

---

# Señales y Sistemas

## Fundamentos Matemáticos

---



---

# Señales y Sistemas

## Fundamentos Matemáticos

---

Pablo Alvarado Moya

Escuela de Ingeniería Electrónica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Dr.-Ing. Pablo Alvarado Moya  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica  
Apartado Postal 159  
7050 Cartago  
Costa Rica

### **Primera Edición, primera reimpresión**

Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico (CDBM)  
Instituto Tecnológico de Costa Rica  
Apartado Postal 159  
7050 Cartago  
Costa Rica

621.3822

A 472 s

Alvarado Moya, Pablo.

Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos / Pablo Alvarado Moya.

— 1ª Ed. — Cartago, Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica,  
Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.

319 p. : il.

**ISBN 978-9968-514-06-4**

1. Sistemas. 2. Señales. 3. Teoría de funciones. 4. Series de Fourier.  
5. Transformada de Fourier. 6. Transformada de Laplace. 7. Transformada  $z$ .

© 2005-2010 Pablo Alvarado Moya

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este documento pueden reproducirse, registrarse o transmitirse en ninguna forma ni por ningún medio sin permiso previo del autor.

*Este documento ha sido elaborado con software libre. Principalmente  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, BibT<sub>E</sub>X, GNUPlot, Octave, XFig, GNU-Make y Subversion en  
Linux*

# Prefacio

La solución de problemas típicos en las áreas de ingeniería presupone un fuerte dominio matemático, puesto que la matemática representa el lenguaje básico para poder describir tanto el comportamiento de fenómenos en el entorno, como los métodos utilizados para modificar dichos comportamientos de una manera controlada. El presente texto pretende introducir los fundamentos matemáticos necesarios para el análisis de señales y sistemas, y ha sido elaborado para servir de guía en el curso “EL-4701 Modelos de Sistemas” impartido en la carrera de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Un arduo proceso en los últimos dos años ha precedido este documento, que se presenta en el actual formato por considerar que ya ha alcanzado el grado de madurez necesario.

Se ha pretendido cubrir con suficiente detalle la materia correspondiente a dicho curso, que involucra fundamentos del cálculo con variable compleja, el análisis de Fourier, y las transformadas de Laplace y  $z$ . Estos temas introducen el vocabulario indispensable para el análisis de sistemas y señales llevado a cabo en las últimas fases de la carrera de Ingeniería Electrónica, especialmente en las áreas de control automático, comunicaciones eléctricas y procesamiento de señales. Es recomendable, sin embargo, que la revisión de la materia sea acompañada por otros libros de texto. Se sugieren entre otros los libros de James [8], y Brown y Churchill [2] para el tema de variable compleja, Oppenheim y Willsky [14] para el análisis de Fourier y Laplace, y Proakis y Manolakis [16] para la transformada  $z$ . Para el lector que tenga interés en un tratamiento más formal de la materia se recomiendan además los libros de Shilov [19], LePage [11], Davis [3] y Kreyszig [9].

El orden de presentación de los temas ha sido adecuado a la forma considerada más “natural” para su introducción. Especialmente la presentación del análisis de Fourier sigue un enfoque más “formal” que el tradicionalmente utilizado en textos para ingeniería, con el objetivo de introducir conceptos necesarios para la comprensión de tópicos frecuentemente utilizados en la actualidad, como la teoría de *wavelets*, o técnicas de modulación basadas en ortogonalidad.

En cuanto a la distribución del curso en un semestre, se recomienda utilizar una semana en el primer capítulo, de cinco a seis semanas en el capítulo de variable compleja y un lapso similar para el análisis de Fourier. Similitudes conceptuales permiten invertir de tres a cuatro semanas tanto con la Transformada de Laplace como con Transformada  $z$ .

Para finalizar, deseo agradecer a los colegas Ing. Néstor Hernández Hostaller, M.Sc., Ing. Arys Carrasquilla Batista, M.Sc. e Ing. Faustino Montes de Oca Murillo por haber construido la estructura original del curso. A mis estudiantes agradezco el haber sido los más exigentes

revisores de este texto, así como a mi colega Ing. Gabriela Ortiz León, M.Sc., con quien hemos dado forma al contenido actual del curso. Finalmente agradezco a mi colega el Ing. David Gómez Tames por la exhaustiva revisión del texto.

Dr. José Pablo Alvarado Moya

Cartago, 26 de marzo de 2010

# Índice general

Índice de tablas	v
Índice de ejemplos	ix
Lista de símbolos y abreviaciones	xi
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Señales, sistemas y modelos . . . . .	1
1.1.1 Señales . . . . .	1
1.1.2 Sistemas . . . . .	3
1.1.3 Modelos . . . . .	4
1.1.4 Diagramas de Bloques . . . . .	4
1.2 Estructura del documento . . . . .	5
1.3 Problemas . . . . .	7
<b>2 Variable compleja</b>	<b>9</b>
2.1 Definiciones de álgebra abstracta . . . . .	9
2.1.1 Conjuntos . . . . .	9
2.1.2 Estructuras algebraicas . . . . .	11
2.1.3 Números naturales . . . . .	13
2.1.4 Los números enteros . . . . .	14
2.1.5 Los números racionales . . . . .	14
2.1.6 Los números reales . . . . .	15
2.1.7 Los números complejos . . . . .	16
2.1.8 Otros conjuntos . . . . .	24
2.2 Funciones de variable compleja . . . . .	24
2.2.1 El concepto de <i>mapeo</i> . . . . .	26
2.2.2 Mapeos lineales . . . . .	27
2.2.3 Mapeo de Inversión . . . . .	32
2.2.4 Mapeo bilineal . . . . .	35
2.2.5 Otros mapeos . . . . .	40
2.3 Derivación compleja . . . . .	41
2.3.1 Algunas definiciones fundamentales . . . . .	41
2.3.2 Límites y continuidad . . . . .	43
2.3.3 Funciones diferenciables y analíticas . . . . .	44

2.3.4	Ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	47
2.3.5	Funciones conjugadas y armónicas . . . . .	48
2.3.6	Mapeos conformes . . . . .	51
2.4	Series complejas . . . . .	53
2.4.1	Series de potencias . . . . .	53
2.4.2	Series de Taylor . . . . .	58
2.4.3	Series de Laurent . . . . .	61
2.5	Singularidades, ceros y residuos . . . . .	66
2.5.1	Singularidades y ceros . . . . .	66
2.5.2	Residuos . . . . .	67
2.6	Integración compleja . . . . .	70
2.6.1	Integrales de contorno . . . . .	72
2.6.2	Teorema de la integral de Cauchy . . . . .	76
2.6.3	Fórmula de la integral de Cauchy . . . . .	80
2.6.4	Teorema del Residuo . . . . .	84
2.7	Integración sobre semicírculos extensos . . . . .	85
2.8	Evaluación de integrales reales . . . . .	89
2.8.1	Caso 1: Integrales impropias . . . . .	90
2.8.2	Caso 2: Integrales de funciones reales trigonométricas . . . . .	91
2.9	Problemas . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Análisis de Fourier</b>	<b>109</b>
3.1	Ortogonalidad . . . . .	109
3.1.1	Espacios lineales . . . . .	109
3.1.2	Tipos de espacios lineales . . . . .	112
3.1.3	Ortogonalidad de funciones . . . . .	122
3.2	Series de Fourier . . . . .	124
3.2.1	Series generalizadas de Fourier . . . . .	124
3.2.2	Series de Fourier . . . . .	131
3.2.3	Propiedades de la serie de Fourier . . . . .	141
3.3	Transformada de Fourier . . . . .	153
3.3.1	Transformada de Fourier directa e inversa . . . . .	153
3.3.2	Convergencia de la Transformada de Fourier . . . . .	155
3.3.3	Ejemplos de Transformadas de Fourier . . . . .	156
3.3.4	Propiedades de la Transformada de Fourier . . . . .	165
3.4	Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo y la Convolución . . . . .	180
3.4.1	Linealidad e invarianza en el tiempo . . . . .	181
3.4.2	Convolución . . . . .	185
3.4.3	Funciones propias . . . . .	185
3.4.4	Causalidad y estabilidad . . . . .	187
3.5	Problemas . . . . .	189
<b>4</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>199</b>
4.1	Transformada bilateral de Laplace . . . . .	200



4.1.1	Regiones de convergencia . . . . .	204
4.1.2	Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	208
4.1.3	La transformada inversa de Laplace . . . . .	211
4.1.4	Sistemas LTI y la transformada de Laplace . . . . .	222
4.1.5	Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . .	225
4.2	Transformada unilateral de Laplace . . . . .	228
4.2.1	Propiedades . . . . .	228
4.2.2	Ecuaciones diferenciales . . . . .	235
4.3	Problemas . . . . .	238
<b>5</b>	<b>Transformada <math>z</math></b>	<b>245</b>
5.1	Funciones en tiempo discreto . . . . .	245
5.1.1	Conversión analógica/digital . . . . .	246
5.1.2	Representaciones de funciones de variable discreta . . . . .	247
5.1.3	Señales elementales de variable discreta . . . . .	249
5.2	Transformada $z$ bilateral . . . . .	252
5.2.1	Transformada $z$ bilateral directa . . . . .	252
5.2.2	Propiedades de la transformada $z$ bilateral . . . . .	256
5.2.3	Transformada $z$ inversa . . . . .	264
5.3	Sistemas en tiempo discreto . . . . .	272
5.3.1	Descripción entrada-salida de sistemas . . . . .	272
5.3.2	Tipos de sistemas en tiempo discreto . . . . .	274
5.3.3	Análisis de sistemas LTI en tiempo discreto . . . . .	275
5.4	Transformada $z$ unilateral . . . . .	287
5.4.1	Definición y propiedades . . . . .	287
5.4.2	Respuestas natural y forzada . . . . .	291
5.5	Interconexión de sistemas . . . . .	292
5.5.1	Diagramas de bloques . . . . .	293
5.6	Problemas . . . . .	297
	<b>Bibliografía</b>	<b>303</b>
	<b>A Teorema de Green</b>	<b>305</b>
	<b>B Demostraciones de integrales</b>	<b>307</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>315</b>



# Índice de tablas

1.1	Características de las señales . . . . .	3
2.1	Estructuras similares a grupos. . . . .	12
2.2	Estructuras similares a anillos . . . . .	13
2.3	Propiedades de la suma y la multiplicación con $\mathbb{Z}$ . . . . .	14
2.4	Estructuras algebraicas numéricas. . . . .	17
2.5	Valores de integrales en los semicírculos extensos mostrados en la figura 2.38. . . . .	89
3.1	Propiedades de la Serie de Fourier . . . . .	152
3.2	Transformadas de Fourier . . . . .	166
3.3	Propiedades de la Transformada de Fourier . . . . .	177
4.1	Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace . . . . .	212
4.2	Transformadas Bilaterales de Laplace de funciones elementales . . . . .	218
4.3	Transformadas Unilaterales de Laplace de funciones elementales . . . . .	229
4.4	Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace . . . . .	230
5.1	Transformada $z$ bilateral de algunas funciones comunes . . . . .	258
5.2	Propiedades de la transformada $z$ bilateral. . . . .	263



# Índice de ejemplos

2.1	Propiedades de operaciones . . . . .	11
2.2	Diagrama de Argand . . . . .	17
2.3	Mapeo de una línea recta . . . . .	26
2.4	Mapeo lineal de rectas . . . . .	28
2.5	Mapeo lineal de círculos . . . . .	29
2.6	Mapeo lineal de una región . . . . .	30
2.7	Carta de Smith . . . . .	36
2.8	Derivada de $f(z) = z$ . . . . .	44
2.9	Derivada de $f(z) = z^*$ . . . . .	45
2.10	Función analíticas y las ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	48
2.11	Funciones conjugadas . . . . .	50
2.12	Mapeo conforme . . . . .	51
2.13	Mapeo conforme exponencial . . . . .	52
2.14	Radio de convergencia de derivadas . . . . .	55
2.15	Serie de potencias . . . . .	56
2.16	Serie de Taylor de la función cosenoidal . . . . .	59
2.17	Series de Taylor . . . . .	59
2.18	Serie de Laurent . . . . .	63
2.19	Series de Laurent con diferentes regiones de convergencia . . . . .	63
2.20	Cálculo de residuos . . . . .	68
2.21	Cálculo de residuos . . . . .	69
2.22	Residuo de una singularidad esencial . . . . .	70
2.23	Integral de contorno . . . . .	73
2.24	Integral de contorno cerrada alrededor de polo simple . . . . .	75
2.25	Integral de contorno cerrada alrededor de polo múltiple . . . . .	75
2.26	Integración compleja . . . . .	79
2.27	Teorema de la integral de Cauchy . . . . .	80
2.28	Fórmula integral de Cauchy . . . . .	83
2.29	Integración por teorema del residuo . . . . .	85
2.30	Integración infinita real . . . . .	90
2.31	Integración de una función trigonométrica real . . . . .	91
3.1	Coeficientes de una base ortogonal . . . . .	116
3.2	Ortogonalidad en el espacio euclidiano bidimensional . . . . .	119
3.3	Cambio de base para un vector . . . . .	120
3.4	Proyección de funciones sobre base canónica funcional . . . . .	130

3.5	Serie de Fourier de señal rectangular . . . . .	136
3.7	Linealidad en las series de Fourier . . . . .	143
3.8	Simetría en series de Fourier . . . . .	145
3.10	Transformada de Fourier del seno y el coseno . . . . .	162
3.12	Propiedad de derivación . . . . .	171
3.13	Propiedad de integración . . . . .	172
3.14	Transformada de Distribución Normal . . . . .	173
3.15	Dualidad de la transformada de Fourier . . . . .	175
3.16	Uso de propiedades para el cálculo del principio de integración . . . . .	177
3.17	Muestreo de señales . . . . .	178
3.18	Sistemas lineales . . . . .	181
3.19	Sistemas invariantes en el tiempo . . . . .	182
4.1	Transformada de Laplace . . . . .	201
4.2	Región de convergencia de la transformada de Laplace . . . . .	201
4.3	Transformada de Laplace y ROC . . . . .	202
4.4	Transformada de Laplace de función finita . . . . .	205
4.5	Convergencia de funciones bilaterales . . . . .	206
4.6	Derivación . . . . .	211
4.7	Inversión por integración de función racional con polo simple . . . . .	214
4.8	Inversión por integración de función racional con polos de orden superior . . . . .	214
4.9	Inversión por integración de función con polo en cero . . . . .	215
4.11	Transformada de Laplace de un término de segundo orden . . . . .	217
4.12	Transformada inversa de Laplace por descomposición en fracciones parciales . . . . .	219
4.13	Estabilidad y regiones de convergencia . . . . .	224
4.14	Estabilidad de sistemas de segundo orden . . . . .	225
4.15	Circuito RLC . . . . .	227
4.16	Transformada unilateral de Laplace de una función periódica . . . . .	231
4.17	Solución de ecuación diferencial con condiciones iniciales . . . . .	236
5.1	Transformada $z$ de funciones finitas . . . . .	253
5.2	Transformada $z$ de función exponencial . . . . .	253
5.3	Transformada $z$ de función exponencial causal general . . . . .	254
5.4	Transformada $z$ de función exponencial anticausal general . . . . .	255
5.5	Transformada de combinación lineal de exponenciales . . . . .	256
5.6	Linealidad . . . . .	256
5.7	Escalado en el dominio $z$ . . . . .	259
5.8	Inversión temporal . . . . .	261
5.9	Diferenciación en el dominio $z$ . . . . .	261
5.10	Transformada $z$ inversa . . . . .	264
5.11	Transformada $z$ inversa por división polinomial . . . . .	265
5.12	Transformada $z$ inversa por series de Taylor . . . . .	266
5.13	Conversión de función impropia en un polinomio más una función propia . . . . .	267
5.14	Continuación de ejemplo 5.13 . . . . .	268
5.15	Expansión en fracciones parciales con solo polos simples . . . . .	269

5.16	Expansión en fracciones parciales con polos dobles . . . . .	270
5.17	Descripción entrada-salida . . . . .	272
5.18	Salida de sistema acumulador . . . . .	273
5.19	Invarianza en el tiempo . . . . .	274
5.20	Sistemas lineales . . . . .	275
5.21	Descomposición en impulsos . . . . .	276
5.22	Convolución . . . . .	277
5.23	Reacción de sistemas con respuesta exponencial . . . . .	278
5.24	Sistemas lineales discretos en el dominio $z$ . . . . .	280
5.25	Estabilidad y convergencia . . . . .	282
5.26	Estabilidad y convergencia . . . . .	282
5.27	Sistemas en tiempo discreto recursivos y no recursivos . . . . .	284
5.28	Ecuación de diferencias a partir de transformada $z$ . . . . .	286
5.29	Transformada $z$ unilateral . . . . .	287
5.30	Transformada $z$ unilateral y adelanto temporal . . . . .	289
5.31	Teorema del valor final . . . . .	290
5.32	Respuestas natural y forzada. . . . .	291
5.33	Diagrama de bloques . . . . .	294
5.34	Sistema retroalimentado . . . . .	295





# Lista de símbolos y abreviaciones

## Notación general

$\mathbb{N}^+, \mathbb{N}^*$	Conjunto de los números naturales sin cero $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	Conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{n}{d}; n, d \in \mathbb{Z}\}$ .
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$A \subset B$	$A$ es subconjunto de $B$ .
$A \cup B$	$A$ unión $B$ .
$A \cap B$	$A$ intersección $B$ .
$A \setminus B$	$A$ menos $B$ .
$j$	$j^2 = -1$
$\circ \longrightarrow$	Mapecto de un dominio temporal al dominio frecuencial o $z$
$\bullet \longrightarrow$	Mapecto de un dominio frecuencial (o $z$ ) al dominio temporal
$(a, b)$	Par ordenado con primer componente $a$ y segundo componente $b$ .
$\langle a, b \rangle$	Producto interno entre $a$ y $b$
$z^*$	Complejo conjugado de $z$
$\angle z$ ó $\arg z$	Ángulo o argumento del número complejo $z$
$\text{Im}(z)$ ó $z_{\text{Im}}$	Parte imaginaria del número complejo $z$
$\text{Re}(z)$ ó $z_{\text{Re}}$	Parte real del número complejo $z$
$\mathcal{T}[\cdot]$	Transformación realizada por un sistema
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Transformada de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$	Transformada inversa de Fourier
$\mathcal{L}\{\cdot\}$	Transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$	Transformada inversa de Laplace
$\mathcal{Z}\{\cdot\}$	Transformada $z$
$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$	Transformada inversa $z$
$y$	Escalar.
$\mathbf{A}$	Matriz.
$\mathbf{A} =$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$

$\underline{\mathbf{x}}$  Vector.

$$\underline{\mathbf{x}} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

## Abreviaciones

BIBO	Entrada acotada – Salida acotada ( <i>bounded input – bounded output</i> )
DSP	<i>Digital Signal Processing</i> (o <i>Processor</i> ).
FIR	Respuesta finita al impulso ( <i>Finite Impulse Response</i> )
IIR	Respuesta infinita al impulso ( <i>Infinite Impulse Response</i> )
LTI	Sistema lineal e invariante en el tiempo ( <i>Linear and Time Invariant</i> )
PDS	Procesamiento Digital de Señales.
ROC	Región de convergencia ( <i>Region of Convergence</i> ).

# Capítulo 1

## Introducción

La principal tarea de un ingeniero es aplicar sus conocimientos científicos y tecnológicos en la solución de problemas de índole técnica, optimizando dichas soluciones bajo consideración de restricciones y requisitos impuestos por materiales, consideraciones tecnológicas, económicas, legales, ambientales y humanas [15]. Para encontrar la solución a un problema concreto es, entonces, estrictamente necesario comprender todos fenómenos involucrados, de modo tal que se cuente con suficiente información para poder diseñar la interacción y manipulación del entorno orientada a obtener los resultados deseados. El lenguaje utilizado para describir dichos fenómenos con la precisión necesaria es la matemática. El presente texto tiene como objetivo introducir las bases de matemática avanzada utilizados en ingeniería. Estos conceptos permiten simplificar el análisis de fenómenos físicos encontrados en las áreas de termodinámica, óptica, acústica, mecánica, sismología y electricidad, por mencionar algunas, y constituyen la base conceptual de tres grandes áreas de la ingeniería eléctrica y electrónica, a saber:

- comunicaciones eléctricas,
- procesamiento de señales, y
- control automático.

Todas estas ramas comparten el mismo lenguaje matemático, que permite caracterizar *señales*, *sistemas* y *modelos*. Estos términos se introducen a continuación.

### 1.1 Señales, sistemas y modelos

#### 1.1.1 Señales

Una *señal* es el resultado de la *observación* o *medición* de una cantidad física que varía con el tiempo, espacio o cualquier otra variable o variables independientes, y que lleva asociado un contenido semántico, es decir, un significado propio para la aplicación donde la señal se encuentre.

En general, toda señal contiene *información* que se desea extraer o modificar de acuerdo a

los requerimientos de las diversas aplicaciones. Un sismógrafo, por ejemplo, registra señales sísmicas que contienen información sobre intensidad y frecuencias de los sismos, con ayuda de las cuales pueden determinarse entre otras cosas la ubicación de epicentros y origen de los sismos. Las señales electrocardiográficas le permiten al médico determinar el estado del corazón de sus pacientes.

Las señales son representadas por funciones matemáticas de una o más variables. Una señal de voz, por ejemplo, puede representarse como una función de una variable temporal  $f(t)$ , mientras que imágenes se pueden considerar como funciones de dos variables espaciales  $f(x, y)$ .

Las señales pueden ser además escalares o vectoriales. Si la voz se captura con un micrófono monofónico, la señal eléctrica de salida tendrá por ejemplo un solo valor de tensión eléctrica en cada instante de tiempo. Por otro lado, un electroencefalograma provee un conjunto o *vector* de señales eléctricas provenientes de los diferentes electrodos para cada instante  $t$ :

$$\underline{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo de señales vectoriales utilizadas frecuentemente en ingeniería son las imágenes en color, en las que cada elemento de la imagen o *pixel* se representa como un vector en un espacio de color, donde las componentes del vector pueden, por ejemplo, representar los valores de los colores primarios rojo, verde y azul. A cada una de las componentes de las señales vectoriales se les denomina usualmente *canales* y por lo tanto a la señal se le denota como *multicanal*.

Las variables de las que depende la señal pueden ser discretas o continuas. La salida de un foto-transistor puede ser por ejemplo obtenida en todo instante de tiempo  $t$  (variable continua), mientras que el número de llamadas realizado por hora es una señal que una compañía telefónica puede generar para instantes discretos de tiempo  $nT$  distanciados por un intervalo de  $T = 1 \text{ h}$  (variable discreta). Los puntos donde la variable independiente de una señal discreta está definida no deben ser necesariamente equidistantes; sin embargo, usualmente esto es asumido por conveniencia computacional y manejabilidad matemática.

Los valores que puede tomar una señal pueden ser también discretos o continuos. Así, el voltaje del fototransistor puede tomar cualquier valor real en un intervalo, mientras que el número de llamadas es siempre un valor entero. También los valores de una función discreta pueden ser equidistantes o seguir otros patrones más complejos (como el logarítmico). El término *digital* se utiliza para señales de variables independientes discretas y de valores discretos, mientras que *analógica* es una señal con variables independientes continuas y valores continuos. Muchos aspectos del tratamiento de señales digitales pueden ser analizados matemáticamente de manera más simple a través de funciones continuas de variable discreta, llamadas usualmente *señales en tiempo discreto*, por representar la variable independiente generalmente instantes de tiempo definidos.

Un último criterio de carácter matemático para clasificar las señales es su naturaleza es-

tadística: las señales pueden ser *deterministas* si puede especificarse con precisión la forma de la función. Por ejemplo, para señales deterministas definidas en el tiempo, sus valores en el pasado, presente y futuro son siempre conocidos (por ejemplo, una señal senoidal). Las señales *aleatorias* solo permiten una descripción aproximada de la forma de su función, por tener asociado un comportamiento impredecible (por ejemplo, un generador de ruido, una señal sísmica, una señal acústica de voz).

**Tabla 1.1:** Características de las señales

Característica	Valores	
Número de variables	una variable	múltiples variables
Dimensionalidad	escalar	vectorial (multicanal)
Variables independientes	discretas	continuas
Valores de la señal	discretos	continuos
Naturaleza estadística	deterministas	aleatorias

La tabla 1.1 resume las características utilizadas para clasificar las señales. En el presente texto se estudiarán señales de una variable, de valor escalar, en tiempo discreto y continuo, con valores continuos, y con una naturaleza determinista.

### 1.1.2 Sistemas

El término *sistema* denota a una colección o conjunto de elementos interrelacionados que conforman un todo unificado [24]. Su raíz etimológica es el término latino *systema*, que a su vez proviene del griego *σύστημα* relacionado con los conceptos combinar e instalar.

Un sistema puede formar parte de otro sistema de mayor nivel, en cuyo caso al primero se le denomina *subsistema*. Los diferentes subsistemas intercambian por lo general información, materia o energía para lograr algún objetivo. Los términos *señales de entrada* o *de salida* se utilizan entonces para abstraer ese flujo de información, materia o energía en el concepto matemático de *funciones*.

El sistema entonces puede interpretarse como un conjunto de subsistemas que logran transformar una señal en otra. Estos dispositivos pueden ser entes físicos, como un circuito electrónico, o virtuales, como algoritmos implementados en software.

Como ejemplo puede citarse un motor CD. La tensión eléctrica de entrada puede considerarse a su vez como la señal de entrada, la velocidad angular del eje podría representar la señal de salida. Desde esta perspectiva el motor es un sistema completo que transforma una señal de tensión en una señal de velocidad angular. Por supuesto otras interpretaciones son posibles, como por ejemplo el motor es un sistema que transforma energía eléctrica en energía mecánica. En este último caso las señales de entrada y salida serían entonces mediciones de potencia o energía. Por otro lado, este motor puede formar parte de sistemas más complejos, como una unidad de disco compacto, que a su vez forma parte de un computador personal, y este puede ser un elemento de una red de computadoras, y así sucesivamente.

### 1.1.3 Modelos

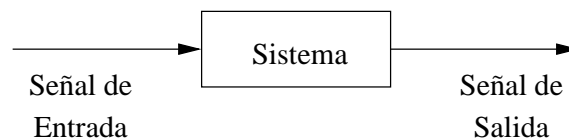
En el presente contexto, *modelo* es una abstracción matemática de un sistema, que permite sustituirlo cuando se estudia la relación entre las señales de entrada y salida. Ejemplos sencillos de modelos son las ecuaciones utilizadas para representar los componentes pasivos básicos en circuitos eléctricos. Así, un resistor se modela con una ecuación lineal que relaciona tensión y corriente con una constante de proporcionalidad, mientras que para condensadores y bobinas se utilizan ecuaciones diferenciales para este fin. Los modelos normalmente simplifican la realidad y tienen validez solo para un rango restringido de puntos de operación. Por ejemplo, el modelo de una resistencia real como relación de proporcionalidad pierde validez si se utilizan frecuencias muy elevadas, pues efectos inductivos y capacitivos dejan de ser despreciables.

Los modelos matemáticos introducidos en este texto son modelos *lineales*. A pesar de que estos no pueden caracterizar todo sistema real, son ampliamente utilizados en ingeniería por su versatilidad. Aún en los sistemas no lineales, los modelos lineales se pueden utilizar para describir por separado “secciones” del modelo completo.

En resumen, el presente texto revisa la matemática necesaria para describir sistemas y sus señales de entrada y salida, materia que será de necesaria para profundizar en las áreas de control automático, comunicaciones eléctricas y procesamiento de señales tanto analógicas como digitales.

### 1.1.4 Diagramas de Bloques

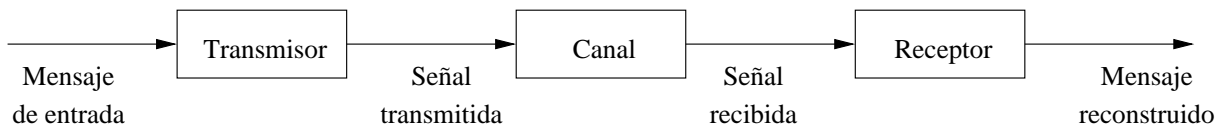
En ingeniería se utilizan diagramas de bloques para representar las relaciones entre sistemas, subsistemas, señales y sus modelos (figura 1.1). Las señales se representan con las líneas, donde la flecha indica si la señal sale o entra a un bloque de procesamiento particular.



**Figura 1.1:** Diagrama de bloques de un sistema con sus señales de entrada y salida.

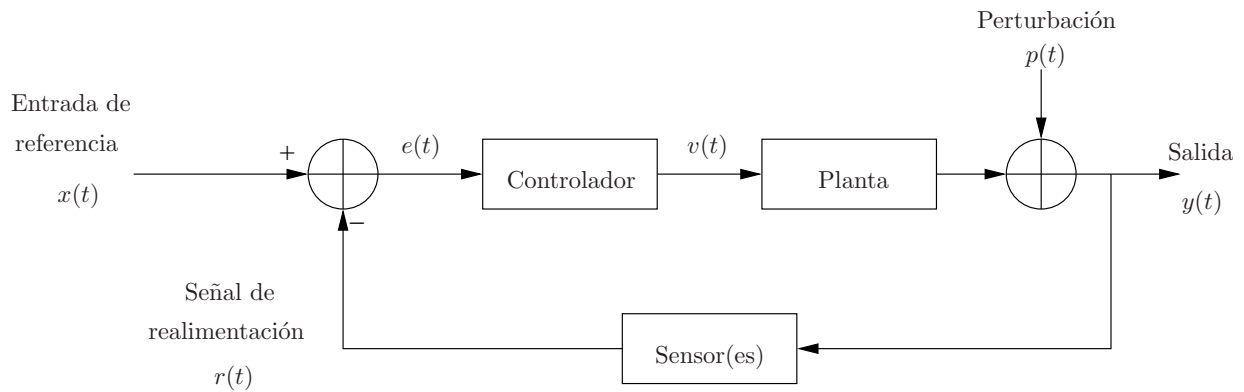
Estos bloques pueden interconectarse de diferentes formas para formar sistemas más complejos. Por ejemplo, la figura 1.2 muestra un típico sistema de comunicaciones con sus tres elementos, transmisor, canal y receptor, donde cada uno de ellos puede verse como un subsistema con sus propios bloques internos. El transmisor prepara la señal para poder ser enviada a través del canal, quien la distorsiona debido a sus características físicas y a interferencias y ruidos introducidos en el medio. El receptor intenta reconstruir el mensaje original a partir de la señal recibida.

La figura 1.3 muestra otro ejemplo: el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado. Una señal de referencia  $x(t)$  es utilizada para indicar el valor deseado a la salida



**Figura 1.2:** Diagrama de bloques de un sistema típico de comunicaciones eléctricas.

de una planta. Esta señal es comparada con la salida real de la planta, modelada bajo consideración de posibles perturbaciones al sistema. De esta comparación resulta una señal de error. El controlador es un subsistema que se encarga de modificar la señal de entrada a la planta de tal modo que la señal de error pueda reducirse.



**Figura 1.3:** Diagrama de bloques de un sistema típico de control realimentado.

## 1.2 Estructura del documento

Los modelos matemáticos utilizados en diversas ramas de la ingeniería basan su utilidad en propiedades específicas de las funciones de variable compleja. Estas permiten simplificar el análisis numérico y analítico que se requeriría en caso de utilizar dominios de variable real. Es por ello que la primera parte del presente texto (capítulo 2) cubre el estudio de la variable compleja, necesario para comprender los operadores funcionales estudiados en el resto del documento y que son base de diversas áreas de la ingeniería.

El análisis de Fourier (capítulo 3) representa quizá la herramienta de más frecuente uso en el análisis de sistemas de comunicaciones eléctricas. Éste es además la base del procesamiento y análisis automático de señales y se emplea en el estudio de sistemas electrónicos de potencia.

Generalizando los conceptos matemáticos del análisis de Fourier se deriva la Transformada de Laplace (capítulo 4), con la que pueden solucionarse de manera relativamente sencilla ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de gran cantidad de fenómenos físicos. La Transformada de Laplace es la herramienta por excelencia en la descripción de sistemas lineales en el área de control automático.

Finalmente, la Transformada  $z$  (capítulo 5) se utiliza en el caso especial de que el sistema o señal deban ser controlados u observados por medios digitales, y es la base para el procesa-

miento digital de señales y el control de sistemas en el llamado tiempo discreto.

Al final de cada capítulo el lector encontrará una recopilación de ejercicios para fortalecer los conceptos presentados. Las soluciones a dichos ejercicios se encuentran disponibles para verificación autodidacta de los resultados.



## 1.3 Problemas

**Problema 1.1.** Busque un ejemplo de señal para cada una de las 32 posibles combinaciones de las características de las señales indicadas en la Tabla 1.1.

**Problema 1.2.** Una señal puede clasificarse según cinco criterios:

Número de variables	(Una variable	o	Múltiples variables)
Dimensión del valor	(Escalar	o	Vectorial
Variables independientes	(Discretas	o	Continuas
Valores de la señal	(Discretas	o	Continuas
Naturaleza estadística	(Determinista	o	Aleatoria

Utilice las letras mayúsculas indicadas en negrita para identificar las características de las señales a continuación. Si alguna característica no se aplica o puede interpretarse con cualquier valor de la propiedad, indíquelo con \*.

Señal	Característica				
	Núm. Variables (U/M/*)	Dimensión (E/V/*)	Variables (D/C/*)	Valores (D/C/*)	Estadística (D/A/*)
Imagen tomada por una cámara digital a color					
Registro mensual de la posición de una bandada de aves migratorias					
Señales de salida de un micrófono estéreo					
Señal digital					
Señal analógica					

**Problema 1.3.** Identifique algún sistema y su papel como subsistema en construcciones más complejas, donde al menos exista una jerarquía de 4 niveles (es decir  $A$  es subsistema de  $B$  que es subsistema de  $C$  que es subsistema de  $D$ ). Identifique además cuáles serían posibles señales de entrada y salida en cada caso.

**Problema 1.4.** Indique cuántas variables independientes tiene una señal de RealD, el

sistema de cine utilizado en la proyección de películas en 3D.

**Problema 1.5.** Indique qué dimensiones tiene una señal de audio Dolby Surround 7.1.

# Capítulo 2

## Variable compleja

### 2.1 Definiciones de álgebra abstracta

Los métodos y procedimientos aplicados en las ramas de la ingeniería moderna se basan en conceptos matemáticos abstractos. Los siguientes párrafos brindan un breve recorrido por los conjuntos y las estructuras algebraicas que constituyen una base conceptual para la comprensión de dichos métodos. Los términos presentados a continuación se refieren a conceptos tratados ya en otros cursos introductorios de matemática, que sin embargo se incursionan ahora desde un nuevo nivel de abstracción.

#### 2.1.1 Conjuntos

Un *conjunto*  $C$  es una colección de *elementos*  $c_i$  denotada generalmente como

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

La pertenencia del elemento  $c_i$  al conjunto  $C$  se indica con la notación  $c_i \in C$ , lo que se lee como “ $c_i$  en  $C$ ”.

Dos conjuntos se consideran iguales solo si contienen exactamente los mismos elementos, es decir

$$A = B \Leftrightarrow \forall a_i \in A \Rightarrow a_i \in B \wedge \forall b_i \in B \Rightarrow b_i \in A \quad .$$

Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos y todo elemento  $a_i$  en  $A$  está contenido también en  $B$  entonces se dice que  $A$  es un subconjunto de  $B$  (denotado con  $A \subset B$ ). En otras palabras

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a_i \in A \Rightarrow a_i \in B \quad .$$

El conjunto vacío  $\emptyset = \{\}$  es siempre un subconjunto de cualquier otro conjunto, y un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo.

La operación de *unión* entre dos o más conjuntos de una colección  $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$  es el conjunto de todos los elementos contenidos en al menos uno de los conjuntos  $C_1, C_2, C_3, \dots$

y se denota con  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots = \bigcup_i C_i$ , es decir,

$$\bigcup_i C_i = \{c \mid c \in C_1 \vee c \in C_2 \vee c \in C_3 \vee \dots\}$$

La *intersección* entre dos o más conjuntos de un colección  $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$  es el conjunto de elementos contenidos en todos los conjuntos, y se denota con  $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots = \bigcap_i C_i$ . Matemáticamente

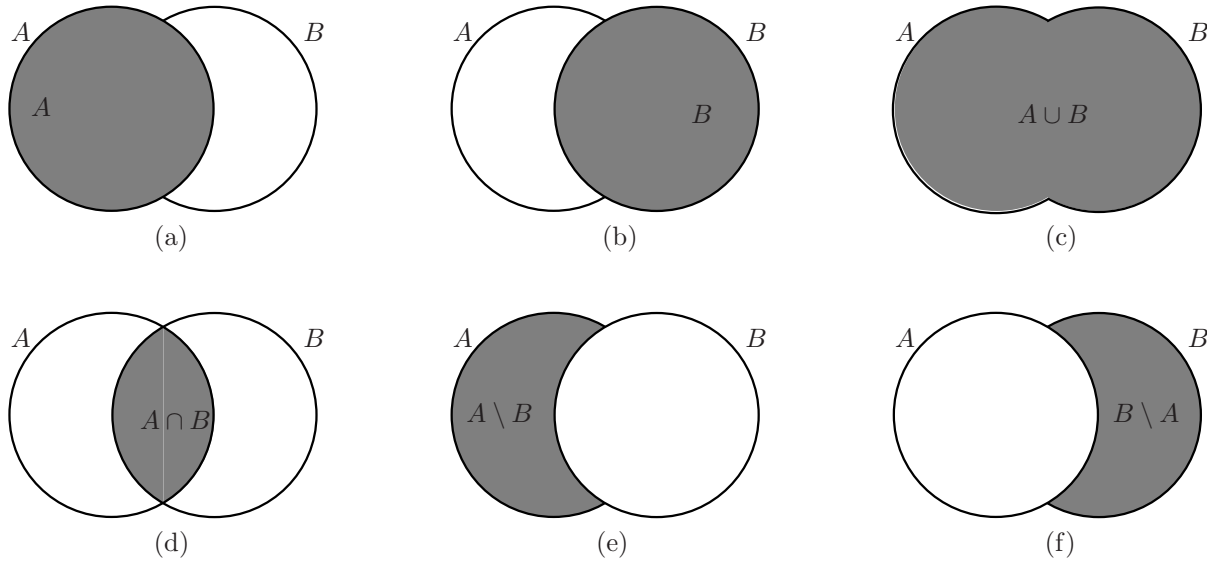
$$\bigcap_i C_i = \{c \mid c \in C_1 \wedge c \in C_2 \wedge c \in C_3 \wedge \dots\}$$

La *diferencia* entre dos conjuntos se denota como  $A \setminus B$  y es el conjunto de todos los elementos de  $A$  que no están en  $B$ , es decir

$$A \setminus B = \{c \mid c \in A \wedge c \notin B\}$$

Lo anterior implica que  $(A \setminus B) \cap A = (A \setminus B)$  y  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ .

La figura 2.1 muestra la representación en diagramas de Venn de las operaciones anteriores.



**Figura 2.1:** Representación en diagramas de Venn de operaciones entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ . Las regiones sombreadas representan (a) el conjunto  $A$ , (b) el conjunto  $B$ , (c) la unión de  $A$  y  $B$ , (d) la intersección de  $A$  y  $B$ , (e)  $A$  menos  $B$ , (f)  $B$  menos  $A$ .

El *producto cartesiano* de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \times B$ , es un conjunto que contiene todos los pares ordenados  $(a, b)$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Este concepto se extiende a más de dos conjuntos, reemplazando los pares ordenados por tuplas. Por ejemplo, el conjunto  $A \times B \times C$  contiene todas las tuplas  $(a, b, c)$  con  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $c \in C$ .

## 2.1.2 Estructuras algebraicas

Una *estructura algebraica* es un par ordenado compuesto por un conjunto de operandos (como por ejemplo el conjunto de los números naturales, un conjunto binario de dos elementos  $\{0, 1\}$ , el conjunto de los números racionales, etc.) y por un conjunto de una o varias *operaciones* que deben satisfacer *axiomas* dados. La estructura algebraica se denota con  $(C, O)$  donde  $C$  denota al conjunto de operandos y  $O$  al conjunto de operaciones. Si no hay ambigüedades usualmente se usa  $C$  para denotar tanto al conjunto de operandos como a la estructura algebraica.

Las operaciones involucradas son usualmente *unarias* o *binarias*, implicando el número de elementos que toma la operación para producir un nuevo elemento. Las operaciones unarias toman un solo elemento (por ejemplo, el valor absoluto de un número) y se representan como una relación entre elementos de dos conjuntos  $C \rightarrow D$ . Las operaciones binarias toman dos elementos para producir uno nuevo, lo que se denota con  $C \times C \rightarrow D$  (por ejemplo, la operación *suma* toma usualmente dos números para producir otro elemento). Se dice que la operación es *cerrada* si su aplicación a elementos de  $C$  produce elementos también en  $C$  (por ejemplo,  $C \rightarrow C$  o  $C \times C \rightarrow C$ ).

Si una operación binaria<sup>1</sup>  $\diamond$  mapea  $n \diamond x$  ó  $x \diamond n$  hacia el mismo elemento  $x$ , entonces a  $n$  se le denomina *elemento neutro*, o elemento *identidad* de dicha operación. Un elemento  $x$  se denomina *inverso* de un elemento  $y$  con respecto a la operación  $\diamond$  si se cumple  $x \diamond y = n$  donde  $n$  es el elemento neutro de  $\diamond$ . Obsérvese que la neutralidad de un elemento se define para la operación con todos los elementos de la estructura algebraica, es decir, toda la estructura algebraica tiene un único elemento neutro. Por otro lado, cada elemento de la estructura puede tener su propio elemento inverso con respecto a la operación en cuestión, y por lo tanto no es la estructura la que posee elemento inverso, sino cada elemento de esa estructura.

La operación binaria  $\diamond$  es asociativa si se cumple  $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ , y es conmutativa si  $a \diamond b = b \diamond a$ .

Sean  $\diamond$  y  $\star$  dos operaciones binarias. Se dice que  $\diamond$  es distributiva con respecto a  $\star$  si se cumple  $a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$  y  $(b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$ .

**Ejemplo 2.1** Sea  $C$  un conjunto definido por  $C = \{\square, \boxminus, \boxplus, \boxtimes\}$ , y la operación  $\odot$  definida por la siguiente matriz:

$\odot$	$\square$	$\boxminus$	$\boxplus$	$\boxtimes$
$\square$	$\square$	$\boxtimes$	$\boxplus$	$\boxminus$
$\boxminus$	$\boxminus$	$\square$	$\boxtimes$	$\boxplus$
$\boxplus$	$\boxplus$	$\boxminus$	$\square$	$\boxtimes$
$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxplus$	$\boxminus$	$\square$

Indique las características de la operación  $\odot$ .

<sup>1</sup>Nótese que la operación  $\diamond$  denota cualquier operación binaria, como suma, resta, multiplicación, división, funciones lógicas, etc.

**Solución:** Nótese que la operación toma dos elementos del conjunto  $C$  y genera otro elemento del mismo conjunto, por lo que  $\odot$  es una operación binaria y cerrada. La operación no es conmutativa, puesto que por ejemplo  $\boxtimes \odot \boxdot = \boxtimes$ , pero  $\boxdot \odot \boxtimes = \boxdot$ . Puesto que  $x \odot \boxdot = x$  para cualquier  $x \in C$  se puede afirmar que  $\boxdot$  es el elemento neutro de  $\odot$ . En este caso particular, puesto que la operación no es conmutativa,  $\boxdot$  es neutro *en la segunda posición*, mas no en la primera.

Finalmente, todos los elementos de  $C$  son inversos de sí mismos, puesto que  $x \odot x = \boxdot$  2.1

Algunas estructuras algebraicas se listan a continuación:

### Estructuras simples

- **Conjunto** es un caso especial de una estructura algebraica con una colección vacía de operaciones.
- **Sistema unario** es una estructura conformada por un conjunto  $C$  y una operación unaria.

### Estructuras similares a grupos

- **Magmas o grupoides** son estructuras con una sola operación binaria.
- **Semigrupo** es un magma en el que la operación binaria es asociativa.
- **Monoide** es un semigrupo con un elemento identidad.
- **Monoide conmutativo** es un monoide con operación conmutativa.
- **Grupo** es un monoide en el que cada elemento tiene un inverso. Es decir, el grupo tiene una operación binaria asociativa con elemento identidad y con elemento inverso.
- **Grupo abeliano** es un grupo donde la operación es además conmutativa.

La tabla 2.1 sintetiza la información anterior.

**Tabla 2.1:** Estructuras similares a grupos.

<i>Estructura</i>	<i>Operación</i>
magma	conjunto más operación binaria
semigrupo	magma con operación además asociativa
monoide	semigrupo con elemento identidad
monoide conmutativo	monoide con operación conmutativa
grupo	monoide con elemento inverso
grupo abeliano	grupo con operación conmutativa

### Estructuras similares a anillos

- **Semianillo** es una estructura algebraica con dos operaciones de monoide.

- **Anillo** es un semianillo con una operación de monoide (como el producto) y otra operación de grupo abeliano (como la suma), ambas satisfaciendo la distributividad.
- **Anillo conmutativo** es un anillo donde la operación de monoide (el producto) es además conmutativa.
- **Anillo de división** Es un anillo en el que los elementos neutros de ambas operaciones son diferentes, y donde todo elemento diferente del elemento neutro de la operación de grupo abeliano (como por ejemplo el 0 si la operación es la suma) tiene un inverso con respecto a la operación de monoide.
- **Cuerpo** es un anillo de división donde ambas operaciones son conmutativas.

La tabla 2.2 sintetiza las propiedades de las operaciones en estas estructuras, donde los símbolos “+” y “ $\times$ ” deben entenderse en un contexto general, indicando dos operaciones no necesariamente relacionadas con la suma y el producto conocidas en aritmética.

**Tabla 2.2:** Estructuras similares a anillos

<i>Estructura</i>	<i>Operación “+”</i>	<i>Operación “<math>\times</math>”</i>
semianillo	operación de monoide	operación de monoide
anillo	operación de grupo abeliano	“
anillo conmutativo	“ operación de monoide conmutativo	
anillo de división	“	operación de grupo
cuerpo	“	operación de grupo abeliano

### 2.1.3 Números naturales

La cardinalidad de un conjunto  $C$  es el *número* de elementos que contiene ese conjunto y se denota con  $|C|$ . El conjunto de todas las posibles cardinalidades de conjuntos es el llamado conjunto de los números naturales, es decir, los números naturales se pueden utilizar para contar los elementos de un conjunto. Este conjunto se denota con  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , donde el cero se incluirá aquí de acuerdo a la tendencia seguida en teoría de conjuntos, lógica e informática, puesto que en otras áreas (como en teoría de números), el cero es excluido de los números naturales. Para hacer explícita la inclusión del cero se encontrará en ocasiones el símbolo  $\mathbb{N}_0$  y para denotar la exclusión del cero se usa  $\mathbb{N}^*$  o  $\mathbb{N}^+$ .

Los números naturales se utilizan tanto para contar (el número de elementos de un conjunto), como para ordenar (un elemento de un conjunto se encuentra “antes” que otro, es “mayor” que otro, etc.).

Estos números se pueden definir a través de los *axiomas de Peano*:

- Existe un número natural 0.
- Todo número natural  $a$  tiene un número natural sucesor, denotado con  $S(a)$ .
- No existe ningún número natural cuyo sucesor es 0.
- Dos números naturales distintos tienen sucesores distintos, es decir, si  $a \neq b$  entonces  $S(a) \neq S(b)$ .

- Si 0 tiene una propiedad y el sucesor de cualquier número natural tiene también esa propiedad, entonces la propiedad es de todos los números naturales.

La *suma* de dos números naturales se puede definir recursivamente definiendo como elemento neutro a 0 ( $a + 0 = a$ ) y  $a + S(b) = S(a + b)$  para todo  $a, b$ . Con esta definición  $(\mathbb{N}, +)$  es un monoide conmutativo. Si se define  $S(0) = 1$  entonces  $S(b) = S(b + 0) = b + S(0) = b + 1$ , es decir, el sucesor de  $b$  es simplemente  $b + 1$ .

La *multiplicación*  $\times$  se puede definir a partir de la suma con  $a \times 0 = 0$  y  $a \times S(b) = (a \times b) + a$ . Esto hace de  $(\mathbb{N}, \times)$  un monoide conmutativo con elemento neutro 1.

Los números naturales junto con la suma y multiplicación definidas anteriormente conforman un semianillo conmutativo  $(\mathbb{N}, \{+, \times\})$ . Ambas operaciones son *cerradas*, lo que quiere decir que la suma o multiplicación de dos números naturales es siempre otro número natural.

### 2.1.4 Los números enteros

El conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$  contiene a los números naturales  $\mathbb{N}$  más el conjunto de los números enteros negativos, que constituyen inversos aditivos de los números naturales positivos. Por ello, este conjunto junto con la operación suma es un grupo abeliano, mientras que  $\mathbb{Z}$  junto con la multiplicación es un monoide conmutativo. La tabla 2.3 resume las propiedades en ambos casos. Nótese que, a diferencia de los números naturales quienes no

**Tabla 2.3:** Propiedades de la suma y la multiplicación con  $\mathbb{Z}$ .

	Suma	Multiplicación
	$(\mathbb{Z}, \{+\})$ : grupo abeliano	$(\mathbb{Z}, \{\times\})$ : monoide conmutativo
Es cerrada	$a + b$ es entero	$a \times b$ es entero
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Elemento inverso	$a + (-a) = 0$	no hay
Distributividad	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	

tienen inverso ni en la suma ni en la multiplicación, los números enteros si tienen elementos inversos para la suma y por tanto  $(\mathbb{Z}, \{+, \times\})$  es un anillo conmutativo. Se puede definir ahora la operación *resta*, que es cerrada pero no conmutativa, como la suma del primer elemento con el inverso aditivo del segundo ( $a - b = a + (-b)$ ).

### 2.1.5 Los números racionales

Los elementos de este conjunto se pueden definir a través de pares ordenados de números enteros  $(a, b)$  con  $b$  diferente al elemento neutral de la suma (es decir, diferente de cero). El par ordenado representando un número racional se denota usualmente como  $a/b$  ó  $\frac{a}{b}$ .



Dos números racionales  $(a, b)$  y  $(c, d)$  se dicen equivalentes si se cumple  $a \times d = b \times c$ . Esta equivalencia se denota con  $(a, b) \sim (c, d)$ , aunque por lo general se utiliza directamente la relación de igualdad (por ejemplo, se escribe  $(2; 4) = (1; 2)$ , ó  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ). Se define orden en el conjunto  $\mathbb{Q}$  a través del operador  $\leq$ , donde se cumple  $(a, b) \leq (c, d)$  si y solo si  $a \times d \leq b \times c$ , con  $b, d \geq 0$ .

La suma y multiplicación de los números racionales se definen a partir del producto y multiplicación de los números enteros como

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a \times d + b \times c, b \times d) \\ (a, b) \times (c, d) &= (a \times c, b \times d) \quad .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Puesto que, a diferencia del conjunto de los números enteros, existe para cada elemento en  $\mathbb{Q}$  un inverso multiplicativo, se concluye que el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo.

### 2.1.6 Los números reales

¿Existe algún número racional  $(a, b)$  que cumpla con la ecuación  $(a, b) \times (a, b) = 2$ ? El lector conocerá alguna de las demostraciones por contradicción que indican que no existe tal número. De la generalización de esta observación se concluye que los números racionales no pueden representar todos los puntos de una recta ideal infinita. Aquellos puntos de dicha recta no cubiertos por los números racionales conforman el conjunto de los números irracionales  $\mathbb{I}$ . Éstos últimos tienen como característica fundamental una representación decimal de longitud infinita que no sigue ningún patrón (por ejemplo,  $\sqrt{2} = 1,41423 \dots$  o  $\pi = 3,1415927 \dots$ ). Dentro de estos puntos se encuentran los valores  $a$ , tales que  $a \times a = p$ , con  $p$  un número entero primo, lo que implica que la potenciación no es una operación cerrada en  $\mathbb{Q}$ .

El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  se define entonces como  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ , o en otras palabras, el conjunto que tiene una correspondencia uno a uno con todos los puntos de una recta infinita.

El conjunto de los números reales es un *cuerpo*, donde a las operaciones binarias suma y multiplicación corresponden las operaciones inversas de substracción y división, respectivamente. El conjunto  $\mathbb{R}$  es también ordenado, es decir, para el operador ordinal  $\geq$  se cumple:

$$\begin{aligned}x \geq y &\Rightarrow x + z \geq y + z \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 &\Rightarrow x \times y \geq 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Los números reales son *completos*, propiedad que se define a través de la existencia de *secuencias de Cauchy*. Una secuencia  $(x_n)$  de números reales se denomina secuencia de Cauchy si para cualquier  $\epsilon > 0$  infinitesimalmente pequeño existe un entero  $N$  tal que la distancia  $|x_n - x_m|$  es menor que  $\epsilon$  cuando  $n$  y  $m$  son ambos mayores que  $N$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, n > N, m > N : |x_n - x_m| < \epsilon\tag{2.3}$$

En otras palabras la secuencia es de Cauchy si sus elementos se acercan arbitrariamente conforme  $n$  crece.

Se dice que la secuencia  $(x_n)$  converge a  $x$  si  $|x_n - x| < \epsilon$  para  $n > N$ . En el caso de los números reales y racionales, cualquier secuencia convergente es una secuencia de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > N : |x_n - x| < \epsilon \quad (2.4)$$

Para los números reales se cumple además que cualquier secuencia de Cauchy es convergente, lo que no se cumple para los números racionales. Por ejemplo, la secuencia

$$\left(1; 1,5; \dots; x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right); \dots\right)$$

converge a  $\sqrt{2}$  que no se encuentra en  $\mathbb{Q}$ . Lo mismo ocurre con la secuencia

$$(1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots)$$

### 2.1.7 Los números complejos

El conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  es una extensión de los números reales que es cerrada ante las operaciones de potenciación (por ejemplo,  $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ), o expresado de otra forma, este conjunto contiene todas las raíces de polinomios, lo que no es posible en  $\mathbb{R}$ .

Formalmente los números complejos se definen como pares ordenados de números reales  $(a, b)$  que junto con las operaciones

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \times (c, d) &= (a \times c - b \times d, b \times c + a \times d) \end{aligned} \quad (2.5)$$

conforma un cuerpo algebraico, por lo que se deben cumplir los siguientes axiomas para los números complejos  $s, w, z$

1.  $z + w \in \mathbb{C}, z \times w \in \mathbb{C}$  (ley de clausura)
2.  $z + w = w + z$  (ley conmutativa de la adición)
3.  $z + (w + s) = (z + w) + s$  (ley asociativa de la adición)
4.  $z \times w = w \times z$  (ley conmutativa de la multiplicación)
5.  $z \times (w \times s) = (z \times w) \times s$  (ley asociativa de la multiplicación)
6.  $z \times (w + s) = z \times w + z \times s$  (ley distributiva)
7.  $z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$  (elemento neutro de la suma es  $(0, 0)$ )
8.  $(1, 0) \times z = z \times (1, 0) = z$  (elemento neutro de la multiplicación es  $(1, 0)$ )
9. Para todo  $z \in \mathbb{C}$  existe un solo elemento  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z + w = (0, 0)$  (Existencia de elemento inverso único con respecto a la suma)
10. Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus (0, 0)$  existe un solo elemento  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z \times w = w \times z = (1, 0)$  (Existencia de elemento inverso único con respecto a la multiplicación)

Sea el número complejo  $z = (a, b)$ . Al número real  $a$  se le denomina *componente real* y al número real  $b$  *componente imaginaria* de  $z$ . Por convención, se dice que el número complejo

$(a, 0)$  corresponde con el número real “puro”  $a$ . Puesto que  $(a, 0) \times (c, d) = (a \times c, a \times d)$  la notación se puede simplificar como  $a \times (c, d)$ . De esta forma se cumple que  $z = (a, b) = a \times (1, 0) + b \times (0, 1)$ . Puesto que el número  $(1, 0)$  es el elemento neutro de la multiplicación y denotando a  $(0, 1)$  como  $j$  se obtiene la notación convencional de números complejos  $z = a + jb$ , donde se ha simplificado además la notación del producto  $j \times b$  por  $jb$ .

Se dice que dos números complejos son iguales si y solo si tanto sus componentes reales como imaginarias son iguales, es decir

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \quad (2.6)$$

A diferencia de los conjuntos anteriores, los números complejos *no* son ordenados, es decir, no es posible indicar si un número complejo es mayor o menor que otro.

La tabla 2.4 sintetiza las relaciones de las estructuras algebraicas revisadas desde los números naturales hasta los números complejos.

**Tabla 2.4:** Estructuras algebraicas numéricas.

	$\mathbb{N}$ semianillo conmutativo	$\subset$ $\mathbb{Z}$ anillo	$\subset$ $\mathbb{Q}$ cuerpo	$\subset$ $\mathbb{R}$ cuerpo	$\subset$ $\mathbb{C}$ cuerpo
Operaciones cerradas	$+, \times$	$+, -, \times$	$+, -, \times, /$	$+, -, \times, /$ sec. Cauchy	$+, -, \times, /, a^b$ sec. Cauchy
Ordinalidad	sí	sí	sí	sí	no

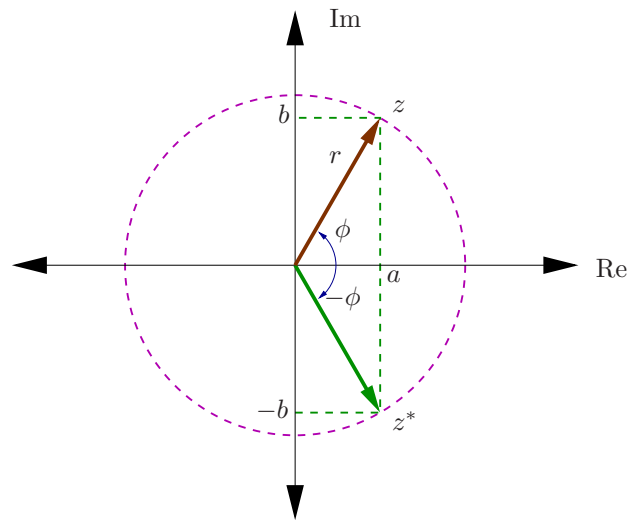
## Plano complejo

El número complejo  $z = (a, b) = a + jb$  se puede representar geoméricamente como un punto en un sistema coordenado cartesiano, llamado el *plano complejo* o también *diagrama de Argand* o de *Wessel*, donde el eje horizontal representa la componente real y el eje vertical la componente imaginaria (figura 2.2).

En este diagrama el número complejo puede también representarse por medio de una notación polar con *magnitud* o *módulo*  $r = |z| = \text{mag}(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$  que es siempre positivo y *argumento* o *ángulo*  $\phi = \angle z = \arg(z) = \arctan(b/a)$  que se indica usualmente entre  $-\pi$  y  $\pi$  o entre 0 y  $2\pi$ . Se debe cumplir entonces  $z = a + jb = r \times (\cos \phi + j \sin \phi)$ , es decir, la componente real es  $a = r \times \cos \phi$  y la componente imaginaria  $b = r \times \sin \phi$ .

**Ejemplo 2.2** Grafique en un diagrama de Argand los conjuntos de números complejos que cumplen las siguientes desigualdades:

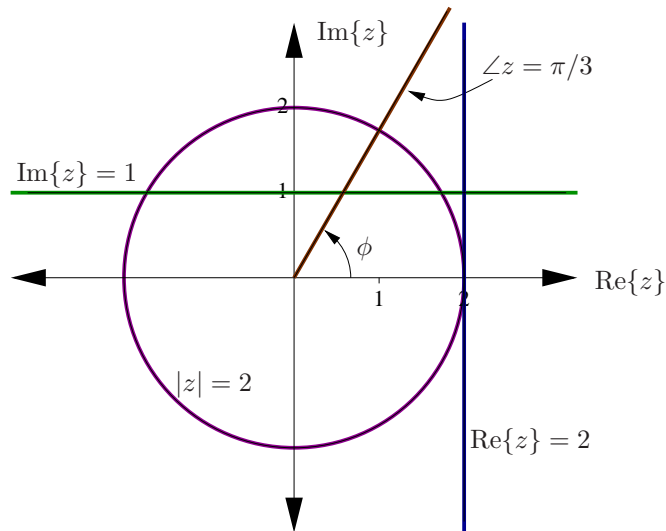
- $|z| = 2$
- $\angle z = \pi/3$
- $\text{Re}\{z\} = 2$



**Figura 2.2:** Diagrama de Argand representando a  $z = a + jb$  y  $z^* = a - jb$ .

- $\text{Im}\{z\} = 1$

**Solución:** El conjunto de todos los números complejos  $z$  que tienen magnitud dos está conformado por un círculo de radio dos, centrado en el origen. Todos los números complejos que tienen un ángulo igual a  $\pi/3$  conforman un rayo que parte del origen con dicho ángulo con respecto al eje real. Todos los números complejos sobre una línea vertical que pasa por  $z = 2$  cumplen  $\text{Re}\{z\} = 2$ . Por último, todos los puntos sobre una línea horizontal que pasa por  $z = j$  cumplen  $\text{Im}\{z\} = 1$ .



**Figura 2.3:** Representaciones de conjuntos de números complejos en el plano complejo.

## Identidad de Euler

La identidad o fórmula de Euler afirma para un ángulo de valor real  $\phi$  que

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (2.7)$$

con lo que un número complejo  $z = a + jb = r \times (\cos \phi + j \sin \phi)$  se puede representar como  $z = r \times e^{j\phi}$ , o simplificando la notación del producto  $z = re^{j\phi}$ . Esto se puede demostrar de varias maneras, de las cuales aquí se presentarán dos: una por medio de series de Taylor y otra por medio de cálculo.

Se puede demostrar fácilmente que  $j^0 = 1, j^1 = j, j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1 \dots, j^{n+4} = j^n, \dots$ . Con la variable real  $x$  se puede obtener que las

series de Taylor de las funciones  $e^x$ ,  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  están dadas por

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Asumiendo por ahora que las series de Taylor mantienen su validez cuando  $x$  se sustituye por el número complejo<sup>2</sup>  $j\phi$  (con  $\phi$  real) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{j\phi} &= 1 + j\phi + \frac{(j\phi)^2}{2!} + \frac{(j\phi)^3}{3!} + \frac{(j\phi)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{j\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots\right) + j \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos(\phi) + j \sin(\phi) \end{aligned}$$

Para demostrar el teorema utilizando cálculo defínase el número complejo  $x = \cos(\phi) + j \sin(\phi)$ .

Derivando con respecto a la variable real  $\phi$  se obtiene

$$\frac{dx}{d\phi} = -\sin(\phi) + j \cos(\phi) = j^2 \sin(\phi) + j \cos(\phi) = j(\cos(\phi) + j \sin(\phi)) = jx$$

---

<sup>2</sup> Matemáticamente la validez de esto se justifica por el principio de *continuación analítica*, que establece que si una función real es infinitamente diferenciable en un intervalo  $]a, b[$  y tiene una expansión en serie de Taylor, entonces la función de variable compleja obtenida sustituyendo la variable real  $x$  por la variable compleja  $z$  tendrá la misma serie de Taylor con la variable también reemplazada y convergerá para todo el plano complejo  $z$  si la serie real correspondiente converge para todo  $x$  real. (esto se retomará en la sección 2.4).

Separando las variables e integrando a ambos lados se obtiene (asumiendo de nuevo que las propiedades de integración se mantienen para la variable compleja).

$$\int \frac{1}{x} dx = \int j d\phi$$

$$\ln x = j\phi + C$$

Si se hace  $\phi = 0$  y considerando que  $x = \cos(0) + j \sin(0) = 1$  se obtiene que  $C = 0$ , por lo que

$$\begin{aligned}\ln x &= j\phi \\ e^{\ln x} &= e^{j\phi} \\ x &= e^{j\phi} \\ e^{j\phi} &= \cos(\phi) + j \sin(\phi)\end{aligned}$$

De la identidad de Euler se puede derivar fácilmente que:

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \\ \sin \phi &= \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}\end{aligned}$$

## Operaciones con números complejos

Las siguientes son notaciones equivalentes para los números complejos

$$z = (a, b) = a + jb = r\angle\theta = re^{j\theta} = r \exp(j\theta) \quad (2.8)$$

donde la componente real  $a$ , la componente imaginaria  $b$ , la magnitud  $r$  y el argumento  $\theta$  son todos números reales relacionados por las ecuaciones  $a = r \times \cos \theta$ ,  $b = r \times \sin \theta$ . Nótese que para estas últimas identidades se obtiene que los argumentos  $\theta$  y  $2k\pi\theta$  con  $k \in \mathbb{Z}$  son equivalentes por ser el seno y el coseno funciones periódicas de periodo  $2\pi$ . Es decir

$$z = re^{j\theta} = re^{j(\theta+2k\pi)} \quad (2.9)$$

**Conjugación compleja** Una operación básica de los números complejos no presente en los números reales es la *conjugación compleja*. Sea  $z = x + jy = re^{j\theta} \in \mathbb{C}$ . La conjugación compleja es una operación unaria que sustituye la componente imaginaria del número por su inverso aditivo y se denota con un superíndice  $*$  ( $z^*$ ) o con una línea horizontal sobre la variable ( $\bar{z}$ ). Puesto que el inverso aditivo de cero es a su vez cero, entonces el complejo conjugado de un número real  $x = x + j0$  es igual a  $x - j0 = x$  que equivale al mismo número real.

La conjugación compleja es además equivalente a intercambiar el argumento del número por su inverso aditivo (ver figura 2.2). De esta forma  $z^* = x - jy = re^{-j\theta}$ .

Los números complejos conjugados juegan un papel importante en modelos de fenómenos y sistemas reales, pues si el modelo de estos sistemas puede plantearse en términos de polinomios de orden  $n$  de la forma

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (2.10)$$

entonces existirán exactamente  $n$  raíces  $z_i$  (también llamadas ceros del polinomio, pues  $P_n(z_i) = 0$ ) las cuales pueden ser iguales o distintas. Cuando los coeficientes  $a_i$  son reales, las raíces  $z_i$  podrán ser números reales o complejos, presentándose siempre las raíces no reales en pares complejos conjugados.

**Valor absoluto o magnitud** El *valor absoluto*, *módulo* o *magnitud* de un número complejo  $z = x + jy = re^{j\theta}$  se definió anteriormente como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Nótese además que  $z \times z^* = z^* \times z = x^2 + y^2$  y por lo tanto  $|z|^2 = r^2 = z \times z^*$  o lo que es lo mismo  $|z| = r = \sqrt{z \times z^*}$ .

Combinando lo anterior se observa que siempre se cumple  $|z| > \text{Re}\{z\}$  y  $|z| > \text{Im}\{z\}$ .

Se cumple además

1.  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
2.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  (con  $z_2 \neq 0$ )
3.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4.  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

donde las primeras dos igualdades se demuestran utilizando el hecho de que

$$|z| = |re^{j\theta}| = \sqrt{r^2 \times (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r.$$

La última desigualdad surge de la tercera (que se demostrará posteriormente), a partir de

$$\begin{aligned} |z_1| &= |z_1 - z_2 + z_2| \\ &\leq |z_1 - z_2| + |z_2| \\ |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

**Suma y Resta** Sean los números complejos  $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\theta_1}$  y  $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ . Para la suma y resta se cumple:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} z_1^* + z_2^* &= (x_1 - jy_1) + (x_2 - jy_2) = (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2) \\ &= (z_1 + z_2)^* \end{aligned}$$

y en general para  $n$  números complejos  $z_i = x_i + jy_i$  se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i^* &= \sum_{i=1}^n (x_i - jy_i) = \sum_{i=1}^n x_i - j \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^* . \end{aligned}$$

El lector puede además demostrar que:

$$z_1 + z_1^* = 2 \operatorname{Re}\{z_1\} \quad (2.11)$$

$$z_1 - z_1^* = j2 \operatorname{Im}\{z_1\} \quad (2.12)$$

**Multiplicación y División** Para los números complejos  $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\theta_1}$  y  $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\theta_2}$  se cumple:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

donde se ha simplificado la notación del producto de número reales y complejos  $z_1 \times z_2$  por  $z_1 z_2$ .

De las ecuaciones anteriores resulta claro que, analíticamente, es más simple utilizar las notaciones polares para resolver productos y divisiones de números complejos.

De forma similar al caso de la suma de números conjugados se cumple con la multiplicación

$$\begin{aligned} z_1^* \times z_2^* &= (r_1 e^{-j\theta_1})(r_2 e^{-j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= (z_1 \times z_2)^* \end{aligned}$$

y en general para  $n$  números complejos  $z_i = r_i e^{j\theta_i}$  se cumple

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n z_i^* &= \prod_{i=1}^n (r_i e^{-j\theta_i}) = \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) e^{-j \sum_{i=1}^n \theta_i} \\ &= \left( \prod_{i=1}^n z_i \right)^* . \end{aligned}$$

El lector puede además demostrar que:

$$z_1 \times z_1^* = r_1^2 \quad (2.13)$$

$$\frac{z_1}{z_1^*} = e^{j2\theta_1} \quad (2.14)$$



**Potenciación** Dada una colección de  $n$  números  $z_i = x_i + jy_i = r_i e^{j\theta_i} \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1 \dots n$  puede demostrarse que

$$\prod_{i=1}^n z_i = \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) e^{j \sum_{i=1}^n \theta_i}$$

Para el caso especial en que todos los elementos  $z_i$  sean iguales a  $z = x + jy = r e^{j\theta}$  se obtiene:

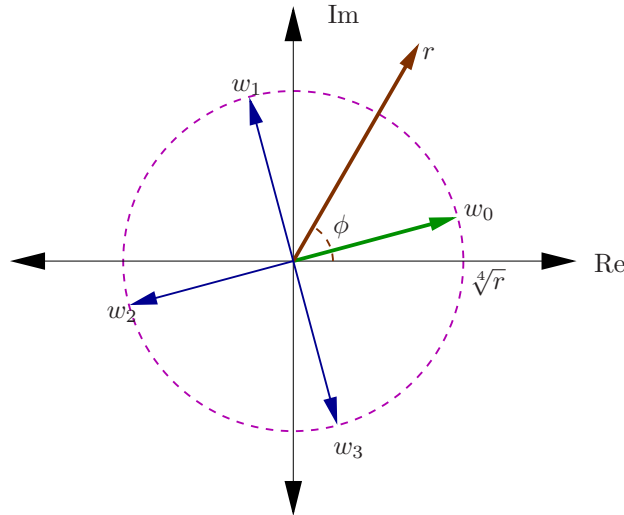
$$\prod_{i=1}^n z = z^n = \left( \prod_{i=1}^n r \right) e^{j \sum_{i=1}^n \theta} = r^n e^{jn\theta} \quad (2.15)$$

A (2.15) se le denomina frecuentemente el teorema de Moivre. Este teorema puede utilizarse para encontrar las  $n$ -ésimas raíces de  $z$  definidas como los números  $w$  que multiplicados por sí mismos  $n$  veces resultan en  $z$ , es decir  $w^n = z$ . Junto con (2.9) puede observarse que

$$w = z^{1/n} = (r e^{j\theta})^{1/n} = (r e^{j(\theta+2k\pi)})^{1/n} = r^{1/n} e^{j \frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

que puede tomar  $n$  valores únicos con  $k = 0, \dots, n-1$ . En otras palabras, cualquier número complejo  $z$  tiene  $n$   $n$ -ésimas raíces.

Las  $n$   $n$ -ésimas raíces de  $z$  tienen todas la misma magnitud  $|z|^{1/n}$ , lo que implica que se encuentran situadas sobre un círculo en el plano complejo de radio  $|z|^{1/n}$ . Además, la primera raíz tiene un ángulo igual a  $\frac{\arg z}{n}$  y a partir de ésta las otras raíces se distribuyen regularmente sobre el círculo separadas por un ángulo igual a  $2\pi/n$ . La figura 2.4 muestra un ejemplo.



**Figura 2.4:** Ejemplo de las cuatro raíces cuartas de  $r e^{j60^\circ}$ .

**Exponenciación** La exponenciación con números complejos mantiene las propiedades presentes en los números reales y extiende la identidad de Euler presentada anteriormente. Así

$$\begin{aligned} e^z &= e^{(x+jy)} \\ &= e^x e^{jy} \\ &= e^x \cos(y) + j e^x \sin(y) \end{aligned}$$

que es un número de magnitud  $e^x$  con ángulo igual a  $y$ , parte real  $e^x \cos(y)$  y parte imaginaria  $e^x \sin(y)$ . El lector puede demostrar que se cumple además:

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \\ \sin(z) &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y\end{aligned}$$

**Logaritmo** El logaritmo natural mantiene en los números complejos las mismas propiedades que en los reales, esto quiere decir que, si  $z = re^{j\theta}$  y  $k \in \mathbb{Z}$

$$\ln z = \ln [re^{j(\theta+2k\pi)}] = \ln r + \ln(e^{j(\theta+2k\pi)}) = \ln r + j(\theta + 2k\pi).$$

donde se nota que  $z$  complejo tiene un infinito número de logaritmos. El caso especial  $k = 0$  se denomina *valor principal* y se denota como  $\text{Ln } z = \ln |z| + j\angle z$ .

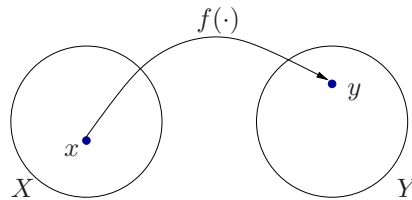
### 2.1.8 Otros conjuntos

Luego del conjunto de los números complejos encuentran aplicación otras generalizaciones, como las llamadas álgebras de Clifford, en las que se enmarcan conjuntos como cuaterniones, octoniones, sedeniones, etc., utilizados ampliamente en gráficos por computadora. Estos temas escapan sin embargo a la temática del presente curso. El lector interesado puede buscar más información en [24].

## 2.2 Funciones de variable compleja

Una *función*  $f$  es un concepto matemático que involucra dos conjuntos  $X$  y  $Y$  y una regla o *relación* que asocia a cada elemento  $x \in X$  uno y solo un elemento de  $y \in Y$ . Se dice entonces que  $f$  mapea el elemento  $x$  en el elemento  $y$  (figura 2.5). Esto se denota generalmente como

$$f : X \rightarrow Y \quad y = f(x)$$



**Figura 2.5:** Diagrama de relación funcional entre  $x \in X$  y  $y \in Y$ .

A  $x$  se le denomina variable independiente, puesto que puede tomar cualquier valor dentro de  $X$ . La variable dependiente  $y$  adquiere un valor determinado por el valor específico de  $x$  y la función  $f$ .

El conjunto  $X$  es el *dominio* de la función  $f$  y el conjunto de todas las imágenes  $\{y \mid y = f(x), x \in X\} \subseteq Y$  es el *conjunto imagen*, *rango* o *codominio* de  $f$ .

