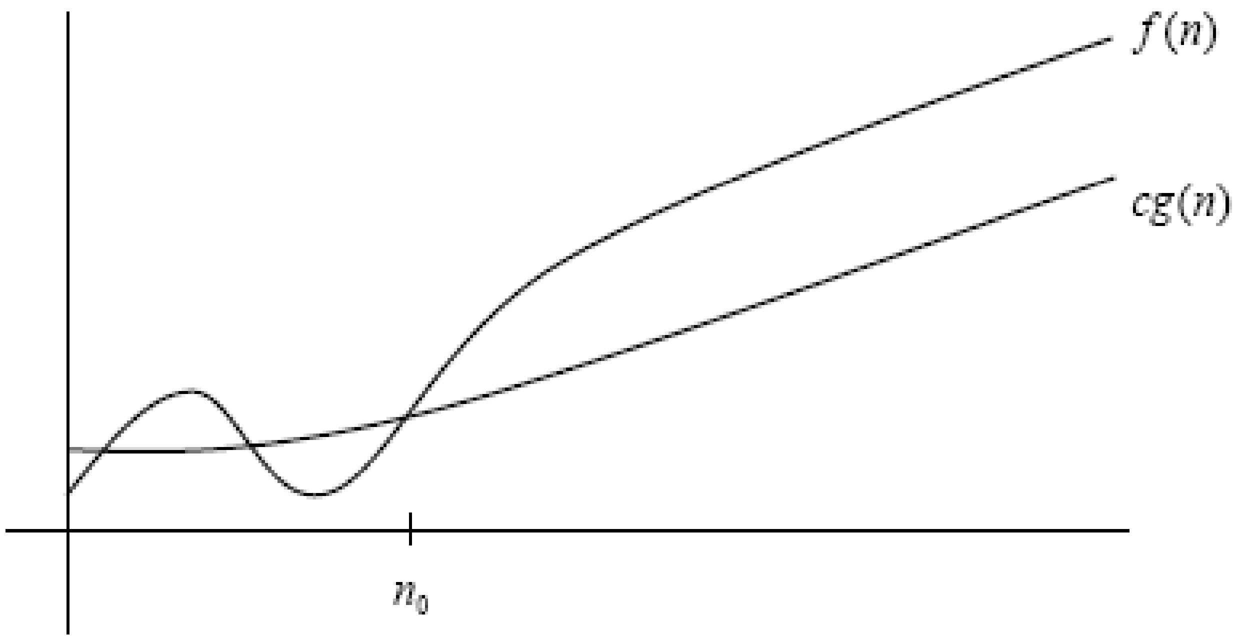
Se lee: T(n) es omega de g(n)

g(n) representa una cota inferior de T(n)

La tasa de crecimiento de T(n) es mayor o igual que la de g(n)

Omega

Geométricamente f(n) = Ω(g(n)) es:



