Algoritmos
y
Estructuras de Datos

Cursada 2016
Redictado

Prof. Alejandra Schiavoni
Prof. Catalina Mostaccio

Facultad de Informática – UNLP

GRAFOS

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos

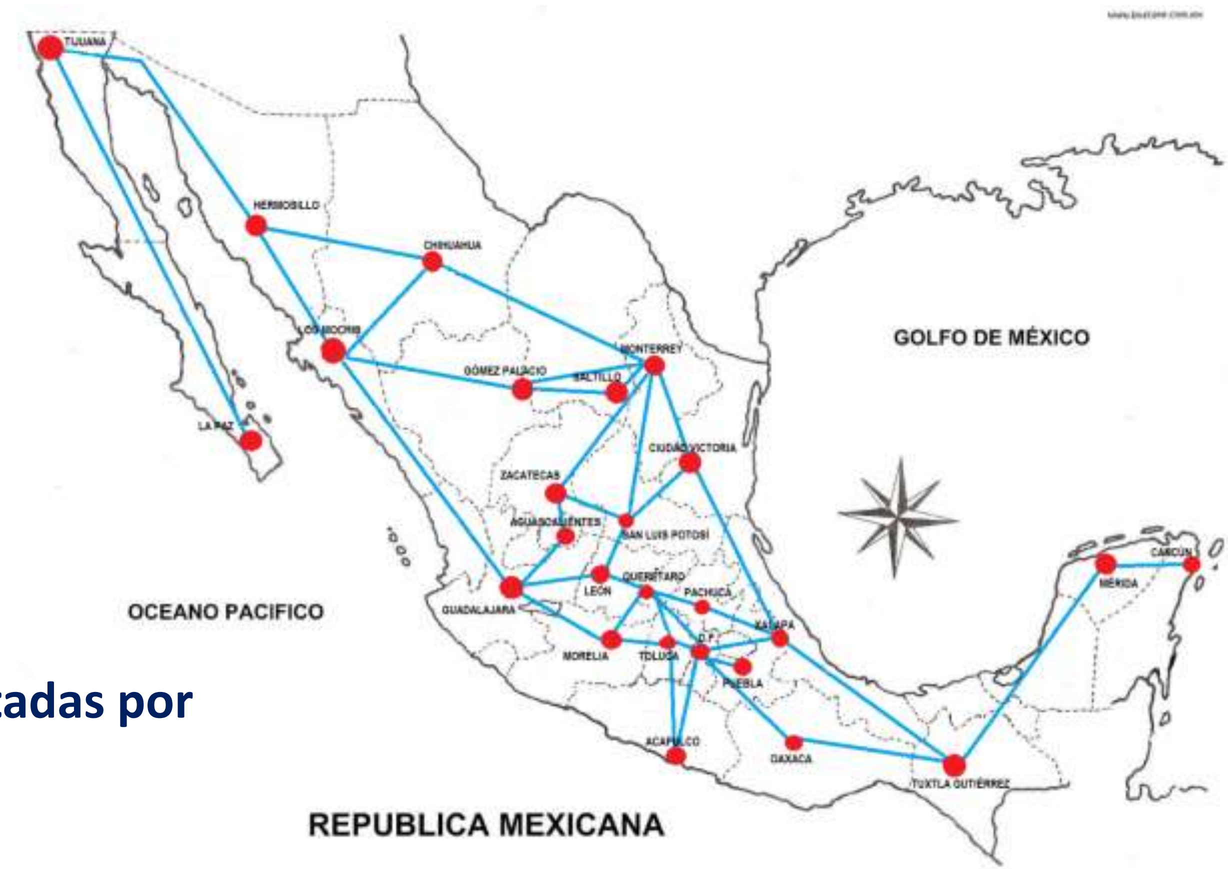
Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología