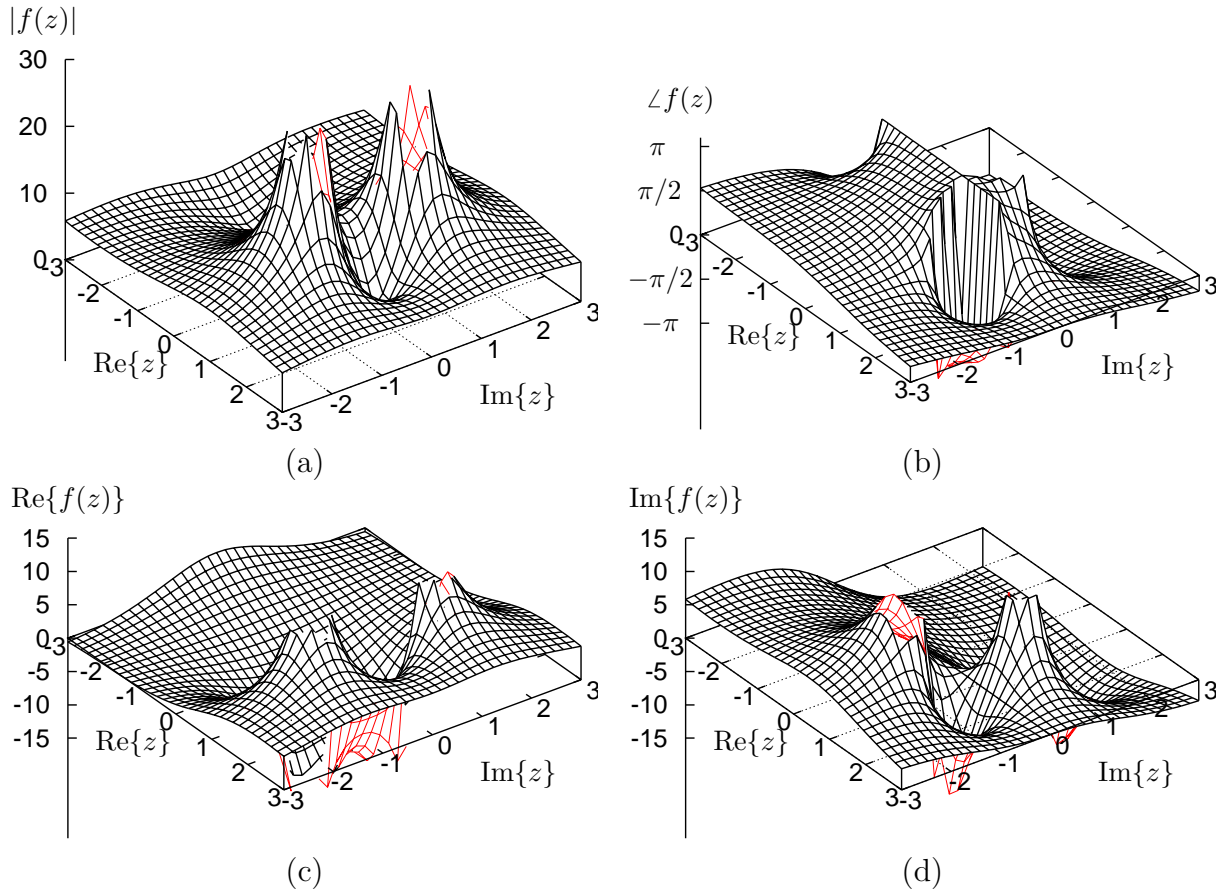
En el presente documento se utilizan principalmente funciones donde  $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ . A diferencia de las funciones de variable y valor reales  $y = f(x)$ , que se pueden representar fácilmente por medio de curvas en un plano cartesiano, la función de variable compleja  $w = f(z)$  con  $w, z \in \mathbb{C}$  no puede ser representada directamente por requerir para ello cuatro dimensiones. Se utilizan entonces varias notaciones. Por un lado, si  $z = x + jy$ ,  $w = u + jv$  y  $w = f(z)$  se cumple entonces que

$$w = f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

es decir, las componentes real e imaginaria son funciones de valor real de dos variables reales  $(u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . A su vez, se deriva directamente que

$$w = f(x, y) = r(x, y)e^{j\theta(x, y)}$$

lo que equivale a decir que  $w$  puede analizarse u observarse a través de su magnitud y argumento. En estos casos,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $r(x, y)$  y  $\theta(x, y)$  son funciones reales de dos variables reales, que pueden representarse en un espacio tridimensional (figura 2.6). Estos conceptos serán retomados posteriormente.



**Figura 2.6:** Representación en un espacio tridimensional de (a)  $r(x, y)$ , (b)  $\theta(x, y)$ , (c)  $u(x, y)$  y (d)  $v(x, y)$ , para una función ejemplo  $f(z)$ .

### 2.2.1 El concepto de mapeo

Mientras que con las representaciones de magnitud, fase, componentes real e imaginaria de funciones de valor y variable compleja se intenta observar cómo varían individualmente éstas con respecto a *todo* el plano complejo  $\mathbb{C}$ , con los llamados *mapeos* se estudia cómo es transformada una región específica del plano  $z$  (que puede ser una recta, una banda, un círculo, etc.) en otra región del plano  $w$  cuando se aplica  $w = f(z)$ .

La idea general de *mapeo* o *transformación* que realiza una función entre los conjuntos  $X$  y  $Y$  provee otro modo de visualización y análisis que se utiliza frecuentemente en ingeniería para simplificar modelos geométricos relativamente complejos. Por ejemplo, en electrostática se utilizan transformaciones que mapean la forma de superficies metálicas hacia planos, con los que los campos eléctricos generados por cargas eléctricas se pueden analizar de forma relativamente simple, para luego aplicar la transformación inversa, que permite derivar cómo se deforman los campos y líneas de fuerza en la configuración original. Un caso similar ocurre en aeronáutica, donde se mapea la forma (o perfil) de un ala a un cilindro que permite aplicar modelos matemáticos más flexibles de las corrientes de aire a su alrededor, para luego invertir el mapeo y observar cuál es el comportamiento del aire con la forma real del ala.

Como función o mapeo inverso de  $w = f(z)$  se conoce a aquel que logra recobrar el valor de  $z$  a partir de su imagen, y se denota como  $z = f^{-1}(w)$ , es decir:

$$w = f(z) \Rightarrow z = f^{-1}(w) = f^{-1}(f(z))$$

No toda función tiene un inverso, aunque en ingeniería son precisamente aquellas funciones invertibles las que encuentran mayor aplicación en casos como los mencionados.

Se denomina como *punto fijo* del mapeo o función  $f$ , aquel donde se cumple  $z = f(z)$ , es decir, un punto que no cambia cuando se le aplica la transformación  $f$ .

**Ejemplo 2.3** Encuentre la imagen en el plano  $w$  de la región lineal  $y = 2x + 4$  del plano  $z = x + jy$  bajo el mapeo  $w = 2z + 6$ . Encuentre los puntos fijos de este mapeo, y su mapeo inverso.

**Solución:** Se sabe que

$$w = u + jv = f(z) = 2z + 6 = 2(x + jy) + 6 = \underbrace{(2x + 6)}_u + j \underbrace{2y}_v$$

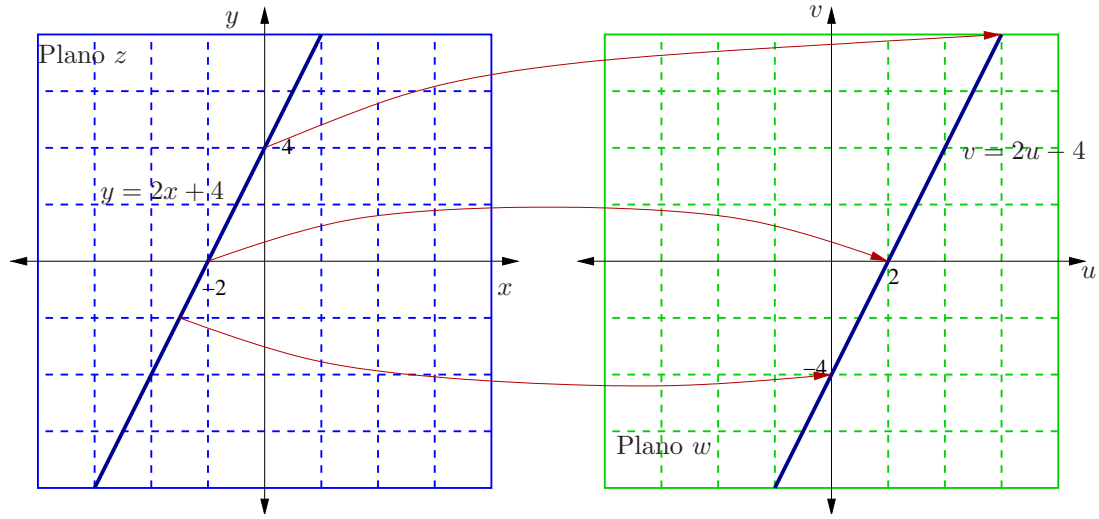
de donde se puede despejar

$$x = \frac{u - 6}{2}$$

y sustituyendo en  $v$  se obtiene

$$v = 2y = 2(2x + 4) = 4x + 8 = 2u - 12 + 8 = 2u - 4$$

lo que corresponde también a una línea recta (figura 2.7). El único punto fijo del mapeo  $w = 2z + 6$  es  $z = -6$ , y se encuentra fácilmente resolviendo la ecuación lineal  $z = 2z + 6$ . El mapeo inverso es  $z = \frac{w-6}{2}$ . 2.3



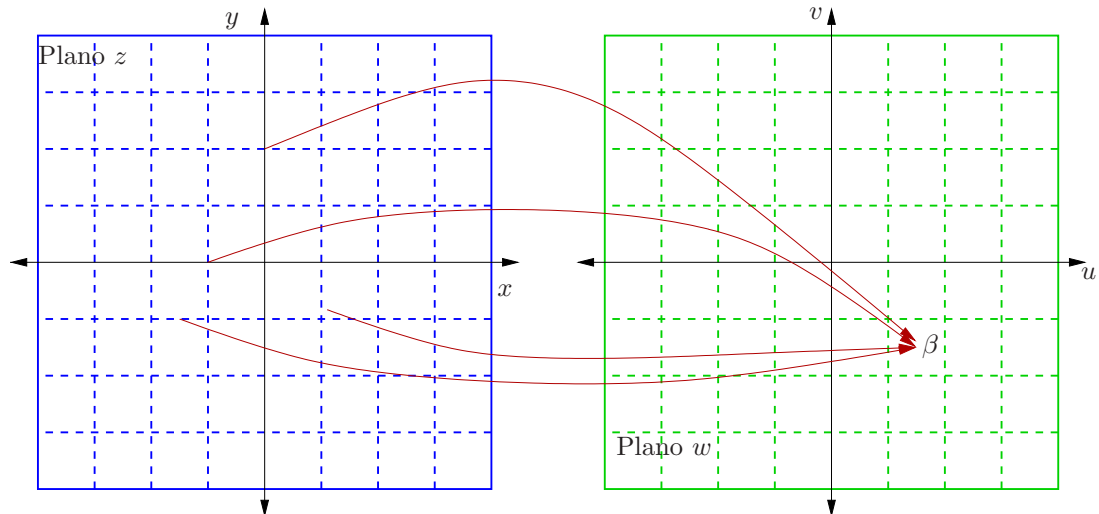
**Figura 2.7:** Mapeo de  $y = 2x + 4$  por medio de  $w = 2z + 6$ .

### 2.2.2 Mapeos lineales

Un mapeo lineal es realizado por una función de variable compleja de la forma

$$w = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Caso 1: Si  $\alpha = 0$  entonces  $w = \beta$ , lo que implica que todo el plano  $z$  es mapeado a un solo punto  $\beta$ . Nótese que entonces  $\beta$  es un punto fijo de  $w = \beta$ , que a su vez no tiene mapeo inverso (figura 2.8). A este caso en el que todo el plano  $z$  se proyecta a un solo punto de  $w$  se le denomina mapeo *degenerado*.

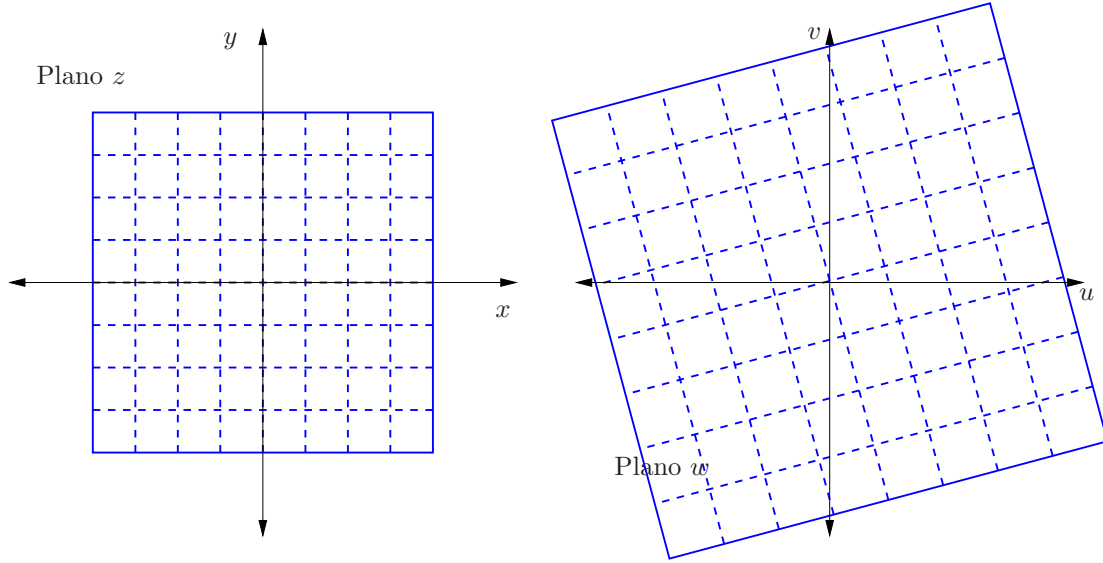


**Figura 2.8:** Mapeo de todo el plano  $z$  a  $\beta$  con  $w = \beta$ .

Caso 2: Si  $\beta = 0$  y  $\alpha \neq 0$  entonces  $w = \alpha z$ , lo que equivale a decir que 0 es un punto fijo y el mapeo inverso es  $z = \frac{1}{\alpha}w$ . Si se utiliza la notación polar  $z = re^{j\theta}$  y  $\alpha = |\alpha|e^{j\angle\alpha}$  entonces

$$w = \alpha z = |\alpha|e^{j\angle\alpha}re^{j\theta} = |\alpha|re^{j(\theta+\angle\alpha)}$$

esto implica que  $|w| = |\alpha|r$  y  $\angle w = \theta + \angle \alpha$ . En otras palabras, el mapeo  $w = \alpha z$  equivale a una expansión (ampliación o magnificación del plano  $z$ ) por un factor  $|\alpha|$  y una rotación por el ángulo  $\angle \alpha$  (figura 2.9).



**Figura 2.9:** Rotación y escalado por el mapeo  $w = \alpha z$ .

Caso 3: Si  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ , entonces  $w = \alpha z + \beta$  se puede considerar como dos mapeos en cascada. Primero  $\zeta = \alpha z$  y luego  $w = \zeta + \beta$ . Se observa entonces que sumar una constante  $\beta$  a un punto  $\zeta$  equivale a una traslación hacia  $\beta + \zeta$ . Así, el mapeo lineal amplifica, rota y traslada los puntos de  $z$  en  $w$ .

**Ejemplo 2.4** Demuestre que el mapeo lineal  $w = \alpha z + \beta$  transforma una recta en  $z$  en otra recta en  $w$ .

**Solución:** Cualquier recta en  $z$  puede describirse por medio de la ecuación

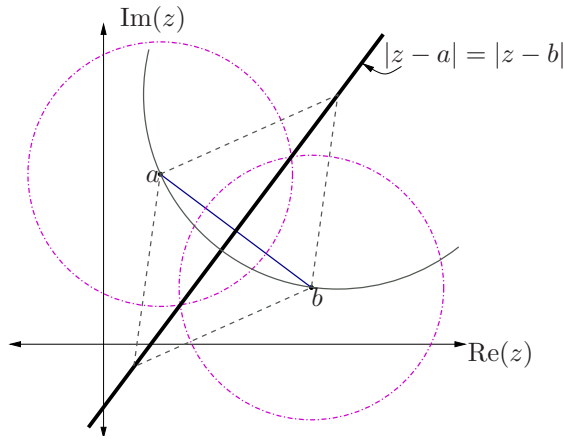
$$|z - a| = |z - b| \quad (2.16)$$

donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y la recta es la *mediatriz* del segmento de recta entre  $a$  y  $b$  (figura 2.10). Puesto que  $w = \alpha z + \beta$  entonces

$$z = \frac{w - \beta}{\alpha} \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{w - \beta}{\alpha} - a \right| &= \left| \frac{w - \beta}{\alpha} - b \right| \\ \frac{1}{|\alpha|} |w - (\alpha a + \beta)| &= \frac{1}{|\alpha|} |w - (\alpha b + \beta)| \\ |w - \bar{a}| &= |w - \bar{b}| \end{aligned}$$



**Figura 2.10:** Construcción geométrica de una recta con  $|z - a| = |z - b|$ . Puesto que  $|z - a|$  es la distancia entre  $z$  y  $a$ , un círculo centrado en un punto  $z$  sobre la recta descrita tendrá que pasar por ambos puntos  $a$  y  $b$ . Además, dos círculos del mismo radio centrados en  $a$  y  $b$  deberán intersectarse sobre la recta  $|z - a| = |z - b|$ . Así, la recta en cuestión es la mediatriz del segmento  $ab$ , es decir, la recta perpendicular al segmento  $ab$  que corta a éste por su mitad.

donde  $\bar{a} = \alpha a + \beta$  y  $\bar{b} = \alpha b + \beta$  que son las transformaciones de los dos generadores de la recta. Con esto queda claro que la proyección de la recta es otra recta.

Otra posible demostración se esboza a continuación. Asíumase como dominio la recta  $y = mx + b$ . Se cumple

$$w = \alpha z + \beta = \alpha(x + jy) + \beta = (\alpha x + \beta) + j\alpha y = u + jv$$

Puesto que  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , no es posible igualar  $\alpha x + \beta = u$ , pues el lado izquierdo no es real. Utilizando  $\alpha = \alpha_{\text{Re}} + j\alpha_{\text{Im}}$  y  $\beta = \beta_{\text{Re}} + j\beta_{\text{Im}}$  se pueden obtener y agrupar las partes reales e imaginarias y demostrar que

$$v = K_1 u + K_2$$

lo que también representa una recta, donde las constantes se definen como

$$K_1 = \frac{\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}$$

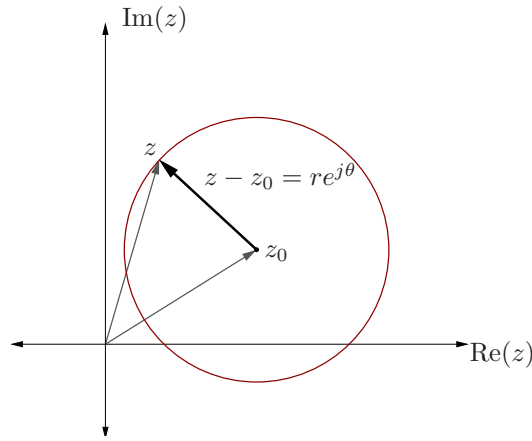
$$K_2 = \frac{\alpha_{\text{Im}}b - \beta_{\text{Re}}}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}(\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m) + \alpha_{\text{Re}}b + \beta_{\text{Im}} \quad .$$

2.4

**Ejemplo 2.5** Demuestre que el mapeo lineal transforma un círculo en  $z$  en otro círculo en  $w$ .

**Solución:** La ecuación de un círculo en  $z$  es  $|z - z_0| = r$ , donde el círculo tiene radio  $r$  y está centrado en  $z_0$  (figura 2.11). El mapeo lineal es  $w = \alpha z + \beta$ . Esto quiere decir que

$$\frac{w - \beta}{\alpha} = z$$



**Figura 2.11:** Construcción geométrica para representación de un círculo centrado en  $z_0$  y de radio  $r$  como  $|z - z_0| = r$ .

Si se resta  $z_0$  a ambos lados se obtiene

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{w - \beta}{\alpha} - z_0 = \frac{w}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} - z_0 = \frac{w}{\alpha} - \frac{\beta + \alpha z_0}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} (w - w_0) \end{aligned}$$

con  $w_0 = \beta + \alpha z_0$ . Puesto que el círculo en  $z$  es  $|z - z_0| = r$  esto implica que

$$\left| \frac{1}{\alpha} (w - w_0) \right| = r \Rightarrow |w - w_0| = r|\alpha|$$

En otras palabras, el radio del círculo en el plano  $w$  ha sido escalado con un factor  $|\alpha|$  y está centrado en  $w_0 = \alpha z_0 + \beta$ , que corresponde a la aplicación del mapeo lineal al centro del círculo  $z_0$ . 2.5

Si una curva corta al plano  $z$  en dos, entonces una curva mapeada linealmente al plano  $w$  también corta al último en dos, donde los puntos en un lado de la curva en  $z$  se proyectan a solo un lado de la curva en  $w$ .

**Ejemplo 2.6** Considérese el mapeo lineal  $w = f(z) = \alpha z + \beta$ . Si  $1 + j = f(1 + j)$  y  $0 = f(j)$

1. Determine los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .
2. Encuentre la región del plano  $w$  a la que es mapeado el semiplano izquierdo del plano  $z$ .
3. Encuentre la región en el plano  $w$  correspondiente a  $|z| < 2$ .
4. Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Solución:** Con los dos pares de puntos dados se plantea un sistema de dos ecuaciones lineales

$$\alpha(1 + j) + \beta = 1 + j \quad (2.18)$$

$$\alpha j + \beta = 0 \quad (2.19)$$



De (2.19) se despeja  $\beta = -j\alpha$  lo que se introduce en (2.18) para despejar  $\alpha$ :

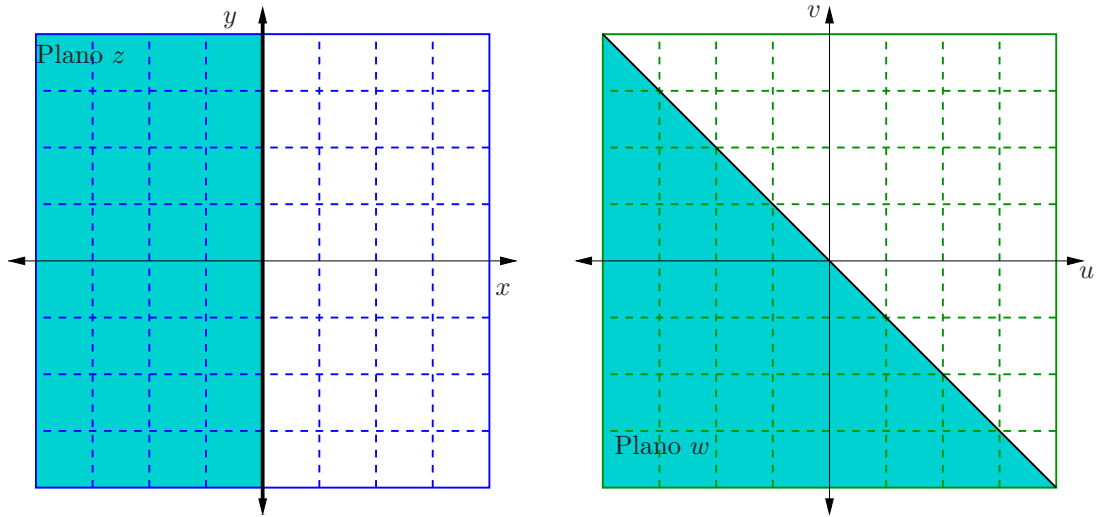
$$\begin{aligned}\alpha(1+j) - j\alpha &= 1+j \\ \alpha &= 1+j\end{aligned}$$

con lo que se deriva además  $\beta = 1-j$ .

Como el mapeo es lineal, el eje imaginario del plano  $z$  es transformado a otra recta del plano  $w = u + jv$ . Puesto que el eje imaginario es la recta  $z = jy$ , se sustituye esto en el mapeo, lo que resulta en:

$$\begin{aligned}w &= (1+j)jy + (1-j) \\ &= jy - y + 1 - j \\ &= \underbrace{(1-y)}_u + j\underbrace{(y-1)}_v\end{aligned}$$

Despejando  $y$  en términos de  $u$  e insertando en  $v$  se obtiene  $v = -u$ . Para encontrar qué parte del plano  $w$  dividido por  $v = -u$  corresponde al semiplano izquierdo de  $z$  se puede proceder tomando un punto de ese semiplano y encontrando su proyección en  $w$ . Por ejemplo, el punto  $z = -1$  es transformado en  $w = -(1+j) + (1-j) = -2j$ , lo que quiere decir que  $\text{Re}\{z\} < 0$  es transformado en el semiplano inferior izquierdo  $v < -u$ . A la misma conclusión se puede llegar utilizando la interpretación geométrica del mapeo: puesto que  $\alpha = 1+j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$  el semiplano se escala por  $\sqrt{2}$  y luego se rota  $45^\circ$  en contra de las manecillas del reloj, para ser luego trasladado en  $\beta = 1-j = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ , que deja al semiplano izquierdo de  $z$  del lado inferior izquierdo de  $w$  (figura 2.12).



**Figura 2.12:** Ejemplo de mapeo lineal

Como el mapeo es lineal, el círculo es transformado en otro círculo. Siguiendo la interpretación geométrica el nuevo círculo tendrá un radio  $2\sqrt{2}$  centrado en  $w_0 = 1-j$ , es decir, el círculo  $|z| < 2$  es transformado en  $|w - w_0| < 2\sqrt{2}$ .

Como punto fijo se tiene que  $z = \alpha z + \beta$  que tiene una sola solución  $z = w = 1+j$  (ver el enunciado).

### 2.2.3 Mapeo de Inversión

El mapeo de inversión tiene la forma general:

$$w = \frac{1}{z}$$

Interesa analizar ahora cómo se transforman los círculos y rectas del plano  $z$  en este caso. Para ello, obsérvese primero el caso del círculo

$$|z - z_0| = \left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r \quad .$$

Utilizando las propiedades de los números complejos se derivan las siguientes conclusiones:

$$\left| \frac{1}{w} - z_0 \right| = r$$

$$\left| \frac{1}{w} \frac{w^*}{w^*} - z_0 \right| = r$$

y puesto que  $z z^* = |z|^2$

$$\begin{aligned} \left( \frac{w^*}{|w|^2} - z_0 \right) \left( \frac{w^*}{|w|^2} - z_0 \right)^* &= r^2 \\ \left( \frac{w^*}{|w|^2} - z_0 \right) \left( \frac{w}{|w|^2} - z_0^* \right) &= r^2 \\ \frac{1}{|w|^2} - \frac{w z_0}{|w|^2} - \frac{w^* z_0^*}{|w|^2} + |z_0|^2 &= r^2 \\ 1 - (w z_0 + w^* z_0^*) &= \underbrace{(r^2 - |z_0|^2)}_{\alpha = \text{cte} \in \mathbb{R}} |w|^2 \\ w w^* + \frac{w z_0 + w^* z_0^*}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Asúmase por ahora que  $\alpha \neq 0$ . Sumando a ambos lados de la igualdad  $\frac{z_0 z_0^*}{\alpha^2}$  para completar cuadrados, se obtiene:

$$\begin{aligned} w w^* + \frac{w z_0 + w^* z_0^*}{\alpha} + \frac{z_0 z_0^*}{\alpha^2} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{z_0 z_0^*}{\alpha^2} \\ w w^* + \frac{w z_0}{\alpha} + \frac{w^* z_0^*}{\alpha} + \frac{z_0 z_0^*}{\alpha} \frac{1}{\alpha} &= \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \left( w^* + \frac{z_0}{\alpha} \right) + \frac{z_0^*}{\alpha} \left( w^* + \frac{z_0}{\alpha} \right) &= \left( w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right) \left( w^* + \frac{z_0}{\alpha} \right) = \left( w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right) \left( w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right)^* \\ &= \left| w + \frac{z_0^*}{\alpha} \right|^2 = \left( \frac{r}{\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|w - w_0| = r_w$$

con  $w_0 = -z_0^*/\alpha$  y  $r_w = |r/\alpha| = |r/(r^2 - |z_0|^2)|$ . Entonces, si  $\alpha \neq 0$ , un círculo en el plano  $z$  es transformado por inversión en otro círculo en el plano  $w$ . Nótese que  $\alpha = 0$  equivale a decir  $r = |z_0|$ , es decir, un círculo que pasa por el origen. En otras palabras, cualquier círculo en el plano  $z$  que *no* pasa por el origen es transformado por  $w = \frac{1}{z}$  en otro círculo que tampoco pasa por el origen, pues si  $r \neq |z_0|$  entonces

$$r_w = \frac{|r|}{|\alpha|} \neq \left| -\frac{z_0^*}{\alpha} \right| = \frac{|z_0|}{|\alpha|}$$

Para el caso especial en el que el círculo en el plano  $z$  pasa por el origen, entonces  $\alpha$  es cero y la ecuación (2.20) se transforma en

$$1 - (wz_0 + w^*z_0^*) = 0$$

y considerando que  $w = u + jv$ ,  $z_0 = x_0 + jy_0$  y  $z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\{wz_0\} &= 1 \\ 2(ux_0 - vy_0) &= 1 \\ v &= \frac{x_0}{y_0}u - \frac{1}{2y_0} \end{aligned}$$

lo que equivale a una recta en el plano  $w$  que corta el eje imaginario en  $v = -\frac{1}{2y_0}$  y tiene pendiente  $\frac{x_0}{y_0}$ .

De forma similar se procede ahora con el mapeo de inversión de una recta en el plano  $z$ . Para ello se utilizará ahora la ecuación de la recta de la siguiente forma:

$$|z - a| = |z - b|$$

donde  $a, b \in \mathbb{C}$ , que describe la recta perpendicular al segmento de recta entre  $a$  y  $b$ , que corta a este último a la mitad (mediatriz). Sustituyendo  $z = 1/w$  y elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{w} - a \right| &= \left| \frac{1}{w} - b \right| \\ \left| \frac{w^*}{|w|^2} - a \right|^2 &= \left| \frac{w^*}{|w|^2} - b \right|^2 \\ \left( \frac{w^*}{|w|^2} - a \right) \left( \frac{w}{|w|^2} - a^* \right) &= \left( \frac{w^*}{|w|^2} - b \right) \left( \frac{w}{|w|^2} - b^* \right) \end{aligned}$$

de donde se puede despejar

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{|w|^2}(a - b)^* + \frac{w}{|w|^2}(a - b) &= |a|^2 - |b|^2 \\ w^*(a - b)^* + w(a - b) &= \underbrace{(|a|^2 - |b|^2)}_{\beta = \text{cte} \in \mathbb{R}} |w|^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Nótese que la constante  $\beta$  es igual a cero si y solo si los dos puntos  $a$  y  $b$  tienen la misma magnitud, en cuyo caso la mediatriz es una recta que pasa por el origen. En este caso, la ecuación anterior sería equivalente a

$$w^*(a-b)^* + w(a-b) = 0$$

y utilizando  $z + z^* = 2\operatorname{Re}\{z\}$ ,  $w = u + jv$  se obtiene como parte real del producto entre  $w$  y  $(a-b)$

$$2u\operatorname{Re}\{a-b\} - 2v\operatorname{Im}\{a-b\} = 0$$

de donde se deriva

$$v = \frac{\operatorname{Re}\{a-b\}}{\operatorname{Im}\{a-b\}}u$$

lo que corresponde a una recta en el plano  $w$  que pasa por el origen. En otras palabras, una recta que pasa por el origen en  $z$  será proyectada en otra recta que pasa por el origen en  $w$ .

Si  $\beta \neq 0$  entonces la recta no pasa por el origen y la ecuación (2.21) se puede reescribir

$$w^* \frac{(a-b)^*}{\beta} + w \frac{(a-b)}{\beta} = |w|^2 = ww^*$$

Reagrupando los términos y completando los cuadrados sumando  $(a-b)(a-b)^*/\beta^2$  se obtiene

$$ww^* - w^* \frac{(a-b)^*}{\beta} - w \frac{(a-b)}{\beta} + \frac{(a-b)(a-b)^*}{\beta^2} = \frac{(a-b)(a-b)^*}{\beta^2}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} w \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right) - \frac{(a-b)^*}{\beta} \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right) &= \frac{|a-b|^2}{\beta^2} \\ \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right) \left( w^* - \frac{a-b}{\beta} \right)^* &= \left( \frac{|a-b|}{\beta} \right)^2 \\ \left| w - \frac{(a-b)^*}{\beta} \right| &= \frac{|a-b|}{|\beta|} \end{aligned}$$

Esto corresponde a un círculo centrado en  $w_0 = \frac{(a-b)^*}{\beta}$  de radio  $r_w = \left| \frac{a-b}{\beta} \right|$ . Puesto que  $r_w = |w_0|$  entonces la recta es transformada en un círculo que pasa por el origen del plano  $w$ .

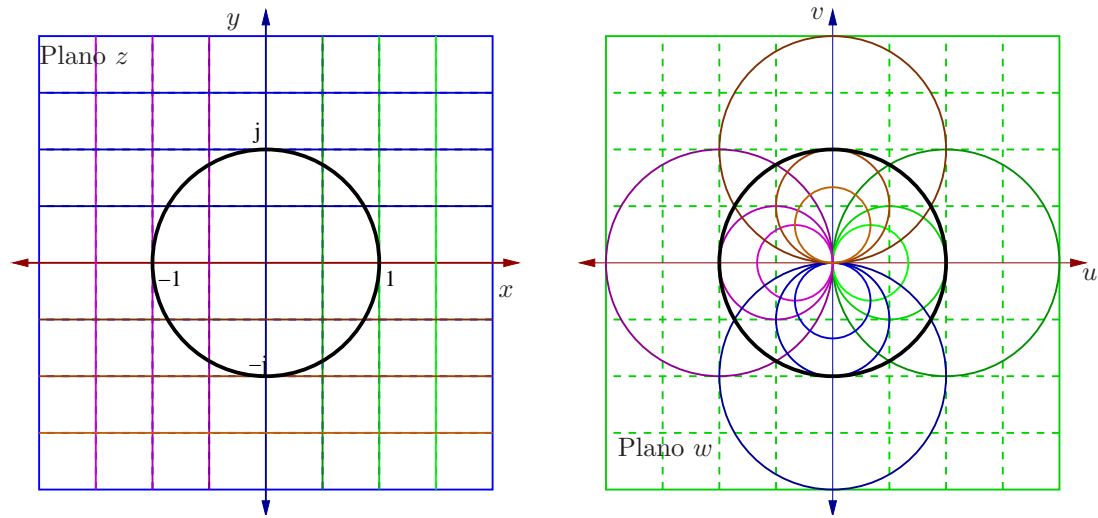
En resumen, el mapeo de inversión transforma los círculos y rectas en círculos o rectas. Puesto que  $w = 1/z$ , es fácil de recordar que si  $z$  tiende a cero, entonces  $w$  tenderá a infinito, el cual es contenido en rectas del plano  $w$ . Si  $z$  nunca se hace cero (como por ejemplo, en círculos que no pasan por el origen), entonces su transformación siempre tendrá valores finitos en  $w$ . Si  $z$  se hace infinito, entonces el valor de  $w = 1/z$  será cero, por lo que toda recta en el plano  $z$  (por contener al infinito) tendrá una imagen que pasa por el origen del plano  $w$ .

Los puntos fijos de este mapeo se encuentran resolviendo  $z = 1/z$ , lo que equivale a  $z^2 = 1$ . Esto tiene dos posibles valores en  $z = \pm 1$ . Además cualquier círculo centrado en el origen

de  $z$  de radio  $r$  será transformado en otro círculo centrado en el origen de  $w$  con radio  $1/r$ . Esto quiere decir que el interior del círculo unitario en  $z$  se proyecta al exterior del círculo unitario en  $w$ . Nótese que el círculo unitario  $|z| = 1$  contiene a los dos puntos fijos, que se deben encontrar entonces en su proyección. Nótese además que el mapeo inverso de  $w = 1/z$  es  $z = 1/w$ , es decir, el mapeo inverso de la inversión es a su vez la inversión.

Se deja como ejercicio para el lector mostrar que el mapeo de inversión transforma círculos centrados en el eje real del plano  $z$  en círculos centrados en el eje real del plano  $w$  o en rectas verticales; además, transforma círculos centrados en el eje imaginario del plano  $z$  en círculos centrados en el eje imaginario del plano  $w$ , o en rectas horizontales.

La figura 2.13 ilustra el resultado del mapeo de inversión para el círculo unitario, líneas verticales y horizontales en el plano  $z$ .



**Figura 2.13:** Mapeo de inversión de líneas horizontales y verticales. El eje imaginario  $\text{Im}(z) = 0$  corresponde con  $\text{Im}(w) = 0$ , y de forma equivalente el eje real  $\text{Re}(z) = 0$  equivale a  $\text{Re}(w) = 0$ . Las otras rectas corresponden con círculos, todos pasando por el origen del plano  $w$ . El círculo unitario es su propia imagen.

### 2.2.4 Mapeo bilineal

Se le denomina polinomio bilineal de  $z$  y  $w$  a la expresión de la forma

$$\alpha_1 zw + \alpha_2 z + \alpha_3 w + \alpha_4 = 0$$

con las constantes complejas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\alpha_4$ , puesto que si se considera a una de las variables  $z$  o  $w$  constante, la expresión resultante es lineal. Esta ecuación puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} w(\alpha_1 z + \alpha_3) &= -\alpha_2 z - \alpha_4 \\ w &= \frac{-\alpha_2 z - \alpha_4}{\alpha_1 z + \alpha_3} \end{aligned}$$

Si se definen  $a = -\alpha_2$ ,  $b = -\alpha_4$ ,  $c = \alpha_1$  y  $d = \alpha_3$  se obtiene la forma más usual para un mapeo bilineal:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.22)$$

Nótese que el mapeo lineal visto anteriormente (sección 2.2.2) es un caso especial del mapeo bilineal con  $c = 0$  y  $d = 1$ , y el mapeo de inversión (sección 2.2.3) es otro caso especial con  $a = d = 0$  y  $b = c = 1$ .

El mapeo (2.22) se puede transformar en una secuencia de mapeos ya analizados para derivar sus propiedades. Multiplíquese para ello el término  $az$  por  $c/c$  y súmese  $ad/c - ad/c$ :

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \quad (2.23)$$

donde la variable  $z$  aparece ahora una sola vez en el denominador del segundo término.

De la última expresión se nota que si el término  $(bc - ad)$  (denominado *determinante del mapeo*) es cero, entonces el mapeo degenera en  $w = \frac{a}{c}$  y por lo tanto no tiene mapeo inverso. Si el determinante del mapeo es diferente de cero, entonces su mapeo inverso existe y está dado por el mapeo también bilineal e invertible (ver problema 2.31):

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (2.24)$$

Para apreciar mejor los pasos involucrados de este mapeo, (2.23) se puede reescribir con  $\lambda = a/c$ ,  $\mu = bc - ad$ ,  $\alpha = c^2$  y  $\beta = cd$ :

$$w = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta}$$

lo que equivale a los siguientes tres pasos

1.  $z_1 = \alpha z + \beta$  (mapeo lineal)
2.  $z_2 = \frac{1}{z_1}$  (mapeo de inversión)
3.  $w = \mu z_2 + \lambda$  (mapeo lineal)

El primer mapeo lineal escala, rota y traslada el plano  $z$ , por lo que si el dominio del mapeo es una curva, su forma no cambiará en el plano  $z_1$ : rectas se transformarán en rectas, y círculos en círculos. El segundo mapeo, de inversión, transformará círculos y rectas en círculos y rectas, que a su vez serán escalados, rotados y trasladados por el último paso a su posición final. En otros términos, el mapeo bilineal también transforma círculos y rectas en  $z$  en círculos y rectas en  $w$ .

**Ejemplo 2.7** En el estudio de líneas de transmisión se utiliza a menudo la llamada *carta de Smith* que relaciona el coeficiente complejo de reflexión  $\Gamma$  con la impedancia compleja normalizada  $z$  por medio del mapeo bilineal:

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.25)$$

Verifique a qué equivalen las proyecciones de resistencia o reactancias normalizadas constantes en  $z$  en el plano  $\Gamma$  del coeficiente complejo de reflexión.

**Solución:** Una primera solución conceptual puede obtenerse observando que los dos mapeos lineales involucrados en la ecuación (2.25) son relativamente sencillos:

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

El primer mapeo  $z_1 = z + 1$  en el denominador del término racional corresponde a trasladar al plano  $z$  una unidad hacia la derecha. Luego se aplica el mapeo de inversión  $z_2 = 1/z_1$  y, puesto que  $-2 = 2e^{j180^\circ}$ , se hace un escalado por el factor de 2 seguido por una rotación en  $180^\circ$ . Al resultado  $z_2$  solo resta desplazarlo una unidad hacia la derecha para obtener  $\Gamma$ .

Nótese que en  $z = \infty$ ,  $\Gamma = 1$ , esto quiere decir que toda recta en  $z$  tendrá un mapeo que pasa por el punto  $\Gamma = 1$  pues toda recta contiene a  $\infty$ . Además, en  $z = -1$ ,  $\Gamma = \infty$ , por lo que, considerando todo el análisis anterior para el mapeo de inversión, cualquier círculo o recta que pase por  $z = -1$  será transformado en una recta en el plano  $\Gamma$ . Consecuencia de lo anterior es que toda recta que no pasa por  $z = -1$  tiene como equivalente un círculo que pasa por  $\Gamma = 1$ .

Para un análisis más algebraico de la expresión (2.25) considérese primero la ecuación general de una línea:

$$|z - a| = |z - b| \quad (2.26)$$

Partiendo del hecho de que el mapeo inverso de (2.25) tiene la forma

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

y elevando ambos lados de (2.26) al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} - a \right|^2 &= \left| \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} - b \right|^2 \\ |(1 + \Gamma) - a(1 - \Gamma)|^2 &= |(1 + \Gamma) - b(1 - \Gamma)|^2 \\ |\underbrace{\Gamma(1 + a)}_{a_1} + \underbrace{(1 - a)}_{a_2}|^2 &= |\underbrace{\Gamma(1 + b)}_{b_1} + \underbrace{(1 - b)}_{b_2}|^2 \end{aligned}$$

Nótese que los términos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  son números complejos, introducidos para simplificar la notación. Utilizando la propiedad  $|z|^2 = zz^*$

$$\begin{aligned} |a_1\Gamma + a_2|^2 &= |b_1\Gamma + b_2|^2 \\ (a_1\Gamma + a_2)(a_1\Gamma + a_2)^* &= (b_1\Gamma + b_2)(b_1\Gamma + b_2)^* \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior y asumiendo  $\alpha \neq 0$  se obtiene:

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 \underbrace{(|a_1|^2 - |b_1|^2)}_{\alpha \in \mathbb{R}} + \underbrace{\Gamma(a_1 a_2^* - b_1 b_2^*)}_{\kappa} + \underbrace{\Gamma^*(a_1^* a_2 - b_1^* b_2)}_{\kappa^*} &= \underbrace{|b_2|^2 - |a_2|^2}_{\beta \in \mathbb{R}} \\ |\Gamma|^2 + \Gamma \frac{\kappa}{\alpha} + \Gamma^* \frac{\kappa^*}{\alpha} &= \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Completando cuadrados con  $\frac{\kappa\kappa^*}{\alpha^2}$

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 + \Gamma \frac{\kappa}{\alpha} + \Gamma^* \frac{\kappa^*}{\alpha} + \frac{\kappa\kappa^*}{\alpha^2} &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\kappa\kappa^*}{\alpha^2} \\ \left( \Gamma + \frac{\kappa^*}{\alpha} \right) \left( \Gamma + \frac{\kappa^*}{\alpha} \right)^* &= \frac{\alpha\beta + \kappa\kappa^*}{\alpha^2} \\ \left| \Gamma + \frac{\kappa^*}{\alpha} \right|^2 &= \frac{\alpha\beta + \kappa\kappa^*}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Lo que representa, como se esperaba, círculos en el plano  $\Gamma$ , centrados en  $-\frac{\kappa^*}{\alpha}$  y de radio  $\sqrt{\frac{\alpha\beta + \kappa\kappa^*}{\alpha^2}}$ . Como caso de interés se estudia ahora la proyección de las rectas horizontales y verticales en el plano  $z$  sobre el plano  $\Gamma$ . Una recta horizontal que cruza el eje imaginario en  $y$  ( $y \in \mathbb{R}$ ) puede representarse por ejemplo con la ecuación (2.26) donde

$$\begin{aligned} a = j(y-1) &\Rightarrow a_1 = 1 + j(y-1), \quad a_2 = 1 - j(y-1) \\ b = j(y+1) &\Rightarrow b_1 = 1 + j(y+1), \quad b_2 = 1 - j(y+1) \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \kappa^* &= a_1^* a_2 - b_1^* b_2 \\ &= (1 - j(y-1))(1 - j(y-1)) - (1 - j(y+1))(1 - j(y+1)) \\ &= 1 - j2(y-1) - (y-1)^2 - [1 - j2(y+1) - (y+1)^2] \\ &= 4y + 4j \\ \alpha &= |a_1|^2 - |b_1|^2 = -4y \\ \beta &= |b_2|^2 - |a_2|^2 = 4y = -\alpha \end{aligned}$$

con lo que se puede derivar que la ecuación del círculo equivalente está dada por:

$$\left| \Gamma - \left( 1 + j\frac{1}{y} \right) \right|^2 = \frac{1}{y^2}$$

lo que confirma la observación anterior de que todo círculo representando a una recta en  $z$  pasará por el punto  $\Gamma = 1$ , puesto que el radio es igual a la separación entre el centro del círculo y el punto  $\Gamma = 1$ .

Para las rectas verticales de forma similar se obtiene:

$$\begin{aligned} a = x-1 &\Rightarrow a_1 = x, \quad a_2 = 2-x \\ b = x+1 &\Rightarrow b_1 = 2+x, \quad b_2 = -x \end{aligned}$$

con lo que se deriva

$$\begin{aligned} \kappa^* &= a_1^* a_2 - b_1^* b_2 = 4x \\ \alpha &= |a_1|^2 - |b_1|^2 = -4x - 4 \\ \beta &= |b_2|^2 - |a_2|^2 = 4x - 4 \end{aligned}$$



y se puede expresar entonces

$$\left| \Gamma - \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) \right|^2 = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Nótese que el centro de este círculo está alejado de  $\Gamma = 1$  la misma distancia que su radio, por lo que también pasa por  $\Gamma = 1$ . El eje imaginario del plano  $z$  es mapeado al círculo unitario del plano  $\Gamma$ .

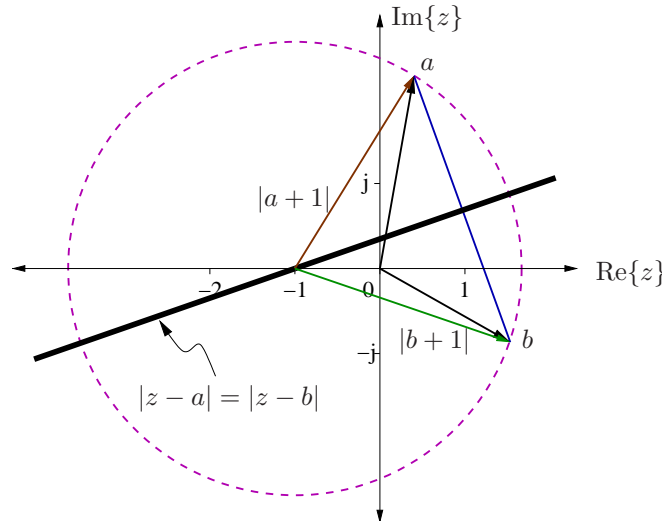
Falta por analizar el caso  $\alpha = 0$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} |a_1|^2 - |b_1|^2 &= 0 \Rightarrow \\ |a_1|^2 &= |b_1|^2 \\ |1+a|^2 &= |1+b|^2 \end{aligned}$$

Considerando que la expresión  $|z - z_0|$  se puede interpretar como la distancia entre los puntos  $z$  y  $z_0$ , entonces, reorganizando la expresión anterior como

$$|a - (-1)| = |b - (-1)|$$

se obtiene que la distancia del punto  $a$  hacia  $-1$  debe ser igual que la distancia del punto  $b$  a  $-1$ , o en otros términos, ambos puntos  $a$  y  $b$  deben estar sobre un círculo con centro en  $-1$ , lo que se ilustra en la figura 2.14. Puesto que la mediatriz de dos puntos situados sobre un círculo pasa por el centro de dicho círculo, la ecuación  $|z - a| = |z - b|$  con  $|a + 1| = |b + 1|$  describe entonces una línea recta que pasa por el punto  $-1$  del plano  $z$ . A partir de esta



**Figura 2.14:** Demostración gráfica que  $|z - a| = |z - b|$  con  $|a + 1| = |b + 1|$  describe una recta que pasa por  $z = -1$ .

observación se puede utilizar entonces una representación paramétrica del eje real de  $z$  y la recta vertical que pasa por  $-1$ , para obtener directamente a través de la expresión del mapeo las representaciones correspondientes. Primero, el eje real se puede expresar como  $z = t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Esto produce

$$\Gamma = \frac{t-1}{t+1}$$

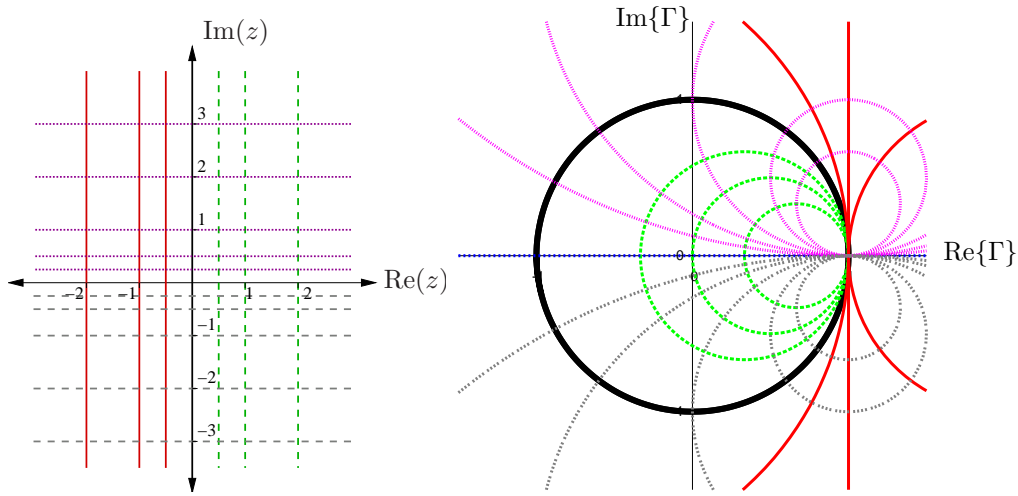
que es siempre real, y por tanto representa al eje real del plano  $\Gamma$ , tendiendo a 1 para  $t \rightarrow \pm\infty$ , haciéndose cero para  $t = 1$ , y  $\pm\infty$  si  $t$  se acerca a  $-1$  por la izquierda o por la derecha.

La recta vertical que pasa por  $z = -1$  se puede representar como  $z = -1 + jt$  con lo que se obtiene

$$\Gamma = \frac{(-1 + jt) - 1}{(-1 + jt) + 1} = 1 + j\frac{2}{t}$$

que es una recta vertical que pasa por el punto  $\Gamma = 1$  al variar con  $t$  solo la parte imaginaria.

La figura 2.15 presenta en forma gráfica los resultados descritos hasta el momento. La Carta de Smith comúnmente representa solo lo que se encuentra dentro del círculo unitario del plano  $\Gamma$ , puesto que componentes resistivos negativos de la impedancia normalizada  $z$  no tienen sentido en la aplicación práctica. Nótese la similitud con el mapeo de inversión de rectas verticales y horizontales en la figura 2.13.



**Figura 2.15:** Mapeo bilineal utilizado en la Carta de Smith.

2.7

### 2.2.5 Otros mapeos

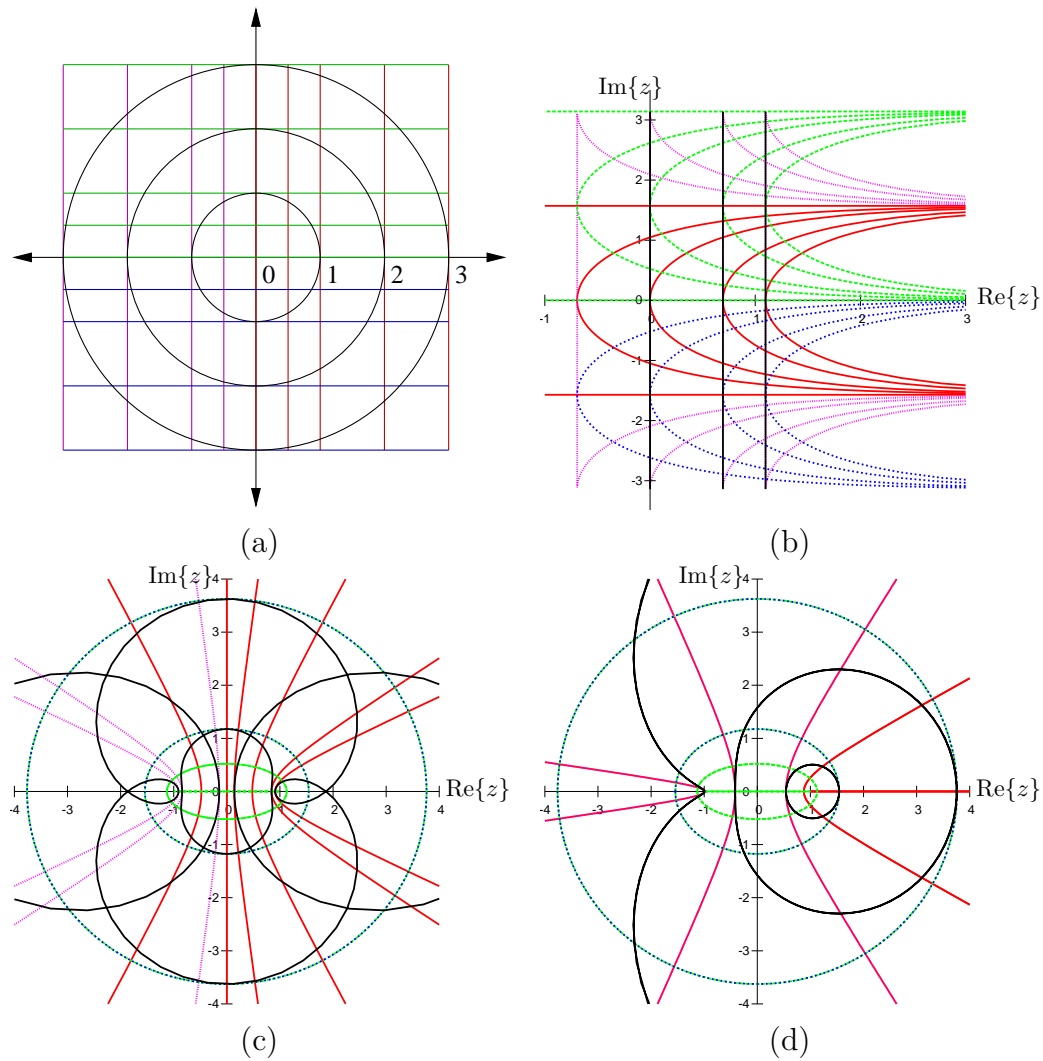
Existen otra gran variedad de mapeos, como por ejemplo

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios en  $z$ , mapeo que se utiliza fuertemente en las transformadas de Laplace y  $z$ . La figura 2.16 muestra el resultado de mapear las líneas verticales, horizontales y círculos mostrados, utilizando los mapeos  $w = \text{Ln}(z)$ ,  $w = \text{sen}(z)$  y  $w = \text{cos}(z)$ .

El mapeo

$$w = ae^{bz}$$



**Figura 2.16:** Efectos de mapear las líneas y círculos en (a) utilizando los mapeos (b)  $w = \text{Ln}(z)$ , (c)  $w = \text{sen}(z)$  y (d)  $w = \cos(z)$ .

se estudiarán con más detalle en capítulos posteriores. El lector interesado puede revisar [18], donde encontrará muchos otros tipos de mapeos y sus aplicaciones en ingeniería.

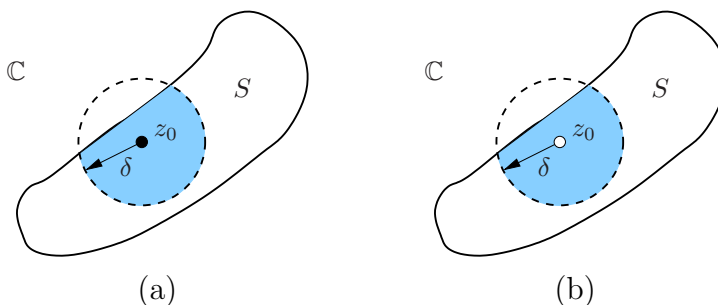
## 2.3 Derivación compleja

### 2.3.1 Algunas definiciones fundamentales

Los conjuntos de puntos del plano complejo pueden caracterizarse de acuerdo a sus características topológicas:

- Una **vecindad** de radio  $\delta$  (o simplemente *vecindad*  $\delta$ ) de un punto  $z_0$  en un conjunto de puntos  $S$  es el conjunto de todos los puntos  $z \in S$  tales que  $|z - z_0| < \delta$ , donde  $\delta$  es cualquier número real positivo (figura 2.17a).
- La **vecindad reducida** de radio  $\delta$  del punto  $z_0$  es igual a la vecindad de radio  $\delta$  de

$z_0$  excluyendo al punto  $z_0$ , es decir, el conjunto de puntos  $z$  para los que se cumple  $0 < |z - z_0| < \delta$  (figura 2.17b).



**Figura 2.17:** Diagramas para aclarar los conceptos de (a) Vecindad y (b) Vecindad reducida.

- Un punto  $z_0$  se llama **punto límite** o **punto de acumulación** de un conjunto  $S \subseteq \mathbb{C}$  si toda vecindad reducida de radio  $\delta$  de  $z_0$  contiene puntos de  $S$ . Un punto límite puede interpretarse entonces como aquel punto de  $S$  al que es posible acercarse arbitrariamente utilizando solo otros puntos de  $S$ . Esto quiere decir que, puesto que  $\delta$  es cualquier número positivo, el conjunto  $S$  tiene cardinalidad infinita. Nótese además que el punto límite  $z_0$  no necesariamente debe pertenecer a  $S$ .
- Un conjunto  $S$  se dice **cerrado** si cada punto límite de  $S$  pertenece a  $S$ . Por ejemplo, el conjunto  $|z| \leq 1$  es cerrado mientras que  $|z| < 1$  no lo es.
- Un conjunto  $S$  se denomina **acotado** si existe una constante  $M \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $z \in S$  se cumple  $|z| < M$ .
- Un conjunto  $S$  se denomina **ilimitado** si no es acotado.
- Un conjunto **compacto** es cerrado y acotado.
- Un punto  $z_0$  se llama **punto interior** de un conjunto  $S$  si existe una vecindad de  $z_0$  cuyos puntos pertenecen completamente a  $S$ .
- Un punto  $z_0$  se llama **punto frontera** de un conjunto  $S$  si toda vecindad  $\delta$  de  $z_0$  contiene puntos que pertenecen a  $S$  y puntos que no le pertenecen.
- Un punto  $z_0$  se llama **punto exterior** de un conjunto  $S$  si no es punto interior o punto frontera.
- Un conjunto es **abierto** si contiene solamente puntos interiores. Nótese que si un conjunto es abierto, entonces no es cerrado y viceversa. El conjunto  $|z| < 1$  es abierto.
- Un conjunto  $S$  es **conexo** si cualquier par de puntos del conjunto pueden ser unidos por un camino formado por segmentos de recta contenidos en  $S$ .
- Un conjunto abierto y conexo recibe también el nombre de **región abierta** o **dominio**.
- Si a un conjunto  $S$  se le agregan todos los puntos límite de  $S$ , al nuevo conjunto se le denomina **clausura** de  $S$  y es un conjunto cerrado.
- La clausura de una región abierta o dominio se denomina **región cerrada**.
- Una **región** es una región abierta con ninguno, varios o todos sus puntos límite.

### 2.3.2 Límites y continuidad

Sea el plano complejo  $z = x + jy$ , el plano complejo  $w = u + jv$  (con  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ) y la función de variable compleja  $w = f(z)$  definida en un dominio  $S \subset \mathbb{C}$ . Sea además  $z_0$  un punto límite dentro de  $S$ . Se dice que  $l$  es el límite de  $f(z)$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$ , lo que se escribe

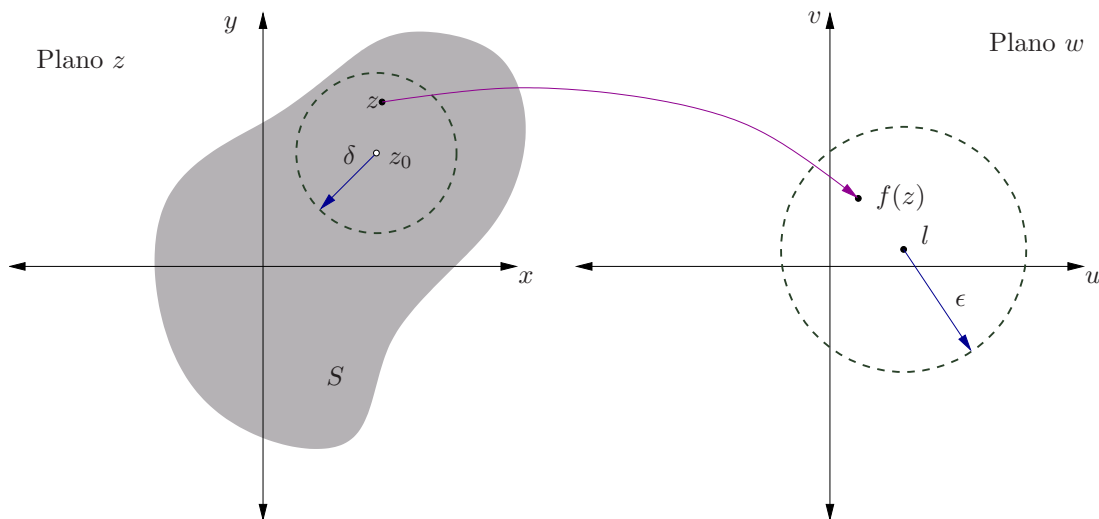
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad (2.28)$$

si los valores de  $f(z)$  se aproximan a  $l$  cuando  $z$  se aproxima a  $z_0$ ; es decir, si para todo  $\epsilon$  real positivo es posible encontrar un  $\delta$  real positivo tal que para todo  $z$  en una vecindad reducida de  $z_0$  de radio  $\delta$  se cumple

$$|f(z) - l| < \epsilon$$

que representa un disco de radio  $\epsilon$  en el plano  $w$  centrado en el valor del límite (figura 2.18). Expresado matemáticamente:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$



**Figura 2.18:** Representación gráfica del límite con variable compleja.

La función  $f(z)$  se denomina *continua* en el punto  $z = z_0$  si  $f(z_0)$  está definida y se cumple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) .$$

Puesto que  $z_0$  es un punto límite en el dominio  $S$  de definición de  $f(z)$ , entonces se concluye que  $f(z)$  está definida también en una vecindad de  $z_0$ . La función se denomina continua en un dominio, si es continua en todos los puntos de ese dominio.

### 2.3.3 Funciones diferenciables y analíticas

#### Definiciones

El número complejo  $A$  se denomina derivada de la función  $w = f(z)$  en el punto  $z_0$  relativo al conjunto  $S$  y se denota con  $f'_S(z_0)$  si se cumple

$$A = f'_S(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \quad (2.29)$$

Esta definición es muy similar a la derivada en caso de funciones de variable real:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

en cuyo caso el dominio  $S$  se ha reducido a un intervalo abierto del eje real que incluye a  $x_0$ . Mientras que en éste último caso el acercamiento a  $x_0$  puede ser solo por la izquierda o por la derecha, en las funciones de variable compleja el acercamiento hacia  $z_0$  puede realizarse desde un número infinito de direcciones diferentes, lo que impone un requisito más estricto a la existencia de la derivada de una función compleja, al exigirse que los valores del límite en todas esas direcciones sea el mismo.

Una función  $f(z)$  se denomina *holomorfa*, *analítica*<sup>3</sup>, o *regular* en una región abierta (o dominio)  $G \subseteq \mathbb{C}$  si es diferenciable en todo punto de  $G$ . En este caso se simplifica la notación de la derivada  $f'_G(z)$ , que se puede escribir entonces como  $f'(z)$  ó  $\frac{d}{dz}f(z)$  sin indicar explícitamente la región  $G$ . Según la anterior definición, si  $f(z)$  es analítica en  $G$  y  $z_0 \in G$  entonces  $f(z)$  es diferenciable en  $z = z_0$  relativo a cualquier subconjunto  $S \subset G$  que contenga a  $z_0$  como punto límite y

$$f'_S(z_0) = f'(z_0)$$

La función  $f(z)$  se dice analítica en el punto  $z = z_0$  (o en un conjunto  $S$ ) si  $f(z)$  es analítica en un conjunto abierto  $G$  que contiene a  $z_0$  (o a  $S$ ).

**Ejemplo 2.8** Calcule la derivada de la función  $f(z) = z$  dentro de todo el plano  $z$ .

**Solución:** Utilizando la definición:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

se obtiene que  $f'(z_0) = 1$  para todo  $z$ , por lo que la función es analítica en  $\mathbb{C}$ .

2.8

---

<sup>3</sup>Formalmente, la definición brindada corresponde a una función *holomorfa*. La función es *analítica* en un punto  $z_0$  si la función se puede expresar por medio de una serie de Taylor centrada en  $z_0$ , lo que conduce a que sea infinitamente diferenciable, y por lo tanto, holomorfa. Posteriormente se presentará el hecho de que si una función es holomorfa, es diferenciable infinitamente, lo que a su vez implica que tiene una serie de Taylor asociada. Por esta razón, en este documento se utilizarán ambos términos indistintamente.

Sea  $T$  un subconjunto de  $S$  y sea  $z_0 \in T$  un punto límite en  $T$ . Si existe  $f'_S(z_0)$  entonces existe  $f'_T(z_0)$  y se cumple

$$f'_T(z_0) = f'_S(z_0)$$

En otras palabras, si una función es diferenciable en un conjunto entonces es diferenciable en un subconjunto menor. Lo contrario no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.9** Demuestre que la función  $f(z) = z^* = x - jy$  es diferenciable en cualquier punto  $z = z_0$  relativo a un rayo  $S$  que parte desde  $z_0$ .

**Solución:** Con la definición

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^*}{z - z_0} = e^{-j2\angle(z - z_0)}$$

que es una expresión con valor constante solo si  $z \in S$  y el conjunto  $S$  representa un segmento de recta que parte desde  $z_0$ , lo que implicaría valores del mismo valor angular. Si se toman un nuevo conjunto igual a la unión de dos segmentos de recta, entonces se obtienen dos valores diferentes de la derivada lo que implica que la función no es analítica. 2.9

Si la función  $f(z)$  es diferenciable en el punto  $z = z_0$  con respecto al conjunto  $S$ , entonces si  $z$  tiende a  $z_0$  el cociente en (2.29) está limitado por una constante  $C$  y por lo tanto

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C|z - z_0|$$

para un radio  $|z - z_0|$  suficientemente pequeño ( $z \in S$ ) y por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

lo que implica que  $f(z)$  es continua en  $z = z_0$  con respecto al conjunto  $S$ .

## Reglas para el cálculo de derivadas

Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son funciones diferenciables en el punto  $z = z_0$  relativo a un conjunto  $S$ , y  $k \in \mathbb{C}$  entonces se cumple

$$\begin{aligned} [kf(z)]'_S &= kf'_S(z) \\ [f(z) + g(z)]'_S &= f'_S(z) + g'_S(z) \\ [f(z)g(z)]'_S &= f'_S(z)g(z) + f(z)g'_S(z) \\ \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right]'_S &= \frac{f'_S(z)g(z) - f(z)g'_S(z)}{g^2(z)} \end{aligned} \tag{2.30}$$

La regla de la cadena también es válida: si  $w = f(z)$  es diferenciable en  $z = z_0$  con respecto al conjunto  $S$ , y  $\zeta = g(w)$  se define en un conjunto  $T$  que corresponde al mapeo de todos los puntos de  $S$  suficientemente cercanos a  $z_0$ , y es diferenciable en  $w_0 = f(z_0)$ , entonces  $\zeta = h(z) = g(f(z))$  es diferenciable en  $z_0$  con respecto a  $S$  con derivada

$$h'_S(z_0) = g'_T(w_0)f'_S(z_0)$$

De forma similar a los números reales, las derivadas de orden superior se definen de forma recursiva como

$$f_S^{(n+1)}(z) = [f_S^{(n)}(z)]'_S \quad (n = 1, 2, \dots)$$

para las que además se cumple

$$\begin{aligned} [kf(z)]_S^{(n)} &= kf_S^{(n)}(z) \\ [f(z) + g(z)]_S^{(n)} &= f_S^{(n)}(z) + g_S^{(n)}(z) \end{aligned}$$

donde  $k \in \mathbb{C}$ . El cumplimiento de estas dos últimas propiedades hace que el operador de diferenciación de  $n$ -ésimo orden sea denominado un *operador lineal*.

### Algunas funciones elementales y su derivación

Puede demostrarse que la fórmula de Euler derivada anteriormente (ver ecuación (2.7)) es válida para todo el plano  $z$ , es decir:

$$e^{jz} = \cos z + j \sen z \quad (2.31)$$

y junto con  $e^{-jz} = \cos z - j \sen z$  se obtiene directamente que

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad (2.32)$$

$$\sen z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad (2.33)$$

Se cumple además que

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

por lo que, utilizando la propiedad (2.30), la regla de la cadena y las ecuaciones de seno (2.33) y coseno (2.32), se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sen z &= \cos z \\ \frac{d}{dz} \cos z &= -\sen z \end{aligned}$$

De forma similar, para las ecuaciones hiperbólicas

$$\begin{aligned} \senh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -j \sen jz & \Rightarrow \frac{d}{dz} \senh z &= \cosh z \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos jz & \Rightarrow \frac{d}{dz} \cosh z &= \senh z \end{aligned}$$

Puesto que las partes real e imaginaria de la exponencial compleja están dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^z) &= e^x \cos y \\ \operatorname{Im}(e^z) &= e^x \sen y \end{aligned}$$



puede verse que a diferencia de la función exponencial de variable real ( $z = x + jy$ ,  $y = 0$ ) que es estrictamente monotónica, en el dominio complejo la función oscila de acuerdo al valor de su componente imaginaria. Puede demostrarse además que

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \sinh^2 y \\ |\sen z|^2 &= \sen^2 x + \sinh^2 y \end{aligned}$$

de donde se observa que en caso complejo ( $\text{Im}\{z\} = y \neq 0$ ) la magnitud de senos y cosenos puede superar a 1, lo cual es imposible con  $z \in \mathbb{R}$ .

Otras derivadas mantienen el formato presente en los números reales. Por ejemplo se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n &= n z^{n-1} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \\ \frac{d}{dz} \ln z &= \frac{1}{z} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{R}^-$  es el eje real no positivo, puesto que ahí  $\ln z$  no es analítica.

### 2.3.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro de un dominio  $S$ . Por lo tanto, su derivada en  $z_0 \in S$  existe y está dada por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

donde  $z$  puede tender a  $z_0$  por cualquier trayectoria dentro de  $S$ . Un caso especial lo representan las trayectorias paralelas a los ejes real e imaginario del plano  $z$ . Por ejemplo, si se elije una trayectoria paralela al eje real entonces  $z - z_0 = \Delta x$  y

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \right]$$

y puesto que  $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + jv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=x_0, y=y_0} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Si ahora se elije una dirección paralela al eje imaginario, se tiene  $z - z_0 = j\Delta y$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{f(z_0 + j\Delta y) - f(z_0)}{j\Delta y} \right]$$

y similar al caso anterior se tiene además

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + jv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right] \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{j\Delta y} + j \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right] \\
 &= \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{x=x_0, y=y_0}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Puesto que la función se ha asumido analítica, entonces (2.34) y (2.35) deben ser iguales, lo que solo ocurre si sus partes real e imaginarias son idénticas (ver (2.6)), es decir, si

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

conocidas como las *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*. De esto se deriva que las ecuaciones de Cauchy-Riemann proporcionan condiciones necesarias para la existencia de la derivada de  $f(z)$  en un punto particular  $z_0$ .

Ahora, si se tienen dos funciones *continuas* de valor real  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , que a su vez tienen derivadas parciales continuas, se puede demostrar que si  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una región  $S$ , entonces  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  es analítica en  $S$ . Nótese entonces, que si la función es analítica, entonces su derivada puede calcularse eligiendo cualquier dirección, entre otras las dadas en (2.34) y (2.35).

**Ejemplo 2.10** Verifique que la función  $f(z) = z^2$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y determine la derivada  $f'(z)$ .

**Solución:** Con  $z = x + jy$  se obtiene  $f(z) = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$ , y con  $u(x, y) = x^2 - y^2$  y  $v(x, y) = 2xy$  se pueden calcular las derivadas

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x
 \end{aligned}$$

que obviamente cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Eligiendo la dirección en  $x$  se obtiene que la derivada es entonces

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2(x + jy) = 2z$$

2.10

### 2.3.5 Funciones conjugadas y armónicas

Un par de funciones de valor y variables reales  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  se denominan *funciones conjugadas* si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Estas funciones son ortogonales

en el sentido de que las curvas en el plano  $(x, y)$  definidas por  $u(x, y) = \text{cte}$  y  $v(x, y) = \text{cte}$ , forman siempre ángulos rectos entre sí. La demostración de esto se puede realizar considerando que  $u(x, y) = v(x, y) = \text{cte}$  representan curvas de nivel, que siempre son ortogonales al gradiente de la superficie. Así,

$$\begin{aligned}\nabla u(x, y) &= \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \\ \nabla v(x, y) &= \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

y utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtiene que

$$\nabla v(x, y) = \left[ -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right]$$

Ahora, el producto escalar de ambos gradientes es

$$\begin{aligned}\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

lo que implica que los gradientes de  $u$  y  $v$  son ortogonales entre sí, que es equivalente a que las curvas de nivel, quienes siempre forman un ángulo de  $90^\circ$  con el gradiente, son también ortogonales entre sí.

Una función se denomina *armónica* si satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si una función es analítica entonces

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

y a su vez

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Igualando los términos real e imaginario se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Esto quiere decir, que si una función es analítica en una región, entonces sus componentes real e imaginaria son funciones armónicas en esa región. Visto de otra manera, si  $u(x, y)$  es armónica, entonces a su vez existe una función conjugada  $v(x, y)$  con la que se conforma una función analítica.

**Ejemplo 2.11** Sea  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$  la componente real de una función analítica  $f(z)$  con  $z = x + jy$  en todo el plano  $z$ . Encuentre la función conjugada  $v(x, y)$  tal que  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ .

