Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2013

Clase 2

Javier G. García

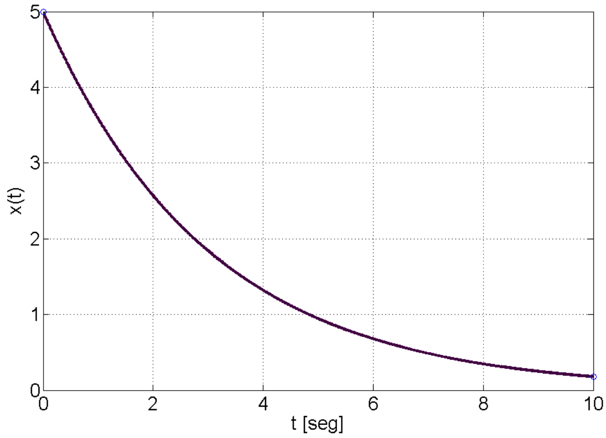
22 de agosto de 2013

Señales Analógicas y Digitales

- Variables independientes (tiempo):
  - Señales de tiempo continuo, $x(t),\ t \in \mathbb{R}$.
  - Señales de tiempo discreto, $x[n],\ n \in \mathbb{Z}$.
- Variable dependiente (valores):
  - Señales de valores continuos.
  - Señales de valores discretos.

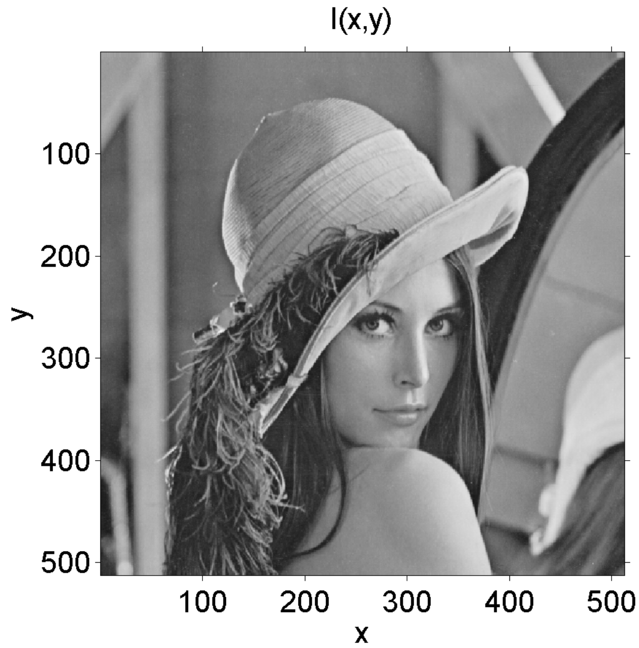
Señales analógicas
Tiempo y valores continuos

Señales digitales
Tiempo y valores discretos



Señales Vectoriales y Multidimensionales

- Valor (variable dependiente): real, complejo, o vectorial.
  - $s(t) = A\cos(3\pi t)$
  - $s(t) = A\exp(j3\pi t) = A\cos(3\pi t) + jA\mathrm{sen}(3\pi t)$
  - $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}$
- N^{o} variables independientes $\equiv$ Dimensión.
  - $I(x, y)$
  - $I(x, y, t)$
  - $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_R(x, y, t) \\ I_G(x, y, t) \\ I_B(x, y, t) \end{bmatrix}$



Tipos de señales

Clasificación por variable independiente y rango de valores o amplitudes:

- Analógica: SVIC y Amplitud continua.
- Muestreada: SVID y Amplitud continua.
- Cuantizada: SVIC y Amplitud discreta.
- Digital: SVID y Amplitud discreta.

Clasificación por su naturaleza:

- Determinísitca describible para todo valor de la variable independiente por una función matemática.
- Aleatoria No se puede describir por una función matemática sin recurrir a un número (finito o infinito) de variables aleatorias.

Delta de Dirac – SVIC

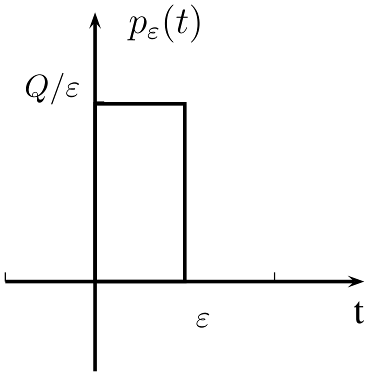
Importante para

- representar condiciones iniciales de sistemas (en circuitos por ej, carga inicial de un capacitor)
- para poder transformar señales periódicas (Fourier, Laplace)
- para definir la respuesta impulsional de sistemas lineales

entre otros usos.

Delta de Dirac – Idea

Teoría de distribuciones o Funciones generalizadas



- Pulso/límite
  $\int \lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon(\tau)d\tau = 0$ pero $\lim_{\epsilon\to 0}\int p_\epsilon(\tau)d\tau = 1$
- Representantes de la Delta ("integral=1; soporte=0")

$$\lim_{a\to\infty} 2a\bigwedge(x/a); \quad \lim_{a\to\infty}\frac{\text{sen}(ax)}{x}; \quad \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

y muchas otras...

