Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2013

Clase 11

Javier G. García

29 de octubre de 2013

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

Definición:
Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) directa (ecuación de análisis):

$$\boxed{X(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{x[\cdot]\}(e^{j2\pi s}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi sn}}$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto inversa (o ecuación de síntesis):

$$\boxed{x[n] = \text{TFTD}^{-1}\{X(\cdot)\}[n] \triangleq \int_{-1/2}^{+1/2} X(e^{j2\pi s})e^{j2\pi sn}ds}$$

Serie Discreta de Fourier (SDF)

Definición:
Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n+N]$, $N \in Z$), se puede representar como:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}}$$

donde c_k son los coeficientes de la serie y se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

Vinculación de la SDF con la TFTD

¿Habrá alguna vinculación entre los c_k y la TF de un período de la señal?
Podemos pensar que $x[n]$ puede representarse como:

$$x[n] = \{x_1 * \ p_N\}[n]$$

con

$$p_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

Entonces,

$$c_k = \frac{1}{N} X_1(e^{j2\pi s}) \left.\right|_{s=k/N}$$

Potencia de SVID periódicas (También aplica para SVIC)

Como $x[n]$ es periódica de período N puede escribirse como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

¿Es $x[n]$ una señal de potencia o de energía? ¿Cuál es la potencia de $x[n]$?
Recordemos

$$\mathcal{P}_x \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Operando con la expresión anterior se puede demostrar que

$$\mathcal{P}_x = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Potencia de SVIC periódicas

Como $x(t)$ es periódica de período T puede escribirse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}$$

¿Es $x(t)$ una señal de potencia o de energía? ¿Cuál es la potencia de $x(t)$?
Recordemos

$$\mathcal{P}_x \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Operando con la expresión anterior se puede demostrar que

$$\mathcal{P}_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Teorema de Rayleigh y de Parseval para SVID

Teorema de Rayleigh (o T. de Parseval generalizado):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\bar{y}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi s})\bar{Y}(e^{j2\pi s})ds$$

Si reemplazamos $y[n]$ por $x[n]$ e $Y(e^{j2\pi s})$ por $X(e^{j2\pi s})$ obtenemos el Teorema de Parseval:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(e^{j2\pi s})|^2 ds$$

Por lo tanto, tenemos una forma alternativa de calcular la energía de una señal discreta:

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(e^{j2\pi s})|^2 ds$$

$|X(e^{j2\pi s})|^2$ es la densidad “espectral” de energía de $x[n]$.

Teorema de Rayleigh y de Parseval para SVIC

Teorema de Rayleigh (o T. de Parseval generalizado):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bar{y}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\bar{Y}(f)df$$

En particular, si reemplazamos $y(t)$ por $x(t)$ e $Y(f)$ por $X(f)$ obtenemos el Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Por lo tanto, tenemos una forma alternativa de calcular la energía de una señal continua:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ es la densidad “espectral” de energía de $x(t)$.

TFTD de SVID periódicas

Si escribimos a $x[n]$ como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

Utilizando la linealidad de la TFTD y la propiedad de translacióon resulta

$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \text{Ш}(s - k/N)$$

Las señales periódicas discretas tienen espectro de líneas (aparecen peines debido a la periodicidad de la TFTD).
La separación de las deltas es inversamente proporcional al período.

Respuesta en Frecuencia de SLID

Sea un SLID con respuesta impulsional $h[n]$. Sean $x[n]$ e $y[n]$ la entrada y la salida de dicho sistema respectivamente.
Como

$$y[n] = \{x * h\}[n]$$

Utilizando propiedades de la TFTD llegamos a que

$$Y(e^{j2\pi s}) = H(e^{j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

donde $H(e^{j2\pi s})$ es la respuesta en frecuencia del sistema (Recordar la motivación de la primera clase de TFTD).
¿Cómo debe ser el sistema para que exista la TFTD?
¿Puedo usar la TFTD para obtener la respuesta impulsional de un SLID?

Respuesta de un SLID a señales periódicas

Sea un SLID con respuesta impulsional $h[n]$. Sea $x[n]$ una señal periódica de período N la entrada al sistema.
¿Cómo resulta la salida?

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

Utilizando superposición resulta

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} H(e^{j2\pi k/N}) c_k e^{j2\pi nk/N}$$

¿Qué se puede decir de la señal de salida? ¿Es períodica?
¿Cuáles son los coeficientes de su SDF?

Correlación de señales de Energía

- Utilizada en radar, sonar, comunicaciones, geología, etc.
- Mide el grado de parecido entre las señales.

Dadas x e y señales de energía (E_x y E_y)

Definición

$$r_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\bar{y}(t)dt \qquad \text{o} \qquad r_{xy}[k] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+k]\bar{y}[n]$$

- *Autocorrelación*: r_{xx} , $r_{xx}(0) = E_x$ o $r_{xx}[0] = E_x$.
- Desig. Cauchy-Schwarz: $|r_{xy}|^2 \leq E_x E_y$ ($|r_{xx}| \leq E_x$).
- $r_{xy} = \{x * \bar{y}^-\}$, con $y^-(t) = y(-t)$ o $y^-[n] = y[-n]$.
- $r_{xy}(\tau) = \bar{r}_{yx}(-\tau)$ o $r_{xy}[k] = \bar{r}_{yx}[-k]$ (r_{xx} es hermítica).

Correlación de señales de Potencia

- La definición anterior falla.
- Utilizada para identificar periodicidades de señales.

Dadas x e y señales de potencia (P_x y P_y)

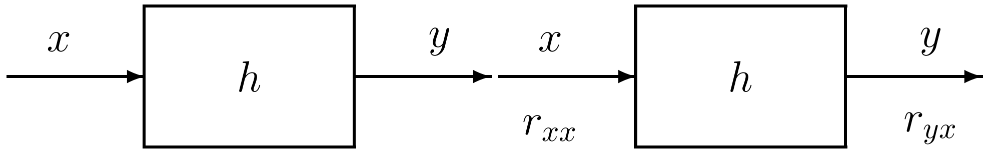
Definición

$$r_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)\bar{y}(t)dt\,;\; r_{xy}[k] \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} x[n+k]\bar{y}[n]$$

- *Autocorrelación*: r_{xx} , $r_{xx}(0) = P_x$ o $r_{xx}[0] = P_x$.
- Desig. Cauchy-Schwarz: $|r_{xy}|^2 \leq P_x P_y$ ($|r_{xx}| \leq P_x$).
- Si x es periódica, entonces r_{xx} también.
- $r_{xy}(\tau) = \bar{r}_{yx}(-\tau)$ o $r_{xy}[k] = \bar{r}_{yx}[-k]$

Correlación y SLITs

Dado un SLIT estable con rta. impulsional h, $y = \{h * x\}$



- El sistema no cambia el tipo de señal (energía o potencia).
- $r_{yx} = \{h * r_{xx}\}$ (y también $r_{xy} = \{\bar{h}^{-} * r_{xx}\}$)
- $r_{yy} = \{r_{hh} * r_{xx}\}$