Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2013

Clase 12

Javier G. García

5 de noviembre de 2013

Muestreo de señales continuas

Dada $x(t)$ real o compleja,

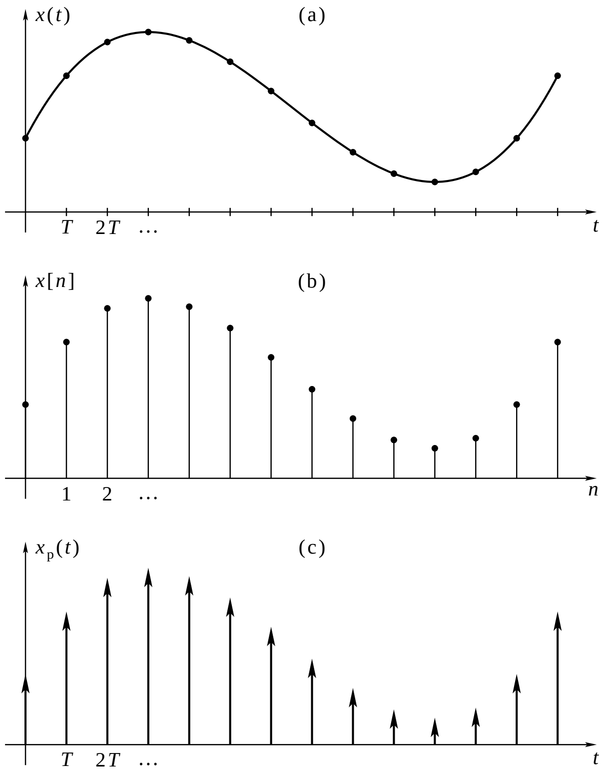
- Para procesarla digitalmente necesito convertirla al dominio discreto $\rightarrow$ Muestreo.
- Muestreo uniforme (tomo muestras equiespaciadas de la señal continua) $x[n] = x(nT)$
- *Intervalo de muestreo*: T [*seg*.].
- *Frec. de muestreo*: $f_s = \dfrac{1}{T}$ [*Hz*].
- ¿$x[n]$ conserva la misma información que $x(t)$?
- ¿Bajo qué condiciones?

Muestreo uniforme

Dada $x(t)$ real o compleja, (sin deltas!)

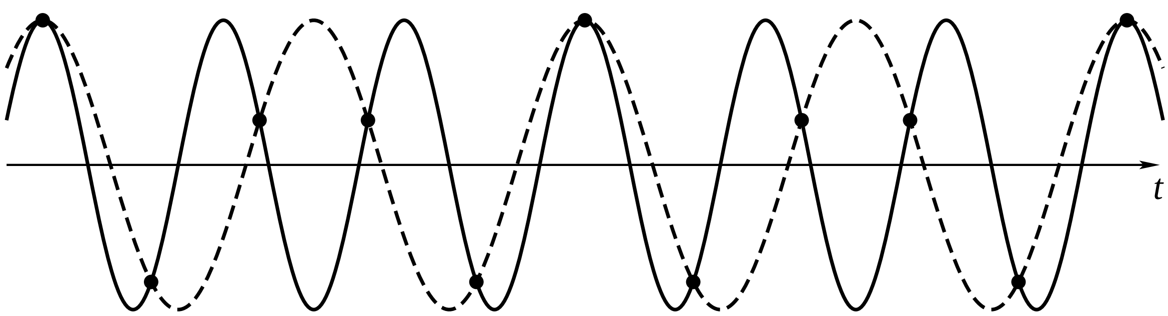
- $x[n] \triangleq x(nT), \quad n \in \mathbb{Z}$
- *Intervalo de muestreo*: T.
- *Frec. de muestreo*: $f_s = \frac{1}{T}$.
- Descripción alternativa:

$$x_p(t) = x(t)p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$



Muestreo de señales senoidales

- Si $x(t) = cos(2\pi f_0 t + \phi) \Rightarrow x[n] = \cos(2\pi s_0 n + \phi), \quad s_0 = f_0 T$.
- Los valores $s_k = f_0 T + k$ producen la misma secuencia!
- ¿Cómo elijo T?



¿Qué sucede en el espectro?

