

2.6. La integral de convolución

La convolución entre dos funciones es un concepto físico importante en muchas ramas de la ciencia. Sin embargo, como sucede con muchas relaciones matemáticas importantes, no es sencillo comprender sus alcances e implicaciones. Para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, la integral de convolución permite determinar la respuesta del sistema ante *cualquier* entrada, a partir del conocimiento de la respuesta del sistema ante una *única* entrada particular, el impulso. Si la respuesta del sistema ante un impulso (la “respuesta impulsiva” del sistema) se nota como $h(t)$, la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) excitado con una entrada cualquiera $x(t)$ está dada por la expresión

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau, \quad (2.100)$$

y se dice que la función $y(t)$ es la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$, que se nota $x(t) * h(t)$.

2.6.1. Derivación de la integral de convolución

En esta sección se muestra que un sistema lineal e invariante en el tiempo queda completamente caracterizado por su respuesta impulsiva. En otras palabras, el conocimiento de la respuesta del sistema a un impulso de amplitud unitaria permite determinar su salida para una entrada arbitraria aplicando la integral de convolución (2.100).

Una señal continua arbitraria $x(t)$ se puede aproximar con precisión arbitraria por una versión “escalonada” $\hat{x}(t)$, como la que se muestra en la Fig. 2.52(a). Aunque los escalones podrían tener distinto ancho, lo habitual es elegir el mismo valor Δ para todos. La señal escalonada $\hat{x}(t)$ se puede expresar como una combinación lineal de pulsos temporales de ancho Δ escalados y desplazados, como ilustran las Figs. 2.52(b)-(e). Si se define el pulso $\delta_{\Delta}(t)$ como

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que tiene área unitaria, la expresión $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ representa un pulso desplazado en el tiempo

$$\delta_{\Delta}(t - k\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & k\Delta < t < (k+1)\Delta, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, la aproximación escalonada $\hat{x}(t)$ de la señal continua $x(t)$ se puede escribir

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta. \quad (2.101)$$

Observando la Fig. 2.52 se nota que sólo un término de la sumatoria (2.101) es no nulo para cada valor de t . A medida que el intervalo Δ tiende a cero, la aproximación $\hat{x}(t)$ es cada vez más fiel, y en el límite, cuando $\Delta \rightarrow 0$, es igual a $x(t)$,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta. \quad (2.102)$$

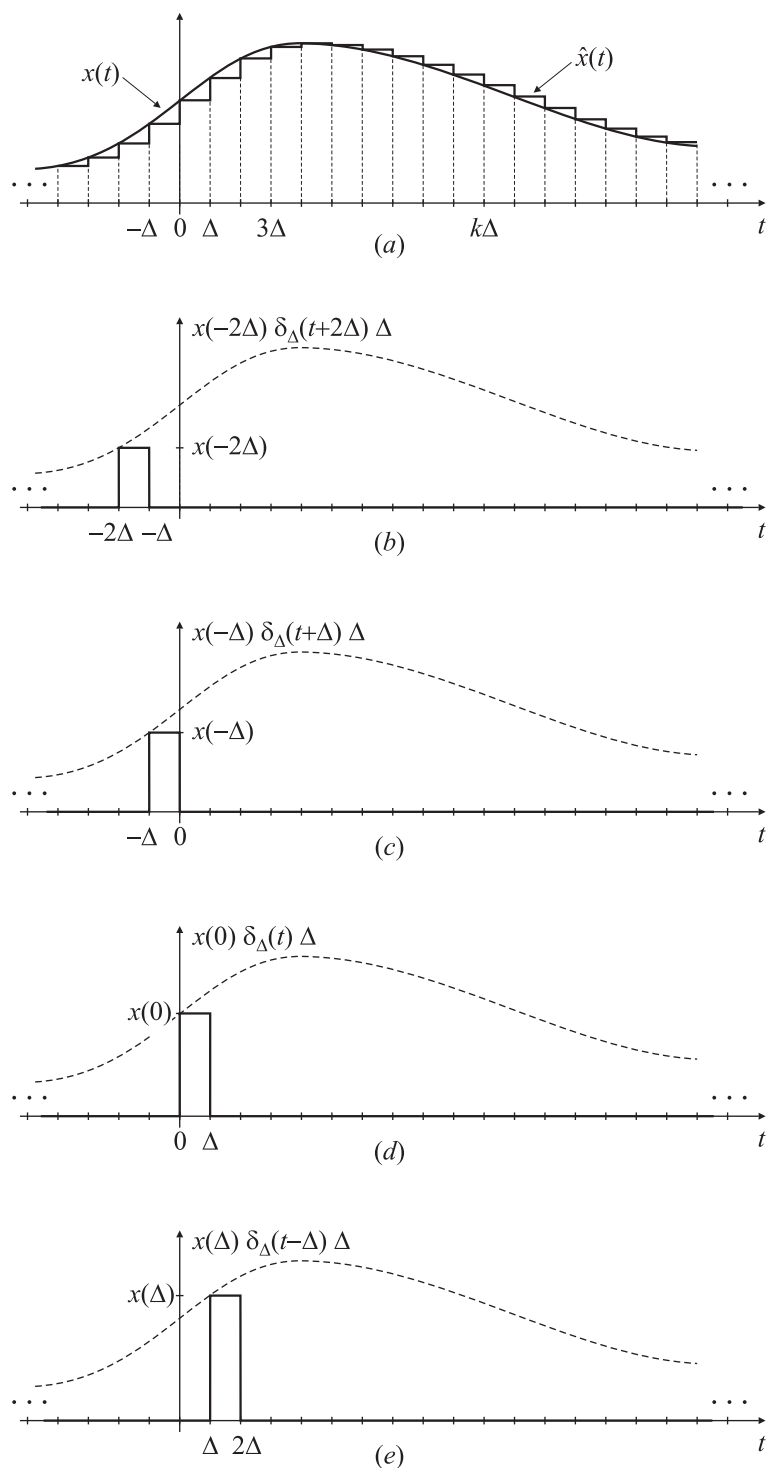


Fig. 2.52. Aproximación escalonada a una señal continua.

Si Δ se hace cada vez más pequeño, la sumatoria de la ecuación (2.102) tiende a una integral (la conocida aproximación de Riemann): para $\Delta \rightarrow 0$, se tiene que $\Delta \rightarrow d\tau$,

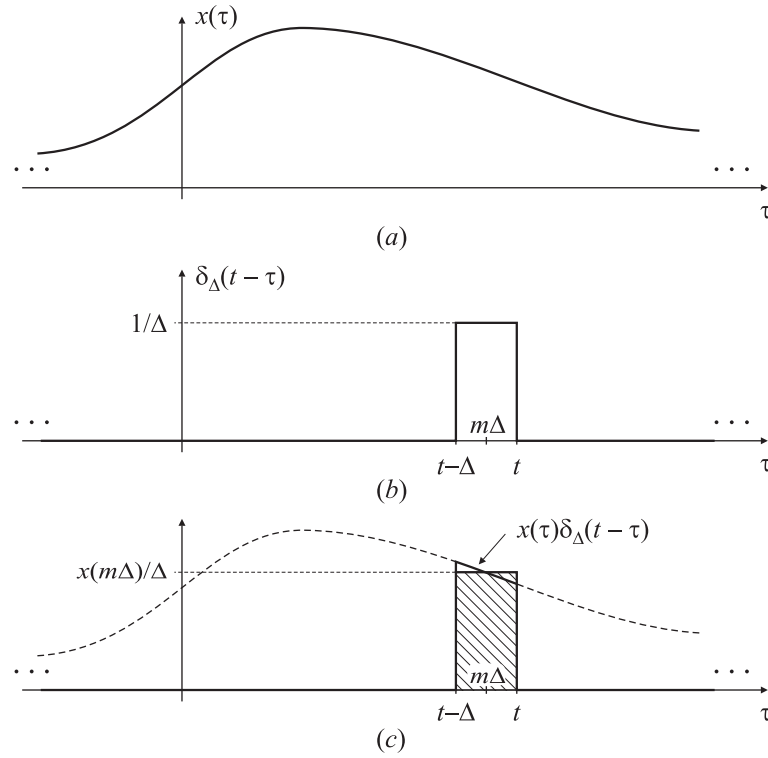


Fig. 2.53. Interpretación gráfica de la ecuación (2.102).

$k\Delta \rightarrow \tau$, y $\delta_\Delta(t - k\Delta) \rightarrow \delta(t - \tau)$. Entonces (2.102) se puede expresar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.103)$$

La expresión (2.103) no es otra cosa que la Propiedad 3 del impulso (Sección 2.3.4). El pasaje al límite de la expresión (2.102) a la ecuación (2.103) se puede interpretar con la ayuda de la Fig. 2.53, donde se han graficado las funciones $x(\tau)$, $\delta_\Delta(t - \tau)$ y su producto. En esta representación, t es un valor determinado [el instante de tiempo donde se quiere calcular $x(t)$] y $\tau = k\Delta$ es la variable. El área bajo la curva $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$ se puede aproximar por el área sombreada del rectángulo de la Fig. 2.53(c), que es $x(m\Delta)\Delta$, donde $t - \Delta < m\Delta < t$; para este valor de t , el término con $k = m$ es el único término no nulo en la sumatoria de la ecuación (2.102). En consecuencia en el límite, cuando $\Delta \rightarrow 0$, $x(t)$ iguala el área bajo la curva $\Delta x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$.

Esta representación escalonada permite estudiar la respuesta o salida $y(t)$ de un sistema lineal ante una entrada arbitraria $x(t)$. En la Fig. 2.54(a) se ha representado la señal $x(t)$ y su aproximación escalonada $\hat{x}(t)$, mientras que en la Fig. 2.54(b)-(d) se ilustran las respuestas del sistema ante tres de los pulsos escalados que forman $\hat{x}(t)$. Como la respuesta es *diferente* según sea el instante donde se aplique el pulso, el sistema *no* es invariante en el tiempo. Sin embargo, como el sistema es lineal, la salida $\hat{y}(t)$ correspondiente a la entrada $\hat{x}(t)$ es la suma de todas estas respuestas [Fig. 2.54(e)]. Para obtener la respuesta $y(t)$ ante la entrada $x(t)$ basta tomar el límite de $\hat{y}(t)$ para $\Delta \rightarrow 0$, de manera análoga a la indicada por la ecuación (2.102) para $\hat{x}(t)$, y como ilustra la Fig. 2.54(f). Como el pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ corresponde al pulso de área unitaria desplazado, cuando $\Delta \rightarrow 0$ la respuesta $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ tiende a la respuesta impulsiva del sistema ante un impulso unitario aplicado en

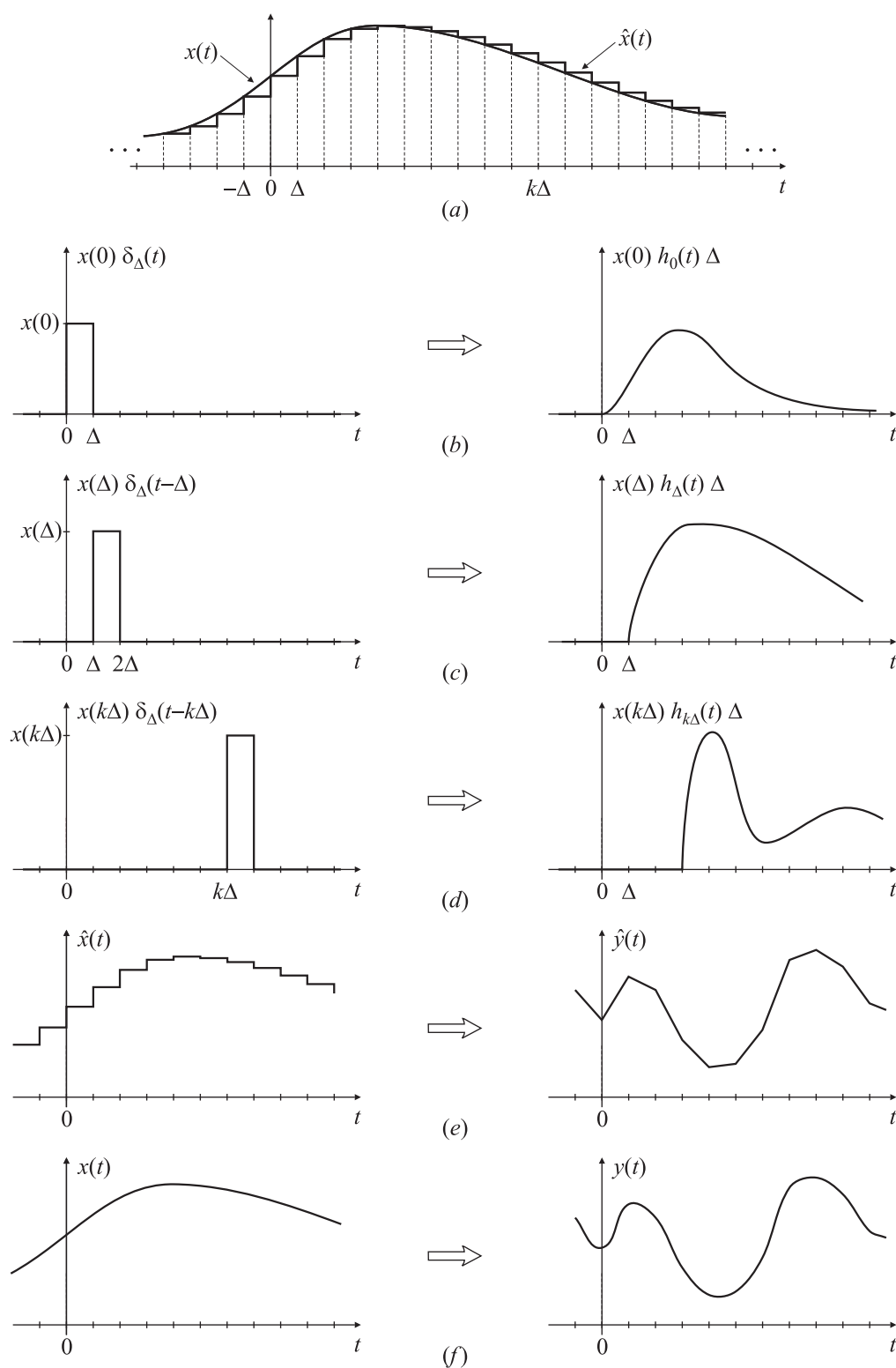


Fig. 2.54. Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo *variante* en el tiempo [ecuación (2.102)].