2. Representaciones

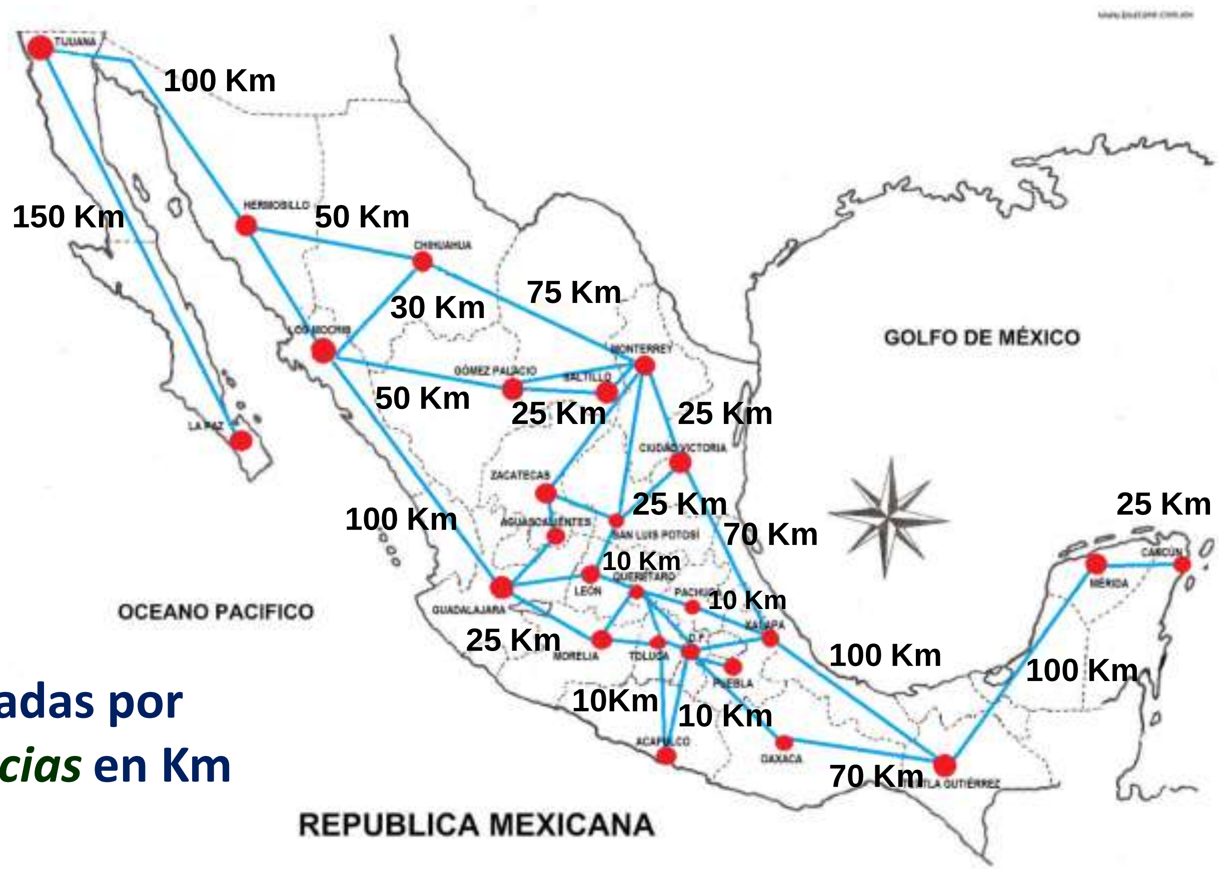
3. Recorridos

Ejemplo 1: Mapa de ciudades



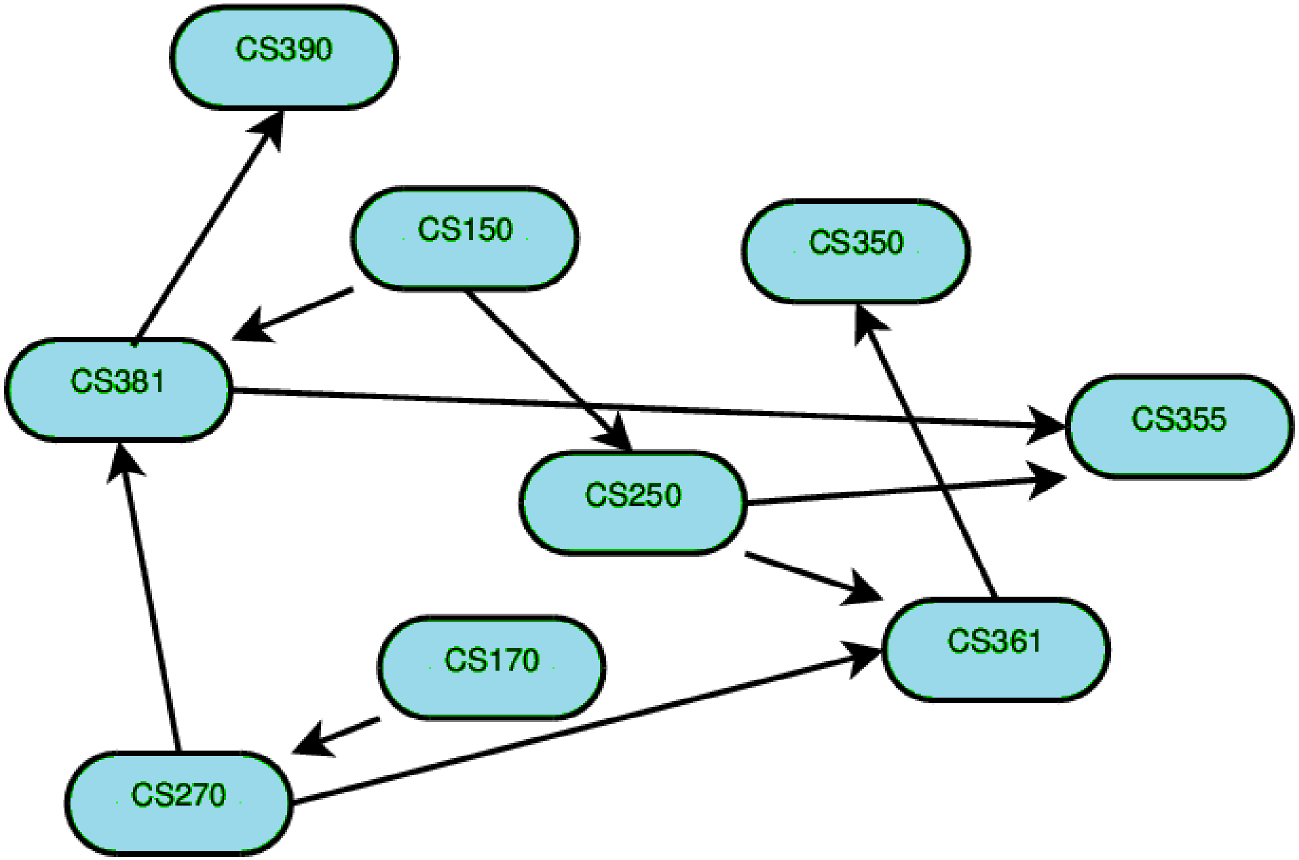
Ciudades conectadas por *Rutas*

Ejemplo 2: Mapa de ciudades



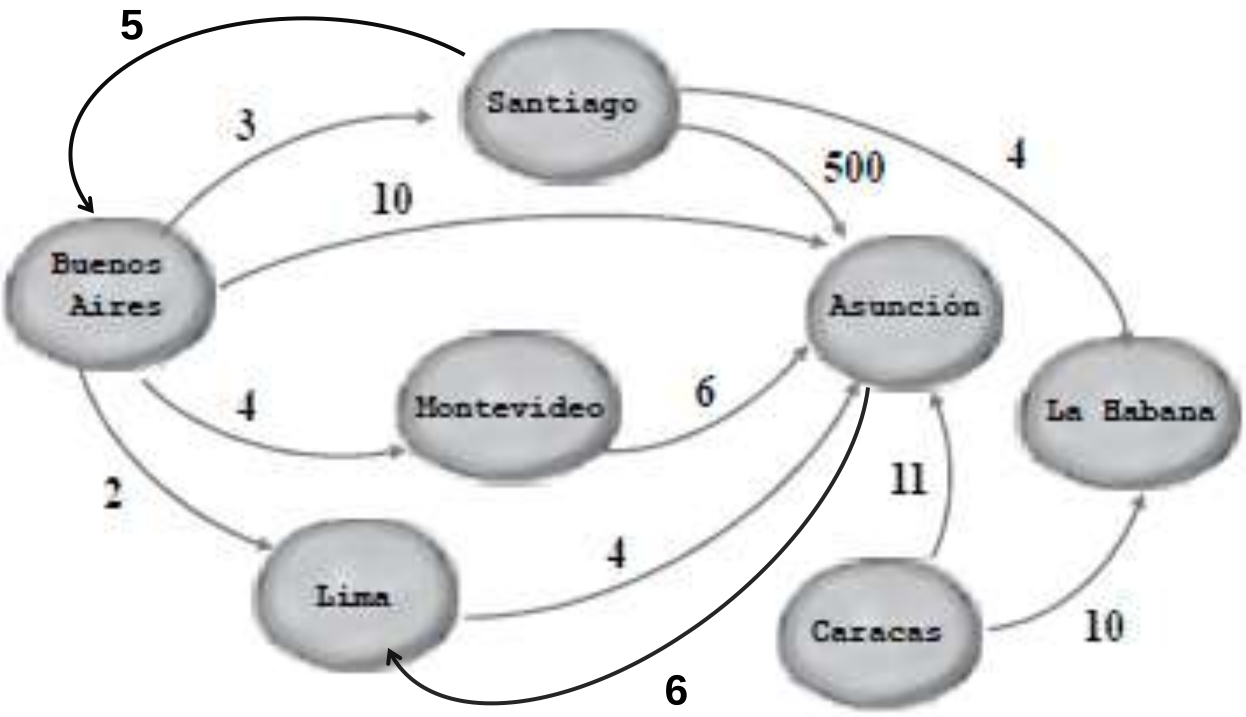
Ciudades conectadas por
Rutas con *distancias* en Km

Ejemplo 3: Prerrequisitos de un curso



Cursos conectados por sus correlativas
(*relación* de "prerrequisito")

Ejemplo 4: Mapa de rutas áreas entre ciudades



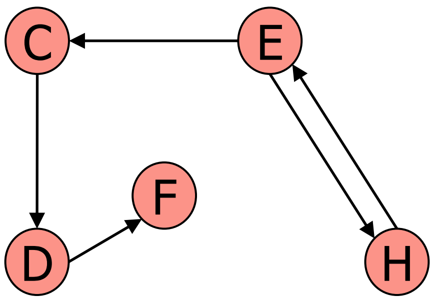
Ciudades conectadas por *Rutas áreas* con sus respectivos *tiempos de vuelo*

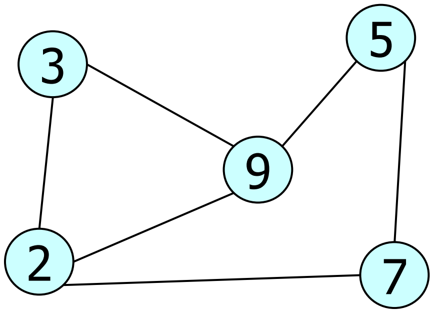
Terminología

- *Grafo→ modelo para representar relaciones entre elementos de un conjunto.*
- ***Grafo**: (V,E), V es un conjunto de vértices o nodos, con una relación entre ellos; E es un conjunto de pares (u,v), u,v Є V , llamados aristas o arcos.*
- ***Grafo dirigido**: la relación sobre V no es simétrica. Arista ≡ par ordenado (u,v). (Ejemplo 3)*
- ***Grafo no dirigido**: la relación sobre V es simétrica. Arista ≡ par no ordenado {u,v}, u,v Є V y u ≠ v. (Ejemplos 1 y 2)*

Terminología (cont. 1)

Ejemplos





Grafo dirigido G(V,E).

V = {C,D,E,F,H}

E={(C,D),(D,F),(E,C),(E,H),
(H,E)}

Grafo no dirigido G(V,E).

V = {2,3,5,7,9}

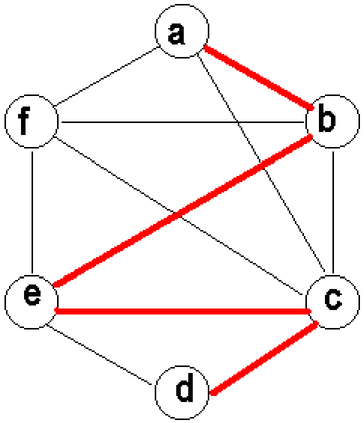
E= {{2,3},{2,7},{2,9},{3,9},
{5,7},{5,9}}

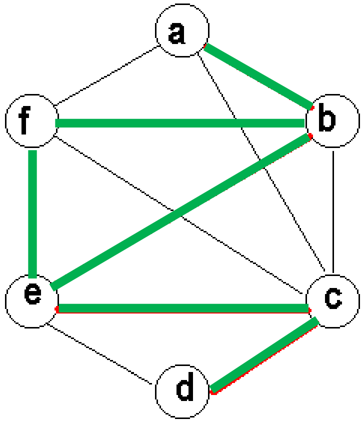
Terminología (cont. 2)

- *v es* ***adyacente*** *a u si existe una arista (u,v) Є E.*
  - *en un grafo no dirigido, (u,v) Є E* ***incide*** *en los nodos u, v.*
  - *en un grafo dirigido, (u,v) Є E* ***incide*** *en v, y* ***parte*** *de u.*
- *En grafos no dirigidos:*
  - *El* ***grado*** *de un nodo: número de arcos que inciden en él.*
- *En grafos dirigidos:*
  - *existen el grado de salida (****grado_out****) y el grado de entrada (****grado_in****).*
    - *el* ***grado_out*** *es el número de arcos que parten de él y*
    - *el* ***grado_in*** *es el número de arcos que inciden en él.*
  - *El* ***grado*** *del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.*
- ***Grado de un grafo****: máximo grado de sus vértices.*

