INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES - AÑO 2013

Práctica 8

Transformada de Laplace (TL) y Transformada Z (TZ).

1. **TL bilateral y sus propiedades**

   a) Calcule la TL de $x(t) = -e^{-t}\,u(-t)$ y de $y(t) = e^{-t}\,u(t)$

      I. Indique cuál es la región de convergencia para $X(s)$ e $Y(s)$.

      II. ¿Hay polos? ¿Dónde? (para $X(s)$ e $Y(s)$).

      III. Relacione la unilateralidad de estas señales con sus regiones de convergencia (RDC).

      IV. De acuerdo a las RDC ¿Tienen $x(t)$ e $y(t)$ TF ? Verifique calculando $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\,dt$.

   b) ¿Puede calcularse la TL bilateral de una constante ($x(t) = 1$ por ejemplo)? Identifique otras señales que poseen TF (no absolutamente convergente) aunque no poseen TL.

   c) Determine la TL (con RDC) y el diagrama polo-cero para cada una de las siguientes señales.

      I. $x(t) = 5\,e^{3\,t}\,u(t)$ II. $x(t) = -4\,e^{-3\,t}\,u(t)$

      III. $x(t) = u(t-2)$ IV. $x(t) = \delta(t-1)$

      V. $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)\,u(t) \qquad f_0, \phi \in \mathbb{R}$ VI. $x(t) = \sqcap(t)$

   Cuando sea posible calcule las TF de estas señales a partir de las TL que ya conoce.

   d) Halle $x(t)$ a partir de las siguientes $X(s)$ (no olvide las RDC):

      I. $X(s) = \dfrac{1}{s+2} \qquad Re(s) < -2$ II. $X(s) = \dfrac{s}{s+2} \qquad Re(s) > -2$

      III. $X(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+2} \qquad Re(s) > -2$ IV. $X(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \qquad Re(s) > 0$

      V. $X(s) = \dfrac{(s+4)}{s^2+5s+6} \qquad Re(s) > -2$ VI. $X(s) = \dfrac{1}{s^2-3s} \qquad 0 < Re(s) < 3$

   e) La señal $x(t)$ unilateral derecha tiene la siguiente TL: $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$

   Halle las TL de:

      I. $y(t) = t\,x(t)$ II. $y(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

      III. $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ IV. $y(t) = \{x * x\}(t)$

      V. $y(t) = e^{-3t}x(t)$

2. **TL y SLITs**

   a) Un sistema SLIT con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ está descripto por $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$

      I. Determine la trasferencia del sistema $H(s)$ y dibuje un diagrama cero-polar.

      II. Halle la respuesta impusional si se sabe que el sistema es estable.

      III. Idem I si el sistema es causal.

      IV. Idem I si el sistema no es causal, ni estable

   b) La transferencia de un SLIT causal es $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$

      I. Grafique los polos y ceros e indique la RDC.

      II. Halle la respuesta impusional.

      III. Calcule la respuesta cuando la entrada es $x(t) = e^{-|t|}$, $\forall t$.

IV. Halle el valor asintótico de la salida cuando se aplica como entrada $x(t) = u(t)$.

c) La respuesta de un SLIT a un escalón unitario es $(1 - e^{-t} - te^{-t})\, u(t)$. La salida de este sistema a una cierta entrada $x(t)$ desconcida es $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})\, u(t)$. Halle $x(t)$.

3. **TZ bilateral y sus propiedades**

a) Determine la TZ de las siguientes secuencias. Grafique el diagrama cero-polar y RDC. Indique además, en cada caso, si existe la TFTD y obténgala a partir de la TZ cuando sea posible.