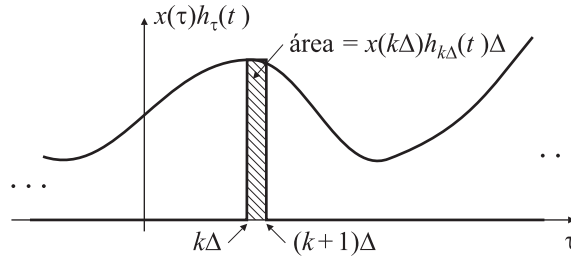


Fig. 2.55. Interpretación gráfica de las ecuaciones (2.104) y (2.105).

$t = k\Delta$. Notando como $h_\tau(t)$ la respuesta del sistema ante un impulso unitario $\delta(t - \tau)$ aplicado en el instante $t = \tau$, resulta

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta. \quad (2.104)$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$ la suma en el miembro derecho tiende a la integral, como se representa en la Fig. 2.55. Entonces, siguiendo un procedimiento similar al que permite pasar de (2.102) a (2.103), se encuentra que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau. \quad (2.105)$$

La interpretación de la ecuación (2.105) es análoga a la de la ecuación (2.102). Como muestra la ecuación (2.103), cualquier entrada $x(t)$ puede pensarse como una suma de impulsos escalados y desplazados, donde el “peso” del impulso $\delta(t - \tau)$ es precisamente $x(\tau) d\tau$. Con esta interpretación, la ecuación (2.105) representa la superposición de las respuestas a cada uno de estos impulsos, y, por linealidad, el “peso” de la respuesta $h_\tau(t)$ al impulso desplazado $\delta(t - \tau)$ también es $x(\tau) d\tau$.

La ecuación (2.105) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal de tiempo continuo. Si además de ser lineal el sistema es *invariante en el tiempo*, entonces la respuesta del sistema en un tiempo $t = t_1$ ante un impulso $\delta(t - \tau)$ aplicado en $t = \tau$ [Fig. 2.56(a)] es la misma que la respuesta del sistema en un tiempo $t = t_1 + T$ ante un impulso $\delta(t - \tau - T)$ aplicado en $t = \tau + T$ [Fig. 2.56(b)], es decir

$$h_{\tau+T}(t) = h_\tau(t - T).$$

Por conveniencia notacional se suele elegir $\tau = 0$, de modo que $h_T(t) = h_0(t - T)$, y se define la *respuesta impulsiva del sistema* $h(t)$ como

$$h(t) = h_\tau(t)|_{\tau=0} = h_0(t),$$

es decir, la respuesta del sistema ante un impulso aplicado en $t = 0$. En este caso, la ecuación (2.105) se convierte en

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.106)$$

Esta integral se conoce como *integral de convolución* o *integral de superposición*, y es la representación de un sistema continuo en el tiempo *lineal e invariante en el tiempo* en función de su respuesta impulsiva $h(t)$.

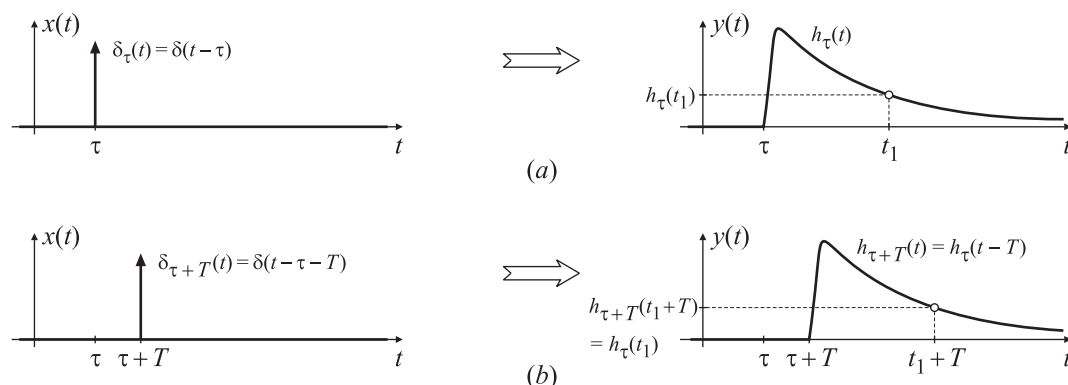


Fig. 2.56. Respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Es interesante resaltar las diferencias entre las ecuaciones (2.105) y (2.106), que se ilustran en la Fig. 2.54(b)-(d) y en la Fig. 2.57(b)-(d), respectivamente. Para el sistema variante en el tiempo (Fig. 2.54) es necesario conocer la respuesta $h_\tau(t)$ del sistema ante un impulso aplicado en $t = \tau$, para todos los posibles valores de τ ; en otras palabras, $h_\tau(t)$ representa una familia de respuestas impulsivas. En cambio, para los sistemas invariantes en el tiempo (Fig. 2.57) basta con conocer una única respuesta impulsiva. Por comodidad, se suele elegir la respuesta del sistema ante un impulso aplicado en $t = 0$. Evaluación gráfica de la integral de convolución

No es sencillo visualizar la operación matemática descrita por la ecuación (2.106); sin embargo, un análisis gráfico permite comprender el significado de la convolución. Sean $x(t)$ y $h(t)$ dos funciones temporales, por ejemplo los pulsos que se muestran en la Fig. 2.58(a) y (b), respectivamente. Para evaluar (2.106) son necesarias las funciones $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$. Las funciones $x(\tau)$ y $h(\tau)$ son las funciones $x(t)$ y $h(t)$, respectivamente, donde la variable t se ha reemplazado por la variable τ . La función $h(-\tau)$ es el reflejo de $h(\tau)$ respecto al eje de las ordenadas, como se muestra en la Fig. 2.59(b) y $h(t - \tau)$ es la función $h(-\tau)$ desplazada en una cantidad t , como se representa en la Fig. 2.59(c). Para evaluar la integral (2.106) es necesario multiplicar e integrar las funciones $x(\tau)$ [Fig. 2.59(a)] y $h(t - \tau)$ [Fig. 2.59(c)] para cada valor de t desde $-\infty$ hasta ∞ . Como se muestra en la Fig. 2.60(a), este producto es cero cuando el parámetro $t = -t_1$. El producto sigue siendo nulo hasta que el parámetro t toma el valor $t = 0$. En $t = t_2$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t_2 - \tau)$ es la zona sombreada que se muestra en la Fig. 2.60(c); el área de esta zona es el valor de la integral. A medida que t se incrementa a t_0 y posteriormente a t_3 , la Fig. 2.60(d) y (e) muestran las funciones que deben multiplicarse. Para $t = t_4$ el producto nuevamente se anula como se muestra en la Fig. 2.60(f), y sigue siendo nulo para cualquier valor de t tal que $t > t_4$ [Fig. 2.60(g)]. Resumiendo, si se deja que t varíe continuamente desde $-\infty$ hasta ∞ la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ es la función triangular que se muestra en la Fig. 2.60(h).

El procedimiento descrito es una técnica de análisis gráfico conveniente para evaluar o interpretar integrales de convolución. Los pasos a seguir son:

1. **Reflexión.** Se refleja $h(t)$ respecto del eje de ordenadas.
2. **Desplazamiento.** Se desplaza $h(-\tau)$ en una cantidad t donde se desea evaluar la convolución.

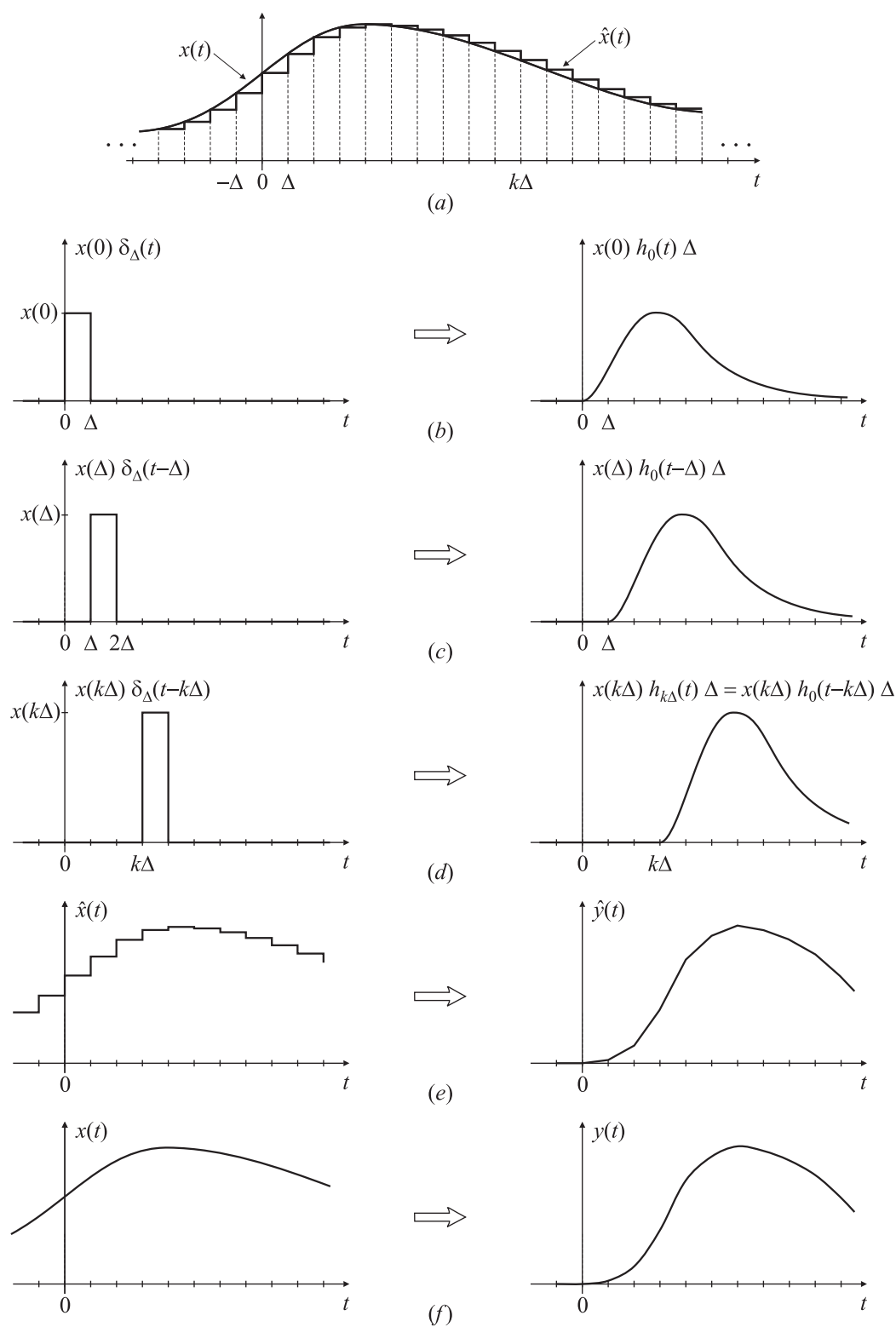


Fig. 2.57. Interpretación de la respuesta de un sistema lineal continuo *invariante* en el tiempo [ecuación (2.106)].