Terminología (cont. 3)

- ***Camino*** *desde u Є V a v Є V : secuencia* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *tal que* $u=v_1$, $v=v_k$, *y* (v_{i-1},v_i) *Є E, para* $i = 2, \ldots, k$.
  Ej: camino desde ***a*** *a* ***d*** *→ <a,b,e,c, d>.*

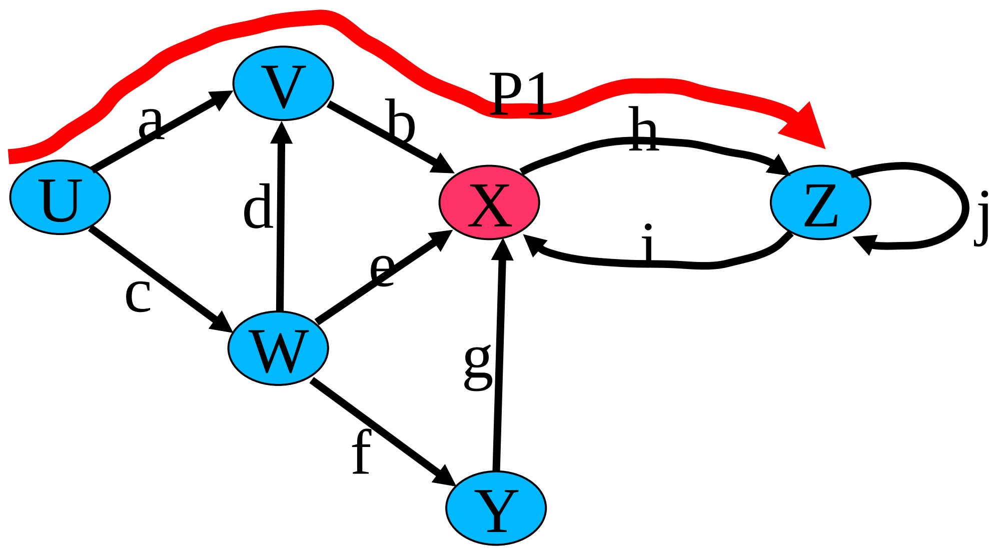




- ***Longitud de un camino****: número de arcos del camino.*
  Ejs: long. del camino desde ***a*** *a* ***d*** *→ <a,b,e,c,d> es 4. (a)*
  long. del camino desde ***a*** *a* ***d*** *→ <a,b,e,f,b,e,c,d> es 7. (b)*

Terminología (cont. 4)

- ***Camino simple***: *camino en el que todos sus vértices, excepto, tal vez, el primero y el último, son distintos. P1 es un camino simple desde U a Z.*

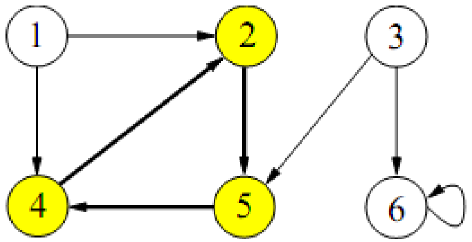


Ejemplos anteriores: (a) es camino simple , (b) no lo es.

Terminología (cont. 5)

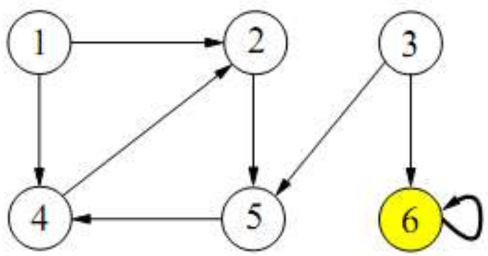
- ***Ciclo***: *camino desde v_1, v_2, ... , v_k tal que $v_1=v_k$*

  Ej: <2,5,4,2> es un ciclo de longitud 3.

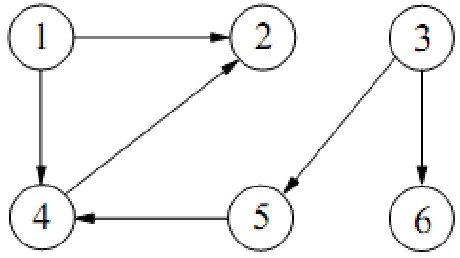


  El ciclo es simple si el camino es simple.

- ***Bucle***: *ciclo de longitud 1.*

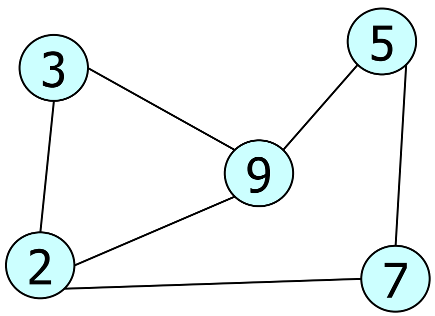


- ***Grafo acíclico***: *grafo sin ciclos.*

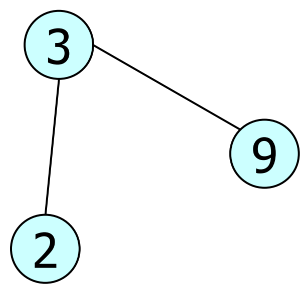


Terminología (cont. 6)

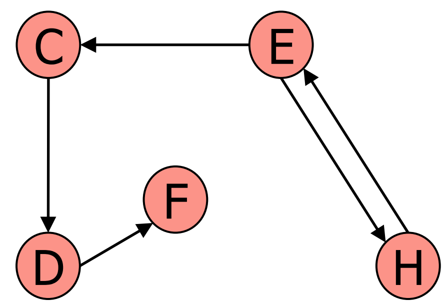
- *Dado un grafo $G=(V, E)$, se dice que $G'=(V', E')$ es un* ***subgrafo*** *de G, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.*



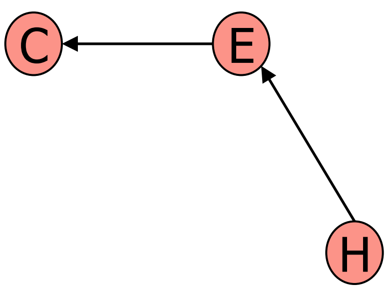
G = (V, E)



G´ = (V´, E´)



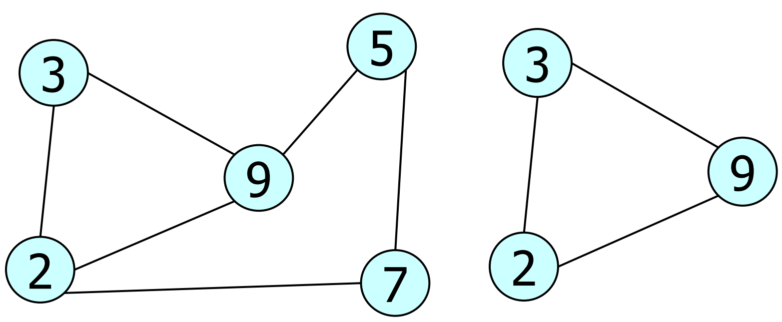
G = (V, E)



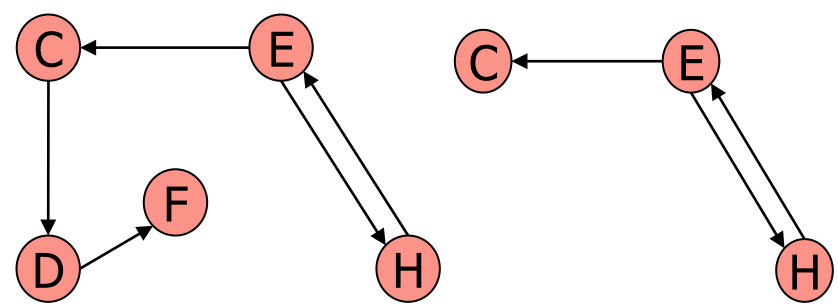
G´ = (V´, E´)

Terminología (cont. 7)

- *Un* ***subgrafo inducido*** *por V' ⊆ V : G' = (V',E') tal que E' = {(u,v) ∈ E | u,v ∈ V'}.*



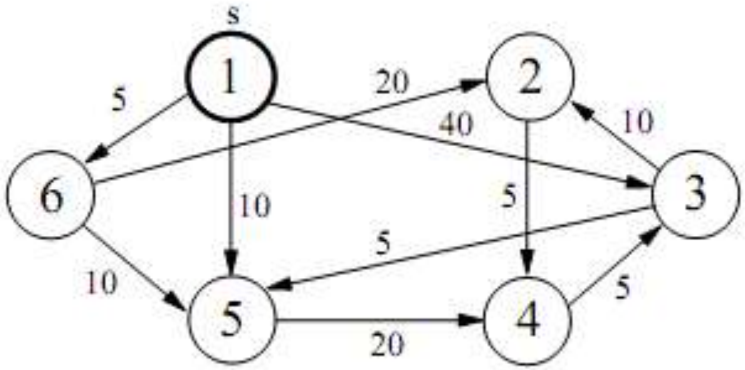
G = (V, E) **G´ = (V´, E´)**



G = (V, E) **G´ = (V´, E´)**

Terminología (cont. 8)