Theta
Definición

Decimos que

$$\mathcal{T}(n) = \boldsymbol{\Theta}(h(n))$$

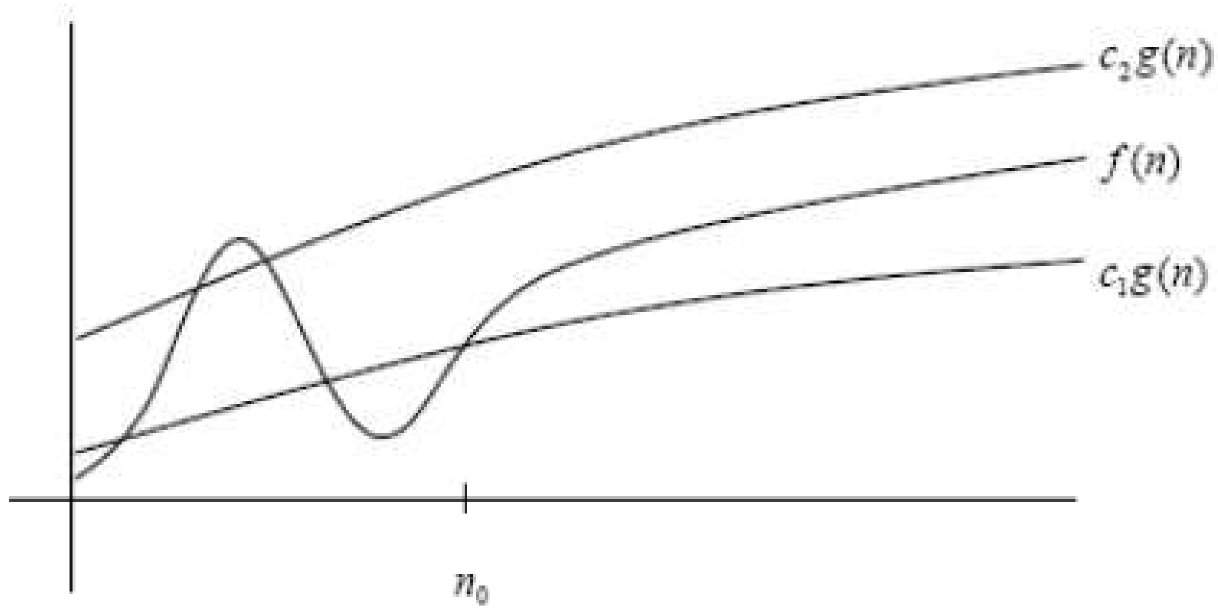
$$\leftrightarrow \; \mathcal{T}(n) = O(h(n)) \text{ y } \mathcal{T}(n) = \Omega(h(n))$$

Se lee: T(n) es theta de h(n)

T(n) y h(n) tienen la misma tasa de crecimiento

Theta

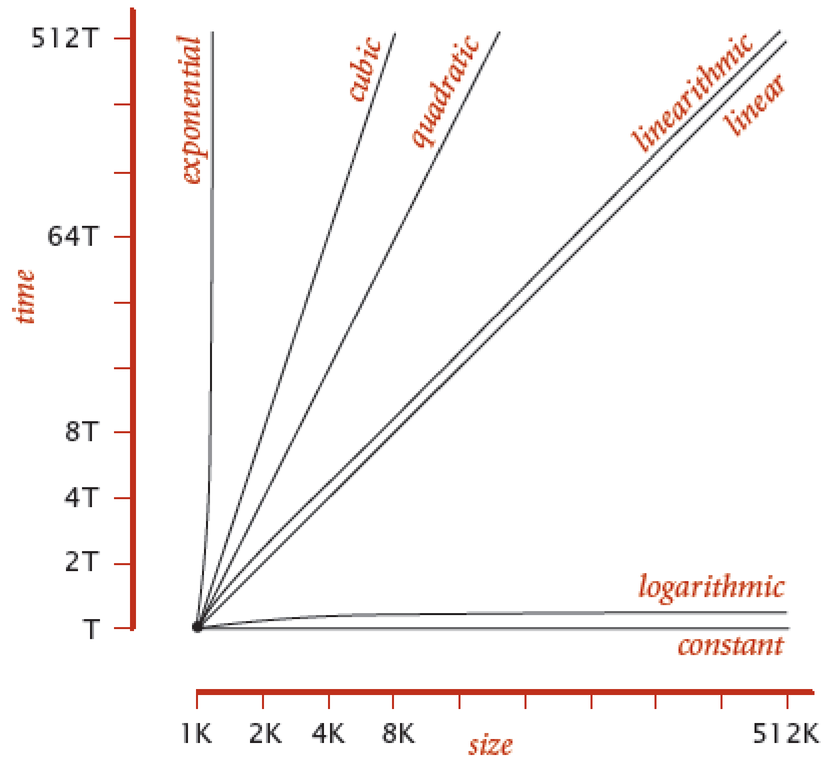
Geométricamente $f(n) = \Theta(g(n))$ es:



Algunas funciones

Ordenadas en forma creciente	Nombre
1	Constante
log n	Logaritmo
n	Lineal
n log n	n Log n
$\mathbf{n^2}$	Cuadrática
$\mathbf{n^3}$	Cúbica
$\mathbf{c^n \quad c>1}$	Exponencial

Algunas funciones



Este conjunto de funciones en general es suficiente para describir la tasa de crecimiento de los algoritmos típicos