**Solución:** Como  $f(z)$  es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann deben cumplirse, por lo que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$$

Integrando con respecto a  $y$

$$v = 2xy + 2y + F(x)$$

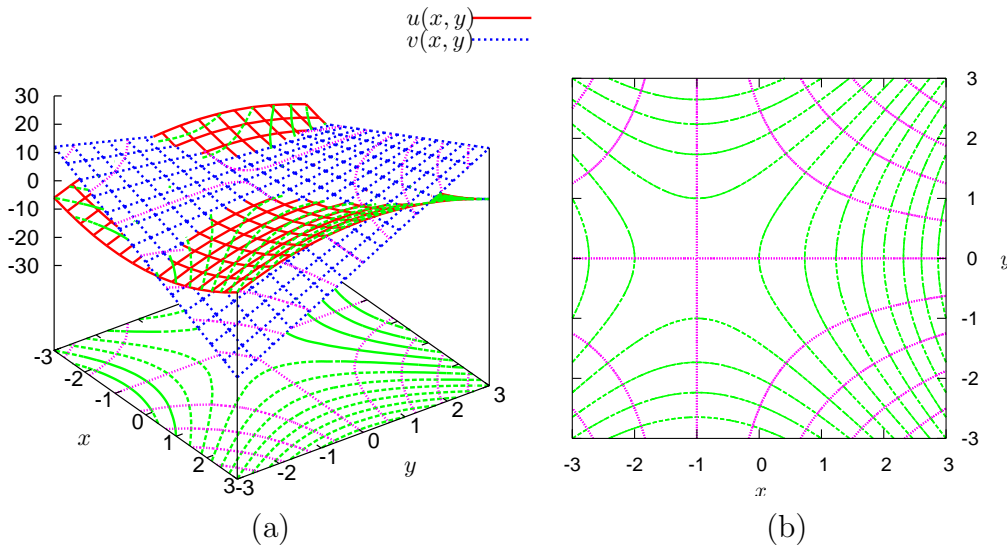
Donde  $F(x)$  es la “constante” de integración, que en este caso puede ser cualquier función de  $x$ . Derivando respecto a  $x$  y considerando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2y) = 2y$$

por lo que  $F(x)$  debe ser constante para que su derivada sea cero. Asumiendo esta constante igual a  $-jC$  se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + j(2xy + 2y - jC) \\ &= x^2 + 2x(jy) - y^2 + 2x + j2y + C \\ &= (x + jy)^2 + 2(x + jy) + C \\ &= z^2 + 2z + C \end{aligned}$$

La figura 2.19 muestra ambas componentes como superficies y sus correspondientes curvas de nivel, donde se puede apreciar su ortogonalidad. Se ha asumido  $C = 0$ .



**Figura 2.19:** Funciones conjugadas y ortogonalidad de las curvas de nivel. (a) Ambas funciones conjugadas como superficies. (b) Curvas de nivel de ambas superficies y su ortogonalidad.

### 2.3.6 Mapeos conformes

Un mapeo  $w = f(z)$  se denomina *conforme* si el ángulo que forman dos curvas en el plano  $z$  es preservando entre las dos curvas imagen del plano  $w$ . Puede demostrarse que si  $f(z)$  es una función analítica, entonces  $f(z)$  representa un mapeo conforme excepto en aquellos puntos donde la derivada  $f'(z) = 0$ .

Esta última condición permite analizar la generalidad de los mapeos introducidos anteriormente. El mapeo lineal con  $\alpha \neq 0$ :

$$w = f(z) = \alpha z + \beta \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \alpha$$

es entonces un mapeo conforme. Esto es claro puesto que el mapeo representa una rotación, escalado y traslación, que no modifican entonces la posición relativa entre las curvas (figura 2.9). El mapeo de inversión

$$w = f(z) = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

es entonces conforme en todo el plano  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , y esto se puede apreciar bien en la figura 2.13, donde el ángulo entre las líneas horizontales y verticales es de  $90^\circ$ , ángulo que se conserva en las intersecciones entre los círculos correspondientes.

Si se expresa el mapeo bilineal de la forma

$$w = f(z) = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} \quad (\alpha, \mu \neq 0)$$

entonces su derivada puede calcularse como

$$f'(z) = -\frac{\mu\alpha}{(\alpha z + \beta)^2}$$

que de nuevo nunca es cero para ningún punto finito del plano  $z$ , y es analítica en el plano  $\mathbb{C} \setminus \{-\beta/\alpha\}$ . La Carta de Smith en la figura 2.15 también muestra como las intersecciones entre los círculos que representan a las rectas horizontales y verticales también forman un ángulo de  $90^\circ$ .

**Ejemplo 2.12** Determine los puntos en los cuales el mapeo  $w = z + \frac{1}{z}$  no es conforme.

**Solución:** Utilizando  $z = x + jy$ ,  $w = u + jv$  se tiene

$$w = u + jv = x + jy + \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

por lo que

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y con

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

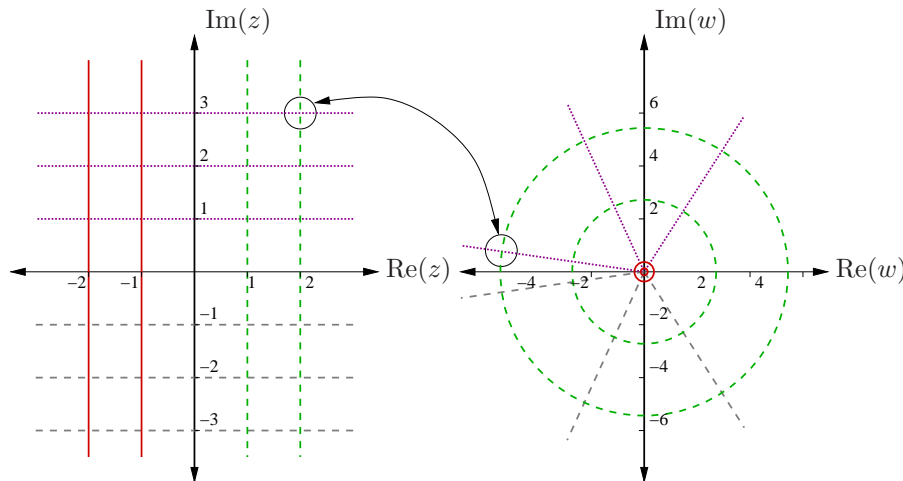
se obtiene que  $f(z)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus 0$ . Además

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} = 0$$

lo que implica que la derivada se hace cero para  $z = \pm 1$ . Por tanto el mapeo no es conforme en  $z = 0$ , y  $z = \pm 1$ . 2.12

**Ejemplo 2.13** Determine en qué dominio es el mapeo  $w = f(z) = e^z$  es conforme.

**Solución:** La derivada  $f'(z) = e^z$  está definida para todo el plano  $z$ , y por lo tanto  $f(z)$  es analítica. Puesto que  $e^z = e^x e^{iy}$  entonces puede verse que la magnitud de  $e^z$  se hace cero solo si  $x \rightarrow -\infty$ , lo que quiere decir que el mapeo es conforme en todo  $z$ . Nótese que las líneas horizontales, que poseen  $y$  constante, equivalen a líneas radiales partiendo del origen del plano  $w$ . Por otro lado las líneas verticales que tienen a  $x$  constante, representan círculos centrados en el origen de  $w$ . Obviamente las líneas radiales y los círculos presentan ángulos rectos en sus intersecciones (figura 2.20).



**Figura 2.20:** Mapeo exponencial es conforme.

## 2.4 Series complejas

Las series complejas están relacionadas directamente con el principio de *continuación analítica* mencionado previamente en la nota al pie de la página 19. Si una función  $f(x)$  de variable y valor reales ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) tiene un desarrollo como serie infinita de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$$

entonces tiene una función de variable y valor complejos correspondiente  $f(z)$  ( $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ) con un desarrollo equivalente en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots \quad (2.37)$$

Puesto que la mayoría de los operadores de cálculo diferencial e integral se basan en límites de sumas y restas que tienen un comportamiento muy similar en los dominios real y complejo, las propiedades de la así definida  $f(x)$  serán entonces aplicables a su continuación analítica  $f(z)$ . Así mismo, muchas funciones definidas a través de su representación en serie de potencias en los números reales serán entonces simplemente “continuadas analíticamente” en los números complejos (por ejemplo,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln x$ , etc.). Las series complejas son utilizadas ampliamente en el análisis de sistemas digitales, por medio de la transformada  $z$ .

### 2.4.1 Series de potencias

Una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_k (z - z_0)^k + \dots \quad (2.38)$$

con  $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$  se denomina serie de potencias centrada en  $z_0$  (o alrededor de  $z_0$ ). Nótese que haciendo una sustitución de variable  $z' = z - z_0$  puede estudiarse la serie utilizando (2.37) sin pérdida de generalidad, por lo que a continuación se analizará este caso más simple.

Las pruebas de convergencia de series infinitas complejas se realizan de forma muy similar a las series reales. Por ejemplo, sea la serie finita (revisar problema 2.64)

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

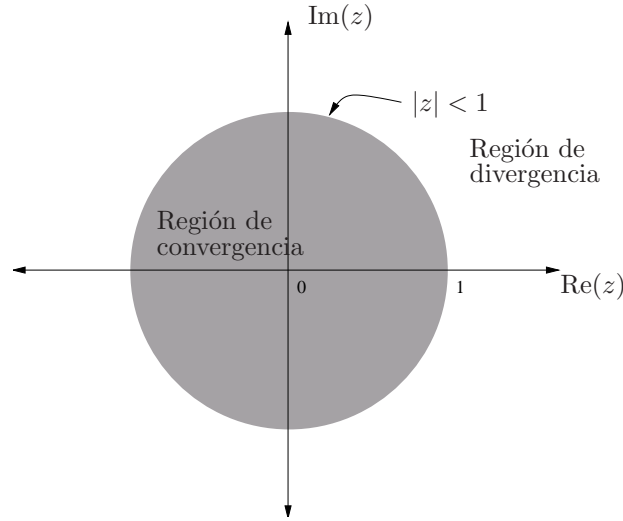
Si  $z = |z|e^{j\theta}$  entonces  $z^N = |z|^N e^{jN\theta}$ , y si  $N \rightarrow \infty$  entonces  $z^N$  converge solo si  $|z| < 1$ , y converge a cero, por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Esta serie diverge si  $|z| \geq 1$ . Ambos resultados son consistentes con la continuación analítica del caso real, donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

es decir, la serie converge si  $z$  se encuentra dentro del círculo unitario del plano complejo (figura 2.21). Nótese que la región de convergencia para la serie real corresponde a la



**Figura 2.21:** Región de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ .

intersección entre esta región circular del plano  $z$  y el eje real; es decir, el intervalo  $x \in ]-1, 1[$ .

En general, la serie de potencias anterior extendida con coeficientes constantes de ponderación  $a_n$  para cada término  $z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.39}$$

converge si  $|z| < R$ , y diverge si  $|z| > R$ , donde a  $R$  se le denomina *radio de convergencia*. El caso  $|z| = R$  deberá analizarse por separado.

Una pregunta planteada en el análisis de convergencia de la suma (2.39) es, cómo deben comportarse los términos  $a_n z^n$  cuando  $n$  tiende a infinito para poder converger. Sea  $S_k$  la suma parcial de los primeros  $k$  términos de la serie de potencias

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i$$

de tal forma que se cumple para la suma de los primeros  $n+1$  términos que

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i z^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i + a_n z^n = S_n + a_n z^n$$

de donde se aprecia que el  $n$ -ésimo término de (2.39) se puede obtener con

$$a_n z^n = S_{n+1} - S_n .$$



Si la serie de potencias converge a  $S$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0$$

lo que implica que para que la serie converja entonces sus términos en  $n \rightarrow \infty$  deben tender a cero como condición necesaria (pero no suficiente).

Para determinar el radio de convergencia  $R$  de una serie de potencias puede utilizarse entre otros la razón de D'Alembert (o también llamada fórmula de Cauchy-Hadamard), la cual establece que el radio de convergencia de (2.39) está dado por

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (2.40)$$

siempre que el límite exista.

Regresando a la serie (2.38), ésta converge cuando  $|z - z_0| < R$ , es decir, cuando el valor de  $z$  se encuentra dentro de un círculo de radio  $R$  centrado en  $z_0$ . Por otro lado, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{z - z_0} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + \dots \quad (2.41)$$

puede transformarse en (2.39) con  $z' = \frac{1}{z - z_0}$ , lo que implicaría que la región de convergencia será

$$|z'| < R \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{z - z_0} \right| < R \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| > \frac{1}{R}$$

que corresponde al exterior de un círculo de radio  $1/R$  centrado en el punto de desarrollo  $z_0$ , y divergirá en el interior de dicho círculo ( $|z| < 1/R$ ). Esto tiene sentido si se observa que  $1/z^k$  se hace arbitrariamente grande si  $z$  se acerca a cero, lo que indica que este último debe estar excluido de la región de convergencia. Además, puesto que los términos de la suma deben tender a cero para  $n \rightarrow \infty$ , esto solo puede ocurrir si el denominador es suficientemente grande.

Usualmente, para estas regiones externas a un círculo centrado en  $z_0$  se utiliza la expresión “centradas en infinito”, lo que solo debe dar la idea de que la región conexa “inicia” en el infinito hasta alcanzar la frontera circular de radio  $1/R$  y centrada en  $z_0$ , tal y como ocurre en el plano  $z'$ , donde la región de convergencia “parte” del origen hasta alcanzar el círculo de radio  $R$ .

**Ejemplo 2.14** Demuestre que el radio de convergencia de (2.39) y su derivada son idénticos.

**Solución:** Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} .$$

Si  $R$  es el radio de convergencia de  $f(z)$  dado por (2.40) y  $R'$  el radio de convergencia de  $f'(z)$ , este último es, según la razón de D'Alembert:

$$\begin{aligned} R' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right| \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) = 1 \cdot R \\ &= R \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la propiedad del producto de los límites reales. 2.14

**Ejemplo 2.15** Determine la serie de potencias que representa a la función

$$f(z) = \frac{1}{z - a}$$

y su radio de convergencia.

**Solución:** Existe un número infinito de representaciones para esta función, cada una con su propio radio de convergencia, dependiendo de dónde se centre la serie de potencias; sin embargo, puesto que  $f(a)$  no está definido, ninguna de la representaciones convergerá para  $z = a$ .

Por ejemplo, si se realiza la división polinomial de 1 entre  $z - a$ , se obtiene (figura 2.22):

$\begin{array}{r} 1 \\ -(1 - az^{-1}) \\ \hline az^{-1} \\ -(az^{-1} - a^2z^{-2}) \\ \hline a^2z^{-2} \\ -(a^2z^{-2} - a^3z^{-3}) \\ \hline a^3z^{-3} \\ -(a^3z^{-3} - a^4z^{-4}) \\ \hline a^4z^{-4} \\ \vdots \end{array}$	$\begin{array}{r} z - a \\ \hline z^{-1} + az^{-2} + a^2z^{-3} + a^3z^{-4} + a^4z^{-5} \dots \end{array}$
--	---

**Figura 2.22:** División polinomial de 1 entre  $z - a$ .

$$\frac{1}{z - a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \left( \frac{1}{z} \right)^n$$

Ahora, si se hace el cambio de variable  $z' = 1/z$  y se aplica la razón de D'Alembert entonces se tiene que el radio de convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}(z')^n$  es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n-1}}{a^n} \right| = \left| \frac{1}{a} \right|$$

lo que quiere decir que la serie converge si

$$|z'| < \left| \frac{1}{a} \right| \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < \left| \frac{1}{a} \right| \Rightarrow |z| > |a|$$

Por otro lado, si ahora se realiza la división polinomial de 1 entre  $-a + z$ , se obtiene (figura 2.23):

1	$-a + z$
$-(1 - \frac{z}{a})$	$-\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} - \dots$
$\frac{z}{a}$	
$-(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2})$	
$\frac{z^2}{a^2}$	
$-(\frac{z^2}{a^2} - \frac{z^3}{a^3})$	
$\frac{z^3}{a^3}$	
$-(\frac{z^3}{a^3} - \frac{z^4}{a^4})$	
$\frac{z^4}{a^4}$	
$\vdots$	

**Figura 2.23:** División polinomial de 1 entre  $-a + z$ .

$$\frac{1}{z - a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \quad (2.42)$$

Si se aplica la razón de D'Alambert entonces se tiene que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+2}}{a^{n+1}} \right| = |a|$$

lo que quiere decir que la serie converge si

$$|z| < |a|$$

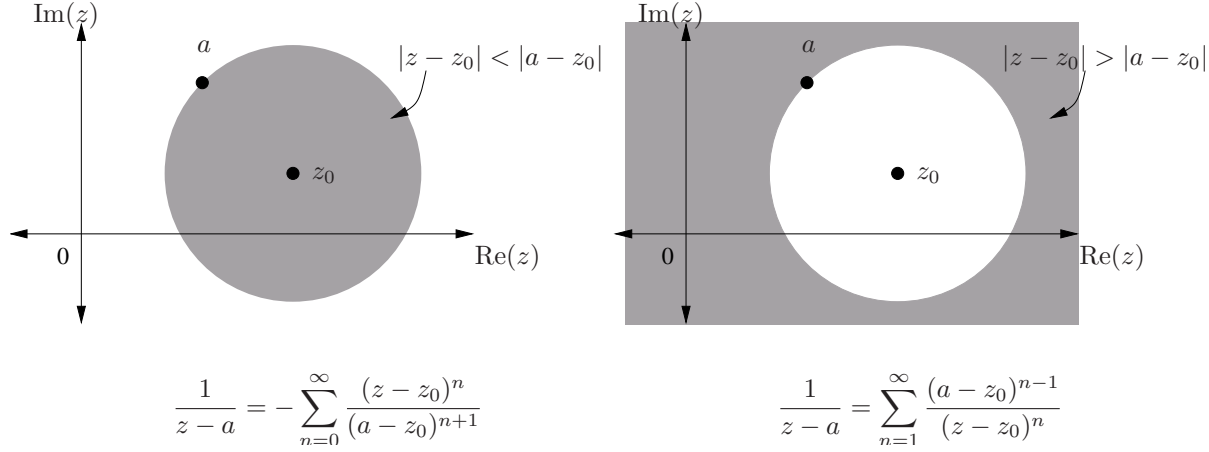
El primer caso centró la serie de potencias en  $z = \infty$ , el segundo caso en  $z = 0$ . Sin embargo, es posible centrar la serie en cualquier otro punto, siempre que  $z = a$  no esté incluido dentro de la región de convergencia. Si se quiere por ejemplo encontrar la serie de potencias de la función anterior centrada en  $z_0$ , ( $z_0 \neq a$ ) la función puede reescribirse sumando y restando  $z_0$  en el denominador como

$$\frac{1}{z - a} = \frac{1}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \frac{1}{z' - a'} \quad (2.43)$$

con  $z' = z - z_0$  y  $a' = a - z_0$ . Esta expresión puede a su vez descomponerse en las dos versiones de series de potencia descritas anteriormente:

$$\frac{1}{z - a} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} & \text{para } |z - z_0| > |a - z_0| \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(a - z_0)^{n+1}} & \text{para } |z - z_0| < |a - z_0| \end{cases}$$

Lo que debe notarse es que, mientras en las versiones originales las regiones de convergencia estaban dadas por el área externa o interna de un círculo de radio  $a$  centrado en el origen, ahora serán las regiones internas o externas de un círculo centrado en  $z_0$  de radio  $|a - z_0|$ , es decir, de un radio igual a la distancia entre el punto  $a$  donde la función no está definida y el punto donde se centra la serie de potencias  $z_0$  (figura 2.24).



**Figura 2.24:** Regiones de convergencia para series de potencia de  $1/(z-a)$ .

2.15

### 2.4.2 Series de Taylor

Sea  $f(z)$  una función compleja analítica dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$  (como por ejemplo, un círculo) en el plano  $z$ . Si  $z_0$  y  $z_0 + h$  son dos puntos dentro de la región de convergencia entonces se cumple

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (2.44)$$

lo que también puede ser expresado con  $h = z - z_0$  como

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (2.45)$$

que es un caso especial de la serie de potencias (2.38) con los coeficientes

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Esta última representación en serie de potencias se conoce como desarrollo en *Serie de Taylor* de la función  $f(z)$  alrededor de  $z_0$  y converge para  $|z - z_0| < R$ , donde el radio de convergencia  $R$  está determinado por lo general por el punto más cercano a  $z_0$  donde  $f(z)$  no es analítica. El caso especial  $z_0 = 0$  se conoce también como desarrollo en *Serie de MacLaurin*. Esto representa la continuación analítica del caso real.

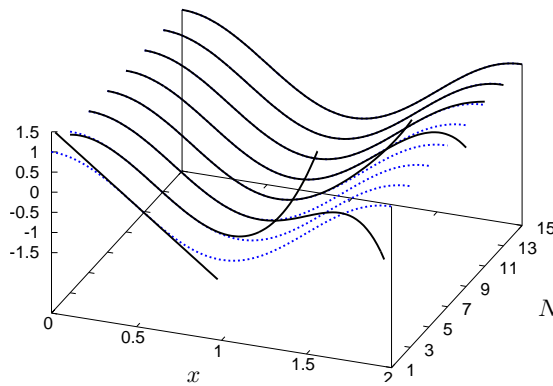
**Ejemplo 2.16** Encuentre la serie de Taylor centrada en  $z_0 = 1/2$  de la función  $f(z) = \cos(\pi z)$ .

**Solución:** Utilizando la definición el lector puede demostrar que

$$\cos(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$

donde los coeficientes  $a_n$  están dados por

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi^n}{n!} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$



**Figura 2.25:** Aproximación de la función  $\cos(\pi x)$  (línea punteada) por los primeros  $N$  términos de la serie de Taylor centrada en  $x_0 = 1/2$  (línea gruesa).

La figura 2.25 muestra la aproximación de la función de variable y valor reales  $f(x) = \cos(\pi x)$  con los primeros  $N$  términos de la serie de Taylor centrada en  $x_0 = 1/2$ . La figura 2.26 muestra la magnitud de seis aproximaciones de la función  $f(z)$  para diferente número de términos  $N$  de esta serie. La figura 2.27 muestra la parte real de las mismas aproximaciones.

2.16

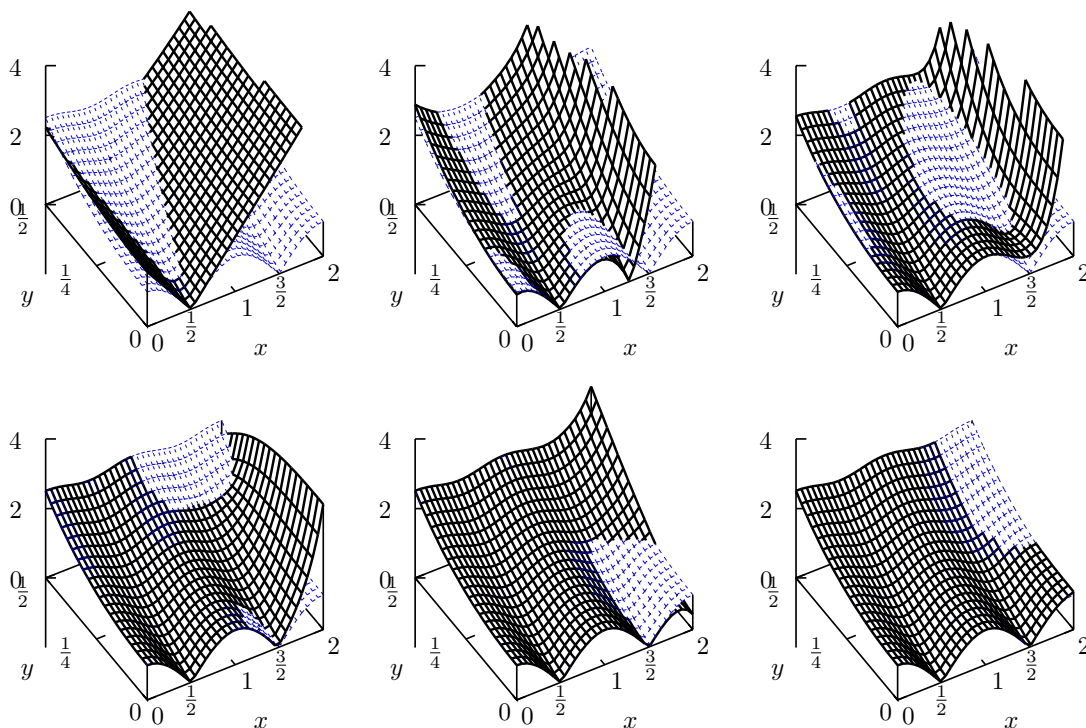
**Ejemplo 2.17** Encuentre el desarrollo en serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2j)} \quad (2.46)$$

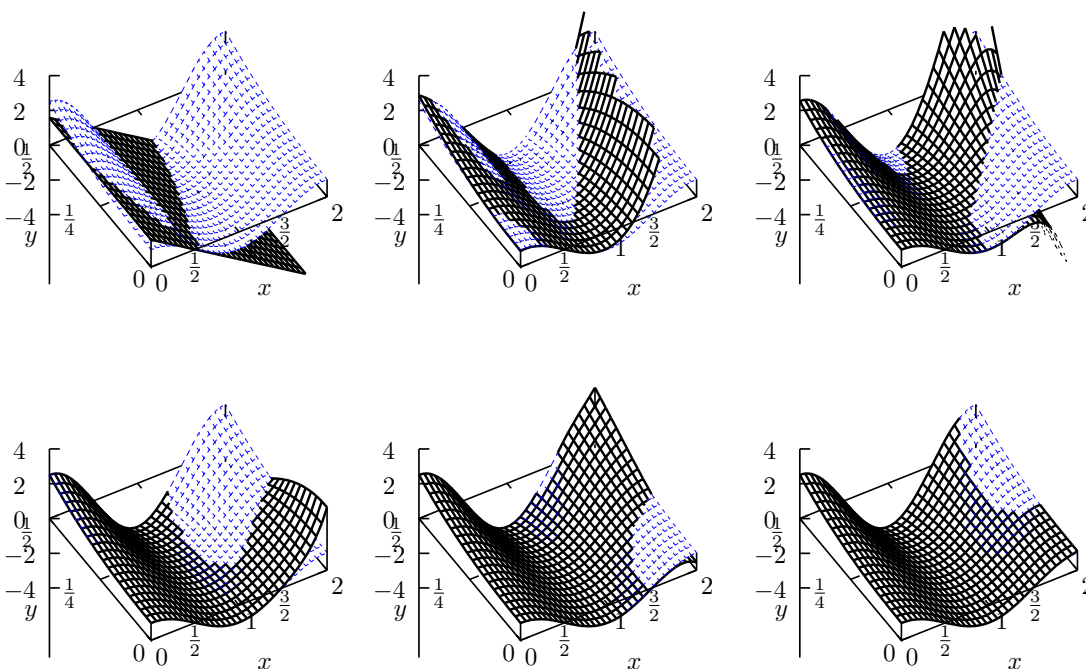
alrededor del punto  $z_0 = j$ .

**Solución:** La derivada de (2.46) puede calcularse de manera más fácil si se encuentra su representación en *fracciones parciales*:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2j}$$



**Figura 2.26:** Magnitud de la aproximación por medio de series de Taylor de la función  $\cos(\pi z)$  para (de izquierda a derecha, primera y luego segunda filas)  $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$  términos de la serie, respectivamente. Se han superpuesto la magnitud de la función  $\cos(\pi z)$  (línea punteada) con la aproximación correspondiente (línea gruesa).



**Figura 2.27:** Parte real de la aproximación por medio de series de Taylor de la función  $\cos(\pi z)$  para (de izquierda a derecha, primera y luego segunda filas)  $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11$  términos de la serie, respectivamente. Se han superpuesto la parte real de la función  $\cos(\pi z)$  (línea punteada) con la aproximación correspondiente (línea gruesa).

Multiplicando la ecuación anterior por  $z$  a ambos lados y haciendo  $z = 0$  se encuentra que  $A = -1/(2j)$ , y multiplicando por  $z - 2j$  y haciendo  $z = 2j$  se despeja  $B = 1/(2j)$  con lo que finalmente

$$f(z) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{z - 2j} - \frac{1}{z} \right)$$

Las derivadas y sus evaluaciones en  $z = j$  son entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{z - 2j} - \frac{1}{z} \right) & \Rightarrow f(j) &= 1 \\ f'(z) &= \frac{1}{2j} \left( -\frac{1}{(z - 2j)^2} + \frac{1}{z^2} \right) & \Rightarrow f'(j) &= 0 \\ f''(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{2}{(z - 2j)^3} - \frac{2}{z^3} \right) & \Rightarrow f''(j) &= -2 \\ f^{(3)}(z) &= \frac{1}{2j} \left( -\frac{6}{(z - 2j)^4} + \frac{6}{z^4} \right) & \Rightarrow f^{(3)}(j) &= 0 \\ f^{(4)}(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{24}{(z - 2j)^5} - \frac{24}{z^5} \right) & \Rightarrow f^{(4)}(j) &= 24 \end{aligned}$$

que se puede generalizar como

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n}{2j} \left( \frac{n!}{(z - 2j)^{n+1}} - \frac{n!}{z^{n+1}} \right) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2} n! & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Esto implica que el  $n$ -ésimo término de la serie de Taylor es

$$\frac{(z - j)^n}{n!} f^{(n)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{(z - j)^n}{n!} (-1)^{n/2} n! = (z - j)^n (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{z(z - j2)} = 1 - (z - j)^2 + (z - j)^4 - (z - j)^6 + \dots$$

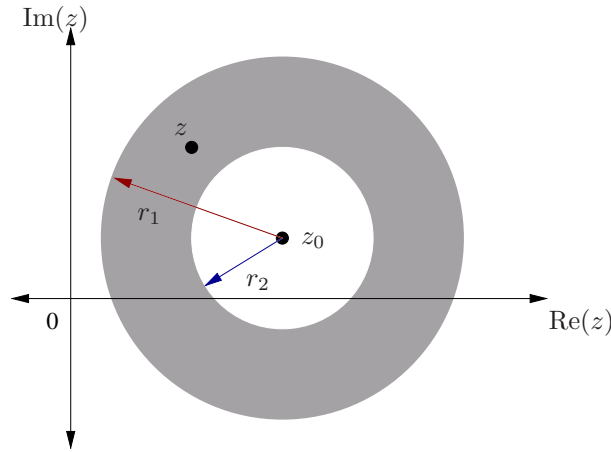
En este caso  $z_0 = j$ , y puesto que los dos puntos donde  $f(z)$  no está definido son  $z = 0$  y  $z = 2j$  el radio de convergencia es igual a uno. En otras palabras, la serie de Taylor anterior es válida solo para puntos  $z$  que se encuentren dentro de un círculo de radio uno centrado en  $j$ . 2.17

### 2.4.3 Series de Laurent

Ya se discutió anteriormente que las series de potencias de la forma descrita por (2.41) tienen su radio de convergencia centrado en  $z = \infty$ . Allí se excluyó  $z = z_0$  de la región de convergencia. En general aquellos puntos donde una función no es analítica (llamados también *singularidades*) no podrán ser utilizados como centros de los desarrollos en series de Taylor, puesto que las derivadas de la función no existen y por lo tanto no es posible obtener los coeficientes de la serie. En el ejemplo 2.15 se pudo observar además que la región de

convergencia siempre excluyó a la singularidad (ver figura 2.24). En ese ejemplo el radio de convergencia obtenido fue igual a la distancia entre el centro del desarrollo y la singularidad. En general, el desarrollo en serie de Taylor de una función  $f(z)$  centrado en  $z_0$  será válido solo dentro de una región circular que no contenga singularidades.

Las series de Laurent por otro lado constituyen una generalización de las series de potencia, donde la región de convergencia es ahora de forma anular que puede entonces excluir singularidades en su interior (figura 2.28). Puede demostrarse que para una región de convergencia



**Figura 2.28:** Región de convergencia anular de las series de Laurent

anular  $r_2 < |z - z_0| < r_1$  centrada en  $z_0$ , la función  $f(z)$  de variable compleja tendrá el desarrollo

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\
 &= \dots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} \\
 &\quad + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_k(z - z_0)^k + \dots
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

con  $c_i \in \mathbb{C}$ . Esta serie puede descomponerse como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.48}$$

donde la suma con coeficientes  $c_i$  para  $i < 0$  se denomina la *parte principal* de la serie de Laurent, y al segundo término se le conoce como parte de Taylor. Si  $f(z)$  es analítica para todos los puntos en el interior del círculo externo, es decir, para  $|z - z_0| < r_1$  entonces  $c_i = 0$  para  $i < 0$  y (2.48) conserva solo su segunda suma que equivale a la serie de Taylor.

De forma similar a las series de Taylor, la región anular de convergencia estará delimitada por lo general por puntos donde la función no está definida o no es analítica, conservando una región anular abierta que no contiene ninguna singularidad.



**Ejemplo 2.18** Calcule la serie de Laurent para la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$$

centrada en  $z_0 = 0$  y en  $z_0 = -1$ , para una región de convergencia anular.

**Solución:** Para el caso  $z_0 = 0$  se pueden utilizar los resultados del ejemplo 2.15 en su ecuación (2.42), con los que se obtiene que el factor  $1/(z+1)$  se puede expandir como

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

con radio de convergencia  $|z| < 1$ . El término en cuestión será entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(1+z)} &= \frac{1}{z^2}(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \dots \end{aligned}$$

donde ahora debe excluirse al 0 de la región de convergencia debido a los dos primeros términos de la serie.

Para el caso  $z_0 = -1$  se requiere expresar la serie de potencias en términos de  $(z+1)^k$ . Para ello puede procederse con el término

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z+1-1)^2} = \frac{1}{(z'-1)^2} = \frac{1}{z'^2 - 2z' + 1}$$

con  $z' = (z+1)$ . Puesto que hay otra singularidad en  $z = 0$ , la región de convergencia, para este término aislado, podría ser el exterior del círculo de radio 1 centrado en  $z = -1$ , o su interior. Puesto que se necesita una región de convergencia anular, se escoge el interior del círculo, para luego excluir el punto singular en  $z = -1$ . Realizando la división polinomial para obtener la región de convergencia  $|z'| < 1$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z'^2} &= 1 + 2z' + 3z'^2 + 4z'^3 + 5z'^4 + \dots \\ &= 1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + 4(z+1)^3 + 5(z+1)^4 + \dots \end{aligned}$$

con lo que la función original tiene una expansión de Laurent centrada en  $z_0 = -1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + 4(z+1)^3 + 5(z+1)^4 + \dots}{z+1} \\ &= \frac{1}{z+1} + 2 + 3(z+1) + 4(z+1)^2 + 5(z+1)^3 + \dots \end{aligned}$$

con región de convergencia  $0 < |z+1| < 1$ .

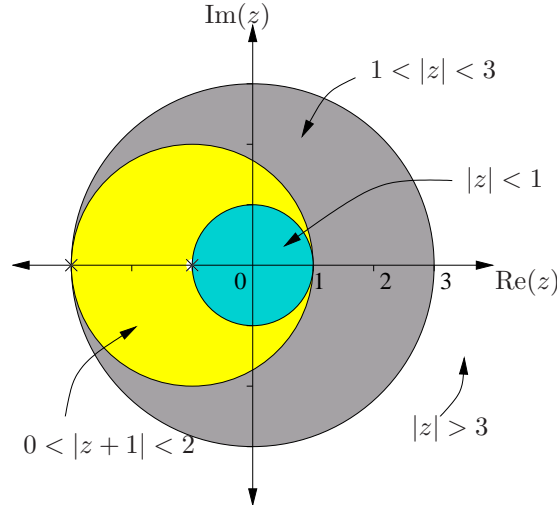
2.18

**Ejemplo 2.19** Determine la expansión en serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

para las regiones de convergencia (figura 2.29):

1.  $1 < |z| < 3$
2.  $|z| > 3$
3.  $0 < |z + 1| < 2$
4.  $|z| < 1$
5.  $|z - 1| < 2$



**Figura 2.29:** Cuatro regiones de convergencia para el ejemplo 2.19.

**Solución:** Esto puede solucionarse más fácilmente descomponiendo la función en fracciones parciales y aplicando los resultados del ejemplo 2.15.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+3)}$$

Multiplicando ambos lados por  $(z+1)$  y evaluando en  $z = -1$  se obtiene  $A = 1/2$ . Además, multiplicando ambos lados por  $(z+3)$  y evaluando en  $z = -3$  resulta  $B = -1/2$ , y por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right]$$

Para el primer término se tiene (por división polinomial) centrado el desarrollo en  $z_0 = 0$

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad \text{si } |z| < 1 \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \dots, \quad \text{si } |z| > 1 \quad (2.50)$$

mientras que el segundo término (también centrado en  $z_0 = 0$ ):

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}z + \frac{1}{3^3}z^2 - \frac{1}{3^4}z^3 + \dots, \quad \text{si } |z| < 3 \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} - \dots, \quad \text{si } |z| > 3 \quad (2.52)$$

Para el caso  $1 < |z| < 3$  se utiliza (2.50) y (2.51) que resulta en la serie de Laurent

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \dots - \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18}z - \frac{1}{54}z^2 + \frac{1}{162}z^3 - \dots$$

El caso  $|z| > 3$  utiliza (2.50) y (2.52) que resulta en la serie de Laurent centrada en  $z_0 = \infty$

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

El caso  $0 < |z+1| < 2$  está centrado en una singularidad por lo que debe procederse de diferente forma. El factor

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z+1)+2} = \frac{1}{z'+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z' + \frac{1}{2^3}z'^2 - \frac{1}{2^4}z'^3 + \dots$$

lo que implica que este factor se puede desarrollar centrado en  $z_0 = -1$  como

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(z+1) + \frac{1}{2^3}(z+1)^2 - \frac{1}{2^4}(z+1)^3 + \dots$$

por lo que se tiene finalmente el desarrollo

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots$$

El caso  $|z| < 1$  utiliza (2.49) y (2.51) que resulta en la serie de Laurent centrada en  $z_0 = 0$

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

que es a su vez una serie de Taylor.

En el último caso  $|z-1| < 2$  se centra la serie en 1, por lo que cada uno de los términos debe reevaluarse. Considerando que se requiere la convergencia solo para el interior del círculo se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-1+1+1} = \frac{1}{z'+2} = \frac{1}{2} - \frac{z'}{2^2} + \frac{z'^2}{2^3} - \frac{z'^3}{2^4} + \frac{z'^4}{2^5} - \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z-1}{2^2} + \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} + \frac{(z-1)^4}{2^5} - \dots \end{aligned}$$

y para el otro término

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{z-1+1+3} = \frac{1}{z'+4} = \frac{1}{4} - \frac{z'}{4^2} + \frac{z'^2}{4^3} - \frac{z'^3}{4^4} + \frac{z'^4}{4^5} - \dots \\ &= \frac{1}{4} - \frac{z-1}{4^2} + \frac{(z-1)^2}{4^3} - \frac{(z-1)^3}{4^4} + \frac{(z-1)^4}{4^5} - \dots \end{aligned}$$

y combinando ambos términos se obtiene<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{8} - \frac{3}{32}(z-1) + \frac{7}{128}(z-1)^2 - \frac{15}{512}(z-1)^3 + \frac{31}{2048}(z-1)^4 \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \frac{(-1)^k}{8} \left( \frac{2^{k+1}-1}{2^{2k}} \right) \end{aligned}$$

2.19

<sup>4</sup>Este resultado se puede obtener también por medio de la división polinomial de  $\frac{1}{(z'+2)(z'+4)} = \frac{1}{(z'+2)(z'+4)} = \frac{1}{z'^2+6z'+8}$  sustituyendo en el resultado  $z' = z-1$

## 2.5 Singularidades, ceros y residuos

### 2.5.1 Singularidades y ceros

Como *singularidad* de una función de variable compleja  $f(z)$  se conocen aquellos puntos del dominio de definición donde  $f(z)$  no es analítica. Esto puede ser ya sea porque la función se indefine, se hace infinita, o su derivada adquiere diferentes valores dependiendo de la dirección de derivación.

Cada punto del dominio de definición de  $f(z)$  se puede clasificar en términos del desarrollo en serie de Laurent. Si el desarrollo en serie centrado en  $z_0$ , donde  $z_0$  es un punto límite de la región de convergencia, tiene parte principal igual a cero, se dice entonces de  $z = z_0$  es un *punto regular*. Si la parte principal de este desarrollo contiene un número finito de términos, entonces a  $z_0$  se le denomina *polo*, por ejemplo:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_k(z - z_0)^k + \dots$$

En la representación anterior, al mayor exponente de la parte principal (es decir, a  $m$ ) se le denomina *orden del polo*, o expresado de otra forma, el orden del polo es número natural  $m$  para el que se cumple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m}$$

donde  $a_{-m}$  es finito y distinto de cero.

Una singularidad en  $z = z_0$  se denomina *esencial* si la parte principal de la serie de Laurent contiene un número infinito de términos.

Como *cero* de una función de variable compleja se conocen aquellos puntos regulares  $z = z_0$  donde  $f(z_0) = 0$ . El cero en  $z_0$  tiene orden  $n$  cuando no solo  $f(z)$ , sino también las siguientes  $n - 1$  derivadas de  $f(z)$  se hacen cero en  $z = z_0$ , es decir, si  $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$  pero  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Nótese que si se hace un desarrollo de Taylor para  $f(z)$  centrado en un cero de  $n$ -ésimo orden, entonces los primeros  $n$  términos  $a_0, \dots, a_{n-1}$  desaparecen y por tanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Si  $f(z)$  es analítica y tiene un cero en  $z_0$ , entonces el cero  $z_0$  está *aislado*, es decir, existe una vecindad de  $z_0$  que no contiene otros ceros adicionales. Esto se aprecia directamente en (2.53), pues si  $f(z)$  es analítica tiene entonces el allí indicado desarrollo de Taylor, donde el término entre paréntesis cuadrados, para valores de  $z$  muy cercanos a  $z_0$ , tenderá a  $a_n$  y por tanto será siempre diferente cero.

Las siguientes funciones presentan diferentes tipos de singularidades:

1.  $f(z) = 1 + 2z - 3z^2$  solo tiene puntos regulares.
2.  $f(z) = z^{-1}$  tiene un polo de primer orden en  $z = 0$ .

3.  $f(z) = (z - j)^{-2}$  tiene un polo de segundo orden en  $z = j$ .
4.  $f(z) = e^{1/(z+1)}$  tiene una singularidad esencial en  $z = -1$ .
5. La función

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z + j2)(z - 1)^3}$$

tiene un cero de primer orden en  $z = -1$ , un polo de primer orden en  $z = -j2$  y un polo de orden 3 en  $z = 1$ .

6. La función

$$f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$$

no está definida en  $z = 0$ . Sin embargo si se define la función  $\text{sa}(z)$  (también llamada  $\text{si}(z)$  o  $\text{senc}(z)$ ) como

$$\text{sa}(z) = \begin{cases} \frac{\text{sen } z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

entonces se obtiene una serie de Taylor

$$\begin{aligned} \text{sa}(z) &= \frac{1}{z} \left[ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \dots \end{aligned}$$

que es regular para todo  $z$  incluyendo a  $z = 0$ . La aparente singularidad en  $z = 0$  se dice en este caso que es *removable*. Esta función tiene ceros en  $z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

A una función  $f(z)$  se le denomina *meromorfa* si todas sus singularidades son polos.

Nótese que si la función  $f(z)$  puede representarse como un cociente de dos polinomios  $P(z)$  y  $Q(z)$ :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

entonces los ceros del polinomio  $Q(z)$  serán polos de la función meromorfa  $f(z)$ , y los ceros de  $P(z)$  serán ceros de  $f(z)$  siempre y cuando los ceros de  $P(z)$  y los ceros de  $Q(z)$  no coincidan. El orden de los ceros de  $Q(z)$  será a su vez el orden de los polos de  $f(z)$ . Para los desarrollos de Laurent de este tipo de funciones, las posibles regiones de convergencia estarán delimitadas siempre por los polos, es decir, los anillos de convergencia tendrán siempre en sus límites algún polo de la función.

## 2.5.2 Residuos

Si una función de variable compleja  $f(z)$  tiene un polo en  $z = z_0$  entonces el coeficiente  $a_{-1}$  de la serie de Laurent centrada en  $z_0$ , en una región de convergencia donde  $z_0$  es un punto límite, se denomina *residuo* de  $f(z)$  en  $z = z_0$ .

En la sección 2.6.4 se demostrará la importancia de los residuos, cuyo cálculo puede realizarse sin tener que obtener el desarrollo completo de la serie Laurent. Por ejemplo, si  $f(z)$  tiene

un solo polo simple en  $z_0$ , entonces su desarrollo en serie de Laurent es:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $(z - z_0)$  y haciendo tender  $z$  hacia  $z_0$  se obtiene:

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$$

Si la función  $f(z)$  tiene un polo de orden dos en  $z = z_0$  entonces su desarrollo de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

y para aislar el residuo  $a_{-1}$  puede ahora multiplicarse ambos lados por  $(z - z_0)^2$  seguido de una derivación:

$$\begin{aligned} (z - z_0)^2 f(z) &= a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + a_1(z - z_0)^3 + \dots \\ \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] &= a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + 4a_2(z - z_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

con lo que finalmente se puede obtener el residuo  $a_{-1}$  por medio de

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) \right] \quad (2.54)$$

Este proceso puede continuarse para polos de orden superior, con lo que se obtiene que, si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_0$  entonces el residuo estará dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\} \quad (2.55)$$

**Ejemplo 2.20** Determine el residuo de

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2 + 1)(2z - 1)}$$

en cada uno de sus polos.

**Solución:** Representando  $f(z)$  en forma normalizada se tiene que

$$f(z) = \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})}$$

Así, para el residuo en  $z = j$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow j} (z - j) \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow j} \frac{z}{(z + j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{j}{2j(j - \frac{1}{2})} = -\frac{1 + 2j}{5} \end{aligned}$$

Para el residuo en  $z = -j$  de forma equivalente

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow -j} (z + j) \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow -j} \frac{z}{(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{-j}{-2j(-j - \frac{1}{2})} = -\frac{1 - 2j}{5} \end{aligned}$$

y finalmente para  $z = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \left( z - \frac{1}{2} \right) \frac{z}{(z + j)(z - j)(z - \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{z}{(z + j)(z - j)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2} - j)(\frac{1}{2} + j)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2.20

**Ejemplo 2.21** Determine los residuos de

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z^2 + 4)}$$

en cada uno de sus polos en el plano  $z$ .

**Solución:** La función puede reescribirse como

$$f(z) = \frac{z(z - 2)}{(z + 1)^2(z - 2j)(z + 2j)}$$

lo que implica que  $f(z)$  tiene polos simples en  $z = 2j$  y  $z = -2j$  y un polo doble en  $z = -1$ . Además la función tiene un cero en  $z = 0$  y otro en  $z = 2$ . Para los dos primeros polos se procede de la misma manera que en el ejemplo anterior. Para el polo  $z = 2j$ .

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 2j} (z - 2j) \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z - 2j)(z + 2j)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z + 2j)} \\ &= \frac{-4 - 4j}{(2j + 1)^2 4j} = \frac{1}{25}(7 + j) \end{aligned}$$

Para el polo  $z = -2j$ .

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow -2j} (z + 2j) \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z - 2j)(z + 2j)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2j} \frac{z^2 - 2z}{(z + 1)^2(z - 2j)} \\ &= \frac{-4 + 4j}{-(-2j + 1)^2 4j} = \frac{1}{25}(7 - j) \end{aligned}$$

Para el polo doble en  $z = -1$  se utiliza la ecuación (2.55), con lo que

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[ (z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25} \end{aligned}$$

2.21

La ecuación (2.55) es aplicable siempre y cuando el número de términos en la parte principal sea finito, es decir, aplica para polos. En el caso de singularidades esenciales debe encontrarse el residuo desarrollando la serie, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.22** Encuentre los residuos de la función  $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$  en  $z = 0$  y  $z = 1$ , e indique qué tipo de puntos son éstos.

**Solución:**

El punto  $z = 0$  es un punto regular ( $f(0) = 1/e$ ), puesto que la función es holomorfa allí, y por tanto tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en  $z = 0$ , es decir, la parte principal de la serie de Laurent correspondiente es cero y por tanto el residuo de dicho punto es igual a  $a_{-1} = 0$ .

El punto  $z = 1$  corresponde a una singularidad esencial, puesto que  $e^{z'}$  tiene como serie de Taylor

$$e^{z'} = 1 + \frac{z'}{1!} + \frac{z'^2}{2!} + \frac{z'^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$$

y con  $z' = 1/(z-1)$  se obtiene la serie

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z-1}} &= 1 + \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-n}}{n!} \end{aligned}$$

de donde se observa que la parte principal es de longitud infinita, con el coeficiente del término  $1/(z-1)$  igual a  $a_{-1} = 1$  que corresponde al residuo en  $z = 1$ .

2.22

## 2.6 Integración compleja

En el cálculo integral de funciones de variable real se distingue entre integrales definidas e integrales indefinidas o antiderivadas. Las integrales indefinidas tienen la propiedad:

$$F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La continuación analítica de lo anterior puede utilizarse para definir las integrales *indefinidas* de variable compleja:

$$F(z) = \int f(z) dz \Rightarrow \frac{d}{dz} F(z) = f(z)$$

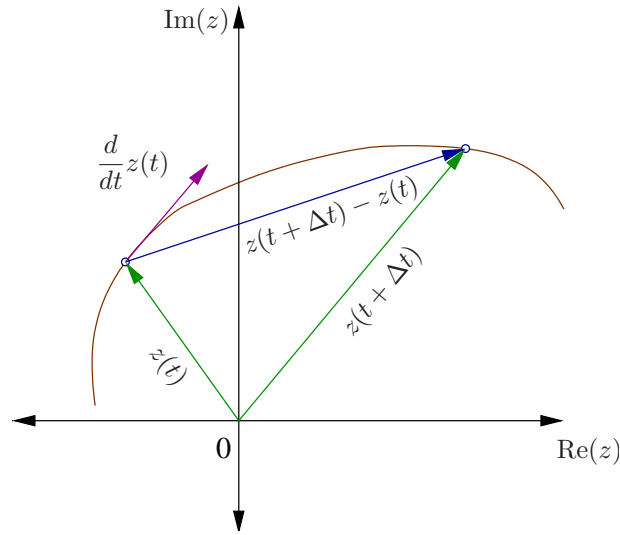


Por otro lado, mientras que la integración *definida* para funciones de variable real ocurre dentro de intervalos cerrados en el eje real  $[a, b] \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

en el caso de funciones de variable compleja debe elegirse primero la *trayectoria de integración*  $C$ , que puede por ejemplo representarse de forma paramétrica como

$$C = \{z : z(t) = x(t) + jy(t), t_a \leq t \leq t_b\}$$



**Figura 2.30:** Tangente a trayectoria de integración

La tangente en cada punto de esta curva  $C$  se puede calcular por medio de la derivada de su función paramétrica con respecto a  $t$  (figura 2.30):

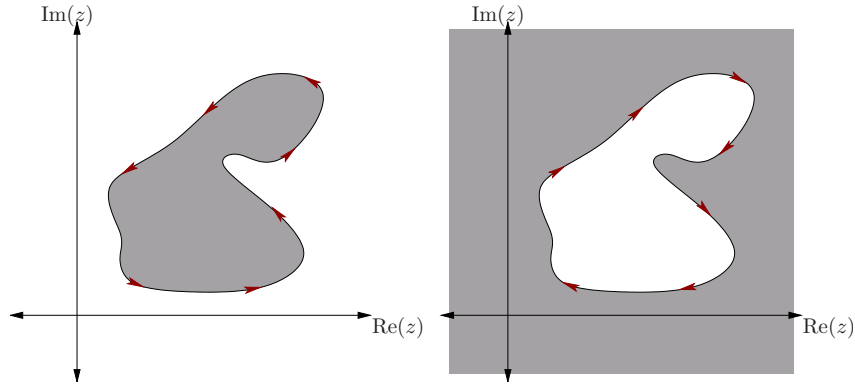
$$\frac{d}{dt}z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

Si esta derivada  $dz(t)/dt$  existe, es diferente de cero, y es continua para un subintervalo de  $[t_a, t_b]$ , entonces se dice que la trayectoria  $z(t)$  describe una curva *suave*.

Una trayectoria de integración se llamará *cerrada* si  $z(t_a) = z(t_b)$ , es decir, si el punto inicial es idéntico al punto final, y se denomina *simple* si para todo par de valores  $t_1, t_2 \in ]t_a, t_b[$  con  $t_1 \neq t_2$  se cumple  $z(t_1) \neq z(t_2)$  y además  $z(t_1) \neq z(t_a)$ ,  $z(t_2) \neq z(t_b)$ , es decir, si no hay intersecciones en la curva descrita. Una curva simple y cerrada se denomina *curva de Jordan* y tiene la propiedad de partir el plano en dos conjuntos disjuntos: uno acotado y otro ilimitado. La región acotada por una curva de Jordan se denomina *convexa*, si cualesquiera dos puntos dentro de ella pueden ser unidos por exactamente un segmento de recta que contiene solo puntos de la región.

Una curva de Jordan se dice tener sentido positivo si los puntos de la región acotada se encuentran al lado izquierdo de la trayectoria que se describe conforme  $t$  aumenta. Si la

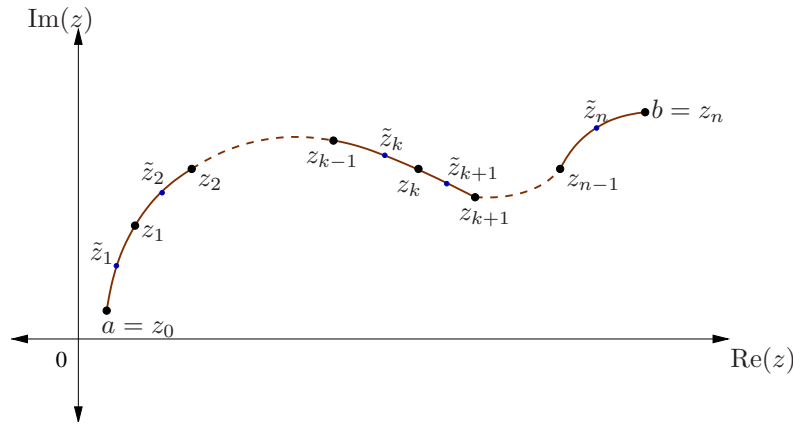
curva de Jordan delimita una región convexa, el sentido positivo es equivalente a decir que, si  $t$  aumenta, entonces la trayectoria descrita sigue el sentido contrario a las manecillas del reloj (figura 2.31). La curva de Jordan tiene sentido negativo si al lado izquierdo de la trayectoria se encuentran los puntos de la región ilimitada.



**Figura 2.31:** En sentido positivo la trayectoria tiene su izquierda una región acotada, mientras que el sentido negativo tiene a su izquierda una región ilimitada.

### 2.6.1 Integrales de contorno

Sea  $f(z)$  una función compleja, continua en todos los puntos de una curva simple  $C$  de longitud finita que une a los puntos  $a$  y  $b$ . La curva se subdivide en  $n$  segmentos a través de los puntos  $\{z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = b\}$ , y se coloca un punto  $\tilde{z}_k$  sobre cada uno de los segmentos  $z_{k-1} z_k$  (figura 2.32). Con esta subdivisión puede hacerse una suma de integración



**Figura 2.32:** Partición de la curva  $C$  en  $n$  segmentos.

de forma análoga al caso de funciones de variable real:

$$S_n = f(\tilde{z}_1)(z_1 - z_0) + f(\tilde{z}_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\tilde{z}_n)(z_n - z_{n-1}) \quad (2.56)$$

Si se denota  $z_k - z_{k-1}$  como  $\Delta z_k$  entonces la suma anterior se puede expresar como

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k \quad (2.57)$$

Si  $n$  se hace crecer de tal modo que la magnitud del mayor intervalo  $|\Delta_k|$  se aproxime a un diferencial  $dz$  infinitesimalmente pequeño, entonces la suma  $S_n$  se aproximará a un valor que no depende de la subdivisión de la curva, denominado *integral de contorno* o *integral de línea* de  $f(z)$  a lo largo de  $C$ , denotado como

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k$$

La notación

$$\oint_C f(z) dz$$

con un pequeño círculo en el centro de la integral se utiliza para representar el caso especial en que la trayectoria de integración es cerrada, es decir, el punto inicial  $a$  es igual al punto final  $b$ .

Si se utiliza  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , con  $z = x + jy$  entonces la integral anterior puede expresarse como

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C [u(x, y) + jv(x, y)] (dx + jdy) \\ &= \int_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \int_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \end{aligned} \quad (2.58)$$

que corresponden con integrales de línea de variable real. Estas integrales pueden calcularse utilizando la expresión paramétrica de  $C$ , de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} [u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))] \left( \frac{d}{dt}x(t) + j \frac{d}{dt}y(t) \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left[ u(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}x(t) - v(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}y(t) \right] dt \\ &\quad + j \int_{t_a}^{t_b} \left[ v(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}x(t) + u(x(t), y(t)) \frac{d}{dt}y(t) \right] dt \end{aligned} \quad (2.59)$$

**Ejemplo 2.23** Encuentre el valor de la integral de línea

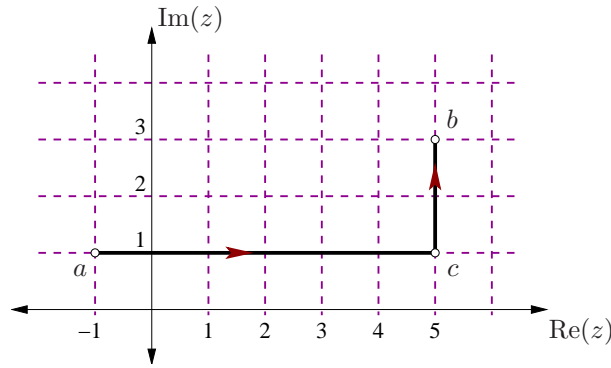
$$\int_C z^2 dz$$

para la trayectoria de integración  $C$  de  $a = (-1 + j)$  a  $b = (5 + j3)$  formada por dos segmentos de recta, de  $a = (-1 + j)$  a  $c = (5 + j)$  y el segundo de  $c = (5 + j)$  a  $b = (5 + j3)$ .

**Solución:** Nótese que el primer segmento  $ac$  es horizontal y el segundo  $cb$  es vertical (figura 2.33).

Como

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy)$$



**Figura 2.33:** Trayectoria de integración  $C$  para el ejemplo 2.23.

entonces con (2.58)

$$I = \int_C z^2 dz = \int_C [(x^2 - y^2) dx - 2xy dy] + j \int_C [(2xy dx + (x^2 - y^2) dy)]$$

Esta integral se puede separar como la suma de las integrales en los dos segmentos  $I = I_{ac} + I_{cb}$ . Para el primero de ellos, por ser horizontal se tiene que  $y$  es constante ( $y = 1$ ) y por tanto  $dy = 0$ :

$$\begin{aligned} I_{ac} &= \int_{-1}^5 (x^2 - 1) dx + j \int_{-1}^5 2x dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-1}^5 + j [x^2]_{-1}^5 = 36 + j24 \end{aligned}$$

El segundo segmento  $cb$  es vertical con  $x$  constante ( $x = 5$ ) y por tanto  $dx = 0$ :

$$\begin{aligned} I_{cb} &= \int_1^3 -10y dy + j \int_1^3 (25 - y^2) dy \\ &= [-5y^2]_1^3 + j \left[ 25y - \frac{1}{3}y^3 \right]_1^3 \\ &= -40 + j\frac{124}{3} \end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_C z^2 dz = I_{ac} + I_{cb} = (36 + j24) + \left( -40 + j\frac{124}{3} \right) = -4 + j\frac{196}{3}$$

2.23

En el ejemplo anterior el integrando es analítico en todo el plano complejo  $z$ . En dicho caso siempre se va a cumplir que si la integral indefinida de  $f(z)$  es  $F(z)$ , entonces el valor de la integral

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a)$$

donde  $a$  y  $b$  son los puntos inicial y final de la curva  $C$  respectivamente. El lector puede verificar el resultado anterior conociendo que  $F(z) = z^3/3$ .

**Ejemplo 2.24** Encuentre la integral de  $f(z) = 1/(z - z_0)$  con una trayectoria circular de radio  $r$  alrededor del punto constante complejo  $z_0$ .

**Solución:** El cálculo de esta integral se puede simplificar haciendo uso de la sustitución de variable  $\tilde{z} = z - z_0$ . Puesto que  $d\tilde{z} = dz$  entonces

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z}$$

donde  $\tilde{C}$  es entonces ahora una trayectoria circular de radio  $r$  alrededor del origen del plano  $\tilde{z}$ . Esta circunferencia se puede representar paramétricamente como

$$\tilde{z}(t) = r \cos t + jr \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y su derivada es por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) &= -r \sin t + jr \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ &= j^2 r \sin t + jr \cos t \\ &= j(r \cos t + jr \sin t) \\ &= j\tilde{z}(t) \end{aligned}$$

Utilizando (2.59) se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} d\tilde{z}(t) &= \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cos t + jr \sin t} j(r \cos t + jr \sin t) dt = j \int_0^{2\pi} dt = 2\pi j \end{aligned}$$

De forma equivalente, la integral anterior se puede obtener utilizando como parametrización de la circunferencia  $\tilde{z}(t) = re^{jt}$ , con derivada  $d\tilde{z}(t)/dt = jre^{jt} = j\tilde{z}(t)$ . Entonces

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} d\tilde{z}(t) = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} jre^{jt} dt = j \int_0^{2\pi} dt = 2\pi j$$

Nótese que si se integrara en sentido de las manecillas del reloj (por ejemplo utilizando  $t$  de 0 a  $-2\pi$ ), entonces el resultado de esta integral sería  $-2\pi j$ .

En resumen, si se integra en una trayectoria circular centrada en un polo simple, en sentido contrario a las manecillas del reloj, el valor de la integral es  $2\pi j$ , independientemente del radio de dicha trayectoria circular y de la ubicación del polo. 2.24

**Ejemplo 2.25** Encuentre la integral de  $f(z) = 1/(z - z_0)^n$ , para  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$  alrededor de una circunferencia de radio  $r$ .

**Solución:** Prosiguiendo como en el ejemplo anterior se reemplaza primero  $\tilde{z} = z - z_0$  y  $d\tilde{z} = dz$ , lo que también traslada la trayectoria circular al origen de  $\tilde{z}$ . De esta forma se utiliza como curva:

$$\tilde{z}(t) = re^{jt}, \quad \frac{d}{dt} \tilde{z}(t) = jre^{jt} = j\tilde{z}(t)$$

y considerando que  $n \neq 1$  entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{(\tilde{z}(t))^n} d\tilde{z}(t) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{jnt}} j r e^{jt} dt \\ &= j r^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{jt(1-n)} dt = j r^{1-n} \frac{e^{jt(1-n)}}{j(1-n)} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{r^{1-n}}{1-n} (e^{j(1-n)2\pi} - 1) = 0 \end{aligned}$$

puesto que  $(1-n)$  es entero y  $e^{j2k\pi} = 1$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Resumiendo, y considerando el resultado del ejemplo anterior:

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \quad (2.60)$$

para una trayectoria de integración circular cerrada  $C$  centrada en el polo  $z_0$  y en sentido positivo (sentido contrario a las manecillas del reloj). 2.25

Volviendo a la definición de la suma integral (2.57), si se asume que la magnitud de la función  $f(z)$  nunca supera el valor de una constante positiva  $M$ , es decir  $|f(z)| \leq M$  para todo valor de  $z$  sobre la trayectoria de integración  $C$ , entonces, aplicando la desigualdad de Minkowski se obtiene:

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\tilde{z})| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$$

donde  $|\Delta z_k|$  representa la longitud del segmento de recta entre  $z_k$  y  $z_{k-1}$ , por lo que

$$\lim_{\Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| = L$$

denota la longitud  $L$  de la trayectoria de integración  $C$ . Esto implica

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad (2.61)$$

es decir, la magnitud de la integral de contorno sobre la curva  $C$  es siempre menor al producto del mayor valor de la magnitud de la función  $M \geq |f(z)|$  y la longitud  $L$  de la curva  $C$ . A esta importante propiedad se le denomina la *desigualdad ML* y se utilizará en varias demostraciones posteriores.

### 2.6.2 Teorema de la integral de Cauchy

El *Teorema de la integral de Cauchy* establece que si  $f(z)$  es una función analítica con derivada  $f'(z)$  continua en todos los puntos dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$ , entonces se cumple

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (2.62)$$

Para demostrar este teorema se parte del hecho de que  $f(z = x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  es analítica dentro y sobre  $C$  y su derivada  $f'(z)$  es continua, lo que permite asumir que

también  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  tienen derivadas parciales continuas en la misma región definida por  $C$ . Por estas razones es posible aplicar el Teorema de Green (ver apéndice A) que establece bajo las condiciones dadas que

$$\oint_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) = \iint_R \left( -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.63)$$

donde  $R$  es la región acotada por  $C$ . El lado derecho de este teorema sigue el mismo patrón que ambos sumandos en la ecuación (2.58) si  $C$  se elige cerrada:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \oint_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \\ &= \iint_R \left( -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy + j \iint_R \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0 + j0 \end{aligned}$$

donde se ha considerado que  $f(z)$  es analítica y por lo tanto se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que los integrandos de la última expresión son cero. Puede demostrarse que este teorema sigue siendo válido aún sin la restricción de continuidad de  $f'(z)$ , en cuyo caso recibe el nombre de teorema de Cauchy-Goursat o teorema fundamental de integración compleja.

El teorema de la integral de Cauchy junto con el ejemplo 2.25, donde se encontró (2.60) permiten observar que, para que el valor de una integral de contorno cerrada sea cero, el hecho de que la función sea analítica es una condición suficiente, pero no necesaria.

Una de las consecuencias más importantes del teorema de la integral de Cauchy es la independencia de la trayectoria de integración de un punto  $a$  a un punto  $b$  para una integral de contorno si el integrando es una función analítica. Esto se observa eligiendo dos puntos cualesquiera sobre una curva cerrada sobre y dentro de la cual la función  $f(z)$  es analítica (figura 2.34). Puesto que

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

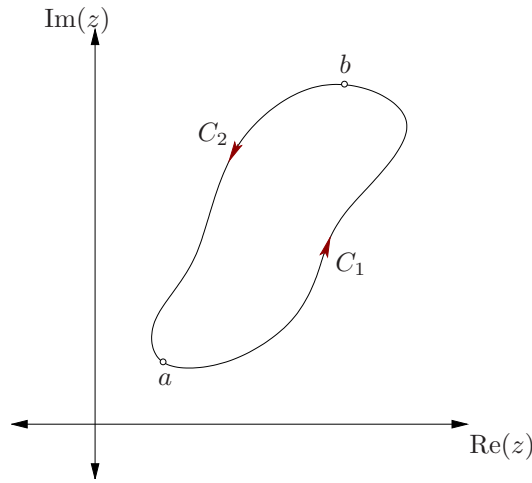
donde considerando que si se invierte la dirección de, por ejemplo  $C_2$ , lo que se denota por  $-C_2$  y, como  $C_1$ , también va de  $a$  hacia  $b$ , entonces

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{-C_2} f(z) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{-C_2} f(z) dz$$

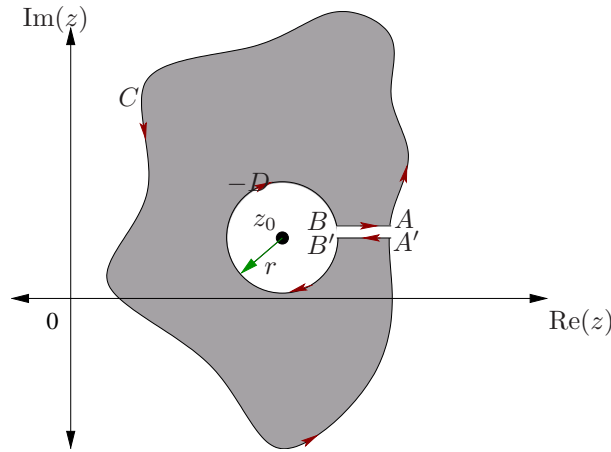
En la práctica se utilizan con frecuencia funciones polinomiales racionales, como por ejemplo

$$f_1(z) = \frac{1}{z - z_0}, \quad f_2(z) = \frac{z}{(z - z_0)^2(z + z_1)}$$

que contienen singularidades del tipo polos. Para poder evaluar integrales con estas funciones se utiliza normalmente una deformación de la trayectoria de Jordan que evita incluir la singularidad dentro de la región acotada, tal y como lo muestra la figura 2.35. El ancho del



**Figura 2.34:** Independencia de integración de  $a$  hacia  $b$  con respecto a la trayectoria



**Figura 2.35:** Deformación del contorno para evitar una singularidad.

canal entre  $BA$  y  $B'A'$  se elige infinitesimalmente pequeño, de tal modo que el segmento de  $B$  a  $A$  es prácticamente idéntico al que va de  $A'$  a  $B'$  pero en sentido contrario. El segmento de curva  $D$  puede ser, por ejemplo, un círculo cerrado de radio  $r$ , centrado en la singularidad, pero recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj. El contorno  $C$  es un segmento de curva también prácticamente cerrado. Nótese que el interior de la región siempre se encuentra al lado izquierdo en el sentido de la trayectoria. Por el Teorema de la integral de Cauchy, la integral por esta trayectoria debe ser cero, por lo que

$$\oint_C f(z) dz + \int_{A'B'} f(z) dz + \oint_{-D} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0$$

donde el signo en  $-D$  denota que el sentido de la trayectoria es negativo (en el sentido de las manecillas del reloj).

Puesto que  $A'B'$  y  $BA$  son prácticamente el mismo segmento, se cumple

$$\int_{A'B'} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz$$



y considerando que

$$\oint_{-D} f(z) dz = - \oint_D f(z) dz$$

entonces

$$\oint_C f(z) dz = \oint_D f(z) dz \quad (2.64)$$

es decir, el valor de la integral de contorno alrededor de un polo es independientemente de la trayectoria de integración elegida para rodear al polo.

**Ejemplo 2.26** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z - (2 + j)} dz$$

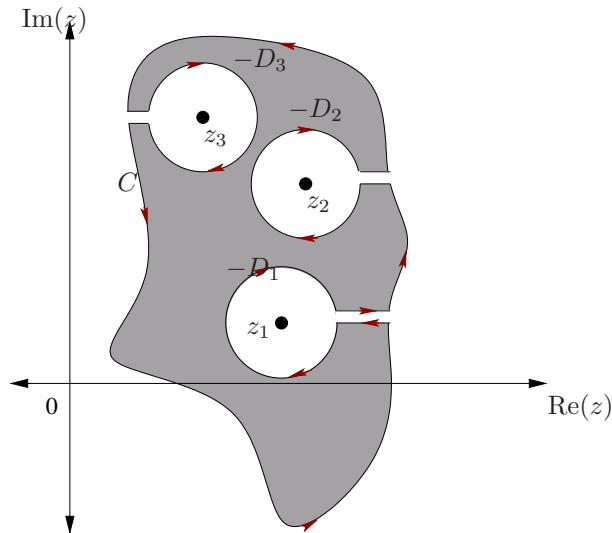
alrededor de cualquier contorno cerrado que incluya a  $z = 2 + j$ .

**Solución:** Haciendo un cambio de variable  $\tilde{z} = z - (2 + j)$  se tiene  $d\tilde{z} = dz$  y la ecuación anterior se reduce a:

$$\oint_C \frac{1}{z - (2 + j)} dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z}$$

Considerando la ecuación (2.64), esta integral es igual a integrar en un círculo de un radio  $r$  suficientemente pequeño para estar incluido en la región delimitada por  $\tilde{C}$ . La ecuación (2.60) indica entonces que el valor de esta integral es  $2\pi j$ . 2.26

En general, si la curva  $C$  encierra a varias singularidades, se puede proceder de forma análoga al principio anterior y evadir las singularidades como lo muestra la figura 2.36, con lo que se



**Figura 2.36:** Deformación del contorno para evitar varias singularidades.

obtiene para  $n$  singularidades dentro de  $C$ :

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{D_1} f(z) dz + \oint_{D_2} f(z) dz + \oint_{D_3} f(z) dz + \dots + \oint_{D_n} f(z) dz \quad (2.65)$$

**Ejemplo 2.27** Encuentre el valor de la integral de contorno cerrado de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+j)}$$

si la trayectoria de integración

1. contiene a ambas singularidades
2. contiene a  $z = -j$ , pero no a  $z = 1$

**Solución:** La integral se simplifica si se separa el integrando en fracciones parciales:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1-j}{(z-1)} + \frac{1+j}{(z+j)} \right]$$

puesto que ahora la integral se puede reescribir como

$$\oint_C f(z) dz = \frac{1}{2} \left[ (1-j) \underbrace{\oint_C \frac{1}{z-1} dz}_{I_1} + (1+j) \underbrace{\oint_C \frac{1}{z+j} dz}_{I_2} \right]$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  se pueden calcular fácilmente considerando resultados anteriores.

Para el caso en que  $C$  encierra ambos polos entonces  $I_1 = I_2 = 2\pi j$  y así:

$$\oint_C f(z) dz = \frac{2\pi j}{2} 2 = 2\pi j$$

Para el caso en que  $C$  solo encierra a  $z = -j$  entonces  $I_1$  es cero por el teorema de Cauchy e  $I_2 = 2\pi j$ , lo que resulta en

$$\oint_C f(z) dz = \frac{2\pi j}{2} (1+j) = \pi(-1+j)$$

2.27

### 2.6.3 Fórmula de la integral de Cauchy

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre un contorno de integración simple y conexo  $C$ . Si  $z_0$  se encuentra dentro de  $C$  entonces

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi j f(z_0) \quad (2.66)$$

o lo que es equivalente

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad (2.67)$$

Esta llamada *Fórmula de la integral de Cauchy* puede demostrarse sustituyendo en el lado izquierdo de (2.66)

$$f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$$

lo que resulta en

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

El ejemplo 2.24 junto con el resultado en (2.64) muestra que la integral en el primer sumando del lado derecho de la ecuación es igual a  $2\pi j$ , por lo que ahora corresponde demostrar que la segunda integral es igual a cero. Puesto que el integrando es analítico en todo  $z \neq z_0$ , entonces se puede deformar el contorno de integración para excluir a  $z_0$ , tal y como se mostró en la figura 2.35. Como  $f(z)$  es analítica en  $z = z_0$  entonces es también continua, por lo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad .$$

Esto quiere decir que la distancia entre  $f(z)$  y  $f(z_0)$  se podrá hacer arbitrariamente pequeña ( $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ ) acercando cuanto sea necesario  $z$  a  $z_0$  ( $|z - z_0| < \delta$ ):

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Si se elige entonces el círculo  $D$  que excluye a  $z_0$  en el contorno deformado, con un radio  $r$  menor que  $\delta$ , y además se toma  $\delta = |z - z_0|$ , entonces se cumplen las desigualdades

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\delta} < \frac{\epsilon}{r}$$

y puesto que la longitud de la trayectoria circular de integración  $D$  es  $2\pi r$  entonces por la desigualdad  $ML$  (2.61), y considerando (2.64) se tiene

$$\left| \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_D \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon$$

y como lo anterior debe ser válido para cualquier valor positivo de  $\epsilon$ , incluyendo aquellos arbitrariamente pequeños, se concluye que la integral

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

con lo que la fórmula de la integral de Cauchy queda demostrada.