➢ *Un grafo* ***ponderado, pesado o con costos****: cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta.* *(Ejemplos 2 y 4)*



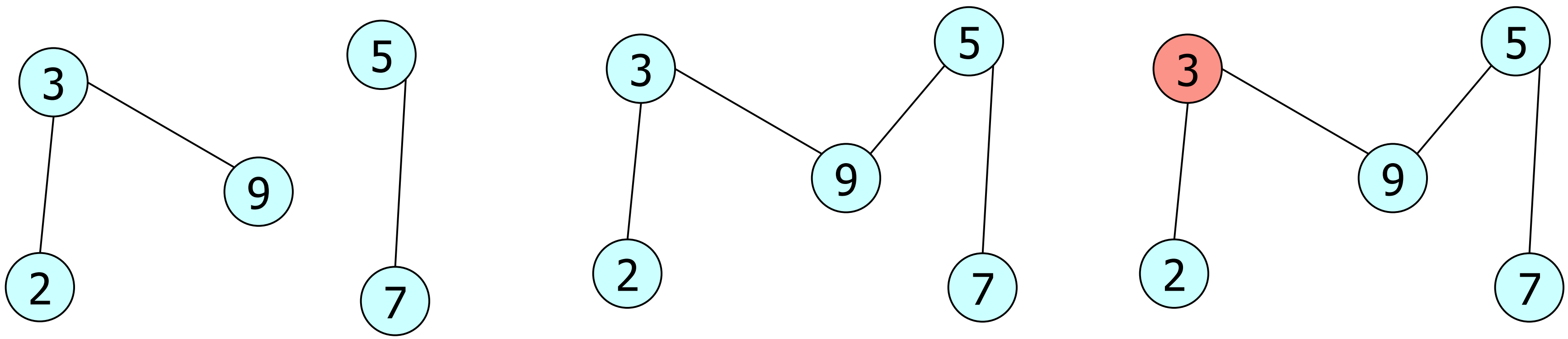
Conectividad en grafos no dirigidos

- *Un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices.*

Conexo **No Conexo**

Conectividad: bosque y árbol

- *Un **bosque** es un grafo sin ciclos.*
- *Un **árbol libre** es un bosque conexo.*
- *Un **árbol** es un árbol libre en el que un nodo se ha designado como raíz.*



Bosque **Árbol libre** **Árbol**

Propiedades

- *Sea G un grafo no dirigido con **n** vértices y **m** arcos, entonces*

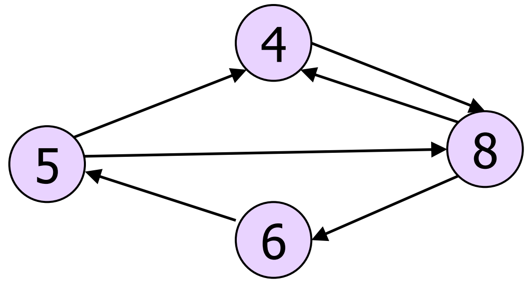
$$\sum_{v \in G} deg(v) = 2*m$$

- ✓ *Siempre:* $m \leq (n*(n-1))/2$

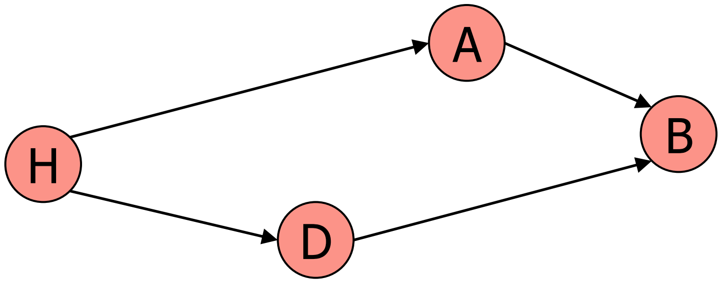
- ✓ *Si G conexo:* $m \geq n-1$
- ✓ *Si G árbol:* $m = n-1$
- ✓ *Si G bosque:* $m \leq n-1$

Conectividad en grafos dirigidos

- *v es **alcanzable desde** u, si existe un camino de u a v.*
- *Un grafo dirigido se denomina **fuertemente conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice*



Fuertemente Conexo



No Fuertemente Conexo
Débilmente Conexo

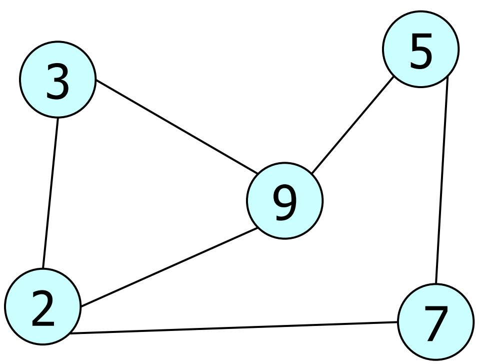
- *Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.*

Componentes conexas

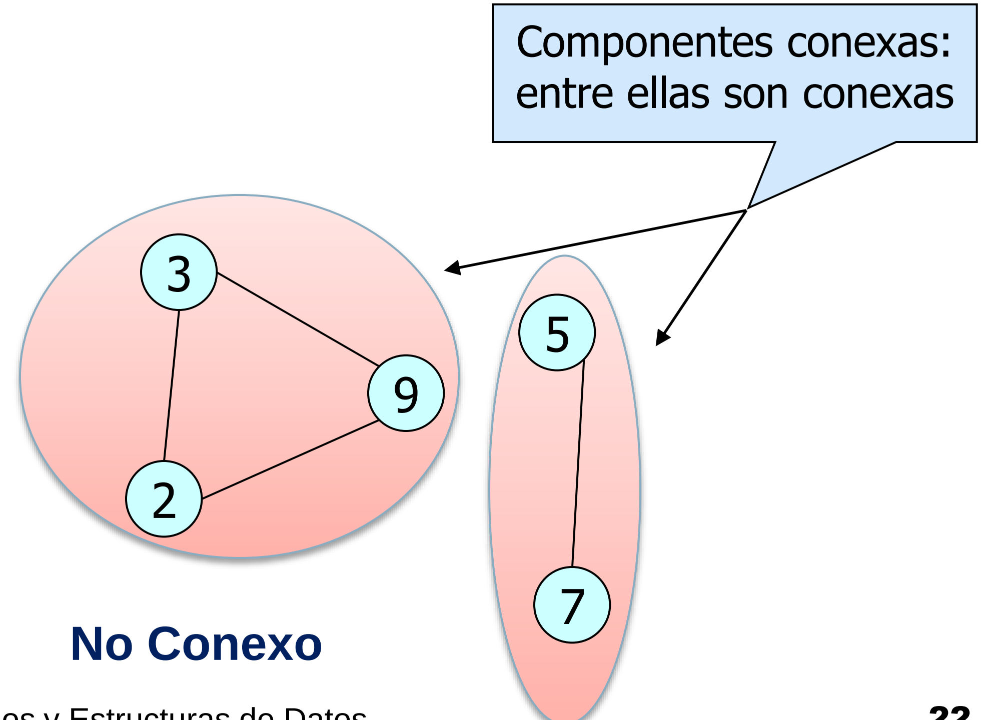
*En un grafo no dirigido, una **componente conexa es un** subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga.*

*Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo

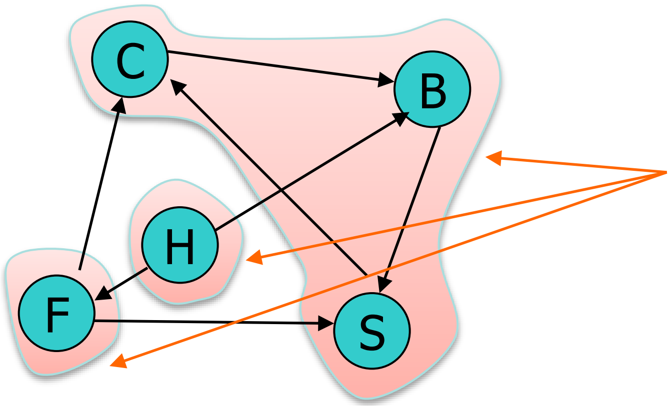


No Conexo

Componentes fuertemente conexas

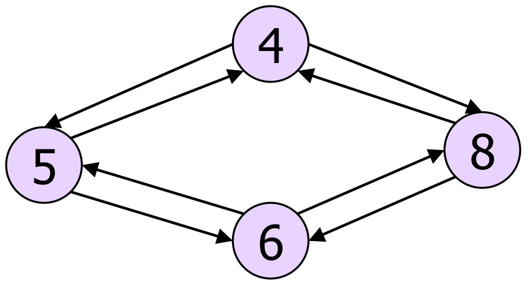
En un grafo dirigido, una ***componente fuertemente conexa****, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