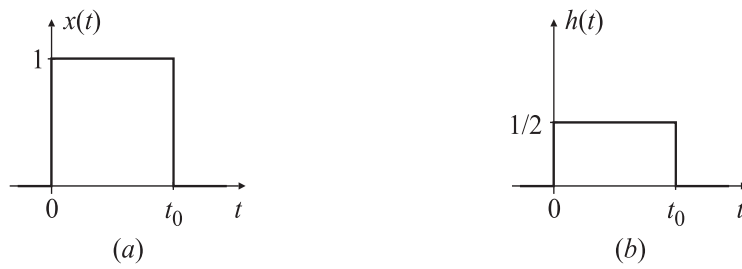


Fig. 2.58. Formas de onda a convolucionar.

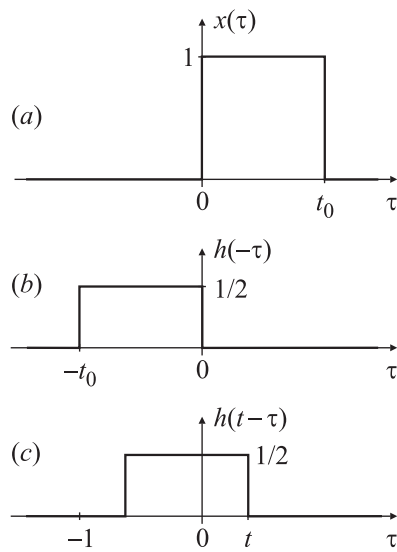


Fig. 2.59. Descripción gráfica de la operación de reflexión.

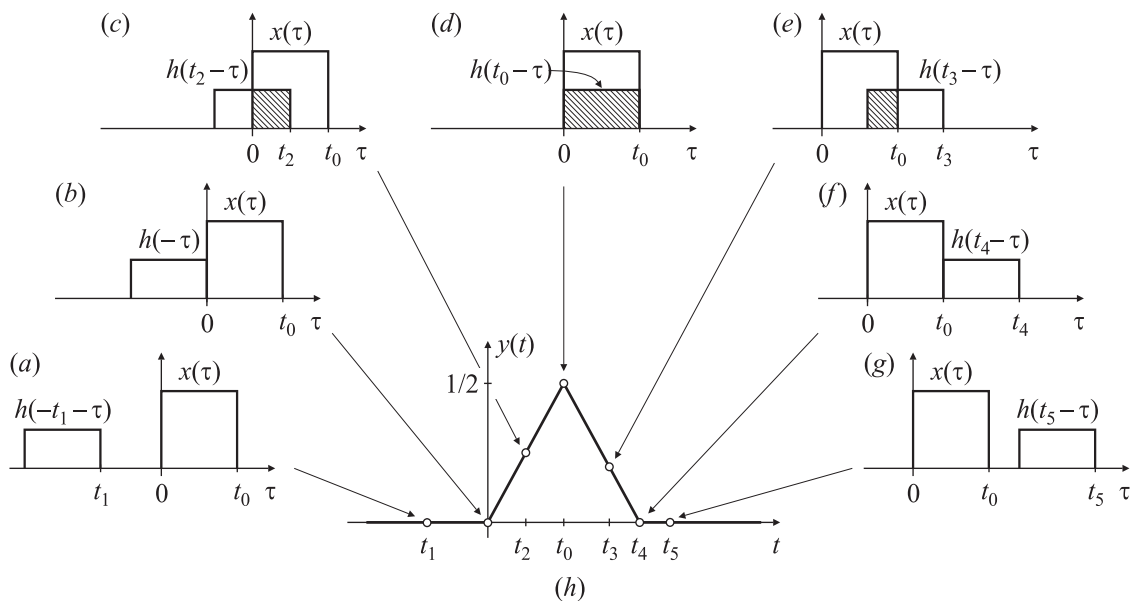


Fig. 2.60. Ejemplo gráfico de la convolución.

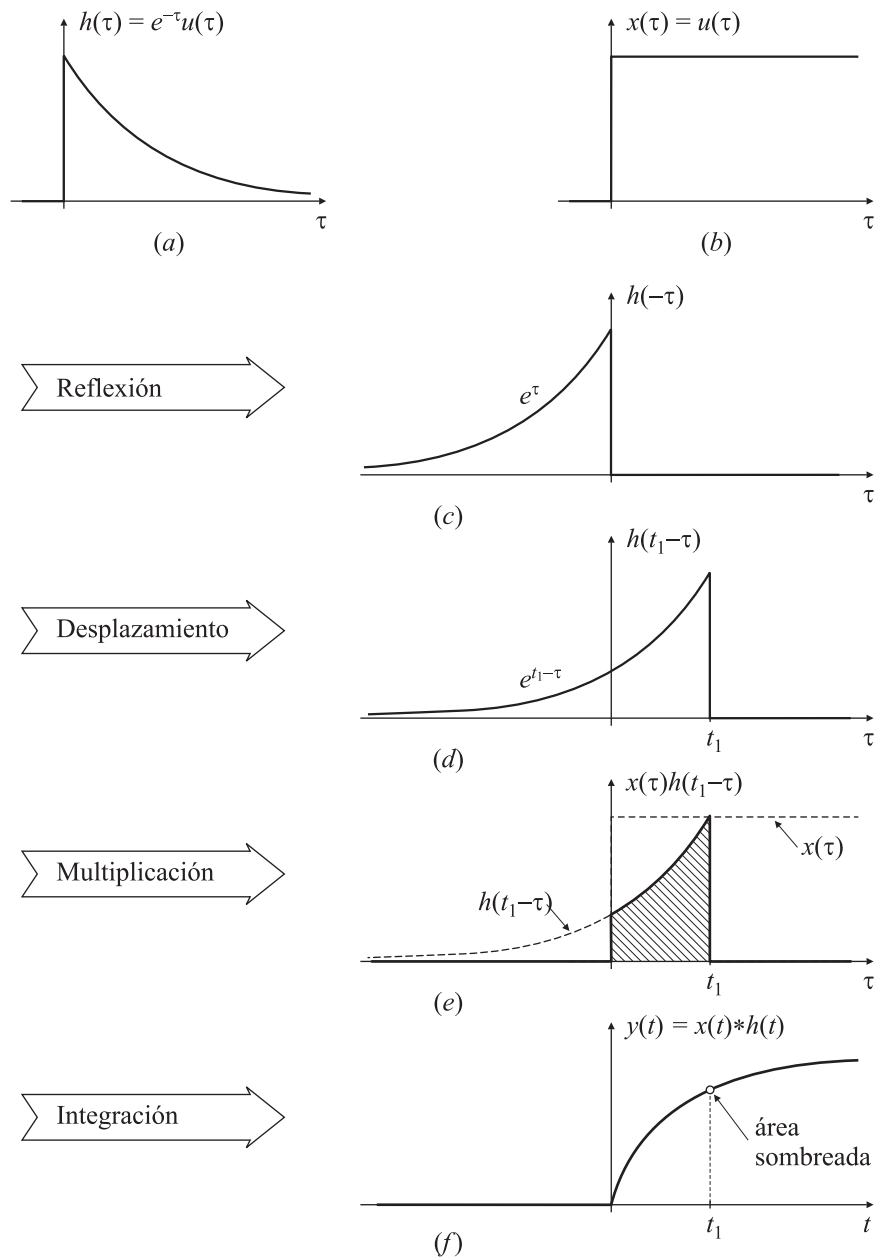


Fig. 2.61. Procedimiento de cálculo de la convolución.

3. **Multiplicación.** Se multiplica la función desplazada $h(t - \tau)$ por $x(\tau)$.
4. **Integración.** El área bajo el producto de $h(t - \tau)$ y $x(\tau)$ es el valor de la convolución en el tiempo t .

EJEMPLO 2.37. Cálculo gráfico de la integral de convolución

Las reglas para la evaluación gráfica de la integral de convolución se ejemplifican con el cálculo de $y(t) = x(t) * h(t)$ para las funciones $h(t) = e^{-t}u(t)$ y $x(t) = u(t)$, que se representan en la Fig. 2.61(a) y (b), respectivamente. Primero se refleja $h(\tau)$ para obtener $h(-\tau)$, como se ve en la Fig. 2.61(c). Luego se desplaza $h(-\tau)$ en una cantidad $t = t_1$ que es el instante donde se

quiere calcular la convolución [Fig. 2.61(d)]. Después se multiplica $h(t - \tau)$ por $x(\tau)$ [Fig. 2.61(e)], y finalmente se integra para obtener el resultado de la convolución para el tiempo t_1 [Fig. 2.61(f)]. El resultado ilustrado en la Fig. 2.61(f) se puede determinar directamente de la ecuación (2.100),

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau$$

Los extremos de integración se ajustan teniendo en cuenta los rangos donde alguna de las funciones es nula: como $x(\tau)$ es cero para $\tau < 0$, no tiene sentido integrar desde $-\infty$. Por otra parte como $h(t)$ es cero para $t < 0$, $h(t_1 - \tau)$ es cero para $t_1 - \tau < 0$, o bien para todo $\tau > t_1$; por lo tanto sólo es necesario integrar hasta t_1 . Entonces,

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau = \int_0^{t_1} (1) e^{-(t_1 - \tau)} d\tau \\ &= e^{-t_1} \left(e^{\tau} \Big|_0^{t_1} \right) = e^{-t_1} (e^{t_1} - 1) \\ &= 1 - e^{-t_1}. \end{aligned} \quad \square$$

En el Ejemplo 2.37 los extremos de la integral de convolución (originariamente de $-\infty$ a ∞) cambian de 0 a t . En general, los valores de los extremos cambian de acuerdo a cómo sean las funciones del integrando. Para el ejemplo, el menor valor de la variable⁹ τ para el cual la función $h(t - \tau) = e^{-(t - \tau)}$ es nula es $\tau = -\infty$; para la función $x(\tau)$ es $\tau = 0$.

Al integrar se debe elegir el *mayor* de estos dos valores como el *menor* de los extremos de integración. Para hallar el extremo superior se observa que $h(t - \tau) = e^{-(t - \tau)}$ es nula para cualquier $\tau > t$, y que $x(\tau)$ es nula para $\tau > \infty$. Por lo tanto el extremo superior de integración es el menor de estos valores.

Una regla general para determinar los extremos de integración es la siguiente:

Si $x(t)$ es una función que se anula fuera del intervalo $[L_1, U_1]$, y $h(t)$ una función que se anula fuera del intervalo $[L_2, U_2]$, los límites de integración de la integral de convolución (2.100) son $\max(L_1, L_2)$ y $\min(U_1, U_2)$, respectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{\max(L_1, L_2)}^{\min(U_1, U_2)} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Los valores de τ para los cuales se anula $x(\tau)$ son fijos; sin embargo, los valores de τ donde la “función deslizante” $h(t - \tau)$ es distinta de cero son función del parámetro t . Por ello es posible tener diferentes límites de integración para distintos rangos de t . Un gráfico como el de la Fig. 2.61 es útil para determinar correctamente los límites de integración; el cálculo de la integral se puede dividir en a lo sumo 5 etapas, según las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$:

1. no se solapan, como ocurre con las señales graficadas en la Fig. 2.60(a) o (b);
2. se solapan parcialmente por izquierda, según se muestra en la Fig. 2.60(c);
3. se solapan totalmente, representado en la Fig. 2.60(d);
4. se solapan parcialmente por derecha, como se ilustra en la Fig. 2.60(e);

⁹En este análisis, la variable es τ , y t es un *parámetro* que queda fijo: la integral se calcula “punto a punto” para cada valor de t .

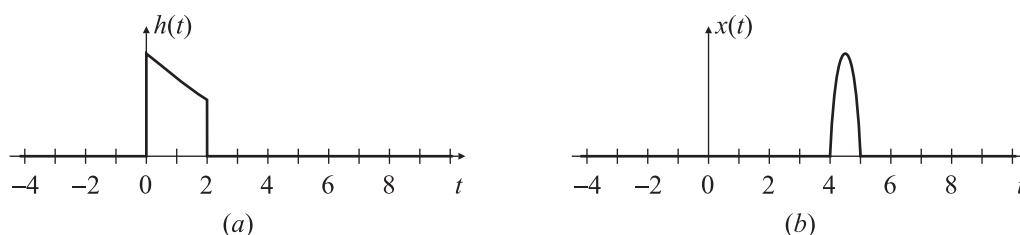


Fig. 2.62. Señales a convolucionar en el Ejemplo 2.38.