En las siguientes secciones será necesario utilizar una fórmula similar a la anterior, pero con el polo introducido de orden superior a uno. Para encontrar el valor de esta integral se calculará ahora la derivada por definición, es decir

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Utilizando la fórmula integral de Cauchy (2.67), se pueden reemplazar los términos en el numerador del límite considerando una curva  $C$  que encierra al punto  $z_0$ , dentro y sobre la cual  $f(z)$  es analítica:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \left[ \oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi j \Delta z} \oint_C \left[ \frac{f(z)(z - z_0) - f(z)(z - (z_0 + \Delta z))}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} dz \end{aligned}$$

Si  $\Delta z$  se hace tender a cero, entonces el último término parece tender a

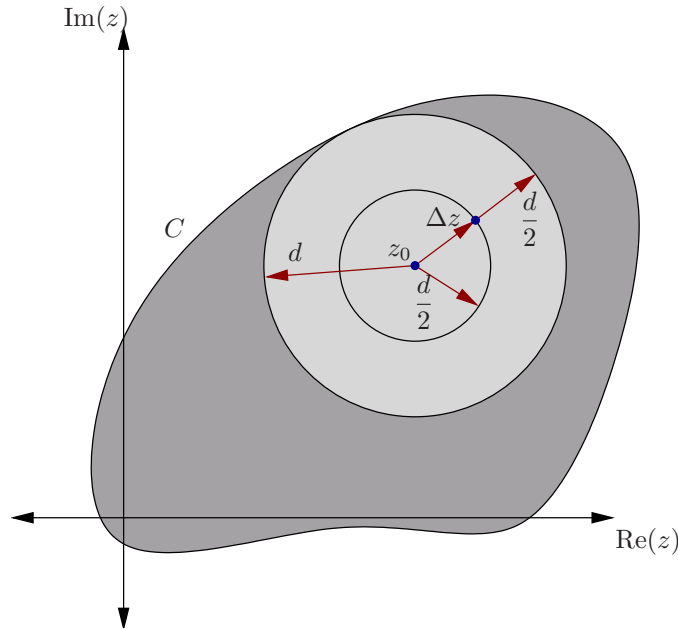
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

lo que puede corroborarse observando la tendencia de la resta

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)^2} dz$$

cuando  $\Delta z$  se aproxima a cero. Puesto que  $f(z)$  es analítica sobre  $C$ , quiere decir que su magnitud está acotada y entonces  $|f(z)| \leq M$ . Si  $d$  es la distancia mínima entre  $z_0$  y los puntos  $z \in C$  (ver figura 2.37) entonces se cumple para todos los puntos  $z$  sobre  $C$

$$|z - z_0|^2 \geq d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2}$$



**Figura 2.37:** Ayuda gráfica para comprender demostración de generalización de la fórmula integral de Cauchy.

Además, puesto que  $\Delta z$  se está haciendo tender a cero, entonces puede elegirse  $|\Delta z|$  tal que sea menor o igual que  $d/2$ , entonces para todo  $z \in C$  se cumple (figura 2.37):

$$|z - (z_0 + \Delta z)| \geq \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z - (z_0 + \Delta z)|} \leq \frac{2}{d}$$

Si la longitud de  $C$  es  $L$ , entonces por la desigualdad  $ML$  (2.61) se tiene

$$\left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - (z_0 + \Delta z))(z - z_0)^2} dz \right| \leq M|\Delta z| \frac{2}{d} \frac{1}{d^2} L = \frac{2ML}{d^3} |\Delta z|$$

que tiende a cero si  $|\Delta z| \rightarrow 0$ . Por lo tanto se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

De hecho, este resultado puede utilizarse para demostrar de forma similar al procedimiento anterior que también se cumple:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

y en general

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

que también puede escribirse como:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \frac{2\pi j}{n!}$$

Un resultado importante de las derivaciones anteriores es que si una función es analítica en un dominio  $R$ , entonces tiene derivadas de *todos* los órdenes también en  $R$ , que son a su vez funciones analíticas en el mismo dominio y que estarán dadas para un punto  $z_0$  en  $R$  por (2.68). Esto es una diferencia fundamental con las funciones derivables de variable real, en cuyo caso no puede concluirse nada acerca de la existencia de derivadas de ordenes superiores si la función es derivable.

**Ejemplo 2.28** Encuentre el valor de la integral de contorno cerrado de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z - 1)(z + j)}$$

si la trayectoria de integración contiene a ambas singularidades.

**Solución:** Por medio de (2.65) la integral se calcula como:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{D_1} f(z) dz + \oint_{D_2} f(z) dz$$

donde  $D_1$  contiene solo a  $z = 1$  y  $D_2$  solo a  $z = -j$ .

El primer término se puede escribir entonces como

$$\oint_{D_1} f(z) dz = \oint_{D_1} \frac{z}{(z - 1)(z + j)} dz = \oint_{D_1} \frac{\frac{z}{(z + j)}}{z - 1} dz$$

lo que ahora se puede calcular utilizando la fórmula integral de Cauchy como

$$\oint_{D_1} f(z) dz = 2\pi j \left( \frac{z}{z + j} \Big|_{z=1} \right) = 2\pi j \frac{1}{1 + j} = \pi(1 + j)$$

El segundo término se resuelve de forma análoga:

$$\oint_{D_2} f(z) dz = \oint_{D_2} \frac{z}{(z - 1)(z + j)} dz = \oint_{D_2} \frac{\frac{z}{(z - 1)}}{z + j} dz$$

y con la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{D_2} f(z) dz = 2\pi j \left( \frac{z}{z-1} \Big|_{z=-j} \right) = 2\pi j \frac{-j}{-j-1} = \pi(-1+j)$$

De forma tal que

$$\oint_C f(z) dz = \pi(1+j-1+j) = 2\pi j$$

que coincide con el resultado obtenido anteriormente en el ejemplo 2.27.

2.28

### 2.6.4 Teorema del Residuo

Sea  $f(z)$  una función analítica excepto en un número finito de singularidades dentro de la región  $S$  delimitada por la curva  $C$ . Si el contorno se deforma para excluir a las singularidades, entonces

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_{D_1} f(z) dz + \oint_{D_2} f(z) dz + \dots + \oint_{D_n} f(z) dz$$

donde  $D_i$  es una pequeña región circular que evade a la singularidad  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (figura 2.36). Asíumase que  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_i$ , lo que conduce a un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}^{(i)}}{(z-z_i)^m} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z-z_i} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z-z_i) + \dots + a_k^{(i)}(z-z_i)^k + \dots$$

válida en el anillo  $r_i < |z-z_i| < R_i$ .

Ahora, si se integra en el círculo  $D_i$  que rodea a  $z_i$  se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{D_i} f(z) dz &= \oint_{D_i} \left[ \frac{a_{-m}^{(i)}}{(z-z_i)^m} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z-z_i} \right. \\ &\quad \left. + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z-z_i) + \dots + a_k^{(i)}(z-z_i)^k + \dots \right] dz \\ &= a_{-m}^{(i)} \oint_{D_i} \frac{1}{(z-z_i)^m} dz + \dots + a_{-1}^{(i)} \oint_{D_i} \frac{1}{z-z_i} dz \\ &\quad + a_0^{(i)} \oint_{D_i} dz + a_1^{(i)} \oint_{D_i} (z-z_i) dz + \dots + a_k^{(i)} \oint_{D_i} (z-z_i)^k dz + \dots \end{aligned}$$

De acuerdo al ejemplo 2.25, todas integrales en la última ecuación son cero excepto la que multiplica al residuo  $a_{-1}^{(i)}$ , por lo que

$$\oint_{D_i} f(z) dz = a_{-1}^{(i)} 2\pi j$$

con lo que finalmente se obtiene

$$I = \oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n a_{-1}^{(i)}.$$

Esta conclusión es conocida como *teorema del residuo* y afirma que si  $f(z)$  es una función analítica dentro y sobre una curva cerrada simple  $C$ , excepto en un número finito de polos, entonces su valor será igual a  $2\pi j$  multiplicado por la suma de todos los residuos de  $f(z)$  para las singularidades dentro de  $C$ .

**Ejemplo 2.29** Evalúe la integral

$$\int_C \frac{1}{z(1+z)} dz$$

si  $C$  es

1.  $|z| = \frac{1}{2}$
2.  $|z| = 2$

**Solución:**

Las singularidades están en  $z_1 = 0$  y  $z_2 = -1$ , y los residuos están dados por (2.54):

$$\begin{aligned} a_{-1}^{(1)} \Big|_{z_1=0} &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z+1)} = 1 \\ a_{-1}^{(2)} \Big|_{z_2=-1} &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z(z+1)} = -1 \end{aligned}$$

así que para el primer caso, donde la curva solo encierra al polo  $z_1 = 0$ , el resultado de la integral es

$$\int_C \frac{1}{z(1+z)} dz = 2\pi j$$

y para el segundo caso, donde ambos polos se encuentran dentro del círculo entonces

$$\int_C \frac{1}{z(1+z)} dz = 2\pi j(1-1) = 0$$

2.29

## 2.7 Integración sobre semicírculos extensos

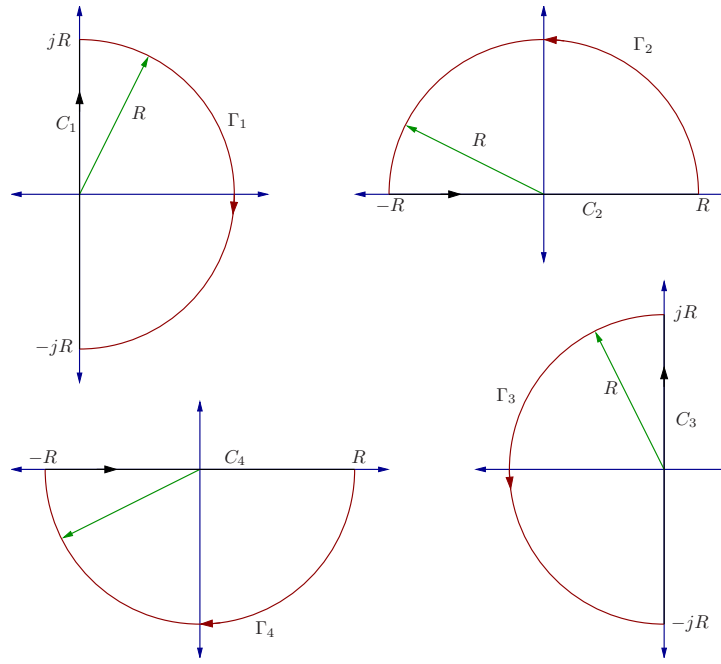
En secciones subsiguientes se utilizará la integración en contornos cerrados semicirculares como los mostrados en la figura 2.38, donde interesa estudiar varios casos donde  $R$  tiende a infinito. Primero considérense los dos casos siguientes para el semicírculo  $\Gamma_1$ :

$$\text{Caso 1: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz \tag{2.69}$$

$$\text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Caso 2: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z)e^{az} dz \tag{2.70}$$

$$\text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } a \in \mathbb{R}, a < 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



**Figura 2.38:** Trayectorias de integración semicirculares de radio  $R$ .

La construcción  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |g(Re^{j\theta})| = 0$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , donde  $g(Re^{j\theta}) = f(Re^{j\theta})$  ó  $g(Re^{j\theta}) = Rf(Re^{j\theta})$ , implica que la función  $g(z)$  converge *uniformemente* a cero sobre todo el semicírculo  $\Gamma_1$  de radio  $R$ , cuando éste radio se hace crecer indefinidamente. En otros términos, para todo valor real positivo  $\epsilon$ , existe un radio suficientemente grande  $R_0$ , a partir del cual el mayor valor absoluto de la función  $g(z)$  en todos los semicírculos de radio  $R > R_0$  es siempre menor que  $\epsilon$ , o expresado matemáticamente:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max |g(Re^{j\theta})| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists R_0 \in \mathbb{R}^+ : R > R_0 \Rightarrow |g(Re^{j\theta})| < \epsilon$$

El semicírculo  $\Gamma_1$  se puede describir como  $z = Re^{j\theta}$  con  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . De este modo el diferencial  $dz$  está dado por  $dz = jRe^{j\theta}d\theta$ . En el Caso 1, considerando el sentido de integración mostrado en la figura 2.38 se cumple:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = -j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Re^{j\theta} f(Re^{j\theta}) d\theta$$

con lo que se deriva si  $R > R_0$

$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z) dz \right| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |Rf(Re^{j\theta})| d\theta < \pi\epsilon$$

Puesto que  $\epsilon$  puede elegirse arbitrariamente pequeño entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0$$

Para el Caso 2

$$\int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz = -j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Re^{j\theta} f(Re^{j\theta}) e^{aR \cos \theta} e^{jaR \sin \theta} d\theta$$



con lo que se obtiene

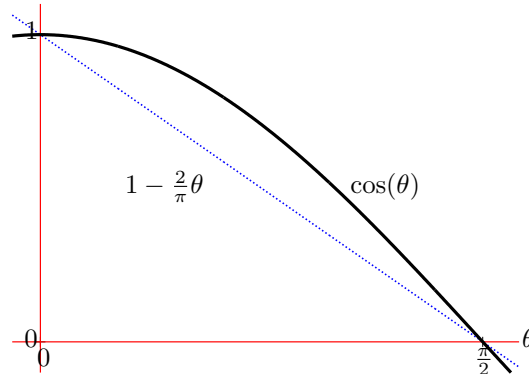
$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz \right| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R |f(Re^{j\theta})| e^{aR \cos \theta} d\theta$$

Si se elige  $R > R_0$  entonces  $|f(Re^{j\theta})| < \epsilon$ . Además, puesto que el coseno es una función par en  $\theta$ , entonces el término exponencial también es par, por lo que se debe cumplir:

$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz \right| \leq 2R\epsilon \int_0^{\pi/2} e^{aR \cos \theta} d\theta$$

Para analizar la expresión anterior se utiliza la desigualdad ilustrada en la figura 2.39, donde se aprecia

$$1 - \frac{2}{\pi}\theta \leq \cos \theta, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



**Figura 2.39:** Sustitución del  $\cos \theta$  por una función lineal siempre menor que el coseno en un intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Para el intervalo indicado, ambas funciones adquieren valores entre cero y uno. Con esto en mente, y considerando que el valor real  $a$  es estrictamente menor que cero, se cumple

$$e^{aR \cos \theta} \leq e^{aR} e^{-2aR\theta/\pi} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

con lo que se deduce

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz \right| &\leq 2R\epsilon \int_0^{\pi/2} e^{aR \cos \theta} d\theta \leq 2R\epsilon e^{aR} \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi\epsilon e^{aR}}{-a} (e^{-aR} - 1) \\ &= \frac{\pi\epsilon}{|a|} (1 - e^{aR}) < \frac{\pi\epsilon}{|a|} \end{aligned}$$

Por lo tanto, puesto que  $\epsilon$  puede elegirse arbitrariamente pequeño, se debe cumplir:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz = 0 \quad a \in \mathbb{R}, a < 0$$

Los siguientes dos casos son similares a los anteriores, pero utilizando el semicírculo  $\Gamma_2$  (figura 2.38):

$$\text{Caso 3: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad (2.71)$$

$$\text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{Caso 4: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz} dz \quad (2.72)$$

$$\text{cuando } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } a \in \mathbb{R}, a > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$$

El Caso 3 se analiza del mismo modo que el Caso 1, con lo que se obtiene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

Para el Caso 4

$$\int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz} dz = j \int_0^\pi Re^{j\theta} f(Re^{j\theta}) e^{jaR \cos \theta} e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

con lo que se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz} dz \right| \leq \int_0^\pi R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

Si se elige  $R > R_0$  entonces  $|f(Re^{j\theta})| < \epsilon$ . La integral al lado derecho se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\int_0^\pi R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

El primer término se puede analizar haciendo uso de la relación mostrada en la figura 2.40, considerando que el valor real  $a$  es, en este caso particular, positivo, y asumiendo que  $R > R_0$ :

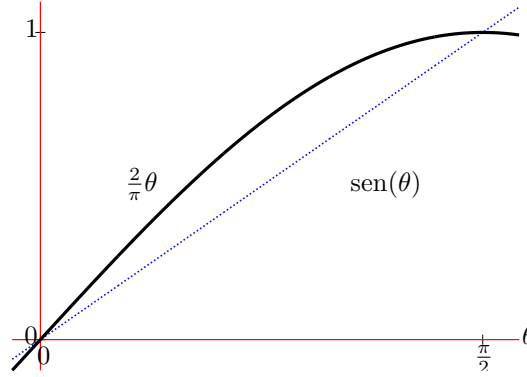
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta &\leq \int_0^{\pi/2} R \epsilon e^{-aR 2\theta/\pi} d\theta \\ &\leq R \epsilon \frac{(1 - e^{-aR})\pi}{2aR} \\ &< \frac{\epsilon\pi}{2a} \end{aligned}$$

Por medio de un cambio de variable  $\phi = \theta - \pi/2$ , o aplicando el hecho de que para el intervalo de  $\pi/2$  a  $\pi$  se cumple  $\sin \theta \geq 2 - \frac{2}{\pi}\theta$ , el lector puede demostrar que para el segundo término se cumple también:

$$\int_{\pi/2}^\pi R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta < \frac{\epsilon\pi}{2a}$$

con lo que finalmente se debe cumplir

$$\int_0^\pi R |f(Re^{j\theta})| e^{-aR \sin \theta} d\theta < \frac{\epsilon\pi}{a}$$



**Figura 2.40:** Sustitución del  $\sin \theta$  por una función lineal siempre menor que el seno en un intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

y por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) e^{jaz} dz = 0$$

si  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(Re^{j\theta})| = 0$  con  $a$  real positivo.

Para los contornos  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  se obtienen resultados similares, que se resumen junto a los obtenidos anteriormente en la tabla 2.5. Los últimos cuatro resultados en dicha tabla son conocidos como el *Lema de Jordan*, donde dependiendo de la fuente se prefieren utilizar los semicírculos con orientación vertical ( $\Gamma_1$  o  $\Gamma_3$ ), o los horizontales ( $\Gamma_2$  o  $\Gamma_4$ ).

**Tabla 2.5:** Valores de integrales en los semicírculos extensos mostrados en la figura 2.38.

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_i} f(z) dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  Rf(Re^{j\theta})  = 0$ , para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) e^{az} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a < 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} f(z) e^{az} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a > 0$ y $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) e^{jaz} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi$
$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_4} f(z) e^{jaz} dz = 0$	si $\lim_{R \rightarrow \infty} \max  f(Re^{j\theta})  = 0$ , $a < 0$ y $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

## 2.8 Evaluación de integrales reales

Los principios de integración analizados hasta el momento pueden utilizarse para simplificar el cálculo de integrales reales definidas. Aquí se evaluarán dos casos.

### 2.8.1 Caso 1: Integrales impropias

La integral real

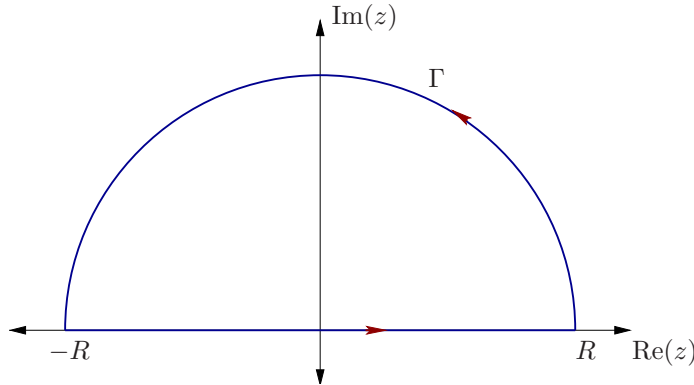
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

puede continuarse analíticamente en una integral de contorno de variable compleja

$$\int_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz \right]$$

donde la trayectoria de integración  $C$  se ha descompuesto en una línea recta sobre el eje real de  $-R$  a  $R$  ( $R$  es real), y el contorno  $\Gamma$ , que es el semicírculo superior descrito por  $Re^{j\theta}$  con el parámetro  $\theta$  que abarca de 0 a  $\pi$  (figura 2.41). Si este segundo término tiende a cero conforme  $R$  tiende a infinito, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_C f(z) dz$$



**Figura 2.41:** Contorno cerrado para evaluar integrales reales infinitas.

En la sección anterior se demostró que la integral en el arco  $\Gamma$  se hace cero si el producto  $|Rf(z)|$  tiende uniformemente a cero sobre el semicírculo cuando el radio tiende hacia infinito:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \text{ si } \lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0$$

**Ejemplo 2.30** Encuentre el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$$

**Solución:** Se considera la continuación analítica de la integral

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz$$

donde  $C$  es el contorno mostrado en la figura 2.41. El integrando tiene dos polos dobles en  $\pm 2j$ , pero el contorno solo encierra al polo en  $z = 2j$ . El residuo en  $2j$  es

$$\begin{aligned} a_{-1}|_{z=2j} &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{d}{dz} \left[ (z - 2j)^2 \frac{1}{(z - 2j)^2 (z + 2j)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{-2}{(z + 2j)^3} = -\frac{2}{(4j)^3} = -\frac{1}{32}j \end{aligned}$$

y por el teorema del residuo

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = 2\pi j \left( -\frac{1}{32}j \right) = \frac{\pi}{16}$$

Puesto que  $R|f(Re^{j\theta})|$  decrece a una tasa  $R^{-3}$  cuando  $R \rightarrow \infty$  entonces la integral en el semicírculo  $\Gamma$  es cero y por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \oint_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = \frac{\pi}{16}$$

2.30

## 2.8.2 Caso 2: Integrales de funciones reales trigonométricas

Si  $G(\sin \theta, \cos \theta)$  es una función racional de senos y cosenos, entonces la integral real

$$\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

puede resolverse a través de integrales de contorno de variable compleja. Si  $z = e^{j\theta}$ , entonces

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} \left( z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

y

$$dz = je^{j\theta} d\theta = jz d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{jz}$$

lo que quiere decir que la integral anterior puede realizarse a través de la integral

$$\int_C f(z) dz$$

donde  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$ .

**Ejemplo 2.31** Evalúe

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$$

**Solución:** Sustituyendo  $z = e^{j\theta}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  y  $d\theta = \frac{dz}{jz}$  se obtiene la integral de variable compleja

$$\oint_C \frac{1}{jz \left[ 2 + \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]} dz = \frac{2}{j} \oint_C \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

donde la trayectoria de integración  $C$  es el círculo unitario  $|z| = 1$ . Puesto que el integrando tiene dos polos en  $z = -2 \pm \sqrt{3}$ , el contorno de integración solo incluye a  $z = -2 + \sqrt{3}$ . El residuo del integrando es

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \left[ \frac{2}{j} (z + 2 - \sqrt{3}) \frac{1}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} \right] = \frac{1}{j\sqrt{3}}$$

así que por el teorema del residuo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = 2\pi j \frac{1}{j\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

2.31

Otros casos de integrales reales resueltas por medio de integración compleja encontrará el lector en el análisis del impulso gaussiano (pág. 163), y en el apéndice B.

## 2.9 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [8, 9], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

**Problema 2.1.** Indique qué tipo de estructura algebraica es  $(\mathbb{S}, \{\star\})$ , donde  $\mathbb{S} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , y  $\star \in \{+, \times, -, \div, \wedge\}$ . El símbolo ' $\div$ ' denota división y el símbolo  $\wedge$  potenciación.

**Problema 2.2.** Demuestre utilizando las definiciones de suma y multiplicación en los números naturales que  $a \times 1 = a$ .

**Problema 2.3.** ¿Qué clase de estructura algebraica es  $(\mathbb{Z}, \{-\})$ ?

**Problema 2.4.** Utilizando las definiciones de suma y producto de números complejos en (2.5), calcule:

1.  $(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1)$
2.  $(a, 0) \times (1, 0) + (b, 0) \times (0, 1)$
3.  $(a, b) \times (a, -b)$
4.  $(a, b) + (a, -b)$
5.  $(a, b) - (a, -b)$

**Problema 2.5.** Encuentre la magnitud, argumento, y componentes real e imaginario de los siguientes números complejos:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. $z_1 = j$           | 5. $z_5 = -2e^{j\pi/4}$                                 |
| 2. $z_2 = -j$          | 6. $z_6 = -2e^{-j\pi}$                                  |
| 3. $z_3 = 3 - j^4$     | 7. $z_7 = \cos \alpha - 1; \quad \alpha \in \mathbb{R}$ |
| 4. $z_4 = 2e^{j\pi/4}$ | 8. $z_8 = e^{jk\pi}; \quad k \in \mathbb{Z}$            |

**Problema 2.6.** Indique qué trazo describen sobre el plano complejo el conjunto de todos los números complejos que satisfacen la igualdad  $\operatorname{Re}\{z\} + 2\operatorname{Im}\{z\} = 1$

**Problema 2.7.** Demuestre que  $j^0 = 1, j^1 = j, j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1 \dots, j^{n+4} = j^n, \dots$

**Problema 2.8.** Utilizando la identidad de Euler, encuentre a qué equivalen las expresiones  $\operatorname{sen}(A + B)$  y  $\operatorname{cos}(A + B)$  en términos de senos y cosenos de  $A$  y  $B$  por separado.

**Problema 2.9.** Sume los siguientes números complejos. Verifique las sumas gráficamente:

- |                           |                                      |
|---------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(2 + j5) + (-3 + j2)$ | 3. Si $z = x + jy$ calcule $z + z^*$ |
| 2. $(j3) + (2)$           | 4. Si $z = x + jy$ calcule $z - z^*$ |

**Problema 2.10.** Multiplique los siguientes números complejos.

1.  $(2 + j2)(-2 + j2)$
2.  $(j3)(2)$
3. Si  $z = x + jy$  calcule  $zz^*$
4. Si  $z = re^{j\theta}$  calcule  $z/z^*$

**Problema 2.11.** Calcule las cinco raíces  $-1^{1/5}$  y grafíquelas en el plano complejo.

**Problema 2.12.** Calcule la magnitud, argumento, parte real y parte imaginaria de los números complejos  $z_i$  resultantes de las operaciones

1.  $z_1 = (1 + j\sqrt{3})^{1+j}$
2.  $z_2 = \sqrt{-j}$
3.  $z_3 = j^j$
4.  $z_4 = j^{-j}$
5.  $z_5 = \text{sen}(j)$
6.  $z_6 = \text{cos}(j)$

**Problema 2.13.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se sabe que  $|z| = 2$ ,  $\angle w = \pi/4$  y  $z + w = 1$ . Encuentre gráficamente  $z$  y  $w$ .

**Problema 2.14.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se sabe que  $|z| = 2$ ,  $|w| = 3$  y  $z + w = 4$ . Encuentre gráficamente  $z$  y  $w$ .

**Problema 2.15.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se sabe que  $\angle z = \pi/4$ ,  $\angle w = -\pi/3$  y  $z + w = 4$ . Encuentre gráficamente  $z$  y  $w$ .

**Problema 2.16.** Demuestre que la recta en el plano  $z = x + jy$  dada por la ecuación

$$y = mx + b$$

es transformada por el mapeo  $w = \alpha z + \beta$  a la recta

$$v = K_1 u + K_2$$

donde  $w = u + jv$  y

$$K_1 = \frac{\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}$$

$$K_2 = \frac{\alpha_{\text{Im}}b - \beta_{\text{Re}}}{\alpha_{\text{Re}} - \alpha_{\text{Im}}m}(\alpha_{\text{Im}} + \alpha_{\text{Re}}m) + \alpha_{\text{Re}}b + \beta_{\text{Im}} \quad .$$

**Problema 2.17.** Otra posible demostración de que un mapeo lineal conserva la forma de rectas o un círculos es utilizando representaciones paramétricas de las mismas. Considerando que una recta se describe como

$$z(t) = z_m t + z_b$$

con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z_m, z_b \in \mathbb{C}$ ,  $z_m = \text{cte}$ ,  $z_b = \text{cte}$ , y que un círculo puede representarse como

$$z(t) = re^{jt} + z_0$$



con  $t \in [0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r = \text{cte}$ ,  $z_0 = \text{cte}$ , demuestre que el mapeo  $w = \alpha z + \beta$  no cambia la forma de la recta o del círculo.

**Problema 2.18.** Encuentre las ecuaciones en la forma  $y = mx + b$  de las siguientes rectas en el plano  $z$ , con  $z = x + jy$ ,  $x, y, m, b \in \mathbb{R}$ .

1.  $|z - p| = |z - q|$ ,  $p, q \in \mathbb{C}$
2.  $|z - (2 - j)| = |z - (-3 + j)|$
3.  $|z + z^* + 4j(z - z^*)| = 6$

**Problema 2.19.** Encuentre el punto de intersección y el ángulo de intersección de las rectas  $|z - (1 + j)| = |z - (3 - j)|$  y  $|z - (1 - j)| = |z - (3 + j)|$

**Problema 2.20.** Dibuje las regiones representadas por las siguientes ecuaciones, si  $r, \phi \in \mathbb{R}^+$ :

- |                           |                           |                            |
|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. $ z  < r$              | 5. $ \text{Im}\{z\}  < r$ | 9. $ \text{Im}\{z\}  > r$  |
| 2. $ z - z_0  < r$        | 6. $\text{Im}\{z\} < r$   | 10. $\text{Im}\{z\} > r$   |
| 3. $ \text{Re}\{z\}  < r$ | 7. $ \text{Re}\{z\}  > r$ | 11. $\text{Re}\{ z \} < r$ |
| 4. $\text{Re}\{z\} < r$   | 8. $\text{Re}\{z\} > r$   | 12. $ \angle z  < \phi$    |

**Problema 2.21.** Encuentre la imagen de la línea  $6x + y = 22$  (con  $z = x + jy$ ) en el plano  $w$  bajo el mapeo  $w = jz + 4 - j3$ .

**Problema 2.22.** Encuentre la región en el plano  $w$  a la que es mapeada la región  $y > 1$  del plano  $z = x + jy$  si  $w = (1 - j)z$ .

**Problema 2.23.** Encuentre a qué es mapeado el semiplano  $x > 0$  del plano  $z = x + jy$  bajo la transformación  $w = jz + j$ .

**Problema 2.24.** Encuentre la transformación que hace el mapeo  $w = jz + 1$  a la franja semi-infinita  $x > 0$ ,  $0 < y < 2$  en el plano  $z = x + jy$ .

**Problema 2.25.** Encuentre las imágenes que realiza el mapeo  $w = (\sqrt{3} + j)z - 1 + j\sqrt{3}$  de las siguientes curvas del plano  $z = x + jy$ :

- |            |                         |
|------------|-------------------------|
| 1. $y = 0$ | 3. $ z  = 1$            |
| 2. $x = 0$ | 4. $x^2 + y^2 + 2y = 1$ |

**Problema 2.26.** El mapeo lineal  $w = f(z) = \alpha z + \beta$  cumple  $j = f(1 + j)$  y  $(1 + j) = f(-1)$ .

1. Determine  $\alpha$  y  $\beta$  (úselos en el resto del problema).
2. Encuentre la imagen de  $\text{Im}(z) > 0$
3. Encuentre la imagen de  $|z - 2| < 2$

4. Encuentre los puntos fijos del mapeo

**Problema 2.27.** Demuestre que el mapeo de inversión  $w = 1/z$  transforma círculos centrados en el eje real del plano  $z$  en círculos centrados en el eje real del plano  $w$  o en rectas verticales, y que transforma círculos centrados en el eje imaginario del plano  $z$  en círculos centrados en el eje imaginario del plano  $w$ , o en rectas horizontales.

**Problema 2.28.** Sea  $C$  un círculo en el plano complejo  $z$  descrito paramétricamente como

$$C : z(t) = re^{j2\pi t} + z_0$$

con  $|z_0| \neq r$  y  $t \in [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ . Si el parámetro  $t$  se hace variar desde 0 hasta 1, el círculo es descrito en sentido antihorario.

Indique qué sentido describe la imagen de dicho círculo ante el mapeo de inversión  $w = 1/z$ , cuando

1.  $r < |z_0|$
2.  $r > |z_0|$ .

Para las dos condiciones anteriores indique a qué es mapeado el interior del círculo.

**Problema 2.29.** Calcule la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z - 3| = 2$  utilizando el mapeo  $w = 1/z$ .

**Problema 2.30.** Utilice división polinomial para demostrar los resultados en la ecuación (2.23) de la página 36.

**Problema 2.31.** Demuestre que el mapeo inverso de  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  es también un mapeo bilineal. Verifique que los determinantes de ambos mapeos son iguales.

**Problema 2.32.** Qué tipo de rectas describe la ecuación  $|z - a| = |z - b|$  si además se cumple que  $|a - 2j|^2 = |b - 2j|^2$ . (Ayuda: revise los conceptos indicados en la figura 2.14)

Generalice el concepto si la condición dada es  $|a - c| = |b - c|$ , con  $c \in \mathbb{C}$  constante.

**Problema 2.33.** Demuestre que el mapeo bilineal del ejemplo 2.7 transforma cualquier línea que no pasa por  $z = -1$  en un círculo que pasa por  $\Gamma = 1$ . Encuentre los puntos fijos de ese mapeo. ¿A qué es mapeado el círculo unitario del plano  $z$ ?

**Problema 2.34.** Encuentre la imagen en el plano  $w$  del círculo  $|z| = 2$  y su interior bajo el mapeo bilineal

$$w = \frac{z - j}{z + j}$$

**Problema 2.35.** Encuentre la transformación bilineal  $w = f(z)$  que satisface  $j = f(0)$ ,  $-j = f(1)$ ,  $0 = f(-1)$ .

**Problema 2.36.** Encuentre la imagen del semiplano  $y > c$  bajo el mapeo de inversión  $w = 1/z$ , donde  $z = x + jy$ , y  $c = \text{cte} \in \mathbb{R}$ . Analice los casos  $c > 0$ ,  $c = 0$  y  $c < 0$ .

**Problema 2.37.** Encuentre la imagen en el plano  $w = 1/z$  de

1. El círculo

$$\left| z + \frac{3}{4} + j \right| = \frac{7}{4}$$

2. El disco  $|z - a| \leq a$ , con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$

**Problema 2.38.** Encuentre el mapeo bilineal  $w = f(z)$  que cumpla  $j = f(0)$ ,  $1 = f(-j)$  y  $0 = f(-1)$ . Encuentre la imagen con el mapeo encontrado de las rectas horizontales y verticales en el plano  $z$ . Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Problema 2.39.** Dado el mapeo bilineal

$$w = \frac{1+j}{z}$$

1. Indique las operaciones involucradas en el mapeo, tales como rotaciones, inversiones, traslaciones, etc.
2. Encuentre las imágenes de  $z = 1$ ,  $z = 1 - j$  y  $z = 0$  en el plano  $w$ .
3. Encuentre la imagen del interior de círculo unitario  $|z| < 1$  en el plano  $z$ .
4. Encuentre las imágenes de las rectas  $x = y$  y  $x + y = 1$  si  $z = x + jy$ .
5. Encuentre los puntos fijos del mapeo.

**Problema 2.40.** Dado el mapeo bilineal

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

encuentre la imagen del arco semicircular  $x^2 + y^2 = 1$  para  $x \leq 0$  descrito del punto  $(0, -1)$  al punto  $(0, 1)$ .

**Problema 2.41.** Encuentre a qué mapea

$$w = \frac{z+j}{z-3}$$

la región del plano  $z = x + jy$  entre las rectas  $x = y$  y  $y = 0$  con  $x < 0$  en el plano  $w$ . Encuentre qué construcción geométrica en el plano  $z$  corresponde al círculo unitario del plano  $w$ .

**Problema 2.42.** Encuentre a qué corresponde en el plano  $w$  la región del plano  $z = x + jy$  dada por  $y \geq 0$  bajo el mapeo

$$w = f(z) = e^{j\theta_0} \frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

Encuentre los valores particulares de  $z_0$  y  $\theta_0$  si se cumple  $f(j) = 0$  y  $f(\infty) = -1$ .

**Problema 2.43.** Demuestre que la composición de dos mapeos bilineales es a su vez un mapeo bilineal. Es decir, si

$$\begin{aligned} w' &= \frac{az + b}{cz + d} \\ w &= \frac{a'w' + b'}{c'w' + d'} \end{aligned}$$

entonces el mapeo  $w = f(z)$  es también bilineal.

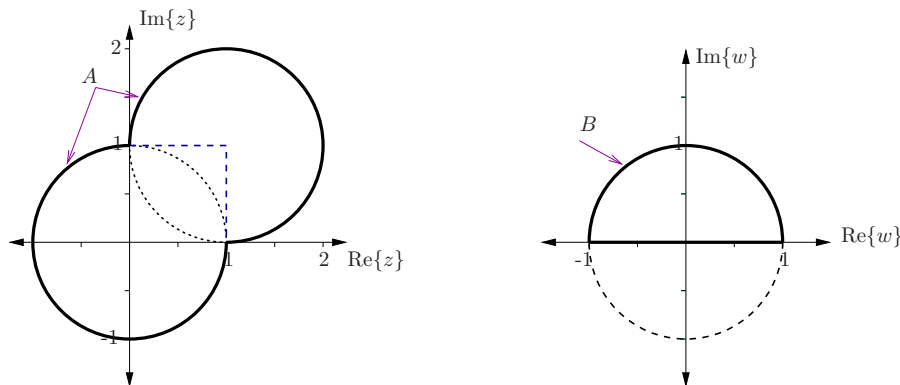
**Problema 2.44.** Demuestre que un mapeo bilineal tiene uno, dos o infinitos puntos fijos.

**Problema 2.45.** Una propiedad interesante del mapeo bilineal es que existe solo una transformación de este tipo capaz de mapear tres puntos dados  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  en tres puntos específicos  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  respectivamente. Demuestre que la transformación bilineal está dada por:

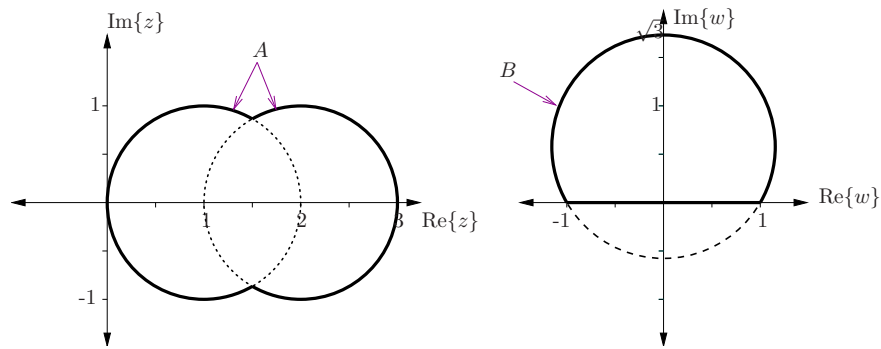
$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

**Problema 2.46.** Encuentre el mapeo bilineal  $w = f(z)$  más general que mapea el círculo unitario  $|z| = 1$  en el círculo unitario  $|w| = 1$  y que cumple además  $f(z_0) = 0$ .

**Problema 2.47.** Encuentre un mapeo bilineal  $w = f(z)$  que transforme la curva  $A$  del plano  $z$  mostrada a la izquierda de la siguiente figura, en la curva  $B$  del plano  $w$  mostrada a la derecha, si se sabe que la sección de la curva  $A$  ubicada sobre  $|z - 1 - j| = 1$  es transformada en el segmento de recta que une  $-1$  y  $1$  en el plano  $w$ .



**Problema 2.48.** Encuentre un mapeo bilineal  $w = f(z)$  que transforme la curva  $A$  del plano  $z$  mostrada a la izquierda de la siguiente figura, en la curva  $B$  del plano  $w$  mostrada a la derecha, si se sabe que la sección de la curva  $A$  ubicada sobre  $|z - 1| = 1$  es transformada en el segmento de recta que une  $-1$  y  $1$  en el plano  $w$ .



**Problema 2.49.** Indique si siempre es posible encontrar un mapeo bilineal que transforme cualquier par de círculos que se intersecan en exactamente dos puntos, en la figura de la derecha del problema 2.48.

**Problema 2.50.** Encuentre un mapeo bilineal que transforme el semicírculo al lado derecho de la figura en el problema 2.48 a un semicírculo igual, pero tal que el segmento de recta es transformado al semicírculo, y el semicírculo al segmento de recta.

**Problema 2.51.** Encuentre la imagen en el plano  $w$  de las siguientes regiones bajo el mapeo  $w = e^z$ .

1.  $x > 0$
2.  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
3.  $\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \infty$

**Problema 2.52.** Demuestre, utilizando la descomposición del coseno y seno como combinación lineal de dos exponenciales complejas, que para  $z = x + jy \in \mathbb{C}$  se cumple:

- $\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$
- $\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$
- $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$
- $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

**Problema 2.53.** Verifique que la función  $f(z) = e^{\alpha z}$ ,  $\alpha = \text{cte} \in \mathbb{C}$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y calcule su derivada.

**Problema 2.54.** En qué región de  $\mathbb{C}$  son las siguientes funciones analíticas

1.  $ze^z$
2.  $zz^*$
3.  $\sin 4z$
4.  $\cos 2z$

**Problema 2.55.** Qué valores de  $a$  y  $b$  hacen que

$$w = f(z = x + jy) = x^2 + ay^2 - 2xy + j(bx^2 - y^2 + 2xy)$$

sea analítica, y que forma tiene entonces  $f'(z)$ .

**Problema 2.56.** Encuentre una función  $v(x, y)$  conjugada a  $u(x, y) = 2x(1-y)$ , y encuentre entonces  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  y  $f'(z)$ .

**Problema 2.57.** Demuestre que  $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$  es una función armónica y encuentre una función conjugada armónica  $v(x, y)$ . Escriba  $f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$  en términos de  $z$  si  $z = x + jy$ .

**Problema 2.58.** Demuestre que  $u(x, y) = \sin x \cosh y$  es armónica y encuentre la función conjugada armónica  $v(x, y)$ . Encuentre  $f(z = x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  en términos de  $z$ .

**Problema 2.59.** Encuentre trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

1.  $x^3y - xy^3 = \kappa$ , con  $\kappa$  constante real
2.  $e^{-x} \cos y + xy = \kappa$ , con  $\kappa$  constante real

**Problema 2.60.** Encuentre las componentes real e imaginaria de las funciones

1.  $f(z) = z^2 e^{2z}$
2.  $\sin 2z$

y determine la región de  $\mathbb{C}$  en la que son analíticas y sus derivadas en esas regiones.

**Problema 2.61.** Determine los puntos o regiones donde los siguientes mapeos *no* son conformes:

1.  $w = z^2 - 1$
2.  $w = 2z^3 - 21z^2 + 72z + 6$
3.  $w = 8z + \frac{1}{2z^2}$
4.  $w = \sin z$

**Problema 2.62.** Encuentre y grafique las imágenes de las líneas verticales y horizontales para los mapeos  $\sin z$ ,  $\cos z$  y  $\operatorname{Ln} z$ . ¿Dónde son estos mapeos conformes?

**Problema 2.63.** Demuestre que

$$w = z + \frac{a^2}{z}$$

transforma el círculo  $|z| = a$  en un segmento de recta en el plano  $w$ . Encuentre la longitud del segmento de recta. Encuentre la imagen de  $|z| = b \neq a$ .

**Problema 2.64.** Demuestre que  $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$

**Problema 2.65.** Encuentre la representación en serie de potencias de la función  $1/(z-j)$  en las regiones

1.  $|z| < 1$
2.  $|z| > 1$
3.  $1 < |z - 1 - j| < \sqrt{2}$

**Problema 2.66.** Encuentre por división polinomial las representaciones en serie de potencias de  $\frac{1}{z^2+1}$  centradas en  $z_0 = 0$ .

**Problema 2.67.** Encuentre los desarrollos en Series de Taylor para las siguientes funciones centradas en los puntos dados

1.  $\frac{1}{1+z}$ , en  $z_0 = 1$ .
2.  $\frac{1}{z(z-4j)}$ , en  $z_0 = 2j$ .
3.  $\frac{1}{z^2}$ , en  $z_0 = 1+j$ .
4.  $\frac{1}{1+z+z^2}$ , en  $z_0 = 0$ .

**Problema 2.68.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

alrededor de  $z_0 = 0$  y  $z_0 = 1$ , y especifique las posibles regiones de convergencia en cada caso.

**Problema 2.69.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

alrededor de

1.  $z_0 = 0$
2.  $z = a \neq 0, a \in \mathbb{C}$

**Problema 2.70.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

en una expansión en serie de Laurent válida para las regiones de convergencia

1.  $|z| < 1$
2.  $1 < |z| < 2$
3.  $|z| > 2$
4.  $|z-1| > 1$
5.  $0 < |z-2| < 1$

**Problema 2.71.** Encuentre la serie de Laurent para

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

si esta se centra en  $z_0 = 0$ , para la región de convergencia  $1 < |z| < 2$ .

**Problema 2.72.** Para la función

$$f(z) = \frac{z}{(z+j)(z-j)}$$

indique cuántas y cuáles regiones de convergencia son posibles para la serie de Laurent centrada en  $z_0 = 1 + j$ . Encuentre las series en cada una de dichas regiones.

**Problema 2.73.** La función de variable compleja  $f(z)$  tiene, entre otros, los siguientes desarrollos en series de Laurent

$$1. f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} (z+3)^k$$

$$3. f(z) = \sum_{k=-4}^{\infty} 2^k (z-1-j)^k$$

$$2. f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-j)^{k+1}}{k(z-1)^k}$$

$$4. f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 5^{-k} (z+j)^k$$

donde para todas las series se han utilizado regiones de convergencia que contienen como punto límite al punto donde ellas se centran.

- Indique dónde al menos deben encontrarse polos, ceros (ambos con su respectivo orden), puntos regulares y singularidades esenciales de  $f(z)$ .
- Indique el valor de los residuos de  $f(z)$  en los tres puntos donde se centran las series anteriores.

**Problema 2.74.** Indique qué tipos de singularidades y ceros tienen las siguientes funciones:

$$1. \frac{\cos z}{z^2}$$

$$5. e^{\frac{z}{1-z}}$$

$$2. \frac{1}{(z+j)^2(z-j)}$$

$$6. \frac{z-1}{z^2+1}$$

$$3. \frac{z}{z^4-1}$$

$$7. \frac{z+j}{(z+2)^2(z-3)}$$

$$4. \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 + \pi}$$

$$8. \frac{1}{z^2(z^2-4z+5)}$$

**Problema 2.75.** Encuentre los desarrollos de Laurent para las siguientes funciones alrededor de  $z_0 = 0$  e indique el tipo de singularidad:

$$1. \frac{1 - \cos z}{z}$$

$$2. \frac{e^{z^2}}{z^3}$$

**Problema 2.76.** Determine los residuos de la función  $1/(1+z^4)$  en cada uno de sus polos en el plano finito  $z$ .



**Problema 2.77.** Calcule los residuos de las siguientes funciones en cada uno de sus polos finitos, a menos que se especifique lo contrario:

1.  $\frac{2z+1}{z^2-z-2}$

6.  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

2.  $\frac{1}{z^2(1-z)}$

7.  $\frac{\cos z}{z}$  solo en  $z=0$

3.  $\frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}$

8.  $\frac{z}{\sin z}$  solo en  $z=\pi$

4.  $\frac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z}$

9.  $\frac{1}{(z^2+1)^2}$  solo en  $z=j$

5.  $\frac{z^6+4z^4+z^3+1}{(z-1)^5}$

**Problema 2.78.** Utilizando la definición de la integral de contorno para funciones de variable compleja, demuestre que si el sentido de la trayectoria de integración se invierte, entonces la integral adquiere el valor de la integral con el sentido original pero negado, es decir:

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

donde  $-C$  representa al contorno de integración en el sentido contrario a  $C$ .

**Problema 2.79.** En la demostración del valor que toma una integral de contorno cerrada en la cual la trayectoria de integración encierra a un polo, se utilizó la deformación del contorno tal y como lo muestra la figura 2.35. Se eligieron allí líneas rectas para pasar de  $A$  a  $B$  y luego de  $B'$  a  $A'$ . Discuta qué ocurre si se tomaran dos curvas simples cualesquiera para sustituir esos segmentos de recta, que pasan solo por puntos donde la función es analítica.

**Problema 2.80.** Esboce gráficamente las siguientes trayectorias, indicando su sentido, y además exprese la trayectoria con una ecuación no paramétrica (que no depende de  $t$ ) cuando sea posible. (Por ejemplo  $z(t) = e^{j2\pi t}$  para  $0 \leq t \leq 1$  es lo mismo que  $|z| = 1$  en sentido positivo)

1.  $z(t) = (1+2j)t$  para  $1 \leq t \leq 3$
2.  $z(t) = 2-3jt$  para  $-2 \leq t \leq 1$
3.  $z(t) = 2-j+2e^{jt}$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$
4.  $z(t) = 1+j+e^{-j\pi t}$  para  $0 \leq t \leq 2$
5.  $z(t) = e^{jt}$  para  $0 \leq t \leq \pi$
6.  $z(t) = -3+j+2e^{jt}$  para  $\pi \leq t \leq 2\pi$
7.  $z(t) = 6\cos 2t + j5\sin 2t$  para  $0 \leq t \leq \pi$
8.  $z(t) = 1+2t+j8t^2$  para  $-1 \leq t \leq 1$
9.  $z(t) = t^2 + j\frac{1}{2}t^3$  para  $-1 \leq t \leq 2$
10. Familia de curvas  $z_k(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t}k + (1-t(1-j))(1-k)$  para  $0 \leq t \leq 1$  y el selector de curva  $k$  es un número real  $-1 \leq k \leq 1$

**Problema 2.81.** Esboce gráficamente y represente de forma paramétrica las trayectorias

- Segmento de  $1 + j$  a  $4 - 2j$
- Círculo unitario (en sentido horario)
- Segmento de  $a + jb$  a  $c + jd$
- Hipérbola  $xy = 1$  desde  $1 + j$  a  $4 + j\frac{1}{4}$
- Semiellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $y \geq 0$
- Parábola  $x = 4 - 4y^2$  ( $-1 \leq y \leq 1$ )
- $|z - 2 + 3j| = 4$  (en sentido antihorario)
- $|z - a - jb| = r$  (en sentido horario)
- Elipse  $4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

**Problema 2.82.** Evalúe las integrales

$$\int_C (z^2 + 3z) dz$$

$$\int_C (x^2 + y^2 + j(3x + y)) dz$$

para los contornos  $C$

- segmento de recta de 2 a  $j2$
- contorno de dos segmentos de recta, primero de 2 a  $(2 + j2)$ , y luego a  $j2$ .
- segmento del círculo  $|z| = 2$  que va en sentido positivo de 2 a  $j2$ .

**Problema 2.83.** Evalúe

$$\oint_C (5z^4 - z^3 + 2) dz$$

para las trayectorias de integración

- $|z| = 1$
- el cuadrado con vértices 0, 1,  $1 + j$  y  $j$ .
- una curva compuesta por la parábola  $y = x^2$  de 0 a  $1 + j$  y  $y^2 = x$  de  $1 + j$  a 0.

**Problema 2.84.** Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{dz}{z - 4}$$

para un contorno cerrado que contiene a  $z = 4$ , y para otro contorno que lo excluye.

**Problema 2.85.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{2z}{(2z - 1)(z + 2)} dz$$

para los contornos  $|z| = 1$  y  $|z| = 3$ .

**Problema 2.86.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{5z}{(z+1)(z-2)(z+j4)} dz$$

para los contornos  $|z| = 3$  y  $|z| = 5$ .

**Problema 2.87.** Evalúe las siguientes integrales

$$\oint \frac{z^3 + z}{(2z+1)^3} dz \quad C : |z| = 1$$

$$\oint \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2} dz \quad C : |z| = 3$$

**Problema 2.88.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^3 + 4z} dz$$

para los contornos  $|z| = 1$  y  $|z| = 3$ .

**Problema 2.89.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z^3(z^2 + 2z + 2)} dz$$

para el contorno  $|z| = 3$ .

**Problema 2.90.** Demuestre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

si además se sabe que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max |Rf(Re^{j\theta})| = 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi$$

y  $\Gamma_2$  es el contorno semicircular ilustrado en la figura 2.38 de la página 86.

**Problema 2.91.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 1} dz$$

donde  $C$  es

1. el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
2. el círculo  $|z| = 2$

**Problema 2.92.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{z^2 + 3jz - 2}{z^3 + 9z} dz$$

donde  $C$  es

1. el círculo  $|z| = 1$
2. el círculo  $|z| = 4$

**Problema 2.93.** Calcule los residuos de todos los polos de la función

$$f(z) = \frac{(z^2 + 2)(z^2 + 4)}{(z^2 + 1)(z^2 + 6)}$$

y con ellos calcule la integral

$$\oint_C f(z) dz$$

con el contorno  $C$  definido como

1. el círculo  $|z| = 2$
2. el círculo  $|z - j| = 1$
3. el círculo  $|z| = 4$

**Problema 2.94.** Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z^2(1 + z^2)^2} dz$$

donde la trayectoria de investigación  $C$  es

1. el círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
2. el círculo  $|z| = 2$

**Problema 2.95.** Con la ayuda del teorema del residuo evalúe las siguientes integrales de contorno:

$$1. \oint_C \frac{3z^2 + 2}{(z - 1)(z^2 + 4)} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 1.1.  $|z - 2| = 2$
- 1.2.  $|z| = 4$

$$2. \oint_C \frac{(z^2 - 2z)}{(z + 1)^2(z^2 + 4)} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 2.1.  $|z + j| = 2$
- 2.2.  $|z| = 3$

$$3. \oint_C \frac{1}{(z + 1)^3(z - 1)(z - 2)} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 3.1.  $|z| = \frac{1}{2}$
- 3.2.  $|z + 1| = 1$
- 3.3. el rectángulo con vértices en  $\pm j$  y  $3 \pm j$ .

$$4. \oint_C \frac{(z - 1)}{(z^2 - 4)(z + 1)^4} dz$$

con las trayectorias  $C$ :

- 4.1.  $|z| = \frac{1}{2}$
- 4.2.  $|z + \frac{3}{2}| = 2$
- 4.3. el triángulo con vértices en  $-\frac{3}{2} + j$ ,  $-\frac{3}{2} - j$  y  $3$ .

**Problema 2.96.** Utilizando una integral de contorno apropiada, evalúe las siguientes integrales de funciones de valor y variable real:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

4.  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$

5.  $\int_0^{2\pi} \frac{4}{5 + 4 \sin \theta} d\theta$

3.  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2} dx$

6.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$

7.  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta$

9.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$

8.  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$

10.  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + 2 \cos \theta} d\theta$



# Capítulo 3

## Análisis de Fourier

### 3.1 Ortogonalidad

El adjetivo *ortogonal* proviene del griego *orthos* (recto) y *gonia* (ángulo). Este denota entonces la perpendicularidad entre dos elementos: dos calles que se cruzan en un ángulo recto presentan una configuración ortogonal. En ingeniería y matemática el término se ha extendido a otros niveles y se habla por ejemplo de juegos de instrucciones ortogonales en arquitecturas de microprocesadores, o de codificaciones ortogonales en comunicaciones digitales inalámbricas. En esta sección se restringirá sin embargo la discusión a las definiciones de carácter matemático que constituyen el fundamento para la comprensión del análisis de funciones por medio de las transformadas de Fourier, Laplace, Transformada  $z$ , las llamadas *wavelets* y otros más.

El objetivo será presentar los conceptos de ortogonalidad entre funciones, y para llegar allí se partirá de un contexto familiar: la ortogonalidad de vectores, introduciendo en el camino una serie de conceptos matemáticos de carácter abstracto cada vez más utilizados en ingeniería.

#### 3.1.1 Espacios lineales

Tradicionalmente se utiliza en ingeniería el concepto de vector como un conjunto ordenado (o *tupla*) de  $n$  cantidades, por ejemplo  $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . En los casos particulares de vectores bidimensionales ( $n = 2$ ) y tridimensionales ( $n = 3$ ) se emplean varias representaciones equivalentes que comprenden magnitudes y ángulos (por ejemplo, utilizando coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas o esféricas). En términos matemáticos se prefiere la notación cartesiana por su generalidad: el concepto de vector es válido para todo entero  $n$  no negativo (esto es  $n = 0, 1, \dots$ ), donde las componentes  $x_i$  se toman del conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  o de los números complejos  $\mathbb{C}$ . Esta definición es sin embargo incompleta, puesto que existen tuplas similares que no son vectores.

Sea  $\mathbb{F}$  un *cuerpo* escalar, es decir, una estructura algebraica que consiste por una parte en un conjunto de números escalares y por otra parte de dos operaciones con propiedades ya

discutidas en la sección 2.1.2 (entre otras, que ambas operaciones son asociativas, conmutativas y distributivas). Un conjunto  $\mathbb{V}$  se denomina *espacio vectorial* o *espacio lineal* sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$  (por ejemplo el cuerpo de los números reales  $(\mathbb{R}, \{+, \times\})$  o el cuerpo de los números complejos  $(\mathbb{C}, \{+, \times\})$ ) si

- para una operación de adición vectorial en  $\mathbb{V}$ , denotada  $\underline{x} + \underline{y}$ , con  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}$ ; y
- para una operación de multiplicación escalar en  $\mathbb{V}$ , denotada como  $a\underline{x}$ , con  $\underline{x} \in \mathbb{V}$  y  $a \in \mathbb{F}$

se cumplen las siguientes propiedades con  $a, b \in \mathbb{F}$  y  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{V}$ :

1.  $\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{V}$ . ( $\mathbb{V}$  es cerrado con respecto a la adición vectorial).
2.  $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$ . (Asociatividad de la adición vectorial en  $\mathbb{V}$ ).
3. Existe un elemento neutro  $\underline{0} \in \mathbb{V}$ , tal que para todo  $\underline{x} \in \mathbb{V}$  se cumple que  $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$ . (Existencia de un elemento identidad aditivo en  $\mathbb{V}$ ).
4. Para todo  $\underline{x} \in \mathbb{V}$  existe un elemento  $\underline{y} \in \mathbb{V}$  tal que  $\underline{x} + \underline{y} = \underline{0}$ . (Existencia de inversos aditivos en  $\mathbb{V}$ ).
5.  $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ . (Conmutatividad de la adición vectorial en  $\mathbb{V}$ ).
6.  $a\underline{x} \in \mathbb{V}$ . ( $\mathbb{V}$  es cerrado con respecto a la multiplicación escalar).
7.  $a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}$ . (Asociatividad de la multiplicación escalar en  $\mathbb{V}$ ).
8. Si 1 representa el elemento neutro multiplicativo del cuerpo  $\mathbb{F}$  entonces  $1\underline{x} = \underline{x}$ . (Neutralidad de uno).
9.  $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$ . (Distributividad con respecto a la adición vectorial).
10.  $(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$ . (Distributividad con respecto a la adición del cuerpo  $\mathbb{F}$ ).

A los elementos de  $\mathbb{V}$  se les denomina *vectores*. Nótese que el concepto de espacio lineal es completamente abstracto. Para determinar si un conjunto  $\mathbb{V}$  es un espacio lineal deben especificarse tan solo el conjunto  $\mathbb{V}$ , el cuerpo escalar  $\mathbb{F}$  y las operaciones vectoriales de adición y multiplicación escalar en  $\mathbb{V}$ . Si las diez propiedades anteriores se satisfacen, se dice entonces que  $\mathbb{V}$  es un espacio lineal (o vectorial) y sus elementos son *vectores*. Esto quiere decir, que el concepto anteriormente mencionado de vectores como tuplas de  $n$  elementos en un espacio  $\mathbb{R}^n$  no es correcta desde un punto de vista matemático, sino hasta que se definan las operaciones de suma y producto escalar.

### Combinaciones lineales

Se denomina *combinación lineal* de los vectores  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$  de un espacio lineal  $\mathbb{V}$  a todo vector  $\underline{x}$  del tipo

$$\underline{x} = c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2 + \dots + c_n\underline{u}_n$$



con los coeficientes de la combinación lineal  $c_1, \dots, c_n$ , que son escalares del cuerpo escalar  $\mathbb{F}$  relacionado con el espacio lineal  $\mathbb{V}$ .

Un conjunto de vectores  $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$  se dice ser un *conjunto ligado* o *linealmente dependiente* si al menos uno de ellos es una combinación lineal de los demás. Se denomina *conjunto libre* o *linealmente independiente* cuando los únicos escalares  $c_1, \dots, c_n$  para los que se cumple  $c_1 \underline{u}_1 + c_2 \underline{u}_2 + \dots + c_n \underline{u}_n = \underline{0}$  son  $c_1 = \dots = c_n = 0$ . Se cumple además que

- un conjunto que contiene un solo vector, es libre si el vector es no nulo,
- el vector neutro  $\underline{0}$  no forma parte de ningún sistema libre,
- todo subconjunto de un sistema libre es también libre,
- el número máximo de vectores de un sistema libre es igual a la *dimensión* de dichos vectores.

Un espacio lineal  $\mathbb{V}$  se dice *engendrado* por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene todas las combinaciones lineales de los vectores de  $\mathcal{U}$ , al que se denomina entonces *conjunto generador* del espacio. A cada elemento del conjunto  $\mathcal{U}$  se le denomina en este contexto *vector generador*. Este espacio no varía si

- se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
- se suma un generador con otro,
- si se suprimen los generadores que son una combinación lineal de los demás.

### Subespacios y bases

Cualquier subconjunto  $\mathbb{W}$  del espacio lineal  $\mathbb{V}$  que es cerrado ante las operaciones vectoriales aditivas y de multiplicación escalar se denomina *subespacio* de  $\mathbb{V}$ . Se puede apreciar que un subespacio de  $\mathbb{V}$  es a su vez un espacio lineal sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{F}$  del espacio lineal original. Ejemplos de subespacios del espacio lineal tridimensional  $\mathbb{R}^3$  son por ejemplo todos los planos que pasan por el origen  $[0, 0, 0]^T$ , si se utilizan las definiciones convencionales de adición y multiplicación.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal  $\mathbb{V}$  contiene al menos dos subespacios: el mismo  $\mathbb{V}$  y  $\{\underline{0}\}$ .
- La intersección  $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$  de dos subespacios lineales  $\mathbb{W}_1$  y  $\mathbb{W}_2$  del mismo espacio lineal  $\mathbb{V}$  es a su vez un subespacio lineal.
- La unión  $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$  de dos subespacios lineales  $\mathbb{W}_1$  y  $\mathbb{W}_2$  del mismo espacio lineal  $\mathbb{V}$  no necesariamente es un subespacio lineal.

El espacio lineal  $\mathbb{V}$  se denomina *finito* si existe un sistema de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$$

que es conjunto generador del espacio lineal, y  $n$  es finito. Si los vectores generadores  $\underline{u}_i$  son linealmente independientes entonces se dice que  $\mathcal{U}$  es una *base* de  $\mathbb{V}$ . Todo espacio lineal

finito  $\mathbb{V} \neq \{\mathbf{0}\}$  posee al menos una base. Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores. Este número de vectores es la *dimensión* del espacio lineal. Los siguientes puntos conforman el llamado *teorema fundamental del álgebra lineal* para un espacio lineal finito  $\mathbb{V}$  con una base de  $n$  elementos con  $n \in \mathbb{N}^+$ :

1. toda base de  $\mathbb{V}$  tiene exactamente  $n$  elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de  $\mathbb{V}$  tiene a lo sumo  $n$  elementos y corresponde a una base de  $\mathbb{V}$  si y solo si tiene exactamente  $n$  elementos,
3. cualquier subconjunto de  $\mathbb{V}$  que actúa como conjunto generador de  $\mathbb{V}$  debe tener al menos  $n$  elementos y es una base si y solo si tiene exactamente  $n$  elementos,
4. si los elementos de una determinada base en  $\mathbb{V}$  se toman en un orden determinado, cualquier elemento de  $\mathbb{V}$  puede entonces ser representado por una secuencia única de *coordenadas*.

El último punto indica que si  $\mathbb{V}$  tiene como base a  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , entonces un vector  $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$  puede representarse utilizando tan solo los coeficientes  $c_i$  y manteniendo fija la base:  $\mathbf{x} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ . Ninguna otra secuencia puede representar con la misma base al vector  $\mathbf{x}$ , puesto que si existiese alguna otra representación equivalente  $\mathbf{x} = d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + \dots + d_n\mathbf{u}_n$  entonces la diferencia de ambas representaciones debería ser cero y

$$(d_1 - c_1)\mathbf{u}_1 + (d_2 - c_2)\mathbf{u}_2 + \dots + (d_n - c_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

se cumple solo si  $d_i = c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  por el requisito de que la base  $\mathcal{U}$  debe ser linealmente independiente.

### 3.1.2 Tipos de espacios lineales

Los espacios lineales se clasifican de acuerdo a las propiedades de las operaciones definidas para sus elementos. A continuación se enumeran los más utilizados en la literatura técnica.

#### Espacio métrico

Un *espacio métrico* es una estructura algebraica en la que se define la operación  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

denominada *métrica* o *distancia*, la cual debe satisfacer las siguientes condiciones:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$  (no negatividad)
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  (reflexividad)
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$  (identidad de los indiscernibles)
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (simetría)
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (desigualdad del triángulo)

Nótese que el concepto de espacio métrico es en realidad independiente del concepto de espacio lineal, pues solo se requiere el conjunto de elementos, que no necesariamente deben ser vectores, más una métrica definida para los elementos de dicho conjunto.

## Espacio lineal normado

Un espacio lineal normado es un espacio lineal junto con una operación denominada *norma*, denotada usualmente como  $\|\cdot\|$  que asigna un número real a cada punto de  $\mathbb{V}$

$$\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

y que debe cumplir con las siguientes propiedades para  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}$ , y  $a \in \mathbb{F}$ .

- $\|\underline{x}\| \geq 0$  (positividad)
- $\|a\underline{x}\| = |a|\|\underline{x}\|$  (escalabilidad positiva)
- $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$  (desigualdad de Minkowski)
- $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ .

Si las primeras tres propiedades se cumplen, no así la cuarta, entonces a la operación se le denomina una *seminorma*. Usualmente se le asigna a la norma  $\|\underline{x}\|$  el significado de longitud o magnitud del vector  $\underline{x}$ .

Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues se puede definir la métrica como

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| \quad (3.1)$$

El lector puede demostrar que si la operación  $\|\cdot\|$  cumple con todas las propiedades de una norma, y la distancia se define como (3.1), entonces todas las propiedades para una métrica son cumplidas por  $d(\cdot, \cdot)$ .

## Espacio de Banach

En el capítulo 1 se definió una *secuencia de Cauchy* como una secuencia cuyos términos se acercan arbitrariamente entre sí en tanto la secuencia progresa. Para un espacio lineal normado la definición de secuencia de Cauchy se puede replantear como

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > N : \|\underline{x}_n - \underline{x}_m\| < \epsilon$$

donde se reemplazó la operación de valor absoluto por la norma.

Un espacio normado se denomina *espacio de Banach* si es *completo* con respecto a la norma, lo que quiere decir que cualquier secuencia de Cauchy de elementos en el espacio lineal converge a un elemento en el mismo espacio, en el sentido de que la norma de las diferencias entre los elementos de la secuencia tiende a cero.

## Espacios con producto interno

Si a la estructura de espacio lineal se le agrega el concepto de *producto interno* aparecen entonces los llamados espacios con producto interno o espacios pre-Hilbert. El concepto de producto interno (a veces denominado producto escalar<sup>1</sup>) permite introducir conceptos

---

<sup>1</sup>Nótese que en este contexto el concepto de producto escalar es diferente a la multiplicación escalar utilizada en la definición de espacio lineal. Para evitar confusiones se preferirá aquí el uso del término *producto interno* sobre *producto escalar*.

geométricos como ángulos y longitudes vectoriales. El producto interno es una operación binaria

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$$

que satisface los siguientes axiomas:

- $\forall \underline{x} \in \mathbb{V}, \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ . (No negatividad)  
Esto implica que el producto interno de un vector por sí mismo  $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle$  debe ser real, puesto que el operador “ $\geq$ ” solo está definido para los números reales.
- $\forall \underline{x} \in \mathbb{V}, \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0$  si y solo si  $\underline{x} = \underline{0}$ . (No degenerabilidad).
- $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}, \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle^*$ . (Simetría o conmutatividad conjugada).
- $\forall a \in \mathbb{F}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}, \langle \underline{x}, a\underline{y} \rangle = a \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ ;  
 $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{V}, \langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$ . (Sesquilinealidad).

Nótese que si el cuerpo  $\mathbb{F}$  corresponde a los números reales  $\mathbb{R}$  entonces la simetría conjugada corresponde a la conmutatividad del producto interno, esto es  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ . Combinando la sesquilinealidad con la simetría conjugada se obtiene además (ver problema 3.3)

$$\forall a \in \mathbb{F}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}, \quad \langle a\underline{x}, \underline{y} \rangle = a^* \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad (3.2)$$

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{V}, \quad \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle \quad (3.3)$$

Utilizando el producto interno puede definirse la *norma* de un vector  $\underline{x}$  como

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} \quad \Rightarrow \quad \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \|\underline{x}\|^2 \quad (3.4)$$

Esta norma está correctamente definida si se considera el axioma de no negatividad en la definición del producto interno. También se cumple el requisito de tener un número real como valor. Utilizando la simetría conjugada se demuestra la escalabilidad positiva:

$$\begin{aligned} \|a\underline{x}\| &= \sqrt{\langle a\underline{x}, a\underline{x} \rangle} = \sqrt{a \langle a\underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{a \langle \underline{x}, a\underline{x} \rangle^*} \\ &= \sqrt{aa^* \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{|a|^2 \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = |a| \|\underline{x}\| \end{aligned}$$

Las siguientes demostraciones concluyen la verificación de que los axiomas para una norma se cumplen con la anterior definición basada en el producto interno. Por ello, un espacio con producto interno es a su vez un espacio lineal normado.

Utilizando únicamente los axiomas anteriores puede demostrarse la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* [3] para  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{V}$  que establece

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \|\underline{y}\|. \quad (3.5)$$

Para ello se observa primero que si  $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| = 0$  entonces (3.5) se cumple porque el lado derecho nunca es negativo. Asíumase entonces para el resto de la demostración, que  $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \neq 0$ . Por la propiedad de no negatividad se cumple

$$\langle \underline{x} + a\underline{y}, \underline{x} + a\underline{y} \rangle \geq 0$$

para cualquier escalar  $a \in \mathbb{F}$ . Por la sesquilinealidad, lo anterior se puede expresar como

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + a^* \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + a \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + |a|^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle \geq 0$$

Sea  $b$  un número real arbitrario y tómesese  $a = b\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle^*$ . Sustituyendo se obtiene

$$\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + 2b|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^2 + b^2|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^2\langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \geq 0$$

El lado izquierdo es una ecuación cuadrática de  $b$  con coeficientes reales. Puesto que esta ecuación debe ser mayor o igual que cero para todo  $b$ , el determinante de la ecuación no puede ser positivo, puesto que si lo fuera tendría dos raíces reales, lo que implicaría que para un intervalo de  $b$  su valor sería negativo. Esto es:

$$|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^4 - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle |\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^2 \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \leq 0$$

y puesto que se partió del hecho que  $|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle| \neq 0$  entonces puede dividirse la ecuación anterior por  $|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^2$  para obtener

$$\begin{aligned} |\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^2 - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle &\leq 0 \\ |\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle|^2 &\leq \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ |\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle| &\leq \|\underline{\mathbf{x}}\| \|\underline{\mathbf{y}}\| \end{aligned}$$

con lo que la desigualdad queda demostrada.

La *desigualdad de Minkowski* es otro resultado importante del uso de la norma (3.4):

$$\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|$$

que se demuestra a continuación.

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle^* + \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \end{aligned}$$

Considerando que para un número complejo  $z = x + jy$  se cumple

$$z + z^* = 2x \leq 2|z| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

entonces

$$\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle| + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2$$

y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3.5) entonces

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 &\leq \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &\leq (\|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|)^2 \end{aligned}$$

y aplicando la raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad se comprueba finalmente la desigualdad de Minkowski. A partir de ésta, y sustituyendo  $\underline{\mathbf{x}}$  por  $\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{h}}$ , y  $\underline{\mathbf{y}}$  por  $\underline{\mathbf{h}} - \underline{\mathbf{y}}$  se obtiene la *desigualdad del triángulo*

$$\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{h}}\| + \|\underline{\mathbf{h}} - \underline{\mathbf{y}}\| \quad .$$

En estos espacios lineales con producto interno se dice que dos vectores  $\underline{x}$  y  $\underline{y}$  diferentes de  $\underline{0}$  son *ortogonales* si su producto interno  $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$  es 0. Además, el ángulo entre los dos vectores se define indirectamente por medio de la ecuación

$$\cos(\angle(\underline{x}, \underline{y})) = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|}. \quad (3.6)$$

con lo que se deduce entonces que la magnitud del ángulo entre dos vectores ortogonales es de  $\pi/2$ , puesto que el coseno del ángulo entre ellos es cero. Nótese que con la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede asegurar para los espacios basados en el cuerpo  $\mathbb{R}$  que el lado derecho de la ecuación siempre estará entre -1 y 1, por lo que el valor del ángulo siempre será real. Si el cuerpo base es complejo ( $\mathbb{C}$ ), entonces en general el lado derecho adquirirá valores complejos.

Si  $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \subset \mathbb{V}$  es una base de  $\mathbb{V}$  y todo par de vectores  $\underline{u}_i$  y  $\underline{u}_k$  ( $i \neq k$ ) es ortogonal, se dice que  $\mathcal{U}$  es una *base ortogonal* de  $\mathbb{V}$ . Si además se cumple que la norma de todos los vectores generadores  $\|\underline{u}_i\|$  es uno, entonces a  $\mathcal{U}$  se le denomina una *base ortonormal*.

**Ejemplo 3.1** Si  $\mathcal{U}$  es una base ortogonal de  $\mathbb{V}$ , ¿cómo se pueden calcular los coeficientes para representar un vector  $\underline{x} \in \mathbb{V}$  en dicha base?

