Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2013

Clase 14

Javier G. García

14 de noviembre de 2013

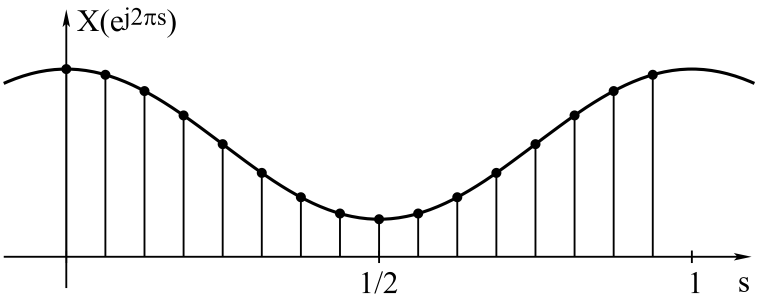
Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Dada $x[n]$ real o compleja de duración finita $(0 \leq n \leq N-1)$

Transformada (ecuación de Análisis)

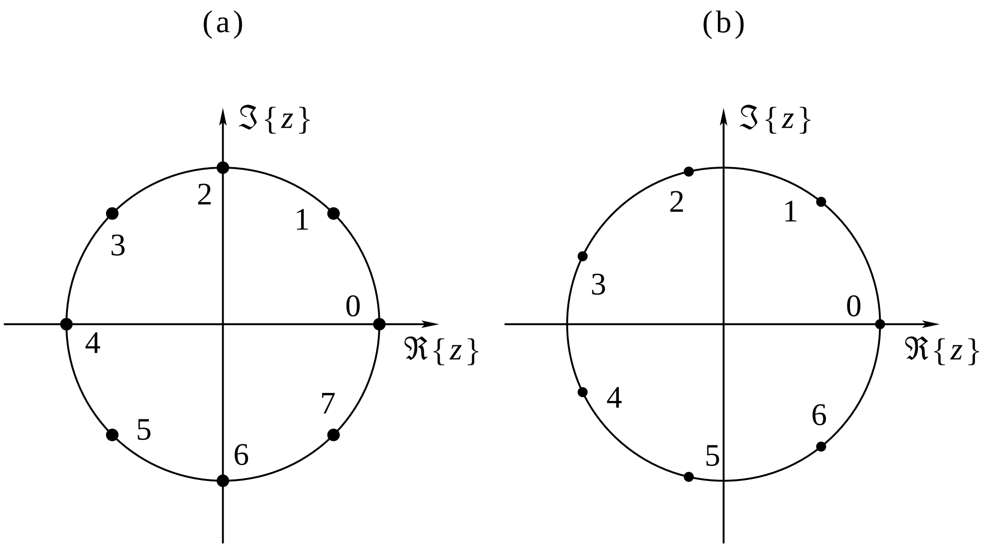
$$X[k] = TDF\{x\}[k] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right), \; 0 \leq k \leq N-1$$

- No hay problemas de existencia.
- Muestras de $X(e^{j2\pi s}) = TFTD\{x\}(e^{j2\pi s})$ en $s[k] = \dfrac{k}{N}$.



Exponencial compleja discreta

- Definimos: $W_N \triangleq \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right) \Rightarrow X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-nk}$.
- $\{W_N^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica, con período N ($W_N^N = W_N^0 = 1$).
- a) $N = 8$. b) $N = 7$.