Cuadro comparativo del tiempo para diferentes funciones

Costo		$n=10^3$	Tiempo	$n=10^6$	Tiempo
Logarítmico	$\log_2(n)$	10	10 segundos	20	20 segundos
Lineal	n	10^3	16 minutos	10^6	11 días
Cuadrático	n^2	10^6	11 días	10^{12}	30.000 años

Orden de ejecución del algoritmo

Cantidad de operaciones

Tiempo total del algoritmo

$n = 10^3$

Cantidad de operaciones

Tiempo total del algoritmo

$n = 10^6$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Estructuras de Control

- Secuencia
- Condicional :
  - *if /else*
  - *switch*
- Iteración :
  - *for*
  - *while*
  - *do-while*

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Condicional :

a) ***if*** *(boolean expression) {*

```
if (boolean expression) {
    statement(s)
}
```

b)

```
if (boolean expression) {
    statement(s)
} else {
    statement(s)
}
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Condicional :

c) ***switch*** *(integer expession) {*

  case *integer expression : statement(s) ; **break**;*

  ...

  case *integer expression : statement(s) ; **break**;*

  default *: statement(s) ; **break**;*

}

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración :

a) ***for** (initialization; termination; increment) {*

statement(s)

}

b) ***while** (boolean expression) {*

statement(s)

}

c) ***do** {*

statement(s)

*} **while** (boolean expression);*

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- **Iteración :**

a) *For*

Viene como parámetro

```
int sum = 0;
int [] a = new int [n];
for (int i =1; i<= n ; i++ )
     sum += a[i];
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} cte_2 =$$

$$= cte_1 + n * cte_2$$

$$\Rightarrow O(n)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

a) *For*

Viene como parámetro

```
int sum = 0;
int [] a = new int [n][n];
for (int i =1; i<= n ; i++) {
  for (int j =1; j<= n ; j++)
     sum += a[i][j];
}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cte_2 =$$

$$= cte_1 + n*n*cte_2$$

$$\Rightarrow O(n^2)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

a) ***For***

Viene como parámetro

```
int [] a = new int [n];
int [] s = new int [n];
for ( int i =1; i<= n ; i++ )
        s[i] = 0;
for ( int i =1; i<= n ; i++) {
  for (int j =1; j<= i ; j++)
        s[i] += a[j];
}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} cte_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} cte_3 =$$

$$= cte_1 + n * cte_2 +$$

$$cte_3 * \sum_{i=1}^{n} i = \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow O(n^2)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración :

b) ***While***

```
int x= 0;
int i = 1;
while ( i <= n) {
        x = x + 1;
        i = i + 2;
}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} cte_2 =$$

$$= \quad cte_1 + cte_2/2 * (n+1)$$

$$\Rightarrow O(n)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración :

b) *While*

int x= 1;

while (x < n)

*x = 2 *x;*

$$T(n) = cte_1 + cte_2 * \log(n)$$

$$\Rightarrow O(\log(n))$$

Problema

Considerando que un algoritmo requiere *f(n)* operaciones para resolver un problema y la computadora procesa 100 operaciones por segundo.

Si *f(n)* es:

a.- $\log_{10} n$

b.- $\sqrt{n}$

Determine el tiempo en segundos requerido por el algoritmo para resolver un problema de tamaño n=10000.

Problema

Suponga que Ud. tiene un algoritmo ALGO-1 con un tiempo de ejecución exacto de $10n^2$. ¿En cuánto se hace más lento ALGO-1 cuando el tamaño de la entrada *n* aumenta:……….?

a.- El doble

b.- El triple

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo:

```
private void imparesyypares(int n){
 int x=0; int y=0;

 for (int i=1;i<=n;i++)
      if (esImpar(i))
           for (int j=i;j<=n;j++)
                x++;
      else
           for (int j=1;j<=i;j++)
                y++;

}
```

```
public boolean esImpar(int unNumero){
      if (unNumero%2 != 0)
        return true;
      else
        return false;
 }
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo (cont.):