5. no se solapen, como se muestra en la Fig. 2.60(f) o (g).

Dependiendo de la naturaleza de las funciones a convolucionar, algunas de estas etapas pueden estar ausentes, como ocurre con las señales del Ejemplo 2.37, donde faltan las etapas 3 (solapamiento total), 4 (solapamiento parcial por derecha) y 5 (sin solapamiento), como se observa en la Fig. 2.61. Los detalles del cálculo se estudian en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.38. Las cinco etapas en el cálculo de la convolución

Se desea calcular la salida $y(t)$ de un sistema con respuesta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

cuando se lo excita con una entrada

$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 4 \leq t \leq 5, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las señales $h(t)$ y $x(t)$ se representan en la Fig. 2.62(a) y (b), respectivamente. La salida $y(t)$ se calcula convolucionando $h(t)$ y $x(t)$ siguiendo los pasos indicados más arriba: reflexión de una de las señales; desplazamiento de la misma hasta el instante donde desea calcularse la convolución, multiplicación de las dos señales, e integración del producto. La sucesión de estas tres operaciones para distintos valores del parámetro t se ilustra en la Fig. 2.63.

Etapas 1 (sin solapamiento: $-\infty < t < 4$). La reflexión y el desplazamiento de la señal hasta el instante $t_1 = 1$ se muestra en la Fig. 2.63(a). Es evidente que $h(t_1 - \tau)$ y $x(\tau)$ son distintas de cero en rangos diferentes; por lo tanto su producto es nulo, y también el área (integral). Esta situación continúa hasta que $t = t_2 = 4$, como se representa en la Fig. 2.63(b). Por lo tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int 0 d\tau = 0, \quad \text{para } -\infty < t < t_2 = 4.$$

Etapas 2 (solapamiento parcial por izquierda: $4 \leq t < 5$). Para $t > t_2$ las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ comparten un intervalo donde son no nulas, como se muestra en la Fig. 2.63(c) para $t = t_3$. En este caso, el producto de las funciones es nulo para $t < t_2 = 4$ y para $t > t_3$, siempre que t_3 sea menor que 5, cuando ocurre un solapamiento total entre $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$. Por lo tanto, en esta etapa se tiene que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_4^t \sin \pi \tau e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\pi}{1 + \pi^2} e^{4-t} - \frac{1}{1 + \pi^2} (\pi \cos \pi t - \sin \pi t), \quad \text{para } t_2 = 4 < t < 5. \end{aligned}$$

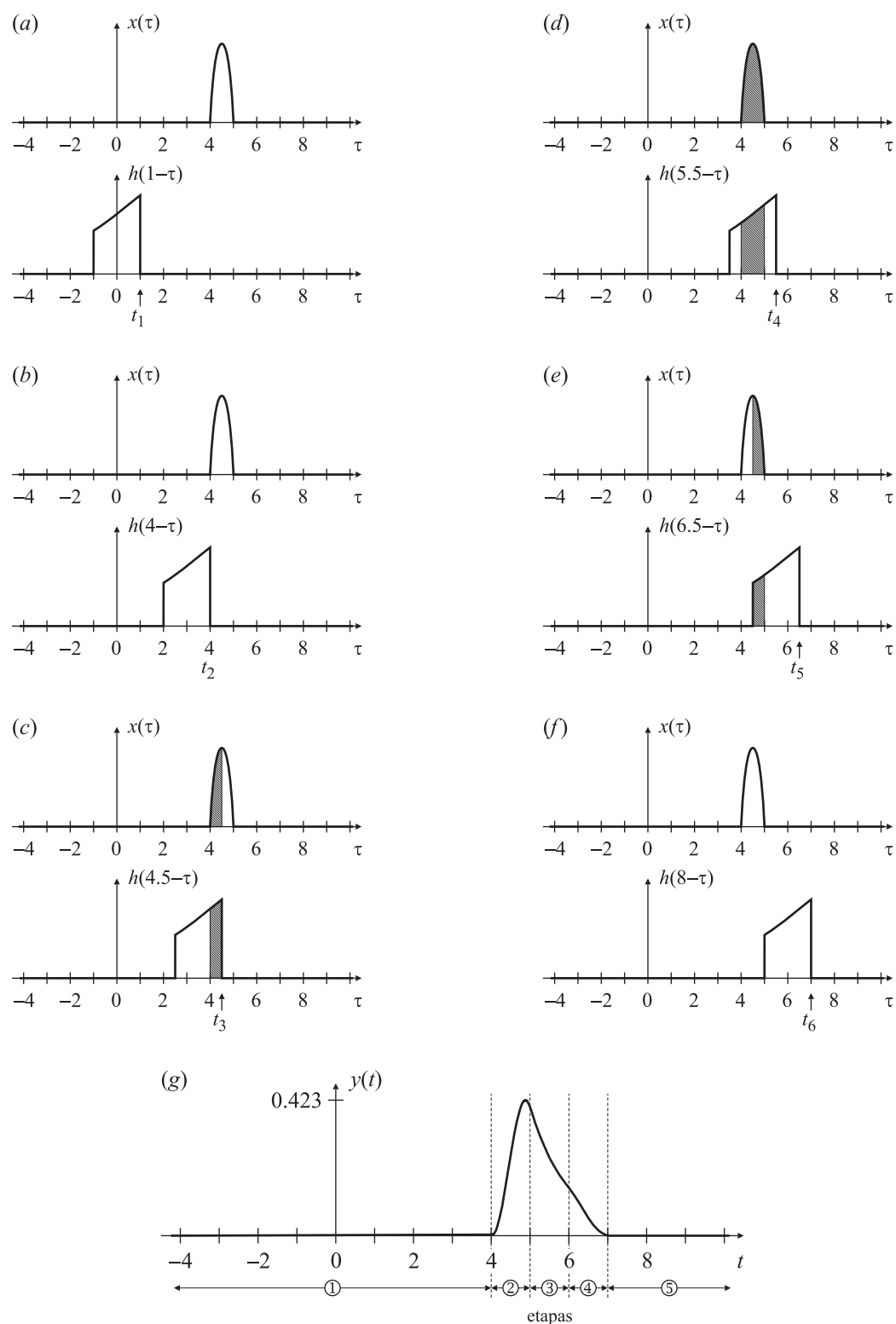


Fig. 2.63. Detalle de las 5 etapas en el cálculo de la convolución: sin solapamiento (a)-(b); solapamiento parcial por izquierda (c); solapamiento total (d); solapamiento parcial por derecha (e); sin solapamiento (f). Resultado de la convolución (g).

Etapla 3 (*solapamiento total*: $5 < t < 6$). En este caso las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ se solapan totalmente, como se representa en la Fig. 2.63(d) para $t = t_4 = 5,5$. En este caso los extremos de integración quedan fijos y determinados por una de las funciones [$x(\tau)$ en este ejemplo]. Resulta entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_4^5 \sin \pi\tau e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{(1+e)\pi}{1+\pi^2} e^{4-t}, \quad \text{para } 5 < t < 6. \end{aligned}$$

Etapla 4 (*solapamiento parcial por derecha*: $6 \leq t < 7$). En este intervalo de tiempo las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ nuevamente vuelven a solaparse parcialmente, pero sólo por derecha, como se muestra en la Fig. 2.63(e). En esta etapa el producto de las funciones es siempre cero para $t > 5$, lo que fija el extremo superior de integración. El límite inferior depende de la posición de la “función deslizante” $h(t - \tau)$, y en este ejemplo es $t - 2$. Por lo tanto, en este intervalo,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{t-2}^5 \sin \pi\tau e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{t-5} + \frac{e^2}{1+\pi^2} (\pi \cos \pi t + \sin \pi t), \quad \text{para } t_2 = 6 < t < 7. \end{aligned}$$

Etapla 5 (*sin solapamiento*: $7 \leq t$): Finalmente, para $t > 7$, las dos señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ no comparten ningún intervalo donde ambas sean no nulas, por lo que el producto (y el área) son nulos, como se representa en la Fig. 2.63(f).

Resumiendo los resultados, se tiene que

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0, & t < 4, \\ \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{4-t} - \frac{1}{1+\pi^2} (\pi \cos \pi t - \sin \pi t), & 4 \leq t < 5, \\ \frac{(1+e)\pi}{1+\pi^2} e^{4-t}, & 5 \leq t < 6, \\ \frac{\pi}{1+\pi^2} e^{7-t} + \frac{e^{-2}}{1+\pi^2} (\pi \cos \pi t - \sin \pi t), & 6 \leq t < 7, \\ 0, & 7 \leq t, \end{cases}$$

cuya representación temporal se representa en la Fig. 2.63(g). □

2.6.2. Forma alternativa de la integral de convolución

La interpretación gráfica descripta anteriormente no es sino una de las posibles interpretaciones de la convolución. La ecuación (2.100) también puede escribirse como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma, \quad (2.107)$$

que resulta de efectuar el cambio de variables $t - \tau \mapsto \sigma$. Si bien $d\sigma = -d\tau$, el signo de la integral no cambia porque también cambian los extremos de integración. De modo que para el cálculo de la convolución tanto $x(\tau)$ como $h(\tau)$ pueden ser reflejadas y desplazadas, y la elección entre una u otra forma depende de cuál de las dos se pueda calcular con mayor facilidad.

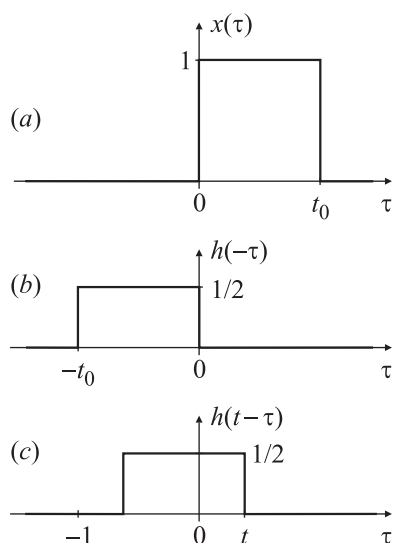


Fig. 2.64. Ejemplo gráfico del cálculo de la convolución por dos métodos alternativos.

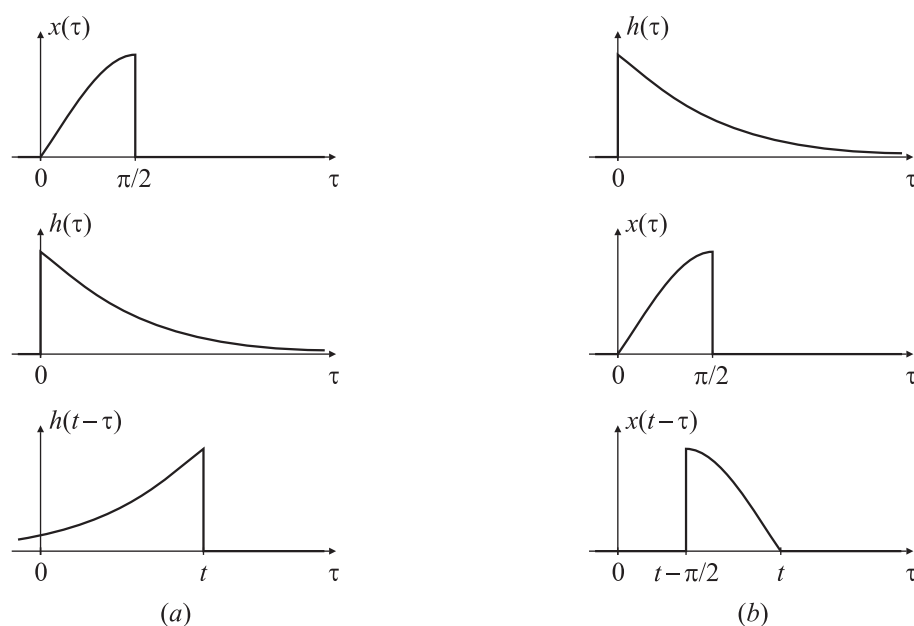


Fig. 2.65. Comparación del cálculo de la convolución del Ejemplo 2.39 utilizando la expresión (2.100) (a) o la ecuación (2.107) (b).

En la Fig. 2.64 se muestra gráficamente que las dos formas (2.100) y (2.107) de calcular la integral de convolución son equivalentes. La serie de gráficos a la izquierda de la Fig. 2.64 muestran la evaluación de (2.100), mientras que las curvas de la derecha ilustran el cálculo de (2.107). Los pasos definidos anteriormente: Reflexión, Desplazamiento, Multiplicación e Integración se ilustran en la Fig. 2.64(b), (c), (d) y (e), respectivamente. Como se indica en la Fig. 2.64(e), la convolución de $x(\tau)$ y $h(\tau)$ es la misma, independientemente de qué función se elija para reflejar y desplazar.