Delta de Dirac – Propiedades 1

- Igualdad en sentido distribucional $\delta_{LI}(x)$“ $=$ ”$\delta_{LD}(x)$ es

$$\int \delta_{LI}(x)\Phi(x)dx = \int \delta_{LD}(x)\Phi(x)dx \qquad \forall\Phi(x) \in FPB$$

  donde *FPB* es la clase de funciones que se “portan bien”.
- Expansión-Compresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{-c\infty}^{c\infty} \delta(x)dx = \frac{1}{|c|}$$

- No se puede definir, en general, el producto de distribuciones de manera consistente

Delta de Dirac – Propiedades 2

- Extracción

$$\int_{a}^{b} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

  siempre que $a < 0 < b$
- Derivada

$$\int_{a}^{b} \delta^{(n)}(x)f(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

  con $a < 0 < b$, donde $f^{(n)}(x)$ es la derivada n-sima de $f(x)$
- $\delta(x)$ tiene área 1; $A\delta(x)$ tiene área A

Peine

$$\upuparrows\!\uparrow(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

Notar

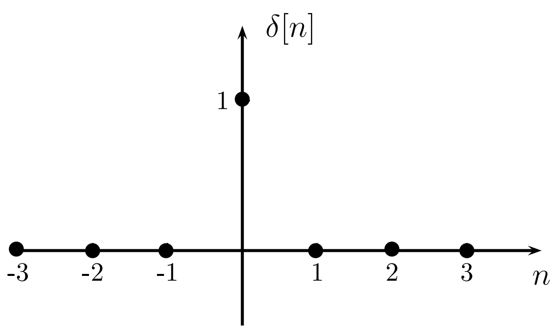
- El peine es una función generalizada periódica.
- Se podría definir el peine VID... pero es poco útil: es la secuencia constante e igual a 1

Delta de Kronecker – SVID

- Juega un papel similar a la Delta de Dirac en SVIC
- Mucho más sencilla de tratar

Definición:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n \neq 0 \end{cases}$$



Definiciones

1. **SVIC periódica:** $x(t)$ periódica de *período fundamental* T si existe un $T \in \mathbb{R}$ de modo que T es el mínimo $T > 0$ que satisface $x(t) = x(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
2. **SVID periódica:** $x[n]$ periódica de *período fundamental* N si existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que N es el mínimo que satisface $x[n] = x[n+N]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

SVIC periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \omega + j\alpha$

$$e^{jct} = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{amortiguación}} \quad \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{periódica}}$$

- Pulsación: ω rad/seg. Frecuencia: $\omega = 2\pi f$
- Periodicidad de $e^{j\omega t}$

$$\begin{array}{lcl} e^{j2\pi ft} = e^{j2\pi f(t+T)} & \Rightarrow & e^{j2\pi fT} = 1 \\ \Rightarrow 2\pi fT = 2\pi k; & \text{con } fT = k \in \mathbb{Z} & \Rightarrow k \in \mathbb{N} \end{array}$$

- "mínimo $T > 0 \ldots \Rightarrow$" Número de ciclos por segundo $= 1/T = f$

SVIC periódicas

Consecuencias

- A mayor ω mayor cantidad de oscilaciones por segundo
- $e^{j\omega t}$ es periódica $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- Armónicos: dada $e^{j\omega_0 t}$; $\omega_0 \in \mathbb{R}$; $k\omega_0,\ k \in \mathbb{Z}$ son las frecuencias armónicas, que también dan SVIC periódicas
- Existe un infinito número de armónicos, que también dan SVIC periódicas $e^{jk\omega_0 t}$

MATLAB: Ejemplo $e^{j2k\pi f_0 t}$

SVID periódicas

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: Ω sin unidades o rad (n es adimensional). "Frecuencia": $\Omega = 2\pi f$

$$\begin{array}{lcr} e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} & \Rightarrow & e^{j\Omega N} = 1 \\ \Rightarrow \Omega N = 2\pi m; & \text{con } fN = m \in \mathbb{Z} & \Rightarrow f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q} \end{array}$$

$\boxed{\text{es periódica sólo para } f \in \mathbb{Q}}$

- Armónicos: son los múltiplos de $1/N$, si N es el período fundamental.