Teorema útil

Teorema

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = N\delta[(k)_N] = \begin{cases} N & \text{si } (k)_N = 0 \\ 0 & \text{si } (k)_N \neq 0 \end{cases}$$

donde $(k)_N$ denota k *mod* N, el resto de dividir a k por N

- Si $k = mN \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{Nmn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$.
- Si $k \neq mN$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{W_N^0 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = \frac{1-1}{1-W_N^k} = 0$$

Transformada Discreta de Fourier Inversa

Dada $X[k]$ real o compleja de duración finita $(0 \leq k \leq N-1)$

Antitransformada (ecuación de Síntesis)

$$x[n] = TDF^{-1}\{X\}[n] \triangleq \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right), \; 0 \leq n \leq N-1$$

Dem:

$$TDF^{-1}\{X\}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_N^{-km}\right] W_N^{kn} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k}\right] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\delta[(n-m)_N] = x[n]$$

Propiedades I

Linealidad

$z[n] = ax[n] + by[n] \Leftrightarrow Z[k] = aX[k] + bY[k],\; a, b \in \mathbb{C}$

Reflexión (circular)

$$y[n] = x[(N-n)_N] \Leftrightarrow Y[k] = X[(N-k)_N]$$

Conjugación

$$y[n] = \bar{x}[n] \Leftrightarrow Y[k] = \bar{X}[(N-k)_N]$$

Dualidad

$$y[n] = X[n] \Leftrightarrow Y[k] = N\, x[(N-k)_N]$$

Propiedades II

Desplazamiento circular

$$y[n] = x[(n-m)_N] \Leftrightarrow Y[k] = W_N^{-km} X[k],\ m \in \mathbb{Z}$$
$$y[n] = W_N^{nm} x[n] \Leftrightarrow Y[k] = X[(k-m)_N],\ m \in \mathbb{Z}$$

Convolución circular

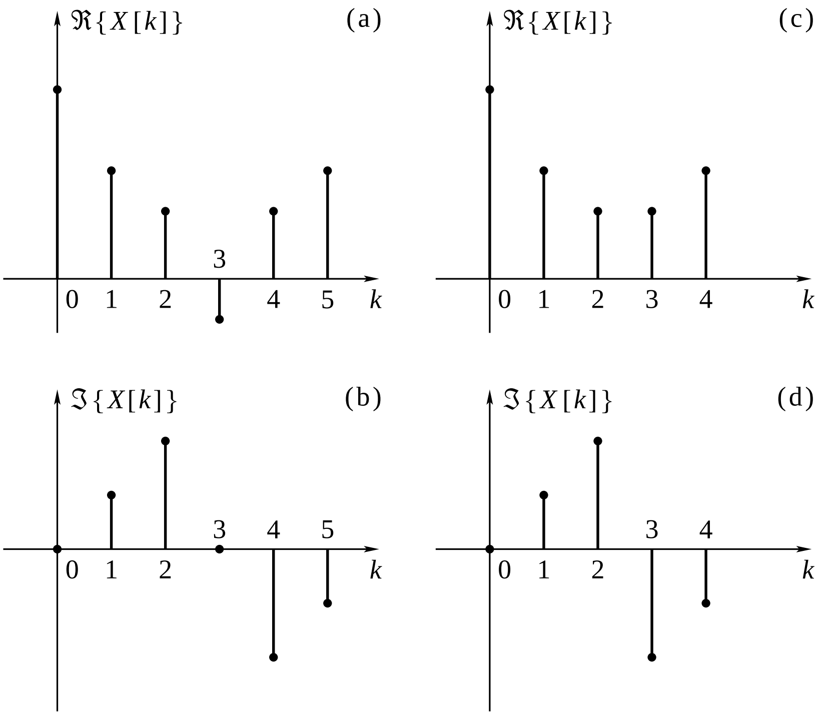
$$z[n] = \{x \circledast y\}[n] \Leftrightarrow Z[k] = X[k]Y[d]$$
$$z[n] = x[n]y[n] \Leftrightarrow Z[k] = \frac{1}{N}\{X \circledast Y\}[k]$$

Simetría Hermítica circular

$$\text{Si } x[n] \in \mathbb{R} \Rightarrow X[(N-k)_N] = \bar{X}[k]$$

Simetría Hermítica circular

- $X[(N-k)_N] = \bar{X}[k] \Rightarrow \Re\{X\}$ y $|X|$ circularmente par.
  $\Im\{X\}$ y $\measuredangle X$ circularmente impar.
- $N = 6$ $\qquad N = 5$



Densidad Espectral de Energía

Secuencia de largo finito $\Leftrightarrow$ Energía finita.

