Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2013

Clase 4

Javier G. García
(Jorge Cogo)

3 de septiembre de 2013

Generalidades

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

★ Evolución (temporal) de las magnitudes físicas $\rightarrow$ señales.

★ Un estímulo admisible al sistema es la señal de entrada $\in \mathcal{C}_e$.

★ La respuesta del sistema al estímulo es la señal de salida $\in \mathcal{C}_s$.

★ La acción del sistema se describe por un **operador** $\mathcal{H}$ (toma una señal de entrada y la convierte en otra señal, de salida):

$$\mathcal{H} : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}_s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot])\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

Número de entradas y salidas

La relación entrada (única) a salida (única) o E/S es:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot])\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

y es un sistema SISO (por sus siglas en inglés).
Hay sistemas MIMO (por sus siglas en inglés) con *múltiples entradas* y *múltiples salidas*.

Ejemplo MIMO 1 Ducha: *1)* temperatura y *2)* caudal del agua entrando al calefón, *3)* caudal de gas e interesa la *4)* temperatura del agua en la flor de la ducha (3 señales de entrada y 1 de salida).

Ejemplo MIMO 2 Wi-Fi 802.11n: Un router con un arreglo de varias antenas se comunica con uno (o más) dispositivos que tiene un arreglito de 2 antenas. Este “canal de comunicaciones” se puede describir como MIMO.
También 4G, WiMax, etc.

Sin y con memoria

Sistema sin memoria: la salida en cada instante depende de la entrada en ese mismo instante

Sistema con memoria: la salida en cada instante depende de la entrada en ese mismo instante y de las entradas *anteriores* (y/o *futuras*)

Ejemplo 1: $y(t) = \frac{R_2 x(t)}{R_1+R_2} \Rightarrow$ sin memoria

Ejemplo 2: $y(t) = v_C(0)\mathrm{e}^{-t/RC} + \frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\sigma)/RC} x(\sigma)\, d\sigma \Rightarrow$ con memoria

Ejemplo 3: Amplificador logarítmico (usado en radar)
$y(t) = K \log x(t) + C \Rightarrow$ sin memoria

Lineales, no lineales

Se tratan de distinta manera según los sistemas sean *lineales* (SL) o *no lineales* (SNL).

Condiciones para **linealidad**:

1. Homogeneidad: Si $x_1(t) = cx(t)$ $c \in \mathbb{R}$ e $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$; entonces $y_1(t) = \mathcal{H}\{cx(\cdot)\}(t) = c\mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) = cy(t)$.
2. Aditividad: Para cualesquiera señales de entrada admisibles $x_1(t)$ y $x_2(t)$, las salidas respectivas son $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Luego si $y(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot) + x_2(\cdot)\}(t)$ es la salida a la entrada $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$; resulta $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

$\mathcal{H}$ es lineal sii $\mathcal{H}$ es homogéneo **y** aditivo.

Si un sistema no es lineal, entonces es no-lineal.

Ejemplos lineales, no lineales

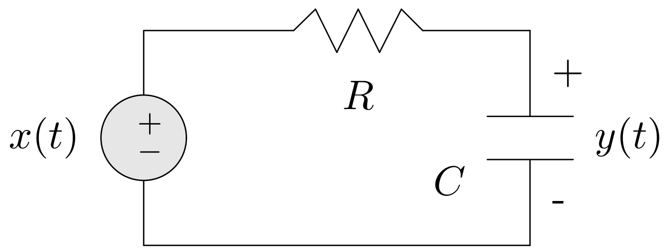
Ejemplo 1: $y(t) = x^2(t)$ es no lineal.

Ejemplo 2: Un circuito con R, L, C ideales, constantes, *con condiciones iniciales nulas* y que no tengan valores que dependan de la corriente o tensión aplicadas es lineal.

Ejemplo 3: Una L con núcleo de hierro es casi seguro no-lineal (aunque para pequeñas amplitudes pueda considerarse lineal).