Desarrollo de la función T(n) del método *imparesypares*

- Asumiendo valor de "n" par.
- El método ***esImpar*** tiene todas sentencias constantes

$$T_{esImpar}(n) = cte1$$

- El método ***imparesypares*** tiene un loop en el que: en cada iteración se llama al método ***esImpar*** y la mitad de las veces se ejecuta uno de los *for* (para valores de "i" impares) y la mitad restante el otro *for* (para valores de "i" pares)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} cte1 + \sum_{i=1}^{n[\,paso\,2\,]} \left(\sum_{j=i}^{n} cte2 + \sum_{j=1}^{i+1} cte2 \right)$$

Valores pares dados por el siguiente a los impares "*i*"

Es la llamada al método ***esImpar,*** que se ejecuta para todos los valores de "*i*"

Valores de "*i*" impares

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo (cont.):

Desarrollo de la función T(n) del método *imparesypares*

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} cte1 + \sum_{i=1}^{n/2} \Big(\sum_{j=2*i-1}^{n} cte2 + \sum_{j=1}^{2*i} cte2 \Big)$$

Como "*i*" ahora toma valores consecutivos entre 1 y n/2, entonces se hace un cambio de variable para seguir tomándose valores impares y pares en cada loop

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo (cont.):

Resolviendo la función T(n)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} cte1 + \sum_{i=1}^{n/2} \Big(\sum_{j=2*i-1}^{n} cte2 + \sum_{j=1}^{2*i} cte2 \Big)$$

$$T(n) = cte1 * n + \sum_{i=1}^{n/2} cte2 * (n - 2 * i + 1 + 1 + 2 * i - 1 + 1) =$$

$$= cte1 * n + cte2 * (n + 2) * n / 2$$

$$= cte1 * n + cte2 / 2 * n^2 + cte2 * n$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Ejercicio

```
private int ejercicio3(int n) {
  int p=0; int j=1;

  for (int i=1; i<=n; i++)
        if (esImpar(i))
             j:=j*2;
        else
             for (int k=1; k<=j; k++)
                   p:= p+1;
  return p;
}
```

```
public boolean esImpar(int unNumero){
     if (unNumero%2 != 0)
       return true;
     else
       return false;
}
```

Ejercicio

```
0       i = 0; j =0;
1       while(i<1000)
2               for( int k = i; k <= n; k++ ) {
3                   i++;
3                   j++; }
5       for( int p = 0; p < n*n; p++ )
6               for( int q = 0; q < p; q++ )
7                   j–;
```

1. ¿Con qué valor termina la variable i ?

2. ¿Cuántas veces se ejecuta la sentencia 3?