SVID periódicas

Consecuencias

- Sólo hay $N-1$ armónicos distintos asociados a una fundamental de período N. Es un número finito de armónicos.
- Si $f = m/N;\ m > N$ entonces $m = kN + m',\ k, m' \in \mathbb{Z}$ y $f = m/N = k + f'$ y $m' < N$; luego $e^{j2\pi fn} = e^{j2\pi(m/N)n} = e^{j2\pi f'n}$.
- Si el período fundamental es N, los armónicos son k/N con $k = 0, 1, \ldots, N-1$

SVID periódicas

Más consecuencias

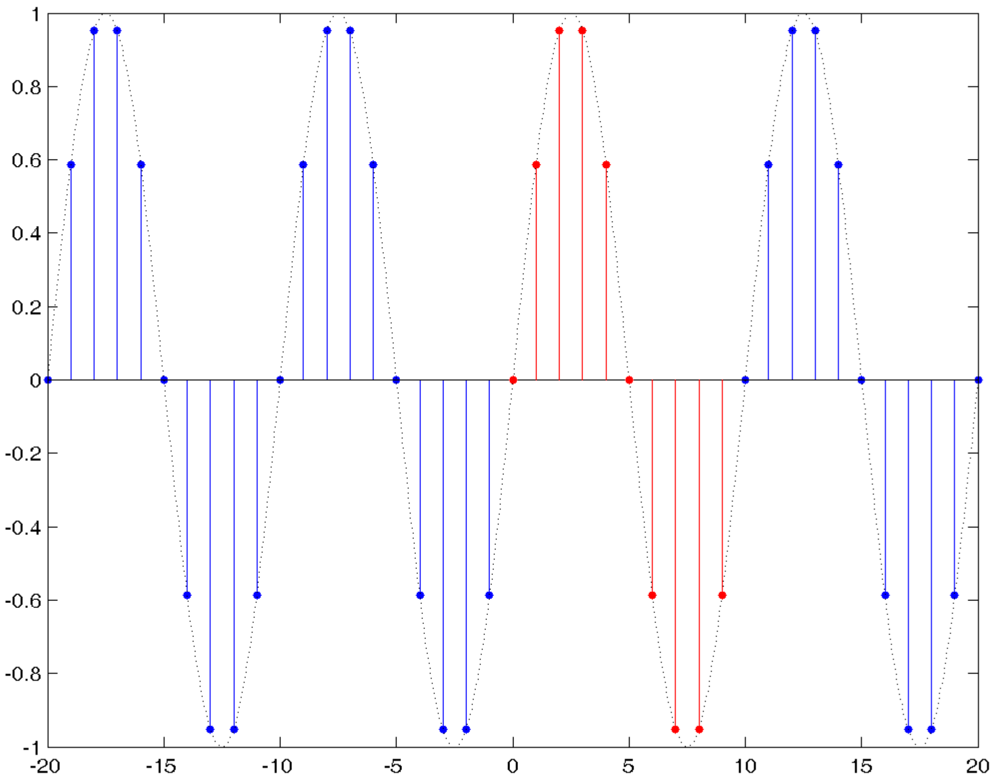
- A mayor Ω las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea Ω_0 con período fundamental N o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

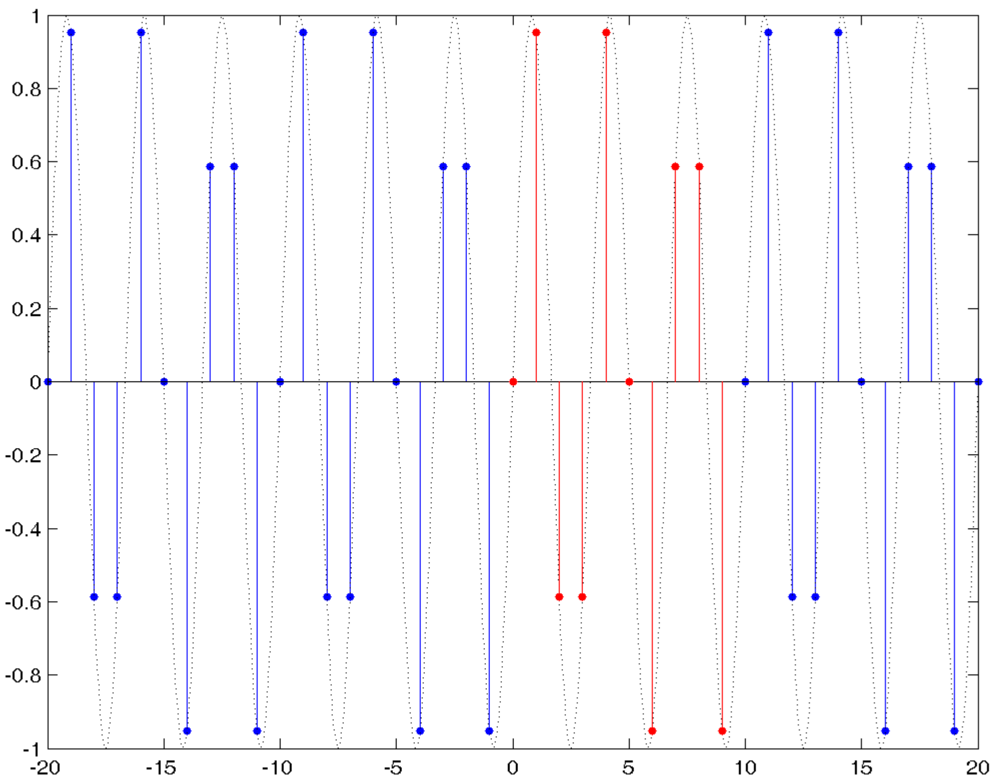
- Se repiten las pulsaciones cada 2π. A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo

Ejemplo: $\cos(2\pi 1/3n)$ y su armónico $\cos(2\pi 2/3n)$. Considere $\cos(2\pi 3/3n)$ y $\cos(2\pi 4/3n)$
MATLAB: el ejemplo con otra frecuencia. Ver $\cos(2\pi(1/110)^{1/2}n)$

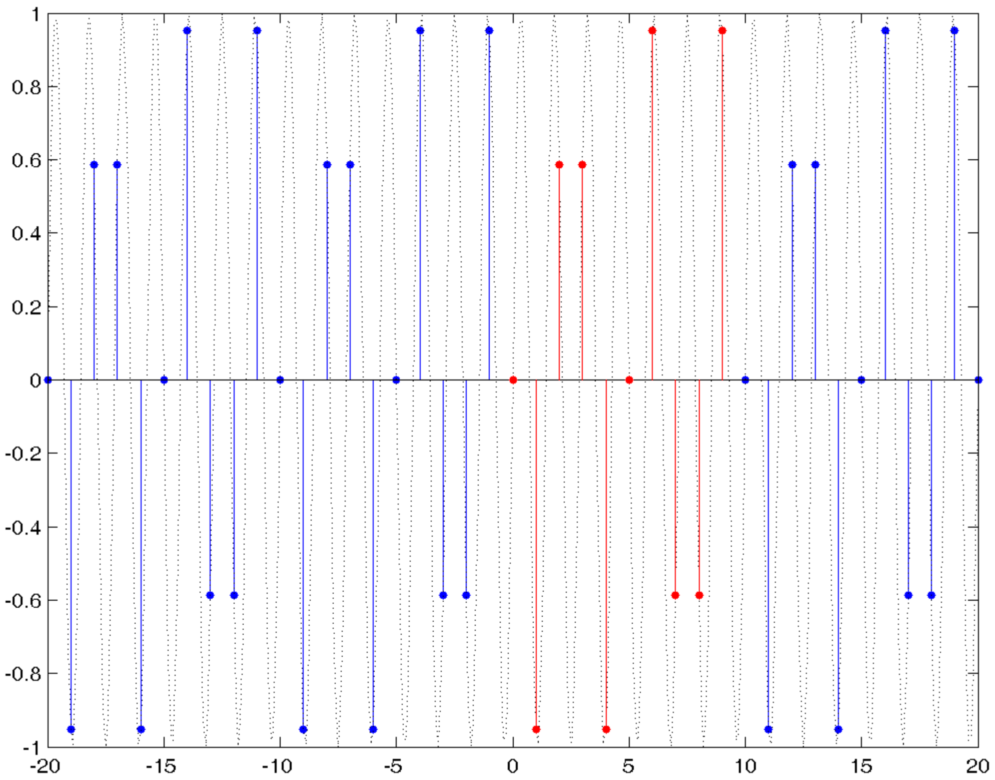
$\sin(2\pi 1/10 n)$



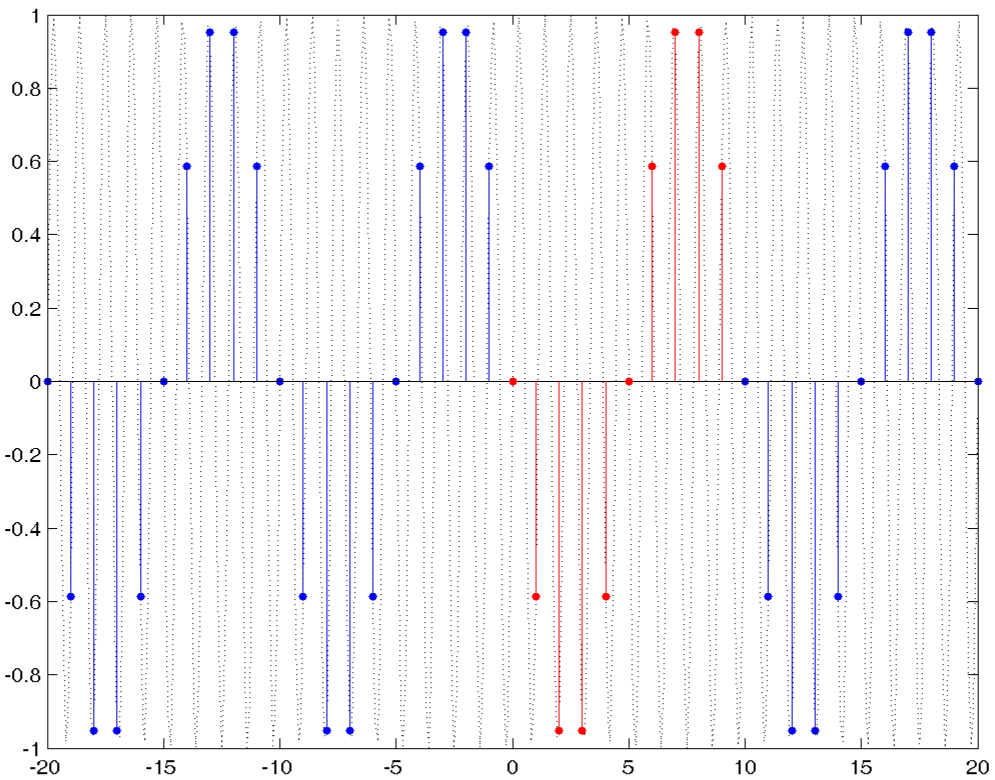
$\sin(2\pi 3/10 n)$



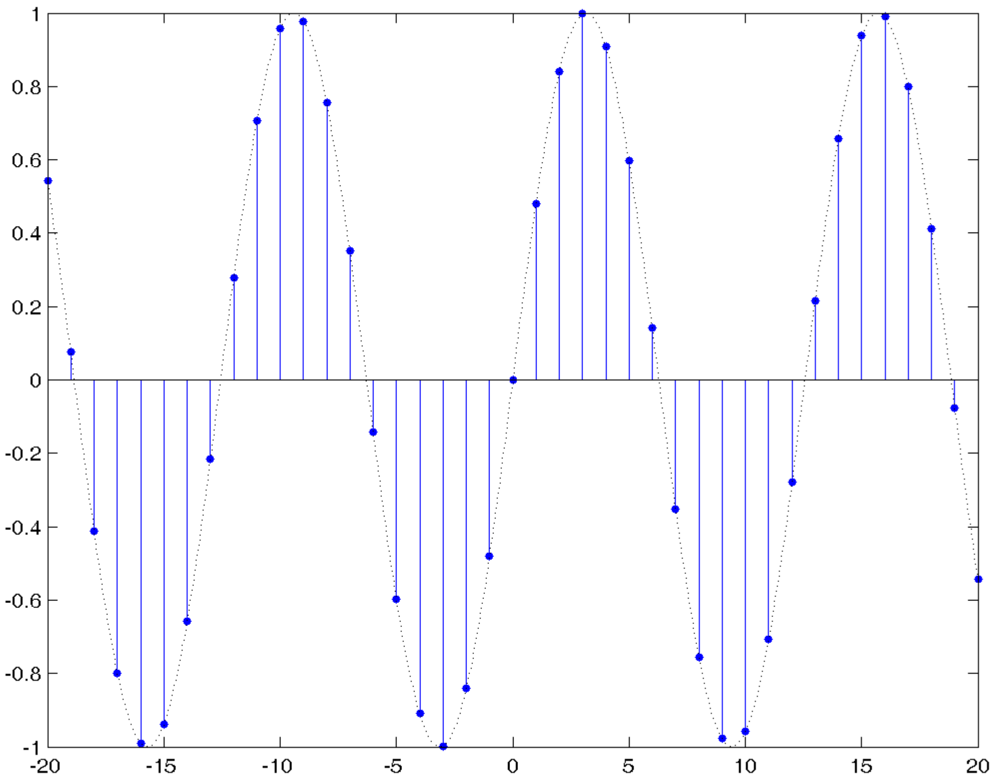
$\sin(2\pi 7/10 n)$



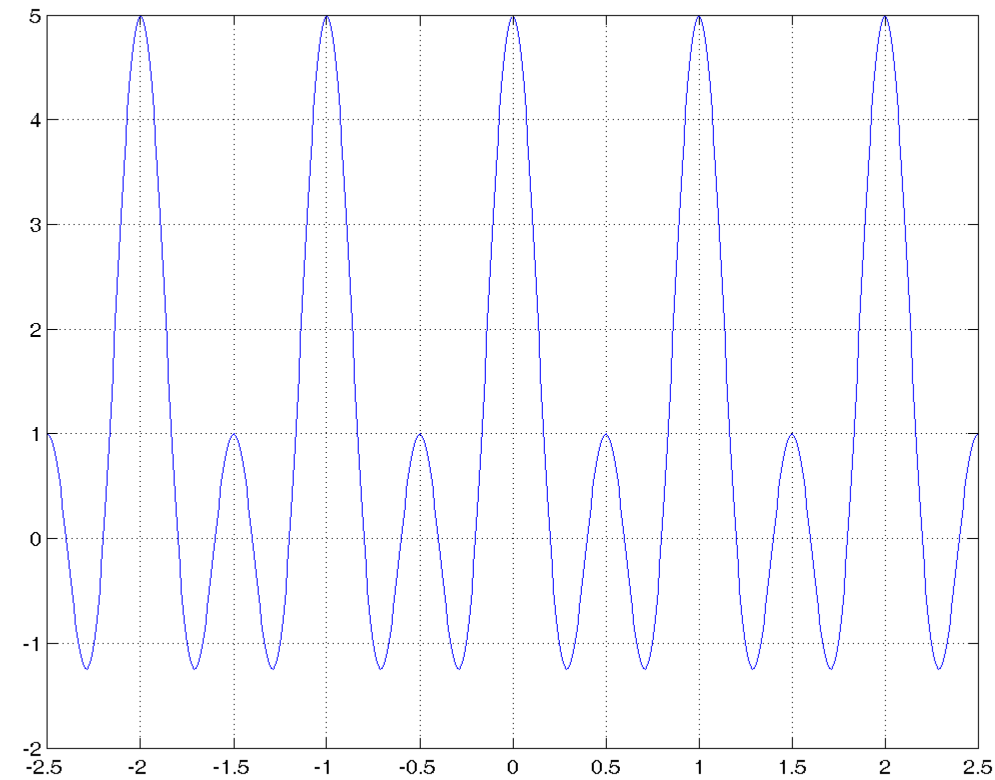
$\sin(2\pi 9/10 n)$



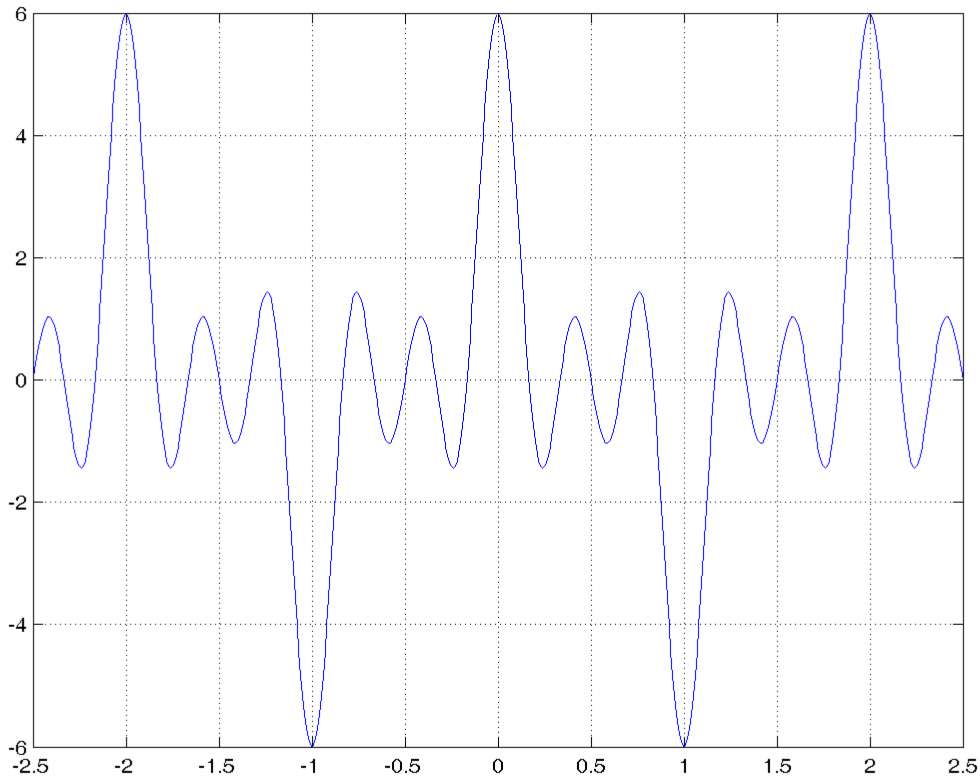
$\sin(n/2)$



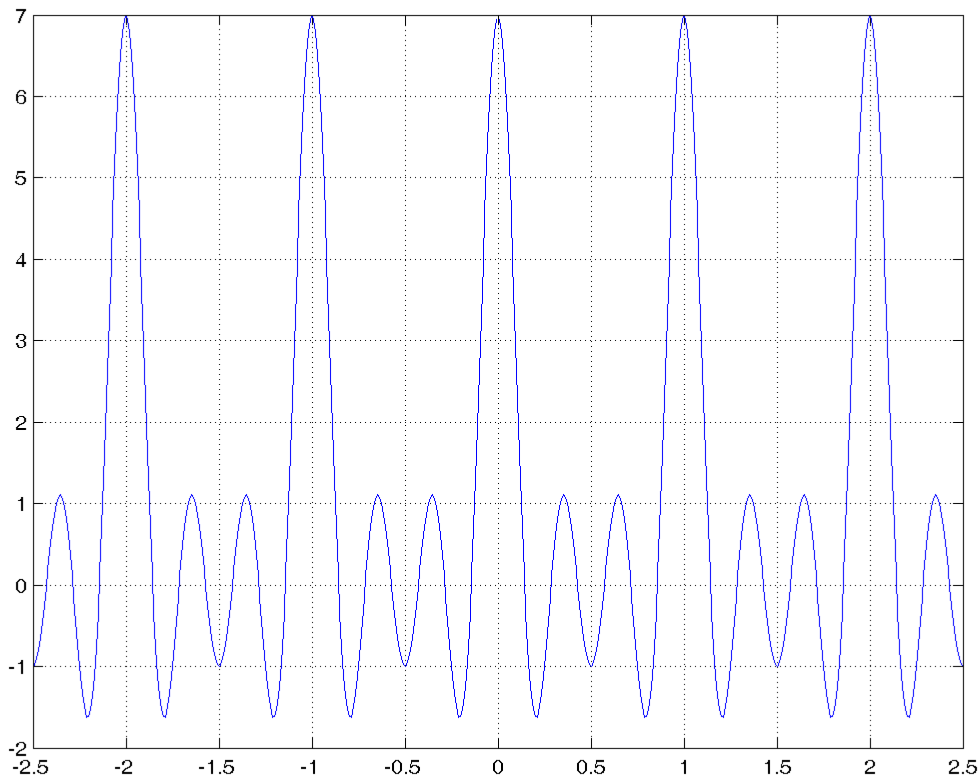
$sind_5(x)$



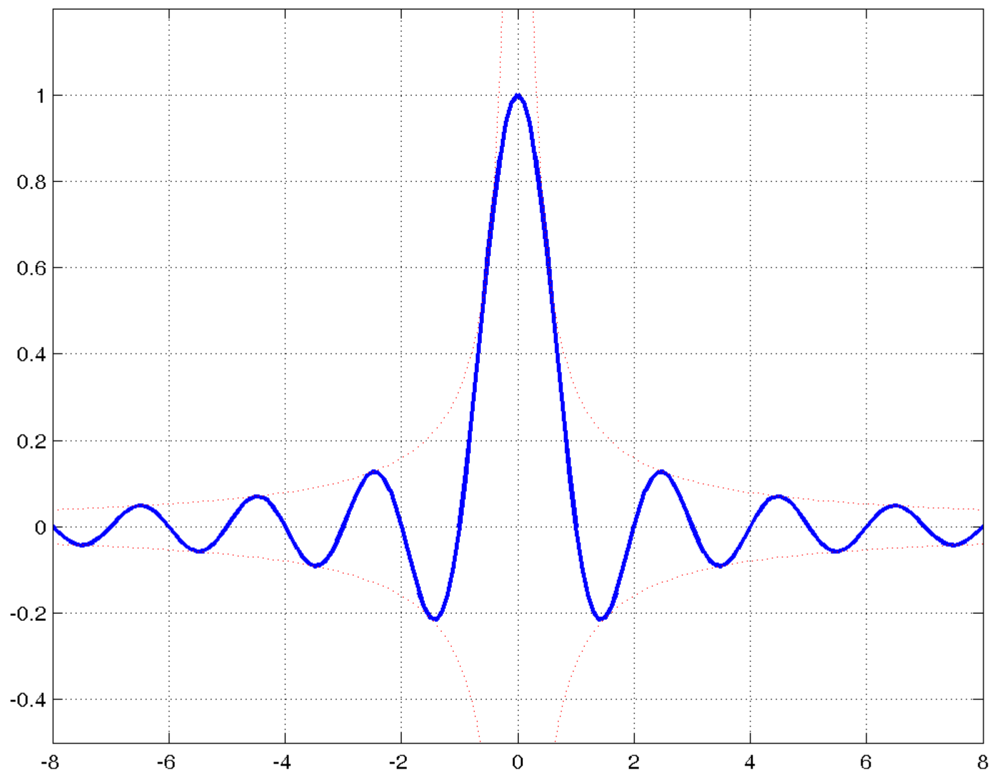
$sind_6(x)$



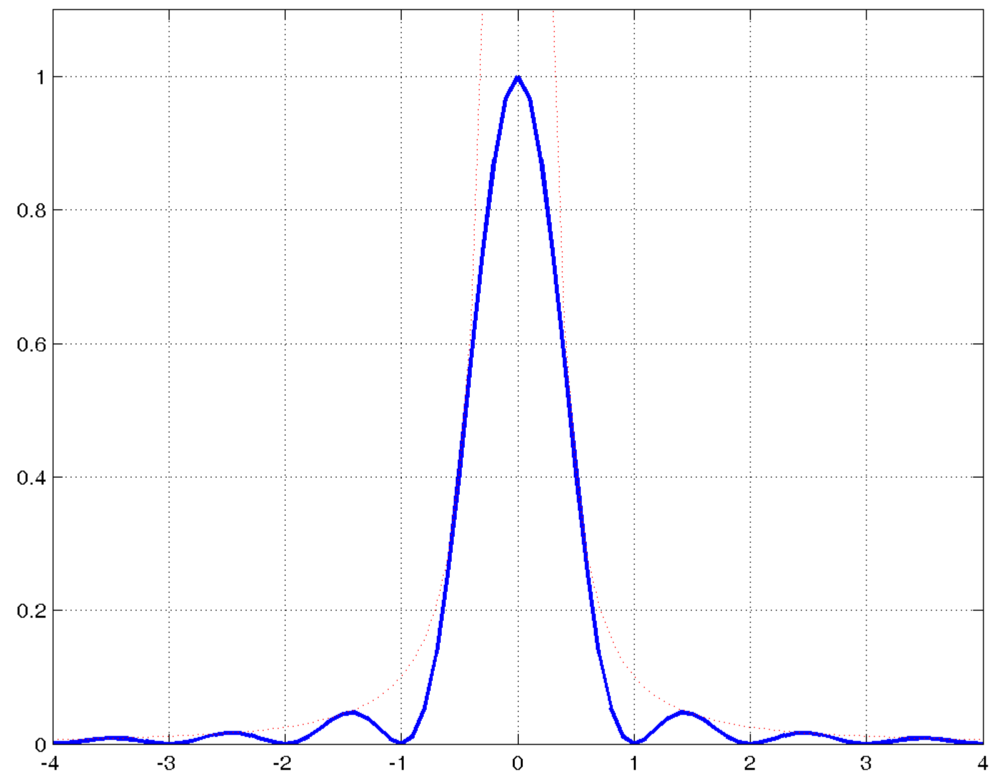
$sind_7(x)$



$sinc(x)$



$sinc^2(x)$



Reflexión

- SVIC: $x(t)$ es reflejada: aparece una nueva señal $y(t) = x(-t)$

- SVID: $x[n]$ es reflejada: aparece una nueva señal $y[n] = x[-n]$

Aplicaciones: recordar la música "satánica" al reproducir cintas y discos (!) al revés.