Incrementalmente lineales

Recordar el Ejemplo 2 de Sistemas con Memoria.



$$y(t) = v_C(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(t-\sigma)/RC}x(\sigma)\,d\sigma$$

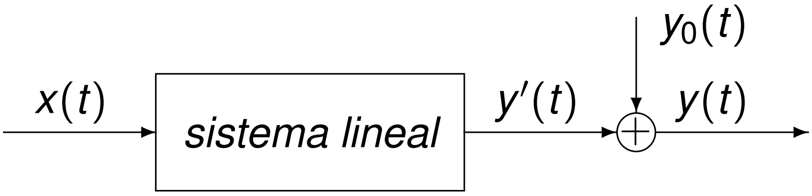
El sistema no es homogéneo ni aditivo; no es lineal!!

Incrementalmente lineales

¿A qué se debe? Al término con las condiciones iniciales. Eso motiva

Definición: sistemas en los que la diferencia de las salidas para cualesquiera dos funciones de entrada es una función lineal.

Forma general de sistemas incrementalmente lineales:



Invariancia en el tiempo

Sistema con VIC.

1. Se aplica $x_1(t)$ y se obtiene $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$.
2. Si se aplica la misma señal en el instante t_0, se aplica una $x_2(t) = x_1(t - t_0)$. La salida es $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$.
3. El sistema es invariante en el tiempo si se cumple que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$.
4. Interpretación 1: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué instante se la aplica.
5. Interpretación 2: El sistema responde siempre igual no importa cuándo se aplique la misma señal de entrada.
6. Un sistema lineal, que es invariante en el tiempo, se denota abreviadamente SLIT.

Ejemplo: divisor resistivo con termistor; si cambia la temperatura, cambia la ganancia del sistema. El sistema es variante en el tiempo (la Temp. cambia con el tiempo).

Invariancia al desplazamiento

Sistema con VID.

1. Se aplica $x_1[n]$ y se obtiene $y_1[n] = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}[n]$.
2. Si se aplica la misma señal desplazada en n_0, se aplica una $x_2[n] = x_1[n - n_0]$. La salida de denomina $y_2[n] = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}[n]$.
3. El sistema es invariante al desplazamiento si se cumple que $y_2[n] = y_1[n - n_0]$.
4. Interpretación 1: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué momento se la aplica.
5. Interpretación 2: El sistema responde siempre igual no importa cuándo se aplique la misma señal de entrada.
6. Un sistema lineal discreto, que es invariante al desplazamiento, se denota abreviadamente SLID.

Sistemas variantes

Si no son invariantes, son *variantes*: SVT y SVD.

- El operador de un SVT cambia según el instante en que se aplica la señal.
- Por ejemplo, se debe denotar $y[n] = \mathcal{H}_k\{x(\cdot)\}[n]$ indicando que se aplicó la secuencia $x[\cdot]$ en el instante k y se observa su respuesta $y[\cdot]$ en el instante n.

Causalidad

Intuición: dado un cambio a la entrada, la respuesta al mismo aparece en la salida de un sistema *causal* solamente después del cambio en la señal de entrada.

- Sistemas físicos: son causales.
- VIC o VID con señales de VI que no son tiempo $\Rightarrow$ sistemas *anticipativos* o *no-anticipativos*.
- En la computadora es fácil tener sistemas anticipativos. Por ejemplo:

$$y[n] = x[n-1] + x[n] + x[n+1]$$

  o en imágenes.

Estabilidad 1

Intuición: Un sistema es estable si para una perturbación de entrada de pequeña amplitud, no se aparta demasiado del punto donde estaba y/o retorna a él, más o menos lentamente.

Ejemplo péndulo con brazo rígido.

Estabilidad 2

- Hay varios tipos de estabilidad (verán más en Instrumentación y control) asintótica, exponencial, uniforme, etc.
- Usaremos una forma simple: estabilidad en sentido entrada-acotada/salida-acotada, denotada EA/SA.
- Estabilidad EA/SA – intuición: para cualquier entrada acotada la salida también resulta acotada.
- Entrada acotada: significa que existe $0 < K_e < \infty$ tal que $|x[n]| < K_e, \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $x[n] = e^n$ no es acotada; $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \phi)$ es acotada pues cualquier $K_e \geq 1$ es una cota.
- Estabilidad EA/SA: Un sistema es estable EA/SA si aplicar cualquier entrada acotada causa que exista un $0 < K_s < \infty$ tal que $|y[n]| < K_s, \forall n \in \mathbb{Z}$; o sea, que la salida sea acotada.
- Igualmente para sistemas continuos.