   a. O(n)
   b. O(n^2)
   c. O(n^3)
   d. O(n^4)
   e. Ninguna de las anteriores

Cálculo del Tiempo de Ejecución Algoritmos Recursivos

```
/**
Calcula el Factorial.
*/
 public static int factorial( int n )   {
     if (n == 1)
                    return 1;
     else       return   n * factorial( n - 1 );
 }
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Factorial (n)

$$T(n) = \begin{cases} cte_1 & n = 1 \\ cte_2 + T(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Factorial (n) - Desarrollo de la recurrencia

$$T(n) = \underbrace{T(n-1)}_{T(n-2) + cte_2} + cte_2 \qquad n > 1$$

$$\underbrace{T(n-2)}_{T(n-3) + cte_2} + cte_2$$

$$\underbrace{T(n-3)}_{T(n-4) + cte_2} + cte_2$$

$$T(n-4) + cte_2$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Factorial (n) - Desarrollo de la recurrencia

$T(n) = T(n - 1) + cte_2 = (T(n - 2) + cte_2) + cte_2 =$

$= T(n - 2) + 2\ cte_2 = (T(n - 3) + cte_2) + 2\ cte_2 =$

$= T(n - 3) + 3\ cte_2 = \ldots\ldots\ldots$

Paso i:

$T(n) = T(n - i) + i * cte_2$

El desarrollo va terminar en el caso base de la recurrencia, cuando **n-i = 1**

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Factorial (n) - Desarrollo de la recurrencia

$T(n) = T(n - i) + i * \text{cte}_2$

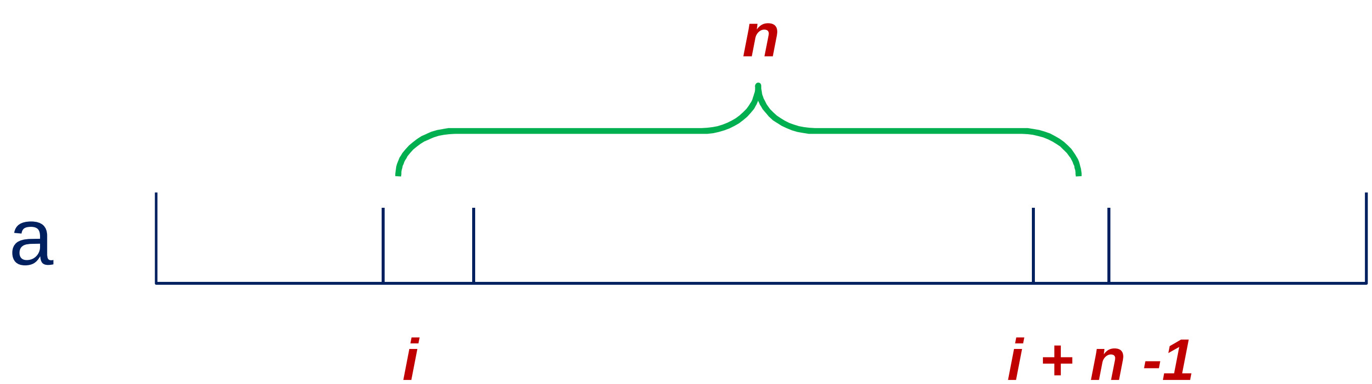
Cuando **n-i = 1** $\longrightarrow$ **i = n -1**, reemplazamos **i** en la expresión de T(n)

$$T(n) = \underbrace{T(n - (n-1))}_{T(1) = \text{cte}_1} + (n-1) * \text{cte}_2 = \text{cte}_1 + (n-1) * \text{cte}_2 = O(n)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución Algoritmos Recursivos

- Ejemplo :

Encontrar el máximo elemento en un arreglo de enteros tomando n posiciones a partir de la posición i



Cálculo del Tiempo de Ejecución Algoritmos Recursivos

```
/**  Calcula el Máximo en un arreglo.     */
 public static int max( int [] a, int i, int n )     {
   int m1; int m2;
   if (n == 1)
                  return a[i];
    else {    m1 = max (a, i, n/2);
              m2 = max (a, i + (n/2), n/2);
              if (m1<m2)
                     return m2;
                     else   return m1;
           }
 }
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Máximo en un arreglo

$$T(n) = \begin{cases} cte_1 & n = 1 \\ 2 * T(n/2) + cte_2 & n > 1 \end{cases}$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Máximo en un arreglo – Desarrollo de la recurrencia

$$T(n) = 2 * T(n/2) + \mathrm{cte}_2 \qquad n > 1$$

$$2 * T(n/4) + \mathrm{cte}_2$$

$$2 * T(n/8) + \mathrm{cte}_2$$

$$2 * T(n/16) + \mathrm{cte}_2$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Máximo en un arreglo – Desarrollo de la recurrencia

$T(n) = 2 * T(n/2) + \text{cte}_2 = 2 * [2 * T(n/4) + \text{cte}_2] + \text{cte}_2 =$

$= 4 * T(n/4) + 3\ \text{cte}_2 = 4 * [2 * T(n/8) + \text{cte}_2] + 3\ \text{cte}_2 =$

$= 8 * T(n/8) + 7\ \text{cte}_2 = 8 * [2 * T(n/16) + \text{cte}_2] + 7\ \text{cte}_2 =$

$= 16 * T(n/16) + 15\ \text{cte}_2 = \ldots\ldots..$

Paso i:

$T(n) = 2^i * T(n/2^i) + (2^i – 1) * \text{cte}_2$

El desarrollo va terminar en el caso base de la recurrencia, cuando **$n/2^i = 1$**