**Solución:**

Si  $\mathcal{U}$  es una base ortogonal de  $\mathbb{V}$  se cumple para todo vector  $\underline{x} \in \mathbb{V}$

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n c_i \underline{u}_i \quad (3.7)$$

Realizando el producto escalar a ambos lados con un vector generador específico  $\underline{u}_k$ , utilizando las propiedades del producto interno descritas anteriormente, y haciendo uso de la ortogonalidad de los vectores generadores  $\underline{u}_i$  se obtiene

$$\langle \underline{u}_k, \underline{x} \rangle = \left\langle \underline{u}_k, \sum_{i=1}^n c_i \underline{u}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \underline{u}_k, c_i \underline{u}_i \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle \underline{u}_k, \underline{u}_i \rangle = c_k \langle \underline{u}_k, \underline{u}_k \rangle = c_k \|\underline{u}_k\|^2$$

con lo que se deriva

$$c_k = \frac{\langle \underline{u}_k, \underline{x} \rangle}{\|\underline{u}_k\|^2} \quad (3.8)$$

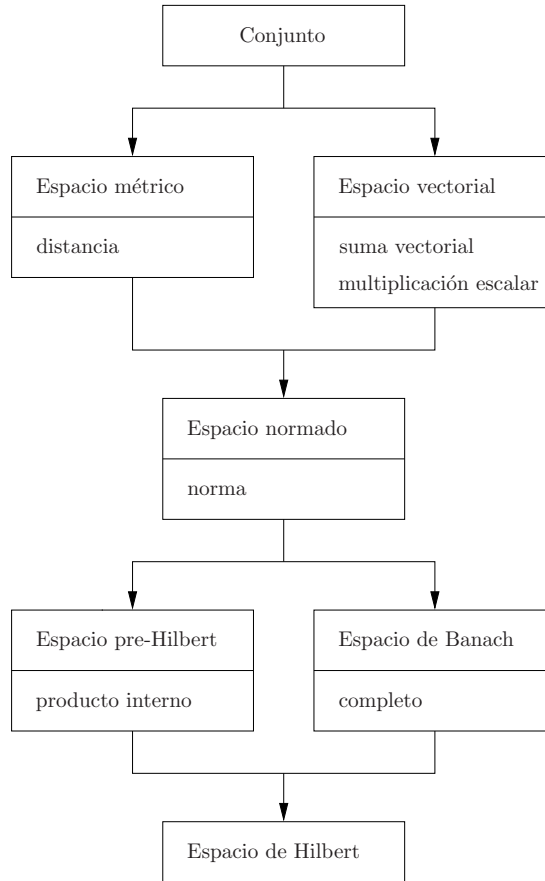
3.1

## Espacio de Hilbert

Un espacio con producto interno se denomina *espacio de Hilbert* si es a su vez un espacio de Banach, es decir, si es *completo* con respecto a la norma definida a través del producto interno, lo que quiere decir que cualquier secuencia de Cauchy de elementos en el espacio lineal converge a un elemento en el mismo espacio. Los espacios de Hilbert se utilizan en

la generalización del concepto de ciertas transformaciones lineales como la transformada de Fourier, y son de crucial importancia en la formulación matemática de la mecánica cuántica.

La figura 3.1 muestra las relaciones entre los distintos tipos de espacios lineales descritos anteriormente.



**Figura 3.1:** Relaciones entre los espacios lineales. Cada espacio *hereda* las operaciones y características de sus antecesores. Así, un espacio de Hilbert es completo, tiene producto interno a través del cual se define la norma que a su vez se emplea para definir la métrica, y tiene operaciones de suma lineal y producto escalar.

## Espacios euclidianos

El *espacio euclidiano* de  $n$  dimensiones es un caso particular de espacio de Hilbert, donde los vectores se representan por tuplas de  $n$  elementos: Por ejemplo, en el espacio euclidiano  $\mathbb{F}^n$ , definido sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$ , un vector  $\underline{x}$  se representa como

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

donde cada una de las componentes  $x_i$  del vector  $\underline{\mathbf{x}}$  son elementos del cuerpo  $\mathbb{F}$ . En un espacio euclidiano el producto interno utilizado es siempre el *producto punto*, definido como

$$\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \stackrel{!}{=} \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}^{*T} \underline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i. \quad (3.9)$$

Con esto se puede definir la norma euclidiana  $\|\underline{\mathbf{x}}\|$  de un vector  $\underline{\mathbf{x}}$  como

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle} = \sqrt{\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{x}}} = \sqrt{\underline{\mathbf{x}}^{*T} \underline{\mathbf{x}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

La métrica euclidiana puede describirse entonces en términos de la norma:

$$d_2(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (3.10)$$

El espacio euclidiano representa la generalización de los espacios matemáticos en dos y tres dimensiones conocidos y estudiados ya en la antigüedad por Euclides<sup>2</sup>. A la función de distancia  $d_2$ , basada en el teorema de Pitágoras, se le conoce como *métrica euclidiana*.

Cualquier base ortogonal  $\mathcal{U}$  para un espacio euclidiano de  $n$  dimensiones contiene entonces exactamente  $n$  vectores ortogonales entre sí. Si la base es ortonormal, entonces los coeficientes de la combinación lineal se determinan como (ver (3.8))

$$x_k = \langle \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{x}} \rangle$$

y (3.7) se puede escribir entonces

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \langle \underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{x}} \rangle \underline{\mathbf{u}}_i \quad (3.11)$$

donde la norma de  $\underline{\mathbf{x}}$  estará dada por

$$\|\underline{\mathbf{x}}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{x}} \rangle|^2$$

que corresponde al teorema de Pitágoras, es decir, el cuadrado de la norma de  $\underline{\mathbf{x}}$  es igual a la suma de los cuadrados de los componentes del vector  $\underline{\mathbf{x}}$  en la base ortonormal  $\mathcal{U}$ .

A la base ortonormal del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  conformada por los vectores  $\underline{\mathbf{u}}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $\underline{\mathbf{u}}_2 = [0, 1, \dots, 0]^T$ , ...,  $\underline{\mathbf{u}}_n = [0, 0, \dots, 1]^T$  se le denomina *base canónica*, y se utiliza como referencia “universal” o “absoluta” para representar los vectores pertenecientes al espacio engendrado por dicha base. Obsérvese que el producto interno de un vector  $\underline{\mathbf{x}} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  por algún vector  $\underline{\mathbf{u}}_i$  de la base canónica extrae exactamente la componente  $x_i$ :

$$x_i = \langle \underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{x}} \rangle$$

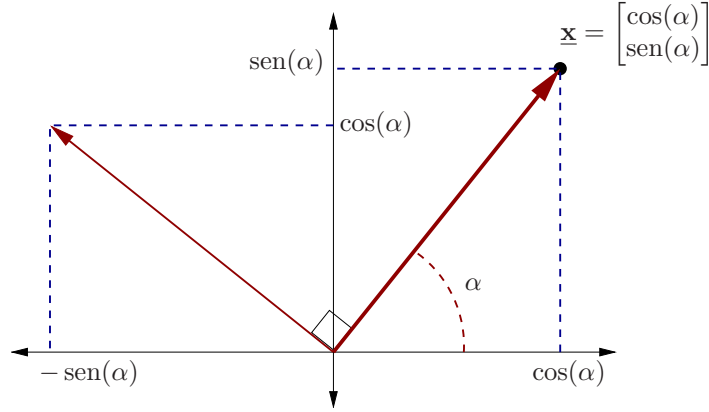
---

<sup>2</sup>Euclides fue un matemático griego del s. III a. C., quien escribió *Elementos*, que es la base de la geometría plana actual.



**Ejemplo 3.2** Dado un vector  $\underline{x} = [\cos(\alpha), \sin(\alpha)]^T$  en un espacio euclidiano bidimensional, encuentre otro vector de magnitud 1 ortogonal y demuestre que su producto interno es cero.

**Solución:** Un vector ortogonal a  $\underline{x} = [\cos(\alpha), \sin(\alpha)]^T$  forma un ángulo de  $90^\circ$  con él. La figura 3.2 muestra una solución gráfica: el vector  $\underline{x}_\perp = [-\sin(\alpha), \cos(\alpha)]^T$  es perpendicular a  $\underline{x}$ .



**Figura 3.2:** Construcción geométrica para obtener un vector ortogonal.

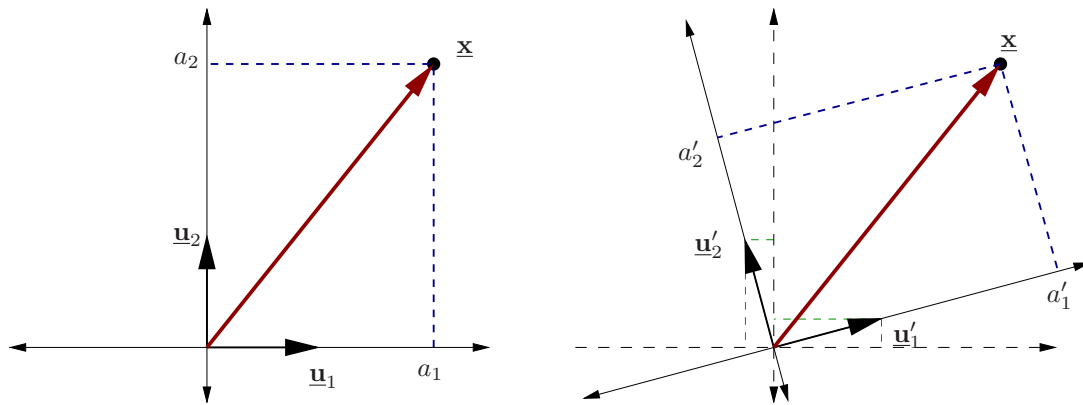
La misma conclusión puede obtenerse utilizando identidades trigonométricas en la expresión  $[\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})]^T$ .

El producto  $\langle \underline{x}, \underline{x}_\perp \rangle$  se calcula entonces como

$$\langle \underline{x}, \underline{x}_\perp \rangle = [\cos(\alpha), \sin(\alpha)] \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = -\cos(\alpha) \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$

3.2

La figura 3.3 muestra la representación tradicional de un vector  $\underline{x}$  en un espacio euclidiano bidimensional. Para la figura en el lado izquierdo se ha utilizado la base ortonormal canónica

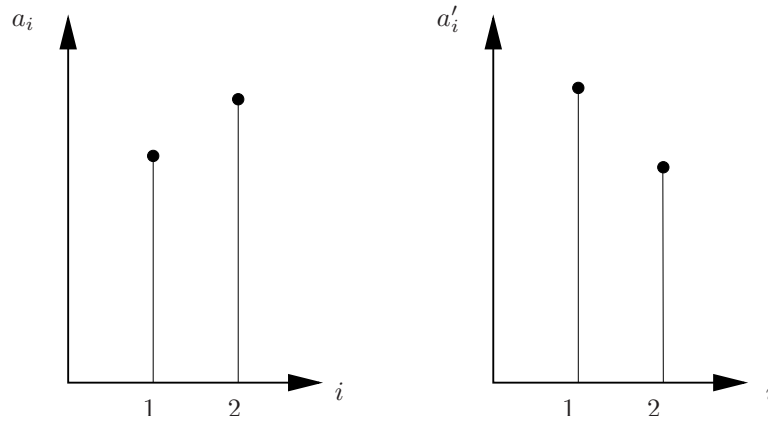


**Figura 3.3:** Representación de un vector euclidiano bidimensional  $\underline{x}$  utilizando dos bases ortonormales diferentes.

$\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ , con los coeficientes escalares  $a_1$  y  $a_2$ . El lado derecho muestra el vector con

otra base ortonormal  $\mathcal{U}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ . Se puede apreciar que los coeficientes  $a'_1$  y  $a'_2$  de  $\mathbf{x}$  con la nueva base  $\mathcal{U}'$  son diferentes a los obtenidos con  $\mathcal{U}$ . Sin embargo, si se establece claramente una base, las componentes calculadas pueden utilizarse para representar a cualquier vector  $\mathbf{x}$  de forma única e inequívoca, tal y como lo establece el teorema fundamental del álgebra lineal mencionado anteriormente. Nótese que cada uno de los vectores en la base  $\mathcal{U}'$  puede representarse en términos de combinaciones lineales de los vectores en la base canónica  $\mathcal{U}$ .

De esta forma, es posible representar los mismos vectores a través de los coeficientes generados para una base determinada, como lo muestra la figura 3.4 para las dos bases en la figura 3.3.



**Figura 3.4:** Representación alternativa del vector euclidiano en la figura 3.3 para las bases ortonormales utilizadas allí.

Esta forma de representación de los coeficientes lineales facilita el manejo de vectores con más de tres dimensiones, que son difíciles o incluso imposibles de imaginar en un espacio geométrico.

**Ejemplo 3.3** Una base ortonormal  $\mathcal{U}'$  en un espacio euclidiano tridimensional está compuesta por los vectores

$$\mathbf{u}'_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$$

$$\mathbf{u}'_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$$

$$\mathbf{u}'_3 = [x_3, y_3, z_3]^T$$

cuyas coordenadas  $x_i, y_i$  y  $z_i$  indican las componentes de cada vector de esta base en la base canónica  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  con

$$\mathbf{u}_1 = [1, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{u}_2 = [0, 1, 0]^T$$

$$\mathbf{u}_3 = [0, 0, 1]^T$$

Encuentre los coeficientes  $c_i$  para representar al vector  $\mathbf{v} = [a, b, c]^T$  (también representado en la base canónica) como combinación lineal de los vectores  $\mathbf{u}'_i$ .

**Solución:** Se sabe que

$$\underline{\mathbf{v}} = c_1 \underline{\mathbf{u}}'_1 + c_2 \underline{\mathbf{u}}'_2 + c_3 \underline{\mathbf{u}}'_3$$

donde, por ser la base  $\mathcal{U}'$  ortonormal, se cumple que

$$c_i = \frac{\langle \underline{\mathbf{u}}'_i, \underline{\mathbf{v}} \rangle}{\|\underline{\mathbf{u}}'_i\|^2} = \langle \underline{\mathbf{u}}'_i, \underline{\mathbf{v}} \rangle$$

Puesto que el espacio utilizado es euclidiano, se utiliza el producto punto como producto interno, y así:

$$c_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$$

$$c_2 = ax_2 + by_2 + cz_2$$

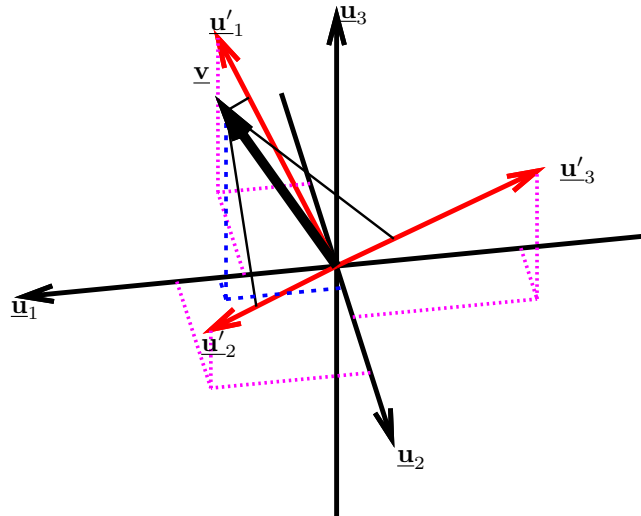
$$c_3 = ax_3 + by_3 + cz_3$$

que puede expresarse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

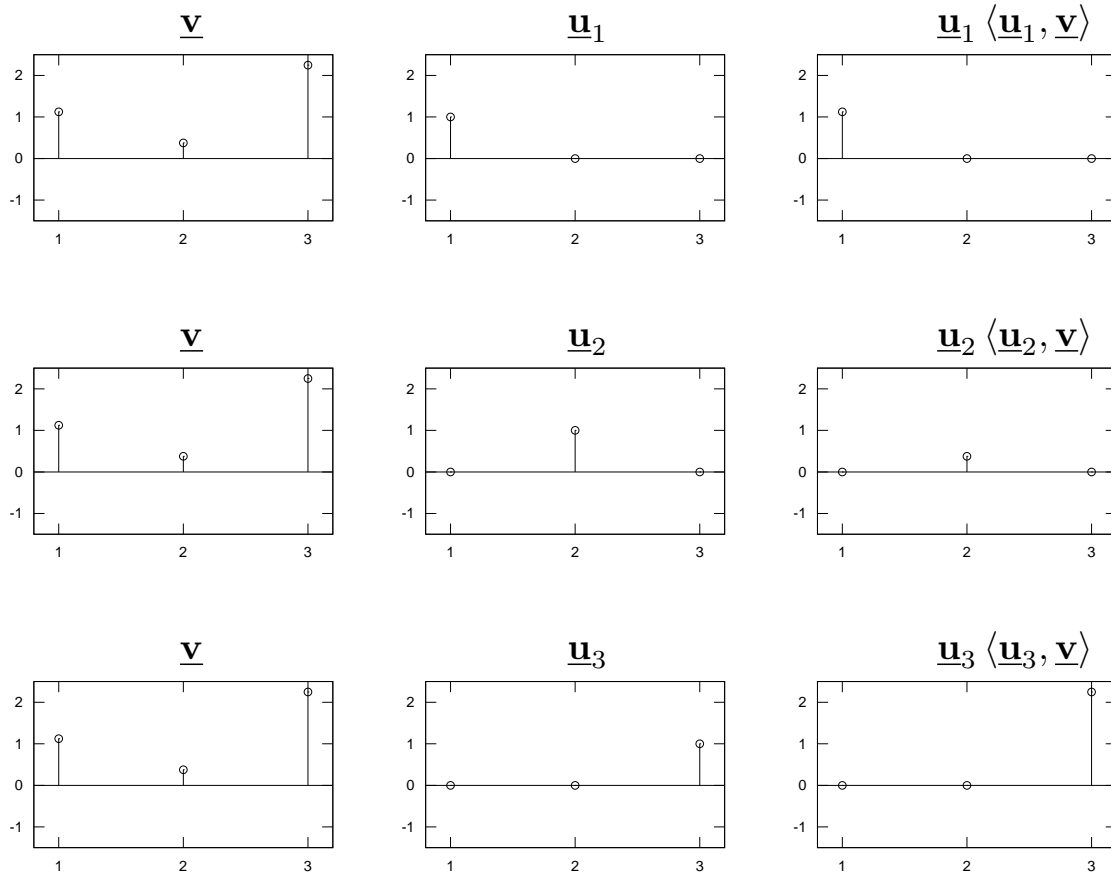
Así, el producto del vector representado en la base canónica puede ser transformado a otro vector en la base  $\mathcal{U}'$  multiplicándolo por la izquierda con una matriz cuyas filas corresponden a los vectores generadores de la nueva base, representados sobre la base canónica.

Los valores  $c_i$  pueden interpretarse como “qué tanto” de cada vector  $\underline{\mathbf{u}}_i$  está contenido en  $\underline{\mathbf{v}}$ , de modo que la suma de los tres “tantos” genera dicho vector.



**Figura 3.5:** Vector representado en una base ortogonal tridimensional.

La figura 3.5 muestra un ejemplo gráfico para ilustrar estos conceptos. Se ilustran con líneas punteadas las componentes de los vectores de la base  $\mathcal{U}'$  sobre la base canónica  $\mathcal{U}$ , y las *proyecciones* del vector  $\underline{\mathbf{v}}$  sobre los vectores de la base ortogonal. La figura 3.6 presenta la descomposición del vector  $\underline{\mathbf{v}}$  en sus tres componentes de la base canónica, mientras que la



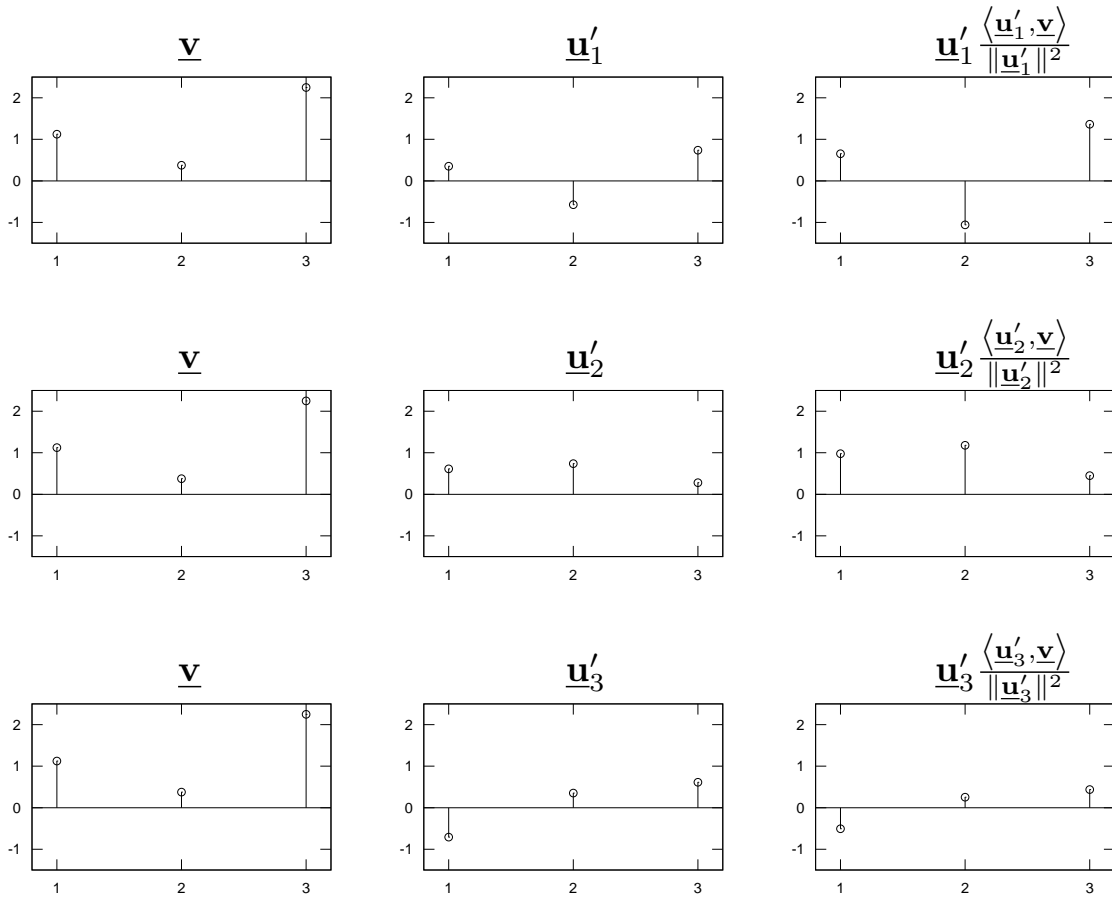
**Figura 3.6:** Descomposición del vector  $\underline{v}$  en el ejemplo 3.3 en sus componentes de la base canónica ortonormal. La primera columna muestra al vector  $\underline{v}$ . La segunda columna muestra a los vectores de la base canónica, con todas sus componentes excepto una iguales a cero. La tercera columna muestra al vector de la base canónica escalado por el coeficiente correspondiente de la combinación lineal, igual a  $\langle \underline{u}_i, \underline{x} \rangle$ . La suma de los vectores en la tercer columna es igual al vector original  $\underline{v}$ .

figura 3.7 muestra la descomposición de dicho vector en las componentes de la nueva base, representados éstos en la base canónica.

3.3

### 3.1.3 Ortogonalidad de funciones

La representación de un vector  $\underline{x}$  a través de sus componentes para una determinada base  $\mathcal{U}$  puede interpretarse como una función  $x : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{F}$  que asigna a cada vector generador  $\underline{u}_i$  con índice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  su coeficiente correspondiente con un valor en el cuerpo  $\mathbb{F}$ , es decir,  $x(i) = c_i$  es una función que permite obtener el valor de los coeficientes para cada componente de la base utilizada. Extendiendo esta idea es incluso posible representar vectores con un número infinito de dimensiones, utilizando funciones de la forma  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}$ . Con esta nueva notación funcional, para un espacio euclidiano el producto punto se puede



**Figura 3.7:** Descomposición del vector  $\underline{v}$  en el ejemplo 3.3 en sus componentes de la base ortogonal, expresada en términos de la base canónica. La primera columna muestra al vector  $\underline{v}$ . La segunda columna muestra a los vectores de la base ortogonal en términos de la base canónica. La tercera columna muestra al vector de la base ortogonal escalado por el coeficiente correspondiente de la combinación lineal  $c_i = \langle \underline{u}_i, \underline{x} \rangle / \|\underline{u}_i\|^2$ . La suma de los vectores en la tercer columna es igual al vector original  $\underline{v}$ .

representar como

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=n_1}^{n_2} x^*(i)y(i) \quad (3.12)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  pueden ser valores finitos o infinitos, en cualquier rango de enteros consecutivos tales que  $n_1 \leq n_2$ . Esta expresión equivale al producto punto definido anteriormente en (3.9). Nótese que este simple cambio de representación del vector de tupla a función no ha alterado ninguno de los conceptos desarrollados hasta ahora para espacios lineales. En principio, un vector está ahora siendo representado por una función, o dicho de otra forma, estas funciones de variable entera son elementos de un espacio “lineal-funcional”.

A partir de esta representación resulta una consecuencia natural eliminar la restricción para la variable independiente de estos “vectores-funciones” de ser números enteros, y permitirles tomar valores reales o complejos, generalizando o reemplazando así enteramente el concepto de vectores por funciones. El espacio lineal se transforma entonces en un *espacio funcional*, donde todos los conceptos introducidos anteriormente siguen siendo válidos si los axiomas

básicos de espacios lineales hasta espacios de Hilbert se mantienen. Se interpreta entonces ahora que una función es un elemento del espacio funcional, así como anteriormente un vector era un elemento del espacio lineal.

El producto interno de dos funciones  $x(t)$  y  $y(t)$  definidas en un intervalo  $[a, b]$  se generaliza entonces transformando la suma (3.12) en la siguiente integral

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x^*(t)y(t) dt \quad (3.13)$$

con lo que se concluye que dos funciones son ortogonales en el intervalo  $[a, b]$  si (3.13) es cero.

La norma de la función se define utilizando la ecuación (3.13), de igual forma que se hizo para los vectores con la ecuación (3.4):

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \quad (3.14)$$

Con estas definiciones se puede incluso tomar el concepto de ángulo entre vectores (3.6) y generalizarlo como ángulo entre funciones:

$$\cos(\angle(x(t), y(t))) = \frac{\langle x(t), y(t) \rangle}{\|x(t)\| \|y(t)\|} \quad (3.15)$$

con lo que se puede afirmar que el ángulo entre dos funciones ortogonales es  $\pi/2$ .

## 3.2 Series de Fourier

### 3.2.1 Series generalizadas de Fourier

Un conjunto (posiblemente infinito) de funciones ortogonales puede entonces servir de base generadora para un espacio funcional, de la misma manera que vectores ortogonales sirven de base generadora para espacios lineales. Sea  $\mathcal{U}$  un conjunto de funciones ortogonales

$$\mathcal{U} = \{u_{n_1}(t), u_{n_1+1}(t) \dots, u_{n_2-1}(t), u_{n_2}(t)\} . \quad (3.16)$$

Este conjunto puede entonces utilizarse como conjunto generador de un espacio funcional para toda función

$$x_m(t) = \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \quad (3.17)$$

donde  $c_i$  representa los coeficientes escalares de la combinación lineal de las funciones generadoras  $u_i(t)$ .

Asúmase ahora que se desea aproximar una función  $x(t)$  para un intervalo  $[t_1, t_2]$  con la combinación lineal  $x_m(t)$  de  $m = n_2 - n_1 + 1$  funciones generadoras definidas en ese mismo

intervalo. Se desea minimizar la “distancia” entre  $x(t)$  y  $x_m(t)$ , definida a través de la norma de la diferencia de las funciones, esto es, se desea minimizar  $\|x(t) - x_m(t)\|$  (comparar por ejemplo con la métrica euclidiana en la ecuación (3.10)). Al cuadrado de esta distancia se le denomina función de error  $E$ , que, dada la base funcional  $\mathcal{U}$  en (3.16), dependerá entonces de los valores de los coeficientes escalares  $c_i$ . Utilizando las definiciones anteriores se tiene que

$$E(c_{n_1}, c_{n_1+1}, \dots, c_{n_2-1}, c_{n_2}) = \|x(t) - x_m(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - x_m(t)|^2 dt \quad (3.18)$$

Encapsulando todos coeficientes  $c_i$  como vector  $\underline{c} = [c_{n_1}, c_{n_1+1}, \dots, c_{n_2-1}, c_{n_2}]^T$  e insertando (3.17) en (3.18) se obtiene entonces:

$$E(\underline{c}) = \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \right|^2 dt. \quad (3.19)$$

La minimización de  $E(\underline{c})$  tiene como condición necesaria (pero no suficiente) que el gradiente de la función de error respecto a los coeficientes sea  $\underline{0}$ :

$$\nabla E(\underline{c}) = \left[ \frac{\partial E(\underline{c})}{\partial c_{n_1}}, \frac{\partial E(\underline{c})}{\partial c_{n_1+1}}, \dots, \frac{\partial E(\underline{c})}{\partial c_{n_2-1}}, \frac{\partial E(\underline{c})}{\partial c_{n_2}} \right]^T \stackrel{!}{=} [0, 0, \dots, 0]^T.$$

Se debe cumplir entonces que

$$\frac{\partial E(\underline{c})}{\partial c_k} = 0$$

para todo  $k = n_1, \dots, n_2$ , lo que implica que

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \right|^2 dt = 0.$$

Para el caso especial en que las funciones y coeficientes son reales, y considerando que para valores reales  $\partial|t|^2/\partial t = 2t$  se obtiene<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_k} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \right|^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} 2 \left( x(t) - \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \right) (-u_k(t)) dt = 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x(t) u_k(t) dt &= \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i(t) u_k(t) dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para el caso especial en que  $u_i(t)$  y  $u_k(t)$  sean ortogonales se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) u_k(t) dt = c_k \|u_k(t)\|^2$$

---

<sup>3</sup>Nótese que para valores complejos de  $x$ , esta derivada no existe, pues  $|x|^2 = xx^*$  no es una función analítica (ver problema 3.10)

con lo que finalmente se puede obtener el valor óptimo para  $c_k$ :

$$c_k = \frac{1}{\|u_k(t)\|^2} \int_{t_1}^{t_2} x(t)u_k(t) dt = \frac{\langle x(t), u_k(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \quad (3.21)$$

que es un resultado concorde a lo utilizado para vectores (comparar con la ecuación (3.8)).

Para demostrar que estos valores obtenidos para  $c_k$  corresponden en efecto a un mínimo para la función de error  $E$ , debe demostrarse que la matriz Hessiana de la función de error es definida positiva, es decir, que todos sus valores propios son positivos. Esta matriz está dada por:

$$\mathbf{H}(E(\underline{\mathbf{c}})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_1}^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_1} \partial c_{n_1+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_1} \partial c_{n_2}} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_1+1} \partial c_{n_1}} & \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_1+1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_1+1} \partial c_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_2} \partial c_{n_1}} & \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_2} \partial c_{n_1+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 E}{\partial c_{n_2}^2} \end{bmatrix}$$

Considerando la primera derivada en (3.20) junto con la ortogonalidad de las funciones  $u_i(t)$  se puede calcular la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\underline{\mathbf{c}})}{\partial c_k} &= -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)u_k(t) dt + \sum_{i=n_1}^{n_2} 2c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i(t)u_k(t) dt \\ &= -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)u_k(t) dt + 2c_k \|u_k(t)\|^2 \\ \frac{\partial^2 E(\underline{\mathbf{c}})}{\partial c_j \partial c_k} &= \begin{cases} 0 & \text{para } j \neq k \\ 2\|u_k(t)\|^2 & \text{para } j = k \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que la matriz Hessiana se simplifica a una matriz diagonal

$$\mathbf{H}(E(\underline{\mathbf{c}})) = \begin{bmatrix} 2\|u_{n_1}(t)\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\|u_{n_1+1}(t)\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\|u_{n_2}(t)\|^2 \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos en la diagonal son positivos. Puesto que los valores propios de una matriz diagonal coinciden con las entradas en la diagonal de dicha matriz, entonces los valores propios son todos positivos, la matriz es definida positiva y por lo tanto los valores encontrados para  $c_k$  minimizan a la función de error  $E(\underline{\mathbf{c}})$ .

Una conclusión importante de (3.21) es que si se utiliza una base ortogonal para la aproximación de una función  $x(t)$ , el valor óptimo para el coeficiente  $c_k$  depende tan solo de la función generadora  $u_k(t)$  correspondiente al coeficiente a calcular y de la función  $x(t)$  que se desea aproximar. Estos coeficientes no dependen ni del número de funciones en la base funcional, ni de la forma de otras funciones generadoras.



El resultado anterior también se puede obtener por un método además válido para funciones y coeficientes complejos: se procede de la misma forma que para obtener los coeficientes de la combinación lineal de vectores ortogonales. A partir de la representación de la función  $x(t) \approx x_m(t)$  como serie (ver ecuación (3.17)), se evalúa el producto interno por una función generadora particular  $u_k(t)$  para obtener

$$\begin{aligned} \langle u_k(t), x(t) \rangle &\approx \left\langle u_k(t), \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \right\rangle \\ &= \sum_{i=n_1}^{n_2} \langle u_k(t), c_i u_i(t) \rangle \\ &= \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i \langle u_k(t), u_i(t) \rangle \\ &= c_k \langle u_k(t), u_k(t) \rangle \end{aligned}$$

con lo que se deriva

$$c_k = \frac{\langle u_k(t), x(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2}. \quad (3.22)$$

A esta misma conclusión se puede llegar trabajando por separado las componentes real e imaginaria de los coeficientes  $c_i$  (ver problema 3.12).

Si la base funcional  $\{u_k(t)\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  es completa, es decir, si la aproximación de la función  $x(t)$  con la serie infinita converge a la función:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t) \quad (3.23)$$

con las funciones generadoras  $u_k(t)$  ortogonales y los coeficientes  $c_k$  calculados con (3.22), entonces a la expansión en serie se le denomina *serie generalizada de Fourier*. A (3.22) se le conoce como ecuación de *análisis* y a (3.23) como ecuación de *síntesis*.

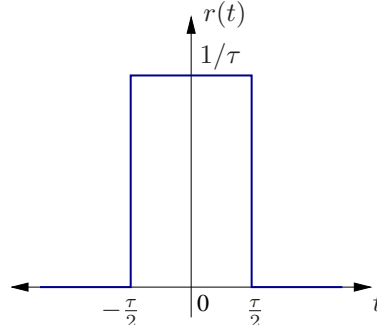
Se planteará el lector ahora la pregunta, qué base funcional puede tomar el papel de la base canónica ortonormal utilizada en espacios vectoriales euclidianos. En aquel caso, el producto interno de un vector  $\underline{\mathbf{u}}_i$  de la base canónica por un vector  $\underline{\mathbf{x}} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  retornaba exactamente la  $i$ -ésima componente  $x_i$  de dicho vector; es decir  $\langle \underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{x}} \rangle = x_i$ . Por ejemplo, en un espacio tridimensional, con el vector de la base canónica  $\underline{\mathbf{u}}_1 = [1, 0, 0]^T$  se obtiene la componente  $x_1$  del vector  $[x_1, x_2, x_3]^T$ . En el caso de funciones se requiere un nuevo concepto que permita entonces extraer con el producto interno el valor de una función para un valor particular de su variable independiente. Llámese entonces  $\delta(t - t')$  a una función real que cumple la *propiedad de muestreo*:

$$x(t') = \langle \delta(t - t'), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') x(t) dt \quad .$$

Si se toma por ejemplo  $x(t) = 1$  y se realiza un cambio de variable  $\xi = t - t'$  entonces se debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1$$

lo que indica que el “área” bajo la curva de la función  $\delta(t)$  debe ser igual a uno. Para derivar el papel de la función  $\delta(t)$  en la base canonica funcional se parte de un impulso rectangular de área unitaria, como el ilustrado en la figura 3.8.



**Figura 3.8:** Impulso rectangular de área unitaria. Obsérvese que mientras más angosto sea el impulso (menor  $\tau$ ), mayor será la altura del impulso para mantener el área igual a uno.

El lector puede demostrar que el conjunto generador dado por las funciones

$$\mathcal{U}_\tau = \{\dots, r(t+3\tau), r(t+2\tau), r(t+\tau), r(t), r(t-\tau), r(t-2\tau), r(t-3\tau), \dots\}$$

es ortogonal, puesto que los desplazamientos ocurren siempre en múltiplos del ancho del impulso ( $r(t-k\tau)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ). La norma de dichos impulsos está dada por:

$$\|r(t-k\tau)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |r(t-k\tau)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{\tau}}$$

y el coeficiente  $c_k$  correspondiente a la función  $r(t-k\tau)$ , necesario para aproximar una función  $x(t)$  se calcula como:

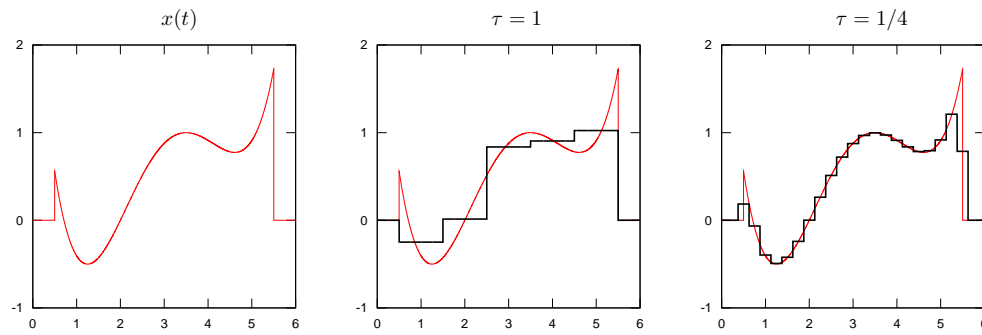
$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\langle r(t-k\tau), x(t) \rangle}{\|r(t-k\tau)\|^2} \\ &= \tau \int_{k\tau-\frac{\tau}{2}}^{k\tau+\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} x(t) dt \\ &= \int_{k\tau-\frac{\tau}{2}}^{k\tau+\frac{\tau}{2}} x(t) dt \end{aligned}$$

y considerando que la integral definida de una función en un intervalo es siempre igual a la longitud del intervalo multiplicada por el valor de la función en un punto particular de dicho intervalo, se obtiene finalmente:

$$c_k = x(t'_k) \tau$$

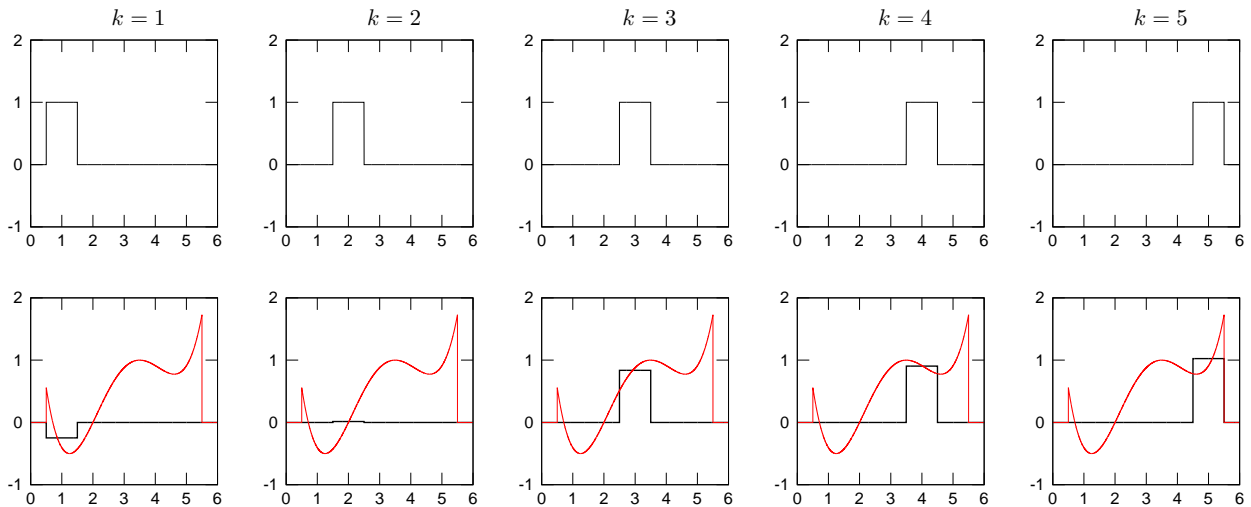
con  $t'_k \in [k\tau - \frac{\tau}{2}, k\tau + \frac{\tau}{2}]$ . Obsérvese entonces que el  $k$ -ésimo término de la combinación lineal está dado por  $c_k r(t-k\tau)$ , y así, la mejor aproximación de la función  $x(t)$  con la base ortogonal  $\mathcal{U}_\tau$  es:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k r(t-k\tau) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(t'_k) r(t-k\tau) \tau \quad (3.24)$$



**Figura 3.9:** Aproximaciones de la función  $x(t)$  con dos bases ortogonales de funciones rectangulares equiespaciadas.

La figura 3.9 muestra las “mejores” aproximaciones de una función  $x(t)$  utilizando dos bases ortogonales con  $\tau = 1$  y  $\tau = 1/4$ , donde “mejor” significa que la aproximación y la función tienen la menor distancia posible (es decir, se minimiza  $\|x(t) - x_a(t)\|$ ) para el  $\tau$  utilizado. La figura 3.10 muestra la descomposición de la función en sus componentes ortogonales con  $\tau = 1$ .



**Figura 3.10:** Descomposición de la función  $x(t)$  en la figura 3.9 con la base ortogonal de funciones rectangulares  $r(t - k\tau)$  con  $\tau = 1$ . La primera fila muestra las funciones ortogonales, y la segunda fila presenta dichas funciones escaladas con su respectivo coeficiente.

Observando la figura 3.9 resulta evidente que mientras más pequeño sea el valor de  $\tau$  (el ancho del impulso rectangular), más cerca estará la aproximación  $x_a(t)$  de la función  $x(t)$ . Sin embargo, para un valor finito de  $\tau$ , el espacio funcional engendrado por la base funcional de impulsos rectangulares desplazados no es *completo* y por tanto no constituye un espacio de Hilbert, puesto que la distancia  $\|x(t) - x_a(t)\|$  no puede hacerse arbitrariamente pequeña. La base constituida por estos impulsos será completa solo si se hace  $\tau$  tender a cero, de modo que  $\tau$  se transforma en un diferencial  $dt'$ , y el instante  $k\tau$  se transforma en un valor real  $t'$ . Bajo estas condiciones, el impulso rectangular se transforma en una construcción igual a cero para todo punto  $t \neq 0$ , e infinito para  $t = 0$ , pero manteniendo el área unitaria. Esta

construcción cumple con los requisitos establecidos anteriormente para la función  $\delta(t)$ , que se conoce bajo el nombre de *impulso Dirac* o *delta Dirac*:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} r(t) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.25)$$

y será retomada en la sección 3.3.3. Finalmente, si se hace  $\tau \rightarrow 0$  entonces la suma en la ecuación de síntesis (3.24) se transforma en una integral

$$x(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t'_k) r(t - k\tau) \tau \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t - t') dt'$$

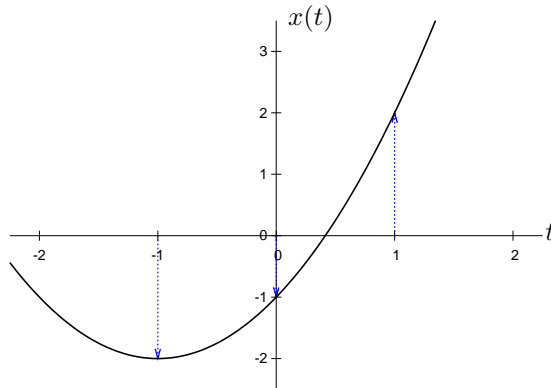
donde, puesto que  $t'_k \in [k\tau - \frac{\tau}{2}, k\tau + \frac{\tau}{2}]$ , al hacer  $\tau \rightarrow 0$  entonces  $t'_k = k\tau = t'$ .

**Ejemplo 3.4** Encuentre los términos de la combinación lineal que aproxima a la función  $x(t) = t^2 + 2t - 1$ , correspondientes a las funciones de la base canónica  $\delta(t+1)$ ,  $\delta(t)$  y  $\delta(t-1)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Con la base de impulsos rectangulares desplazados, el  $k$ -ésimo término de la combinación lineal está dado por  $c_k u_k(t)$ , con  $c_k = x(k\tau) \tau$  y  $u_k(t) = r(t - k\tau)$ . Si  $\tau \rightarrow 0$  se sustituye  $c_k$  por  $c_{t'} = x(t') dt'$  y  $u_k(t)$  por  $u_{t'}(t) = \delta(t - t')$ . Los términos  $x(t') \delta(t - t') dt'$  solicitados son entonces:

$$\begin{aligned} x(-1) \delta(t+1) dt' &= -2 \delta(t+1) dt' \\ x(0) \delta(t) dt' &= -\delta(t) dt' \\ x(1) \delta(t-1) dt' &= 2 \delta(t-1) dt' \end{aligned}$$

La figura 3.11 muestra la función sobrepuesta con las tres componentes calculadas. Nótese que  $\delta(t) dt$  tiene amplitud uno, puesto que proviene de  $r(t) \tau = \tau / \tau = 1$ .



**Figura 3.11:** Función  $x(t) = t^2 + 2t - 1$  y tres de sus proyecciones sobre la base canónica.

Al igual que con vectores (ver ejemplo 3.3), la idea general de las series generalizadas de Fourier será representar cualquier función  $x(t)$  en términos de funciones ortogonales  $u_k(t)$ , que no necesariamente corresponden a la base canónica, pero que pueden expresarse en términos de ella. Un ejemplo de esto lo constituyen las Series de Fourier, que se presentan con detalle en la siguiente sección.

### 3.2.2 Series de Fourier

El siguiente análisis es ampliamente utilizado en ingeniería para señales que son una función del tiempo. Por esta razón se ha utilizado la variable independiente  $t$  que denota al tiempo.

Se dice que  $x(t)$  es una función periódica, si para todo  $t$  se cumple que

$$x(t) = x(t + T) \quad (3.26)$$

A  $T$  se le denomina entonces *periodo* de la función  $x(t)$ . Al menor  $T$  que satisfaga (3.26) se le denomina *periodo fundamental*. Nótese que si  $x(t)$  es periódica con período  $T$  entonces

$$x(t + 2T) = x((t + T) + T) = x(t + T) = x(t)$$

y en general

$$x(t + kT) = x((t + (k - 1)T) + T) = x(t + (k - 1)T) = \dots = x(t) \quad k \in \mathbb{Z}$$

es decir, una función periódica con periodo  $T$  también es periódica con periodo  $kT$ .

Las funciones exponenciales complejas

$$s_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi k f_0 t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.27)$$

son funciones periódicas que se dicen estar *relacionadas armónicamente* por tener todas un periodo común  $T_p = 1/f_0$ . El periodo fundamental de la señal  $s_k(t)$  es  $1/(kf_0) = T_p/k$ , lo que equivale a una frecuencia  $kf_0$ . Puesto que una señal periódica con periodo  $T_p/k$  es también periódica con periodo  $k(T_p/k) = T_p$  con  $k \in \mathbb{Z}$  entonces todas las señales  $s_k(t)$  tienen como periodo común  $T_p$ . Estas funciones se utilizan frecuentemente como conjunto generador de espacios funcionales.

Evalutando el producto interno definido en un período

$$\begin{aligned} \langle s_i(t), s_k(t) \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} s_i^*(t) s_k(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} (e^{j\omega_0 i t})^* e^{j\omega_0 k t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 i t} e^{j\omega_0 k t} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\omega_0 (k-i)t} dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para el caso  $k = i$  se obtiene

$$\langle s_k(t), s_k(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\omega_0 0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} 1 dt = T_p \quad (3.29)$$

lo que quiere decir que con un periodo  $T_p$  común a todas las funciones exponenciales armónicas, la norma de  $s_k(t) = e^{j\omega_0 kt}$  está dada por

$$\|s_k(t)\|^2 = \langle s_k(t), s_k(t) \rangle = T_p$$

En el caso  $k \neq i$

$$\langle s_i(t), s_k(t) \rangle = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t}}{j\omega_0(k-i)} \Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t_0} (e^{j\omega_0(k-i)T_p} - 1)}{j\omega_0(k-i)}. \quad (3.30)$$

Considerando finalmente que  $\omega_0 T_p = 2\pi$  se obtiene

$$\langle s_i(t), s_k(t) \rangle = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t_0} (e^{j2\pi(k-i)} - 1)}{j\omega_0(k-i)} = 0$$

con lo que queda demostrada la ortogonalidad de las funciones exponenciales complejas armónicamente relacionadas  $s_k(t) = e^{j\omega_0 kt}$ . Se puede demostrar además que el conjunto de todas las funciones  $s_k(t)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  engendran un espacio de Hilbert.

De esta forma es posible aproximar cualquier función periódica  $x(t) = x(t + kT_p)$  con la serie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \quad (3.31)$$

conocida como la *serie de Fourier* de  $x(t)$ , con

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt \quad (3.32)$$

donde  $t_0$  puede elegirse de forma arbitraria (usualmente se toma  $t_0 = 0$  o  $t_0 = -T_p/2$ ). A (3.31) se le denomina ecuación de síntesis y a (3.32) ecuación de análisis.

En la mayoría de las aplicaciones se utilizarán funciones  $x(t)$  de valor real. Para este caso especial, puesto que  $x^*a = (xa)^*$  cuando  $x \in \mathbb{C}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , y  $x^* + y^* = (x + y)^*$ , entonces se cumple para los coeficientes de la serie con  $k \in \mathbb{N}^+$  que

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{\langle s_{-k}(t), x(t) \rangle}{\|s_{-k}(t)\|^2} = \frac{\langle e^{-j\omega_0 kt}, x(t) \rangle}{\|e^{-j\omega_0 kt}\|^2} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} (e^{-j\omega_0 kt})^* x(t) dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} (e^{-j\omega_0 kt} x(t))^* dt = \frac{1}{T_p} \left( \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt \right)^* \\ &= \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt \right)^* = c_k^* \end{aligned} \quad (3.33)$$

A esta relación, que también puede escribirse como  $c_{-k}^* = c_k$  se le conoce como *simetría conjugada* o *simetría hermitica* de los coeficientes de Fourier para funciones reales. Nótese que esto implica que la magnitud de  $c_k$  y  $c_{-k}$  son iguales, y que el ángulo de  $c_k$  es igual al inverso aditivo del ángulo de  $c_{-k}$  ( $\angle c_k = -\angle c_{-k}$ ).

Además, utilizando el hecho de que  $z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}$  se puede reescribir (3.31), asumiendo que  $c_k = |c_k|e^{j\theta_k}$ , con  $\theta_k = \angle c_k$  como

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( (c_k e^{j\omega_0 kt})^* + c_k e^{j\omega_0 kt} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{c_k e^{j\omega_0 kt}\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 kt + \theta_k)}\} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \end{aligned} \quad (3.35)$$

con  $\tilde{c}_k = 2|c_k|$  que tienen todos valores reales, incluso  $c_0$ , puesto que siguiendo  $s_0(t) = e^{j\omega_0 0t} = 1$  entonces

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) dt$$

que adquiere siempre un valor real, y equivale al valor medio de la función  $x(t)$  en un periodo  $T_p$ . A este coeficiente  $c_0$  se le denomina en ingeniería la componente CD de la señal o función  $x(t)$ .

Por convención (3.35) se escribe con frecuencia como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \quad (3.36)$$

donde  $\tilde{c}_0$  es entonces  $|c_0|$  y  $\theta_0$  es cero si  $c_0 \geq 0$  o  $\pi$  si  $c_0 < 0$ .

Resumiendo, la función real  $x(t)$  puede representarse como una suma infinita de señales cosenoidales de frecuencias múltiplos de una frecuencia fundamental  $\omega_0$ , desfasadas por valores  $\theta_k$ . Se dice entonces que  $x(t)$  tiene componentes de frecuencia  $k\omega_0$  de magnitud  $\tilde{c}_k$  y fase  $\theta_k$ . El lector puede verificar (ver problema 3.15) que las funciones  $\cos(\omega_0 kt + \theta_k)$  son ortogonales entre sí, y por tanto esta nueva expresión sigue representando una combinación lineal de una base generadora del espacio funcional que contiene a  $x(t)$ .

Otra representación de la serie de Fourier para funciones reales  $x(t)$  se obtiene a partir de (3.34) utilizando la identidad de Euler:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (\cos(\omega_0 kt) - j \operatorname{sen}(\omega_0 kt)) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\cos(\omega_0 kt) + j \operatorname{sen}(\omega_0 kt)) \end{aligned}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{-k}) \sin(\omega_0 kt)$$

y considerando (3.33)

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_k^*) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_k^*) \sin(\omega_0 kt)$$

que se puede simplificar con (2.11) y (2.12) en

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{c_k\} \cos(\omega_0 kt) - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Im}\{c_k\} \sin(\omega_0 kt) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_0 kt) \end{aligned} \quad (3.37)$$

con  $a_0 = 2c_0$ ,  $a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = 2|c_k| \cos \theta_k$  y  $b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = -2|c_k| \sin \theta_k$ , es decir:

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k) .$$

El lector puede comprobar que en este caso las funciones seno y coseno también representan una base generadora del espacio funcional, puesto que son ortogonales entre sí (problema 3.14).

El mismo resultado se puede alcanzar a partir de (3.35) utilizando la identidad trigonométrica  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

Utilizando (3.22) se deriva además:

$$a_k = \frac{\langle \cos \omega_0 kt, x(t) \rangle}{\|\cos \omega_0 kt\|^2} = \frac{2}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \cos \omega_0 kt \, dt \quad (3.38)$$

$$b_k = \frac{\langle \sin \omega_0 kt, x(t) \rangle}{\|\sin \omega_0 kt\|^2} = \frac{2}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \sin \omega_0 kt \, dt \quad (3.39)$$

lo que justifica la elección de  $a_0 = 2c_0$  para que sea compatible con la expresión más general de  $a_k$ .

Esta última representación (3.37) es la más cercana a la históricamente planteada en 1807 por el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), quien la utilizó para analizar la distribución de temperatura a través de un cuerpo. En su época él no pudo demostrar con suficiente precisión matemática qué tipo de funciones periódicas podrían representarse por estas series, sin embargo tuvo la perspicacia de comprender el potencial de aplicación de la representación de funciones a través de series trigonométricas. Él sostenía que cualquier función periódica podría representarse por una serie de este tipo. Su trabajo se basó en ideas anteriores sobre vibraciones de una cuerda hechos por L. Euler en 1748 y por D. Bernoulli en 1753. Este último matemático argumentaba que todos los movimientos de una cuerda eran representables por una combinación lineal de los “modos” de oscilación normales, pero



no lo pudo demostrar matemáticamente por lo que fue ignorado. El documento planteado por Fourier fue revisado por cuatro matemáticos: S. F. Lacroix, G. Monge y P. S. de Laplace estuvieron de acuerdo en publicar su trabajo, pero J. L. Lagrange rechazó rotundamente la idea por considerar imposible que funciones discontinuas o con discontinuidades en sus derivadas (con picos) pudieran ser representadas como sumas de funciones “suaves” como los senos y cosenos. No fue sino 15 años más tarde, en 1822, que Fourier publicó sus ideas en un trabajo titulado *Théorie analytique de la chaleur*. Fue hasta 1829 que P. L. Dirichlet proporcionó la demostración precisa de las condiciones necesarias y suficientes para que una función pueda ser expresada como serie trigonométrica.

En principio, la descomposición de una función real  $x(t)$  en una serie de Fourier brindará un conjunto de coeficientes  $c_k$  (o alternativamente  $a_k$  y  $b_k$ , o  $\tilde{c}_k$ ) que indican qué tan “fuerte” es ( $|c_k|^2$  indica incluso cuánta energía contiene) la  $k$ -ésima componente de la serie con frecuencia angular  $k\omega_0$ . Esto es, la serie de Fourier es un primer paso para realizar un análisis en el dominio de la frecuencia.

La importancia de esto para los circuitos eléctricos y electrónicos lineales (únicamente con elementos pasivos y amplificadores operacionales ideales), o cualquier sistema lineal, es que, si la entrada al circuito puede descomponerse como una suma de funciones trigonométricas, entonces, por el principio de superposición, es posible analizar el efecto de cada una de las componentes por separado, y luego sumar todas las respuestas obtenidas para generar la respuesta total. Debido a que estos circuitos lineales no alteran la frecuencia de una señal de entrada sinusoidal, entonces para cada componente de frecuencia  $k\omega_0$  habrá una componente a la salida con la misma frecuencia, pero con magnitud y fase modificadas.

Ahora bien, hasta ahora se ha presentado el cálculo de los coeficientes que minimiza el error entre una función y su aproximación como serie de exponenciales complejas, o en el caso especial de funciones de valor real, los coeficientes y desfases de una serie de funciones cosenoidales. Sin embargo no se ha analizado en qué casos estas series convergen a la función  $x(t)$ . Las llamadas *condiciones de Dirichlet* para la función  $x(t)$  garantizan la convergencia de la serie de Fourier en todo punto de  $x(t)$  exceptuando en sus discontinuidades, donde la serie converge al valor medio de la discontinuidad. Estas condiciones son:

1. La función  $x(t)$  es absolutamente integrable en cualquier periodo, esto es:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty \quad (3.40)$$

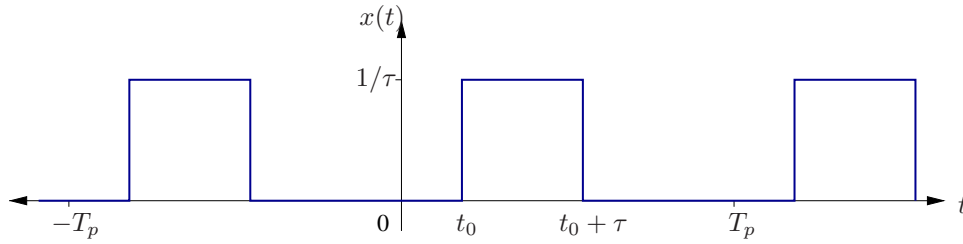
2. La función  $x(t)$  contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo.
3. La función  $x(t)$  tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.

Estas condiciones son suficientes, mas no siempre necesarias; es decir, existen funciones con representaciones válidas en series de Fourier que no satisfacen las condiciones de Dirichlet. Otro aspecto interesante a mencionar es la rapidez con que la serie de Fourier converge para funciones reales:

1. Si  $x(t)$  tiene un número finito de discontinuidades entonces sus coeficientes decrecen a una tasa  $1/k$ .
2. Si  $x(t)$  es continua, pero sus primeras derivadas son discontinuas (la función tiene “picos”) entonces los coeficientes decrecen a una tasa  $1/k^2$ .
3. Si  $x(t)$  y todas sus derivadas hasta de  $n$ -ésimo orden son continuas, pero la  $(n+1)$ -ésima derivada es discontinua entonces los coeficientes decrecen a una tasa  $1/k^{n+2}$ .

Las observaciones anteriores estipulan que mientras más suave sea una función, más rápido convergerá su serie de Fourier.

**Ejemplo 3.5** Calcule los coeficientes de la Serie de Fourier para una señal rectangular como la mostrada en la figura 3.12, utilizando las tres bases funcionales presentadas anteriormente.



**Figura 3.12:** Señal rectangular periódica.

**Solución:**

Los coeficientes de la serie exponencial compleja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

se calculan con (3.32) como:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt = \frac{1}{T_p \tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} e^{-j\omega_0 kt} dt$$

Para  $k = 0$  se tiene con  $e^{-j0} = 1$

$$c_0 = \frac{1}{T_p \tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} dt = \frac{1}{T_p \tau} t \Big|_{t_0}^{t_0 + \tau} = \frac{1}{T_p \tau} [(t_0 + \tau) - t_0] = \frac{1}{T_p \tau} \tau = \frac{1}{T_p}$$

y para  $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_p} \left. \frac{e^{-j\omega_0 kt}}{-j\omega_0 k\tau} \right|_{t_0}^{t_0+\tau} \\
 &= \frac{1}{T_p} \frac{e^{-j\omega_0 k(t_0+\tau)} - e^{-j\omega_0 kt_0}}{-j\omega_0 k\tau} = \frac{1}{T_p} e^{-j\omega_0 kt_0} \frac{(e^{-j\omega_0 k\tau} - 1)}{-j\omega_0 k\tau} \\
 &= \frac{2}{T_p} e^{-j\omega_0 kt_0} e^{-j\frac{\omega_0 k\tau}{2}} \frac{(e^{-j\frac{\omega_0 k\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega_0 k\tau}{2}})}{-2j\omega_0 k\tau} \\
 &= \frac{2}{T_p} e^{-j\omega_0 k(t_0+\frac{\tau}{2})} \frac{(e^{j\frac{\omega_0 k\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 k\tau}{2}})}{2j\omega_0 k\tau} = \frac{1}{T_p} \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)}{\frac{\omega_0 k\tau}{2}} e^{-j\omega_0 k(t_0+\frac{\tau}{2})} \\
 c_k &= \frac{1}{T_p} \text{sa}\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right) e^{-j\omega_0 k(t_0+\frac{\tau}{2})}
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 |c_k| &= \frac{1}{T_p} \left| \text{sa}\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right) \right| \\
 \angle c_k &= \begin{cases} -\omega_0 k(t_0 + \frac{\tau}{2}) & \text{si } \text{sa}(\omega_0 k\tau/2) \geq 0 \\ \pi - \omega_0 k(t_0 + \frac{\tau}{2}) & \text{si } \text{sa}(\omega_0 k\tau/2) < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tal y como se estableció anteriormente, por existir discontinuidades en la función a aproximar, los coeficientes decrecen a una tasa  $1/k$  al ser el seno una función acotada y estar dividida por un termino múltiplo de  $k$ .

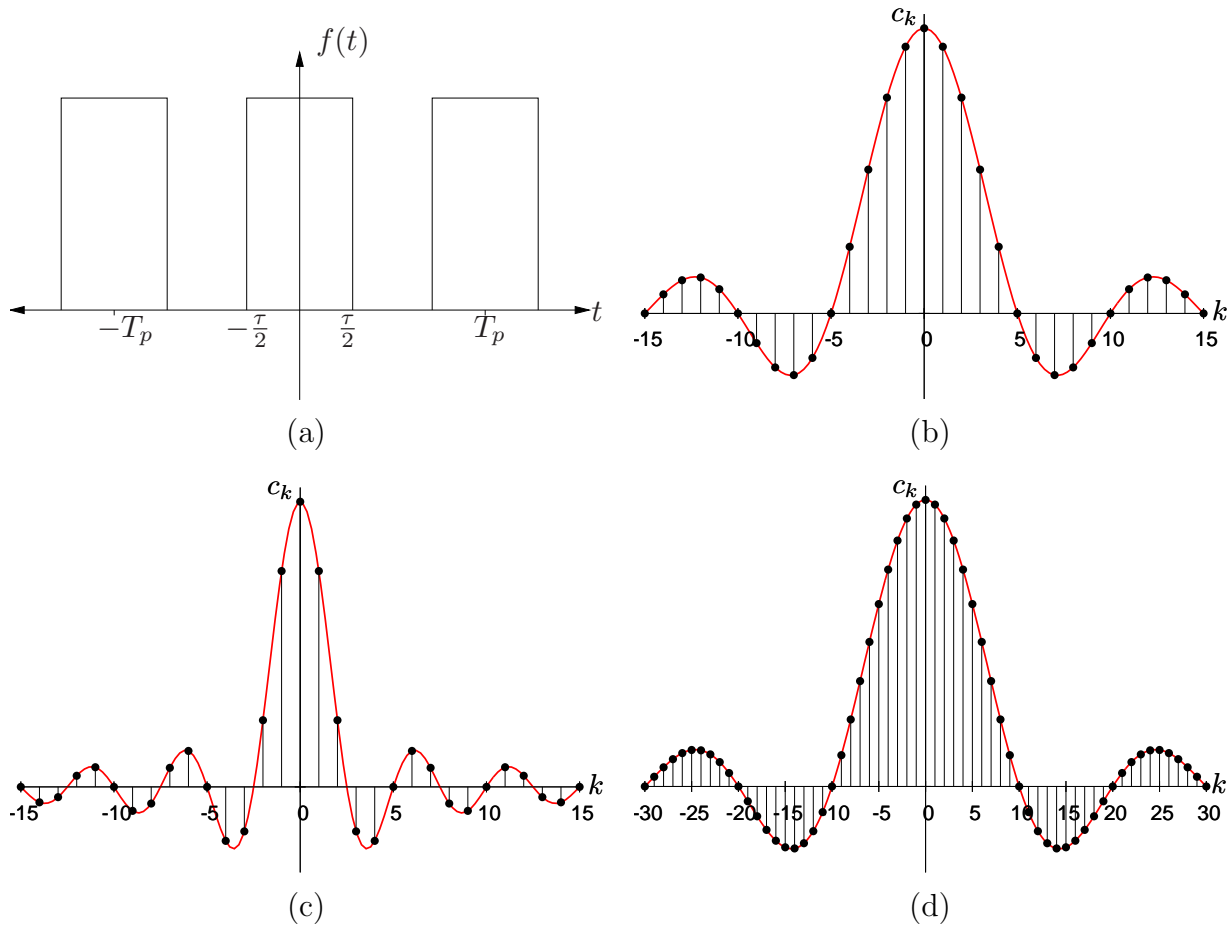
Nótese que si  $t_0$  se elige como  $-\tau/2$  entonces los coeficientes  $c_k$  son reales. Estos pueden graficarse en un eje de frecuencias para varios valores de  $T_p$  y  $\tau$ , tal y como lo muestra la figura 3.13. Los coeficientes  $c_k$  se han espaciado de tal modo que el eje horizontal tiene las mismas unidades de frecuencia, es decir, la distancia entre  $c_i$  y  $c_{i+1}$  es proporcional a  $1/T_p$ . Nótese que mientras más baja la frecuencia, mayor es  $T_p$  y la distancia entre los coeficientes  $c_k$  (que se denominarán aquí *líneas espectrales*) disminuye. Por otro lado, si  $\tau$  aumenta, entonces la función *envolvente*  $\text{sa}(\omega_0 k\tau/2)$  se comprime. De la ecuación para  $c_k$  se observa incluso que si  $\tau$  tiende a  $T_p$ , entonces  $\omega_0 k\tau/2$  tiende a  $\pi k$ , y puesto que  $\text{sa}(k\pi)$  es cero para todo  $k \neq 0$ , entonces  $c_k = 0$  para  $k \neq 0$ . El único coeficiente diferente de cero es en este caso entonces  $c_0$ . Esto tiene sentido puesto que si  $\tau \rightarrow T_p$  entonces  $x(t)$  será una función constante, y su única componente espectral se encuentra en la frecuencia cero.

Para la representación como serie infinita de funciones cosenoidales desfasadas (3.36)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k)$$

se obtiene de lo anterior

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_0 &= c_0 = \frac{1}{T_p} \\
 \tilde{c}_k &= 2|c_k| = \frac{2}{T_p} \left| \text{sa}\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right) \right|, \quad k > 0
 \end{aligned}$$



**Figura 3.13:** Secuencia periódica de pulsos rectangulares en tiempo continuo. (a) Representación temporal. (b) Líneas espectro de (a) con  $\tau = 1$  y  $T_p = 5$ . (c) Líneas espectrales de (a) con  $\tau = 2$  y  $T_p = 5$ . (d) Líneas espectrales de (a) con  $\tau = 1$  y  $T_p = 10$ .

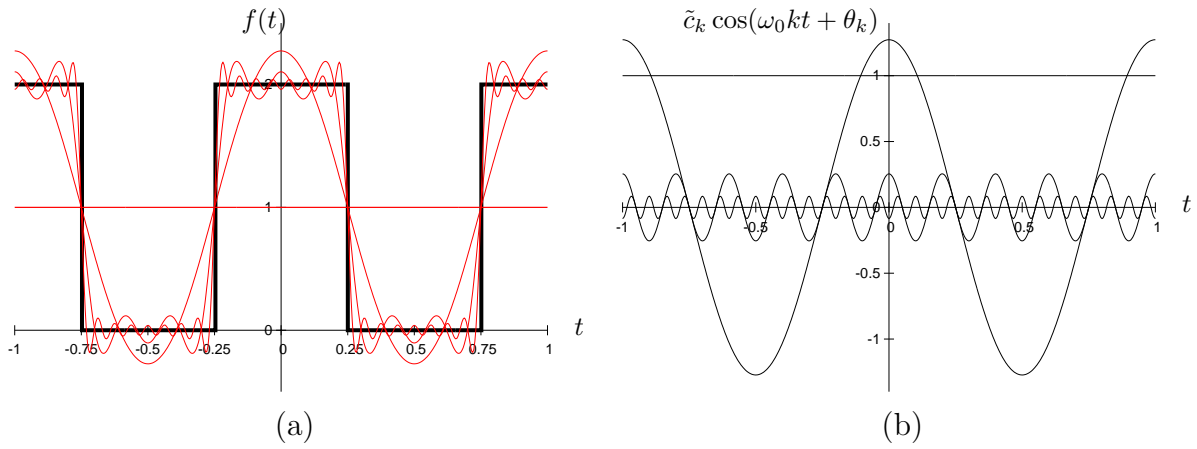
$$\theta_k = \angle c_k = \begin{cases} -\omega_0 k \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) & \text{si } \text{sa}(\omega_0 k \tau / 2) \geq 0 \\ \pi - \omega_0 k \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) & \text{si } \text{sa}(\omega_0 k \tau / 2) < 0 \end{cases}$$

La figura 3.14 muestra cuatro aproximaciones de la señal rectangular utilizando solo la primer componente espectral (solo  $c_0$ ), las primeras dos, cinco y quince componentes. Se aprecia que la convergencia a la señal rectangular es relativamente rápida, y se nota cómo todas las aproximaciones en la discontinuidad de  $x(t)$  pasan por el promedio de los límites de la señal a la izquierda y a la derecha de la misma. La aproximación de la función en las cercanías de la discontinuidad siempre exhibirá sobreoscilaciones conocidas como el fenómeno de Gibbs. Puede demostrarse que este fenómeno no desaparece cuando la serie avanza hasta infinito, sino simplemente el pico producido se acerca arbitrariamente a la discontinuidad.

Para la última representación como serie infinita trigonométrica (3.37):

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_0 k t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \omega_0 k t$$

los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  se pueden obtener directamente con (3.38) y (3.39) o utilizando los



**Figura 3.14:** Aproximaciones de la señal rectangular con 1, 2, 5 y 15 componentes espectrales. (a) Las aproximaciones, (b) y sus últimas componentes espectrales consideradas.

resultados anteriores

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2}{T_p}$$

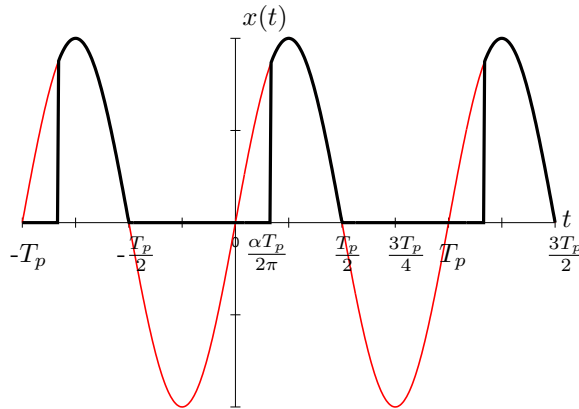
$$a_k = 2|c_k| \cos \theta_k = \frac{2}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\omega_0 k \tau}{2} \right) \cos \left( \omega_0 k \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \right)$$

$$b_k = -2|c_k| \sin \theta_k = \frac{2}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\omega_0 k \tau}{2} \right) \sin \left( \omega_0 k \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \right)$$

Nótese que si se elige  $t_0 = -\tau/2$  entonces todos los términos  $b_k$  desaparecen.

3.5

**Ejemplo 3.6** El siguiente caso de aplicación del análisis de Fourier se encuentra en el área de electrónica de potencia, donde se estudia la densidad de potencia en los diferentes armónicos de una señal sinusoidal rectificada de media onda con un ángulo de disparo  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , tal y como se indica en la figura 3.15. Encuentre la serie de Fourier de esta señal.



**Figura 3.15:** Señal senoidal rectificada de media onda con ángulo de disparo  $\alpha$ .

**Solución:** Una señal sinusoidal rectificada de media onda es cero excepto en el intervalo que va desde  $\alpha T_p/2\pi$  hasta  $T_p/2$ , tiempo en el que la señal es senoidal. De este modo, los

coeficientes de Fourier se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} e^{-j\omega_0 kt} \sin(\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{1}{T_p} \int_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} e^{-j\omega_0 kt} \left[ \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right] dt \\
 &= \frac{1}{j2T_p} \int_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} [e^{-j\omega_0 t(k-1)} - e^{-j\omega_0 t(k+1)}] dt
 \end{aligned}$$

Asumiendo que  $k \neq \pm 1$ :

$$= \frac{1}{j2T_p} \left[ \frac{e^{-j\omega_0 t(k-1)}}{-j\omega_0(k-1)} - \frac{e^{-j\omega_0 t(k+1)}}{-j\omega_0(k+1)} \right]_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}}$$

Considerando que  $\omega_0 = 2\pi/T_p$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{(k+1)e^{-j\omega_0 kt} e^{j\omega_0 t} - (k-1)e^{-j\omega_0 kt} e^{-j\omega_0 t}}{(k-1)(k+1)} \right]_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi(k^2-1)} [ke^{-j\omega_0 kt} \sin(\omega_0 t) 2j + e^{-j\omega_0 kt} \cos(\omega_0 t) 2]_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} \\
 &= \frac{e^{-j\omega_0 kt}}{2\pi(k^2-1)} [\cos(\omega_0 t) + jk \sin(\omega_0 t)] \Big|_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} \\
 &= \frac{e^{-jk\pi}}{2\pi(k^2-1)} [\cos(\pi) + jk \sin(\pi)] - \frac{e^{-jk\alpha}}{2\pi(k^2-1)} [\cos(\alpha) + jk \sin(\alpha)] \\
 &= \frac{1}{2\pi(k^2-1)} [(-1)^{k+1} - e^{-jk\alpha} \{\cos(\alpha) + jk \sin(\alpha)\}]
 \end{aligned}$$

La parte imaginaria de los coeficientes está determinada por la parte imaginaria del producto:

$$e^{-jk\alpha} \{\cos(\alpha) + jk \sin(\alpha)\}$$

cuyo signo depende directamente del signo de  $k$ , lo que confirma el hecho de que  $c_{-k} = c_k^*$  para la función real  $x(t)$ . Además, puesto que las señales seno y coseno son acotadas, se deriva que los coeficientes de la función senoidal rectificada convergen a cero con una tasa de  $1/k$  si  $\alpha$  es diferente de cero, puesto que en este caso la señal tiene discontinuidades, y a una tasa  $1/k^2$  si  $\alpha$  es igual a cero, cuando la señal es continua.