Estabilidad – ejemplo discreto

Ejemplo 3: $y[n]$: balance de una cuenta; α: tasa diaria de interés; $x[n]$: depósitos diarios. Entonces

$$y[n+1] = (1+\alpha)y[n] + x[n]$$

Si comienzo el día cero con $y[0] = y_0$ y nunca deposito nada,

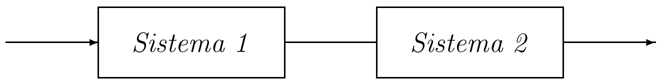
$$\begin{aligned} y[1] &= (1+\alpha)y_0 + 0 \\ y[2] &= (1+\alpha)y[1] = (1+\alpha)^2 y_0 \\ y[n] &= y[1] = (1+\alpha)^n y_0 \end{aligned}$$

... como α es positivo, seré rico si vivo lo suficiente!

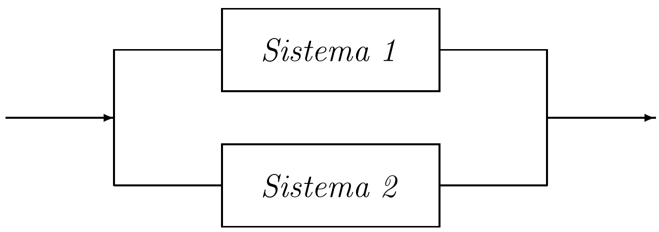
¡El capitalismo NO es un sistema estable!

Combinación de sistemas

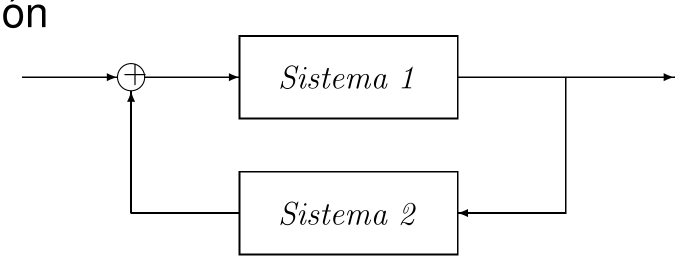
- Serie o cascada



- Paralelo



- Realimentación



Sistemas Lineales

Recordamos al operador que representa a un sistema:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot])\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

Sistema Lineal: es homogéneo y aditivo.

O de manera equivalente, satisface el

Principio de Superposición: para 2 constantes cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y dos entradas arbitrarias $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{C}_e$, se forma $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. Sean $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$ e $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$, entonces $\mathcal{H}$ satisface el principio de superposición si cumple

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

- Similar para sistemas discretos

Convolución discreta 1

Ingredientes:

- Sistemas lineales discretos (manejan SVID) con operador $\mathcal{H}$ que satisface el principio de superposición. Tanto para SLID como SLVD.
- Representación de SVID en términos de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\delta[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Aplicando $\mathcal{H}$, en la igualdad de la derecha se puede interpretar a $x[k]\delta[n-k]$ como una secuencia con un impulso en k de amplitud $x[k]$.

$$y[n] = \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{H}_k\{\delta[\cdot]\}[n]$$

Convolución discreta 2

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{H}_k\{\delta[\cdot]\}[n] =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\bar{h}[n,k]$$

donde $\bar{h}[n,k]$ es la respuesta impulsional: la respuesta observada en el instante n a un impulso (de Kronecker) aplicado en el instante k.

Próxima Clase

- Sistemas lineales:
  - Convolución discreta SVD.
  - Convolución discreta SLID.
  - Convolución contínua SVT.
  - Convolución continua SLIT.