Teorema de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\bar{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\bar{Y}[k] \rightarrow E_x = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

- *Densidad espectral de energía*: $|X[k]|^2/N$.
- $TDF^{-1}\{|X|^2\}[n] = \{x \circledast \bar{x}^-\}[n]$ con $x^-[n] = x[N-n]$.

Ejemplos

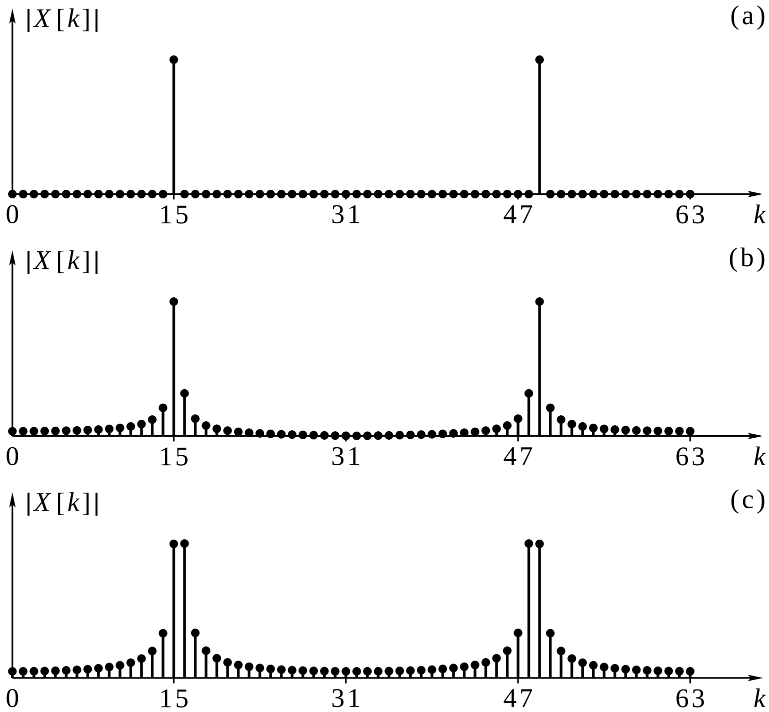
- $x[n] = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < n < N \end{array} \right. \quad \Rightarrow X[k] = 1,\ 0 \leq k \leq N-1$
- $x[n] = 1,\ 0 \leq n \leq N-1 \Rightarrow X[k] = \left\{ \begin{array}{ll} N & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < k < N \end{array} \right.$
- $x[n] = \cos(\theta_0 n + \phi_0),\ 0 \leq n \leq N-1,\ 0 < \theta_0 < \pi$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\theta_0 n + \phi_0) W_N^{-kn} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\phi_0}\frac{1-e^{j\theta_0 N}}{1-e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi k}{N})}} + \frac{1}{2}e^{-j\phi_0}\frac{1-e^{-j\theta_0 N}}{1-e^{-j(\theta_0 + \frac{2\pi k}{N})}}$$

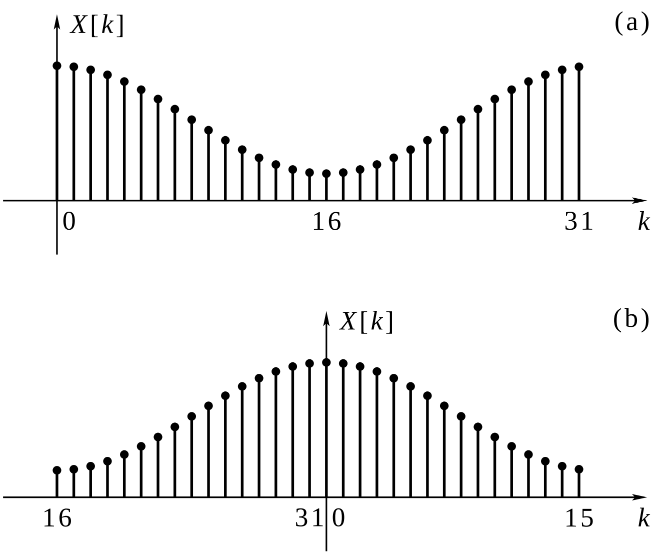
TDF de una sinusoide ($N = 64$)