Matlab: construya su propio ejemplo. `n=-100:1:100;` y `nr=100:-1:-100.plot(n,x(nr))`

Translación o Desplazamiento

- SVIC: $x(t)$ es transladada en la cantidad $t_0 \in \mathbb{R}$: aparece una nueva señal $y(t) = x(t - t_0)$.

- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de t_0

Translación o Desplazamiento

- SVID: $x[n]$ es desplazadada en la cantidad $n_0 \in \mathbb{Z}$: aparece una nueva señal $y[n] = x[n - n_0]$.

- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de n_0. Notar: no cualquier translación es posible, sólo las que corresponden a números enteros.

Ejemplo:
Aplicación: acción de control a través de una red.

Matlab: genere $x[n]$ y vea $y[n] = x[n - n_0]$ con plot(n,x,n,y)

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVIC: $x(t)$, se cambia su escala por $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at)$

- o también se podría $z(t) = x(t/a)$
- ¿Cómo “recordar” si es contracción o expansión? ver 1 o 2 puntos notables

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$ Poder, se puede; pero la secuencia está incompleta!
- Sea $x[n]$, ahora si $y[n] = x[n/M] \ldots$ la secuencia queda indefinida salvo en los n múltiplos de M
- Se puede hacer algo perdiendo información (contracción)

$$x[n]; \qquad y[n] = x[nM] \qquad M \in \mathbb{N}$$

- Se puede hacer algo agregando información (expansión)

$$x[n]; \qquad y[m] = \begin{cases} x[n] & \text{si } m = nM \\ 0 & \text{si } m \neq nM \end{cases}$$

- En todo caso, las últimas 2 variantes son una alteración de la señal original

MATLAB: compruebe lo de más arriba

Translación y cambio de escala conjuntos

- SVIC: $x(t)$, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at + b)$
- esto NO es una cambio de escala por a y una translación por b