Tenemos tres transformadas: $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$,
$X_P(f) = \mathcal{F}\{x_P(t)\}$, y $X(e^{j2\pi s}) = TFTD\{x[n]\}$.

$$X_P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_P(t)e^{-j2\pi ft}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi fnT} = X(e^{j2\pi fT})$$

$$\begin{aligned}
X(e^{j2\pi fT}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)e^{j2\pi\lambda nT}d\lambda\, e^{-j2\pi fnT} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\lambda-f)nT} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left((\lambda - f) - \frac{k}{T}\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{k}{T}\right)
\end{aligned}$$

Teorema del Muestreo

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada ($X(f) = 0\, si\, |f| < f_M$).
Entonces, $x(t)$ se determina unívocamente mediante sus muestras $x[n] = x(nT)\; n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ si

$$f_s > 2f_M$$

donde

$$f_s = \frac{1}{T}$$

Teorema del Muestreo

Nyquist-Shannon-Whittaker

$$X(e^{j2\pi fT}) = X_P(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{k}{T}\right)$$

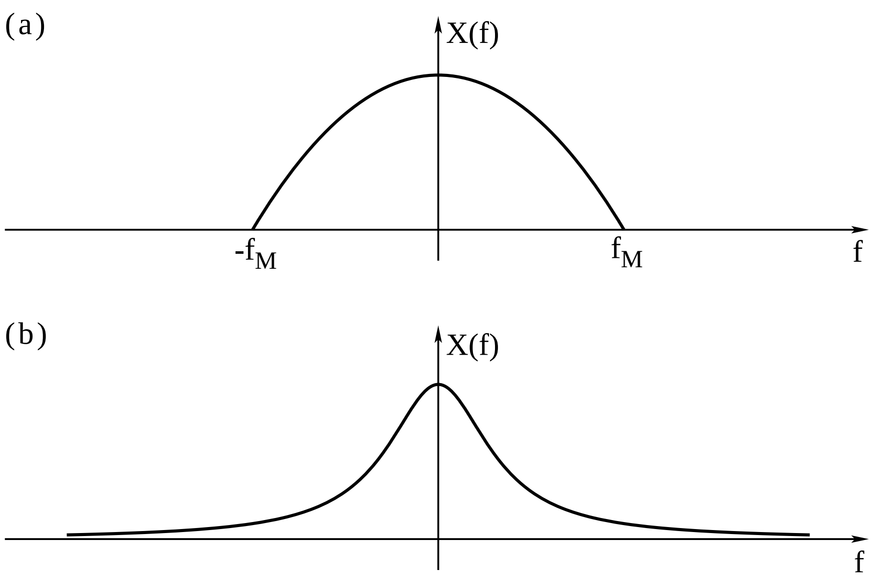
Consecuencias:

- Muestreo en tiempo $\Leftrightarrow$ periodicidad en frecuencia.
- Replicado del espectro original cada f_s
- Relación de frecuencias: $\boxed{s = fT}$
- $|s| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f| \leq f_s/2$

Señales de Banda Limitada

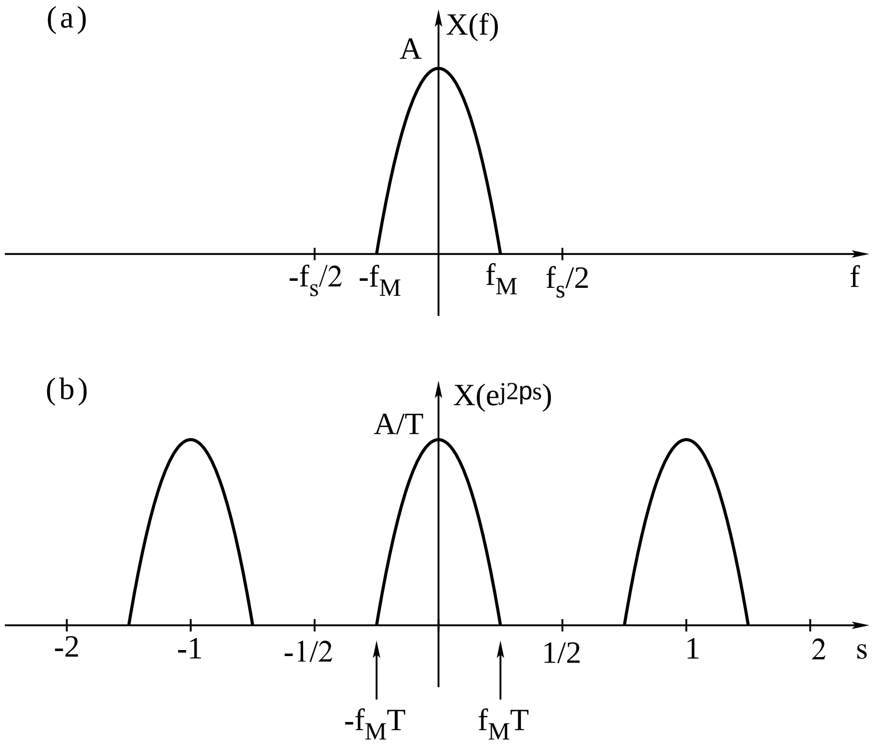
(a) Señal de banda limitada: $\exists\, f_M \,/\, X(f) = 0$ si $|f| \geq f_M$