I. $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

II. $x[n] = u[n-3]$

III. $x[n] = (\frac{1}{4})^n\, u[n]$

IV. $x[n] = (\frac{1}{4})^{-n}\, u[-n]$

V. $x[n] = (\frac{1}{4})^{|n|}$

VI. $x[n] = (\frac{1}{4})^n\, n\, u[n]$

VII. $x[n] = \sqcap_5[n]$

VIII. $x[n] = \wedge_5[n] = \left\{\sqcap_5 * \sqcap_5\right\}[n]$

IX. $x[n] = \cos(2\pi n/5)$

X. $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \phi)\, u[n] \qquad f_0, \phi \in \mathbb{R}$

b) Determine la secuencia $x[n]$ a partir de $X(z)$:

I. $X(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| < \dfrac{1}{2}$

II. $X(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

III. $X(z) = \dfrac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$ $x[n]$ es unilateral der.

IV. $X(z) = \dfrac{1}{1 + 2\, z^{-1}} \qquad |z| < 2$

V. $X(z) = \dfrac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$ $x[n]$ es unilateral izq.

VI. $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$, $\exists$ TFTD$\{x[n]\}$

c) Para cada uno de las siguientes casos dibuje en un diagrama cero-polar las posibles regiones de convergencia de $X(z)$. Indique las características de las secuencias correspondientes a cada una.

I. $X(z) = \dfrac{z}{z - \frac{1}{2}}$

II. $X(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + \frac{3}{4}}$

III. $X(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{z^2 - z - \frac{1}{2}}$

IV. $X(z) = \dfrac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$

d) Sea $X(z)$ la TZ de la secuencia $x[n]$ en $a < |z| < b$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a < b$. Halle las TZ y sus RDC para las secuencias definidas a continuación.

I. $y[n] = x[-n]$.

II. $y[n] = a^n\, x[n] \;\; a \in \mathbb{R}^+$.

III. $y[n] = e^{jw_0 n}\, x[n] \;\; w_0 \in \mathbb{R}^+$

IV. $y[n] = z_0^n\, x[n] \;\; z_0 \in \mathbb{C}$

V. $y[n] = n\, x[n]$

VI. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

4. **TZ y SLIDs**

a) Un SLID causal es descripto por $y[n] = y[n-1] + 3/4\, y[n-2] + 2x[n]$

I. Encuentre la transferencia del sistema $H(z)$, su RDC y grafique su diagrama cero-polar.

II. Calcule una expresión analítica para la respuesta impulsional $h[n]$.

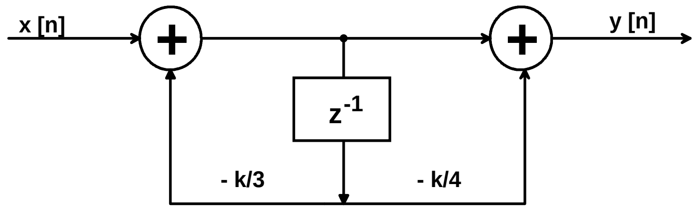
III. Calcule $h[0]$ usando el teorema del valor inicial. ¿Coincide su resultado con el de II?

IV. Halle la secuencia de salida para la entrada con transformada Z dada por $X(z) = z^{-2}(z{-}3/2)$.

V. Modifique la región de convergencia para que el sistema sea anticausal. Escriba la ecuación recursiva para ese caso.

b) Un SLID con entrada $s[n]$ y salida $x[n]$ es descripto por $x[n] = s[n] - e^{-8\alpha}\, s[n-8], \;\; 0 < \alpha < 1$. Halle $H_1(z) = X(z)/S(z)$ y $H_2(z) = Y(z)/X(z)$ tal que $y[n] = s[n]$ (el sistema inverso). Indique todas las posibles RDC de H_2 e indique si el sistema es o no causal y estable en cada una.

c) Considere la estructura de filtro digital de la figura.



I. Halle $H(z)$ para este filtro causal. Grafique el diagrama cero-polar e indique la RDC.
II. Determine la respuesta en frecuencia del filtro.
III. ¿Para qué valores de k el sistema es estable?
IV. Halle $y[n]$ si $k = 1$ y $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$ para todo n.
V. Halle $\lim_{n\to\infty} y[n]$ por el teorema del valor final y compruebe el resultado anterior.