- Lo correcto es ver como $y(t) = x(a(t + b/a))$, es decir cambio de escala por a y translación por b/a

Aplicación: rayo reflejado y multicamino (celulares, radar, GPS, sonar)

Otras transformaciones

Cambio de escala no-lineal.

Ejemplo: $y(t) = x(t^2) = \{x \circ \phi\}(t)$

Descomposición de SVIC

Como se vio en Análisis,

$$x_P(t) = \text{Parte par de } x(t) \triangleq \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_N(t) = \text{Parte non de } x(t) \triangleq \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Propiedades

$$x_P(t) = x_P(-t) \qquad x_N(t) = -x_N(-t)$$

Notar

- Cualquier SVIC se descompone en parte par e impar. Incluye señales periódicas y aperiódicas
- Las SVIC pueden ser pares, impares o ninguna de las dos
- Se puede reconstruir una SVIC a partir de sus partes par e impar,

$$x(t) = x_P(t) + x_N(t)$$

Descomposición de SVIC

De manera gráfica

Notar

- Una función impar tiene $x(0) = 0$
- La función signo, $\text{sgn}(t)$ se define impar, o sea $\text{sgn}(0) = 0$

Descomposición de SVID

En forma paralela,

$$x_P[n] = \text{Parte par de } x[n] \triangleq \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_N[n] = \text{Parte non de } x[n] \triangleq \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

Propiedades

$$x_P[n] = x_P[-n] \qquad x_N[n] = -x_N[-n]$$

Notar

- Cualquier SVID se descompone en parte par e impar. Incluye señales periódicas y aperiódicas
- Las SVID pueden ser pares, impares o ninguna de las dos
- Se puede reconstruir una SVID a partir de sus partes par e impar,
$$x[n] = x_P[n] + x_N[n]$$

Descomposición de SVID

De manera gráfica

Notar

- La función signo, $\text{sgn}[n]$ se define impar, o sea $\text{sgn}[0] = 0$

Próxima Clase

Energía, potencia y valor medio de SVIC y SVID.
Representación de SVIC y SVID con impulsos. Sistemas.