a) $\theta_0 = 2\pi 15/64$, b) $\theta_0 = 2\pi 15{,}25/64$, c) $\theta_0 = 2\pi 15{,}5/64$.



Rango de frecuencias analizadas

- $0 \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ corresponde a $0 \leq s \leq 1/2$.
- $\lceil N/2 \rceil \leq k \leq N - 1$ corresponde a $1/2 \leq s < 1$, o $-1/2 \leq s < 0$.
- Para evitar confusiones suele re-acomodarse al graficar:



Resolución de frecuencias de la TDF

Si se toman N muestras de una señal $x(t)$ cada T seg.:

- Distancia entre dos frecs. sucesivas: $\Delta s = \Delta f T = \dfrac{1}{N}$
- En términos de frecuencias "físicas": $\Delta f = \dfrac{1}{NT}$

Resolución de frecuencias de la TDF

Δf de la TDF es la inversa de la duración de la señal

Es independiente del número de muestras!

La matriz TDF

$$\text{Si definimos: } \mathbf{x_N} \triangleq \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} ; \mathbf{X_N} \triangleq \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} ;$$

La TDF, $\mathcal{D}TDF : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, es lineal $\Rightarrow$ Matriz de $N \times N$

$$\mathbf{F_N} \triangleq \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} ; \boxed{\mathbf{X_N} = \mathbf{F_N} \mathbf{x_N}}$$

Ejemplos

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1-j\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1-j\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F_4} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-5j \\ 0 \\ 1+5j \end{bmatrix};$$

Propiedades de F_N

- Elementos de 1º fila y 1º columna $W_N^0 = 1$.
- Simétrica ($F_N^T = F_N$).
- $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}\mathbf{F_N} = N\mathbf{I_N} \Rightarrow N^{-1/2}F_N$ es matriz *unitatria*.

$$\Rightarrow \boxed{N^{-1}\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}\mathbf{X} = N^{-1}\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}\mathbf{F_N}\mathbf{x_N} = N^{-1}N\mathbf{I_N}\mathbf{x_N} = \mathbf{x_N}}$$

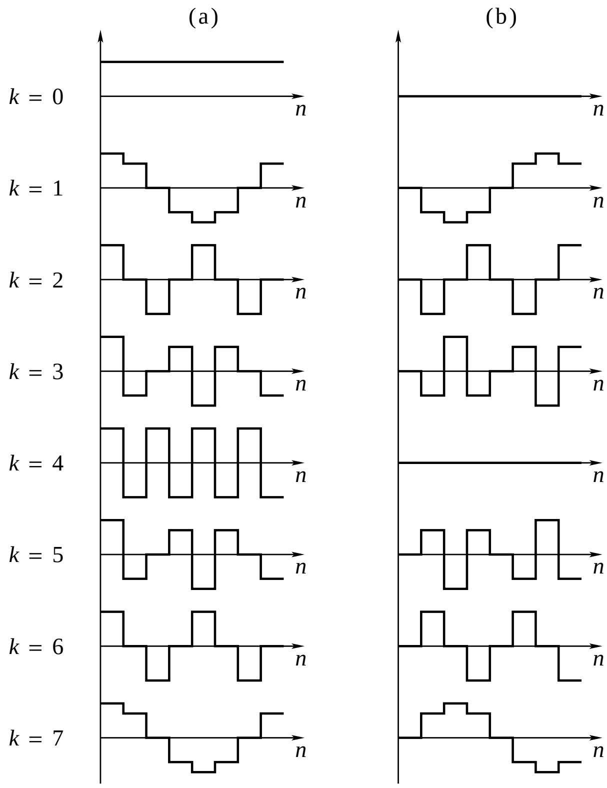
- Si $\{\mathbf{e_{N,n}}, 0 \leq n \leq N-1\}$ son las columnas de $\mathbf{I_N}$, y $\{\mathbf{f_{N,n}}, 0 \leq n \leq N-1\}$ son las columnas de $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}} \Rightarrow$