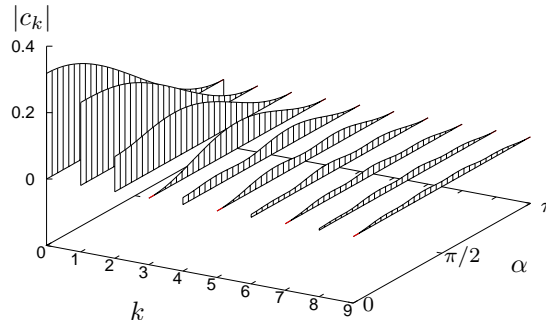
No se han calculado aún los casos  $k = \pm 1$ . Para  $k = 1$  se tiene

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{j2T_p} \int_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}} [1 - e^{-j2\omega_0 t}] dt \\
 &= \frac{1}{j2T_p} \left[ t - \frac{e^{-j2\omega_0 t}}{-j2\omega_0} \right]_{\frac{\alpha T_p}{2\pi}}^{\frac{T_p}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{j2T_p} \left[ \frac{T_p}{2} + \frac{1}{j2\omega_0} - \frac{\alpha T_p}{2\pi} - \frac{e^{-j2\alpha}}{j2\omega_0} \right] \\
&= \frac{1}{j2T_p} \left[ \frac{j\omega_0\pi T_p + \pi - j\alpha\omega_0 T_p - \pi e^{-j2\alpha}}{j\omega_0 2\pi} \right] \\
&= -\frac{1}{8\pi} [(1 - e^{-j2\alpha}) + j2(\pi - \alpha)] \\
&= -\frac{1}{8\pi} [(1 - \cos(2\alpha)) + j(2\pi - 2\alpha + \sin(2\alpha))]
\end{aligned}$$

Puesto que debe cumplirse para el caso  $k = -1$  que  $c_{-1} = c_{-1}^*$  entonces:

$$c_{-1} = -\frac{1}{8\pi} [(1 - \cos(2\alpha)) - j(2\pi - 2\alpha + \sin(2\alpha))]$$



**Figura 3.16:** Coeficientes de señal rectificadora de media onda con ángulo de disparo  $\alpha$ .

La figura 3.16 muestra la magnitud de los coeficientes (espectro de tensión) para diferentes valores del ángulo de disparo. Se nota que si  $\alpha = \pi$ , entonces todos los coeficientes se hacen cero. Además se aprecia que el mayor valor CD se alcanza para  $\alpha = 0$  y decae monótonicamente hasta cero, tal y como se puede esperar. Para  $\alpha = 0$  se observa además que los coeficientes impares a partir de  $k = 3$  desaparecen. 3.6

### 3.2.3 Propiedades de la serie de Fourier

Un *operador* es un concepto matemático que transforma una función en otra. Puede interpretarse como una relación entre puntos de un espacio funcional, es decir, una relación que asigna a una función, otra función<sup>4</sup>. Ejemplos de operadores son el operador de derivación  $\frac{\partial}{\partial x}$  o el operador de integración  $\int \cdot dx$ . Relacionado con la serie (generalizada) de Fourier puede considerarse un operador  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_G} \{\cdot\}$  que transforma una función periódica continua en una serie infinita de valores  $c_k$  que puede interpretarse como una función de una variable entera  $c(k)$ :

$$c(k) = \mathcal{S}_{\mathcal{F}_G} \{x(t)\} = \frac{\langle u_k(t), x(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2}$$

<sup>4</sup>En realidad el término *operador* tiene en matemática muchas otras acepciones, refiriéndose a una función, a un mapeo entre puntos de espacios lineales, o a un mapeo entre funciones, como el aquí utilizado.

para el caso generalizado. Para el caso particular de series de Fourier se cumple  $u_k(t) = s_k(t)$ , donde  $s_k(t)$  corresponde a las funciones exponenciales armónicamente relacionadas definidas en (3.27).

## Linealidad

Sean dos funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  y dos valores escalares  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Un operador  $\mathcal{O}\{\cdot\}$  se denomina operador lineal si cumple con la propiedad

$$\mathcal{O}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{O}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{O}\{x_2(t)\}$$

El lector puede verificar que los operadores de derivación e integración son lineales. Considérese ahora que  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  tienen desarrollos en series generalizadas de Fourier con coeficientes  $c_1(k)$  y  $c_2(k)$  respectivamente. Analizando el cálculo de los coeficientes para el desarrollo generalizado de Fourier de la combinación lineal de estas funciones, y recordando la propiedad de sesquilinealidad del producto interno se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{F}_G}\{x(t)\} &= \mathcal{S}_{\mathcal{F}_G}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \frac{\langle u_k(t), x(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle u_k(t), \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \\ &= \frac{\langle u_k(t), \alpha_1 x_1(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} + \frac{\langle u_k(t), \alpha_2 x_2(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \\ &= \alpha_1 \frac{\langle u_k(t), x_1(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} + \alpha_2 \frac{\langle u_k(t), x_2(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \\ &= \alpha_1 c_1(k) + \alpha_2 c_2(k) \\ &= \alpha_1 \mathcal{S}_{\mathcal{F}_G}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{S}_{\mathcal{F}_G}\{x_2(t)\} \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra que toda serie generalizada de Fourier puede considerarse como un operador lineal, o en otras palabras, los coeficientes de la serie generalizada de Fourier para una combinación ponderada lineal  $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  son iguales a la misma ponderación lineal de los coeficientes de cada función  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  por separado.

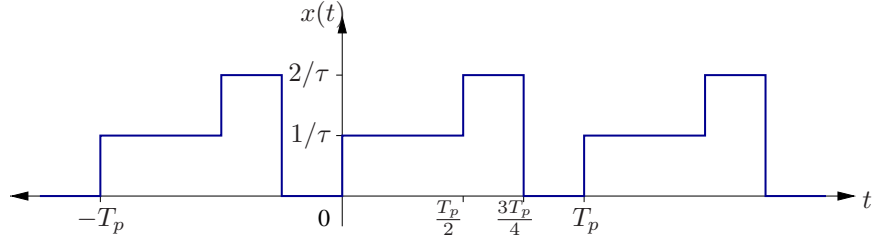
Para el caso particular de las series de Fourier se puede corroborar la linealidad directamente. Utilizando el operador  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}\{\cdot\}$  asociado a la serie de Fourier se tiene:

$$\begin{aligned} c(k) &= \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} \alpha_1 x_1(t) dt + \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} \alpha_2 x_2(t) dt \\ &= \alpha_1 \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x_1(t) dt + \alpha_2 \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x_2(t) dt \\ &= \alpha_1 c_1(k) + \alpha_2 c_2(k) = \alpha_1 \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{S}_{\mathcal{F}}\{x_2(t)\} \end{aligned}$$



Se deja como ejercicio para el lector (ver problema 3.17) demostrar que los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier (3.37) son también resultado del mapeo de un operador lineal.

**Ejemplo 3.7** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para la función indicada en la figura 3.17 utilizando la propiedad de linealidad y los resultados del ejemplo 3.5.



**Figura 3.17:** Función conformada por la combinación lineal de funciones rectangulares.

**Solución:** Hay varias maneras de generar la función indicada en la figura 3.17 como combinación lineal de funciones rectangulares. Aquí se mostrará solo un ejemplo.

Si  $x_1(t)$  es igual a la función rectangular con  $\tau = T_p/2$  y  $t_0 = 0$  entonces su desarrollo es:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k} e^{j\omega_0 k t} \\
 c_{1k} &= \frac{1}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\omega_0 k \tau}{2} \right) e^{-j\omega_0 k (t_0 + \frac{\tau}{2})} = \frac{1}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\pi k}{2} \right) e^{-j\frac{\pi k}{2}} \\
 &= \begin{cases} -j\frac{2}{T_p k \pi} & \text{si } k \text{ es impar} \\ \frac{1}{T_p} & \text{si } k \text{ es cero} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par (excepto cero)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si  $x_2(t)$  es igual a la función rectangular con  $\tau = T_p/4$  y  $t_0 = T_p/2$  entonces

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} e^{j\omega_0 k t} \\
 c_{2k} &= \frac{1}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\omega_0 k \tau}{2} \right) e^{-j\omega_0 k (t_0 + \frac{\tau}{2})} = \frac{1}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\pi k}{4} \right) e^{-j\frac{5\pi k}{4}}
 \end{aligned}$$

La función  $x(t)$  tiene entonces como coeficientes

$$\begin{aligned}
 c_k &= c_{1k} + 2c_{2k} \\
 &= \frac{1}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\pi k}{2} \right) e^{-j\frac{\pi k}{2}} + \frac{2}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\pi k}{4} \right) e^{-j\frac{5\pi k}{4}}
 \end{aligned}$$

## Simetrías

Una función  $x(t)$  se denomina *simétrica* o *par* si para todo  $t$  se cumple  $x(t) = x(-t)$ , y es llamada *asimétrica* o *impar* si  $-x(t) = x(-t)$ . En esta sección se estudian las características de los coeficientes de las series de Fourier para estos dos casos particulares.

Si en la ecuación para el cálculo de los componentes (3.32) se elige  $t_0 = -T_p/2$  entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt \\
 &= \frac{1}{T_p} \left\{ \int_{-\frac{T_p}{2}}^0 e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt + \int_0^{\frac{T_p}{2}} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt \right\} \\
 &= \frac{1}{T_p} \left\{ \int_0^{\frac{T_p}{2}} e^{j\omega_0 kt} x(-t) dt + \int_0^{\frac{T_p}{2}} e^{-j\omega_0 kt} x(t) dt \right\} \\
 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} (e^{j\omega_0 kt} x(-t) + e^{-j\omega_0 kt} x(t)) dt
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Para el caso en que la función sea par, entonces

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \frac{2}{2} (e^{j\omega_0 kt} + e^{-j\omega_0 kt}) dt \\
 &= \frac{2}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cos \omega_0 kt dt
 \end{aligned}$$

que son coeficientes de valor real. Puesto que el coseno es una función par, entonces se observa que  $c_k = c_{-k}$ . Esto quiere decir, que si se interpretan estos coeficientes como una función de variable entera  $c(k) = c(-k)$ , entonces estos conforman a su vez una función par (ver ejemplo 3.5)

Para el caso de simetría impar se tiene a partir de (3.41):

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \frac{2j}{2j} (-e^{j\omega_0 kt} + e^{-j\omega_0 kt}) dt \\
 &= -\frac{2j}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \sen \omega_0 kt dt
 \end{aligned}$$

que son coeficientes con solo componente imaginaria, y puesto que el seno es una función impar entonces  $c_{-k} = -c_k$ . Para el caso en que  $x(t)$  sea real, ambos resultados para las simetrías par e impar concuerdan con la relación encontrada anteriormente  $c_k = c_{-k}^*$ .

Puesto que toda función  $x(t)$  puede descomponerse en una componente par  $x_e(t)$  y otra

componente impar  $x_o(t)$ , de la siguiente forma

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (3.42)$$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (3.43)$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad (3.44)$$

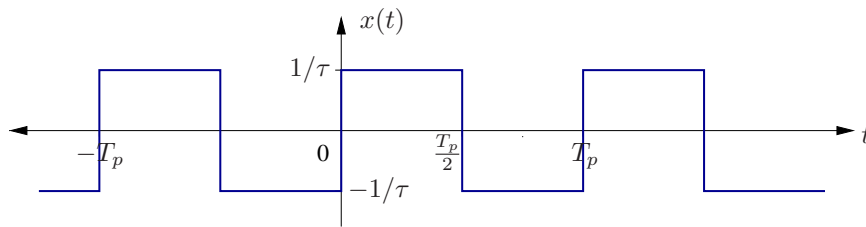
y considerando la propiedad de linealidad de los coeficientes de las series de Fourier, se deduce que la componente real de los componentes es originada por la componente par de la función, mientras que los componentes imaginarios provienen de la componente impar de la función.

Con respecto a la representación trigonométrica de la serie de Fourier (3.37), por la equivalencia de los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  con  $c_k = |c_k|e^{j\theta_k}$  se deriva que si la función  $x(t)$  es par, entonces los  $b_k = -2|c_k|\sin\theta_k = 0$  para todo  $k$ , puesto que  $\theta_k = 0$  ó  $\pi$ . Por otro lado, si la función es impar, entonces  $a_k = 2|c_k|\cos\theta_k = 0$  para todo  $k$  puesto que  $\theta_k = \pm\pi/2$ .

Las siguientes propiedades son útiles en el análisis de simetría:

1. La suma de dos o más funciones pares es par
2. La suma de dos o más funciones impares es impar
3. El producto de dos o más funciones pares es par
4. El producto de dos funciones impares es par
5. El producto de una función impar con una par es una función impar
6. La derivada de una función par es impar
7. La derivada de una función impar es una función par

**Ejemplo 3.8** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para la función periódica representada en la figura 3.18.



**Figura 3.18:** Función impar simple

**Solución:** La figura 3.18 muestra una función rectangular impar. Esta función se diferencia de las utilizadas en ejemplos anteriores únicamente en nivel CD (el valor promedio) que en este caso es cero, y por tanto el coeficiente  $c_0$  es cero. Observando que la amplitud de la señal es dos veces la utilizada en el ejemplo 3.5 se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} \\
c_k &= \frac{2}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\omega_0 k \tau}{2} \right) e^{-j\omega_0 k (t_0 + \frac{\tau}{2})} = \frac{2}{T_p} \text{sa} \left( \frac{\pi k}{2} \right) e^{-j\frac{\pi k}{2}} \quad ; \quad k \neq 0 \\
&= \begin{cases} -j\frac{4}{T_p k \pi} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par, incluyendo al cero} \end{cases}
\end{aligned}$$

que es completamente imaginario y es una función de variable entera, impar en  $k$ . El lector puede verificar el resultado haciendo el cálculo de  $c_k$  aplicando directamente su definición a través del producto interno.

3.8

### Desplazamiento en el tiempo

Si una señal periódica se desplaza en el tiempo, su periodo  $T_p$  no es alterado. Si los coeficientes  $c_k$  del desarrollo en series de Fourier de la función  $x(t)$  se calculan con (3.32), entonces, para  $x(t - \tau)$  y haciendo la sustitución de variable  $u = t - \tau$

$$\begin{aligned}
c'_k &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 k t} x(t - \tau) dt \\
&= \frac{1}{T_p} \int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T_p} e^{-j\omega_0 k (u+\tau)} x(u) du \\
&= \frac{1}{T_p} \int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 k u} e^{-j\omega_0 k \tau} x(u) du \\
&= e^{-j\omega_0 k \tau} \frac{1}{T_p} \int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 k u} x(u) du \\
&= e^{-j\omega_0 k \tau} c_k
\end{aligned}$$

Nótese que el término que aparece debido al desplazamiento temporal solo produce un cambio de fase, mas no de magnitud a los coeficientes.

En ejemplos anteriores con la señal rectangular se obtuvo que si esta es real y par, entonces los valores de  $c_k$  son completamente reales. Cuando la señal se desfásó medio periodo se introdujo un cambio de fase de la forma  $e^{j\pi k/2}$ , tal y como lo predice la propiedad de desplazamiento.

### Inversión en el tiempo

Si  $x(t)$  tiene como expansión en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t}$$

entonces se obtiene con  $k' = -k$  que

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_0 k t} = \sum_{k'=\infty}^{-\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k' t} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k' t}$$

Lo que implica que la función  $x(-t)$  tiene como coeficientes  $c_{-k}$ .

### Escalamiento en el tiempo

La dilatación o contracción del eje temporal  $t$  (con inversión o sin ella) se plantea en términos de un escalamiento temporal, es decir, multiplicando la variable  $t$  por una constante  $\alpha$ . Cuando esto ocurre, el periodo de la nueva señal  $x(\alpha t)$  es modificado por la misma constante  $\alpha$ :

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k(\alpha t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(\alpha\omega_0) k t}$$

Esto puede interpretarse de la siguiente manera: el escalamiento en el tiempo de una función no altera los coeficientes  $c_k$ , pero sí la serie de Fourier, puesto que sus bases funcionales  $e^{j(\alpha\omega_0) k t}$  tienen una nueva frecuencia fundamental  $\alpha\omega_0$ .

### Multiplicación

Dos propiedades están relacionadas con la multiplicación: los coeficientes del producto de dos funciones, y la función obtenida al multiplicar los coeficientes correspondientes a dos funciones.

Sean las series  $\sum_i a_i = (\dots + a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots)$  y  $\sum_j b_j = (\dots + b_1 + b_2 + \dots + b_j + \dots)$ . El producto entre ellas se calcula como entonces

$$\begin{aligned} \left( \sum_i a_i \right) \left( \sum_j b_j \right) &= \dots + a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_1 b_j + \dots + \\ &\quad \dots + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_2 b_j + \dots + \\ &\quad \dots + a_i b_1 + a_i b_2 + \dots + a_i b_j + \dots + \dots = \sum_i \sum_j (a_i b_j) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Utilizando esto, pueden encontrarse los coeficientes del producto de dos funciones periódicas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , ambas con el mismo periodo  $T_p$ , y con coeficientes  $c_{1k}$  y  $c_{2l}$  para sus respectivos desarrollos en series de Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t)x_2(t) = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k} e^{j\omega_0 k t} \right) \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{2l} e^{j\omega_0 l t} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1k} c_{2l} e^{j\omega_0 (k+l)t} \end{aligned}$$

Haciendo una sustitución de variable  $l' = l + k$ , y por lo tanto  $l = l' - k$  e intercambiando el orden de las sumatorias

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k}c_{2(l'-k)} \right)}_{c_{l'}} e^{j\omega_0 l' t}$$

A la suma

$$c_{l'} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k}c_{2(l'-k)}$$

se le denomina *convolución discreta* de  $c_{1k}$  y  $c_{2k}$ . Su significado en ingeniería será analizado posteriormente, cuando se revisen las propiedades de la transformada  $z$ .

Por otro lado, sean  $c_{1k}$  y  $c_{2k}$  los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  respectivamente. Se desea ahora encontrar la función  $x(t)$  que tiene como coeficientes  $c_k$  el producto  $c_k = c_{1k}c_{2k}$ :

$$\begin{aligned} c_k &= c_{1k}c_{2k} \\ &= c_{2k} \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) e^{-j\omega_0 k \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) c_{2k} e^{-j\omega_0 k \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_1}^{t_1+T_p} x_2(\nu) e^{-j\omega_0 k \nu} d\nu \right) e^{-j\omega_0 k \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_1}^{t_1+T_p} x_2(\nu) e^{-j\omega_0 k(\nu+\tau)} d\nu \right) d\tau \end{aligned}$$

y con  $t = \nu + \tau$ , y  $t_2 = t_1 + \tau$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_1+\tau}^{t_1+T_p+\tau} x_2(t-\tau) e^{-j\omega_0 k t} dt \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_2}^{t_2+T_p} x_1(\tau) x_2(t-\tau) e^{-j\omega_0 k t} dt \right) d\tau \end{aligned}$$

e intercambiando el orden de integración

$$= \frac{1}{T_p} \int_{t_2}^{t_2+T_p} \underbrace{\left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right)}_{x(t)} e^{-j\omega_0 k t} dt$$

Es decir, la función definida como *convolución periódica* de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , expresada como

$$x(t) = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

tiene como coeficientes de Fourier el producto de los coeficientes del desarrollo de las funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , es decir,  $c_k = c_{1k}c_{2k}$ .

## Conjugación y simetría conjugada

Si  $x(t)$  es una función compleja, interesa observar como se comportan los coeficientes de  $x^*(t)$ , en comparación a los  $c_k$  correspondientes a  $x(t)$ . Aplicando la conjugación compleja a ambos lados de la representación de función como serie se obtiene

$$\begin{aligned} (x(t))^* &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \right)^* \\ x^*(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j\omega_0 kt} = \sum_{-k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{j\omega_0 kt} \end{aligned}$$

es decir,  $x^*(t)$  tiene como coeficientes  $c_{-k}^*$ . Esto confirma el resultado anterior (3.33) obtenido para funciones reales, pues en dicho caso  $x(t) = x^*(t)$  y por lo tanto  $c_k = c_{-k}^*$ , lo que representa simetría hermítica con respecto al índice  $k$ .

## Derivación e Integración

Considerando la función  $x(t)$  y su desarrollo en serie de Fourier se puede observar el efecto de aplicar el operador de derivación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{d}{dt} e^{j\omega_0 kt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j\omega_0 k c_k) e^{j\omega_0 kt} \end{aligned}$$

En otras palabras, la derivación de una función equivale a multiplicar cada uno de sus coeficientes  $c_k$  por  $j\omega_0 k$ .

La integración es posible si y solo si el coeficiente  $c_0 = 0$ , puesto que de otra forma la integral crecerá indefinidamente y dejaría de ser periódica, condición que es necesaria para el cálculo de la serie de Fourier. Por otro lado, el valor de la integral depende del punto inicial de integración:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k\tau} \right) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^t e^{j\omega_0 k\tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left. \frac{e^{j\omega_0 k\tau}}{j\omega_0 k} \right|_{\tau=t_0}^t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left( \frac{e^{j\omega_0 kt} - e^{j\omega_0 kt_0}}{j\omega_0 k} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{j\omega_0 k} e^{j\omega_0 k t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{j\omega_0 k} e^{j\omega_0 k t_0}$$

El segundo término del lado derecho no depende de la variable  $t$ , y por lo tanto corresponde a una constante determinada por el instante  $t_0$  en el que inicia la integración. Por convención se toma esta constante como cero cuando  $t_0$  se hace tender a  $-\infty$ . De esta forma, la integral de la función  $x(t)$  tiene como coeficientes  $c_k/(j\omega_0 k)$ .

Como conclusión debe anotarse que los coeficientes de la derivada de  $x(t)$ , al estar multiplicados por  $j\omega_0 k$  decrecen más despacio que los coeficientes originales de  $x(t)$  y por tanto la serie converge más lentamente que la serie de  $x(t)$ . Por el contrario, al estar divididos los coeficientes de la integral de  $x(t)$  por  $j\omega_0 k$  entonces esta serie converge más rápido que la de  $x(t)$ .

### La relación de Parseval

Una resistencia eléctrica puede utilizarse para modelar cualquier sistema que consuma potencia real, como un motor, o elementos que convierten cualquier forma de energía en calor. Puesto que en un modelo eléctrico la potencia instantánea disipada por la resistencia se puede plantear en términos de la corriente  $i(t)$  o de la tensión eléctrica  $v(t)$  como  $P(t) = Ri^2(t)$  o  $P(t) = v^2(t)/R$ , entonces a las funciones de la forma  $|x(t)|^2$  se les asocia usualmente el concepto de potencia instantánea, y a su integral  $\int_{t_0}^t |x(\tau)|^2 d\tau$  el concepto de energía. Esto es válido si se asume que  $x(t)$  es la tensión o corriente eléctrica que cae sobre, o circula por una resistencia  $R$  de  $1\Omega$ . En principio, el valor de la resistencia no altera la *forma* de la función de potencia o de energía, sino que solo produce un escalamiento en amplitud.

Interesa ahora revisar cómo se relaciona la potencia promedio de una señal periódica en uno de sus periodos con respecto a los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier. La potencia promedio estará dada por

$$P_f = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt$$

y puesto que  $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$  se cumple

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j\omega_0 k t} \right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left[ \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 . \end{aligned}$$



A esta relación

$$P_f = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (3.46)$$

se le conoce como la *relación de Parseval* e implica que la potencia media de la señal equivale a la suma de las potencias medias de cada uno de los componentes frecuenciales  $c_k$ , a los que también se les denomina *armónicos*. A la gráfica de  $|c_k|^2$  para cada frecuencia  $k\omega_0$  se le denomina *densidad espectral de potencia*, espectro de la densidad de potencia o simplemente espectro de potencia. Si  $x(t)$  es real entonces debido a que  $|c_{-k}| = |c_k^*| = |c_k|$ , la densidad espectral de potencia es una función con simetría par. Al par de gráficas de  $|c_k|$  y  $\angle c_k$  contra  $k\omega_0$  se les denomina espectro de tensión, con  $|c_k|$  par e  $\angle c_k$  impar para funciones reales.

### Cambio de periodo por múltiplo del periodo fundamental

Si la función  $x(t)$  tiene periodo fundamental  $T_p$ , y se calcula el desarrollo en serie de Fourier utilizando  $n$  periodos  $nT_p$  y no uno como en el caso normal ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), entonces se cumple que la nueva frecuencia del desarrollo  $2\pi/(nT_p) = 2\pi f_0/n = \omega_0/n$  y la función  $x(t)$  tiene dos representaciones equivalentes:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{j\frac{\omega_0}{n} lt}$$

La segunda representación utiliza una base para el espacio funcional que tiene  $n$  veces más componentes que la primera representación (la distancia entre dos componentes armónicas es ahora  $\omega_0/n$  en vez de  $\omega_0$ ). El conjunto generador  $e^{j\omega_0 kt}$  engendrará entonces un subespacio funcional del espacio producido por  $e^{j\frac{\omega_0}{n} lt}$ . Debido a que la primera representación converge a  $x(t)$ , entonces todas las componentes nuevas en la base  $e^{j\frac{\omega_0}{n} lt}$  no son necesarias y los  $c_l$  correspondientes deben ser cero. Se debe cumplir entonces que  $c_{l/n} = c_k$ , o de otra forma, solo los  $c_l$  con  $l = nk$  pueden ser diferentes de cero (e iguales a  $c_k$ ), mientras que  $c_l = 0$  para  $l \neq nk$ .

La tabla 3.3 resume las propiedades de la serie de Fourier anteriormente tratadas.

**Ejemplo 3.9** Con los coeficientes obtenidos para la función rectificadora de media onda, encuentre los coeficientes de la función mostrada en la figura 3.19.

**Solución:** Sea  $x(t)$  la función rectificadora de media onda. La función  $x_c(t)$  en cuestión se puede expresar como:

$$x_c(t) = x(t) - x\left(t - \frac{T_p}{2}\right)$$

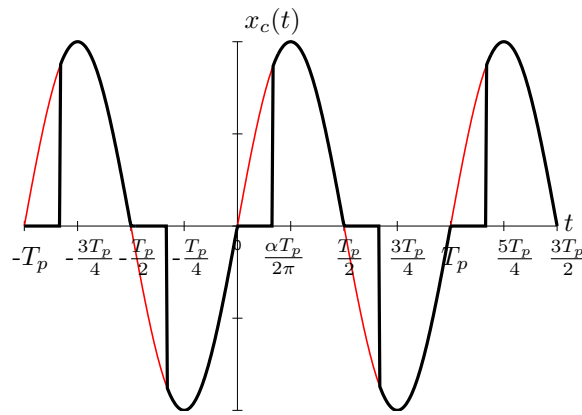
Por las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo, los coeficientes  $c'_k$  de la

**Tabla 3.1:** Propiedades de la Serie de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Coeficientes
	$x(t)$	$c_k$
	$x_1(t)$	$c_{1_k}$
	$x_2(t)$	$c_{2_k}$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 c_{1_k} + \alpha_2 c_{2_k}$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$c_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cos(\omega_0 k t) dt$ $c_k \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -\frac{2j}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \sin(\omega_0 k t) dt$ $c_k \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k = c_{-k}^*$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega_0 k \tau} c_k$
Conjugación	$x^*(t)$	$c_{-k}^*$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$c_{-k}$
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t), \alpha > 0$	$c_k$
Convolución periódica	$\int_{T_p} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$T_p c_{1_k} c_{2_k}$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1_l} c_{2_{k-l}}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j k \omega_0 c_k$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt, c_0 = 0$	$\frac{c_k}{j k \omega_0}$
Relación de Parseval	$\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p}  x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  c_k ^2$	

función rectificada de onda completa se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
 c'_k &= c_k - e^{-j\omega_0 k T_p/2} c_k \\
 &= c_k (1 - e^{-j\pi k}) \\
 &= c_k (1 - (-1)^k) \\
 &= \begin{cases} 2c_k & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}
 \end{aligned}$$



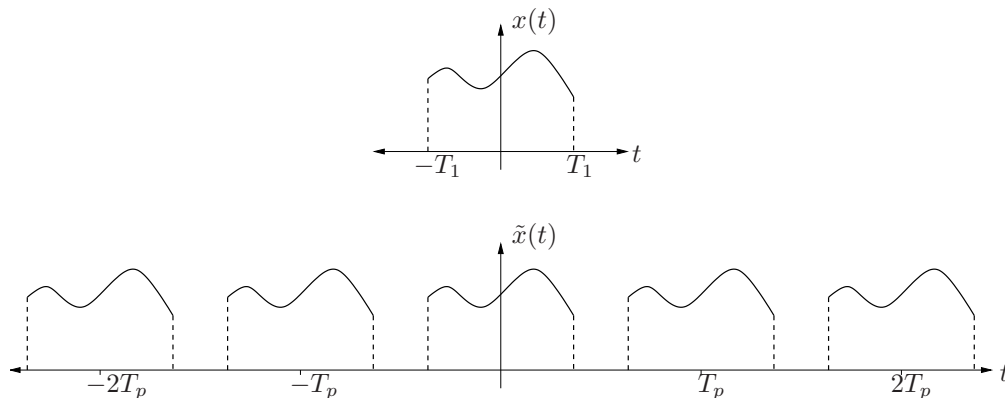
**Figura 3.19:** Función senoidal truncada con ángulo de disparo  $\alpha$ .

### 3.3 Transformada de Fourier

En la sección anterior se analizaron las Series de Fourier, que permiten representar en el *dominio de la frecuencia* funciones periódicas de periodo  $T_p$ , al descomponer estas en sus componentes espectrales (o componentes armónicas) ubicadas en las frecuencias  $k\omega_0$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), con  $\omega_0 = 2\pi/T_p$ . Se dice entonces que una señal periódica continua tiene un espectro de frecuencia discreto.

La transformada de Fourier es una extensión de los conceptos obtenidos para funciones periódicas hacia funciones no periódicas. Fourier desarrolló estos conceptos a partir de una observación: una función aperiódica puede considerarse como una función periódica con periodo infinito. Ya en el ejemplo 3.5, figura 3.13 se mostró que el aumentar el periodo de una señal finita sin alterar la forma de la parte de señal diferente de cero, tiene como efecto el acercamiento entre las líneas espectrales, puesto que estas se ubican en  $2\pi k/T_p$ . Debe esperarse entonces que al hacer tender el periodo a infinito, las líneas espectrales también se acercarán infinitamente.

#### 3.3.1 Transformada de Fourier directa e inversa



**Figura 3.20:** Extensión periódica de periodo  $T_p$  de función aperiódica finita.

La figura 3.20 muestra una función  $x(t)$  aperiódica finita, y su extensión periódica  $\tilde{x}(t)$  de periodo  $T_p$ . Esta segunda función puede representarse a través de un desarrollo de Fourier:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \quad (3.47)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular fundamental que está relacionada con el periodo fundamental por  $\omega_0 = 2\pi/T_p$ . El coeficiente  $c_k$  ( $k$ -ésimo componente espectral) está asociado con la frecuencia  $k\omega_0$ , lo que implica que dos componentes espectrales consecutivas están separadas por una frecuencia  $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_p$ , que se reduce conforme aumenta el periodo  $T_p$ . Estos coeficientes se calculan como

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

donde, puesto que dentro del intervalo de integración  $\left[-\frac{T_p}{2}, \frac{T_p}{2}\right]$  se cumple  $x(t) = \tilde{x}(t)$ , y además para todo  $|t| > \frac{T_p}{2}$   $x(t) = 0$ , entonces

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

Si ahora se define  $X(j\omega)$  como la función envolvente de los coeficientes  $T_p c_k$ , que se expresa por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.48)$$

entonces los puntos  $c_k$  pueden verse como *muestras* cada  $k\omega_0$  de dicha función:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) \quad (3.49)$$

A (3.48) se le conoce como *Transformada de Fourier* de la función  $x(t)$ . A esta función convergen todos los componentes  $T_p c_k$  cuando  $T_p$  se hace tender a infinito. Esta transformada es entonces un operador que asigna a la función  $x(t)$  otra función  $X(j\omega)$ . Esta asignación entre funciones, que implica un operador funcional, se designa usualmente con el símbolo  $\mathcal{F}\{\cdot\}$ , es decir

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

La relación entre estas dos funciones se designa además con el símbolo “ $\circ\text{---}\bullet$ ”:

$$x(t) \circ\text{---}\bullet X(j\omega)$$

donde el círculo relleno denota siempre al dominio de la frecuencia, es decir, a la función  $X(j\omega)$ , y el círculo blanco al dominio del tiempo ( $x(t)$ ).

En las series de Fourier, definidas para señales periódicas, las componentes espectrales existen solo para frecuencias discretas relacionadas armónicamente  $k\omega_0$ . Ahora con la Transformada de Fourier se obtiene un espectro continuo para una señal aperiódica en el dominio de la

frecuencia. La relación (3.49) indica entonces que si la función no periódica  $x(t)$  es finita y se utiliza para construir una señal periódica  $\tilde{x}(t)$  de periodo  $T_p$ , donde no hay traslapes, entonces los coeficientes de la serie de Fourier para  $\tilde{x}(t)$  son proporcionales a muestras tomadas de la transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{x(t)\}$  a las frecuencias  $k\omega_0$ .

Si se introduce (3.49) en (3.47) se obtiene a su vez

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega\end{aligned}$$

Si se hace  $T_p$  tender al infinito, entonces  $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_p$  tenderá a un diferencial  $d\omega$ , el término discreto  $k\Delta\omega$  tiende a la variable continua  $\omega$ , y  $\tilde{x}(t)$  tiende a  $x(t)$ , por lo que la suma anterior converge en la integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.50)$$

que es conocida como la *Transformada Inversa de Fourier*, denotada por el operador  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

Las transformadas directa e inversa de Fourier permiten entonces asociar las representaciones de una señal en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, donde una señal aperiódica contará con un *espectro continuo*, que contrasta con el espectro discreto de señales periódicas. A pesar de que las deducciones anteriores partieron del hecho de que la función  $x(t)$  puede tener duración arbitraria pero finita, pueden encontrarse condiciones de convergencia de estas transformadas para funciones aperiódicas de longitud infinita, que es el tema de la siguiente sección. De esta forma, a  $X(j\omega)$  se le conoce como espectro de frecuencia de  $x(t)$ , a  $|X(j\omega)|$  se le conoce como espectro de magnitud y a  $\arg X(j\omega)$  espectro de fase.

### 3.3.2 Convergencia de la Transformada de Fourier

Debido a la relación estrecha entre la Transformada de Fourier y la Serie de Fourier, es de esperar que las condiciones de convergencia para ambas estén relacionadas. Se buscan ahora las condiciones para que la función representada por la transformada inversa de Fourier

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

sea equivalente con la función  $x(t)$  que da origen a la transformada de Fourier  $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Las condiciones de convergencia para que  $\bar{x}(t) = x(t)$  (excepto en los puntos de discontinuidad, donde  $\bar{x}(t) = (x(t^+) + x(t^-))/2$ ) se denominan también en este caso condiciones de Dirichlet y establecen que

1.  $x(t)$  debe ser absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2.  $x(t)$  solo puede tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito
3.  $x(t)$  solo puede tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito, y esas discontinuidades deben ser finitas.

Estas condiciones son de nuevo suficientes, mas no necesarias, puesto que existen ciertas funciones que no las cumplen y tienen una representación válida en el dominio de la frecuencia.

### 3.3.3 Ejemplos de Transformadas de Fourier

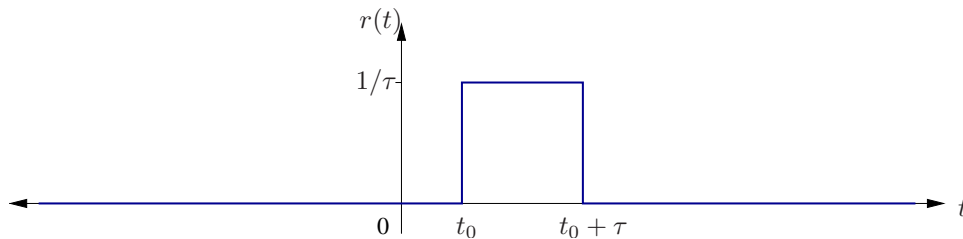
En esta sección se evaluarán algunos casos especiales de transformadas de Fourier ampliamente utilizados en ingeniería.

#### Impulso rectangular

La figura 3.21 muestra un impulso rectangular  $r(t)$  de ancho  $\tau$  y amplitud  $1/\tau$ . Su longitud finita hace que sea absolutamente integrable, y de hecho

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{\tau} dt = 1 \quad (3.51)$$

Además, solo tiene dos discontinuidades y ningún máximo, por lo que las tres condiciones de Dirichlet se cumplen y debe entonces existir su transformada de Fourier.



**Figura 3.21:** Impulso rectangular de ancho  $\tau$  y amplitud  $1/\tau$ .

Con la definición (3.48) se obtiene para  $j\omega = 0$ :

$$R(j\omega)|_{j\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{\tau} dt = 1 \quad (3.52)$$

y para  $j\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega\tau} (e^{-j\omega\tau} - 1) \\ &= -\frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}) = e^{-j\omega(t_0+\tau/2)} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \end{aligned}$$

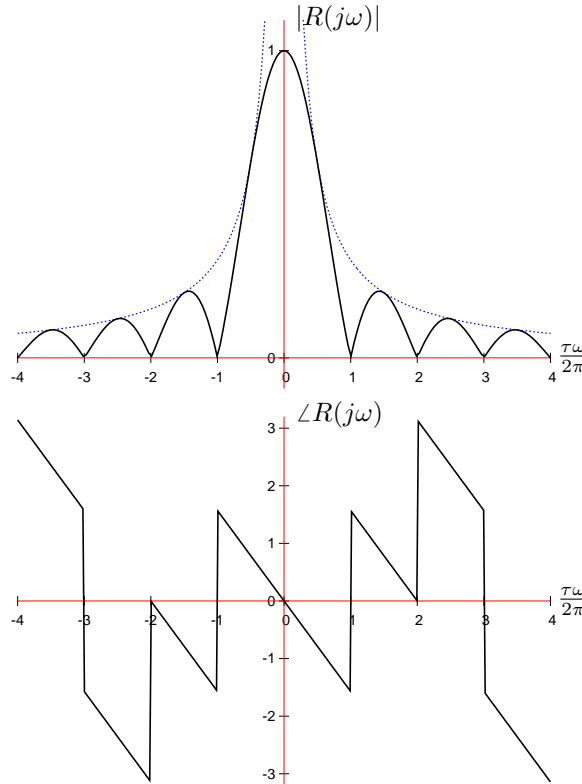
que se puede combinar con (3.52) para obtener:

$$= e^{-j\omega(t_0+\tau/2)} \text{sa}(\omega\tau/2) \quad (3.53)$$

donde se aprecia que los espectros de magnitud y fase son

$$\begin{aligned} |R(j\omega)| &= |\text{sa}(\omega\tau/2)| \\ \angle R(j\omega) &= \begin{cases} -(t_0 + \frac{\tau}{2})\omega & \text{si } \text{sa}(\omega\tau/2) \geq 0 \\ \pi - (t_0 + \frac{\tau}{2})\omega & \text{si } \text{sa}(\omega\tau/2) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

que demuestra que la magnitud espectral depende solo del ancho del pulso  $\tau$ , mientras que la posición del pulso  $t_0$  afecta la pendiente de la fase lineal. La figura 3.22 representa las dos componentes del espectro de  $r(t)$ . Junto a la magnitud se ha graficado además  $2/(|\omega|\tau) \geq |R(j\omega)|$ .



**Figura 3.22:** Magnitud y fase del espectro en frecuencia de un impulso rectangular de ancho  $\tau$  y amplitud  $1/\tau$ .

Si se elige  $t_0 = -\tau/2$  el pulso quedará centrado en el origen temporal y el espectro se torna completamente real  $R(j\omega) = \text{sa}(\omega\tau/2)$ . Utilizando la transformación inversa se debe

cumplir:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega t} d\omega$$

de donde se nota para el caso especial  $t = 0$ ,

$$x(0) = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\omega$$

y con  $\tau = 2$  entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sa}(\omega) d\omega = \pi$$

que también puede obtenerse por otros medios de integración. Puesto que la función  $\text{sa}(\omega)$  es una función par, se cumple además

$$\int_0^{\infty} \text{sa}(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \quad (3.54)$$

En el apéndice B se demuestra esta integral por métodos de integración compleja.

### Impulso unitario

El *impulso unitario* o *impulso Dirac*, denotado con  $\delta(t)$  es una función que es cero para todo punto  $t \neq 0$  e infinito para  $t = 0$ , pero que tiene un área igual a uno (recordar página 130), esto es

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

Si se multiplica el impulso por una función cualquiera  $x(t)$ , se cumple  $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ , por lo que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)\delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(0)\delta(\tau) d\tau = x(0) \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ x(0) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

que es conocida como la propiedad de muestreo del impulso unitario. Se cumple además

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t_0) d\tau = x(t_0)$$

lo que se demuestra utilizando las propiedades anteriores haciendo un cambio de variable.

Esto quiere decir que la transformada de Fourier del impulso unitario es

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

lo que indica que un impulso unitario contiene todas las componentes espectrales posibles.



### Escalón unitario (primer intento)

El escalón unitario, denotado usualmente como  $u(t)$ , y llamado también *función de Heaviside* es una función igual a cero para todo  $t < 0$  y uno para todo  $t \geq 0$ , que se expresa como

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

A partir de esta relación se utiliza

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

Para observar su transformada de Fourier se calcula a partir de la definición

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-j\omega\infty}}{-j\omega} + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

que no puede calcularse puesto que  $e^{-j\omega\infty}$  no converge. Nótese que en principio este escalón unitario no satisface la condición de Dirichlet de integración absoluta. En las siguientes secciones se utilizarán otros mecanismos para obtener la transformada de Fourier de esta función.

### Función exponencial

Una función frecuentemente encontrada en sistemas electrónicos es

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (3.55)$$

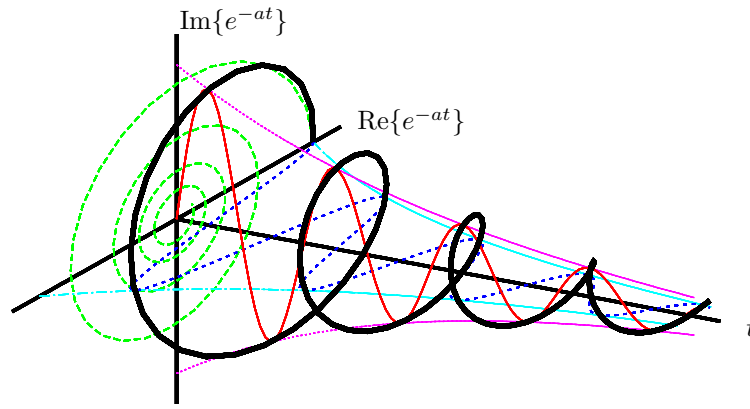
donde  $u(t)$  es el escalón unitario indicado anteriormente, y  $a$  es una constante compleja con  $\text{Re}(a) > 0$ . La figura 3.23 representa un caso particular, donde se interpreta al número complejo  $e^{-at}u(t)$  como fasor que varía en el tiempo, de modo que se pueden apreciar las componentes reales e imaginarias, así como la magnitud y fase del valor complejo de  $x(t)$  en función del tiempo. Obsérvese que si  $a_{\text{Re}}$  y  $a_{\text{Im}}$  son las componentes real e imaginaria de  $a$  respectivamente, entonces la función se puede reescribir como

$$x(t) = e^{-(a_{\text{Re}} + ja_{\text{Im}})t} = e^{-a_{\text{Re}}t}e^{-ja_{\text{Im}}t}$$

donde el término  $e^{-a_{\text{Re}}t}$  representa la magnitud del valor complejo y  $e^{-ja_{\text{Im}}t}$  aporta la fase. Aplicando la identidad de Euler se obtiene además  $\text{Re}\{x(t)\} = e^{-a_{\text{Re}}t} \cos(a_{\text{Im}}t)$  y  $\text{Im}\{x(t)\} = -e^{-a_{\text{Re}}t} \sin(a_{\text{Im}}t)$ .

La transformada de Fourier de esta función  $x(t)$  es

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$



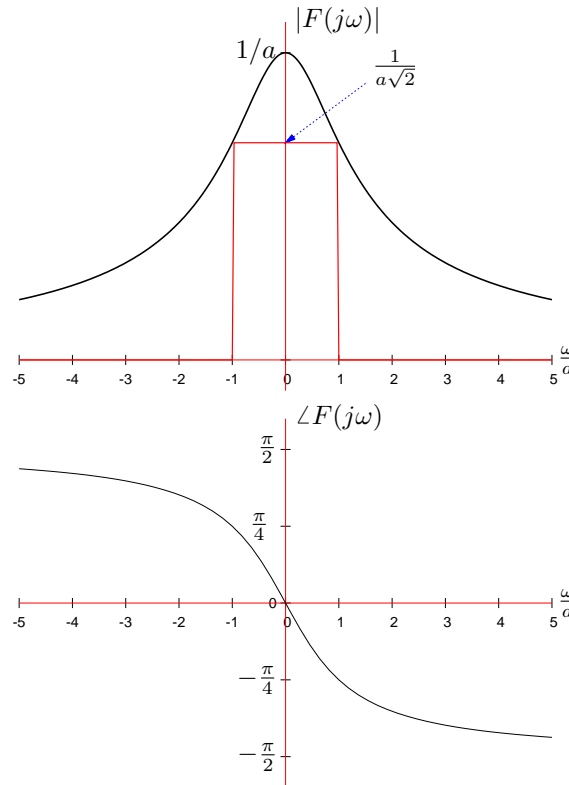
**Figura 3.23:** Representación gráfica de función exponencial  $e^{-at}u(t)$ .

donde magnitud y fase pueden expresarse como

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}(a)^2 + (\operatorname{Im}(a) + \omega)^2}}$$

$$\angle X(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(a) + \omega}{\operatorname{Re}(a)}\right)$$

La figura 3.24 representa estas componentes para el caso especial  $a \in \mathbb{R}$ .



**Figura 3.24:** Espectro en magnitud y fase para la función exponencial unilateral.

Nótese que si en (3.55) se elige  $a$  real, y se hace tender  $a \rightarrow 0$ , entonces  $x(t) \rightarrow u(t)$  y  $X(j\omega) = 1/(j\omega)$ , que podría erróneamente interpretarse como la transformada del escalón

unitario. Utilizando la transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

para  $t = 0$  esto equivale a

$$x(0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{1}{j\omega} d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-R}^{-r} \frac{1}{j\omega} d\omega + \int_r^R \frac{1}{j\omega} d\omega \right] \frac{1}{2\pi}$$

y haciendo un cambio de variable  $\omega \rightarrow -\omega$  en la primera integral

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ - \int_r^R \frac{1}{j\omega} d\omega + \int_r^R \frac{1}{j\omega} d\omega \right] \frac{1}{2\pi} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[ \int_r^R \left( \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} \right) d\omega \right] \frac{1}{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Para  $t \neq 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

y haciendo un cambio de variable  $\omega \rightarrow -\omega$  en la primera integral

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2t \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2t \text{sa}(\omega t) d\omega \end{aligned}$$

y con  $\alpha = \omega t$  entonces  $d\alpha = t d\omega$  y

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{t\infty} \text{sa}(\alpha) d\alpha$$

Si  $t > 0$  entonces el límite superior de la integración es  $+\infty$  y la ecuación anterior equivale, utilizando (3.54), a

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sa}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Si  $t < 0$  entonces el límite superior de la integración es  $-\infty$  y la ecuación anterior equivale, utilizando (3.54), haciendo un cambio de variable  $\alpha \rightarrow -\alpha$  y utilizando la simetría par de la función sa

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \text{sa}(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sa}(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}$$

Resumiendo,

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega} \right\} = u(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

y esta función no tiene ningún nivel CD, a diferencia del escalón unitario, cuyo valor promedio es  $1/2$ .

### Funciones con una sola componente espectral

Considérese una función  $x(t)$  cuya transformada de Fourier es  $X(j\omega) = c\delta(\omega - \omega_0)$ , con  $c$  constante. Utilizando la ecuación de la transformada inversa se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{c}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

es decir, la función exponencial compleja  $e^{j\omega_0 t}$  que oscila a una tasa  $\omega_0$  tiene como transformada de Fourier un único impulso ubicado en  $\omega_0$ , lo que puede interpretarse como una única componente espectral.

Obsérvese que una función  $x(t) = c$ , con  $c$  constante tendrá como transformada de Fourier  $X(j\omega) = 2\pi c\delta(\omega)$ , lo que implica que solo tiene una componente espectral en  $\omega_0 = 0$ .

### Escalón unitario

Ahora se dispone de todo lo necesario para determinar la transformada de Fourier de la función escalón unitario  $u(t)$ . En (3.56) se obtuvo el escalón excepto por un nivel CD, que ahora puede introducirse considerando la propiedad mencionada y la linealidad de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

que existe a pesar de que las condiciones de Dirichlet no se cumplen para  $u(t)$ . El término  $\pi\delta(\omega)$  aparece al agregar  $1/2$  a todos los puntos de la función correspondiente a  $\mathcal{F}^{-1}\{1/j\omega\}$ .

### Funciones periódicas

Si ahora se tiene un espectro conformado por una combinación lineal de impulsos distanciados por la frecuencia  $\omega_0$ , es decir

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (3.57)$$

entonces

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \right) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

que es el desarrollo en serie de Fourier para  $x(t)$ . Esta debe ser entonces periódica con periodo  $2\pi/\omega_0$ . En otras palabras, la transformada de Fourier de una función periódica tendrá impulsos separados por la frecuencia  $\omega_0$ , cuya área es escalada por el factor  $2\pi c_k$ , donde  $c_k$  son los coeficientes correspondientes en su serie de Fourier.

**Ejemplo 3.10** Calcule la transformada de Fourier de las funciones  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$  y  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ .

**Solución:** El desarrollo en serie de Fourier de  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$  tiene como coeficientes

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{para } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} \\ \frac{1}{2j} = -j\frac{1}{2} & \text{para } k = 1 \\ -\frac{1}{2j} = j\frac{1}{2} & \text{para } k = -1 \end{cases}$$

Por lo que la transformada de Fourier del seno es  $X(j\omega) = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$ .

Del mismo modo el desarrollo del coseno utiliza

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{para } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} \\ \frac{1}{2} & \text{para } k = \pm 1 \end{cases}$$

y por lo tanto  $X(j\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$ .

Obsérvese que en este caso no se cumple la primera condición de Dirichlet, que establece que la función debe ser absolutamente integrable. 3.10

### Impulso gaussiano

Para mostrar el llamado *principio de incertidumbre* entre los dominios del tiempo y la frecuencia, se utilizará como caso especial la función de distribución normal, o impulso gaussiano definida como

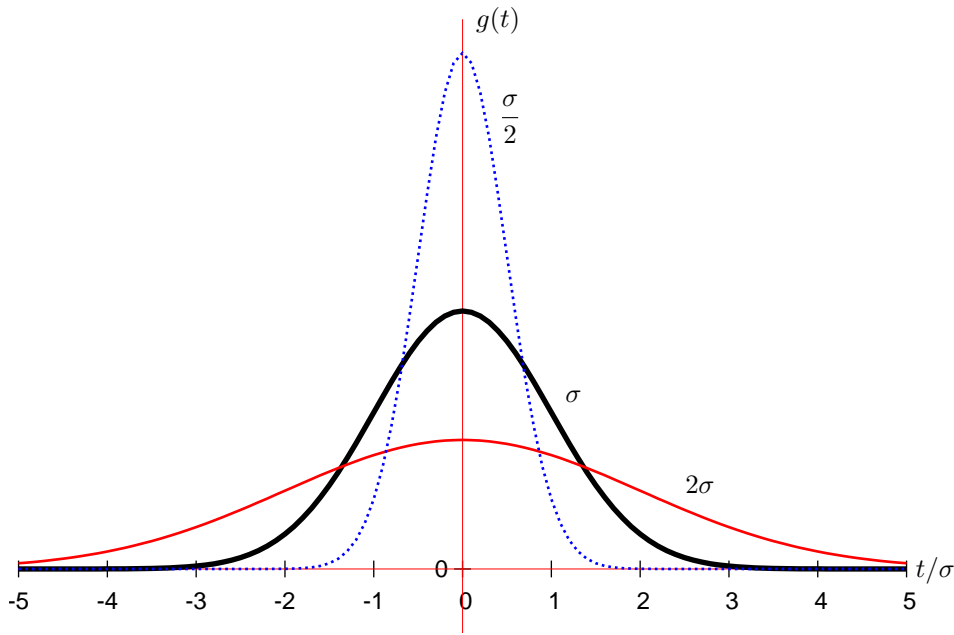
$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

que es una función par de área igual a uno, centrada en cero, cuya extensión depende de la varianza  $\sigma^2$ . La figura 3.25 presenta tres casos donde se nota que a mayor varianza, más extensa se torna la función a pesar de que su área se mantiene constante en la unidad.

Para encontrar la transformada de Fourier se puede proseguir de dos maneras: utilizando las propiedades de integración compleja del capítulo anterior, o utilizando propiedades de la transformada de Fourier que se especificarán en la siguiente sección.

Para iniciar la demostración se utiliza la definición

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 - j\omega t} dt \end{aligned}$$



**Figura 3.25:** Curvas de distribución normal con varianzas  $\sigma/2$ ,  $\sigma$  y  $2\sigma$ .

y completando cuadrados en el exponente

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 + 2j\omega t + (j\omega\sigma)^2 - (j\omega\sigma)^2\right]} dt \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 + 2j\omega t + (j\omega\sigma)^2\right]} e^{\frac{1}{2}(j\omega\sigma)^2} dt \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma} + j\omega\sigma\right)^2} dt \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t+j\omega\sigma^2}{\sigma}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

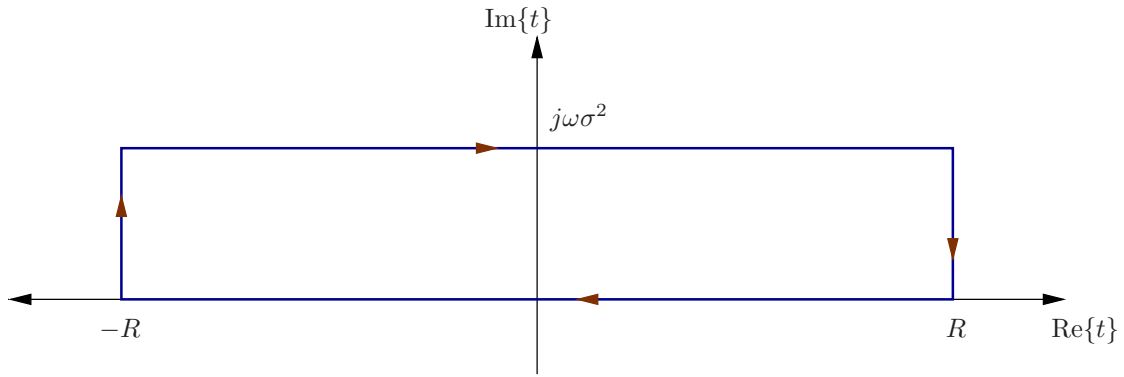
Sustituyendo  $\tau = t + j\omega\sigma^2$  y  $dt = d\tau$  se obtiene

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \int_{-\infty+j\omega\sigma^2}^{\infty+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau$$

que puede interpretarse como una integral en el plano complejo en una trayectoria horizontal desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  a una distancia  $\omega\sigma^2$  del eje real. Completando un contorno cerrado como lo muestra la figura 3.26 se tiene, puesto que el integrando es analítico, que en ese contorno cerrado la integral es cero, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{-R+j\omega\sigma^2}^{R+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau &= - \int_{R+j\omega\sigma^2}^{-R+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau - \int_{-R}^{-R+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau - \int_{-R+j\omega\sigma^2}^{-R} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau \\
 &= \int_{-R}^R e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau - \int_{R+j\omega\sigma^2}^{-R+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau - \int_{-R}^{-R+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau
 \end{aligned}$$

donde, el lector podrá demostrar que para  $R \rightarrow \infty$  las dos últimas integrales al lado derecho



**Figura 3.26:** Trayectoria de integración para cálculo de transformada de Fourier de distribución normal.

son iguales a cero. Por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R+j\omega\sigma^2}^{R+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau = \sigma\sqrt{2\pi}$$

con lo que finalmente se puede expresar

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \int_{-\infty+j\omega\sigma^2}^{\infty+j\omega\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\sigma^2}} d\tau = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \sigma\sqrt{2\pi} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \end{aligned}$$

En otras palabras, la transformada de Fourier de  $g(t)$  tiene también la forma de una distribución normal, pero sin normalizar y con una nueva varianza  $1/\sigma^2$ , donde es este último detalle es de gran importancia para el análisis en el dominio de la frecuencia: mientras menor sea la varianza en el dominio del tiempo, es decir, mientras más concentrada se encuentre la señal en un pequeño intervalo de tiempo, mayor será el intervalo de frecuencias correspondientes en el dominio de la frecuencia, y mientras más concentradas estén las componentes de frecuencia, más dispersa es la señal correspondiente en el tiempo. Este llamado *principio de incertidumbre* establece que a un evento localizado puntualmente en el dominio de la frecuencia no se le puede asignar con precisión el punto en que el evento ocurre, y un evento característico que ocurre en un instante preciso de tiempo (por ejemplo, una discontinuidad) tendrá una representación frecuencial distribuida en todo el espectro. Este principio corresponde a la transformada de Fourier en sí y no solo al caso particular de las distribuciones normales, tal y como se observará con la propiedad de escalado.

La tabla 3.2 resume los ejemplos anteriores y algunas otras transformadas frecuentes.

### 3.3.4 Propiedades de la Transformada de Fourier

La relación estrecha entre las series de Fourier y la transformada de Fourier hace que ambos operadores compartan la mayor parte de sus propiedades.

**Tabla 3.2:** Transformadas de Fourier

Nombre	Señal en el tiempo	Transformada
Transformación	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Escalon unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Impulso rectangular	$\frac{1}{\tau}[u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)]$	$e^{-j\omega(t_0+\frac{\tau}{2})} \text{sa}(\omega\tau/2)$
Exponencial	$e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
Exponencial por rampa	$e^{-at}tu(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
Laplaciana	$e^{-a t }, \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
Exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
Constante	$c$	$2\pi c\delta(\omega)$
Función periódica	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$
Impulso gaussiano	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma})^2}$	$e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2}$
Seno	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Coseno	$\text{cos}(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

### Linealidad

Sean dos funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , sus respectivas transformadas de Fourier  $x_1(j\omega)$  y  $x_2(j\omega)$ , y dos valores escalares  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . La linealidad de la transformada de Fourier especifica que

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$$

lo que puede demostrarse utilizando la ecuación (3.48) y la linealidad del operador de integración.

**Ejemplo 3.11** Encuentre la transformada de Fourier de las funciones seno y coseno.

**Solución:** Para el seno se cumple

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

y considerando que

$$e^{j\omega_0 t} \circ \bullet 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{sen}(\omega_0 t)\} &= -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$



que concuerda con lo obtenido anteriormente.

Para el coseno se procede de forma similar:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

3.11

## Simetría

La influencia de la simetría de  $x(t)$  en su transformada de Fourier se puede verificar del mismo modo que se hizo para los coeficientes de la serie de Fourier:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} x(-t)e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} x(-t)e^{j\omega t} + x(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Si se tiene simetría par, entonces  $x(t) = x(-t)$  y

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} x(-t)e^{j\omega t} + x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t)(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

Si  $x(t)$  es además real, y puesto que el coseno es una función par, entonces el espectro será también real y tendrá simetría par con respecto a  $\omega$ .

Con la simetría impar se cumple  $x(-t) = -x(t)$  y por tanto

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} x(-t)e^{j\omega t} + x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} x(t)(-e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) dt \\ &= -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Si  $x(t)$  es real y utilizando la simetría impar del seno se deriva que el espectro de una función impar es a su vez impar y puramente imaginario.

## Desplazamiento en el tiempo y en la frecuencia

Si la función  $x(t)$  tiene como transformada a  $X(j\omega)$  entonces el desplazamiento de  $x(t)$  en el tiempo por una magnitud  $t_0$  tendrá como transformada

$$x(t - t_0) \circ \bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

y haciendo una sustitución de variable  $\tau = t - t_0$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega t_0} d\tau \\
 &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= e^{-j\omega t_0} X(j\omega)
 \end{aligned}$$

lo que implica que un desplazamiento en el tiempo también produce únicamente un cambio en la fase del espectro de  $x(t)$ , quien es modificada linealmente sumándole  $-\omega t_0$  a la fase de  $X(j\omega)$ .

Ahora, si es el espectro  $X(j\omega)$  quien se traslada en la frecuencia por una magnitud  $\omega_0$ , entonces

$$X(j\omega - j\omega_0) \bullet \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

y haciendo una sustitución de variable  $\gamma = \omega - \omega_0$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\gamma) e^{j(\gamma+\omega_0)t} d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\gamma) e^{j\gamma t} e^{j\omega_0 t} d\gamma \\
 &= e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\gamma) e^{j\gamma t} d\gamma \\
 &= e^{j\omega_0 t} x(t)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

La siguiente sección deriva una propiedad muy utilizada en comunicaciones eléctricas, a partir del desplazamiento en la frecuencia.

## Modulación

Se dice que una función se *modula* a la frecuencia  $\omega_0$  cuando se multiplica por  $\cos(\omega_0 t)$ . Esto es

$$\cos(\omega_0 t) x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} x(t) + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} x(t)$$

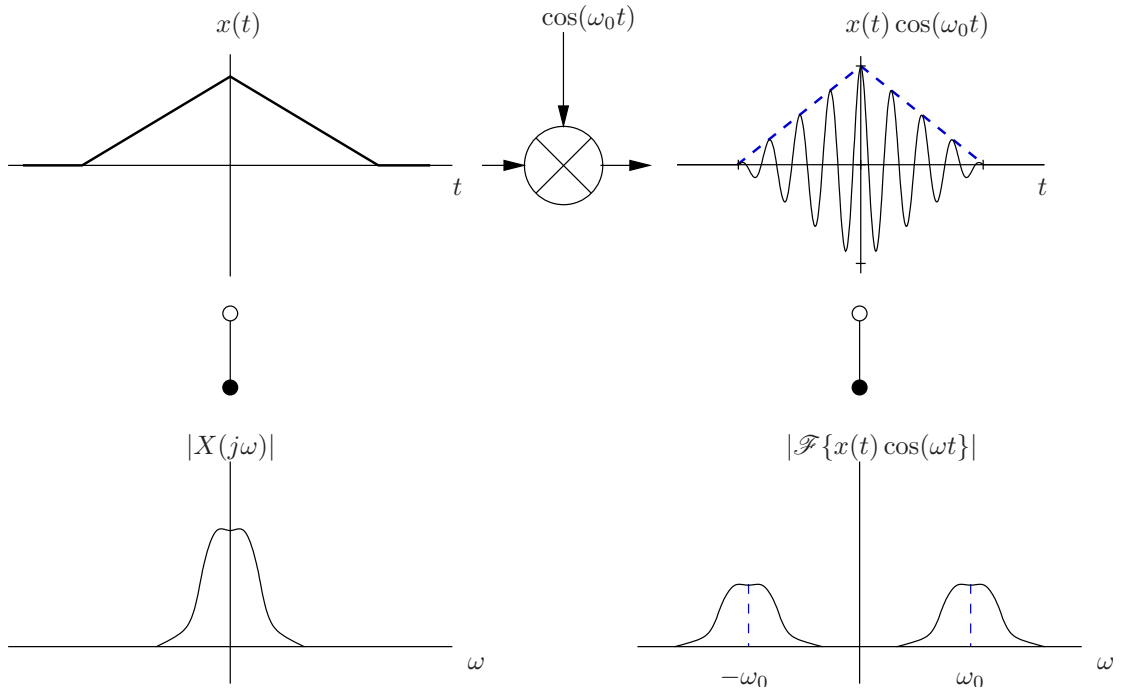
Utilizando la propiedad (3.58) y la linealidad se deduce que el espectro de la señal modulada es

$$\mathcal{F} \{ \cos(\omega_0 t) x(t) \} = \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_0)$$

lo que implica que el espectro de  $x(t)$  se divide en dos mitades, donde una se desplaza a  $-\omega_0$  y otra a  $\omega_0$  (figura 3.27).

Otro tipo de modulación se obtiene multiplicando la señal por el  $\sin(\omega_0 t)$ , donde de forma equivalente a lo anterior se obtiene

$$\sin(\omega_0 t) x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2j} x(t) - \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j} x(t)$$



**Figura 3.27:** Modulación de una señal  $x(t)$  y el espectro correspondiente.

Utilizando la propiedad (3.58) y la linealidad se deduce que el espectro de la señal modulada es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)x(t)\} &= \frac{1}{2j}X(j\omega - j\omega_0) - \frac{1}{2j}X(j\omega + j\omega_0) \\
 &= \frac{e^{-j\pi/2}}{2}X(j\omega - j\omega_0) - \frac{e^{-j\pi/2}}{2}X(j\omega + j\omega_0) \\
 &= \frac{e^{-j\pi/2}}{2}X(j\omega - j\omega_0) + \frac{e^{+j\pi/2}}{2}X(j\omega + j\omega_0)
 \end{aligned}$$

lo que implica que el espectro de  $x(t)$  se divide en dos mitades, donde una se desplaza a  $-\omega_0$  y otra invertida a  $\omega_0$ , donde además la fase de cada mitad se desplaza en  $\pi/2$ .

### Conjugación y Simetría Conjugada

Si la transformada de Fourier de  $x(t)$  es  $X(j\omega)$ , entonces se cumple

$$x^*(t) \circ \bullet X^*(-j\omega)$$

lo que se demuestra utilizando las propiedades de conjugación compleja:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{j\omega t})^* dt \\
 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right)^* = \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t} dt \right)^* \\
 &= X^*(-j\omega)
 \end{aligned}$$

Nótese que si  $x(t)$  es real, entonces  $x(t) = x^*(t)$  y por tanto las transformadas de Fourier de ambas funciones deben ser iguales, de donde se deduce que para funciones reales  $X(j\omega)$  tiene simetría hermitica, es decir, se cumple  $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ . Esto implica que las transformaciones de Fourier de funciones reales tienen componente real y magnitud par, mientras que su componente imaginaria y fase son impares.

### Diferenciación e integración

Para observar el efecto de la derivación de una función  $x(t)$  en su transformada de Fourier se utiliza la transformada inversa:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{j\omega X(j\omega)}_{\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}} e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ\!\!\!\bullet j\omega X(j\omega)$$

Lo anterior se puede generalizar para derivadas de orden superior:

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \circ\!\!\!\bullet (j\omega)^n X(j\omega)$$

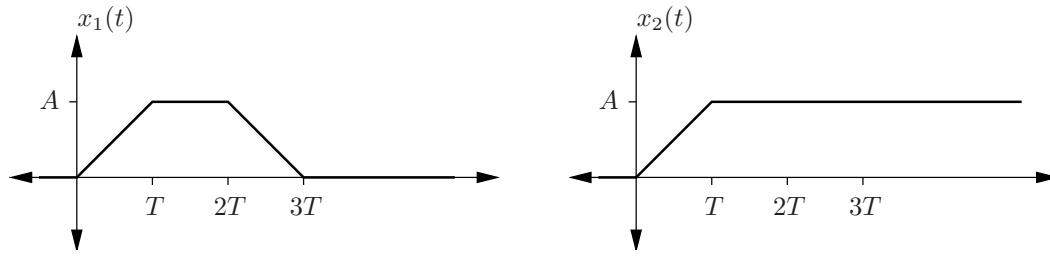
Esta propiedad es de gran utilidad en el análisis de ecuaciones diferenciales, puesto que la diferenciación en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación por el factor  $j\omega$  en el dominio de la frecuencia.

De forma equivalente, para la derivada en el dominio de la frecuencia se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}X(j\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} (x(t) e^{-j\omega t}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-jtx(t)}_{\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d}{d\omega}X(j\omega)\right\}} e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

de donde

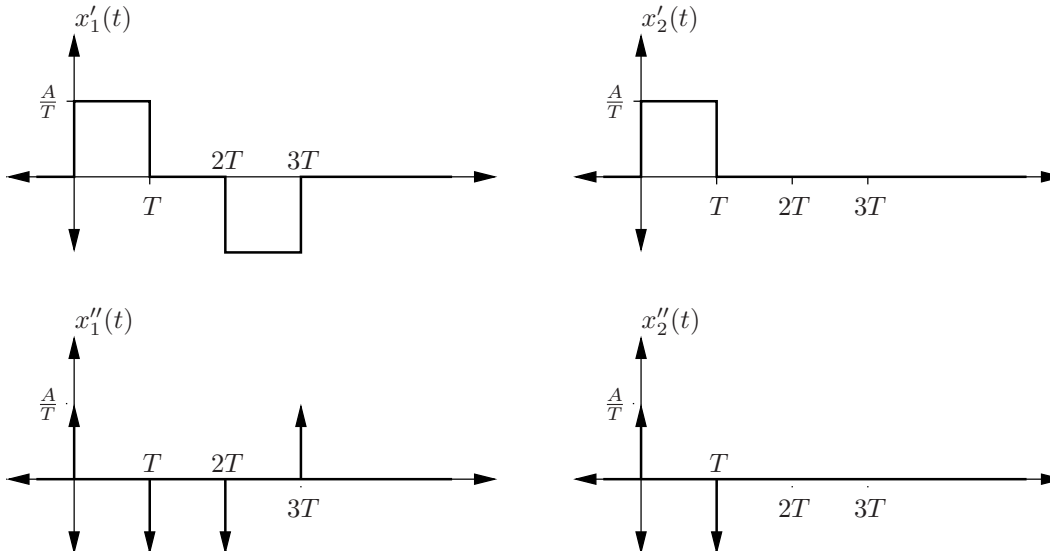
$$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega) \bullet\!\!\!\circ tx(t)$$



**Figura 3.28:** Funciones utilizadas en ejemplo 3.12.

**Ejemplo 3.12** Utilice la propiedad de derivación de la transformada de Fourier para encontrar la transformada de las funciones en la figura 3.28.

**Solución:** La propiedad de derivación puede utilizarse para calcular fácilmente la transformada de Fourier de funciones que son formadas por segmentos de recta, como las mostradas en la figura 3.28. En el procedimiento a seguir, se derivan las funciones hasta obtener impulsos de Dirac, donde debe tomarse en cuenta que si la función original tiene un valor promedio finito (o nivel CD), al derivar la primera vez dicha información se pierde, y debe reinsertarse posteriormente.



**Figura 3.29:** Funciones utilizadas en ejemplo 3.12.

La figura 3.29 muestra la primera y segunda derivadas de las funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . La función  $x_1(t)$  tiene valor promedio igual a cero:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x_1(t) dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{TA}{L} = 0$$

Puesto que la transformada de Fourier del delta Dirac es 1, entonces por linealidad, y utilizando las propiedades de desplazamiento y de derivación, se cumple:

$$(j\omega)^2 X_1(j\omega) = \frac{A}{T} [1 - e^{-j\omega T} - e^{-j\omega 2T} + e^{-j\omega 3T}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T} \left[ e^{-j\omega \frac{3}{2}T} \left( e^{j\omega \frac{3}{2}T} + e^{-j\omega \frac{3}{2}T} \right) - e^{-j\omega T} e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left( e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right) \right] \\
&= 2\frac{A}{T} e^{-j\omega \frac{3}{2}T} \left( \cos \left( \omega \frac{3}{2}T \right) - \cos \left( \omega \frac{T}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

y finalmente se obtiene:

$$X_1(j\omega) = 2\frac{A}{\omega^2 T} e^{-j\omega \frac{3}{2}T} \left( \cos \left( \omega \frac{T}{2} \right) - \cos \left( \omega \frac{3}{2}T \right) \right)$$

También es posible agrupar otros pares de impulsos para obtener expresiones algebraicas equivalentes. El lector puede realizar agrupaciones diferentes, como por ejemplo los impulsos en 0 y  $2T$ , y por otro lado en  $T$  y  $3T$  para obtener senos. Otro ejercicio será agrupar los impulsos en 0 y  $T$ , y por otro lado los impulsos en  $2T$  y  $3T$ .

Para el caso de la función  $x_2(t)$ , el valor promedio es diferente de cero:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x_2(t) dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \left[ \frac{AT}{2} + A(L - T) \right] = \frac{A}{2}$$

Este nivel es eliminado en la derivación, pero se sabe que su transformada de Fourier es  $\pi A \delta(\omega)$ , que deberá considerarse en la transformada.

Procediendo de modo similar al caso anterior, se cumple:

$$\begin{aligned}
X_2(j\omega) &= \frac{A}{T(j\omega)^2} [1 - e^{-j\omega T}] + \pi A \delta(\omega) \\
&= -\frac{A}{T\omega^2} \left[ e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left( e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right) \right] + \pi A \delta(\omega) \\
&= -2j \frac{A}{T\omega^2} e^{-j\omega \frac{T}{2}} \sin \left( \omega \frac{T}{2} \right) + \pi A \delta(\omega)
\end{aligned}$$

3.12

Aunque podría intuirse que la transformada de Fourier de la integral de una función sería igual a la transformada de dicha función dividida por  $j\omega$ , esto es solo parcialmente cierto. La propiedad de integración establece que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

donde el término  $\pi X(0) \delta(\omega)$  describe en el dominio de la frecuencia al valor promedio que puede resultar de la integración en el dominio del tiempo, tal y como se observó en el ejemplo 3.12.

**Ejemplo 3.13** Determine la transformada de Fourier del escalón unitario  $x(t) = u(t)$ .

**Solución:** Puesto que el escalón se puede definir como la integral del impulso, y se sabe que  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  entonces, aplicando la propiedad de integración se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u(t)\} &= U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} 1 + \pi\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\end{aligned}$$

También se puede corroborar con la propiedad de derivación que

$$\frac{d}{dt}u(t) \circ \bullet j\omega \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1 + j\pi\omega\delta(\omega) = 1$$

puesto que  $\omega\delta(\omega) = 0$ .

3.13

**Ejemplo 3.14** Encuentre la transformada de Fourier de la distribución gaussiana

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

**Solución:** Anteriormente se demostró la transformada de Fourier de la distribución gaussiana utilizando la teoría de funciones del capítulo anterior. Ahora se hará uso de la propiedad de diferenciación en ambos dominios para encontrarla.

Derivando  $g(t)$  se tiene

$$\frac{d}{dt}g(t) = -\frac{t}{\sigma^2}g(t)$$

Ahora, aplicando el operador de la transformada de Fourier a ambos lados y considerando las propiedades de derivación en el tiempo y frecuencia se tiene

$$j\omega G(j\omega) = \frac{1}{j\sigma^2} \frac{d}{d\omega} G(j\omega)$$

lo que puede reescribirse como

$$\frac{\frac{d}{d\omega} G(j\omega)}{G(j\omega)} = -\omega\sigma^2$$

e integrando a ambos lados

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \frac{\frac{d}{d\omega'} G(j\omega')}{G(j\omega')} d\omega' &= -\int_0^\omega \omega' \sigma^2 d\omega' \\ \ln G(j\omega) - \ln G(0) &= -\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\end{aligned}$$

y aplicando la función exponencial a ambos lados

$$G(j\omega) = G(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

y puesto que

$$G(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} dt = 1$$

finalmente se obtiene

$$G(j\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

3.14

### Escalamiento en tiempo y frecuencia

Si el tiempo se escala por  $\alpha$ , entonces

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j\omega t} dt$$

sustituyendo  $\tau = \alpha t$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/\alpha)\tau} d\tau & \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/\alpha)\tau} d\tau & \alpha < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

La dilatación temporal de la función  $x(t)$  ( $\alpha < 1$ ) trae entonces como consecuencia una contracción de su espectro, además de un aumento en sus magnitudes. La contracción temporal de  $x(t)$ , por otro lado, expande el espectro y reduce la amplitud del espectro. Nótese la relación de este hecho con el principio de incertidumbre mencionado anteriormente.

