Se llama **Transformada de Laplace** de la función $F(t)\quad t \geq 0$ a la función
$$L(F(t)) = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$
siempre y cuando, la función esté definida.

Ejemplo 1. Sea $F(t) = e^{at}$, entonces:
$$L(F(t)) = L(e^{at}) = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}|_0^{\infty}$$
. Entonces, si
$$a > s \Rightarrow \frac{1}{a-s}(e^{\infty} - e^0) = \infty \Rightarrow \nexists L(e^{at})$$
pero, si
$$a < s \Rightarrow \frac{1}{a-s}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$
es decir,
$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad / \quad s > a$$

Sea $f(s) = L(F(t))$, llamaremos **Transformada Inversa de Laplace**, $L^{-1}(f(s)) = F(t)$.

Función F(t)	**Transformada de Laplace L(F(t))=f(s)**
k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Sean $L(F(t)) = f(s)$, $L(G(t)) = g(s)$, $L^{-1}(f(s)) = F(t)$, $L^{-1}(g(s)) = G(t)$ y $\alpha, \beta \in \Re$. Entonces, se verifica:

P1) **Linealidad**

$$L(\alpha F(t) + \beta G(t)) = \alpha L(F(t)) + \beta L(G(t))$$

$$L^{-1}(\alpha f(s) + \beta g(s)) = \alpha L^{-1}(f(s)) + \beta L^{-1}(g(s))$$

P2) **Primera Traslación**

$$L(e^{at} F(t)) = f(s-a)$$

$$L^{-1}(f(s-a)) = e^{at} F(t)$$

P3) **Segunda Traslación**

$$\text{Si } G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \Rightarrow L(G(t)) = e^{-as} f(s)$$

$$L^{-1}(e^{-as} f(s)) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

P4) **Cambio de escala**

$$L(F(at)) = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L^{-1}(f(as)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$$

P5) **Transformada de las derivadas**

$$L(F'(t)) = sf(s) - F(0)$$
$$L(F''(t)) = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$$
$$\vdots$$
$$L(F^{(n}(t)) = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - \ldots - sF^{(n-2}(0) - F^{(n-1}(0)$$

Esta propiedad nos será muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales, que veremos más adelante.

P6)

$$L(t^n F(t)) = (-1)^n f^{(n}(s)$$

$$L^{-1}(f^{(n}(s)) = (-1)^n t^n F(t)$$

P7)

$$L\left(\frac{F(t)}{t}\right) = \int_s^\infty f(u)du \quad \text{siempre que} \quad \exists \quad lim_{t\to 0}\left(\frac{F(t)}{t}\right)$$
$$L^{-1}\left(\int_s^\infty f(u)du\right) = \frac{F(t)}{t}$$

y también se verifica que:

$$L^{-1}\left(\frac{f(s)}{s}\right) = \int_s^t F(u)du$$

P8) **Teorema de Convolución**

$$L\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right) = f(s)g(s)$$
$$L^{-1}(f(s)g(s)) = \int_0^t F(u)G(t-u)du$$

Ejemplo 2. Calcular $L^{-1}\left(\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right)$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A+B=3 \\ -3A+B=7 \end{array} \Rightarrow A=-1 \quad B=4$$

y, por tanto

$$L^{-1}\left(\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right)=L^{-1}\left(\frac{-1}{s+1}+\frac{4}{s-3}\right)=$$

$$-1L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+4L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)=-1e^{-t}+4e^{3t}$$

Ejemplo 3. Calcular $L(e^{3t}t^2)$

Por la Propiedad 2, tenemos que:

$L(e^{3t}t^2)=f(s-3)$, pero $L(t^2)=\dfrac{2!}{s^3}=\dfrac{2}{s^3}=f(s) \quad \Rightarrow L(e^{3t}t^2)=\dfrac{2}{(s-3)^3}$

ó también podríamos haber hecho:

$F(t)=e^{3t} \quad \Rightarrow f(s)=L(e^{3t})=\dfrac{1}{s-3} \quad \Rightarrow \quad f'(s)=\dfrac{-1}{(s-3)^2} \quad \Rightarrow$

$L(e^{3t}t^2)=(-1)^2f''(s)=\dfrac{2}{(s-3)^3}$

Ejemplo 4. Calcular $L\left(\dfrac{sen(t)}{t}\right)$

Veamos que podemos aplicar la Propiedad 7,

$$lim_{t\to 0}\left(\frac{sen(t)}{t}\right)=lim_{t\to 0}\left(\frac{cos(t)}{1}\right)=1$$

entonces, sabemos que

$$L\left(\frac{sen(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty} f(u)\,du$$

$$f(s) = L(F(t)) = L(sen(t)) = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad L\left(\frac{sen(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2+1} =$$
$$arctag(u)\,|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctag(s) = arctag\left(\frac{1}{s}\right)$$

Ejemplo 5. Hallar $L(H(t))$ siendo $H(t) = \displaystyle\int_0^t sen(2u)\,cos(t-u)\,du$

$$L(H(t)) = L(sen(2s)).L(cos(s)) = \frac{2}{s^2+4}.\frac{s}{s^2+1}$$

Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales

Sea una ecuación diferencial de segundo orden lineal con coeficientes constantes

$$a_0\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = f(x) \quad a_0 \neq 0$$
$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \quad a_0 \neq 0$$

podemos aplicar la Transformada de Laplace a ambos lados, con lo que transformaremos la ecuación diferencial en una ecuación algebráica, $L(y(x)) = Y(s)$, y la solución general será entonces $L^{-1}(Y(s))$

Ejemplo 6. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$L(y'' + y) = L(x) \Rightarrow L(y'') + L(y) = L(x) \Rightarrow s^2y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2y_s - s + 2 + y_s = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y_s(s^2+1) = \frac{1}{s^2} + (s-2) \Rightarrow y_s = \frac{1+s^2(s-2)}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -3 \Rightarrow y_s = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

La solución general será

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - 3L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = x + cos(x) - 3sen(x)$$

Ejemplo 7. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = cos(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$L(y'')+L(y) = L(cos(t)) \Rightarrow s^2y_s - sy(0) - y'(0) = \dfrac{s}{s^2+1} \Rightarrow y_s(s^2+1)-1 = \dfrac{s}{s^2+1} \Rightarrow y_s = \dfrac{s^2+s+1}{(s^2+1)^2} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{Cs+D}{(s^2+1)^2} \Rightarrow A = 0, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 0$

$y_s = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow y(x) = L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right) = sen(t) + \dfrac{t}{2}sen(t)$

Ejemplo 8. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$L(y'') - 4L(y') + 4L(y) = L(t^3e^{2t}) \Rightarrow s^2y_s - sy(0) - y'(0) - 4sy_s - 4y(0) + 4y_s = \dfrac{3!}{(s-2)^4} \Rightarrow y_s = \dfrac{6}{(s-2)^2(s^2-4s+4)} = \dfrac{6}{(s-2)^6} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\dfrac{6}{(s-2)^6}\right) = \dfrac{1}{20}t^5e^{2t}$