$$\mathbf{x_N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathbf{e_{N,n}} = \sum_{n=0}^{N-1} (N^{-1/2}X[n])(N^{-1/2}\mathbf{f_{N,n}})$$

- $\{\mathbf{e_{N,n}}\}$ y $\{N^{-1/2}\mathbf{f_{N,n}}\}$ son bases ortonormales de $\mathbb{C}^N \Rightarrow$ $x[n]$ y $(N^{-1/2}X[n])$ son coordenadas de $\mathbf{x_N}$ en estas bases.

Base TDF para N=8

(a) Parte real
(b) Parte imaginaria.



Relleno con ceros en tiempo

Extendemos $x[n],\ 0 \leq n \leq N-1$ con $M-N$ ceros:

$$x_a[n] = \begin{cases} x[n] & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{si } N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

Entonces, la TDF de $x_a[n]$ es:

$$X_a[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x_a[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{M}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{M}\right) =$$

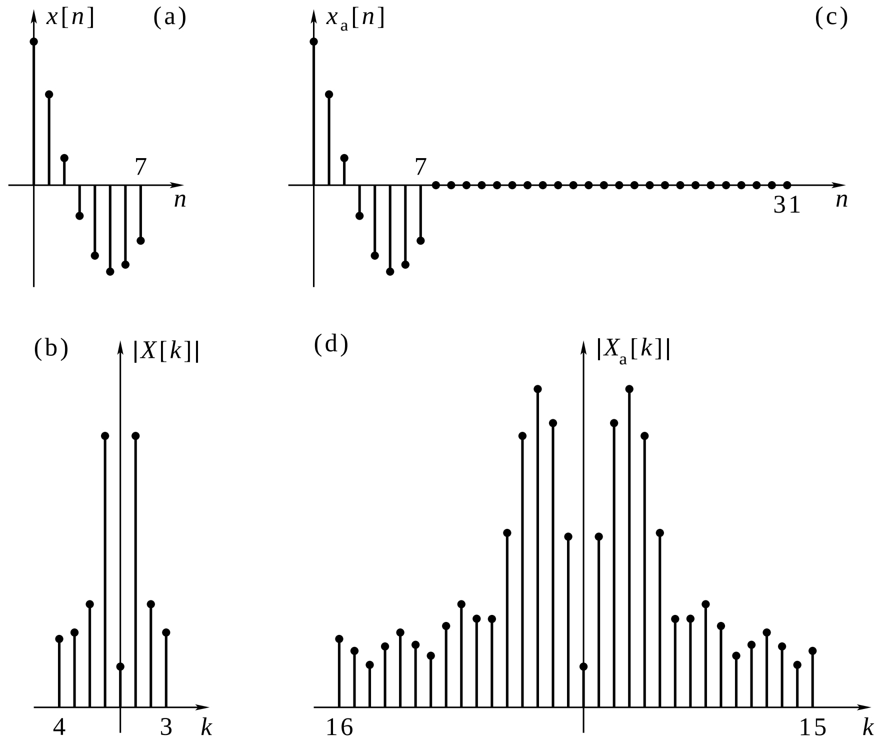
$$= X(e^{j2\pi s[k]}), \qquad \text{con} \qquad s[k] = \frac{k}{M}, \qquad 0 \leq k \leq M-1$$

Obtenemos M muestras equiespaciadas de $X(e^{j2\pi s})$!