De lo anterior se deriva directamente que si se invierte la señal  $x(t)$  en el tiempo, entonces su espectro se invierte también:

$$x(-t) \circ \bullet X(-j\omega)$$

### Dualidad

Al comparar las ecuaciones (3.48) y (3.50) que definen las transformadas de Fourier directa e inversa, se observa que estas son muy similares pero no idénticas. Esta semejanza conduce a la denominada propiedad de *dualidad*. Para observar la relación con más detalle, se parte de la transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

sustituyendo  $\omega$  por  $\zeta$

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta) e^{j\zeta t} d\zeta$$



y reemplazando  $t$  por  $-\omega$

$$\begin{aligned} 2\pi x(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta) e^{-j\zeta\omega} d\zeta \\ 2\pi x(-\omega) &= \mathcal{F}\{X(j\zeta)\} \end{aligned}$$

es decir, si se toma la transformada de Fourier  $X(j\omega)$  de una función  $x(t)$  y se utiliza como función en el tiempo  $X(jt)$ , entonces su transformada de Fourier será igual a la función original evaluada en la frecuencia reflejada, y multiplicada por el factor  $2\pi$ , es decir:

$$\mathcal{F}\{X(jt)\} = 2\pi x(-\omega)$$

**Ejemplo 3.15** Determine la transformada de Fourier de la señal

$$g(t) = \text{sa}(\alpha t)$$

**Solución:** Se demostró anteriormente que la transformada del impulso rectangular en la figura (3.21) está dada por (3.53)

$$r(t) = \frac{1}{\tau} [u(t - t_0) - u(t - t_0 - \tau)] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad R(j\omega) = e^{-j\omega(t_0 + \frac{\tau}{2})} \text{sa}(\omega\tau/2)$$

y con  $t_0 = -\tau/2$ , y  $\tau = 2\alpha$

$$r(t) = \frac{1}{2\alpha} [u(t + \alpha) - u(t - \alpha)] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad R(j\omega) = \text{sa}(\alpha\omega)$$

donde, empleando la propiedad de dualidad se cumple

$$\begin{aligned} R(jt) &= \text{sa}(\alpha t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 2\pi r(-\omega) = \frac{\pi}{\alpha} [u(-\omega + \alpha) - u(-\omega - \alpha)] \\ &= \frac{\pi}{\alpha} [u(\omega + \alpha) - u(\omega - \alpha)] \end{aligned}$$

La función  $\text{sa}(\alpha t)$  tiene entonces un espectro rectangular real con componentes espectrales iguales para el intervalo entre  $\omega \in [-\alpha, \alpha]$ . 3.15

La propiedad de dualidad permite entonces aplicar las relaciones encontradas en las secciones anteriores en ambas direcciones: del dominio del tiempo a la frecuencia, y viceversa.

### Relación de Parseval

Interesa ahora observar la relación entre la energía de una señal en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Partiendo de la definición de energía en el dominio del tiempo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \end{aligned}$$

e invirtiendo el orden de integración

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

Esta llamada relación de Parseval establece que la energía total se puede calcular tanto a través de la energía por unidad de tiempo  $|x(t)|^2$  como a través de la llamada densidad de energía  $|X(j\omega)|^2/2\pi$ . Nótese que mientras la relación de Parseval para señales periódicas establece los vínculos entre la potencia promedio, para señales no periódicas establece la relación de la energía en ambos dominios. Esto se debe a que señales periódicas tienen una energía infinita, por lo que debe usarse la potencia. Señales con energía finita reciben el nombre de *señales de energía*, señales con potencia promedio finita reciben el nombre de *señales de potencia*. Puede demostrarse que la potencia promedio de una señal de energía es cero.

## Multiplicación y Convolución

La propiedad de convolución es fundamental para el análisis de sistemas lineales, y se tratará con detalle en la siguiente sección. Aquí se introducirá la propiedad desde un punto de vista más matemático. Utilizando el mismo procedimiento que para las series de Fourier, si se define la transformada de Fourier  $X(j\omega)$  de la función  $x(t)$  como el producto de las transformadas  $X_1(j\omega)$  y  $X_2(j\omega)$  de dos funciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  entonces

$$\begin{aligned}X(j\omega) &= X_1(j\omega) X_2(j\omega) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt \right)\end{aligned}$$

cambiando la variable de integración en el segundo factor de  $t$  a  $\xi$  y utilizando (3.45), donde se considera a las integrales como sumas, se obtiene

$$\begin{aligned}&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi) e^{-j\omega \xi} d\xi \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\xi) e^{-j\omega(t+\xi)} d\xi dt\end{aligned}$$

y con  $\tau = t + \xi$  entonces

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) e^{-j\omega \tau} d\tau dt$$

e intercambiando el orden de integración

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt \right)}_{x_1(t) * x_2(t)} e^{-j\omega \tau} d\tau = \mathcal{F} \{x_1(t) * x_2(t)\}$$

En otras palabras, la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones  $x_1(t) * x_2(t)$  es igual al producto de las transformadas de Fourier de cada función.

De forma equivalente se obtiene que el producto de dos funciones  $x_1(t)x_2(t)$  tendrá como espectro

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

**Tabla 3.3:** Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(j\omega)$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$-2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$ $X(j\omega) \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
Dualidad	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j\omega - j\omega_0)$
Modulación	$\cos(\omega_0 t)x(t)$	$\frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$

La tabla 3.1 resume las propiedades de la transformada de Fourier anteriormente tratadas. A continuación se brinda un ejemplo en el que se usan varias de ellas para encontrar una transformación que no se puede obtener fácilmente de forma directa.

**Ejemplo 3.16** Demuestre la propiedad de integración a través de las propiedades de convolución y de la transformada de Fourier del escalón unitario.

**Solución:** La convolución de una función  $x(t)$  con el escalón unitario es

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t - \tau) d\tau$$

lo que, considerando que  $u(t - \tau)$  es cero para todo  $\tau > t$  y uno para todo  $\tau \leq t$ , puede expresarse como:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Puesto que

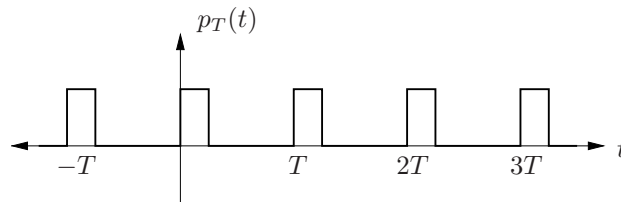
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * u(t)\} &= X(j\omega)U(j\omega) \\ &= X(j\omega) \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \\ &= \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)X(j\omega) \end{aligned}$$

y considerando que  $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)X(0)$$

3.16

**Ejemplo 3.17** La función puente  $p_T(t)$  mostrada en la figura 3.30 se utiliza para tomar muestras cada  $T$  segundos de alguna señal  $x(t)$  definida en el tiempo. La señal muestreada

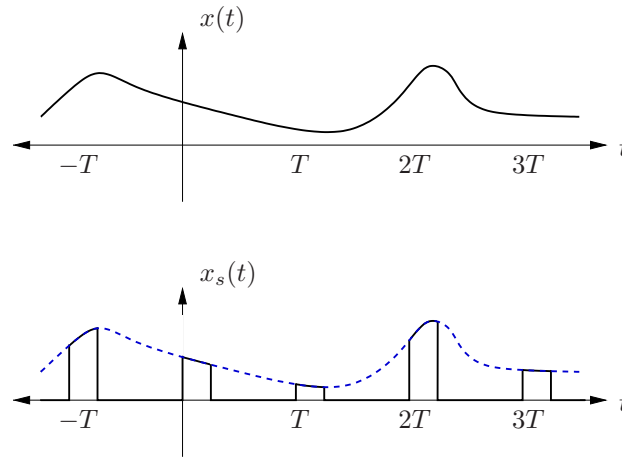


**Figura 3.30:** Función puente utilizada para tomar muestras periódicas en el tiempo de señales.

$x_s(t)$  se obtiene entonces a través del producto de la señal  $x(t)$  y  $p_T(t)$  (figura 3.31):

$$x_s(t) = x(t)p_T(t)$$

Al periodo  $T$  se le conoce como *periodo de muestreo*, y a su inverso  $f_s = 1/T$  se le denomina *frecuencia de muestreo*. Se desea ahora encontrar el espectro de la señal muestreada  $X_s(j\omega)$  en términos del espectro de la señal sin muestrear  $X(j\omega)$  [23].



**Figura 3.31:** Muestreo de señal utilizando la función puente.

**Solución:** Puesto que la función puente  $p_T(t)$  es periódica, se puede expresar por medio de una serie de Fourier con coeficientes  $P_n$ :

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

de modo que se cumple

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}$$

Transformando a ambos lados de la ecuación y utilizando la propiedad de linealidad se obtiene

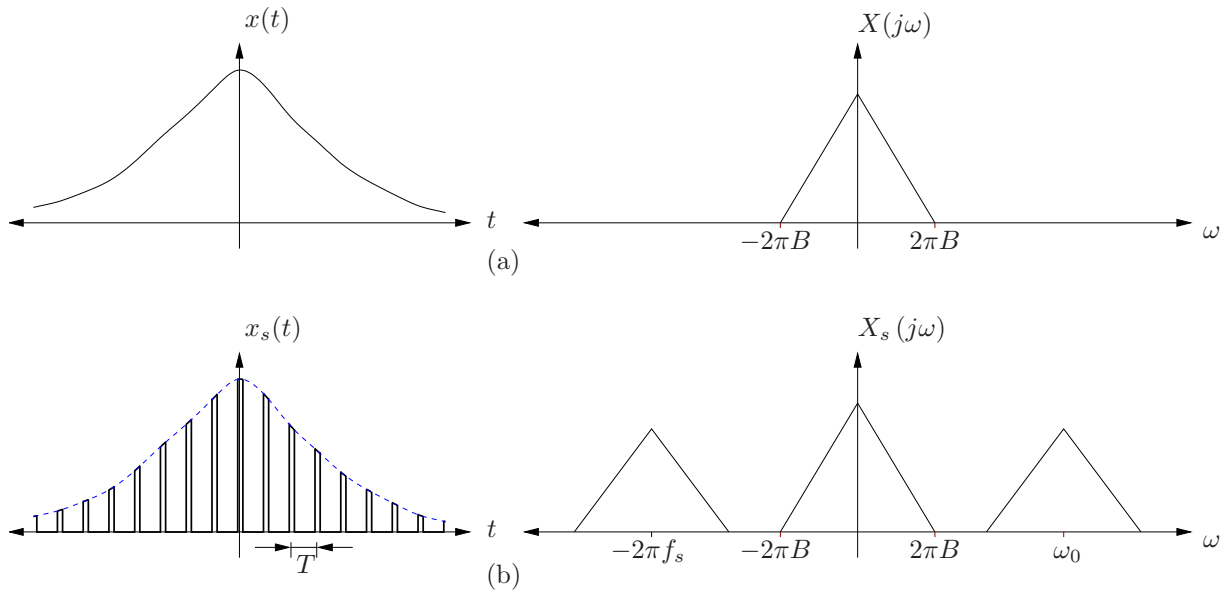
$$X_s(j\omega) = \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \mathcal{F}\{x(t)e^{jn\omega_0 t}\}$$

y considerando la propiedad de desplazamiento en frecuencia, lo anterior equivale a

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X(j\omega - jn\omega_0) \\ &= P_0 X(j\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} P_n X(j\omega - jn\omega_0) \end{aligned}$$

de donde se deduce que con el muestreo se producen réplicas del espectro original de la señal  $X(j\omega)$ , separadas en el dominio de la frecuencia por  $\omega_0 = 2\pi/T$  y ponderadas por los coeficientes de la representación de la función puente como serie de Fourier (figura 3.32).

Si el espectro original  $X(j\omega)$  es de banda limitada, es decir, si a partir de cierta frecuencia  $2\pi B$  (donde  $B$  es el llamado *ancho de banda*) se cumple  $X(j\omega) = 0$ , entonces eligiendo el periodo de muestreo suficientemente alto es posible evitar que las réplicas se traslapen con el espectro original. Si  $x(t)$  es real, entonces la magnitud de su espectro es par, y por tanto para evitar el traslape la siguiente réplica se deberá posicionar al menos en  $\omega_0 > 4\pi B$  lo



**Figura 3.32:** Replicación del espectro por medio del muestreo.

que es equivalente a afirmar que la frecuencia de muestreo  $f_s$  debe ser al menos el doble del ancho de banda  $B$  del espectro  $X(j\omega)$  para evitar que las replicas se traslapen.

Se puede demostrar que si no hay traslape entonces es posible rescatar a partir de la señal muestreada  $x_s(t)$  la señal original  $x(t)$  utilizando un filtro paso-bajos que permita pasar únicamente el rango de frecuencias angulares desde  $-2\pi B$  hasta  $2\pi B$ .

Estos principios se resumen en el llamado *teorema del muestreo* que puede resumirse de la siguiente manera: para muestrear una señal analógica sin pérdidas de información se requiere una tasa de muestreo de al menos el doble del ancho de banda del espectro de la señal.

3.17

## 3.4 Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo y la Convolución

En las secciones anteriores se introdujo la propiedad de linealidad en operadores como la transformada de Fourier, o los coeficientes de la serie de Fourier. Esta propiedad de linealidad, junto con la invarianza en el tiempo representan la base para el entendimiento de los llamados sistemas lineales, dentro de los cuales se encuentran por ejemplo todos los circuitos RLC, junto con amplificadores operacionales.

### 3.4.1 Linealidad e invarianza en el tiempo

#### Sistema Lineal

Un sistema, se discutió ya en el primer capítulo, transforma una señal de entrada en una señal de salida (figura 1.1, página 4). Así, si la salida del sistema es  $y(t)$  y su entrada  $x(t)$ , entonces la relación entre ambas puede expresarse como

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

donde el operador  $\mathcal{T}[\cdot]$  denota la transformación hecha a la señal por el sistema. Así, para dos señales de entrada  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , el sistema producirá dos señales de salida:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{T}[x_1(t)] \\ y_2(t) &= \mathcal{T}[x_2(t)] \end{aligned}$$

El sistema se denomina lineal, si para dos valores escalares  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  cualesquiera se cumple además que

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \mathcal{T}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]$$

Esta propiedad de linealidad puede expresarse de forma más general como

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(t) = \mathcal{T}\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)\right]$$

para  $n$  entradas diferentes con  $y_i = \mathcal{T}[x_i(t)]$ .

**Ejemplo 3.18** Determine si los sistemas  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  son lineales.

1.  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
2.  $y(t) = x(-t)$
3.  $y(t) = x(t) + 1$

**Solución:** Para comprobar la linealidad se calcula por un lado la combinación lineal de las respuestas a diferentes entradas por separado, y luego se verifica que dicha combinación equivale a la respuesta del sistema a la combinación lineal de las entradas.

1. Si  $y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$  y  $y_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$  entonces

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 \frac{d}{dt}x_1(t) + \alpha_2 \frac{d}{dt}x_2(t)$$

Por otro lado, si  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  y se calcula  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  entonces

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 \frac{d}{dt}x_1(t) + \alpha_2 \frac{d}{dt}x_2(t)$$

por lo que el sistema es lineal.

2. Si  $y_1(t) = x_1(-t)$  y  $y_2(t) = x_2(-t)$  entonces

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(-t) + \alpha_2 x_2(-t)$$

Por otro lado, si  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  y se calcula  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  entonces

$$y(t) = x(-t) = \alpha_1 x_1(-t) + \alpha_2 x_2(-t)$$

lo que indica que el sistema es lineal.

3. Si  $y_1(t) = x_1(t) + 1$  y  $y_2(t) = x_2(t) + 1$  entonces

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_1 + \alpha_2$$

Por otro lado, si  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  y se calcula  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  entonces

$$y(t) = x(t) + 1 = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + 1$$

lo que indica que el sistema no es lineal.

3.18

### Sistema Invariante en el Tiempo

Un sistema se denomina invariante en el tiempo si la salida es siempre la misma ante una misma entrada, sin importar el instante de tiempo en el que se aplica dicha entrada. En otras palabras, un sistema se denomina invariante en el tiempo si

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \Rightarrow y(t - t_0) = \mathcal{T}[x(t - t_0)]$$

**Ejemplo 3.19** Determine si los sistemas  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  son invariantes en el tiempo.

1.  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
2.  $y(t) = x(-t)$
3.  $y(t) = x(t) + 1$

**Solución:** Para corroborar la invarianza en el tiempo se calcula primero la respuesta del sistema a la señal desplazada en el tiempo, y luego se compara esto con la respuesta a la entrada sin desplazar, desplazada en el tiempo.

1. Si  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  entonces la respuesta a  $x(t - t_0)$  es  $\frac{d}{dt}x(t - t_0)$ . La salida  $y(t)$  desplazada en el tiempo es también  $\frac{d}{dt}x(t - t_0)$  por lo que el sistema es invariante en el tiempo.
2. Si  $y(t) = x(-t)$  entonces la respuesta a la señal  $x(t)$  desplazada en el tiempo es  $x(-(t - t_0)) = x(-t + t_0)$ . Por otro lado, si se desplaza la salida correspondiente a  $x(t)$  entonces  $y(t - t_0) = x(-t - t_0)$ . Esto implica que el sistema es variante en el tiempo.



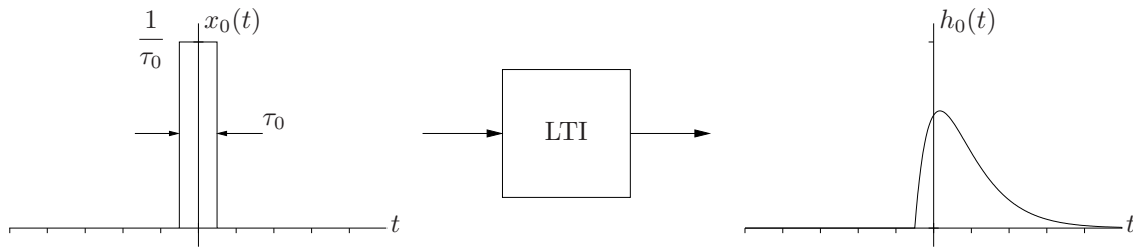
3. Si  $y(t) = x(t) + 1$  la respuesta a la entrada desplazada es  $x(t - t_0) + 1$ , y la respuesta desplazada correspondiente a  $x(t)$  también es  $y(t - t_0) = x(t - t_0) + 1$  por lo que el sistema es invariante en el tiempo.

3.19

## Sistema LTI

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (o sistemas LTI por sus siglas en inglés *Linear and Time Invariant*) corresponden a una importante clase de sistemas en el análisis de fenómenos reales, al permitir modelar comportamientos complejos con herramientas matemáticas tan poderosas como las transformadas de Fourier y Laplace.

Para comprender mejor los conceptos detrás de los sistemas LTI, considérese un impulso rectangular  $x_0(t)$  de duración  $\tau_0$  y amplitud  $1/\tau_0$  como entrada a un sistema LTI, que responde a él con la salida  $h_0(t)$  tal y como lo muestra la figura 3.33. Puesto que el sistema es lineal



**Figura 3.33:** Respuesta a impulso rectangular de un sistema LTI.

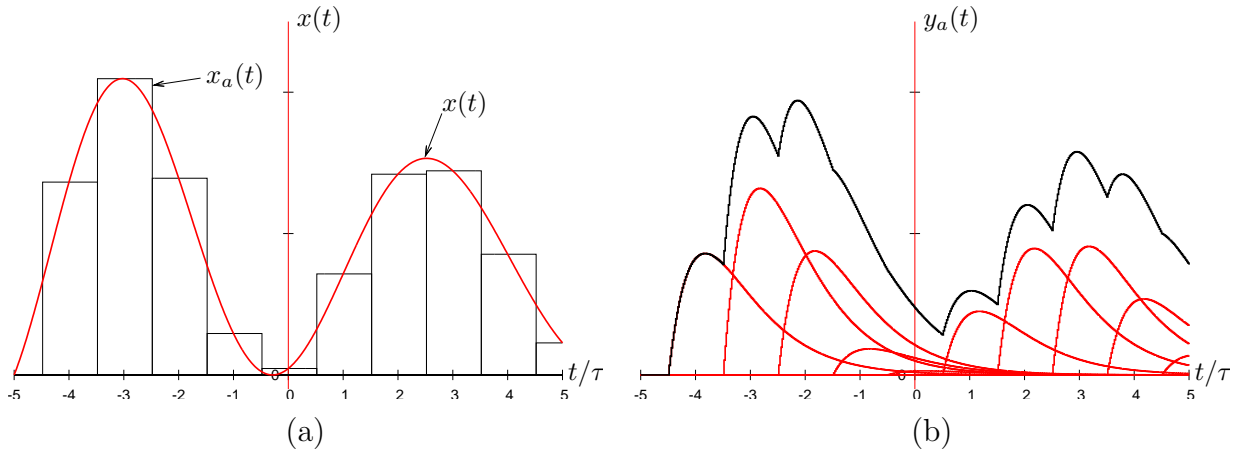
e invariante en el tiempo, una secuencia de impulsos ponderados a la entrada tendrá como salida una ponderación equivalente de la salida  $h_0(t)$ . La figura 3.34a muestra por ejemplo la aproximación de una señal  $x(t)$  por una señal  $x_a(t)$  compuesta de impulsos rectangulares de duración  $\tau_0$ , tal que se tiene:

$$x(t) \approx x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau_0)x_0(t - n\tau_0)\tau_0$$

y puesto que cada impulso rectangular  $x(n\tau_0)x_0(t - n\tau_0)\tau_0$  tiene como respuesta  $x(n\tau_0)h_0(t - n\tau_0)\tau_0$ , se obtiene entonces la respuesta mostrada en la figura 3.34b, que se puede expresar como

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau_0)h_0(t - n\tau_0)\tau_0$$

Es claro que la función  $x_a(t)$  aproximará de mejor manera a la función  $x(t)$  si  $\tau_0$  se hace cada vez más pequeño. De esta forma, si  $\tau_0$  se hace tender a cero, puede sustituirse por un diferencial  $d\tau$ , el término  $n\tau_0$  convergerá a una variable continua  $\tau$  y la función  $x_0(t)$ , que conserva su área igual a uno sin importar la elección de  $\tau_0$ , convergerá al impulso  $\delta(t)$ . Por



**Figura 3.34:** Entrada compuesta por impulsos rectangulares y respectiva salida del sistema LTI en la figura 3.33

lo tanto, las dos ecuaciones anteriores se convierten en:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

donde la función  $h(t)$  es la *respuesta al impulso* del sistema, obtenida como la respuesta al impulso rectangular cuando su duración  $\tau_0$  tiende a cero. Nóte que estas son integrales de convolución, donde se demuestra que una función convolucionada con el impulso resulta en la misma función (o en otros términos, la función impulso Dirac es el elemento neutro del operador convolución). Por otro lado la respuesta de un sistema LTI a una entrada  $x(t)$  está dada por la convolución de dicha entrada con la respuesta al impulso  $h(t)$  del sistema LTI.

Considerando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier, si se cumple  $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$ ,  $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega)$  y  $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega)$ , entonces

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t) * \delta(t)\} = X(j\omega)1 = X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(j\omega)H(j\omega)$$

que implica que, conociendo la respuesta al impulso del sistema  $h(t)$  y su equivalente *respuesta en frecuencia*  $H(j\omega)$ , en el dominio de la frecuencia la respuesta a cualquier entrada con transformada  $X(j\omega)$  se calcula simplemente multiplicando  $X(j\omega)H(j\omega)$ . Esta simplificación del cálculo de la convolución hace de la transformada de Fourier una herramienta muy poderosa en el análisis de sistemas LTI. Por lo general es más simple transformar una señal de entrada y la respuesta al impulso al dominio de la frecuencia, realizar allí el producto, y luego transformar el resultado al dominio del tiempo para observar el comportamiento de la salida del sistema LTI. Nótese que si se conoce que un sistema es LTI, entonces, obteniendo su salida  $Y(j\omega)$  para una entrada  $X(j\omega)$  en el dominio de la frecuencia, la respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  del sistema se puede calcular como

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Existen sin embargo propiedades de los sistemas que pueden comprenderse mejor en el dominio temporal, y para ello es necesario analizar con más detalle el operador de convolución.

### 3.4.2 Convolución

Los párrafos anteriores demostraron que la *convolución* es un operador que puede utilizarse para encontrar la salida correspondiente a una entrada, si se conoce la respuesta al impulso  $h(t)$  de un sistema LTI. Así, la convolución de  $x(t)$  y  $h(t)$  se expresa como

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.59)$$

Haciendo un cambio de variable  $\xi = t - \tau$  entonces  $d\xi = -d\tau$  y

$$x(t) * h(t) = - \int_{t+\infty}^{t-\infty} x(t - \xi) h(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) x(t - \xi) d\xi = h(t) * x(t)$$

es decir, la convolución es un operador conmutativo.

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que además es un operador asociativo y distributivo:

$$\begin{aligned} x(t) * g(t) * h(t) &= [x(t) * g(t)] * h(t) = x(t) * [g(t) * h(t)] \\ x(t) * [g(t) + h(t)] &= [x(t) * g(t)] + [x(t) * h(t)] \end{aligned}$$

En la aplicación de la convolución (3.59) es posible identificar varios pasos. Primero nótese que la variable de integración  $\tau$  está negada en la función  $h(t - \tau)$ . Esto implica que al realizar la convolución debe primero invertirse la función  $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$ . Segundo, sumar  $t$  a la variable  $-\tau$  equivale a trasladar el origen de la función  $h(-\tau)$  al punto  $t$ . Luego se realiza la multiplicación punto a punto entre esta función invertida y trasladada  $h(t - \tau)$  por la segunda función inalterada  $x(\tau)$ . El área bajo la curva de dicho producto es el valor que se asigna a la señal de salida en el instante  $t$ . Este principio se ilustra de manera gráfica en la figura 3.35.

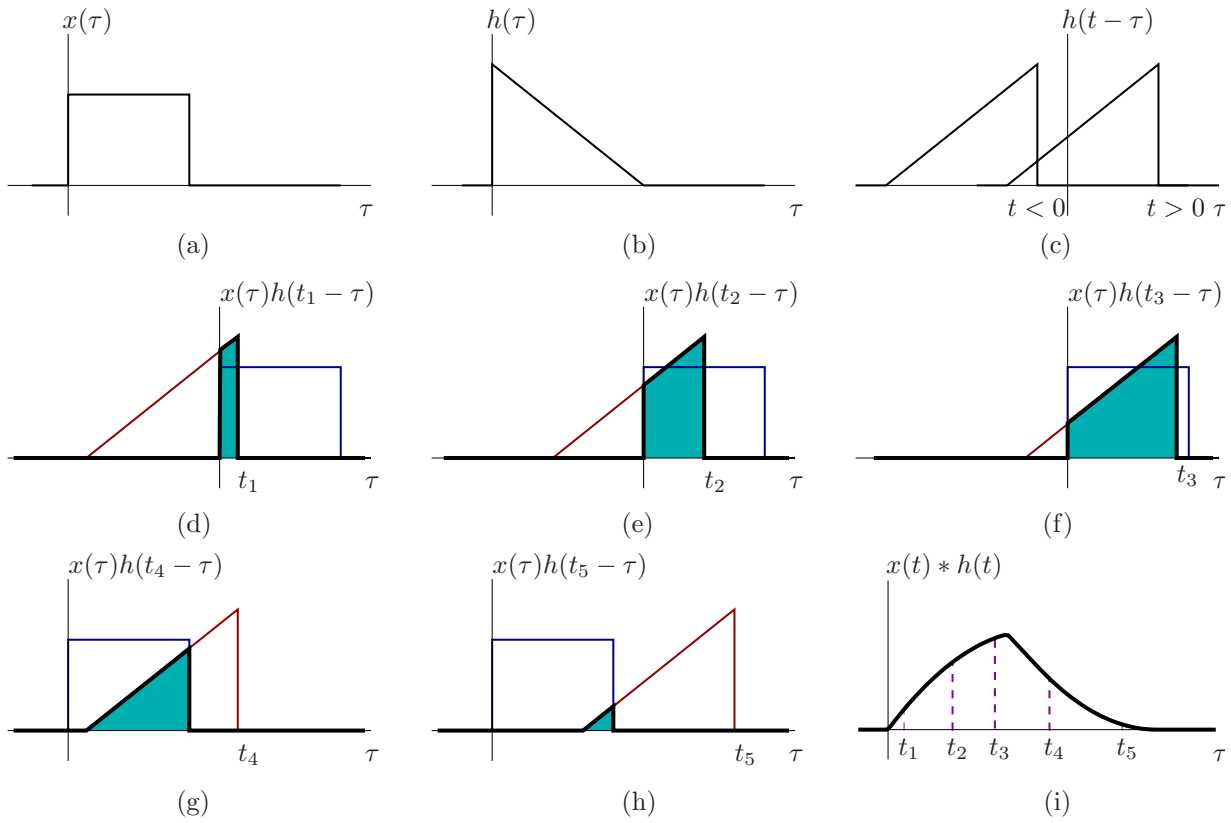
### 3.4.3 Funciones propias

Un caso particularmente interesante en sistemas LTI son las funciones exponenciales complejas. Un sistema LTI con respuesta al impulso  $h(t)$  tendrá como respuesta a una entrada  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  una salida  $y(t)$  que se calcula de la siguiente manera:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = h(t) * x(t) = h(t) * e^{j\omega_0 t}$$

En el dominio de la frecuencia y considerando la respuesta en frecuencia  $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(t)\} &= Y(j\omega) = H(j\omega) \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} \\ &= H(j\omega) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ &= H(j\omega_0) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$



**Figura 3.35:** Ejemplo de la convolución entre dos funciones. (a) y (b) señales de entrada, (c) segunda señal reflejada y trasladada a  $t$ , (d)-(h) diferentes valores de  $t > 0$  y las áreas bajo el producto. (i) convolución.

y la transformada inversa de esto es

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(j\omega_0)2\pi\delta(\omega - \omega_0)\} = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

que es una función exponencial compleja de la misma frecuencia  $\omega_0$  que tiene la señal de entrada, pero con amplitud y fase alteradas por el valor de la respuesta  $H(j\omega)$  evaluado en la frecuencia  $\omega = \omega_0$ . Puesto que la forma de la entrada se mantiene, excepto por una constante compleja, a estas funciones exponenciales complejas se les denomina *funciones propias* de los sistemas LTI.

Esto permite observar además el comportamiento de señales de entrada senoidales y cosenoidales en sistemas LTI. Si se asume que la respuesta al impulso  $h(t)$  es una función real, entonces  $H(-j\omega_0) = H^*(j\omega_0)$ . Puesto que

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

entonces por linealidad, y asumiendo que  $H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)|e^{j\phi_0}$  la salida será

$$y(t) = \frac{|H(j\omega_0)|}{2} [e^{j\omega_0 t + \phi_0} + e^{-j\omega_0 t - \phi_0}] = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

es decir, un sistema LTI responde a una señal cosenoidal, con otra señal cosenoidal de la misma frecuencia, pero con fase y amplitudes alteradas por  $H(j\omega)$ . Por lo tanto, un sistema

LTI no puede bajo ninguna circunstancia alterar las frecuencias presentes en la señal de entrada. Esto solo ocurrirá en sistemas no lineales o variantes en el tiempo.

### 3.4.4 Causalidad y estabilidad

#### Sistemas causales y no causales

En cuanto a la reacción temporal de un sistema se pueden identificar los sistemas *causales* y los sistemas *no causales*. En los primeros, el sistema tendrá una salida diferente de cero solo durante o después de que ocurra algún evento diferente de cero a su entrada. Un sistema no causal puede tener una respuesta a una entrada *antes* de que la entrada misma ocurra. Sistemas reales, en donde la variable independiente de la señal de entrada es el tiempo, podrán tener una respuesta únicamente después de que se presente dicha entrada, siendo por lo tanto causales. Sin embargo, no necesariamente es el tiempo la única posibilidad de variable independiente de una señal. En imágenes, por ejemplo, las variables independientes son posición dentro de la imagen, y aquí la no-causalidad es un hecho normal.

La causalidad de un sistema real LTI se puede observar directamente en su respuesta al impulso  $h(t)$ . Puesto que el impulso “ocurre” en  $t = 0$ , el sistema es causal si y solo si  $h(t) = 0$  para todo  $t < 0$ , lo cual puede expresarse también como

$$h(t) = h(t)u(t) \quad .$$

En analogía a este hecho se dice que cualquier señal  $x(t)$ , con  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ , es causal.

La causalidad tiene implicaciones en la naturaleza de la respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  del sistema causal: las componentes par e impar de  $h(t)$  son ambas diferentes de cero, por lo que  $H(j\omega)$  no puede ser ni puramente real ni puramente imaginaria. En otras palabras, si  $h(t)$  es real entonces  $H(j\omega)$  tiene magnitud par y fase impar, pero el hecho de que el sistema sea causal implica que la fase de  $H(j\omega)$  no puede ser cero o  $\pi/2$  en todo el rango de frecuencias.

#### Sistemas estables

Un sistema se dice que es *estable* o *estable en amplitud* si para cualquier entrada  $x(t)$  acotada en amplitud

$$|x(t)| \leq A_x, \quad A_x \in \mathbb{R}, A_x > 0$$

el sistema reacciona con una salida  $y(t)$  también acotada en amplitud

$$|y(t)| \leq A_y, \quad A_y \in \mathbb{R}, A_y > 0$$

A estos sistemas se les denomina *BIBO*, por las siglas en inglés *Bounded Input Bounded Output*.

Si el sistema es LTI, entonces se cumple

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)h(t - \tau)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} A_x |h(t - \tau)| d\tau = A_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

y por lo tanto el sistema es estable si y solo si su respuesta al impulso es absolutamente integrable, lo que a su vez garantiza la primera condición de Dirichlet para la existencia de la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un sistema estable.

Si un sistema es inestable, la transformada de Fourier es inadecuada para su análisis, por el simple hecho de que la salida no acotada puede violar las condiciones de Dirichlet y no poseer una representación válida en el dominio de la frecuencia. Esta es una de las razones principales por las cuales se extienden los conceptos aquí presentados en la llamada Transformada de Laplace, que es tema del siguiente capítulo.

## 3.5 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [8, 14], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

**Problema 3.1.** El espacio lineal  $\mathbb{V}$  se define a través de sus elementos que son tuplas con componentes tomados de un cuerpo escalar  $\mathbb{F}$ , y las operaciones suma y producto escalar.

- ¿Qué tipo de estructura algebraica es  $(\mathbb{V}, +)$ ?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica es  $(\mathbb{V}, \cdot)$ , donde  $\cdot$  representa aquí el producto escalar?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica es  $(\mathbb{V}, \{+, \cdot\})$ , donde  $\cdot$  representa de nuevo el producto escalar?

**Problema 3.2.** Demuestre que la definición de la función  $d(\cdot, \cdot)$

$$d(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|$$

cumple con todas las condiciones definidas para una función de distancia de un espacio métrico, si  $\|\cdot\|$  es una norma.

**Problema 3.3.** Demuestre utilizando los axiomas de espacios pre-Hilbert, que

$$\begin{aligned}\langle a\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle &= a^* \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ \langle \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle\end{aligned}$$

**Problema 3.4.** Encuentre tres vectores ortonormales en el espacio euclidiano tridimensional y compruebe que el producto punto entre cualquier par de vectores es cero.

**Problema 3.5.** Demuestre que para la operación entre dos funciones definida como

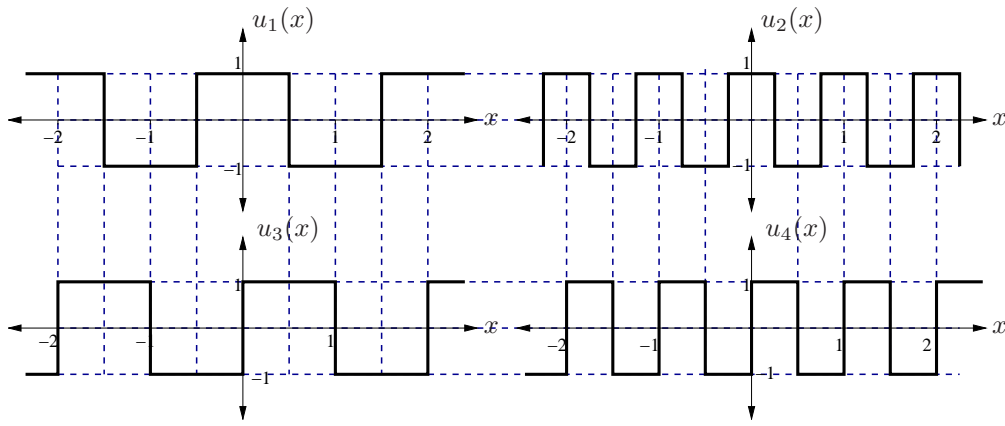
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x^*(t)y(t) dt$$

se cumplen todas las propiedades que debe satisfacer un producto interno.

**Problema 3.6.** Utilizando la ecuación (3.15) encuentre cuál es el ángulo entre las funciones  $\sin(\theta)$  y  $\sin(\theta + \alpha)$  para el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

**Problema 3.7.** Utilizando la ecuación (3.15) encuentre cuál es el ángulo entre las funciones  $\sin(\theta)$  y  $\tan(\theta)$  para el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

**Problema 3.8.** La siguiente figura muestra cuatro funciones periódicas. Seleccione de estas cuatro funciones una base ortogonal con el mayor número posible de funciones generadoras. ¿Cuáles funciones se encontrarán en su base ortogonal definida en el intervalo  $-1 < t \leq 1$ ?



Calcule la norma de las cuatro funciones en la figura anterior y de la función  $\sin(\pi t)$  en el intervalo  $t \in [0, 2]$ .

Para la base ortogonal seleccionada por usted, calcule el valor de los coeficientes que mejor aproximan la función  $x(t) = \sin(\pi t)$ .

**Problema 3.9.** Las funciones  $\psi(t)$  y  $\phi(t)$  definidas como

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{para } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

se utilizan como funciones *madre* para generar dos familias funcionales:

$$\psi_i^j(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - i)$$

$$\phi_i^j(t) = \sqrt{2^j} \phi(2^j t - i)$$

1. Grafique las funciones  $\psi_i^j(t)$  y  $\phi_i^j(t)$  si  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
2. Encuentre la norma de las funciones  $\psi_i^j(t)$  y  $\phi_i^j(t)$ .
3. Indique qué condiciones deben cumplir  $i$  y  $j$  para que las funciones anteriores sean ortogonales, tanto dentro de cada familia, como entre ambas.
4. Encuentre la mejor aproximación del primer periodo de la función  $\sin(t)$  con una base ortogonal constituida por las funciones elegidas por usted en el punto anterior.

A esta familia de funciones  $\psi_i^j(t)$  y  $\phi_i^j(t)$  se le conoce como la base de Haar, en honor al matemático húngaro Alfred Haar, quien las propuso en 1910, y son utilizadas por ejemplo en el estandar de compresión de imágenes JPEG-2000.

**Problema 3.10.** Demuestre que  $f(z) = |z|^2$  no es una función analítica.

**Problema 3.11.** Sean  $u_i(t)$  funciones de valor complejo y variable real, ortogonales en el intervalo  $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$ . Si la representación rectangular de dichas funciones se expresa como



$u_i(t) = r_i(t) + jq_i(t)$  demuestre que se cumple

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} r_i(t)r_k(t) dt &= -\int_{t_1}^{t_2} q_i(t)q_k(t) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} r_i(t)q_k(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} q_i(t)r_k(t) dt\end{aligned}$$

para todo  $i \neq k$ .

**Problema 3.12.** Utilizando la función de error (3.18):

$$E(c_0, c_1, \dots, c_n) = \|x(t) - x_n(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - x_n(t)|^2 dt$$

demuestre que para funciones y coeficientes complejos los coeficientes definidos en (3.22) minimizan la función de error. (*Sugerencia:* Expresé  $c_i$  en coordenadas rectangulares como  $c_i = a_i + jb_i$ , y utilice los resultados del problema 3.11.)

**Problema 3.13.** Sea  $f(t)$  una función compleja de variable real  $t$ . Para cualquier definición de  $f(t)$  y valores reales positivos  $\tau$  y  $\alpha$  indique qué relación tienen las funciones

- |                  |                  |                          |
|------------------|------------------|--------------------------|
| 1. $-f(t)$       | 4. $f(t - \tau)$ | 7. $f(\alpha t)$         |
| 2. $f(-t)$       | 5. $f(t) + \tau$ | 8. $f(\alpha t + \tau)$  |
| 3. $f(t + \tau)$ | 6. $\alpha f(t)$ | 9. $f(\alpha(t - \tau))$ |

para  $\alpha < 1$  y  $\alpha > 1$  con dicha función  $f(t)$ .

**Problema 3.14.** Demuestre que las funciones  $\cos(\omega_0 kt)$  y  $\sin(\omega_0 kt)$  son ortogonales en intervalo  $T_p = 2\pi/\omega_0$  es decir, que

1.  $\langle \cos(\omega_0 kt), \cos(\omega_0 lt) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T_p/2 & k = l \end{cases}$
2.  $\langle \cos(\omega_0 kt), \sin(\omega_0 lt) \rangle = 0$
3.  $\langle \sin(\omega_0 kt), \sin(\omega_0 lt) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T_p/2 & k = l \end{cases}$

para  $k, l \in \mathbb{N}$ .

**Problema 3.15.** Utilizando los resultados del ejercicio 3.14 demuestre que las funciones  $\cos(\omega_0 kt + \theta_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$  son ortogonales entre sí.

**Problema 3.16.** Determine los coeficientes las series de Fourier para la continuación periódica de las siguientes funciones, si el periodo es  $T_p$  y  $0 < \tau < T_p$ . Encuentre los coeficientes para las tres formas de series estudiadas: suma ponderada de exponenciales complejas, suma ponderada de cosenoidales desfasadas, y suma ponderada de senos y cosenos.

$$1. \ x(t) = \begin{cases} -(t - \tau/2)^2 + \tau^2/4 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } \tau < t < T_p \end{cases}$$

$$2. \ x(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t/T_p) & \text{si } 0 \leq t \leq T_p/2 \\ 0 & \text{si } T_p/2 < t < T_p \end{cases}$$

$$3. \ x(t) = |\cos(\omega_0 t)|$$

$$4. \ x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$$

$$5. \ x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$6. \ x(t) = A, \text{ con } A \text{ constante.}$$

**Problema 3.17.** Demuestre que en la serie trigonométrica de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_0 k t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen } \omega_0 k t$$

los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  pueden considerarse como el resultado de operadores lineales.

**Problema 3.18.** Demuestre que en la descomposición de una función:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + x_o(t) \\ x_e(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_o(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2} \end{aligned}$$

la componente  $x_e(t)$  es una función par y  $x_o(t)$  es una función impar.

**Problema 3.19.** Extraiga las componentes par e impar para la extensión periódica de periodo  $T_p$  de la función:

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen} \left( \frac{2\pi}{T_p} t \right) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{T_p}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{T_p}{2} < t < T_p \end{cases}$$

y calcule los desarrollos en series de Fourier para ambas componentes por separado. Compruebe que los coeficientes de la función corresponden a la suma de los coeficientes correspondientes de sus componentes par e impar.

**Problema 3.20.** Cuando se revisó la relación de Parseval (3.46) se utilizó el caso especial de la serie de Fourier, sin embargo, esta relación se aplica para cualquier función representada como serie generalizada de Fourier.

Demuestre que si se cumple para el intervalo  $t \in [t_1, t_2]$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$$

con el conjunto de funciones generadoras ortonormales  $u_k(t)$ , entonces

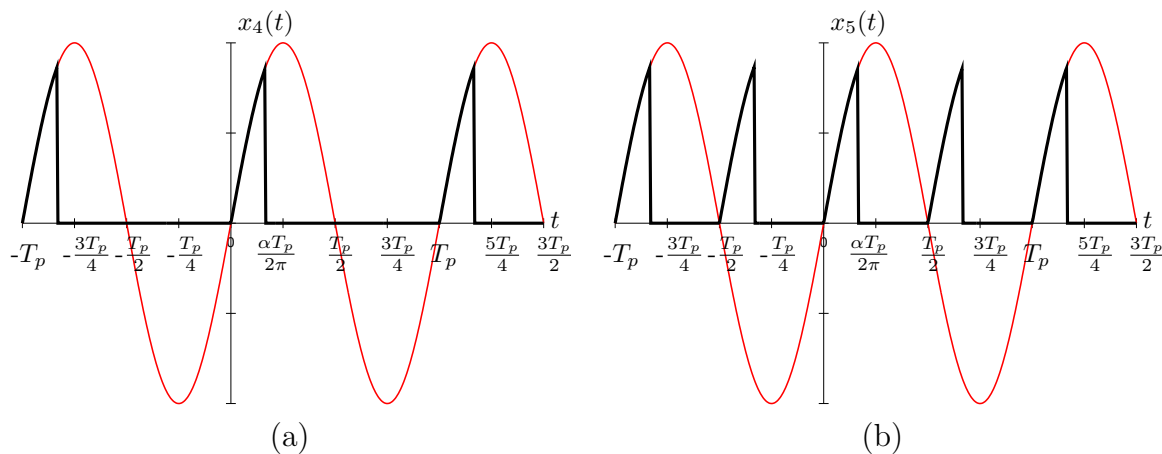
$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

**Problema 3.21.** Obtenga el desarrollo en series exponenciales complejas de Fourier para las extensiones periódicas de periodo  $T_p$  de las funciones

1.  $x(t) = \frac{t}{T_p}$  para  $0 \leq t < T_p$
2.  $x(t) = \frac{T_p - t}{T_p}$  para  $0 \leq t < T_p$
3.  $x(t) = \frac{2|t|}{T_p}$  para  $-\frac{T_p}{2} \leq t < \frac{T_p}{2}$

**Problema 3.22.** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para una función  $x_3(t) = |x_c(t)|$  donde  $x_c(t)$  está definida como en el ejemplo 3.9.

**Problema 3.23.** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para las siguientes funciones, utilizando tan solo los resultados del ejemplo 3.6, los coeficientes de la función seno y las propiedades de las series de Fourier.



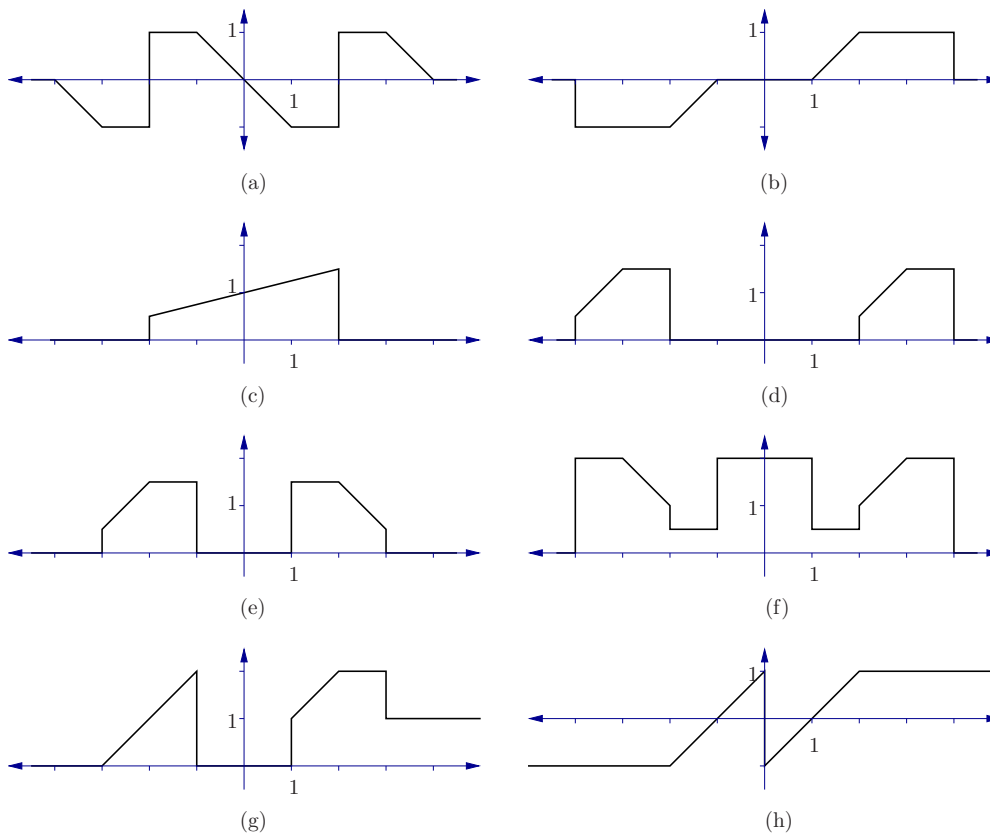
**Problema 3.24.** Calcule el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) \delta(a\tau) d\tau$$

si  $a \in \mathbb{R}$  y  $a > 0$ .

**Problema 3.25.** Calcule la Transformada de Fourier en el ejemplo 3.12, pero utilizando otras agrupaciones de los delta de Dirac, como se esboza en la solución de dicho ejemplo.

**Problema 3.26.** Encuentre las transformadas de Fourier de las funciones mostradas en la siguiente figura, utilizando la linealidad y la propiedad de derivación. Exprese, en los casos donde es posible, las expresiones en términos puramente reales o en términos puramente imaginarios.



**Problema 3.27.** Sea  $X(j\omega)$  la transformada de Fourier de una función  $x(t)$ . Encuentre la transformada de Fourier inversa de la  $n$ -ésima derivada de  $X(j\omega)$  en términos de  $x(t)$ .

**Problema 3.28.** Demuestre utilizando la propiedad de derivación de la transformada de Fourier que la impedancia de una bobina  $L$  y un condensador  $C$  están dadas respectivamente por:

$$Z_L(j\omega) = j\omega L \quad Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$

**Problema 3.29.** Calcule la transformada de Fourier de la función  $x(t) = e^{-a|t|}$ .

**Problema 3.30.** Determine la transformada de Fourier de la función

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a}{\tau}t + a & (-\tau \leq t \leq 0) \\ -\frac{a}{\tau}t + a & (0 < t \leq \tau) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y su derivada. Grafique ambas funciones y sus respectivos espectros.

**Problema 3.31.** Si la transformada de Fourier de  $x(t)$  es  $X(j\omega)$ , encuentre la transformada de

$$af\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

**Problema 3.32.** Si la transformada de Fourier de  $x(t)$  es  $X(j\omega)$ , encuentre el espectro de

$$x_D(t) = x(t+t_0) \pm x(t-t_0)$$

Esboce el espectro para el caso especial  $x(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$  y  $t_0 = 1/2$ .

**Problema 3.33.** Encuentre la componente impar  $x_o(t)$  de la función  $x(t) = e^{-t/\tau}u(t)$ . Grafique  $x_o(t)$  y encuentre su transformada de Fourier.

**Problema 3.34.** Encuentre el resultado de aplicar  $n$  veces la convolución de un impulso gaussiano

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

con signo mismo.

**Problema 3.35.** Una función escalón unitario real se puede modelar con  $u(t) * r(t/T)$  con

$$r(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$$

Grafique esta función y encuentre su transformada de Fourier. ¿En qué afecta el término  $T$  a esta función y su espectro?

**Problema 3.36.** Encuentre la transformada de Fourier de  $x(t) = u(t)e^{-t/T} \cos \omega_0 t$ .

**Problema 3.37.** ¿A qué es igual el resultado de  $x(t) * \delta(t-t_0)$ ?

**Problema 3.38.** Encuentre el resultado de la convolución  $\text{sa}(\pi t/T) * \text{sa}(\pi t/T)$

**Problema 3.39.** Encuentre la transformada de Fourier de

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

**Problema 3.40.** Encuentre la transformada de Fourier de

$$x(t) = \sum_{n=-K}^K \delta(t - nT)$$

**Problema 3.41.** Demuestre que entre las componentes par e impar ( $x_e(t)$  y  $x_o(t)$  respectivamente) de una función  $x(t)$  real y causal se cumple

$$x_e(t) = x_o(t)[2u(t) - 1]$$

Utilice este resultado para encontrar la dependencia entre  $\text{Re}\{X(j\omega)\}$  y  $\text{Im}\{X(j\omega)\}$ , con  $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  (Esta relación es conocida como la transformada de Hilbert)

**Problema 3.42.** Demuestre que para las áreas bajo la curva de una función y de su espectro se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0)$$

**Problema 3.43.** Determine la transformada de Fourier de la función:

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(at) & -\frac{\pi}{a} \leq t \leq \frac{\pi}{a} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

**Problema 3.44.** Encuentre la transformada  $\mathcal{F}\{x(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t\}$  en términos de  $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Esta se conoce como la propiedad de demodulación.

**Problema 3.45.** Una señal real analógica  $x_a(t)$  tiene un espectro limitado en banda  $X_a(j\omega)$  cuya frecuencia máxima se sabe es 10 kHz. ¿Cuál es la frecuencia mínima  $f_{smin}$  a la cual se debe muestrear  $x_a(t)$  tal que las muestras  $x(n) = x_a(n/f_s)$  representan sin pérdida de información a  $x_a(t)$ ?

**Problema 3.46.** Compruebe si los siguientes sistemas  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$  son lineales y/o invariantes en el tiempo.

1.  $y(t) = x^2(t)$
2.  $y(t) = x(t)m(t)$ , con  $m(t)$  una función arbitraria independiente de  $x(t)$ .
3.  $y(t) = 1/x(t)$

**Problema 3.47.** Dado el sistema integrador  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

1. Evalúe la linealidad e invarianza en el tiempo de este sistema
2. ¿Cuál es la respuesta al impulso del integrador?

**Problema 3.48.** Un sistema LTI causal responde a una función  $x(t)$  con  $y(t)$ , donde estas funciones se definen como:

$$x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$y(t) = x\left(2t + \frac{1}{2}\right)(2t + 1) + x\left(2t - \frac{1}{2}\right)(1 - 2t)$$

1. Grafique las funciones  $x(t)$  y  $y(t)$
2. ¿Cuál es la respuesta a  $x_2(t) = x\left(\frac{t-1}{2}\right)$ ?
3. ¿Cuál es la respuesta  $y_3(t)$  al escalón unitario?
4. ¿Cuál es la respuesta al impulso?

**Problema 3.49.** Sea la función  $r(t) = u\left(\frac{1}{2} - t\right)u\left(t + \frac{1}{2}\right)$ , donde  $u(t)$  es el escalón unitario. Grafique las siguientes funciones:

- |                         |                  |   |
|-------------------------|------------------|---|
| 1. $r(t) \cos(t)$       | 5. $u(t) * r(t)$ | 9. $tu(t)u(1-t)$                            |
| 2. $r(t) \cos(\pi t)$   | 6. $r(t) * r(t)$ | 10. $(1-t)u(t)u(1-t)$                       |
| 3. $r(t) \sin(10\pi t)$ | 7. $u(t) * u(t)$ | 11. $(1-t)u(t)u(-1-t)$                      |
| 4. $r(t/T) \sin(t)$     | 8. $u(1-t^2)$    | 12. $tu(t) - 2(2-t)u(t-1) + (t-2) * u(t-2)$ |

**Problema 3.50.** Demuestre que

$$\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) * h(t) = \left(\frac{d}{dt}h(t)\right) * x(t) = \frac{d}{dt}(h(t) * x(t))$$

**Problema 3.51.** Dos señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  tienen áreas  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente. Demuestre que el área de la función  $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$  es igual a  $A_1A_2$ .

**Problema 3.52.** Demuestre que la convolución es asociativa y distributiva con respecto a la suma.

**Problema 3.53.** Sean dos funciones de longitud finita  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . La longitud de  $x_1(t)$  sea  $l_1$  y la longitud de  $x_2(t)$  sea  $l_2$ . Encuentre la longitud de la función resultante de la convolución  $x_1(t) * x_2(t)$ .



# Capítulo 4

## Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es la herramienta de preferencia en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se le atribuye a Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), a pesar de que se ha sugerido que esta transformación integral fue propuesta por Leonhard Euler (1707–1783) [24]. El uso difundido de la ahora llamada transformada de Laplace en ingeniería se debe al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850–1925) quien utilizó un método similar para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Sus desarrollos carecían de rigor matemático, por lo que no fue sino hasta que sus métodos demostraron gran utilidad práctica que los matemáticos les prestaron atención y buscaron justificación teórica, que fue encontrada en el trabajo de Laplace [8].

La transformada de Laplace puede interpretarse como una generalización de la transformada de Fourier, que permite manejar problemas no tratables con esta última. El paso clave ocurre con la observación de que muchas de las propiedades de la transformada de Fourier se conservan si en vez de utilizar una frecuencia puramente imaginaria  $j\omega$ , se utiliza una frecuencia compleja  $s = \sigma + j\omega$ , con  $\sigma = \text{Re}\{s\}$  y  $\omega = \text{Im}\{s\}$ . Así, la frecuencia pasa de ser un valor en una recta, a un valor en el plano complejo  $s$ . Puede demostrarse que las funciones exponenciales complejas  $e^{st}$  siguen siendo funciones propias de un sistema LTI, hecho en el cual se basa toda la aplicación práctica de esta transformada.

Se distinguen dos versiones de la transformada de Laplace: bilateral y unilateral. La primera está directamente relacionada con la transformada de Fourier, y la segunda es la herramienta ampliamente utilizada en ingeniería, que se deriva de la transformada bilateral para señales causales. Aquí se revisarán ambas para brindar el panorama completo. En la literatura de ingeniería, la mayoría de las veces en que se habla de “transformada de Laplace” se hace implícitamente referencia a su versión *unilateral*.

## 4.1 Transformada bilateral de Laplace

En el capítulo anterior se definió la transformada de Fourier como

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

La transformada de Laplace se obtiene ampliando la recta de frecuencias complejas  $j\omega$  al plano complejo  $s = \sigma + j\omega$ , donde  $\sigma$  es ahora un nuevo componente real de la frecuencia. Así, la transformada de Laplace se define como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (4.1)$$

De forma similar a la transformada de Fourier, se utiliza aquí la notación  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  para denotar al operador que transforma la señal en el tiempo, a su equivalente en el plano de frecuencia compleja  $s$ :

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

La relación entre el dominio temporal y de frecuencia compleja se denota como

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

o simplemente

$$x(t) \circ \bullet X(s)$$

si el contexto lo permite.

Nótese entonces que se cumple

$$\mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega} = X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

lo que quiere decir que la transformada de Laplace puede interpretarse como la transformada de Fourier de la función  $x(t)$  multiplicada por una señal exponencial real  $e^{-\sigma t}$  que será creciente o decreciente dependiendo del signo de  $\sigma$ . De hecho, este producto entre  $x(t)$  y la función “de ponderación”  $e^{-\sigma t}$  fue el punto de partida de Heaviside para su propuesta inicial: si  $x(t)$  no tiene directamente transformada de Fourier, puede conseguirse indirectamente la tenga si se multiplica por una función monótonicamente decreciente (o creciente) conocida, como  $e^{-\sigma t}$ .

**Ejemplo 4.1** Calcule la transformada de Laplace de la función  $x(t) = e^{-at}u(t)$ .

**Solución:** Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= -\left. \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1 - e^{-(a+s)\infty}}{a+s}\end{aligned}$$

Se debe evaluar la convergencia del término  $e^{-(a+s)\infty}$ . Descomponiendo el exponente en sus partes real e imaginaria y considerando  $s = \sigma + j\omega$  se tiene

$$e^{-(a+s)\infty} = e^{-(\operatorname{Re}\{a\}+\sigma)\infty} e^{-j(\operatorname{Im}\{a\}+\omega)\infty}$$

donde el segundo factor no converge; sin embargo, puesto que su magnitud es uno, la convergencia del producto depende del primer factor: si  $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0$ , esta expresión converge a cero, si  $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0$  diverge hacia infinito, y si  $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma = 0$  entonces el producto simplemente no converge.

Esto quiere decir que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{a+s}, \quad \sigma > -\operatorname{Re}\{a\}$$

4.1

Este ejemplo pone en evidencia que la transformada de Laplace involucra no solo la expresión algebraica en el dominio  $s$ , sino además la región de convergencia en dicho plano, abreviada con ROC, por sus siglas en inglés (*Region of Convergence*). Obsérvese que el caso  $\operatorname{Re}\{a\} < 0$  representa una región de convergencia que excluye al eje  $j\omega$ , y por tanto la función  $x(t)$  no tiene transformada de Fourier. Este caso correspondería en el tiempo a una exponencial monotónicamente creciente, lo que viola las condiciones de Dirichlet de integrabilidad absoluta. El próximo ejemplo pone en evidencia la importancia de la región de convergencia.

**Ejemplo 4.2** Calcule la transformada de Laplace de la función  $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ .

**Solución:** Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-at}e^{-st} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^0 -e^{-(a+s)t} dt \\
&= \left. \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \right|_{-\infty}^0 \\
&= \frac{1 - e^{(a+s)\infty}}{a+s}
\end{aligned}$$

Se debe evaluar la convergencia del término  $e^{(a+s)\infty}$ . Descomponiendo el exponente en sus partes real e imaginaria y considerando  $s = \sigma + j\omega$  se tiene

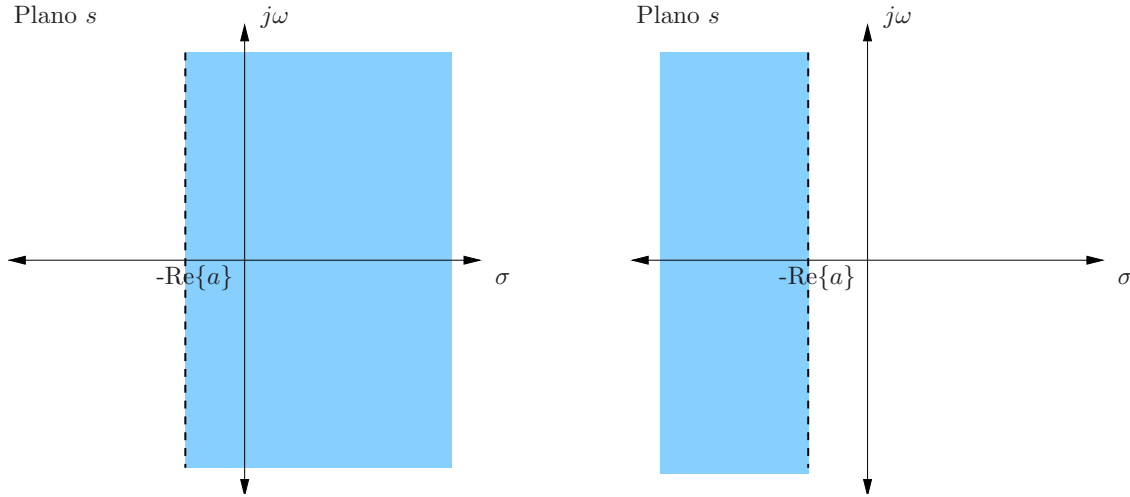
$$e^{(a+s)\infty} = e^{(\operatorname{Re}\{a\}+\sigma)\infty} e^{j(\operatorname{Im}\{a\}+\omega)\infty}$$

y a pesar de que el segundo factor no converge, puesto que su magnitud es uno, la convergencia del producto depende del primer factor: si  $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0$ , esta expresión converge a cero, si  $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0$  diverge hacia infinito, y si  $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma = 0$  entonces el producto simplemente no converge.

Esto quiere decir que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{a+s}, \quad \sigma < -\operatorname{Re}\{a\}$$

4.2



**Figura 4.1:** Regiones de convergencia para ejemplos 4.1 (izquierda) y 4.2 (derecha).

Los ejemplos anteriores muestran un hecho fundamental en el manejo de la transformada de Laplace: la misma expresión algebraica en el dominio  $s$  puede representar funciones diferentes en el dominio temporal, dependiendo de la región de convergencia utilizada. La figura 4.1 muestra las ROC de los dos ejemplos anteriores en el plano  $s$ .

Nótese que la región de convergencia puede interpretarse como el conjunto de puntos del plano  $s = \sigma + j\omega$  para los cuales la transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\sigma t}$  existe.

**Ejemplo 4.3** Encuentre la transformada de Laplace de la función

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{-t}\cos(at)u(t)$$

con  $a$  y  $b$  reales.

**Solución:** La función puede reescribirse utilizando la ecuación de Euler como

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[ e^{-bt} + e^{-t} \left( \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} \right) \right] u(t) \\ &= \left[ e^{-bt} + \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} \right] u(t) \end{aligned}$$

y calculando la transformada de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-bt} + \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} \right] u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[ e^{-bt} + \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} \right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} e^{-st} dt \end{aligned}$$

que son tres transformaciones idénticas a las del ejemplo 4.1, por lo que

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{b+s}}_{\text{ROC: } \sigma > -b} + \underbrace{\frac{1}{2(1-ja)+s}}_{\text{ROC: } \sigma > -1} + \underbrace{\frac{1}{2(1+ja)+s}}_{\text{ROC: } \sigma > -1}$$

Puesto que los tres términos deben converger, se utiliza como región de convergencia total a la intersección de las tres ROC individuales, y por tanto la ROC de  $x(t)$  es  $\sigma > \max\{-1, -b\}$ .

Finalmente

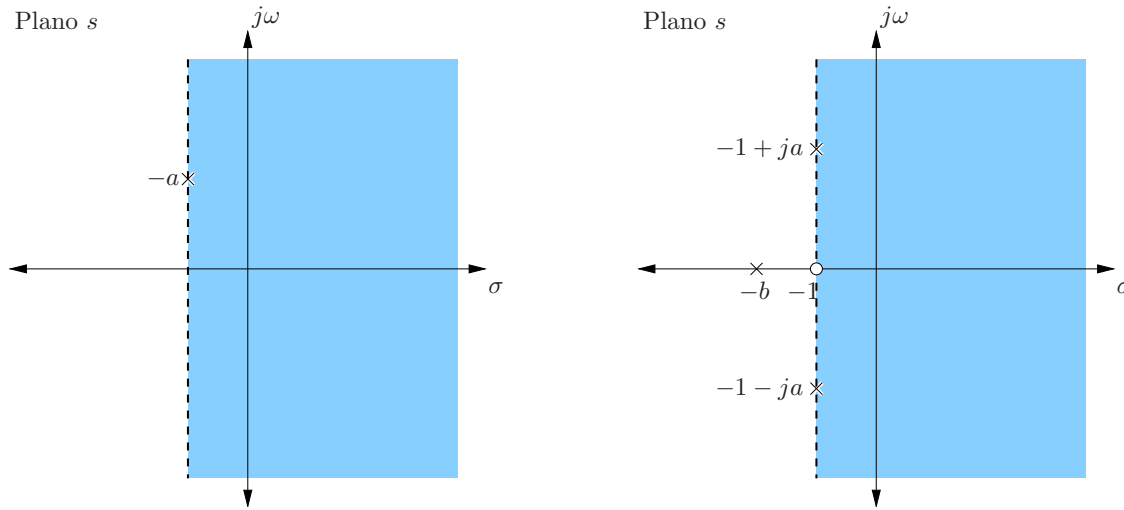
$$x(t) = e^{-bt} u(t) + e^{-t} \cos(at) u(t) \quad \circ \bullet \frac{2s^2 + (3+b)s + 1 + a^2 + b}{(b+s)(1+a^2+2s+s^2)}$$

4.3

Los ejemplos anteriores son casos particulares donde la transformada de Laplace es una función racional, es decir, un cociente de polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  de variable compleja  $s$

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

En estos casos en que  $X(s)$  es racional,  $x(t)$  es siempre una combinación lineal de exponenciales reales o complejas. Además, este tipo de funciones racionales aparecen, como se analizará posteriormente, cuando se describen sistemas especificados a través de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En las funciones racionales, los ceros corresponden a las raíces de  $N(s)$  y los polos a las raíces de  $D(s)$ . Puesto que la ubicación de estas raíces, excepto por un factor de escala, son suficientes para especificar  $X(s)$ , se acostumbra utilizar un *diagrama de polos y ceros* para indicar la transformada de Laplace, donde con “ $\times$ ” se demarcan los polos, y con “ $\circ$ ” los ceros, y se denota además la región de convergencia en uso. Así, el diagrama de polos y ceros para los ejemplos 4.1 y 4.3 se muestra en la figura 4.2.



**Figura 4.2:** Regiones de convergencia para ejemplos 4.1 (izquierda) y 4.3 (derecha).

Además de los ceros y polos en la expresión algebraica de la transformada de Laplace, si esta es racional, y el orden del numerador es en un orden  $k$  menor que el denominador, se dice que hay un cero de orden  $k$  en infinito, puesto que si  $s$  tiende a infinito, entonces  $X(s)$  tiende a cero. De forma similar, si el numerador es en un orden  $k$  mayor que el denominador, entonces se considera que hay un polo de orden  $k$  en el infinito, puesto que si  $s$  tiende a infinito, también lo hará  $X(s)$ . En otras palabras, para las funciones racionales puede considerarse que siempre hay el mismo número de polos y ceros, si se toman en cuenta aquellos en el infinito.

### 4.1.1 Regiones de convergencia

La región de convergencia contiene aquellos puntos del plano  $s$  para los que la transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\sigma t}$  existe, lo que implica que  $x(t)e^{-\sigma t}$  debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Esto depende únicamente de la componente real  $\sigma$  de la frecuencia compleja  $s$ . Por esta razón, la ROC de  $X(s)$  consiste en bandas paralelas al eje  $j\omega$  en el plano  $s$ .

Puesto que la integral de Laplace debe converger, la ROC no puede contener ningún polo, por indefinirse allí el valor de la expresión algebraica. Esto sugiere que los límites de las bandas verticales que conforman la ROC estarán determinados por las componentes reales de los polos.

Sea  $x(t)$  una función de duración finita, es decir, con valores diferentes de cero dentro de un intervalo finito  $[t_1, t_2]$ , y fuera de allí siempre cero. Sea  $x(t)$  además absolutamente integrable dentro de dicho intervalo:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty. \quad (4.2)$$

Si  $s = \sigma + j\omega$  está dentro de la ROC, eso quiere decir que  $x(t)e^{-\sigma t}$  es también absolutamente integrable

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (4.3)$$

Con  $\sigma = 0$  (4.3) se reduce a (4.2) por lo que  $\sigma = 0$  se encuentra en la ROC. Si  $\sigma > 0$  entonces el valor máximo de  $e^{-\sigma t}$  se obtiene para  $t = t_1$  y por tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt \leq e^{-\sigma t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$$

por lo que todo  $\sigma > 0$  se encuentra en la ROC.

De forma similar para  $\sigma < 0$  se cumple que el mayor valor de  $e^{-\sigma t}$  ocurre para  $t = t_2$ , por lo que

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt \leq e^{-\sigma t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$$

y así todo  $\sigma < 0$  se encuentra en la ROC. De esta forma se ha demostrado que si  $x(t)$  es finita y absolutamente integrable entonces todo el plano  $s$  constituye su ROC.

**Ejemplo 4.4** Calcule la transformada de Laplace de la función finita

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Solución:** Utilizando la definición de transformada de Laplace se obtiene

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

lo que aparenta tener un polo en  $s = -a$ . Esto sería sin embargo contradictorio con la propiedad anteriormente descrita. Sin embargo, si  $s = -a$  el numerador también se hace cero, por lo que debe evaluarse la convergencia en este punto utilizando, por ejemplo, la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[ \frac{\frac{d}{ds} (1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds} (s+a)} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT} = T$$

que al ser un valor finito concuerda con la propiedad de convergencia completa del plano  $s$ .

4.4

Una señal acotada por su izquierda, o también llamada una *señal derecha* es aquella para la que se cumple  $x(t) = 0$  para  $t < t_1$ . Si la transformada de Laplace converge para algún valor  $\sigma = \sigma_0$  entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

Puesto que la señal es derecha entonces lo anterior se puede reescribir como

$$\int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

y para todo  $\sigma_1 > \sigma_0$

$$\int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1} \int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

es decir, para una señal derecha su ROC contendrá siempre el semiplano derecho de  $s$  a partir de un cierto valor  $\sigma_0$ .

Un razonamiento similar se sigue para *señales izquierdas* o acotadas por la derecha, que convergerán para todo un semiplano izquierdo delimitado por la recta vertical que pasa por  $\sigma_0$ .

Una *señal bilateral* es aquella de extensión infinita tanto a la izquierda, como a la derecha. Una señal de este tipo puede descomponerse como la suma de una señal izquierda y otra derecha, partiéndola en dos en algún punto finito. En este caso la ROC contendrá la intersección de las ROC individuales. Si dicha intersección es vacía, entonces la transformada de Laplace no existe. En caso contrario, como es la intersección de un semiplano izquierdo y otro derecho, la ROC corresponderá a una banda vertical.

La figura 4.3 muestra los cuatro casos anteriores en forma esquemática.

**Ejemplo 4.5** Encuentre la transformada de Laplace de

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

con su respectiva región de convergencia, para  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Esta ecuación puede reescribirse como la suma de una señal derecha y otra izquierda acotadas en el punto  $t = 0$ .

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{+at}u(-t)$$

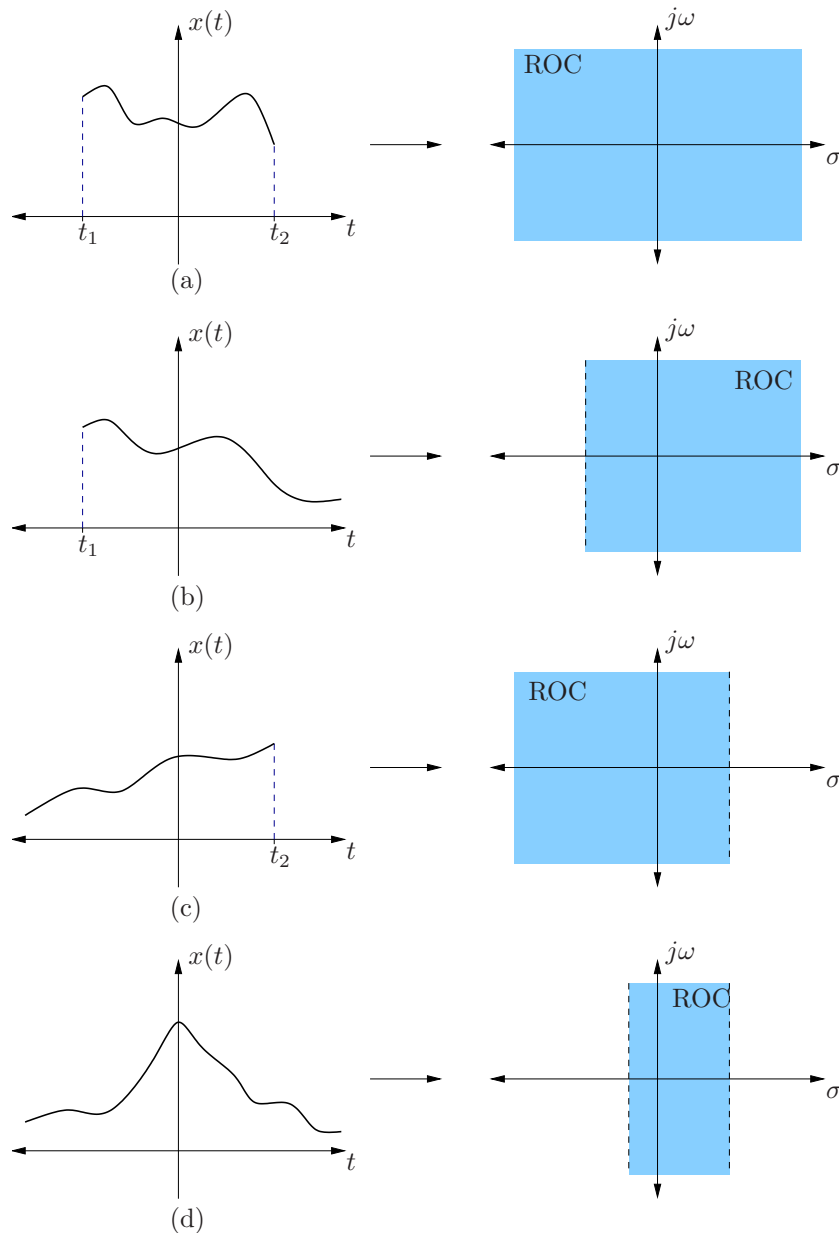
De los ejemplos 4.1 y 4.2

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\circ \bullet \frac{1}{s+a}, & \text{ROC: } \sigma > -a \\ e^{at}u(-t) &\circ \bullet \frac{-1}{s-a}, & \text{ROC: } \sigma < a \end{aligned}$$

Nótese que si  $a < 0$  entonces no hay una región de convergencia común a ambos términos y por tanto no existe la transformada de Laplace. Si  $a > 0$  entonces

$$e^{-a|t|} \circ \bullet \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = -\frac{2a}{s^2 - a^2}, \quad \text{ROC: } -a < \sigma < a$$



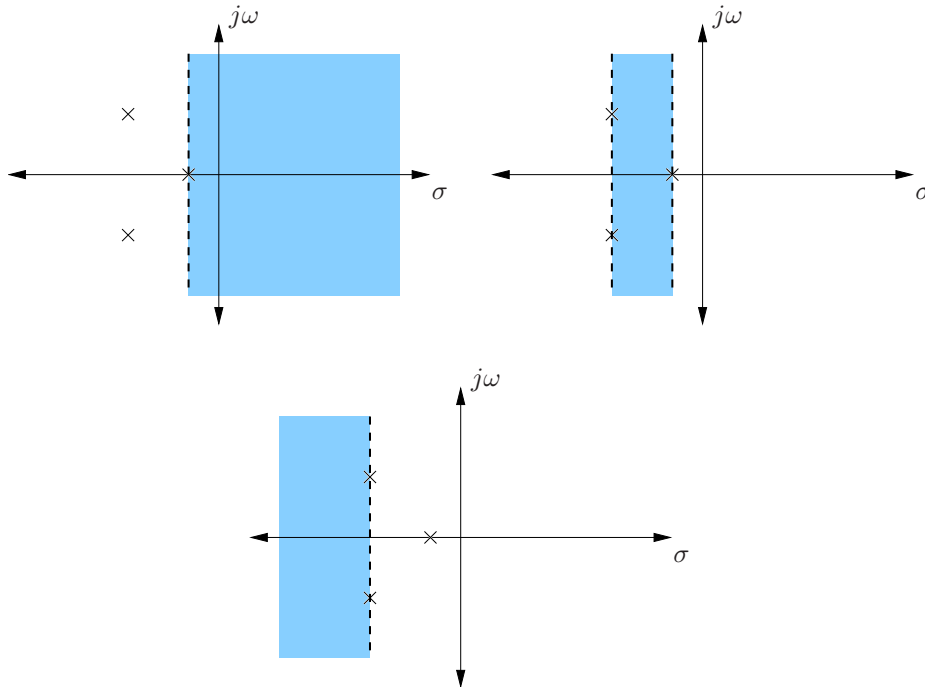


**Figura 4.3:** Regiones de convergencia correspondientes a señales (a) finita, (b) derecha, (c) izquierda y (d) bilateral.