5. **Identificación con moraleja**

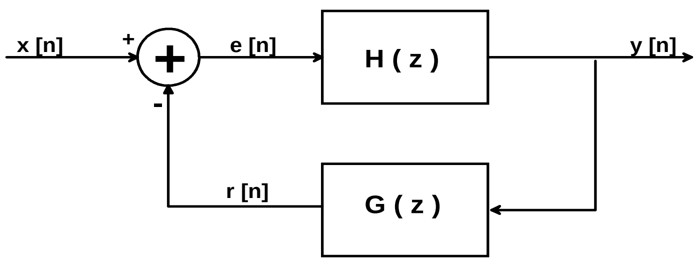
Los ingenieros $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de una empresa saben que una planta de su interés es un SLIT causal y estable cuya transferencia es de la forma $H(z) = (b_0 + b_1 z^{-1})/(1 + a_1 z^{-1})$. Como son personas muy competitivas, cada uno decide hacer su propio intento para averiguar los parámetros a_1, b_0, b_1:

- $\mathcal{A}$ decide poner un impulso a la entrada y mide que $h[0] = 1$.
- $\mathcal{B}$ alimenta el sistema con un escalón unitario y mide la amplitud de la salida después de un largo tiempo (o ganancia de continua) que resulta ser 4.
- $\mathcal{C}$ decide excitar al sistema con la señal $\cos(\pi n/3)$, midiendo a la salida, después de un largo tiempo, una señal sinusoidal de amplitud 2.

El joven pasante, que acaba de terminar de cursar IPS, sorprendido por el escaso espíritu cooperativo de los ingenieros, decide determinar los parámetros utilizando la información anterior. Demuestre que Ud. puede desempeñar el rol del joven pasante.

6. **Un poco de realimentación...**

a) Un sistema discreto realimentado responde al esquema de la figura.



Halle el valor inicial y el valor final de $e[n]$, cuando $x[n]$ es el escalón unitario, si:

I. $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - 0{,}5\, z^{-1}}$, $G(z) = 0{,}5$.
II. $H(z) = \dfrac{1}{z - 1}$, $G(z) = 0{,}25\, z^{-1}$.

b) Un SLID causal $\mathcal{S}_1$ de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ obedece a la ecuación $y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + x[n-1]$. La salida de este sistema se ingresa a un sistema $\mathcal{S}_2$ con ecuación en diferencias $r[n] = y[n] - K/2\, y[n-1]$, donde K es una constante real. Luego, $x[n]$ se genera a partir de las señales $v[n]$ (entrada externa) y $r[n]$, $x[n] = K\, v[n] - r[n]$, dando lugar a un sistema realimentado.

I. Dibuje un diagrama en bloques que represente la conexión de los sistemas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.
II. Encuentre la función de transferencia de $v[n]$ a $y[n]$.
III. Halle el rango de valores de K para el cual esa transferencia es estable.
IV. Halle el rango de valores de K para el cual la respuesta impulsional es oscilatoria amortiguada.

Algunos resultados

1. *a)* $X(s) = \frac{1}{s+1},\ Re(s) < -1$ $\qquad Y(s) = \frac{1}{s+1},\ Re(s) > -1$

   b) No. $x(t) = \operatorname{sgn}(t)$, $y(t) = \cos(\omega_0 t)$, etc.

   c) I. $X(s) = \frac{5}{s-3},\ Re(s) > 3$ $\qquad$ II. $X(s) = \frac{-4}{s+3},\ Re(s) > -3$ $\qquad$ III. $X(s) = \frac{e^{-2s}}{s},\ Re(s) > 0$

   IV. $X(s) = e^{-s},\ Re(s) > -\infty$ $\qquad$ V. $X(s) = \frac{s\cos(\phi) - 2\pi f_0 \operatorname{sen}\phi}{s^2 + (2\pi f_0)^2},\ Re(s) > 0$

   VI. $X(s) = \frac{\operatorname{senh}(s/2)}{s/2},\ -\infty < Re(s) < \infty$

   d) I. $x(t) = -e^{-2t}u(-t)$ $\qquad$ II. $x(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$ $\qquad$ III. $x(t) = e^{-2t+2}u(t-1)$

   IV. $x(t) = \cos 2t u(t)$ $\qquad$ V. $x(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ $\qquad$ VI. $x(t) = -\frac{1}{3}e^{3t}u(-t) - \frac{1}{3}u(t)$

   e) I. $Y(s) = \frac{s^2+2s-1}{(s^2+5s+6)^2},\ Re(s) > -2$ $\qquad$ II. $Y(s) = \frac{s^2(s+1)}{s^2+5s+6},\ Re(s) > -2$