Un grafo dirigido es ***no fuertemente conexo*** *si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



Componentes fuertemente conexas

No Fuertemente Conexo



Fuertemente Conexo

Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología

2. Representaciones

3. Recorridos

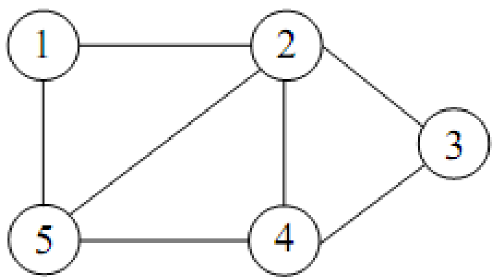
Agenda - Grafos

- Representaciones
  - Matriz de Adyacencias
  - Lista de Adyacencias

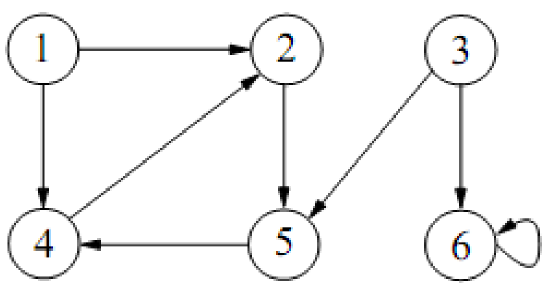
Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *G =(V ,E): matriz A de dimensión |V |×|V |.*
- *Valor a_{ij} de la matriz:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Costo espacial:* $O(|V|^2)$

- *Representación es útil para grafos con número de vértices pequeño, o grafos densos* $(|E| \approx |V| \times |V|)$

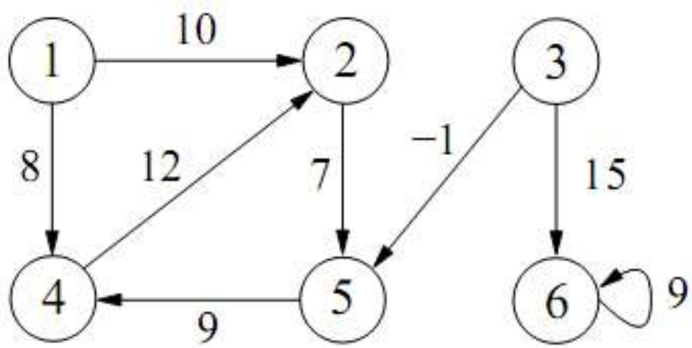
- *Comprobar si una arista* (u,v) *pertenece a* $E \rightarrow$ *consultar posición* $A(u,v)$

  - *Costo de tiempo* $T(|V|,|E|) = O(1)$

Representaciones: Matriz de Adyacencias

- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El peso de (i,j) se almacena en A (i, j)*

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 \; o \; \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

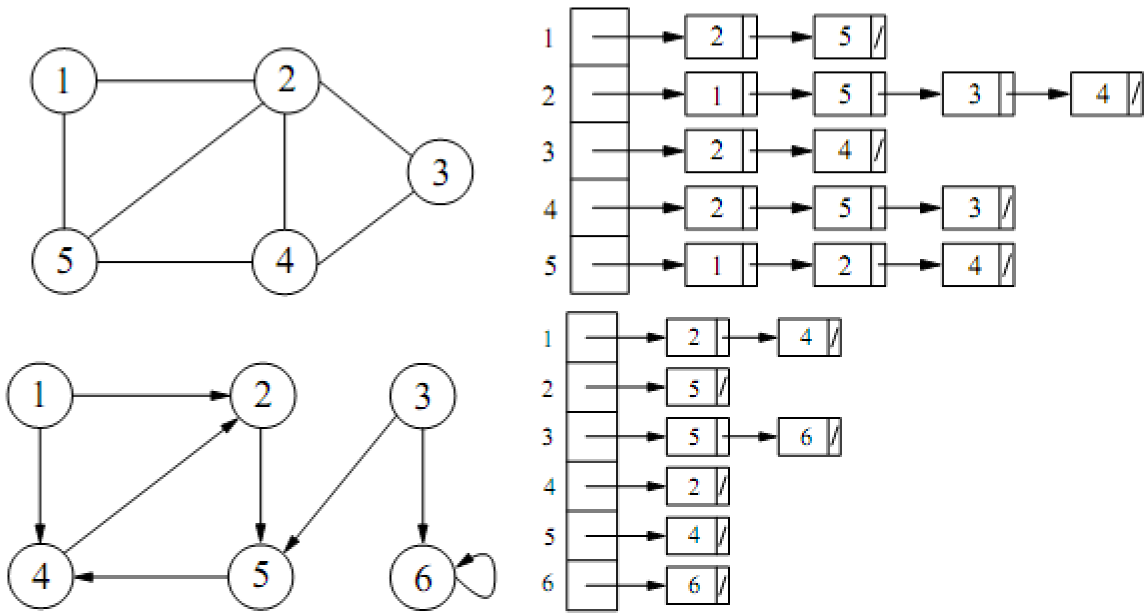


	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	−1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

Representaciones: Lista de Adyacencias

- *G =(V ,E): vector de tamaño |V|.*
- *Posición* ***i*** *→ puntero a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia).*

  Los elementos de la lista son los vértices adyacentes a ***i***

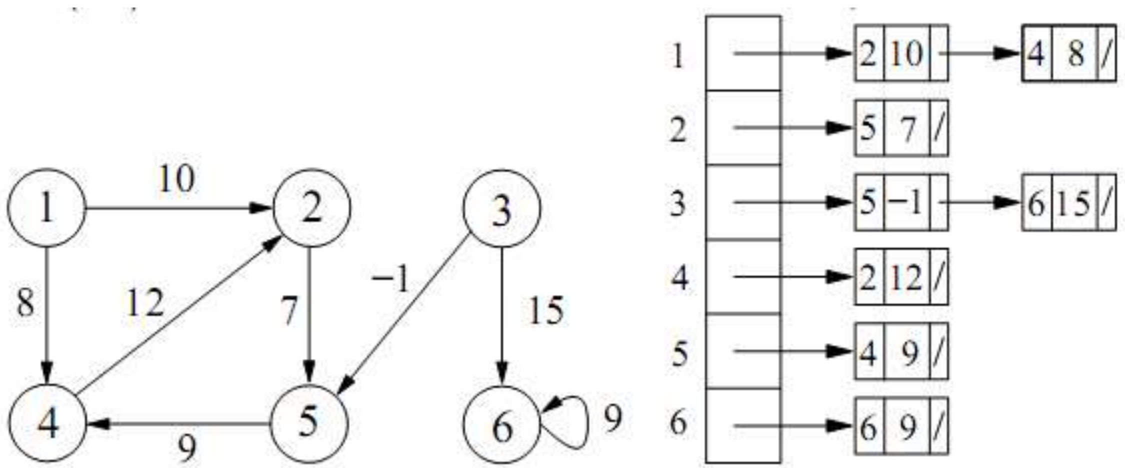


Representaciones: Lista de Adyacencias

- *Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $|E|$.*
- *Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $2|E|$.*
- *Costo espacial, sea dirigido o no: $O(|V|+|E|)$.*
- *Representación apropiada para grafos con $|E|$ menor que $|V|^2$.*
- ***Desventaja**: si se quiere comprobar si una arista (u,v) pertenece a E $\Rightarrow$ buscar **v** en la lista de adyacencia de u.*
    - *Costo temporal $T(|V|,|E|)$ será $O(\text{Grado } G) \subseteq O(|V|)$.*

Representaciones: Lista de Adyacencias

- *Representación aplicada a Grafos pesados*
- *El **peso de (u,v)** se almacena en el nodo de **v** de la lista de adyacencia de **u**.*



Agenda - Grafos

1. Ejemplos y terminología

2. Representaciones

3. Recorridos

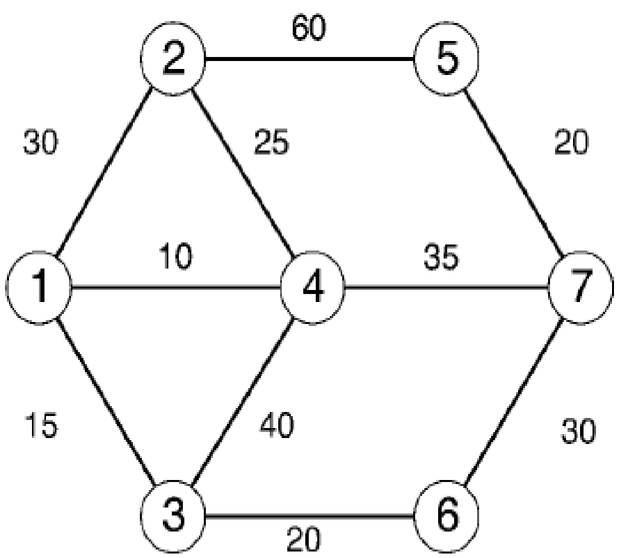
Agenda - Grafos

- Recorridos
  - en profundidad: DFS (Depth First Search)
  - en amplitud: BFS (Breath First Search)
  - Bosque de expansión DFS
  - Aplicaciones

Problema: El Guía de Turismo

El señor H es un guía de turismo de la ciudad de Buenos Aires. Su trabajo consiste en mostrar a grupos de turistas diferentes **puntos de interés** de la ciudad. Estos puntos de interés están **conectados por rutas en ambos sentidos**. Dos puntos de interés vecinos tienen un servicio de bus que los conecta, con una limitación en el **número máximo de pasajeros** que puede transportar. No es siempre posible para el señor H transportar de una única vez a todos los turistas a un destino en particular.

