Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2013

Clase 17

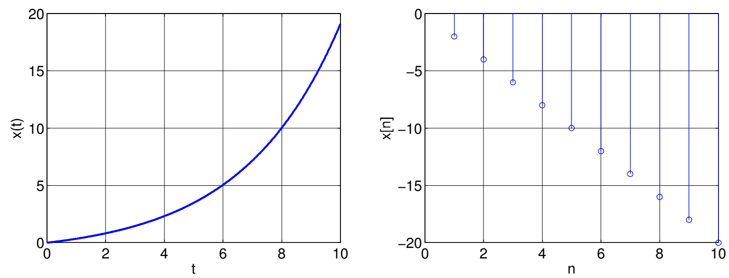
Javier G. García

9 de diciembre de 2013

Contenido

Señales y Transformadas

- Señales de energía finita $\rightarrow$ Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.
- Señales de potencia finita $\rightarrow$ TFTD + Deltas de Dirac.
- Señales de potencia infinita ¿Para qué? *Ejemplos:*



Respuesta de sistemas inestables.
$\rightarrow$ Transformada de Laplace y Transformada Z

Transformada Z

Señales $\Leftrightarrow$ Funciones de variable compleja

Utilidad:

- Análisis de señales y sistemas que no tienen TFTD
- Determinación de estabilidad de sistemas
- Descomposición de sistemas en bloques simples
- Manipulación de diagramas en bloques
- Diseño de sistemas lineales

Filtrado!

Definición

Transformada Z (señales discretas)

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in RDC \subset \mathbb{C}$$

- RDC del plano complejo es la región de convergencia de la transformada.
- $X(z)$ es una función de variable compleja analítica en su región de convergencia.

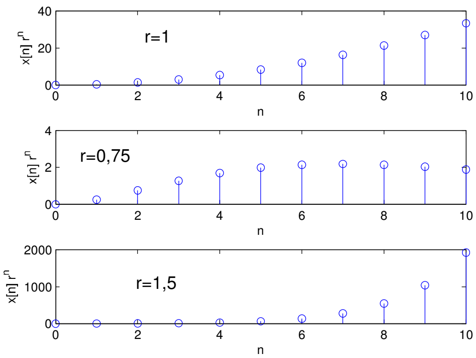
Relación con la TFTD

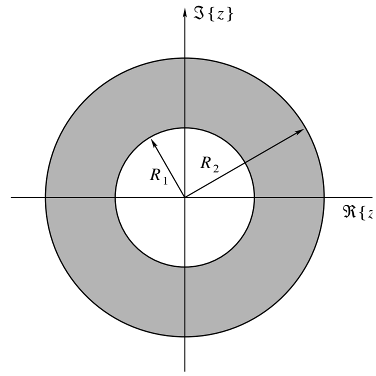
Escribiendo $z = re^{j2\pi s}$ vemos que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j2\pi sn} = TFTD\{x[n]r^{-n}\}(e^{j2\pi s})$$

Si $\{r = 1\} \in RDC$: $\boxed{X^z(e^{j2\pi s}) = X^f(e^{j2\pi s})}$ Coincide con la TFTD.

Región de Convergencia (TZ)





Según el valor de r la transformada converge o no.

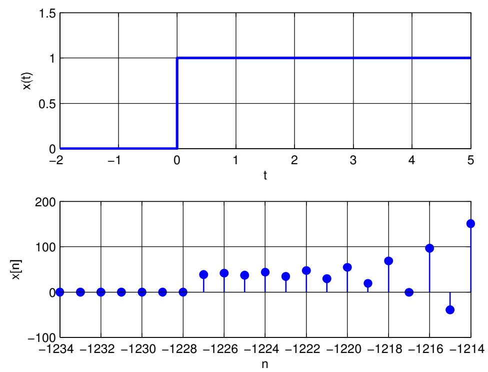
La región de convergencia es siempre del tipo $\{R_1 < |z| < R_2\}$

Señales sin Transformada Z

Hay señales sin transformada Z.
Ejemplos ??

Señales Unilaterales

Las señales unilaterales “generalmente” tienen TZ



Útil para analizar sistemas causales.

Pares transformados

Transformada Z:

$x[n]$	$X(z)$	RDC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-(n+1)]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \cos(\theta_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-a\cos\theta_0 z^{-1}}{1-2a\cos\theta_0 z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Principales propiedades

Linealidad

$$w[n] = ax[n] + by[n] \Leftrightarrow W(z) = aX(z) + bY(z)$$

Retardo

$$y[n] = x[n-m] \Leftrightarrow Y(z) = z^{-m}X(z)$$

Convolución

$$w[n] = \{x * y\}[n] \Leftrightarrow W(z) = X(z)Y(z)$$

Propiedades y región de convergencia

- $x[n]$ es absolutamente sumable $\Leftrightarrow \{|z| = 1\} \subset RDC$
(Sistemas estables)
- $x[n]$ es unilateral derecha $\Leftrightarrow \{|z| = \infty\} \subset RDC$
(Sistemas causales)
- $x[n]$ es unilateral izquierda $\Leftrightarrow \{|z| = 0\} \subset RDC$
(Sistemas anticausales)

Transformadas Inversas

Puede deducirse a partir de la TFTD inversa

Antitransformada Z (señales discretas)

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X\}(z) \triangleq \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz, \quad \bigcirc \subset RDC$$

