# Introducción al Procesamiento de Señales
# Curso 2013

## Clase 9

Javier G. García

3 de octubre de 2013

## Transformada de Fourier

**Definición:**
Transformada de Fourier directa (o integral de Foorier o ecuación de análisis):

$$\boxed{X(f) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$$

Transformada de Fourier inversa (o ecuación de síntesis):

$$\boxed{x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df}$$

# Transformada de Fourier - Algunos ejemplos 3

- Exponencial compleja: $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 \in \Re$

$$e^{j2\pi f_0 t} \supset \delta(f - f_0)$$

- Coseno: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$$

- Seno: $x(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)$

$$\text{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2j}\left(-\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$$

- Pulso gaussiano: $x(t) = e^{\pi t^2}$

$$e^{\pi t^2} \supset e^{\pi f^2}$$

# Transformada de Fourier - Modulación 1

Si $x \supset X$ y $f_0, t_o \in \Re$ entonces

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(X(f + f_0) + X(f - f_0)\right)$$

$$x(t)\text{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{j}{2}\left(X(f + f_0) - X(f - f_0)\right)$$

De forma dual

$$\frac{1}{2}\left(x(t + t_0) + x(t - t_0)\right) \supset X(f)\cos(2\pi f t_0)$$

## Serie de Fourier

**Definición:**
Si $x(t)$ es periódica de período $T$ y cumple ciertas condiciones (CD), entonces se puede representar como:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}}$$

$c_k$ son los coeficientes de la serie y se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi kt/T}dt$$

## Transformada de Fourier de señales periódicas

$x(t)$ puede escribirse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}$$

Utilizando la linealidad de la TF y la propiedad de translación resulta

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(f - k/T)$$

Las señales periódicas tienen espectro de líneas (aparecen deltas de dirac).
La separación de las deltas es inversamente proporcional al período.

# Vinculación de la SF con la TF

¿Habrá alguna vinculación entre los $c_k$ y la TF de un período de la señal? $x(t)$ puede escribirse como:

$$x(t) = \{x_1 * \; p_T\}(t)$$

con

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Entonces,

$$c_k = \frac{1}{T} X_1(f) \left.\right|_{f=k/T}$$

# Respuesta en Frecuencia de SLIT

Sea un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ la entrada y la salida de dicho sistema respectivamente. Como

$$y(t) = \{x * h\}(t)$$

Utilizando propiedades de la TF llegamos a que

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

donde $H(f)$ es la respuesta en frecuencia del sistema (Recordar la motivación de la primera clase de TF).
Ver ejemplo circuito RC.
Ver sistemas en cascada y en paralelo.

# Respuesta de un SLIT a señales periódicas

Sea un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$. Sea $x(t)$ una señal periódica de período $T$ la entrada al sistema.
¿Cómo resulta la salida?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}$$

Utilizando superposición resulta

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(k/T) e^{j2\pi kt/T}$$

¿Qué se puede decir de la señal de salida? ¿Es períodica?
¿Cuáles son los coeficientes de su SF?