EJEMPLO 2.39. Comparación de los métodos para el cálculo de la convolución

Sean

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad x(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para las señales de este ejemplo, la convolución puede calcularse en 3 etapas: 1 (sin solapamiento), 2 (solapamiento parcial por izquierda), y 3 (solapamiento total). Como $h(t)$ es de longitud infinita, nunca ocurren las etapas 4 (solapamiento parcial por derecha) y 5 (sin solapamiento). Usando (2.100), $y(t) = x(t) * h(t)$ está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{(etapa 1): } t \leq 0, \\ \int_0^t \sin \tau e^{-(t-\tau)} d\tau, & \text{(etapa 2): } 0 \leq t < \pi/2, \\ \int_0^{\pi/2} \sin \tau e^{-(t-\tau)} d\tau, & \text{(etapa 3): } \pi/2 \leq t, \end{cases} \quad (2.108)$$

Los límites de la integral se determinan aplicando la regla enunciada en la Sección 2.6.1, y con la ayuda de la Fig. 2.65(a). Los valores extremos del argumento de la función $x(\tau)$ para los cuales es distinta de cero son 0 y $\pi/2$, respectivamente. Para la función $h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}$ el menor valor del argumento para el cual la función se anula es $\tau = -\infty$, y el mayor valor del argumento es $\tau = t$. Para definir los extremos de integración se toma el mayor valor entre los extremos inferiores; en cualquier caso, este límite es 0. El extremo superior de integración es el menor de los extremos superiores, y por lo tanto es una función de t . Para $0 \leq t \leq \pi/2$, el mínimo es t ; para $t \geq \pi/2$, el extremo de integración es $\pi/2$. Evaluando (2.108) se encuentra que

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}), & 0 \leq t < \pi/2, \\ \frac{1}{2} e^{-t} (1 + e^{\pi/2}), & \pi/2 \leq t. \end{cases} \quad (2.109)$$

De manera análoga, de (2.107),

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{(etapa 1): } t \leq 0, \\ \int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau, & \text{(etapa 2): } 0 \leq t < \pi/2, \\ \int_{t-\pi/2}^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau, & \text{(etapa 3): } \pi/2 \leq t. \end{cases} \quad (2.110)$$

Aunque la ecuación (2.110) que describe la señal de salida $y(t)$ es diferente de (2.108), su evaluación da el mismo resultado (2.109). \square

2.6.3. Convolución con impulsos

La integral de convolución más sencilla de evaluar es aquella en la cual alguna de las funciones intervinientes es un impulso. La convolución entre una función $x(t)$ y un impulso $\delta(t-t_0)$ representados en las Figs. 2.66(a) y (b), respectivamente, se puede calcular aplicando, por ejemplo, la ecuación (2.100),

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \delta(\tau-t_0) d\tau = x(t-t_0).$$

El paso del segundo al tercer miembro se explica por la Propiedad 3 del impulso, repetida aquí por comodidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-\theta) x(\tau) d\tau = x(\theta).$$

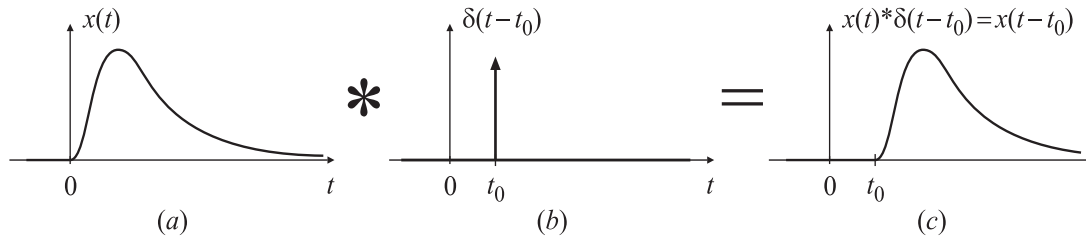


Fig. 2.66. Convolución de una función $x(t)$ con un impulso $\delta(t - t_0)$.

Si, en cambio, se aplica la expresión (2.107), se tiene que

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta[(t - \tau) - t_0] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0).$$

En definitiva, cualquiera de las dos expresiones muestra que la convolución de la función $x(t)$ con una función impulso resulta en desplazar $x(t)$, llevando el origen del eje de las abscisas al lugar donde está localizado el impulso, como se muestra en la Figs. 2.66(c). Como se estudiará más adelante, esta propiedad simplifica mucho el análisis de problemas más complicados.

EJEMPLO 2.40. Convolución con un par de impulsos

Sea $h(t)$ la función formada por un par de impulsos que se muestra en la Fig. 2.67(a), y $x(t)$ la función pulso que se observa en la Fig. 2.67(b). Para estas funciones, la ecuación (2.100) toma la forma particular

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)] x(t - \tau) d\tau,$$

y aplicando la Propiedad 3 del impulso se encuentra que

$$y(t) = x(t - T) + x(t + T),$$

cuya gráfica se representa en la Fig. 2.67(c). □

EJEMPLO 2.41. Convolución con un tren de impulsos

El pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

de la Fig. 2.67(d) se convoluciona con el tren de impulsos

$$p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$$

que se grafica en la Fig. 2.67(e). El resultado de la convolución es

$$y(t) = x(t) * p(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n x(t - nT_0).$$

Esta expresión, que se representa en la Fig. 2.67(f), muestra que al convolucionar el pulso rectangular con el tren de impulsos, el primero queda replicado donde se localizan cada uno de los impulsos. □

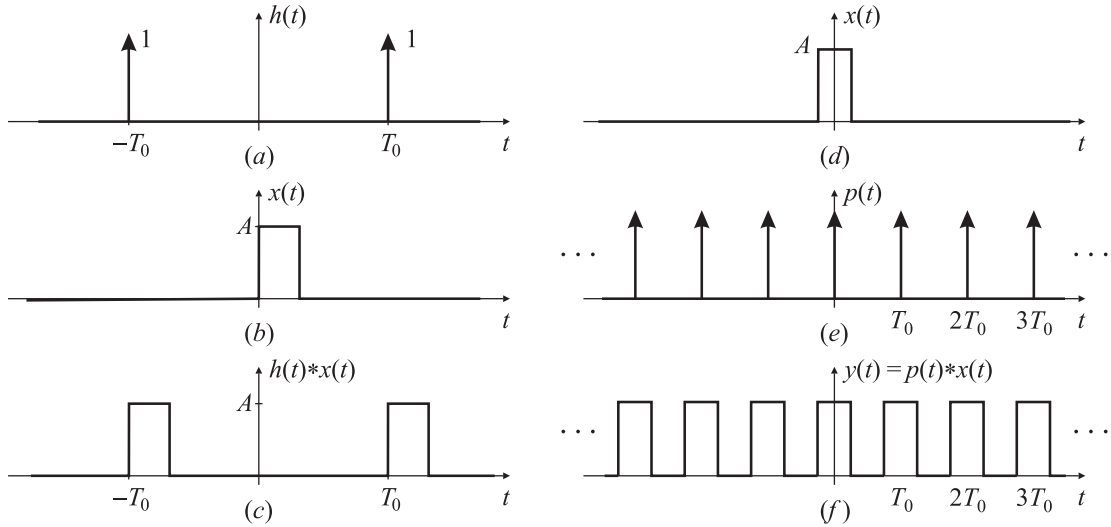


Fig. 2.67. Convolución de un pulso con dos impulsos (a)-(c) y con un tren de impulsos (d)-(f).

El ejemplo anterior muestra una manera posible de obtener una función periódica a partir de una señal aperiódica. Si se observa con atención, la señal $y(t)$ del Ejemplo 2.41 es en realidad una señal periódica. Utilizando la notación de las primeras Secciones, se tiene que

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t).$$

Esta observación es de gran utilidad para facilitar el cálculo de algunas series de Fourier.

2.6.4. Teorema de convolución temporal

Posiblemente, una de las herramientas más poderosas en el análisis científico es la relación entre la convolución de dos señales y su transformada de Fourier. Esta propiedad, conocida como *teorema de convolución*, permite calcular la convolución matemáticamente (o visualmente) en el dominio tiempo multiplicando las transformadas en el dominio frecuencia. Esto es, si $h(t)$ tiene transformada de Fourier $H(f)$ y $x(t)$ tiene transformada $X(f)$, entonces la convolución $x(t) * h(t)$ tiene transformada $X(f)H(f)$. El par transformado correspondiente es

$$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(f)X(f)$$

Para establecer este resultado, se transforman ambos lados de la ecuación (2.100),

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt. \quad (2.111)$$

Suponiendo que el orden de integración puede intercambiarse¹⁰, se tiene que

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau. \quad (2.112)$$

¹⁰El intercambio del orden de integración no es inmediato porque las integrales son impropias; para que el resultado sea correcto, las funciones $x(\cdot)$ y $h(\cdot)$ deben cumplir con una serie de requisitos (continuidad uniforme, etc.) que en general son satisfechos por las señales usuales en la teoría de sistemas.

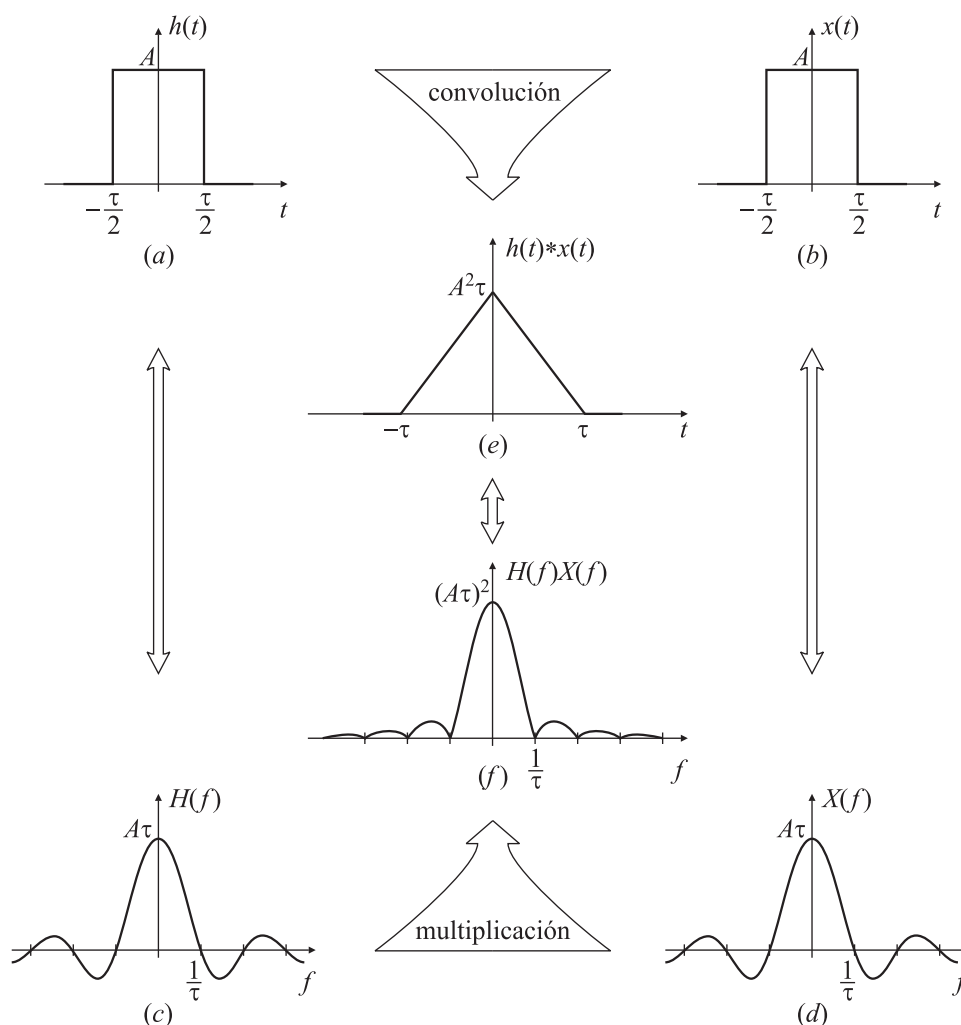


Fig. 2.68. Ejemplo gráfico del teorema de convolución.

Sustituyendo $\sigma = t - \tau$, el término entre corchetes se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f(\sigma+t)} d\sigma = e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f(\sigma)} d\sigma = e^{-j2\pi f \tau} H(f).$$

Entonces, la ecuación (2.112) resulta

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} H(f) d\tau = H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = H(f) X(f).$$

La recíproca se puede probar de manera similar.