Alternativas:

- Descomposición en fracciones parciales para transformadas racionales ($H(z) = \sum_k r_k/(1 - p_k z^{-1})$)
- Comparación con pares transformados conocidos
- Expansión en serie

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias lineales

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Pueden resolverse con la transformada Z

$$Y(z) = (-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) Y(z) + (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) X(z)$$

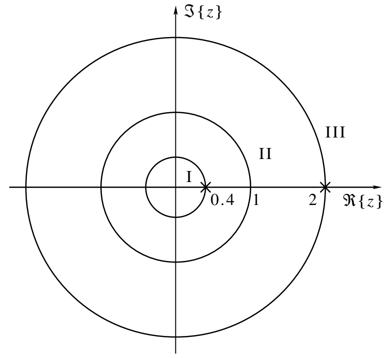
$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) = \frac{b(z)}{a(z)} X(z)$$

La transferencia del sistema $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ es racional.

Polos y Ceros

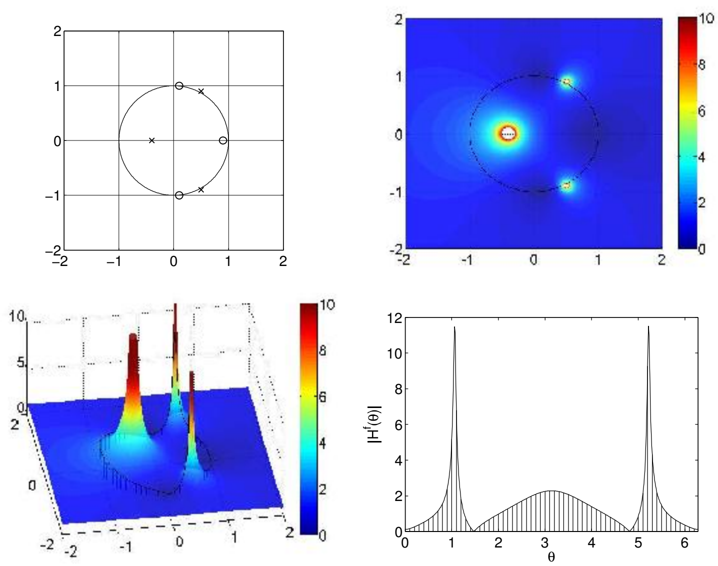
En una función de transferencia racional H:

- Raíces del numerador: Ceros ($H(c_k) = 0$)
- Raíces del denominador: Polos ($H(p_k) \to \infty$)
- Ejemplo:
  $$H(z) = \frac{z(z+1{,}2)}{(z-0{,}4)(z-2)}$$



- Un sistema discreto causal y estable tiene sus polos dentro del círculo unidad

Diagrama de polos y ceros



Transformadas unilaterales

Permiten conIderar condiciones iniciales

Transformada Z unilateral

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad |z| > R_1$$

Retardo

$$y[n] = x[n-1] \Leftrightarrow Y(z) = z^{-1}X_+(z) + x[-1]$$

Resumen

Transformada Z

- Definición, propiedades y ejemplos
- Señales de potencia infinita y Sistemas
- Regiones de convergencia
- Transformadas inversas
- Ecs. en Diferencias
- Polos y Ceros
- Unilaterales (cond. inciales)

Filtros

"Filtrar: Cambiar las características en frecuencia de una señal"

Aplicaciones:

- Supresión de ruido (radio, ECG, EEG, radar)
- Realce de rangos de frecuencia específicos (Ecualización, Detección de bordes)
- Limitación de ancho de banda (Anti-Aliasing, separación de canales)
- Atenuación de frecuencias particulares (DC, 50Hz)
- Diferenciación, integración, Transf. de Hilbert, etc

Pueden ser LIT, LVT, NL
Estudiaremos filtros LIT

Filtros analógicos

- Operan con señales de tiempo continuo
- Se implementan con Ampl., R, C e L. Circuitos de microtiras, SAWs o cavidades en altas frec's
- Máx Frec.: infinita (limitada por la tecnología)
- Los dispositivos suman ruido a la señal (térmico, shot, 1/f)
- Linealidad: No linealidad de amplificadores y saturación
- Repetibilidad: limitada por variación de los componentes
- Poco flexibles

Filtros digitales

- Operan con señales de tiempo discreto (secuencias)
- Se implementan en microprocesadores (computadoras, DSPs, FPGAs) o hardware digital (+ A/D y a veces D/A)
- Máx Frec.: Mitad Frec. de muestreo (cada día mayor)
- Ruido de cuantización (despreciable en pto. flotante)
- Linealidad: Cuantización en punto fijo, desborde
- Repetitivos (limita la estabilidad de frec. de muestreo)
- Son flexibles

Funciones de transferencia

Filtros analógicos

$$H^L(s) = \frac{b_0 s^q + b_1 s^{q-1} + \ldots + b_q}{s^p + a_1 s^{p-1} + \ldots + a_p} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Los filtros analógicos implementables son propios: $p \geq q$

Filtros digitales

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_p z^{-p}} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

- Se pueden implementar filtros digitales impropios: $p < q$
- Si $p = 0 \Rightarrow$ respuesta impulsional de duración finita (**F**I**R**)
- Si $p > 0 \Rightarrow$ respuesta impulsional de duración infinita (**I**I**R**)