   III. $Y(s) = \frac{(s+1)}{s(s^2+5s+6)},\ Re(s) > 0$ $\qquad$ IV. $Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s^2+5s+6)^2},\ Re(s) > -2$

   V. $Y(s) = \frac{s+4}{s^2+11s+30},\ Re(s) > -5$

2. *a)* I. $H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$ $\qquad$ II. $h(t) = -\frac{1}{3}(e^{2t}u(-t) + e^{-t}u(t))$

   III. $h(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})u(t)$ $\qquad$ IV. $h(t) = -\frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})u(-t)$

   b) I. $Re(s) > -1$ $\qquad$ II. $h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$

   III. $h(t) = \frac{2}{5}(e^{t}u(-t) + e^{-t}(\cos(t) + 2\operatorname{sen}(t))u(t))$ $\qquad$ IV. $y(\infty) = H(0) = \frac{1}{2}$

   c) $x(t) = 2\,(1 + 2e^{-3t})u(t)$

3. *a)* I. $X(z) = 1 - z^{-1},\ |z| > 0$ $\qquad$ II. $X(z) = \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}},\ |z| > 1$ $\qquad$ III. $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\ |z| > \frac{1}{4}$

   IV. $X(z) = \frac{-4z^{-1}}{1-4z^{-1}},\ |z| < 4$ $\qquad$ V. $X(z) = \frac{-\frac{15}{4}z^{-1}}{1-\frac{17}{4}z^{-1}+z^{-2}},\ \frac{1}{4} < |z| < 4$

   VI. $X(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2},\ |z| > \frac{1}{4}$ $\qquad$ VII. $X(z) = \frac{z^2 - z^{-3}}{1-z^{-1}},\ 0 < |z| < \infty$ $\qquad$ VIII. $X(z) = \left(\frac{z^2 - z^{-3}}{1-z^{-1}}\right)^2,$

   $0 < |z| < \infty$ $\qquad$ IX. $\nexists X(z)$ $\qquad$ X. $X(z) = \frac{\cos(\phi) - z^{-1}\cos(2\pi f_0 - \phi)}{1 - 2\cos(2\pi f_0)z^{-1} + z^{-2}},\ |z| > 1$

   b) I. $x[n] = -(-\frac{1}{2})^n u[-n-1]$ $\qquad$ II. $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$ $\qquad$ III. $x[n] = 4(-\frac{1}{2})^n u[n-2]$

   IV. $x[n] = -(-2)^n u[-n-1]$ $\qquad$ V. $x[n] = -3(\frac{1}{4})^n u[-n-1] - 2\delta[n]$ $\qquad$ VI $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$

4. *a)* I. $H(z) = \frac{2z^2}{(z-\frac{3}{2})(z+\frac{1}{2})},\ |z| > \frac{3}{2}$ $\qquad$ II. $h[n] = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)u[n]$

   III. $h[0] = \lim_{z\to\infty} H(z) = 2$ $\qquad$ IV. $y[n] = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$

   b) $H_1(z) = 1 - e^{-8\alpha}z^{-8},\ |z| > 0$ y $H_2(z) = 1/H_1(z)$

   c) I. $H(z) = \frac{1-\frac{k}{4}z^{-1}}{1+\frac{k}{3}z^{-1}},\ |z| > \frac{k}{3}$ $\qquad$ II. $H(e^{j2\pi s}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi s}}$ $\qquad$ III. $-3 < k < 3$

   IV. $y[n] = \left[\frac{7}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]u[n]$ $\qquad$ V. $y[\infty] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = 0$

5. $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ y $a_1 = -\frac{1}{2}$

6. *a)* I. $e(0) = 1$ y $e(\infty) = 0{,}5$ $\qquad$ II. $e(0) = 1$ y $e(\infty) = 0$

   b) II. $\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{Kz^{-1}}{1 - z^{-1} + (1-\frac{K}{2})z^{-2}}$ $\qquad$ III. $0 < K < 2$ $\qquad$ IV. $0 < K < \frac{3}{2}$