Interpolación en frecuencia

(a) y (b)
$N = 8.$

(d) y (d)
$M = 32.$



Relleno con ceros en frecuencia

Extendemos $X[k],\ 0 \leq k \leq N-1$ con $M-N$ ceros, con $M = LN$ ($L > 0$) y N impar (respetando la simetría hermítica).

$$X_i[k] = \begin{cases} L\,X[k] & \text{si} \quad 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{N-1}{2}+1 \leq k \leq M - \frac{N-1}{2} - 1 \\ L\,X[k-(M-N)] & \text{si} \quad M - \frac{N-1}{2} \leq k \leq M-1 \end{cases}$$

Definimos $x_i[n],\ (0 \leq n \leq M-1)$ a la ITDF de $X_i[k]$:

$$x_i[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X_i[n]\,W_M^{nk} = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} X[k]\,W_M^{nk} + \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-1} X[k]\,W_M^{n(k+M-N)}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} W_M^{(nk-Lmk)} + \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-1} W_M^{(nk-Lmk-nN)}\right]$$

Relleno con ceros en frecuencia

$$x_i[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} W_M^{(nk-Lmk)} + \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{-1} W_M^{(nk-Lmk-NLm)}\right]$$

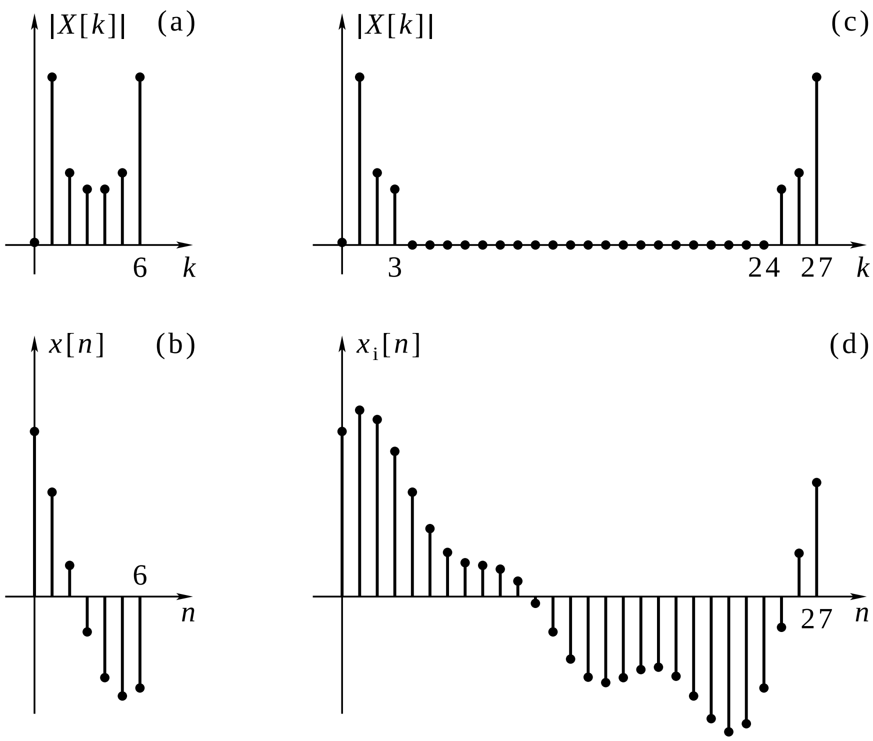
$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} W_M^{(n-Lm)k} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\frac{\operatorname{sen}[\pi(n-mL)/L]}{N\operatorname{sen}(\pi(n-mL)/L)}$$

- Similar a $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$
- Si $n = kL$ entonces $x_i[kL] = x[k]$
- La interpolación usa la extensión periódica.

Interpolación en tiempo

(a) y (b)
$N = 7$.

(d) y (d)
$M = 28$.



Definición

Dadas $x[n]$ e $y[n]$ secuencias duración finita, de igual largo N.