EJEMPLO 2.42. Transformada de un pulso triangular

Para ilustrar esta propiedad se estudia la convolución de los dos pulsos, ilustrados en las Fig. 2.68(a) y (b). La convolución de dos pulsos es una función triangular, como se observa en la Fig. 2.68(e). La transformada de Fourier del pulso es la función sinc (f) que se muestra en la Fig. 2.68(c) y (d). El teorema de convolución establece que la convolución en el dominio temporal se corresponde con la

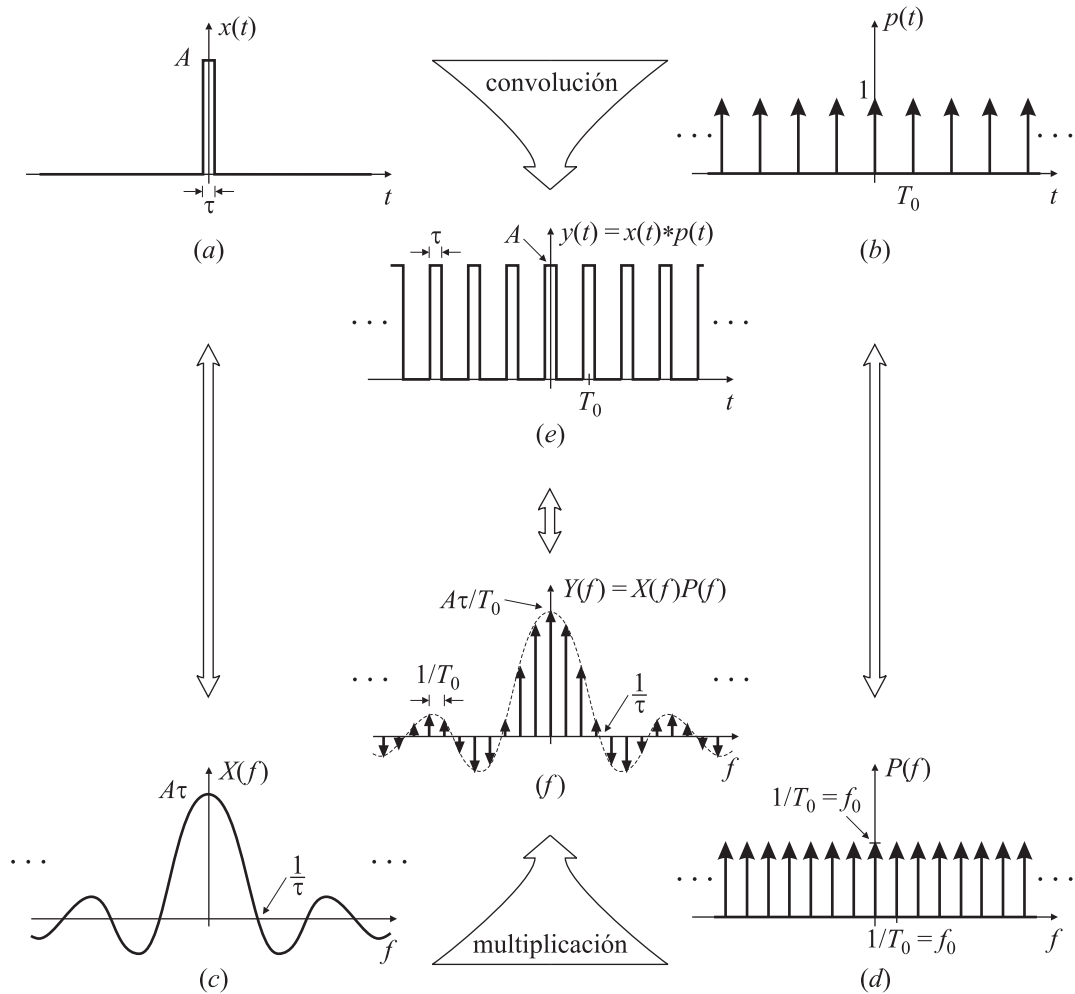


Fig. 2.69. Ejemplo de aplicación del teorema de convolución temporal.

multiplicación en el dominio frecuencial; de este modo, la forma de onda triangular de la Fig. 2.68(e) y la función $\text{sinc}^2(f)$ de la Fig. 2.68(f) son pares transformados de Fourier. Los detalles del cálculo se estudian en el Ejercicio 17. \square

Uno de los aportes más significativos de la teoría de distribuciones es que el producto de una función continua y un impulso está bien definido (Sección 2.3.4, Propiedad 3). Por lo tanto, si $x(t)$ es una función continua en $t = t_0$, entonces,

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0).$$

Es decir, que el resultado del producto de una función continua con un impulso es un impulso de área igual al valor de la función continua evaluada donde ocurre el impulso. Este resultado, junto con el teorema de convolución, ayuda a obtener muchos pares transformados de Fourier: el cambio de una convolución en el dominio temporal por un producto en el dominio frecuencial permite resolver problemas arduos de manera casi trivial.

EJEMPLO 2.43. Transformada de un tren de pulsos

En la Fig. 2.69(a) se muestra un pulso rectangular $x(t)$ de ancho τ y altura A y en la Fig. 2.69(b) un tren infinito de impulsos $p(t)$. La convolución de estas dos funciones es el tren infinito de pulsos que se muestra en la Fig. 2.69(e). Para obtener la transformada de Fourier de esta secuencia infinita de pulsos, se aplica el teorema de convolución temporal. La transformada de Fourier del pulso $x(t)$ es $X(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f)$ que se muestra en la Fig. 2.69(c) y la transformada del tren de impulsos $p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$ es $P(f) = T_0^{-1} \sum_k \delta(f - k/T_0)$, que se representa en la Fig. 2.69(d). La señal que resulta de convolucionar $x(t)$ con $p(t)$ es la señal (periódica)

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t) = x(t) * \sum_n \delta(t - nT_0) = \sum_n x(t - nT_0),$$

como se estudió en el Ejemplo 2.41. La transformada de esta función se puede obtener aplicando el teorema de convolución temporal, que establece que la transformada de $\tilde{x}(t)$ es el producto de las transformadas de $x(t)$ y de $p(t)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \mathcal{F}\{x(t) * p(t)\} = X(f)P(f) \\ &= A\tau \frac{1}{T_0} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \\ &= A\frac{\tau}{T_0} \sum_k \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0}k\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \end{aligned}$$

Esta transformada se muestra en la Fig. 2.69(f). Resulta entonces que la transformada de Fourier de un tren de pulsos es una sucesión de funciones impulso, cuya amplitud está pesada o modulada por una función $A\tau \text{sinc}(\tau f)$. \square

Los Ejemplos 2.41 y 2.43 muestran una propiedad fundamental de los espectros de señales periódicas. Como la señal periódica $\tilde{x}(t)$ se puede pensar como la convolución de un tren de impulsos $p(t)$ y una señal aperiódica $x(t)$ formada por un período de $\tilde{x}(t)$, el teorema de la convolución en tiempo establece que la transformada $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$ de $\tilde{x}(t)$ es el producto de las transformadas de $x(t)$ y de $p(t)$. En particular, como el espectro de $p(t)$ también es un tren de impulsos (en frecuencia), el espectro de la señal periódica estará formado por impulsos, modulados en amplitud por la transformada de la señal aperiódica $x(t)$, como se sintetiza en el cuadro siguiente. El producto de las funciones en el dominio frecuencia debe interpretarse en el sentido de la teoría de distribuciones; en caso contrario carece de sentido.

$$\begin{array}{l} \tilde{x}(t) = x(t) * p(t) \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \quad \text{con } x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + T_0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0) \\ \Downarrow \\ P(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{array} \right. \\ \Updownarrow \qquad \qquad \qquad \Updownarrow X(f) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = X(f)P(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) \\ &= f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) \delta(f - kf_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \end{aligned}$$

Esto es otro punto de vista de los resultados presentados en la Sección 2.4.1.

Respuesta en frecuencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Una de las propiedades más útiles de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT) es que cuando son excitados con entradas exponenciales complejas de la forma $e^{j2\pi f_0 t}$ su salida también es una exponencial compleja, sólo que con amplitud y fase distintas a las de la señal de entrada. Como las formas de onda de entrada y salida son las mismas, se dice que las exponenciales complejas son *autofunciones* para los sistemas lineales.

Sea \mathcal{S} un sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por su respuesta impulsiva $h(t)$. Si la señal de entrada es una exponencial compleja $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, la salida está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Ae^{j2\pi f_0 (t - \tau)} d\tau = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \right)}_{H(f)|_{f=f_0}} Ae^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0} Ae^{j2\pi f_0 t} = H(f)|_{f=f_0} x(t), \end{aligned} \quad (2.113)$$

La última expresión muestra que la salida del sistema es la entrada escalada por el número complejo $H(f)|_{f=f_0}$. En estos casos, la transformada de Fourier $H(f)$ de la respuesta impulsiva $h(t)$ se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema \mathcal{S} .

El mismo resultado puede obtenerse aplicando el teorema de convolución en tiempo. Si $H(f)$ es la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva $h(t)$, la transformada de la entrada $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ es $X(f) = A\delta(f - f_0)$. Por lo tanto,

$$Y(f) = H(f)X(f) = H(f)A\delta(f - f_0) = H(f)|_{f=f_0} A\delta(f - f_0).$$

Como $H(f)|_{f=f_0}$ es un número complejo, la antitransformada de $Y(f)$ es inmediata:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = H(f)|_{f=f_0} \mathcal{F}^{-1}\{A\delta(f - f_0)\} \\ &= H(f)|_{f=f_0} Ae^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0} x(t). \end{aligned}$$

Esta característica facilita enormemente el cálculo de la respuesta del sistema cuando se excita con este tipo de señales, pues lo único que debe calcularse es el número complejo $H(f)|_{f=f_0}$.

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo ante una excitación de tipo senoidal es consecuencia directa de estos resultados. Si la entrada $x(t)$ está dada por

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = A \frac{1}{2} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \right) = \frac{1}{2} Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} Ae^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t},$$

la propiedad de linealidad, junto con el resultado (2.113) indica que

$$y(t) = H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + H(f)|_{f=-f_0} \frac{1}{2} Ae^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}. \quad (2.114)$$

Esta expresión puede simplificarse todavía más notando que, si la respuesta impulsiva $h(t)$ es real,

$$H(f)|_{f=-f_0} = H^*(f)|_{f=f_0},$$

como resulta evidente de aplicar la definición:

$$\begin{aligned} H^*(f_0) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) (e^{-j2\pi f_0 t})^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j2\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi(-f_0)t} dt = H(-f_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión (2.114) puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(t) &= H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + H^*(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \left(H(f)|_{f=f_0} \frac{1}{2} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \right)^* \\ &= \operatorname{Re} \left\{ H(f)|_{f=f_0} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Notando

$$H(f)|_{f=f_0} = |H(f_0)| e^{j \arg[H(f_0)]}$$

donde

$$|H(f_0)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{H(f_0)\}^2 + \operatorname{Im}\{H(f_0)\}^2}, \quad \arg[H(f_0)] = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}\{H(f_0)\}}{\operatorname{Re}\{H(f_0)\}} \right],$$

la ecuación (2.115) resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left\{ |H(f_0)| e^{j \arg[H(f_0)]} A e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= |H(f_0)| A \cos(2\pi f_0 t + \phi + \arg[H(f_0)]). \end{aligned}$$

Esta expresión pone de manifiesto el efecto del sistema en la respuesta:

$$y(t) = \underbrace{|H(f_0)| A}_{\substack{\uparrow \\ \text{cambio en la magnitud}}} \cos(2\pi f_0 t + \phi + \underbrace{\arg[H(f_0)]}_{\substack{\uparrow \\ \text{cambio en la fase}}})$$

La salida del sistema es la misma entrada escalada en magnitud por el módulo de la respuesta en frecuencia $|H(f_0)|$, y desfasada por el argumento de la respuesta en frecuencia, ambos evaluados a la frecuencia f_0 de la excitación.

A veces resulta más conveniente expresar el desfase introducido por el sistema como un *retardo* de tiempo, lo que puede lograrse escribiendo

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(f_0)| A \cos(2\pi f_0 t + \phi + \arg[H(f_0)]) \\ &= |H(f_0)| A \cos[2\pi f_0 (t + \arg[H(f_0)] / (2\pi f_0)) + \phi] \\ &= |H(f_0)| A \cos[2\pi f_0 (t - \Delta T) + \phi], \end{aligned}$$

donde

$$\Delta T = - \frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0}$$

es el retardo de tiempo que sufre la señal al atravesar el sistema.