Cálculo del Tiempo de Ejecución
Función de recurrencia

Máximo en un arreglo – Desarrollo de la recurrencia

$$T(n) = 2^i * T(n/2^i) + (2^i - 1) * \text{cte}_2$$

Cuando **$n/2^i = 1$** $\longrightarrow$ **$n = 2^i$** $\longrightarrow$ **$i = \log_2 n$,**
reemplazamos **i** en la expresión de T(n)

$$T(n) = n * \underbrace{T(n/n)}_{T(1) = \text{cte}_1} + (n - 1) * \text{cte}_2 = n * \text{cte}_1 + (n - 1) * \text{cte}_2 = O(n)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Algoritmos recursivos vs. iterativos

Números de Fibonacci – Introducción

Describir el Problema de los Conejos

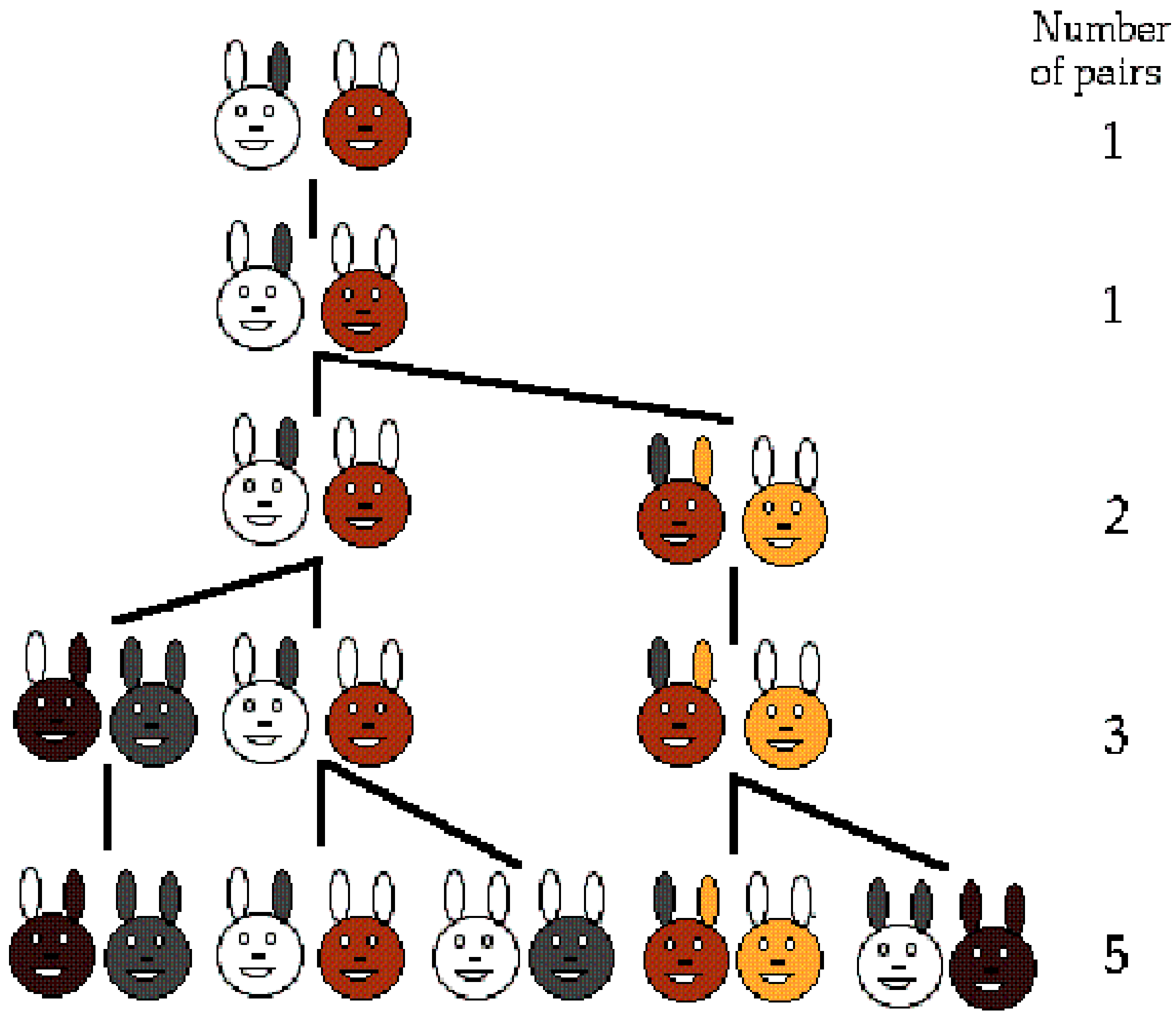
El ejercicio de Fibonacci (1202) pregunta cuántas parejas de conejos habrá en una granja luego de 12 meses, si se coloca inicialmente una sola pareja y se parte de las siguientes premisas:

1. Los conejos alcanzan la madurez sexual a la edad de un mes.
2. En cuanto alcanzan la madurez sexual los conejos se aparean y siempre resulta preñada la hembra.
3. El periodo de gestación de los conejos es de un mes.
4. Los conejos no mueren.
5. La hembra siempre da a luz una pareja de conejos de sexos opuestos.
6. Los conejos tienen una moral y un instinto de variedad genética muy relajados y se aparean entre parientes.

El proceso de crecimiento de la población de conejos es mejor descrito con la siguiente ilustración.

Números de Fibonacci – Introducción

Problema de los Conejos



Números de Fibonacci – Introducción

Problema de los Conejos

Como se puede observar el número de parejas de conejos por mes está determinado por la sucesión de Fibonacci. Así que la respuesta al ejercicio del *Liber Abaci (libro acerca del Ábaco)*, acerca de cuántas parejas de conejos habrá luego de un año, resulta ser el doceavo término de la sucesión: 144.

Números de Fibonacci – versión recursiva

```
/**     Cálculo de los números de Fibonacci
    */

   public static int fib( int n )
    {
        if (n <= 1)
              return 1;
         else
              return fib( n - 1 ) + fib( n - 2 );
     }
   /* End */
```

Números de Fibonacci – versión iterativa

```
/**     Cálculo de los números de Fibonacci              */

    public static int fibonacci( int n )     {
         if (n <= 1)
                   return 1;

         int ultimo = 1;
         int anteUltimo = 1;
         int resul= 1;
         for( int i = 2; i <= n; i++ )
           {
              resul = ultimo + anteUltimo;
              anteUltimo = ultimo;
              ultimo = resul;
            }
         return resul;
    }
```

Ejercicio de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} cte_1 & n = 1 \\ 2 * T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

Ejercicio recursivo para analizar

```
private int recursivo(int n) {
  final int m=....;
  int suma;

  if (n <= 1)
        return (1);
  else {
         suma=0;
         for (int i=1; i<=m; i++)
            suma=suma + i;
         for (i=1; i<=m; i++)
            suma=suma + recursivo(n-1);
         return suma;
       }
}
```

Función de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} cte_1 & n <= 1 \\ cte_2 + m + m^* \, T(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

Optimizando algoritmos

Problema: encontrar el valor de la suma de la sub-secuencia de suma máxima

Problema de la subsecuencia de suma máxima

Dada una secuencia de números enteros, algunos negativos:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$$

encontrar el valor máximo de la $\sum_{k=i}^{j} a_k$

Por convención, la suma es cero cuando todos los enteros son negativos.

Ej.: $-2, \underbrace{11, -4, 13}, -5, -2$ la respuesta es 20

Suma de la sub-secuencia de suma máxima

Versión 1 : O(n^3)

```
public final class MaxSumTest
{
  /* Cubic maximum contiguous subsequence sum algorithm.
    */
   public static int maxSubSum1( int [ ] a )
     {
     int maxSum = 0;
     for( int i = 0; i < a.length; i++ )
          for( int j = i; j < a.length; j++ )
               {
                 int thisSum = 0;
                 for( int k = i; k <= j; k++ )
                       thisSum += a[ k ];
                 if( thisSum > maxSum )
                     maxSum   = thisSum;
              }
        return maxSum;
     } /* END */
```