Convolución circular o periódica

$$z[n] = \{x \circledast y\}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n-m)_N],\ 0 \leq n \leq N-1$$

- $\tilde{z}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m]\tilde{y}[n-m],\ \forall n$
- $\{x \circledast y\} = \{y \circledast x\}$
- $\{\{x \circledast y\} \circledast z\} = \{x \circledast \{y \circledast z\}\}$
- $\{x \circledast y\}[n] \Leftrightarrow X[k]Y[k]$ (Dem.)

Descripción Matricial

$$\begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[N-2] \\ z[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[0] & y[N-1] & \dots & y[2] & y[1] \\ y[1] & y[0] & \dots & y[3] & y[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y[N-2] & y[N-3] & \dots & y[0] & y[N-1] \\ y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[1] & y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Si $x[n] = \{2, 3, -1, 5\}$, e $y[n] = \{1, 4, -2, -3\}$:

$$\begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ z[2] \\ z[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ -8 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Relación con la convolución lineal

Dadas $x[n]$ e $y[n]$ secuencias duración finita, de igual largo N.

- $z_l[n] = \{x * y\}[n] = \sum_{m=\text{máx}\{0,n-N+1\}}^{\text{mín}\{N-1,n\}} x[m]y[n-m], \; 0 \leq n \leq 2N-2$
- $z_c[n] = \{x \circledast y\}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n-m)_N], \; 0 \leq n \leq N-1$

$$z_c[n] = \sum_{m=0}^{n} x[m]y[n-m] + \sum_{m=n+1}^{N-1} x[m]y[n+N-m]$$

$$\boxed{z_c[n] = z_l[n] + z_l[n+N], \; 0 \leq n \leq N-1} \text{ (Si } z_l[2N-1] \triangleq 0)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} z_l[0] \\ z_l[1] \\ \vdots \\ z_l[N-2] \\ z_l[N-1] \\ \color{red}{z_l[N]} \\ \vdots \\ \color{red}{z_l[2N-1]} \\ \color{red}{z_l[2N-2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[0] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y[1] & y[0] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y[N-2] & y[N-3] & \dots & y[0] & 0 \\ y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[1] & y[0] \\ \color{red}{0} & \color{red}{y[N-1]} & \color{red}{\dots} & \color{red}{y[2]} & \color{red}{y[1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{\dots} & \color{red}{y[N-1]} & \color{red}{y[N-2]} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{\dots} & \color{red}{0} & \color{red}{y[N-1]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Convolución lineal via convolución circular

Dadas $x[n]$ e $y[n]$ secuencias duración finita, de largo N_1 y N_2.

$$z_l[n] = \{x * y\}[n] = \sum_{m=\text{máx}\{0,n-N_2+1\}}^{\text{mín}\{N_1-1,n\}} x[m]y[n-m],\ 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

Rellenamos con ceros hasta $N = N_1 + N_2 - 1 \Rightarrow x_a[n]$ e $y_a[n]$.
Para $0 \leq n \leq N-1$:

$$\begin{aligned} z_a[n] = \{x_a \circledast y_a\}[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x_a[m]y_a[(n-m)_N] \\ &= \sum_{m=0}^{n} x_a[m]y_a[n-m] + \sum_{m=n+1}^{N-1} x_a[m]y_a[n+N-m] = z_l[n] \end{aligned}$$

$$\boxed{z_a[n] = z_l[n],\ 0 \leq n \leq N-1}$$

Resumen

TDF: transformada ”digital”.

- muestreo de la TFTD - vinculación con la SDF.
- Propiedades circulares.
- Resolución de frecuencia: 1/duración de la señal.
- Representación matricial de la TDF.
- Relleno con ceros en tiempo $\Leftrightarrow$ Interpolación en frec.
- Relleno con ceros en frec. $\Leftrightarrow$ Interpolación en tiempo.
- Relación entre convolución circular y lineal.
- Correlación de señales de Energía y de Potencia.