EJEMPLO 2.44. Respuesta de un SLIT excitados por una entrada senoidal

Sea \mathcal{S} un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta impulsiva $h(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$ y $\alpha > 0$, excitado con una entrada $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \gamma)$. En el Ejemplo 2.5 (página 87) se obtuvo que

$$H(f) = \frac{\beta}{\alpha + j2\pi f} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2},$$

y también

$$|H(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \arg[H(f)] = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right).$$

La salida $y(t)$ del sistema ante la entrada $x(t)$ es entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(f_0)| A \sin(2\pi f_0 t + \gamma + \arg[H(f_0)]) \\ &= \frac{\beta A}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f_0)^2}} \sin\left[2\pi f_0 t + \gamma - \arctan\left(\frac{2\pi f_0}{\alpha}\right)\right], \end{aligned}$$

pues $\sin(2\pi f_0 t + \gamma) = \cos(2\pi f_0 t + \gamma - \pi/2)$.

En particular, el SLIT caracterizado por $h(t)$ es un filtro pasabajos de primer orden tipo Butterworth, con frecuencia de corte en $f_c = \alpha/(2\pi)$ Hz y ganancia unitaria en la banda de paso si $\beta = \alpha$. Si la frecuencia de corte del filtro es $f_c = \alpha/(2\pi) = 100$ Hz, y la entrada $x(t)$ es

$$x(t) = 10 \sin(2\pi 170 t),$$

es decir, tiene frecuencia $f_0 = 170$ Hz, amplitud $A = 10$ y fase $\phi = 0$, el módulo y la fase de $H(f)$ evaluados a la frecuencia de la señal de entrada están dados por

$$\begin{aligned} |H(f_0)| &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f_0)^2}} = \frac{2\pi 100}{\sqrt{(2\pi 100)^2 + (2\pi 170)^2}} = \frac{10}{\sqrt{389}} \approx 0,5, \\ \arg[H(f_0)] &= -\arctan\left(\frac{2\pi f_0}{\alpha}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi 170}{2\pi 100}\right) = -1,04 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la salida $y(t)$ puede escribirse como

$$y(t) \approx 0,5 \times 10 \times \sin(2\pi 170 t - 1,04).$$

El retardo de tiempo entre la entrada y la salida es

$$\Delta T = -\frac{\arg[H(f_0)]}{2\pi f_0} = \frac{1,04}{2\pi 170} \approx 0,97 \text{ ms},$$

de manera que la salida también puede expresarse como

$$y(t) \approx 0,5 \times 10 \times \sin[2\pi 170(t - 0,97 \times 10^{-3})]. \quad (2.116)$$

La Fig. 2.70 muestra la entrada y la salida del sistema en función del tiempo obtenidas por simulación numérica. Se comprueba que coincide con la expresión (2.116). \square

2.6.5. Teorema de convolución frecuencial

De manera equivalente, una convolución de funciones en el dominio de la frecuencia se corresponde con una multiplicación de las antitransformadas en el dominio temporal. La

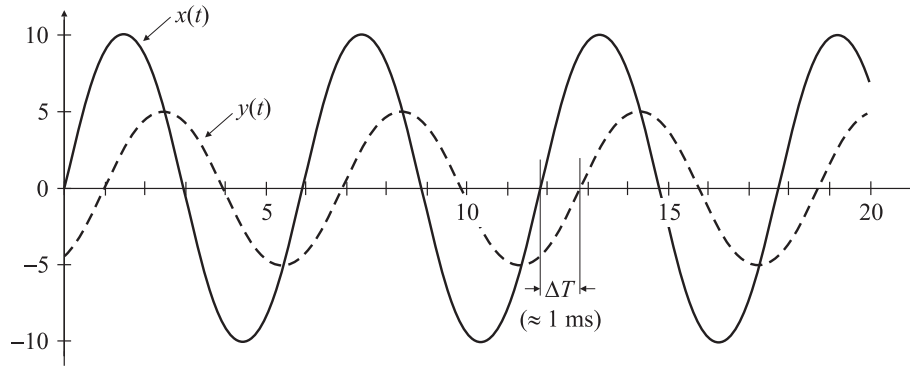


Fig. 2.70. Señales de entrada $x(t)$ y de salida $y(t)$ del sistema con respuesta impulsiva $h(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$.

transformada de Fourier del producto $x(t)h(t)$ es equivalente a la convolución $X(f) * H(f)$. El par transformado de Fourier es

$$x(t)h(t) \Leftrightarrow X(f) * H(f).$$

La derivación de este par transformado es similar a la del teorema de convolución temporal; también puede obtenerse en base al teorema de convolución temporal y la propiedad de dualidad¹¹.

EJEMPLO 2.45. Transformada de una ráfaga o “burst”

En la Fig. 2.71(e) se representa la señal $y(t)$ formada por 7 periodos ($\tau = 7$ en la figura) de una señal cosenoidal de frecuencia $f_0 = 1/T_0$ y amplitud A :

$$y(t) = \begin{cases} A \cos 2\pi f_0 t, & |t| < 3,5T_0 = 3,5/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El cálculo directo de esta transformada es

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-3,5T_0}^{3,5T_0} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-3,5T_0}^{3,5T_0} A \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f t) dt \\ &= \frac{A}{4\pi} \frac{\sin[2\pi(f-f_0)t]}{(f-f_0)} \Big|_{-3,5T_0}^{3,5T_0} + \frac{A}{4\pi} \frac{\sin[2\pi(f+f_0)t]}{(f+f_0)} \Big|_{-3,5T_0}^{3,5T_0} \\ &= \frac{A}{4\pi} \left[\frac{\sin[2\pi(f-f_0)3,5T_0]}{(f-f_0)} - \frac{\sin[2\pi(f-f_0)(-3,5T_0)]}{(f-f_0)} \right] \\ &\quad + \frac{A}{4\pi} \left[\frac{\sin[2\pi(f+f_0)3,5T_0]}{(f+f_0)} - \frac{\sin[2\pi(f+f_0)(-3,5T_0)]}{(f+f_0)} \right] \\ &= \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \end{aligned} \quad (2.117)$$

¹¹En caso de utilizarse las transformadas que dependen de la variable frecuencia angular ω , la forma correcta del par transformado es $x(t)h(t) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) H(\Omega)$.

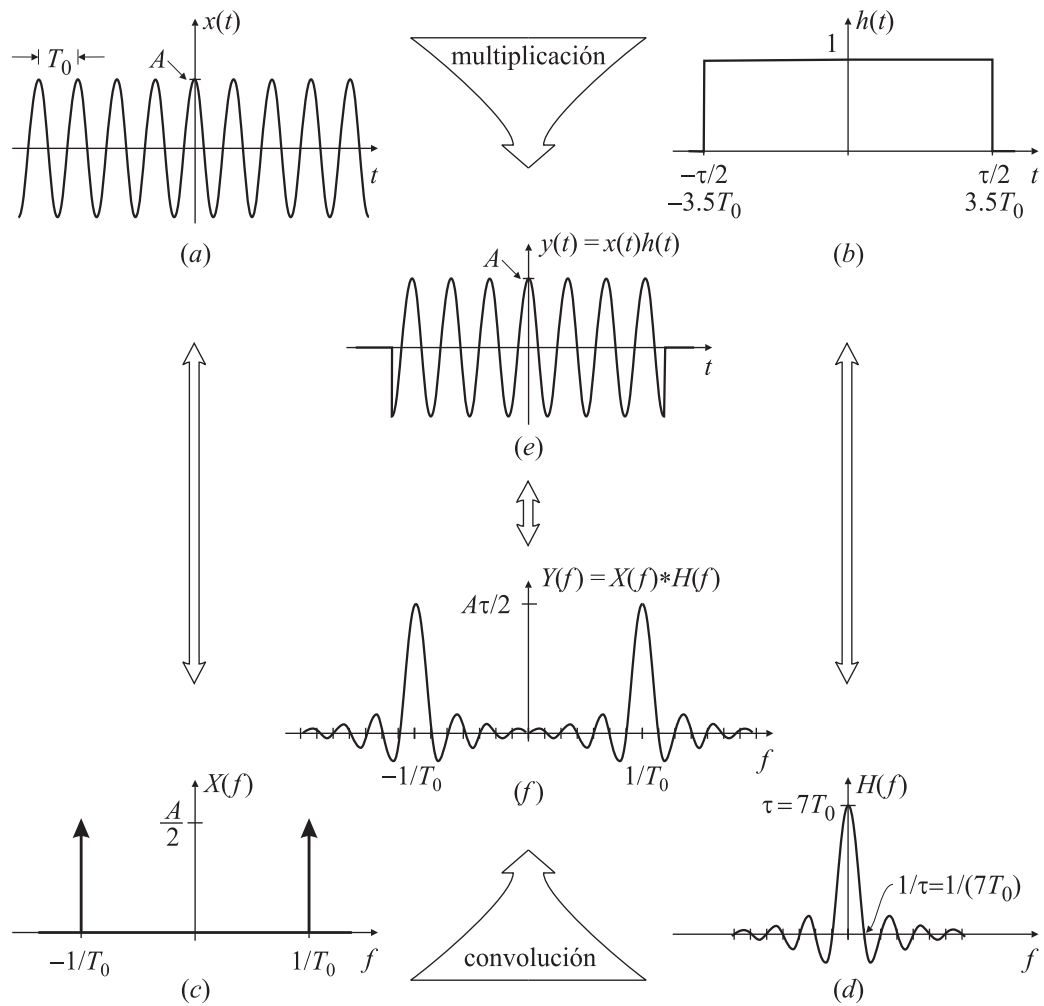


Fig. 2.71. Ejemplo gráfico del teorema de convolución en frecuencia.

La última expresión se puede simplificar un poco más

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{\text{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}(7\pi T_0 f - 7\pi T_0 f_0)}{(f-f_0)} + \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f + 7\pi T_0 f_0)}{(f+f_0)} \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi} \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f - 7\pi)}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f + 7\pi)}{(f+f_0)} = -\frac{A}{\pi} \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f)}{(f-f_0)} - \frac{A}{\pi} \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f)}{(f+f_0)}
 \end{aligned}$$

de donde resulta

$$Y(f) = \frac{A}{\pi} \frac{\text{sen}(7\pi T_0 f)}{f^2 - f_0^2}. \quad (2.118)$$

Por otra parte la ecuación (2.117) también puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \frac{A}{2\pi} \frac{\text{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} \frac{\text{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{(f+f_0)} \\
 &= \frac{A}{2\pi} (7\pi T_0) \frac{\text{sen}[7\pi(f-f_0)T_0]}{7\pi T_0(f-f_0)} + \frac{A}{2\pi} (7\pi T_0) \frac{\text{sen}[7\pi(f+f_0)T_0]}{7\pi T_0(f+f_0)} \\
 &= \frac{7AT_0}{2} \text{sinc}[(f-f_0)7T_0] + \frac{7AT_0}{2} \text{sinc}[(f+f_0)7T_0].
 \end{aligned} \quad (2.119)$$

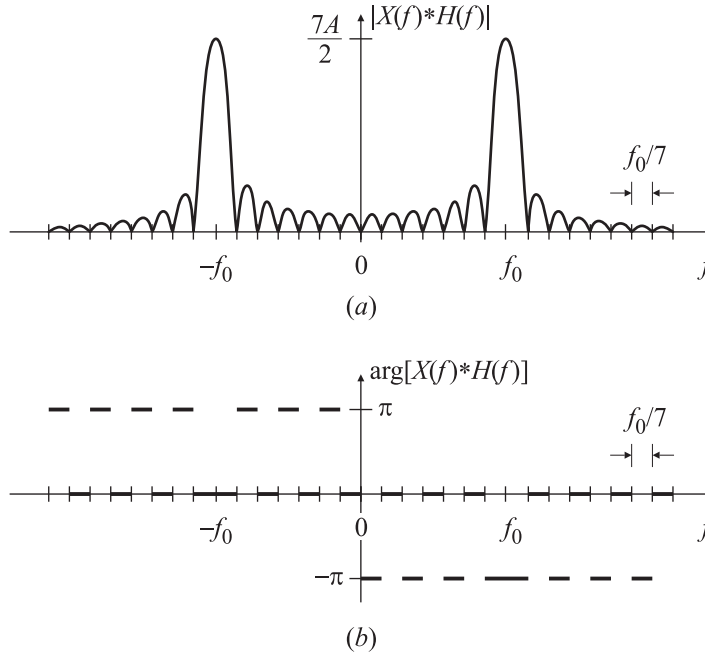


Fig. 2.72. Transformada de Fourier en módulo (a) y fase (b) de la ráfaga del Ejemplo 2.45.