(b) Señal de banda no limitada: $\nexists\, f_M$



Caso 1

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$.



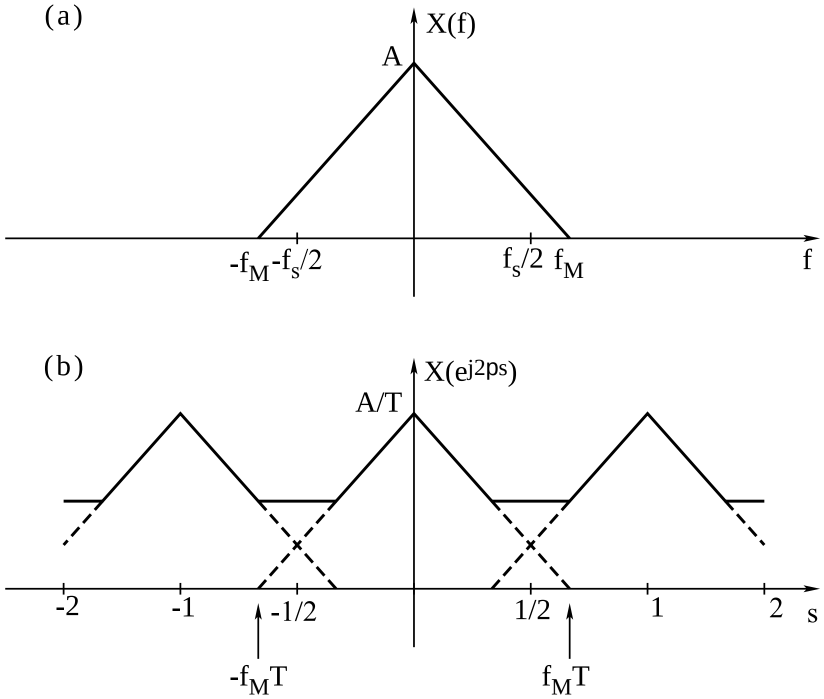
Caso 1

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$.

- No se solapan las réplicas.
- $X(e^{j2\pi s}) = \dfrac{1}{T} X\left(\dfrac{s}{T}\right), \quad |s| \leq \dfrac{1}{2}$
- $f_s = 2f_M$ es la *Frecuencia de Nyquist*.
- No hay distorsión del espectro.
- Posibilidad de reconstrucción.

Caso 2

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s < 2f_M$.