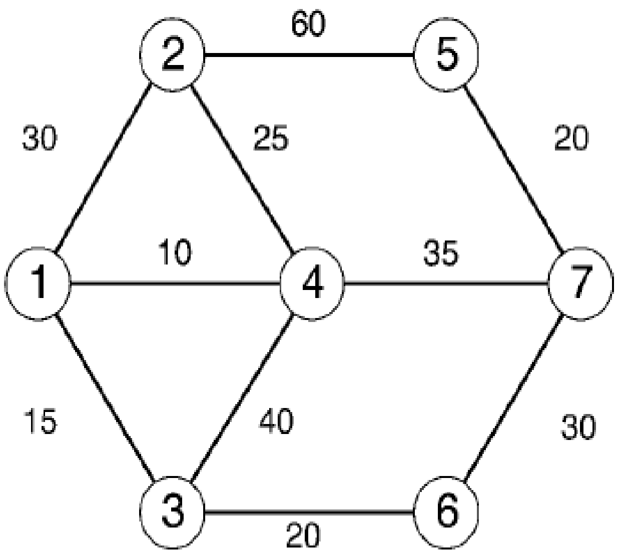
Por ejemplo, consideremos el siguiente mapa con 7 puntos de interés, donde las aristas representan las rutas y el peso de ellas representa el límite máximo de pasajeros a transportar por el servicio de bus. Su misión es indicarle al Sr. H cuál es el menor número de viajes que deberá realizar para llevar al grupo de turistas de un origen a un destino.



*En este ejemplo, el señor H debe transportar a **99 turistas** del punto **1** al punto **7**.*

Veamos cuáles son los recorridos posibles y elijamos el que implique realizar el menor número de viajes.

Problema: El Guía de Turismo



vértices del recorrido	cant. turistas/viaje	cant. de viajes
1 2 4 3 6 7	20	6
1 2 4 7	**25**	**5**
1 2 5 7	20	6
1 3 4 2 5 7	15	8
1 3 4 7	15	8
1 3 6 7	15	8
1 4 2 5 7	10	11
1 4 3 6 7	10	11
1 4 7	10	11

*Entonces, para transportar a los **99 turistas** del punto 1 al punto 7, se necesitarán 5 viajes, eligiendo la ruta:*

1 - 2 - 4 - 7

En cada viaje el servicio de bus puede transportar como máximo a 25 pasajeros, 24 turistas + al señor H, en los cuatro primeros viajes transporta a 96 turistas y en el último a los restantes 3.

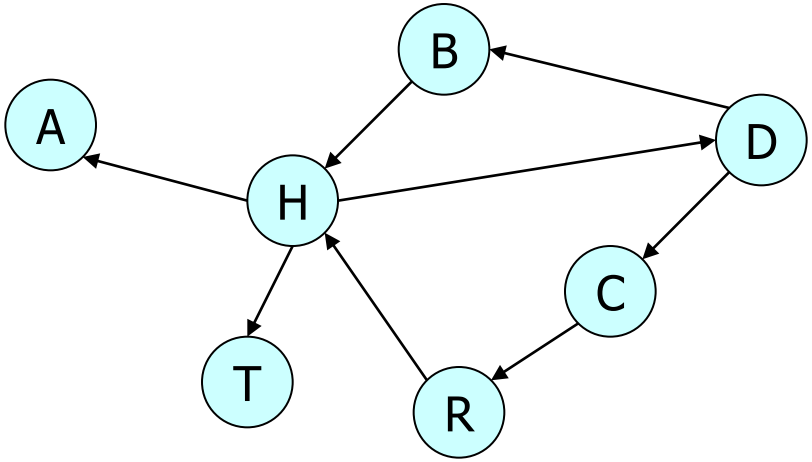
Recorrido en profundidad: DFS

→ *Generalización del recorrido preorden de un árbol.*

***Estrategia**:*

- *Partir de un vértice determinado **v**.*
- *Cuando se visita un nuevo vértice, explorar cada camino que salga de él.*
- *Hasta que no se haya finalizado de explorar uno de los caminos no se comienza con el siguiente.*
- *Un camino deja de explorarse cuando se llega a un vértice ya visitado.*
- *Si existían vértices no alcanzables desde **v** el recorrido queda incompleto; entonces, se debe seleccionar algún vértice como nuevo vértice de partida, y repetir el proceso.*

Recorrido en profundidad: DFS



Si tomamos como vértice de partida a D

Se Muestra:

D C R H T A B

Recorrido en profundidad: DFS

Esquema recursivo: *dado G = (V , E)*

1. Marcar todos los vértices como no visitados.

*2. Elegir vértice **u** como punto de partida.*

*3. Marcar **u** como visitado.*

*4. ∀ **v** adyacente a **u**,**(u,v)** Є E, si **v** no ha sido visitado, repetir recursivamente (3) y (4) para **v**.*

- *Finalizar cuando se hayan visitado todos los nodos alcanzables desde u.*
- *Si desde **u** no fueran alcanzables todos los nodos del grafo: volver a (2), elegir un nuevo vértice de partida **v** no visitado, y repetir el proceso hasta que se hayan recorrido todos los vértices.*

Recorrido en profundidad : DFS

```
dfs (v: vértice)
    marca[v]:= visitado;
    para cada nodo w adyacente a v
            si (marca[w] == noVisitado)
                    dfs(w);


main:dfs (grafo)
      inicializar marca en false (arreglo de booleanos);
      para cada vértice v del grafo
           si (marca[v] == noVisitado)
              dfs(v);
```

Recorrido DFS : Tiempo de ejecución

- *G (V , E) se representa mediante listas de adyacencia.*

- *El método **dfs(v)** se aplica únicamente sobre vértices no visitados*
  $\rightarrow$ sólo una vez sobre cada vértice.

- ***dfs(v)** depende del número de vértices adyacentes que tenga (longitud de la lista de adyacencia).*

  *$\rightarrow$ el tiempo de todas las llamadas a **dfs(v)**: $O(|E|)$*

- *añadir el tiempo asociado al bucle de main_dfs(grafo): $O(|V|)$).*

  $\Rightarrow$ Tiempo del recorrido en profundidad es $O(|V|+|E|)$.

Recorrido en amplitud : BFS

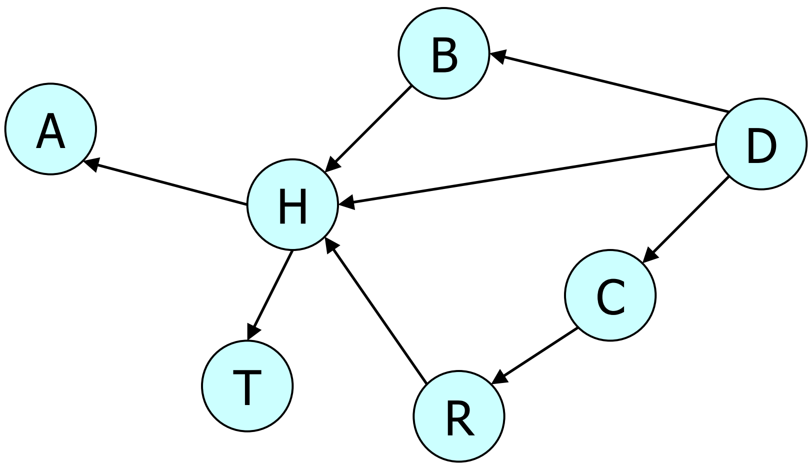
→ *Generalización del recorrido por niveles de un árbol.*

Estrategia*:*

- *Partir de algún vértice* ***u****, visitar* ***u*** *y, después, visitar cada uno de los vértices adyacentes a* ***u****.*

- *Repetir el proceso para cada nodo adyacente a* ***u****, siguiendo el orden en que fueron visitados.*

Recorrido en amplitud : BFS



Si tomamos como vértice de partida a D

Se Muestra:

D C H B R T A

Cola:

D C H B R T A

Recorrido en amplitud : BFS

Esquema iterativo: *dado G = (V , E)*

*1. Encolar el vértice origen **u**.*

*2. Marcar el vértice **u** como visitado.*

3. Procesar la cola.

*4. Desencolar **u** de la cola*

*5. ∀ adyacente a **u**,**(u,v)** Є E,*

*6. si **v** no ha sido visitado*

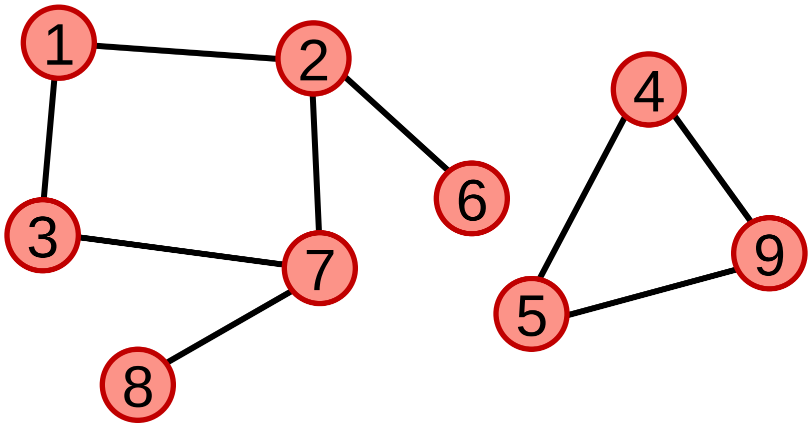
*7. encolar y visitar **v***

- *Si desde **u** no fueran alcanzables todos los nodos del grafo: volver a (1), elegir un nuevo vértice de partida no visitado, y repetir el proceso hasta que se hayan recorrido todos los vértices*

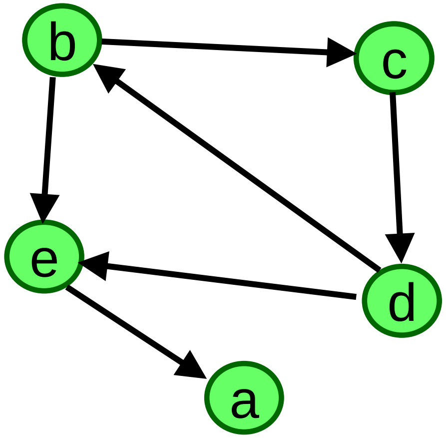
- *Costo T(|V|,|E|) es de O(|V|+|E|)*

Bosque de expansión del DFS

- *El recorrido* ***no es único****: depende del nodo inicial y del orden de visita de los adyacentes.*
- *El orden de visita de unos nodos a partir de otros puede ser visto como un árbol:* ***árbol de expansión (o abarcador) en profundidad asociado al grafo.***
- *Si aparecen varios árboles:* ***bosque de expansión (o abarcador) en profundidad****.*

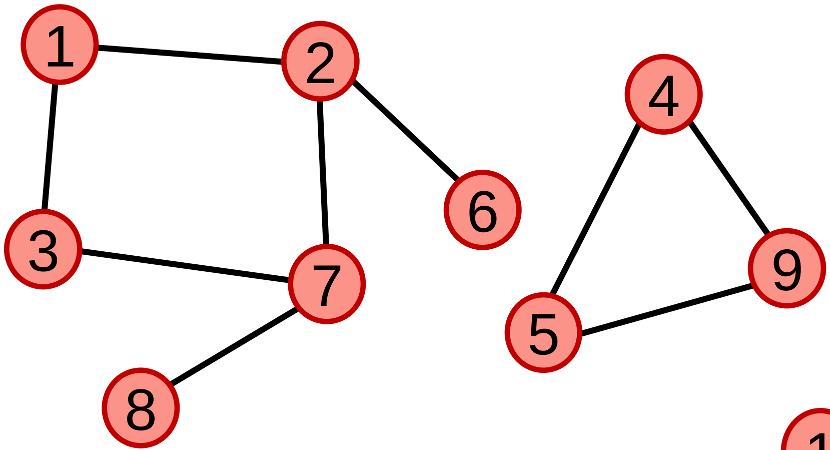


Grafo no dirigido y no Conexo

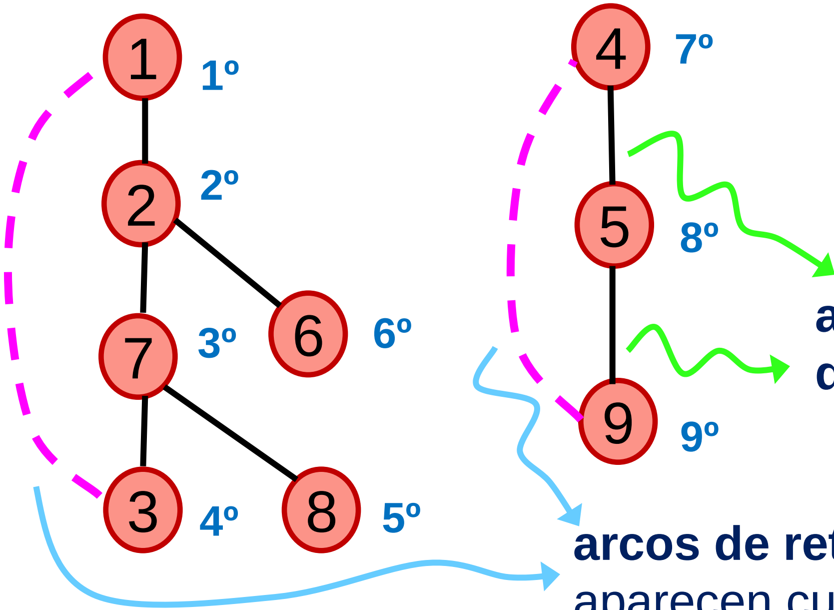


Grafo dirigido y no fuertemente Conexo

Bosque de expansión del DFS



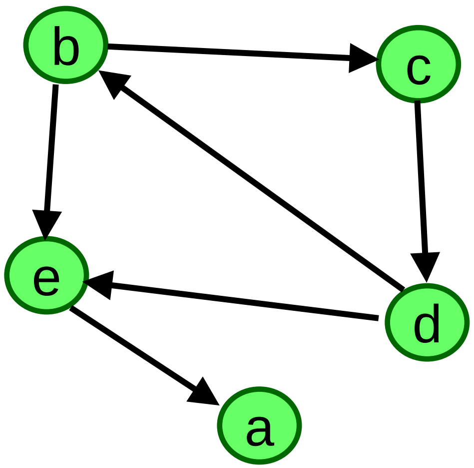
Grafo no dirigido y no Conexo



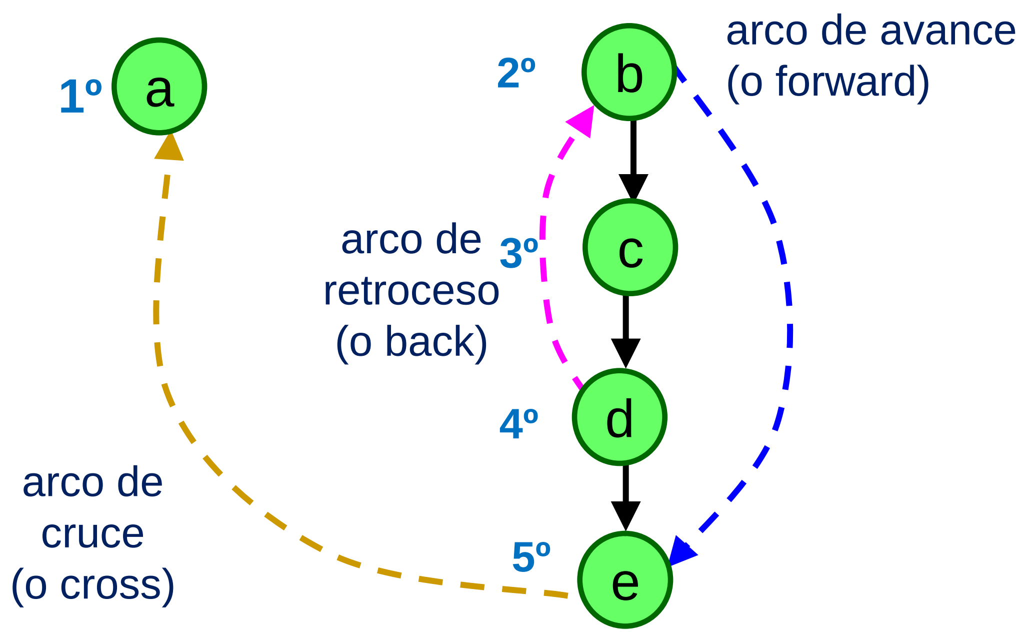
arcos del árbol

arcos de retroceso: aparecen cuando el vértice está visitado

Bosque de expansión del DFS



Grafo dirigido y no fuertemente Conexo



Bosque de expansión, empezando el recorrido en el vértice **a**

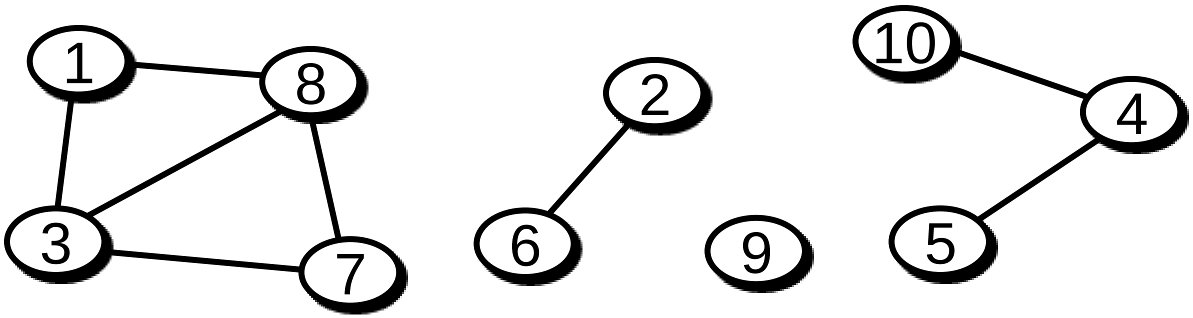
Bosque de expansión del DFS

Clasificación de los arcos de un grafo dirigido en el bosque de expansión de un DFS.