Tanto (2.118) como (2.119) representan la misma transformada. Sin embargo, esto es difícil de apreciar a primera vista, y tampoco es sencillo estar absolutamente convencido de la validez de cualquiera de las dos expresiones. En casos como éste el teorema de convolución frecuencial presta una ayuda valiosa. Como se muestra en la Fig. 2.71(e), la señal $y(t)$ puede pensarse como el producto de una señal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, representada en la Fig. 2.71(a), con la señal tipo pulso $h(t)$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 3,5T_0 = 3,5/f_0, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que se grafica en la Fig. 2.71(b). Es evidente que

$$X(f) = \frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \delta(f - f_0), \quad \text{y} \quad H(f) = 7T_0 \text{sinc}(7T_0 f).$$

como muestran las Figs. 2.71(c) y (d), respectivamente. Como $y(t) = x(t) \times h(t)$, el teorema de convolución en frecuencia asegura que

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) * H(f) = \left[\frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} \delta(f - f_0) \right] * 7T_0 \text{sinc}(7T_0 f) \\ &= \frac{7AT_0}{2} \text{sinc}[(f - f_0)7T_0] + \frac{7AT_0}{2} \text{sinc}[(f + f_0)7T_0]. \end{aligned}$$

Esta última expresión coincide con (2.119). La Fig. 2.71(f) muestra la forma aproximada de este espectro, pues hay que tener en cuenta las sumas de las "colas" de los $\text{sinc}(\cdot)$. De todos modos, es muy aproximado al espectro real que se reproduce en la Fig. 2.72. \square

El ejemplo anterior muestra que la ventaja aplicar el teorema de convolución frecuencial es que no sólo permite calcular la transformada con menor cantidad de pasos (y menor oportunidad para el error) sino que también facilita la interpretación de los resultados y obtener una comprensión más acabada del problema.

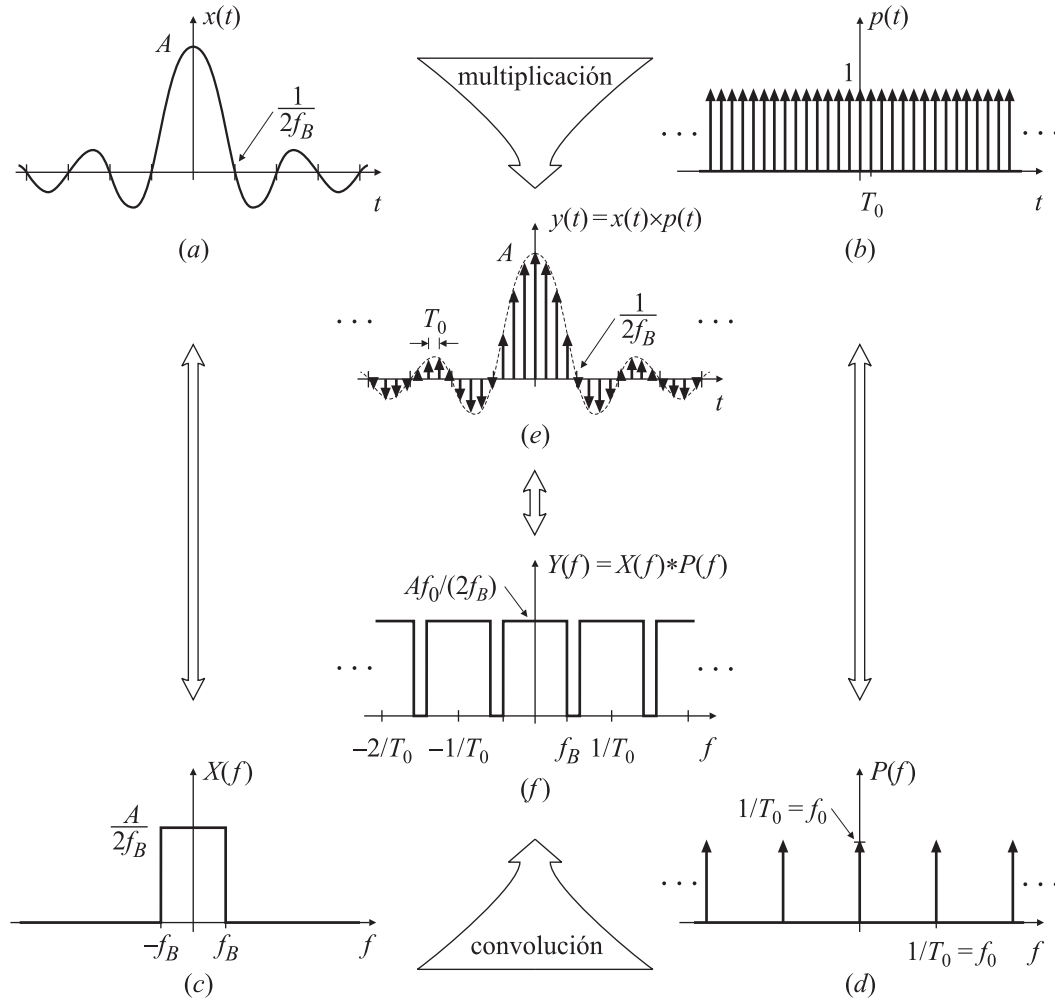


Fig. 2.73. Aplicación del teorema de convolución en frecuencia para calcular el espectro de un tren de impulsos modulado por un $\text{sinc}(\cdot)$.

EJEMPLO 2.46. Espectro de un tren de impulsos modulado

La Fig. 2.73(a) muestra una señal $x(t)$ que modula un tren de impulsos $p(t)$, representada en la Fig. 2.73(b). En este caso,

$$x(t) = A \text{sinc}(2f_B t), \quad y \quad p(t) = \sum_n \delta(t - nT_0),$$

cuyas transformadas son

$$X(f) = \begin{cases} A/(2f_B), & |f| < f_B, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad y \quad P(f) = f_0 \sum_k \delta(f - kf_0),$$

representadas en la Fig. 2.73(c) y (d), respectivamente, con $f_0 = 1/T_0$. El tren de impulsos modulado por $x(t)$ es

$$y(t) = x(t)p(t) = A \text{sinc}(2f_B t) \sum_n \delta(t - nT_0) = A \sum_n \text{sinc}(2f_B T_0 n) \delta(t - nT_0). \quad (2.120)$$

que se representa en la Fig. 2.73(e). La transformada de Fourier de $y(t)$ puede calcularse transformando (2.120),

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n A \operatorname{sinc}(2f_B T_0 n) \delta(t - nT_0) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_n A \operatorname{sinc}(2f_B T_0 n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_n A \operatorname{sinc}(2f_B T_0 n) e^{-j2\pi f n T_0} = \sum_n A \operatorname{sinc}\left(2f_B \frac{n}{f_0}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{f_0} f}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

La ecuación (2.121) es la serie de Fourier de una onda cuadrada en la variable f , de período f_0 , ancho de pulso $2f_B$ y amplitud $A f_0 / (2f_B)$. Aunque no resulta evidente, se puede comprobar este resultado comparándolo con el del Ejemplo 2.4 (página 78), donde se calculaba la serie de Fourier de una onda cuadrada de período T_0 , ancho de pulso τ y amplitud A en la variable t ; basta cambiar $t \mapsto f$, $T_0 \mapsto f_0$, $\tau \mapsto 2f_B$.

De manera análoga al Ejemplo 2.45, la aplicación del teorema de convolución (en este caso en frecuencia) permite obtener el resultado de manera más sencilla y facilita su interpretación. De acuerdo al teorema,

$$y(t) = x(t) \times p(t) \iff Y(f) = X(f) * P(f),$$

de manera que

$$Y(f) = X(f) * f_0 \sum_k \delta(f - kf_0) = \sum_k f_0 X(f - kf_0). \quad (2.122)$$

Esta última expresión muestra que el espectro $Y(f)$ está formado por réplicas del espectro de $X(f)$ repetidas cada kf_0 , y cuya amplitud queda afectada por un factor f_0 , tal como se muestra en la Fig. 2.73(f). Las expresiones (2.121) y (2.122) son equivalentes, pero esta última resulta mucho más fácil de comprender. \square

El teorema de convolución en frecuencia permite explicar de manera sencilla que el espectro de señales discretas en tiempo es periódico en frecuencia. Una señal discreta en tiempo $y(t)$ puede pensarse como el producto de una señal continua $x(t)$ con un tren de impulsos $p(t)$. El espectro de la señal será la convolución de los espectros, $Y(f) = X(f) * P(f)$. Como el espectro del tren de impulsos $p(t)$ es otro tren de impulsos $P(f)$, la convolución $X(f) * P(f)$ está formada por réplicas de $X(f)$ ubicadas en múltiplos de la frecuencia fundamental del tren de impulsos, como muestra el Ejemplo 2.46.

2.6.6. Los teoremas de convolución y la propiedad de dualidad

En particular, los Ejemplos 2.43 y 2.46 revelan una visión peculiar de la propiedad de dualidad. Mientras que el Ejemplo 2.43 muestra que el espectro de una señal periódica es discreto (como se estudió, por otra parte en la Sección 2.4.1), el Ejemplo 2.46 descubre la situación dual: el espectro de una señal discreta es periódico. Estos resultados se condensan en la Fig. 2.46. En cualquiera de los casos, el teorema de convolución (en tiempo o en frecuencia), y el hecho que la transformada de un tren de impulsos en un dominio también es un tren de impulsos en el dominio transformado permiten explicar estos resultados. La discretización en un dominio se puede conseguir *multiplicando* por un tren de impulsos; en el dominio transformado esto equivale a *convolucionar* con otro tren de impulsos: la convolución con un tren de impulsos es una manera de expresar una señal periódica.

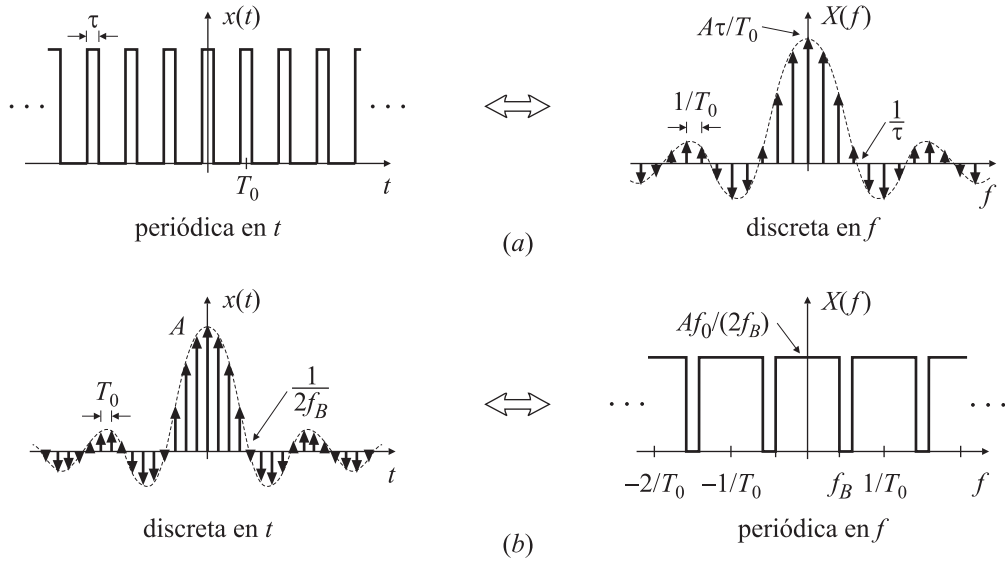


Fig. 2.74. Dualidad tiempo frecuencia: señales periódicas en tiempo tienen un espectro discreto (a); señales discretas en tiempo tienen un espectro periódico (b).

Las relaciones matemáticas para señales periódicas en tiempo son

$$y(t) = x(t) * p(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) \delta(f - kf_0),$$

mientras que para señales discretas en tiempo se tiene que

$$y(t) = x(t) \times p(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - kf_0) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_0).$$

2.7. Efecto Gibbs

En 1889, el físico Albert Michelson y su colega S. Stratton construyeron un sintetizador armónico: un dispositivo que reconstruía una señal periódica $\tilde{x}_N(t)$ de período T_0 en base a la especificación de hasta 80 de sus componentes armónicas. En la Fig. 2.75(a) se observa una réplica del sintetizador armónico y una muestra de las señales generadas con distintos coeficientes en la Fig. 2.75(b). El sintetizador implementa mecánicamente la ecuación

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T_0} t}. \quad (2.123)$$

Algunos detalles constructivos se exploran en el Ejercicio 6.

Michelson probó su dispositivo calculando los coeficientes de Fourier de distintas señales periódicas $\tilde{x}(t)$ y comparando la señal reconstruida $\tilde{x}_N(t)$ con la original: en líneas generales $\tilde{x}_N(t)$ resultaba muy similar a $\tilde{x}(t)$. Sin embargo, cuando utilizó como señal de prueba una onda cuadrada la aproximación no fue tan buena. Según Lanczos (1966), Michelson no podía comprender las causas del problema, y pensaba que su aparato podría estar funcionando incorrectamente. Confió sus dudas al matemático Josiah Gibbs,