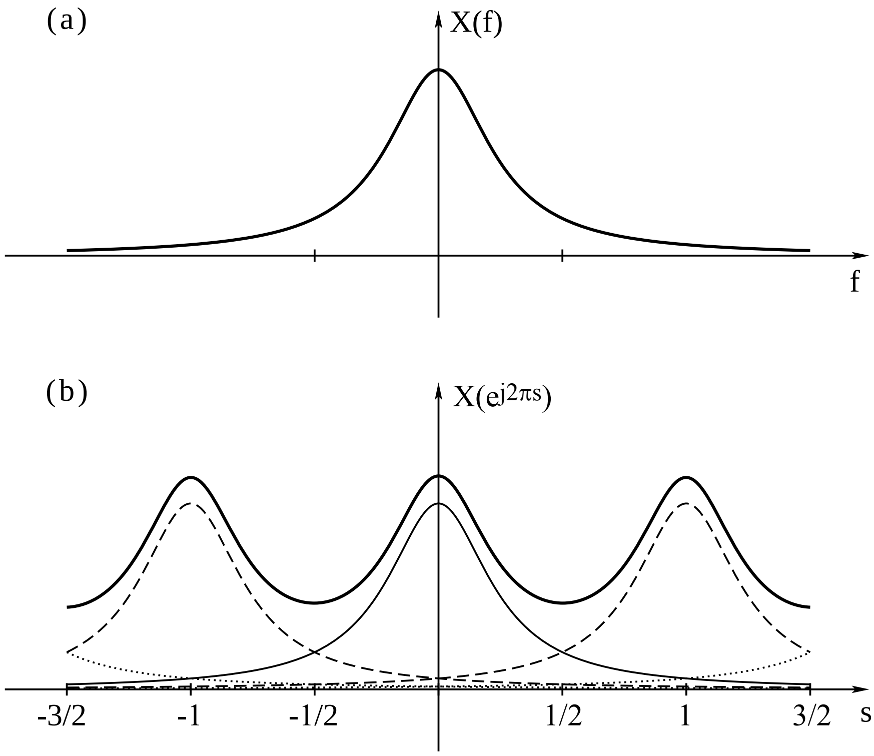
Caso 2

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s < 2f_M$.

- Se solapan las réplicas: *Aliasing*
- Distorsión del espectro $\Rightarrow$ Imposibilidad de reconstrucción.

Caso 3

Muestreo $x(t)$ de banda no limitada.



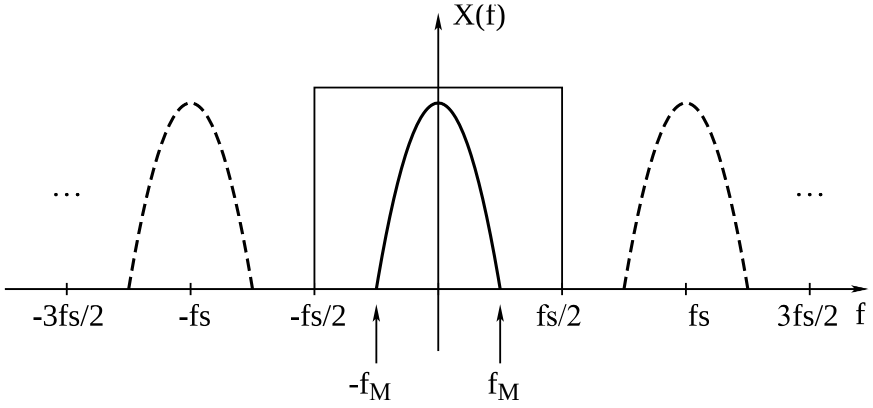
Caso 3

Muestreo $x(t)$ de banda no limitada.

- Siempre hay solapamiento.
- Toda señal de duración finita es de banda no limitada.
- Señales reales son de banda no limitada.
- El ancho de banda *práctico* es siempre finito.
- Filtro *Antialiasing*: Pasa Bajos hasta $f_s/2$.

Reconstrucción ideal

Tenemos x[n], muestras de $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$



Idea: Filtrar $x_p(t)$ con un filtro pasa bajos ideal.

$$H(f) = T \sqcap (fT) \Leftrightarrow h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Reconstrucción ideal

Tenemos x[n], muestras de $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$

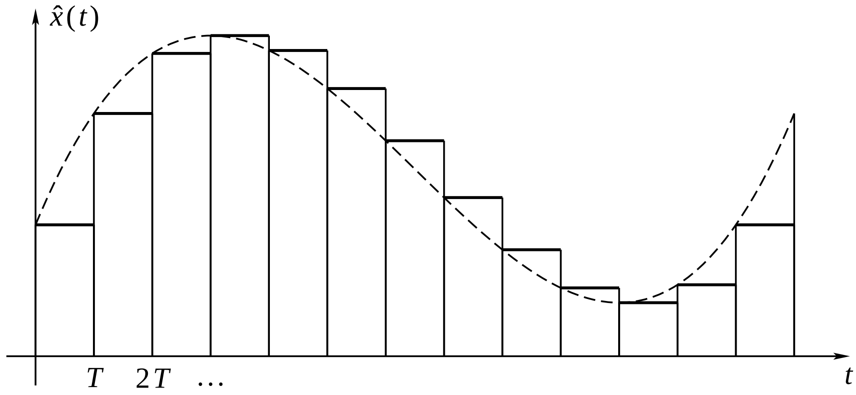
$$x(t) = \{x_p * h\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-\tau-nT)\right] d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)} \text{ (Teorema de Shannon)}$$