- *Arcos* ***tree*** *(del* ***árbol****): son los arcos en el bosque depth-first-search, arcos que conducen a vértices no visitados durante la búsqueda.*
- *Arcos* ***forward****: son los arcos $u \to v$ que no están en el bosque, donde v es descendiente, pero no es hijo en el árbol.*
- *Arcos* ***backward****: son los arcos $u \to v$, donde v es antecesor en el árbol. Un arco de un vértice a si mismo es considerado un arco back.*
- *Arcos* ***cross****: son todos los otros arcos $u \to v$, donde v no es ni antecesor ni descendiente de u. Son arcos que pueden ir entre vértices del mismo árbol o entre vértices de diferentes árboles en el bosque depth-first-search*

Aplicaciones del DFS

- **Problema 1:** encontrar las componentes conexas de un grafo no dirigido.



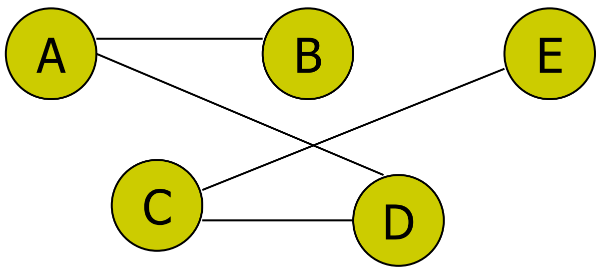
- **Problema 2: prueba de aciclicidad.** Dado un grafo (dirigido o no dirigido) comprobar si tiene algún ciclo o no.
- **Problema 3:** encontrar las componentes fuertemente conexas de un grafo dirigido.

Aplicaciones del DFS

- **Problema 1: Encontrar las componentes conexas de un grafo no dirigido**
  - Si el grafo es conexo
    - Un recorrido desde cualquier vértice
    - Visitará a TODOS los vértices del grafo
  - Si no lo es
    - Partiendo de un vértice, tendremos una componente conexa $\rightarrow$ conjunto de vértices recorrido
    - Para descubrir otras
      - Repetir recorrido desde un vértice no visitado
      - Hasta que todos los vértices hayan sido visitados

Aplicaciones del DFS

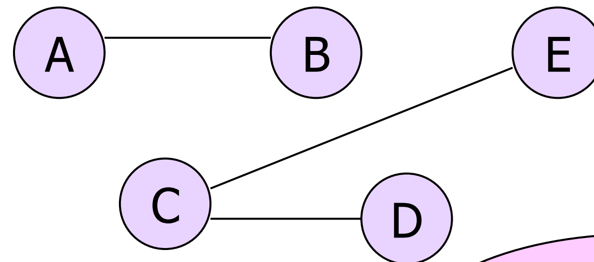
- **Problema 1: Encontrar las componentes conexas de un grafo no dirigido**



Recorrido desde E

E C D A B

Conjunto recorrido =
Conjunto de Vértices
Es CONEXO



Recorrido desde E

E C D

Componente Conexa 1

Recorrido desde B

B A

Componente Conexa 2

Aplicaciones del DFS

- **Problema 2: Prueba de aciclicidad**
  - **Grafo no dirigido.** Hacer un recorrido dfs. Existe algún ciclo si y sólo si aparece algún arco que no es del árbol de expansión.
  - **Grafo dirigido.** Hacer un dfs. Existe un ciclo si y sólo si aparece algún arco de retroceso.

- Orden de complejidad de la prueba de aciclicidad: igual que los recorridos.
  - Con matrices de adyacencia: $\mathbf{O(|V|^2)}$.
  - Con listas de adyacencia: $\mathbf{O(|V| + |E|)}$.

Aplicaciones del DFS

- **Problema 3: Encontrar las componentes fuertemente conexas**

Una aplicación clásica del depth-first search es descomponer un grafo dirigido en componentes fuertemente conexas (o conectadas).

Una ***componente fuertemente conexa*** de un grafo dirigido G=(V,E) es el conjunto máximo de vértices V’ $\subseteq$ V tal que para cada par de vértices *u* y *v* en V’, existe un camino tanto $u \rightarrow v$ como $v \rightarrow u$.

Aplicaciones del DFS

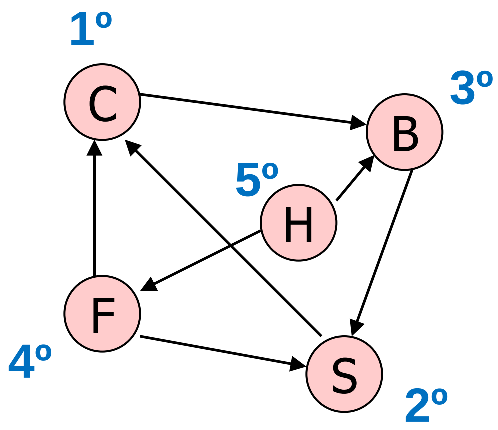
Encontrar las componentes fuertemente conexas de un grafo dirigido: Algoritmo de Kosaraju

Pasos:

1. Aplicar DFS(G) rotulando los vértices de G en post-orden (apilar).
2. Construir el grafo reverso de G, es decir G^R (invertir los arcos).
3. Aplicar DFS (G^R) comenzando por los vértices de mayor rótulo (tope de la pila).
4. Cada árbol de expansión resultante del paso 3 es una componente fuertemente conexa.

Si resulta un único árbol entonces el digrafo es fuertemente conexo.

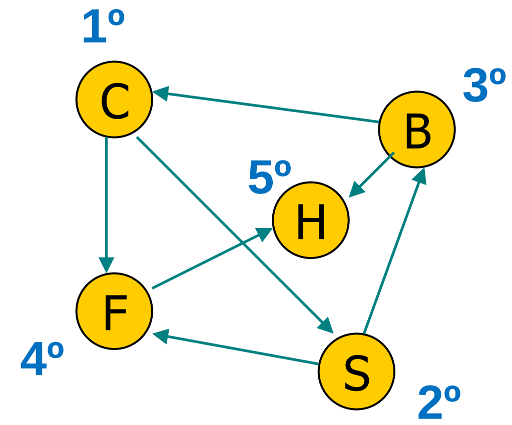
Algoritmo de Kosaraju

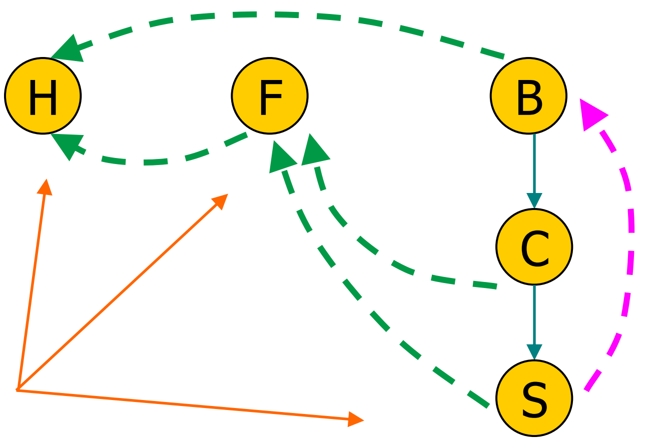


1. Aplicar el recorrido en profundidad, por ejemplo, desde **B** y rotular los vértices en post-orden

2. Construir el grafo reverso G^R

3. Aplicar DFS comenzando de los vértices de mayor rótulo en G^R





Componentes fuertemente conexas

Algoritmo de Kosaraju

Complejidad del algoritmo

- **Se realizan dos DFS**
- **Se recorren todas las aristas una vez para crear el grafo reverso**

$\Rightarrow$ **O(|V| + |E|)**