Suma de la sub-secuencia de suma máxima

Versión 2 : $O(n^2)$

```
public final class MaxSumTest
{
  /* Quadratic maximum contiguous subsequence sum algorithm.
   */
   public static int maxSubSum1( int [ ] a )
     {
     int maxSum = 0;
     for( int i = 0; i < a.length; i++ )
          for( int j = i; j < a.length; j++ )
              {

                int thisSum = 0;
              for( int k = i; k <= j; k++ )
                   thisSum += a[ k ];
              if( thisSum > maxSum )
                      maxSum   = thisSum;
             }
         return maxSum;
        } /* END */
```

int thisSum = 0;

thisSum += a[j];

Suma de la sub-secuencia de suma máxima
Versión 2 : O(n^2)

```
 public final class MaxSumTest
{
  /* Quadratic maximum contiguous subsequence sum
     algorithm.   */
     public static int maxSubSum2( int [ ] a )
     {
     int maxSum = 0;
     for( int i = 0; i < a.length; i++ )
             int thisSum = 0;
             for( int j = i; j < a.length; j++ )
               {
                 thisSum += a[ j ];
                 if( thisSum > maxSum )
                     maxSum   = thisSum;
             }
          return maxSum;
} /* END */
```

Suma de la sub-secuencia de suma máxima
Versión 3 : O(n*log n)

/** Solución recursiva:
  * Explicar la resolución detallada y graficamente   */

Suma de la sub-secuencia de suma máxima
Versión 3 : O(n*log n)

```
/** Recursive maximum contiguous subsequence sum algorithm.
  * Finds maximum sum in subarray spanning a[left..right].
 * Does not attempt to maintain actual best sequence.        */
private static int maxSumRec( int [ ] a, int left, int right )
{
        if( left == right )  // Base case
          if( a[ left ] > 0 )
              return a[ left ];
         else
              return 0;
        int center = ( left + right ) / 2;
        int maxLeftSum  = maxSumRec( a, left, center );
        int maxRightSum = maxSumRec( a, center + 1, right );
```

Suma de la sub-secuencia de suma máxima
Versión 3 : O(n*log n)

```
    int maxLeftBorderSum = 0, leftBorderSum = 0;
    for( int i = center; i >= left; i-- )
{
    leftBorderSum += a[ i ];
    if( leftBorderSum > maxLeftBorderSum )
    maxLeftBorderSum = leftBorderSum;
 }
    int maxRightBorderSum = 0, rightBorderSum = 0;
    for( int i = center + 1; i <= right; i++ )
 {
     rightBorderSum += a[ i ];
     if( rightBorderSum > maxRightBorderSum )
             maxRightBorderSum = rightBorderSum;
      }
```

Suma de la sub-secuencia de suma máxima
Versión 3 : O(n*log n)

```
        return max3( maxLeftSum, maxRightSum,
                     maxLeftBorderSum + maxRightBorderSum );
        }

 /**
   * Driver for divide-and-conquer maximum contiguous
   * subsequence sum algorithm.        */
public static int maxSubSum3( int [ ] a )  {
    return maxSumRec( a, 0, a.length - 1 );
}
        /* END */

      /**        * Return maximum of three integers.        */
  private static int max3( int a, int b, int c )   {
     return a > b ? a > c ? a : c : b > c ? b : c;
  }
```

Versión 3 : Función de Tiempo de Ejecución

$$T(n) = \begin{cases} \mathrm{cte}_1 & n = 1 \\ 2 * T(n/2) + n + \mathrm{cte}_2 & n > 1 \end{cases}$$

2 llamadas recursivas

Buscar la sub-secuencia de suma máxima de cada mitad que incluye los elementos centrales

Suma de la sub-secuencia de suma máxima
Versión 4 : O(n)

```
/**   Linear-time maximum contiguous subsequence sum
       algorithm.   */
  public static int maxSubSum4( int [ ] a )
  {
          int maxSum = 0, thisSum = 0;
          for( int j = 0; j < a.length; j++ )
          {
          thisSum += a[ j ];
          if( thisSum > maxSum )
              maxSum = thisSum;
             else if( thisSum < 0 )
            thisSum = 0;
          }
          return maxSum;
  }
/* END */
```