- Para $t = n_0 T$, $\text{sinc}\left(\frac{n_0 T - nT}{T}\right) = \delta[n-n_0]$
- Para $t \neq n_0 T$ todas las muestras contribuyen.
- $h(t)$ es no causal $\Rightarrow$ No es práctico (off-line).
- Reconstructor causal: $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t/T \rfloor} x(nT)h(t-nT)$

Reconstructor de orden cero

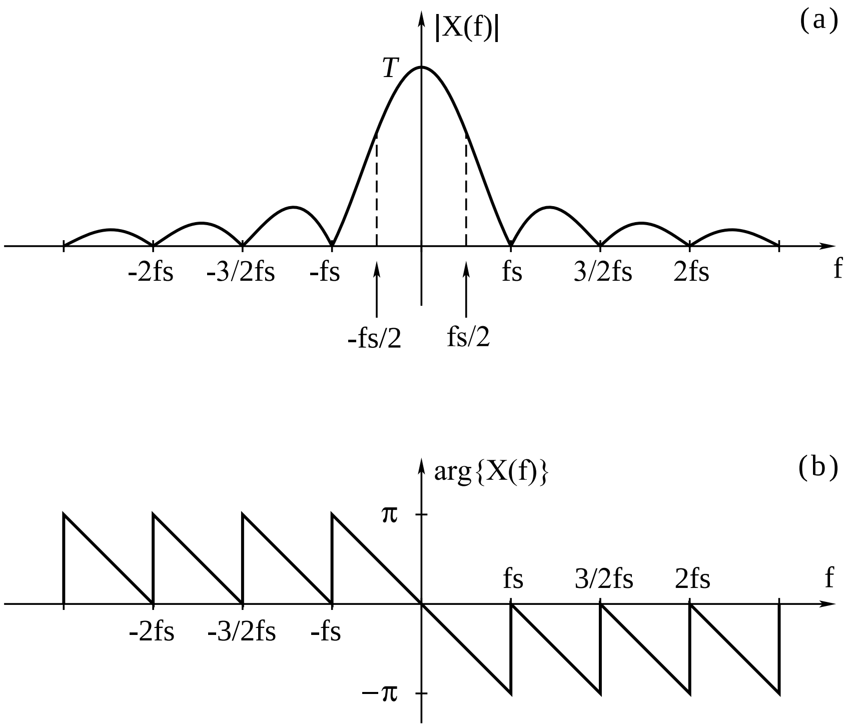
$$\hat{x}(t) = x[n], \quad nt \leq t < nT + T, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$



$$h_{zoh}(t) = \sqcap\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \Leftrightarrow H_{zoh}(f) = T\text{sinc}\,(fT)\, e^{-j\pi fT}$$

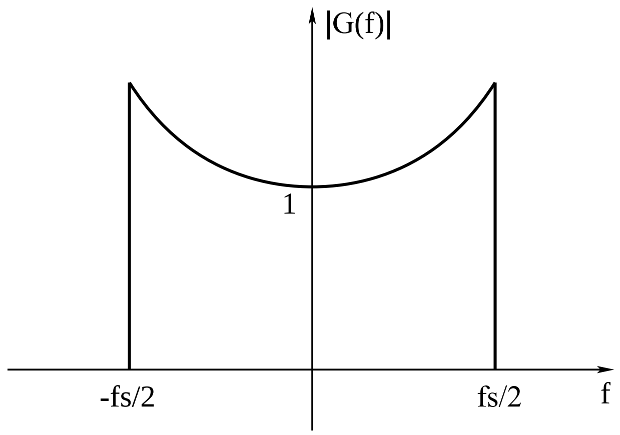
Reconstructor de orden cero

Respuesta en frecuencia:



Filtro Sinc Inverso

Corrige la salida del reconstructor ZOH.
$|G(f)| = [\mathrm{sinc}\,(fT)]^{-1} \sqcap (fT)$



En la práctica se usan aproximaciones.

Esquema típico de PDS