4.5

Si la transformada de Laplace  $X(s)$  de  $x(t)$  es racional, entonces si  $x(t)$  es una función derecha, su ROC será el semiplano derecho limitado a la izquierda por el polo de  $X(s)$  con mayor componente real. Por otro lado, si  $x(t)$  es izquierda, su ROC será el semiplano izquierdo limitado a la derecha por el polo de  $X(s)$  con menor componente real. La figura 4.4 muestra las posibles regiones de convergencia de una función  $X(s)$  con varios polos. Nótese que en el caso de la figura solo la ROC correspondiente a una función derecha permite la existencia de la transformada de Fourier, puesto que solo ella incluye al eje imaginario  $j\omega$ .

Nótese que en todo el análisis anterior se ha supuesto que  $x(t)$  es de orden exponencial, es



**Figura 4.4:** Regiones de convergencia limitados por polos de transformada de Laplace  $X(s)$ .

decir, que cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  existen número reales constantes  $\sigma$ ,  $M$ ,  $t_1$  y  $t_2$  tales que

$$|x(t)| < Me^{\sigma t}$$

para todo  $t > t_1$  y  $x(t)$  una señal derecha, o para  $t < t_2$  y  $x(t)$  una señal izquierda. En caso contrario, no existe la transformada de Laplace al no converger la integral de definición.

### 4.1.2 Propiedades de la transformada de Laplace

Por su estrecha relación con la transformada de Fourier, muchas de las propiedades de esta última se mantienen. Sin embargo, en la transformada de Laplace debe tenerse cuidado con las implicaciones para la región de convergencia. En el caso de funciones racionales, por ejemplo, si la modificación de la función altera la posición de los polos, la ROC se trasladará con ellos, en concordancia con los conceptos discutidos anteriormente.

#### Linealidad

Sean las funciones en el dominio del tiempo  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  y sus respectivas transformadas de Laplace

$$\begin{aligned} x_1(t) &\circ\!\!\!\bullet X_1(s), & \text{ROC: } R_1 \\ x_2(t) &\circ\!\!\!\bullet X_2(s), & \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ\!\!\!\bullet \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s), \quad \text{ROC: } R_1 \cap R_2$$

donde la ROC indicada representa la menor región de convergencia posible, puesto que, como el problema 4.7 lo muestra, la ROC de la combinación lineal puede ser mayor que la de los términos por separado, puesto que algunos polos pueden desaparecer.

Esta propiedad puede demostrarse fácilmente utilizando la propiedad de linealidad de la integral, junto con la observación de que la transformada total converge solo en aquella región común a todos los términos, es decir, a su intersección.

Nótese que es posible, si no hay puntos comunes en las regiones de convergencia, que no exista la transformada de Laplace de una combinación lineal.

### Desplazamiento en el tiempo y en el dominio $s$

Con un análisis análogo al caso de la transformada de Fourier se puede demostrar que si  $x(t) \circ \bullet X(s)$  con ROC  $R$  entonces

$$x(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} X(s), \quad \text{ROC: } R$$

y

$$e^{s_0 t} x(t) \circ \bullet X(s - s_0), \quad \text{ROC: } \{s \mid s = r + s_0, r \in R\}$$

Es decir, la región de convergencia no es alterada cuando se desplaza la señal en el tiempo. Sin embargo, si se desplaza la señal en el dominio  $s$  entonces también lo hace su región de convergencia. Esto puede comprenderse considerando que en  $X(s - s_0)$  los polos y ceros están desplazados en  $s_0$  con respecto a los de  $X(s)$ , y por tanto también se desplaza su región de convergencia. Puesto que las ROC son bandas de longitud vertical infinita, este desplazamiento puede interpretarse como un corrimiento horizontal de la ROC determinada por  $\text{Re}\{s_0\}$ .

Un caso particular consiste en la modulación, es decir

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \circ \bullet X(s - j\omega_0)$$

que desplaza la transformada de Laplace en dirección vertical, trasladando todo polo y cero en  $a$  hacia  $a + j\omega_0$ . Nótese que la ROC en este caso queda inalterada.

### Conjugación

Para  $x(t) \circ \bullet X(s)$  con ROC  $R$  se cumple

$$x^*(t) \circ \bullet X^*(s^*), \quad \text{ROC: } R$$

y por lo tanto  $X(s) = X^*(s^*)$  si  $x(t)$  es real. Consecuencia directa de este hecho es que si  $p$  es un polo complejo con parte imaginaria diferente de cero, entonces  $p^*$  también lo es.

### Escalamiento en el tiempo

Si  $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$  con ROC  $R$  entonces para  $a \in \mathbb{R}$

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROC: } \left\{s \mid s = \frac{r}{a}, r \in R\right\}$$

es decir, al igual que con la serie de Fourier, una compresión en el tiempo equivale a una dilatación en el dominio  $s$ , donde sin embargo ahora la dilatación ocurre en el plano complejo. Nótese que los límites de la ROC cambian. Si para  $x(t)$  estos límites eran  $r_1$  y  $r_2$ , entonces para  $x(at)$  estos serán  $r_1/a$  y  $r_2/a$ .

Para el caso en particular  $a = -1$  se tiene entonces

$$x(-t) \circ \bullet X(-s), \quad \text{ROC: } \{s \mid s = -r, r \in R\}$$

que equivale a una rotación de  $180^\circ$  del plano  $s$  como dominio de definición de  $X(s)$ , modificándose la posición de los polos y por tanto también la ROC.

### Convolución

Si

$$\begin{aligned} x_1(t) \circ \bullet X_1(s), \quad \text{ROC: } R_1 \\ x_2(t) \circ \bullet X_2(s), \quad \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet X_1(s)X_2(s), \quad \text{ROC: } R_1 \cap R_2$$

donde la región de convergencia puede ser mayor a la indicada si en el producto los polos que determinan los límites de las ROC individuales se cancelan.

### Diferenciación en el tiempo y en el dominio $s$

Si  $x(t) \circ \bullet X(s)$  con ROC  $R$  entonces

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ \bullet sX(s), \quad \text{ROC: } R$$

donde si  $X(s)$  tiene un polo de primer orden en  $s = 0$  entonces la ROC puede ser mayor. Esta propiedad se puede aplicar recursivamente para llegar a

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \circ \bullet s^n X(s), \quad \text{ROC: } R$$

Además

$$-tx(t) \circ \bullet \frac{d}{ds}X(s), \quad \text{ROC: } R$$

**Ejemplo 4.6** Encuentre la transformada de Laplace de

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

**Solución:** Puesto que

$$e^{-at}u(t) \circ \bullet \frac{1}{s+a}, \quad \text{ROC: } \sigma > -a$$

entonces

$$te^{-at}u(t) \circ \bullet -\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{ROC: } \sigma > -a$$

4.6

### Integración en el tiempo

Si  $x(t) \circ \bullet X(s)$  con ROC  $R$  entonces

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC: } R \cap \{s \mid \text{Re}\{s\} > 0\}$$

lo que puede deducirse del hecho que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t)$$

y puesto que  $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$  con ROC  $\sigma > 0$  entonces, con la propiedad de convolución se tiene

$$u(t) * x(t) \circ \bullet \frac{1}{s} X(s)$$

con una ROC igual a la intersección entre  $\sigma > 0$  y la ROC de  $X(s)$ .

### 4.1.3 La transformada inversa de Laplace

Puesto que

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

con  $s = \sigma + j\omega$  dentro de la ROC, entonces puede de forma equivalente utilizarse la transformada inversa de Fourier para encontrar a  $x(t)$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad .$$

Multiplicando ambos lados por  $e^{\sigma t}$  se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

**Tabla 4.1:** Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	$R$
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	$R_1$
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	$R_2$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	$R$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$	$R$
Desplazamiento en $s$	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$R$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$R/a$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$\geq R$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$\geq R$
	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	$R$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$

Las operaciones aritméticas utilizadas en la ROC se refieren a operaciones aplicadas a cada uno de los elementos de la región. Así por ejemplo  $R + s_0$  denota en realidad  $\{s \mid s = r + s_0, r \in R\}$ . El símbolo “ $\geq$ ” en la ROC implica que la región es *al menos* la indicada.

que corresponde a una integral en el plano complejo  $s$  con una trayectoria de integración vertical con componente real constante  $\sigma$  dentro de la ROC y con componente imaginaria  $\omega$  que abarca desde  $\omega = -\infty$  hasta  $\omega = \infty$ . Esto puede expresarse también, haciendo un cambio de variable en la ecuación anterior  $s = \sigma + j\omega$ ,  $ds = j d\omega$ , como

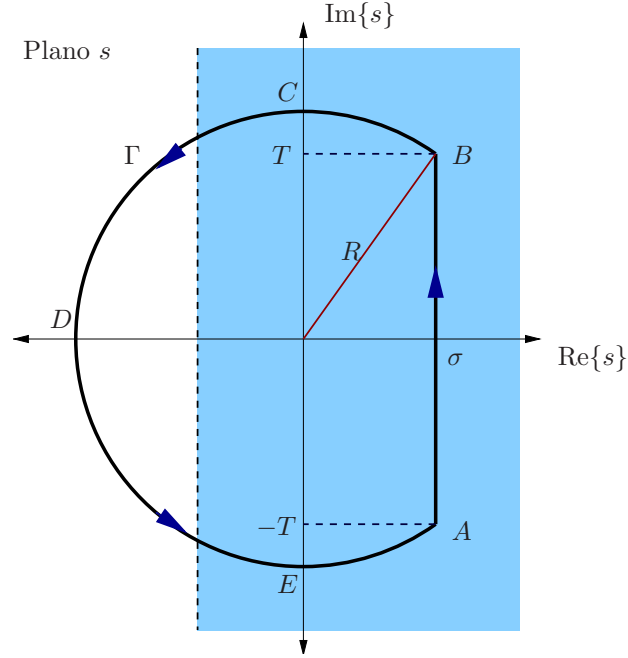
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (4.4)$$

A esta ecuación se le conoce como transformada inversa de Laplace, o también fórmula integral de Bromwich.

### Método de inversión por integración

Para calcular la transformada inversa de Laplace a través de la integral de Bromwich se recurre a las herramientas tratadas en el capítulo 2.6. La figura 4.5 muestra el contorno de integración  $\beta$  denominado *contorno de Bromwich*, con el cual se realiza el cálculo directo de la transformada inversa de Laplace para una señal causal. Este se compone de un segmento vertical  $AB$  con componente real  $\sigma$ , situado dentro de la región de convergencia, y de un

arco  $\Gamma$  de un círculo de radio  $R$  centrado en el origen que pasa por  $BCDEA$ . Debe tenerse cuidado de que no existan polos en el infinito, que interfieran con el contorno de integración. La elección de una función derecha o izquierda se hace observando la forma de la región de convergencia, donde para señales anticausales se elige la reflexión del contorno mostrado en la figura 4.5. Una descripción detallada de los cuidados que debe tenerse y el procedimiento correcto para evitarlos se encuentra en [11].



**Figura 4.5:** Contorno de Bromwich.

Para calcular la transformada inversa, considerando que  $T = \sqrt{R^2 - \sigma^2}$ , la integral (4.4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-jT}^{\sigma+jT} X(s) e^{st} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \left[ \oint_{\beta} X(s) e^{st} ds - \int_{\Gamma} X(s) e^{st} ds \right] \end{aligned}$$

Como ya se mencionó anteriormente, la ROC no contiene polos de  $X(s)$ . Cuando  $R$  tiende a infinito, el contorno  $\beta$  encerrará a todos los polos finitos a la izquierda de la región de convergencia y esta integral cerrada se puede calcular con cualquiera de los métodos estudiados anteriormente, como el teorema del residuo o la fórmula integral de Cauchy. Nótese que si la integral sobre el contorno  $\Gamma$  tiende a cero para  $R \rightarrow \infty$  entonces se cumple

$$x(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-jT}^{\sigma+jT} X(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\beta} X(s) e^{st} ds \quad (4.5)$$

Para determinar esto, se puede utilizar el Lema de Jordan (sección 2.7) si primero se aplica un mapeo lineal que traslade horizontalmente el plano  $s$  de modo tal que el segmento de recta  $AB$  se sobreponga al nuevo eje imaginario. Considerando esto se obtiene que la integral

sobre el contorno  $\Gamma$  tiende a cero para todas las funciones polinomiales  $N(s)/D(s)$  donde el grado del polinomio  $N(s)$  es menor que el de  $D(s)$  (ver problema 4.11).

**Ejemplo 4.7** Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{ROC: } \sigma > -\text{Re}\{a\}$$

si  $\text{Re}\{a\} > 0$ .

**Solución:** Como la función es racional y se cumplen los requisitos para que la integral en el arco del contorno de Bromwich desaparezca y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s+a} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\beta} \frac{1}{s+a} e^{st} ds$$

Puesto que  $\sigma$  debe estar en la ROC, y el contorno  $\beta$  encierra al único polo de  $X(s)$  en  $-a$ , entonces, utilizando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{\beta} \frac{1}{s+a} e^{st} ds = 2\pi j e^{-at}$$

y finalmente, como el resultado anterior es válido solo para  $t \geq 0$

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

4.7

**Ejemplo 4.8** Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \text{ROC: } \sigma > -\text{Re}\{a\}$$

si  $\text{Re}\{a\} > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ .

**Solución:** Como la función es racional se cumplen los requisitos para que la integral en el arco del contorno de Bromwich desaparezca y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{(s+a)^n} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\beta} \frac{1}{(s+a)^n} e^{st} ds$$

Puesto que  $\sigma$  debe estar en la ROC, y el contorno  $\beta$  encierra al polo de  $n$ -ésimo orden de  $X(s)$  en  $-a$ , entonces, utilizando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{\beta} \frac{1}{(s+a)^n} e^{st} ds = \frac{2\pi j}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{st} \right|_{s=-a}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} e^{st} &= t e^{st} \\ \frac{d^2}{ds^2} e^{st} &= t^2 e^{st} \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{st} &= t^{n-1} e^{st} \end{aligned}$$



entonces, como el resultado es válido solo para  $t \geq 0$

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{(n-1)} e^{-at} u(t)$$

4.8

**Ejemplo 4.9** Encuentre la transformada inversa de

$$X(s) = \frac{1}{s^n}$$

para  $n \geq 1$

**Solución:** De los ejemplos anteriores con  $a = 0$  y  $n \geq 0$  se obtiene

$$\frac{1}{s} \bullet \circ u(t) \quad \frac{1}{s^n} \bullet \circ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} u(t)$$

4.9

Este método basado en la integral de Bromwich es poco utilizado en la práctica, puesto que hay muchas sutilezas matemáticas (no consideradas aquí) que pueden llevar al resultado erróneo. El lector puede comprobar este hecho transformado, por ejemplo,  $e^{at}u(t - t_0)$  al dominio de Laplace y de regreso al dominio temporal. De hecho, siempre que la expresión algebraica de la transformada de Laplace tenga polos en infinito o un número de polos infinito, la integral de Bromwich debe evaluarse con métodos alternativos por no cumplirse las condiciones necesarias para asumir que la integral en el arco circular desaparece. Los métodos generalmente más utilizados involucran el uso de tablas realizadas para funciones elementales, y la descomposición de funciones  $X(s)$  más complejas en términos de estas funciones elementales. Estos métodos se tratan a continuación.

### Método de series

Si  $X(s)$  se puede expresar en su ROC como una serie de potencias, por ejemplo

$$X(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s^3} + \dots$$

entonces, utilizando los resultados del ejemplo 4.9 y la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace se cumple que

$$x(t) = \left[ c_1 + c_2 t + \frac{c_3}{2!} t^2 + \frac{c_4}{3!} t^3 + \dots \right] u(t)$$

### Descomposición en fracciones parciales

Cualquier función racional de la forma  $X(s) = N(s)/D(s)$ , con  $N(s)$  y  $D(s)$  polinomios tales que el orden de  $D(s)$  es estrictamente mayor que el de  $N(s)$  pueden descomponerse como

una suma de términos más sencillos, cada uno con un solo polo de orden  $n$ . Si  $X(s)$  contiene únicamente  $m$  polos simples en  $a_i$ , entonces

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s - a_i}$$

Nótese que los numeradores de cada término son todos constantes, y que esto es válido solo si el orden de  $N(s)$  es menor que el de  $D(s)$ , en cuyo caso a  $X(s)$  se le denomina *función racional propia*. En caso contrario,  $X(s)$  es una función racional impropia que puede expresarse como una suma de un polinomio más una función racional propia. Esta última descomposición se puede realizar por medio de una división polinomial adecuada.

**Ejemplo 4.10** Descomponga la siguiente función racional impropia en una suma de un polinomio más una función racional propia.

$$X(s) = \frac{s^3 - 1}{s^2 - 1}$$

**Solución:** Utilizando división polinomial se obtiene

$$\begin{array}{r|l} s^3 & s^2 - 1 \\ -(s^3 - s) & \\ \hline s & 1 \end{array}$$

con lo que resulta

$$X(s) = s + \frac{s - 1}{s^2 - 1} = s + \frac{1}{s + 1}$$

Si se desea obtener la transformada inversa de esta expresión, de la tabla 4.2 se tiene que

$$\begin{array}{l} s \bullet \longrightarrow \frac{d}{dt} \delta(t) \\ \frac{1}{s + 1} \bullet \longrightarrow e^{-t} u(t) \end{array}$$

donde se ha asumido que la señal debe ser causal. Con la propiedad de linealidad se tiene entonces

$$X(s) \bullet \longrightarrow x(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + e^{-t} u(t)$$

4.10

Si  $X(s)$  contiene polos de  $n$ -ésimo orden en  $a_i$ , entonces en la descomposición en fracciones parciales aparecerán los términos

$$\frac{A_{i1}}{s - a_i} + \frac{A_{i2}}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{in}}{(s - a_i)^n}$$

Para encontrar el coeficiente  $A_k$  del polo simple  $a_k$  se procede con

$$\lim_{s \rightarrow a_k} (s - a_k)X(s) = \lim_{s \rightarrow a_k} \sum_{i=1}^m (s - a_k) \frac{A_i}{s - a_i} = \sum_{i=1}^m \lim_{s \rightarrow a_k} (s - a_k) \frac{A_i}{s - a_i}$$

donde, puesto que

$$\lim_{s \rightarrow a_k} \frac{s - a_k}{s - a_i} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ 1 & \text{para } i = k \end{cases}$$

entonces

$$A_k = \lim_{s \rightarrow a_k} (s - a_k)X(s) \quad (4.6)$$

El coeficiente  $A_{in}$  para el polo  $a_i$  orden  $n > 1$  se obtiene de manera similar:

$$A_{in} = \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i)^n X(s)$$

Los coeficientes  $A_{ik}$  con  $1 \leq k < n$  se determinan a través de derivaciones sucesivas, con un razonamiento análogo al utilizado en la determinación de los residuos en la página 68. El lector puede comprobar que estos coeficientes estarán dados por

$$A_{ik} = \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{1}{(n - k)!} \frac{d^{(n-k)}}{ds^{(n-k)}} [(s - a_i)^n X(s)]$$

Puede demostrarse que si hay un par de polos complejos conjugados  $a_i = a_k^*$ , los coeficientes correspondientes también serán complejos conjugados, es decir  $A_i = A_k^*$ .

En los ejemplos 4.1, 4.2, 4.7 y 4.8 se mostró la correspondencia entre los dominios temporal y de Laplace para dichos términos simples, donde no debe perderse de vista la ROC de cada término. Utilizando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace puede entonces determinarse la señal en el tiempo correspondiente a  $X(s)$ . La tabla 4.2 muestra algunas funciones elementales frecuentemente encontradas. Se deja al lector como ejercicio su demostración.

**Ejemplo 4.11** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

asumiendo primero que la señal correspondiente  $x(t)$  es causal, y luego que es una señal izquierda, y que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Los polos  $a_1$  y  $a_2$  de  $X(s)$  equivalen a las raíces del denominador:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} \\ a_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} \end{aligned}$$

que pueden ser dos valores reales diferentes, dos valores reales iguales, que equivaldría a un polo doble, o un par de polos complejos conjugados, dependiendo si el término

$$\Delta = \alpha^2 - \beta$$

**Tabla 4.2:** Transformadas Bilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo $s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma < -a$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$	todo $s$
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[e^{-at} \cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$[e^{-at} \sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$s^n$	todo $s$

es positivo, cero, o negativo, respectivamente.

En el caso que  $\Delta = 0$  entonces  $a_1 = a_2 = -\alpha$

$$X(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

y con el ejemplo 4.8 se tiene para la región de convergencia  $\sigma > -\alpha$

$$x(t) = te^{-\alpha t}u(t) \quad .$$

Utilizando la tabla 4.2 se obtiene para la región de convergencia  $\sigma < -\alpha$

$$x(t) = -te^{-\alpha t}u(-t)$$

En el caso que  $\Delta \neq 0$  se cumple

$$X(s) = \frac{1}{(s - a_1)(s - a_2)} = \frac{A_1}{s - a_1} + \frac{A_2}{s - a_2}$$

Para encontrar  $A_i$  puede utilizarse (4.6) o simplemente se multiplica ambos lados de la ecuación anterior por  $(s - a_1)(s - a_2)$  que resulta en

$$1 = (s - a_2)A_1 + (s - a_1)A_2$$

Con  $s \rightarrow a_2$ , y luego con  $s \rightarrow a_1$  se obtiene

$$A_1 = \frac{1}{a_1 - a_2} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \quad A_2 = \frac{1}{a_2 - a_1} = -A_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}$$

por lo que finalmente

$$X(s) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left[ \frac{1}{s - a_1} - \frac{1}{s - a_2} \right]$$

Si  $\Delta > 0$  entonces ambos polos son reales y se cumple  $a_1 > a_2$  por lo que para la ROC  $\sigma > a_1$  se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} [e^{a_1 t} - e^{a_2 t}] u(t)$$

y para la ROC  $\sigma < a_2$

$$x(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}} [e^{a_1 t} - e^{a_2 t}] u(-t)$$

Si  $\Delta < 0$  se cumple  $a_1 = a_2^*$  y entonces para la ROC  $\sigma > -\alpha$  se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2j\sqrt{|\Delta|}} e^{\operatorname{Re}\{a_1\}t} [e^{j\operatorname{Im}\{a_1\}t} - e^{-j\operatorname{Im}\{a_1\}t}] u(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{\operatorname{Re}\{a_1\}t} \operatorname{sen}(\operatorname{Im}\{a_1\}t) u(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\sqrt{|\Delta|}t) u(t) \end{aligned}$$

y para la ROC  $\sigma < -\alpha$

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\sqrt{|\Delta|}t) u(-t)$$

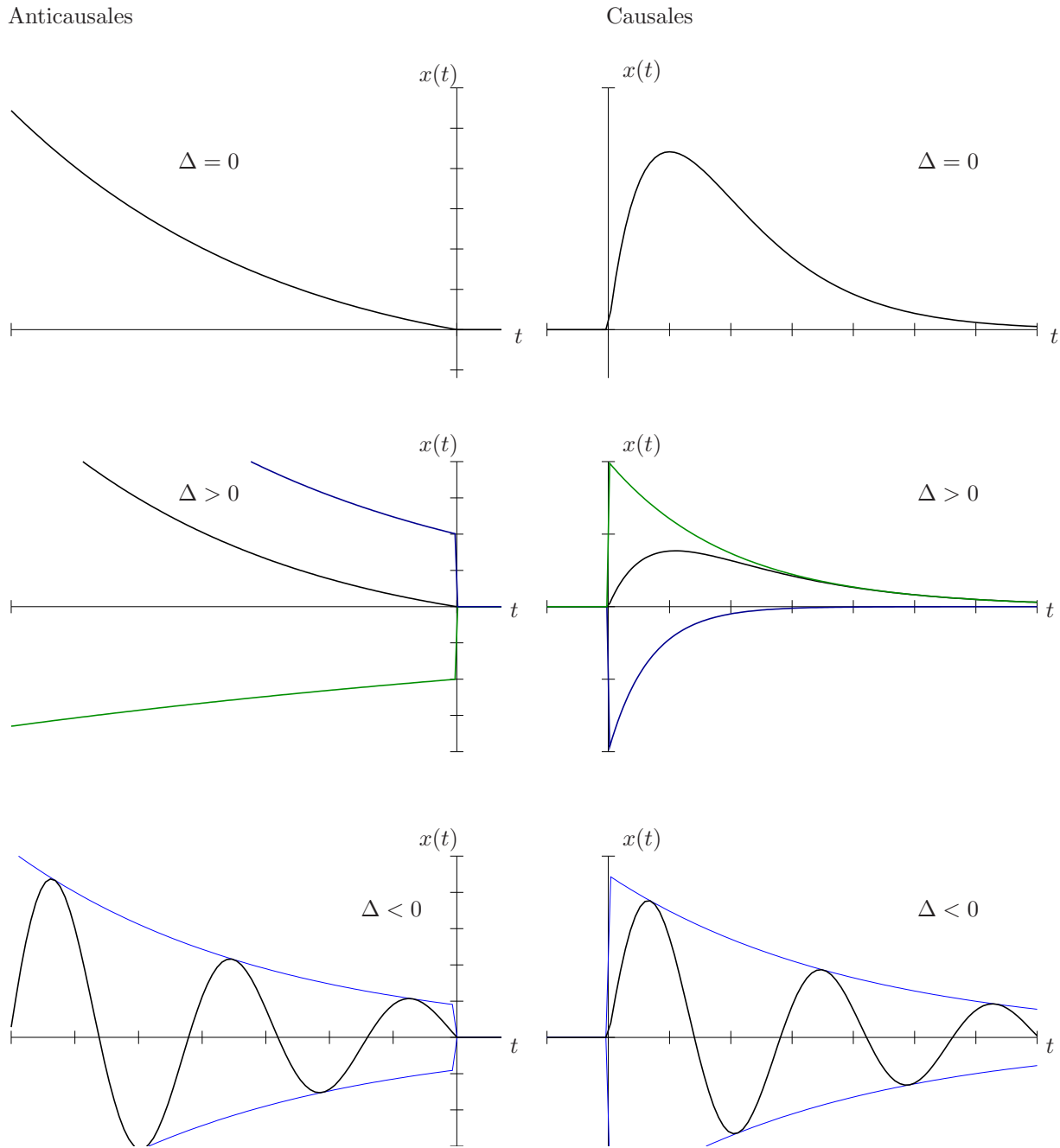
La figura 4.6 muestra ejemplos para cada uno de los casos citados.

4.11

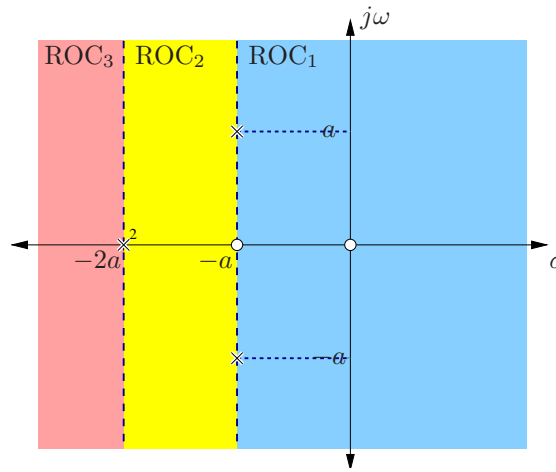
**Ejemplo 4.12** Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{s(s + a)}{(s + 2a)^2(s + a(1 - j))(s + a(1 + j))}$$

con  $a \in \mathbb{R}$  una constante positiva, para todas las regiones de convergencia posibles.



**Figura 4.6:** Ejemplos de funciones con transformada de Laplace de orden 2 para el ejemplo 4.11. Del lado izquierdo se presentan las señales anticausales. Del lado derecho se presentan las señales causales (con ROC un semiplano derecho). En cada caso se indica si el valor del término  $\Delta$  es positivo, negativo o cero.



**Figura 4.7:** Diagrama de polos y ceros del ejercicio 4.12.

**Solución:** Para encontrar las regiones de convergencia se parte del diagrama de polos y ceros indicado en la figura 4.7. Se nota claramente que con los polos indicados hay tres posibles regiones. Para la señal derecha,  $\text{ROC}_1$  tiene  $\sigma > -a$ . La señal bilateral tiene como  $\text{ROC}_2$   $-2a < \sigma < -a$ . La señal izquierda tiene como  $\text{ROC}_3$   $\sigma < -2a$ . El superíndice sobre el polo en  $-2a$  indica el orden del mismo.

El orden del numerador de  $X(s)$  es uno, y el orden del denominador es cuatro, por lo tanto se cumple

$$X(s) = \frac{A_{11}}{s+2a} + \frac{A_{12}}{(s+2a)^2} + \frac{A_2}{s+(a-j a)} + \frac{A_3}{s+(a+j a)}$$

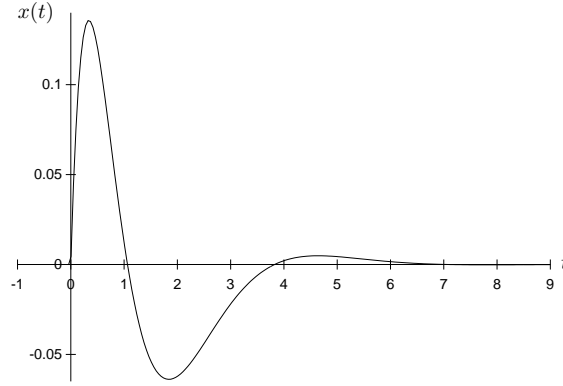
con

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{d}{ds} \frac{s(s+a)}{(s+(a-j a))(s+(a+j a))} = \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{d}{ds} \frac{s^2 + sa}{s^2 + 2as + 2a^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{a(s^2 + 4as + 2a^2)}{(s^2 + 2as + 2a^2)^2} = -\frac{1}{2a} \\ A_{12} &= \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{s(s+a)}{(s+(a-j a))(s+(a+j a))} = 1 \\ A_2 &= \lim_{s \rightarrow (-a+j a)} = \frac{1}{4a}(1+j) = \frac{\sqrt{2}}{4a}e^{j\pi/4} \\ A_3 &= \lim_{s \rightarrow (-a-j a)} = \frac{1}{4a}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{4a}e^{-j\pi/4} \end{aligned}$$

Para la  $\text{ROC}_1$ , todos los términos corresponden a funciones derechas, por lo que, utilizando resultados de ejemplos anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[ -\frac{1}{2a}e^{-2at} + te^{-2at} + \frac{1}{4a} \left( \sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-(a-j a)t} + \sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{-(a+j a)t} \right) \right] u(t) \\ &= \left[ \left( t - \frac{1}{2a} \right) e^{-2at} + \frac{\sqrt{2}e^{-at}}{2a} \cos \left( at + \frac{\pi}{4} \right) \right] u(t) \end{aligned}$$

lo que se muestra en la figura 4.8.

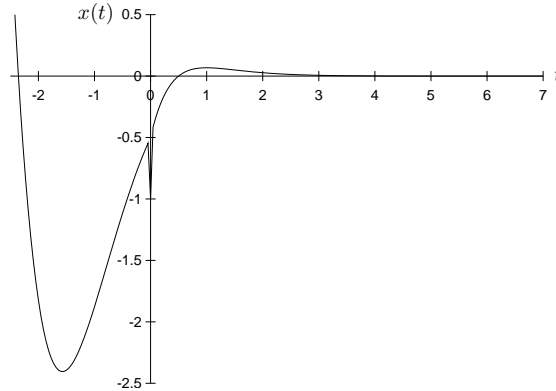


**Figura 4.8:** Función  $x(t)$  para la  $ROC_1$  del ejemplo 4.12, con  $a = 1$ .

Para la  $ROC_2$  los polos complejos conjugados corresponden a una señal izquierda mientras que el polo real en  $-2a$  corresponde a una señal derecha. Así

$$x(t) = \left[ \left( t - \frac{1}{2a} \right) e^{-2at} \right] u(t) - \frac{\sqrt{2}e^{-at}}{2a} \cos \left( at + \frac{\pi}{4} \right) u(-t)$$

lo que se muestra en la figura 4.9.



**Figura 4.9:** Función  $x(t)$  para la  $ROC_2$  del ejemplo 4.12, con  $a = 1$ .

Y finalmente para la  $ROC_3$  todos los polos aportan a señales izquierdas y

$$x(t) = \left[ \left( \frac{1}{2a} - t \right) e^{-2at} - \frac{\sqrt{2}e^{-at}}{2a} \cos \left( at + \frac{\pi}{4} \right) \right] u(-t)$$

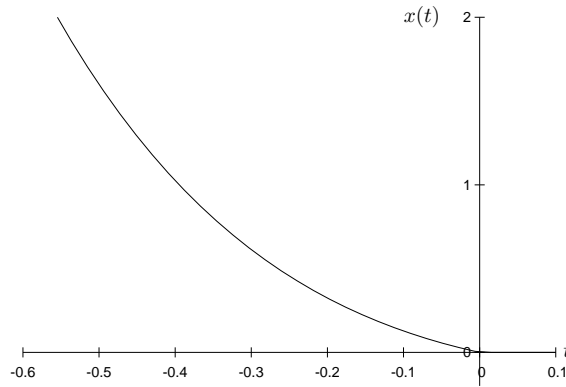
lo que se muestra en la figura 4.10.

4.12

#### 4.1.4 Sistemas LTI y la transformada de Laplace

Tal y como se discutió en la sección 3.4, la reacción de un sistema a una señal de entrada se puede calcular a través de la convolución de dicha señal de entrada con la respuesta al





**Figura 4.10:** Función  $x(t)$  para la  $ROC_3$  del ejemplo 4.12, con  $a = 1$ .

impulso del sistema. Debido a la propiedad de convolución de la transformada de Laplace, es posible simplificar el manejo de este operador utilizando la representación de las señales involucradas y la respuesta al impulso en el dominio de la frecuencia, tal y como se hizo con la transformada de Fourier:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ | & | & | \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Esta transformada tiene mayores posibilidades en el análisis de sistemas que la transformada de Fourier, puesto que con ella se pueden tratar casos “inestables” que no tienen representación en el dominio  $j\omega$ , es decir, todos aquellos casos en que la ROC de la transformada de Laplace no incluye al eje imaginario del plano  $s = \sigma + j\omega$ .

Recuérdese que a  $H(j\omega)$  se le conoce como respuesta en frecuencia del sistema. A  $H(s)$  se le denomina *función del sistema* o *función de transferencia* del sistema.

## Causalidad

Si un sistema es causal entonces su respuesta al impulso  $h(t)$  es cero para todo  $t < 0$  y es por tanto una función derecha. Por esta razón la ROC de todo sistema causal será un semiplano derecho. Debe notarse, sin embargo, que lo contrario no es cierto, es decir, que si la ROC de una función es un semiplano derecho entonces la función no es necesariamente causal, puesto que no toda función derecha es causal. Por ejemplo,  $u(t+1)$  es derecha pero como en el intervalo  $[-1, 0]$  es diferente de cero entonces no es causal.

Para el caso particular de funciones racionales, al no tener  $H(s)$  los términos exponenciales causantes del desfase en el tiempo, se puede afirmar que si su ROC es un semiplano derecho delimitado por el polo más a la derecha de  $H(s)$ , entonces  $h(t)$  es causal.

Un sistema se denomina *anticausal* si su respuesta al impulso  $h(t)$  es cero para todo  $t > 0$ , que por ser una función izquierda implica un semiplano izquierdo como ROC. De igual modo

que para sistemas causales, solo si  $H(s)$  es racional se puede inferir que si su ROC es un semiplano izquierdo entonces su respuesta al impulso es anticausal.

### Estabilidad

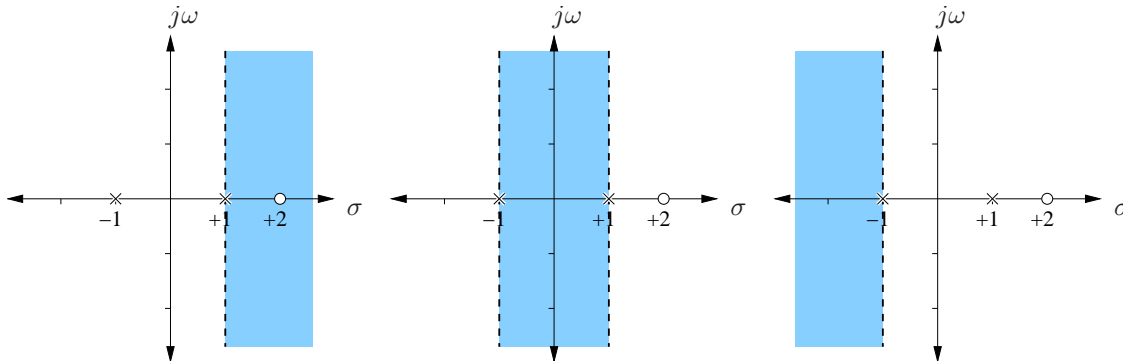
En la sección 3.4.4 se estableció que un sistema estable BIBO tiene una respuesta al impulso absolutamente integrable, y por lo tanto tiene transformada de Fourier. Esto implica entonces a su vez que si  $h(t)$  es la respuesta al impulso de un sistema estable, entonces  $H(s)$  debe incluir en su ROC al eje imaginario  $j\omega$  del plano  $s$ .

**Ejemplo 4.13** Sea

$$H(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-1)}$$

la función de transferencia de un sistema estable. Determine su respuesta al impulso.

**Solución:** La figura 4.11 muestra el diagrama de polos y ceros de  $X(s)$  junto con las tres posibles regiones de convergencia. Puesto que de las tres ROC mostradas solo la banda de convergencia al centro contiene al eje  $j\omega$ , se deriva que la respuesta al impulso es una función bilateral.



**Figura 4.11:** Diagrama de polos y ceros y posibles regiones de convergencia en el ejemplo 4.13.

Descomponiendo a  $H(s)$  en fracciones parciales se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s-1} \right]$$

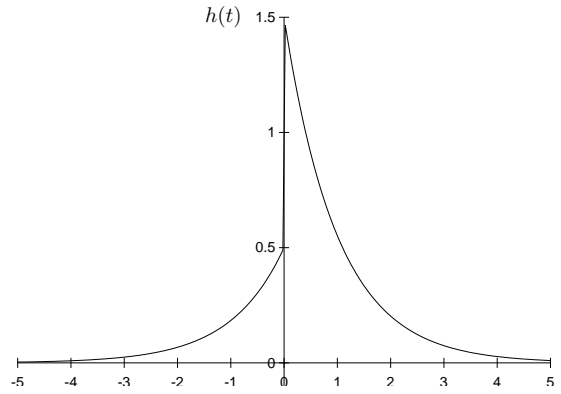
y de este modo

$$h(t) = \frac{3}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^t u(-t)$$

lo que se muestra en la figura 4.12.

4.13

En el ejemplo 4.13 la ROC correspondiente al semiplano derecho corresponde a una respuesta causal, pero inestable, al no incluir al eje  $j\omega$ . El semiplano izquierdo corresponde a una señal anticausal, también inestable. De lo anterior se deduce que, para que un sistema causal, con función de transferencia racional, sea estable, entonces todos sus polos deben estar localizados al lado izquierdo del eje imaginario.



**Figura 4.12:** Gráfica de la respuesta al impulso  $h(t)$  en el ejemplo 4.13.

**Ejemplo 4.14** Evalúe la estabilidad del sistema causal de segundo orden con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** En el ejemplo 4.11 se analizaron las posibles transformaciones causales y anticausales de una función igual a  $H(s)$ . Para la estabilidad del sistema causal se deben considerar tres casos: un polo de orden dos, dos polos reales, o un par de polos complejos conjugados.

Si el discriminante  $\Delta = \alpha^2 - \beta$  es cero se tiene un polo de orden dos en  $-\alpha$ . Este polo se encuentra del lado izquierdo del eje  $j\omega$  solo si  $\alpha > 0$ .

Si  $\Delta > 0$  los polos son reales, y el polo más a la derecha se encuentra en

$$a_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

Este polo se encuentra a la izquierda del eje imaginario solo si  $\alpha > 0$  y

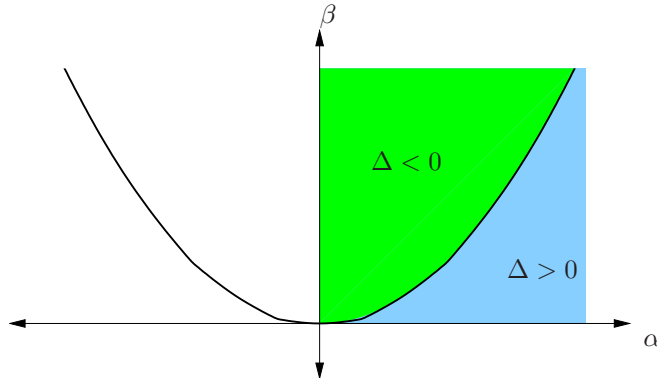
$$\begin{aligned} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} &< 0 \\ \sqrt{\alpha^2 - \beta} &< \alpha \\ \alpha^2 - \beta &< \alpha^2 \\ \beta &> 0 \end{aligned}$$

Si  $\Delta < 0$  entonces la componente real del polo es  $-\alpha$ , que se encontrará del lado izquierdo del eje imaginario solo si  $\alpha > 0$ . Estos tres casos se resumen gráficamente en la figura 4.13.

4.14

### 4.1.5 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

El comportamiento de muchos sistemas físicos, entre ellos los circuitos lineales (es decir, circuitos RLC, con amplificadores operacionales lineales) puede describirse a través de ecua-



**Figura 4.13:** Valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que dan origen a un sistema de segundo orden causal y estable. Solo valores en las regiones sombreadas conducen a la estabilidad.

ciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

y con la propiedad de linealidad

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

Utilizando ahora la propiedad de diferenciación

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) &= \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s) \\ Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k &= X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k \end{aligned}$$

Puesto que la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

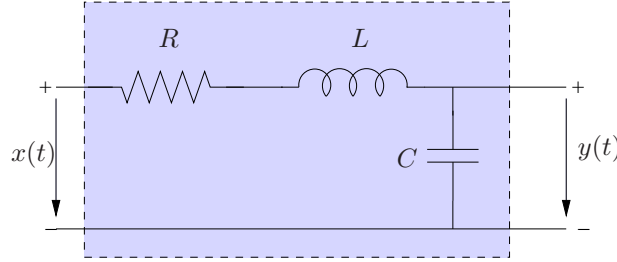
entonces se cumple

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

que es una función racional con un numerador igual a un polinomio de grado  $M$ , cuyos coeficientes son iguales a aquellos que multiplican las derivadas de la función de entrada, y

con un denominador igual a un polinomio de grado  $N$  con coeficientes iguales a los de las derivadas de la función de salida. Los ceros de  $H(s)$  son entonces las raíces de  $\sum_{k=0}^M b_k s^k$  y están determinados entonces por los coeficientes de las derivadas de la entrada únicamente. Los polos de  $H(s)$  equivalen a las raíces de  $\sum_{k=0}^N a_k s^k$  y están determinados por los coeficientes de las derivadas de la salida. Note que esta deducción es válida también utilizando la transformada de Fourier, y se sustituye simplemente  $s$  por  $j\omega$ .

**Ejemplo 4.15** La figura 4.14 muestra un circuito RLC interpretado como sistema con tensión eléctrica de entrada  $x(t)$  y tensión eléctrica de salida  $y(t)$ . Determine la función de



**Figura 4.14:** Circuito RLC.

transferencia del sistema, y evalúe la estabilidad del mismo.

**Solución:** En un condensador y en una bobina se cumple para sus tensiones  $u(t)$  y sus corrientes  $i(t)$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u(t) \quad u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

Para el circuito de la figura 4.14 en particular, la tensión en el condensador es  $y(t)$  y por tanto

$$i(t) = C \frac{d}{dt} y(t)$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned} x(t) &= Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + y(t) \\ &= RC \frac{d}{dt} y(t) + LC \frac{d^2}{dt^2} y(t) + y(t) \end{aligned}$$

y expresando esto en el dominio de Laplace

$$\begin{aligned} X(s) &= sRC Y(s) + s^2 LC Y(s) + Y(s) \\ &= Y(s) [LCs^2 + RCs + 1] \end{aligned}$$

por lo que para la función de transferencia se cumple

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \\ &= \frac{1}{LC} \left[ \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right] = \frac{1}{LC} \left[ \frac{1}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \right] \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{R}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}$$

y puesto que  $R$ ,  $L$ , y  $C$  son siempre reales positivos se puede decir que el término dentro de la raíz es siempre menor que uno, por lo que la parte real de los polos es siempre menor que cero. Puesto que, como sistema real, el circuito es causal, entonces se puede deducir que el sistema es estable al estar incluido en la ROC de  $H(s)$  el eje imaginario  $j\omega$ .

La respuesta al impulso se puede calcular a partir de  $H(s)$ , pero su forma dependerá del signo del discriminante de la ecuación cuadrática anterior, tal y como se mostró en el ejemplo 4.11.

4.15

## 4.2 Transformada unilateral de Laplace

Sistemas reales que modifican señales  $x(t)$  definidas en el tiempo son siempre causales. Estos sistemas pueden modificar señales solamente a partir del instante en que estas “ocurran”, pero es imposible reaccionar a ellas antes de que la señal aparezca, o adelantarlas en el tiempo. Estas limitantes conducen a que en ingeniería se utilice una modificación de la transformada de Laplace que ignora lo que ocurre antes del instante de tiempo  $t = 0$ . Así, se define la transformada unilateral de Laplace como

$$\mathcal{L}_u \{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = \mathcal{L} \{x(t)u(t)\}$$

es decir, la transformada unilateral de Laplace es idéntica a la transformada bilateral de la función  $x(t)u(t)$ , o en otras palabras, si  $x(t)$  es causal sus transformadas unilateral y bilateral son idénticas. Ambas transformadas difieren si  $x(t) \neq 0$  para  $t < 0$ . Puesto  $x(t)u(t)$  es una señal derecha, su ROC es siempre un semiplano derecho.

Cuando ocurren singularidades en el instante  $t = 0$ , entonces se acostumbra especificar si estas se deben considerar, en cuyo caso se integra desde cero por la izquierda, lo que se indica con  $0^-$ , o si se desea ignorar dicha singularidad se integra desde  $0^+$ . Usualmente si no hay indicación explícita respecto a la inclusión o no del cero se asume  $0^-$ . Esto es de fundamental importancia por ejemplo para el cálculo de la transformada del delta Dirac  $\delta(t)$ .

La tabla 4.3 muestra las transformadas unilaterales de algunas funciones elementales. Nótese que estas funciones equivalen a las funciones causales de la tabla 4.2 de la página 218, solo que ahora no es necesario multiplicarlas por  $u(t)$  al estar esto implícito en el índice inferior de integración de la transformada.

### 4.2.1 Propiedades

Las propiedades de la transformada unilateral de Laplace se resumen en la tabla 4.4. Algunas de ellas son idénticas a sus contrapartes en la transformada bilateral, pero otras difieren considerablemente. Todas aquellas propiedades que conducen a una región de convergencia

**Tabla 4.3:** Transformadas Unilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo $s$
1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma > -a$
$\delta(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	todo $s$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$	$s^n$	todo $s$

igual a un semiplano izquierdo del plano  $s$  no tienen equivalencia en la transformada unilateral, puesto que ésta última permite únicamente semiplanos derechos en su ROC. Es por ello que propiedades como inversión, o escalado en el tiempo con magnitudes negativas no tienen equivalente en la transformada unilateral.

### Linealidad

Sean las funciones en el dominio del tiempo  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  y sus respectivas transformadas unilaterales de Laplace

$$\begin{aligned} x_1(t) &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet X_1(s), & \text{ROC: } R_1 \\ x_2(t) &\circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet X_2(s), & \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ\!\!\!\rightarrow\!\!\!\bullet \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s), \quad \text{ROC: } R_1 \cap R_2$$

Esto se puede demostrar utilizando la propiedad de linealidad del operador de integración.

**Tabla 4.4:** Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t) = x(t)u(t)$	$X(s)$	$R$
	$x_1(t) = x_1(t)u(t)$	$X_1(s)$	$R_1$
	$x_2(t) = x_2(t)u(t)$	$X_2(s)$	$R_2$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	$R$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau} X(s)$	$R$
Desplazamiento en $s$	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} x\left(\frac{s}{a}\right)$	$R/a$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$\geq R$
Diferenciación múltiple	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} x^{(i-1)}(0^-)$	
Diferenciación en $s$	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	$R$
Integración	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$
Teorema de valor inicial	$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	
Teorema de valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	

Las operaciones aritméticas utilizadas en la ROC se refieren a operaciones aplicadas a cada uno de los elementos de la región. Así por ejemplo  $R + s_0$  denota en realidad  $\{s \mid s = r + s_0, r \in R\}$ . El símbolo “ $\geq$ ” en la ROC implica que la región es *al menos* la indicada.

### Desplazamiento temporal y en el dominio $s$

El desplazamiento temporal de una señal  $x(t)$  puede tener implicaciones en la causalidad de  $x(t)$  y por tanto debe tratarse con cuidado cuando se manejan desplazamientos con la transformada unilateral de Laplace.

Si  $x(t)$  es causal, es decir  $x(t) = x(t)u(t)$ , entonces un atraso en el tiempo de  $x(t)$  puede expresarse utilizando la propiedad

$$x(t - \tau) \circ \bullet e^{-s\tau} X(s)$$

donde  $\tau$  debe ser mayor que cero. Esto se demuestra del mismo modo que para la transformada bilateral y la transformada de Fourier.

Si  $x(t)$  no es causal, el retraso en el tiempo hace que aparezca un nuevo segmento de  $x(t)$  en el intervalo  $[0, \tau]$ , no considerado en la transformación unilateral de  $x(t)$ . En este caso se



debe agregar la transformada para ese nuevo término finito:

$$x(t - \tau) \circ \bullet e^{-s\tau} X(s) + \mathcal{L}_u \{x(t - \tau)u(\tau - t)u(t)\}$$

donde  $u(\tau - t)u(t)$  es una ventana rectangular que recorta el segmento no considerado de  $x(t)$ .

Un adelanto en el tiempo puede causar que parte de  $x(t)$  sea desplazado antes del instante  $t = 0$ , lo que no sería considerado por la transformada unilateral. Utilizando la definición:

$$\mathcal{L}_u \{x(t + \tau)\} = \int_0^\infty x(t + \tau)e^{-st} dt$$

y con  $\xi = t + \tau$ ,  $d\xi = dt$

$$\begin{aligned} &= \int_\tau^\infty x(\xi)e^{-s(\xi-\tau)} d\xi = e^{s\tau} \int_\tau^\infty x(\xi)e^{-s\xi} d\xi \\ &= e^{s\tau} \left[ \int_0^\infty x(\xi)e^{-s\xi} d\xi - \int_0^\tau x(\xi)e^{-s\xi} d\xi \right] \\ &= e^{s\tau} [X(s) - \mathcal{L}_u \{x(t)u(t)u(\tau - t)\}] \end{aligned}$$

lo que indica que debe eliminarse la componente correspondiente al segmento desplazado antes de  $t = 0$ .

Un desplazamiento en el dominio  $s$  tiene un efecto idéntico al caso de la transformada bilateral, puesto que no causa ninguna alteración en la causalidad de la señal  $x(t)$ :

$$e^{s_0 t} x(t) \circ \bullet X(s - s_0)$$

donde la región de convergencia se desplaza en  $s_0$ .

**Ejemplo 4.16** Calcule la transformada unilateral de Laplace de una función periódica  $x(t)$ .

**Solución:** Asíumase que

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es una función finita causal igual al primer periodo  $T$  de la función  $x(t)$ . Se cumple entonces que

$$x(t)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(t - nT)$$

y la transformada unilateral de Laplace es, utilizando la propiedad de desplazamiento y de

linealidad

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_u \{x(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_u \{\hat{x}(t - nT)\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \mathcal{L}_u \{\hat{x}(t)\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \hat{X}(s) = \hat{X}(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}
 \end{aligned}$$

Utilizando el resultado del problema 2.64 con  $z = e^{-sT}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-snT} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sNT}}{1 - e^{-sT}} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-sT}}
 \end{aligned}$$

para  $\text{Re}\{s\} = \sigma > 0$ , con lo que finalmente se obtiene

$$\mathcal{L}_u \{x(t)\} = \frac{\hat{X}(s)}{1 - e^{-sT}}$$

4.16

## Conjugación

Al igual que con la transformada bilateral se cumple

$$x^*(t) \circ \bullet X^*(s^*)$$

y por tanto para funciones  $x(t)$  reales se cumple que si  $p$  es un polo complejo con parte imaginaria diferente de cero, entonces  $p^*$  también lo es. Obsérvese que la relación  $X(s) = X^*(s^*)$  para funciones reales indica que si se hace un corte paralelo al eje  $j\omega$  de la superficie correspondiente a  $|X(s)|$ , entonces la función en ese corte presenta simetría par. Por otro lado, la fase tiene un comportamiento impar en los cortes paralelos al eje  $j\omega$ .

## Escalamiento en el tiempo

A diferencia de la transformada bilateral, donde el escalamiento temporal puede realizarse con cualquier valor real, positivo o negativo, en la transformada unilateral solo tiene sentido utilizar valores positivos, puesto que un escalamiento por un valor negativo implica una inversión temporal, que convierte señales derechas en señales izquierdas, las cuales no tienen representación válida si se ignora todo instante  $t < 0$ . Para todo  $a > 0$  se cumple entonces

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Si  $X(s)$  es una función racional, entonces el escalado en el tiempo produce que los polos cambien su componente real, desplazando también la región de convergencia, tal y como sucede con la transformada bilateral.

## Convolución

La diferencia fundamental de la propiedad de convolución en el caso de la transformada unilateral es la restricción de que las dos funciones involucradas en la operación deben ser causales, es decir

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \longrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

siempre y cuando  $x_1(t) = x_2(t) = 0$ , para todo  $t$  menor que cero. De no ser así, en el dominio  $s$  aparecen nuevos términos producidos por los segmentos de las señales que ocurren antes de  $t = 0$ .

## Diferenciación

Una de las propiedades más poderosas de la transformada unilateral de Laplace es la diferenciación, que permite incorporar condiciones iniciales en la solución de ecuaciones diferenciales. Si  $x(t)$  tiene como transformada unilateral  $X(s)$ , y  $x(t)$  es continua en  $x(0)$  y su derivada es de orden exponencial entonces

$$\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

Para la segunda derivada se cumple

$$\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} x(t) e^{-st} dt$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} &= e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt \\ &= - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} + s \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} \\ &= s^2 X(s) - sx(0^-) - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} \end{aligned}$$

y para ordenes superiores esto se generaliza en

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} &= s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x^{(1)}(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \\ &= s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} x^{(i-1)}(0^-)\end{aligned}$$

donde

$$x^{(n)}(0^-) = \left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=0^-}$$

## Integración

Puesto que el uso de la transformada unilateral se restringe al manejo de funciones causales, la propiedad de integración difiere al caso de la transformada bilateral, en la cual se debía considerar que  $x(t)$  podría ser diferente de cero para  $t < 0$ . En el actual caso, si  $x(t)$  es causal, entonces se cumple

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \circ \bullet X(s)U(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

donde debe notarse que la integración se realiza ahora a partir de  $0^-$ .

## Teoremas de valor inicial y valor final

Sea  $x(t)$  una función causal, es decir,  $x(t) = x(t)u(t)$ , y sin valores singulares en el origen, como el impulso o su derivada. El teorema del valor inicial establece que

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

Para demostrarlo se parte del hecho que

$$\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = sX(s) - x(0^-)$$

por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0^-)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt\end{aligned}$$

Si  $x(t)$  es discontinua en 0 entonces en la vecindad de 0 esta función puede aproximarse por  $[x(0^+) - x(0^-)]u(t) + x(0^+)$  y su derivada será  $[x(0^+) - x(0^-)]\delta(t)$ . Por ello, para el primer término se cumple

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} [x(0^+) - x(0^-)]\delta(t) dt = x(0^+) - x(0^-)$$

Por otro lado, como la transformada unilateral de  $dx(t)/dt$  existe, entonces debe ser de orden exponencial y en la ROC

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = 0$$

con lo que finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0^-)] &= x(0^+) - x(0^-) \\ \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) &= x(0^+) \end{aligned}$$

Ahora, si  $x(t)$  es continua en 0 entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{0+} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = 0$$

y puesto que  $x(0^+) = x(0^-)$  se tiene también

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0^-)] &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) &= x(0^+) \end{aligned}$$

El problema 4.29 presenta otra alternativa para demostrar este teorema.

El teorema del valor final indica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

lo que se puede demostrar también a través de la propiedad de diferenciación:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0^-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = \int_{0-}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt = x(t)|_{0-}^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^-) \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

### 4.2.2 Ecuaciones diferenciales

Los principios utilizados en la solución de ecuaciones diferenciales con la transformada bilateral de Laplace pueden ser aplicados con la versión unilateral. Puesto que el equivalente en el dominio  $s$  de las derivadas contiene términos de  $x(t)$  y sus derivadas evaluados en  $t = 0$ , esto permite ahora incorporar condiciones iniciales en la solución.

**Ejemplo 4.17** Encuentre la respuesta de un sistema LTI caracterizado por la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\alpha \frac{d}{dt}y(t) + \beta y(t) = x(t)$$

bajo las condiciones iniciales

$$y(0^-) = \eta \quad \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} = \gamma$$

a la entrada  $x(t) = \zeta u(t)$ .

**Solución:** Aplicando la transformada unilateral de Laplace a ambos lados se obtiene:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} + 2\alpha [sY(s) - y(0^-)] + \beta Y(s) = X(s)$$

y reagrupando

$$Y(s) [s^2 + 2\alpha s + \beta] = X(s) + sy(0^-) + \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} + 2\alpha y(0^-)$$

de donde se obtiene

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2\alpha s + \beta} + \frac{(s + 2\alpha)y(0^-) + \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-}}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

Aquí se observa claramente que la salida tiene dos componentes: la primera depende de la entrada  $X(s)$  y se conoce como respuesta forzada; la segunda está determinada por las condiciones iniciales y se conoce como respuesta natural del sistema. Si el sistema está en reposo, es decir, todas sus condiciones iniciales son cero, entonces solo presentará respuesta forzada ante la entrada. Por otro lado, si no se aplica ninguna entrada, entonces el sistema reaccionará dependiendo de las condiciones iniciales.

Para los valores iniciales dados y la entrada indicada

$$x(t) = \zeta u(t) \circ \bullet X(s) = \frac{\zeta}{s}$$

se obtiene

$$Y(s) = \frac{\zeta}{s(s^2 + 2\alpha s + \beta)} + \frac{(s + 2\alpha)\eta + \gamma}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

El término cuadrático fue analizado en los ejemplos 4.11 y 4.14. Aquí deben considerarse los tres casos aplicables a un sistema causal.

Si  $\Delta = 0$  entonces

$$Y(s) = \eta \frac{s^2 + 2\alpha s + \frac{\gamma}{\eta}s + \frac{\zeta}{\eta}}{s(s + \alpha)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \alpha} + \frac{A_3}{(s + \alpha)^2}$$

con

$$A_1 = \frac{\zeta}{\alpha^2} \quad A_2 = \eta - \frac{\zeta}{\alpha^2} \quad A_3 = \gamma + \alpha\eta - \frac{\zeta}{\alpha}$$

con lo que

$$y(t) = A_1 u(t) + A_2 e^{-\alpha t} u(t) + A_3 t e^{-\alpha t} u(t)$$

Si  $\Delta > 0$  entonces  $a_1$  y  $a_2$  son reales y

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - a_1} + \frac{A_3}{s - a_2}$$

por lo que

$$y(t) = A_1 u(t) + A_2 e^{a_1 t} u(t) + A_3 e^{a_2 t} u(t)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\zeta}{\beta} \\ A_2 &= \frac{a_1^2 \eta - 2a_1 \alpha \eta - a_1 \gamma + \zeta}{a_1(a_1 - a_2)} \\ A_3 &= \frac{-a_2^2 \eta + 2a_2 \alpha \eta + a_2 \gamma - \zeta}{a_2(a_1 - a_2)} \end{aligned}$$

Si  $\Delta < 0$  entonces  $a_2 = a_1^*$  y  $A_3 = A_2^*$  con lo que

$$y(t) = A_1 u(t) + 2|A_2| e^{-\alpha t} \cos\left(\sqrt{|\Delta|}t + \angle A_2\right) u(t)$$

## 4.3 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [8, 14], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

**Problema 4.1.** Encuentre la transformada de Laplace de

1.  $x(t) = \cos(at)u(t)$
2.  $x(t) = \sin(at)u(t)$
3.  $x(t) = \text{sa}(at)$
4.  $x(t) = \text{sa}(at)u(t)$

**Problema 4.2.** Encuentre las regiones de convergencia de las transformadas de Laplace de las siguientes funciones

1.  $e^{-3t}u(t)$
2.  $e^{-3t}u(-t+3)u(t+3)$
3.  $e^{-3|t|}$
4.  $e^{-3t}u(-t)$
5.  $e^{-3t}$
6.  $e^{-3|t|}u(-t)$

**Problema 4.3.** Dada la señal

$$x(t) = e^{-3t}u(t-1)$$

Encuentre su transformada de Laplace  $X(s)$  y su región de convergencia.

Si

$$g(t) = Ae^{-3t}u(-t-t_0)$$

entonces encuentre los valores de  $A$  y  $t_0$  para los cuales la expresión algebraica de  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = X(s)$ . Indique la región de convergencia de  $G(s)$

**Problema 4.4.** Dada la señal

$$x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-\beta t}u(t)$$

encuentre su transformada de Laplace y los valores de  $\beta \in \mathbb{C}$  necesarios para que la región de convergencia de  $X(s)$  sea  $\sigma > -1$ .

**Problema 4.5.** Encuentre los polos y región de convergencia de la transformada de Laplace de la función

$$x(t) = e^t \sin(2t)u(-t)$$

**Problema 4.6.** Grafique las funciones

1.  $e^{\alpha t}u(t)$  para  $\alpha > 0$
2.  $e^{\alpha t}u(t)$  para  $\alpha < 0$
3.  $e^{-\alpha t}u(t)$  para  $\alpha > 0$



4.  $e^{-\alpha t}u(t)$  para  $\alpha < 0$
5.  $e^{\alpha t}u(-t)$  para  $\alpha > 0$
6.  $e^{\alpha t}u(-t)$  para  $\alpha < 0$
7.  $e^{-\alpha t}u(-t)$  para  $\alpha > 0$
8.  $e^{-\alpha t}u(-t)$  para  $\alpha < 0$

**Problema 4.7.** Encuentre la transformada de Laplace de la función  $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$  si

$$\begin{aligned} x_1(t) \circ \bullet X_1(s) &= \frac{1}{s+1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1 \\ x_2(t) \circ \bullet X_2(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1 \end{aligned}$$

**Problema 4.8.** Encuentre la transformada de Laplace de  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{at}u(t) \\ x_2(t) &= -e^{-at}u(-t) \end{aligned}$$

si  $a \in \mathbb{R}$ .

**Problema 4.9.** Utilizando la propiedad de desplazamiento en el dominio  $s$  encuentre la transformada de Laplace de  $x(t) \cos(\omega_0 t)$  si  $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ .

**Problema 4.10.** Utilizando las demostraciones de las propiedades de la transformada de Fourier como referencia, demuestre todas las propiedades de la transformada de Laplace.

**Problema 4.11.** Demuestre que si  $\Gamma$  representa el arco circular en el contorno de Bromwich (figura 4.5), entonces, si se cumple sobre dicho contorno

$$|X(s)| < \frac{\kappa}{R^n}$$

con las constantes  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa > 0$ , y  $n \in \mathbb{N}^+$ , entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} X(s) e^{st} ds = 0$$

**Problema 4.12.** Demuestre que en la descomposición en fracciones parciales de un polo de orden  $n > 1$  los coeficientes  $A_{ik}$  están dados por

$$A_{ik} = \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{(n-k)}}{ds^{(n-k)}} [(s-a_i)^n X(s)]$$

**Problema 4.13.** Demuestre que si  $X(s)$  es una función racional propia, entonces si tiene un par de polos complejos conjugados  $a_i = a_k^*$ , entonces los coeficientes correspondientes también son complejos conjugados, es decir  $A_i = A_k^*$ .

**Problema 4.14.** Demuestre que un par de polos simples complejos conjugados con la expresión algebraica de Transformada de Laplace:

$$X(s) = \frac{A}{s - p_1} + \frac{A^*}{s - p_1^*}$$

corresponde a las expresiones en el tiempo continuo dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= 2|A|e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \angle A) \\ &= 2 \operatorname{Re}\{A\}e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) - 2 \operatorname{Im}\{A\}e^{\sigma_1 t} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \end{aligned}$$

donde  $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ , y se ha asumido que la región de convergencia es el semiplano derecho  $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$ .

**Problema 4.15.** En el ejemplo 4.11 se trataron diferentes posibilidades de transformadas inversas para un término de orden cuadrático sin ceros finitos. Indique cuál región de convergencia no ha sido considerada y determine la función en el tiempo equivalente.

**Problema 4.16.** Demuestre que en un sistema LTI la función  $x(t) = e^{s_0 t}$  es también una función propia, con  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ . (Ayuda: utilice para ello la equivalencia de la transformada de Laplace como transformada de Fourier de  $x(t)e^{-\sigma t}$ )

**Problema 4.17.** Encuentre el número y ubicación de ceros y polos, finitos e infinitos, de las siguientes expresiones algebraicas de transformadas de Laplace.

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} & 2. \frac{s+1}{s^2-1} & 3. \frac{s^3-1}{s^2+s+1} \end{array}$$

**Problema 4.18.** Se sabe que una señal  $x(t)$  es absolutamente integrable, y su transformada de Laplace tiene un polo en  $s = 2$ . Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, y las razones para ello.

1.  $x(t)$  es de duración finita
2.  $x(t)$  puede ser izquierda
3.  $x(t)$  puede ser derecha
4.  $x(t)$  puede ser bilateral

**Problema 4.19.** Cuántas señales pueden tener una transformada de Laplace con expresión algebraica

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

**Problema 4.20.** Si  $x(t)$  es una función cuya transformada de Laplace es racional con exactamente dos polos en  $s = -1$  y  $s = -3$ . Se sabe que para otra función  $g(t) = e^{2t}x(t)$  existe su transformada de Fourier  $G(j\omega)$ . Indique si  $x(t)$  es izquierda, derecha o bilateral.

**Problema 4.21.** Calcule la transformada inversa de Laplace tanto con la integral de Bromwich como por medio de descomposición en fracciones parciales de

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2 + 7s + 12}, \quad \text{ROC: } \sigma > -3$$

**Problema 4.22.** Para una señal  $x(t)$  se conoce que

1.  $x(t) = 0$  para todo  $t < 0$
2.  $x(k/10) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}^+$
3.  $x(1/20) = e^{-15}$

Indique cuáles enunciados son congruentes con la información proporcionada para  $x(t)$ , si  $X(s)$  es su transformada de Laplace y se sabe que  $X(s)$  es racional:

1.  $X(s)$  tiene un solo polo finito.
2.  $X(s)$  tiene solo un par de polos finito.
3.  $X(s)$  tiene más de dos polos finitos

**Problema 4.23.** Para una señal

$$g(t) = x(t) + \alpha x(-t)$$

con  $x(t) = \beta e^{-t}u(t)$ , se sabe que su transformada de Laplace es

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1}, \quad -1 < \sigma < 1$$

Determine entonces los valores válidos de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ .

**Problema 4.24.** Se conocen los siguientes datos de la señal  $x(t)$  con transformada de Laplace  $X(s)$ :

1.  $x(t)$  es real y par
2.  $X(s)$  tiene cuatro polos y ningún cero en el plano finito de  $s$ .
3.  $X(s)$  tiene un polo en  $s = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 1$

Encuentre entonces la expresión para  $X(s)$  y su ROC.

**Problema 4.25.** Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de dos señales derechas  $x(t)$  y  $y(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -2y(t) + \delta(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 2x(t) \end{aligned}$$

Encuentre  $X(s)$  y  $Y(s)$  junto con sus regiones de convergencia. Encuentre entonces las soluciones en el dominio del tiempo  $x(t)$  y  $y(t)$ .

**Problema 4.26.** Un sistema LTI causal tiene respuesta al impulso  $h(t)$ . Encuentre esta respuesta si el sistema de entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$  se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (1 + \alpha) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha(\alpha + 1) \frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = x(t)$$

Determine además para qué valores de  $\alpha$  el sistema es estable.

Si

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(t)$$

indique cuántos polos tiene su transformada de Laplace  $G(s)$ .

**Problema 4.27.** Analice la existencia de la transformada de Laplace bilateral de las funciones  $x(t) = 1$ ,  $x(t) = \sin(\omega t)$  y  $x(t) = \cos(\omega t)$ .

**Problema 4.28.** Sea

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{-2a(t+1)}u(t+1)$$

con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

1. Determine las transformadas bilateral y unilateral de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .
2. Calcule la transformada bilateral inversa del producto  $\mathcal{L}_b \{x_1(t)\} \mathcal{L}_b \{x_2(t)\}$  para encontrar  $g(t) = x_1(t) * x_2(t)$
3. Calcule la transformada unilateral inversa del producto  $\mathcal{L}_u \{x_1(t)\} \mathcal{L}_u \{x_2(t)\}$  y compare con el resultado obtenido para  $g(t)$ .

**Problema 4.29.** Demuestre el teorema del valor inicial

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

para  $x(t) = x(t)u(t)$  (es decir,  $x(t)$  causal).

Para ello exprese primero  $x(t)$  como serie de Taylor centrada en  $t = 0^+$ . Luego, determine la transformada de Laplace para cada término

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=0^+} \frac{t^n}{n!} u(t)$$

Demuestre entonces que

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=0^+} \frac{1}{s^{n+1}}$$

a partir de lo cual se puede demostrar el teorema.

**Problema 4.30.** Encuentre la transformada unilateral de Laplace para

1.  $x(t) = e^{-2t}u(t+1)$
2.  $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$
3.  $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$

**Problema 4.31.** Resuelva utilizando la transformada unilateral de Laplace la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 8\cos(t)$$

si  $x(t) = dx(t)/dt = 0$  en  $t = 0$ .

**Problema 4.32.** Resuelva utilizando la transformada unilateral de Laplace la ecuación diferencial

$$5\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 6$$

si  $x(t) = 1$  y  $dx(t)/dt = 1$  en  $t = 0$ .



# Capítulo 5

## Transformada $z$

La *transformada  $z$*  es a los sistemas en tiempo discreto lo que la transformada de Laplace es a los sistemas en tiempo continuo. Ambas representan herramientas para el análisis de ciertas propiedades de las señales, que en el dominio del tiempo sólo pueden ser evaluadas con mayor dificultad: la convolución es transformada otra vez en un producto, y las ecuaciones de diferencias, que son el equivalente discreto de las ecuaciones diferenciales, pueden ser solucionadas de forma más sencilla en el dominio de la frecuencia compleja que en el dominio del tiempo discreto.

Antes de presentar la transformada  $z$  propiamente, es necesario introducir algunos conceptos básicos sobre señales discretas.

### 5.1 Funciones en tiempo discreto

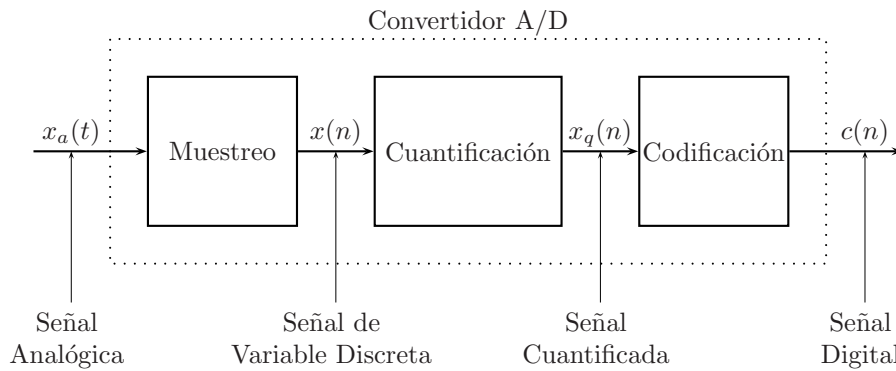
En la actualidad muchas aplicaciones de la electrónica involucran el análisis digital de datos. Los reproductores de video y sonido utilizan desde hace varias décadas tecnologías digitales de almacenamiento y reproducción, como por ejemplo en discos compactos y discos versátiles digitales (CD y DVD); la próxima generación de televisión (HDTV) codifica las señales de audio y vídeo por métodos digitales; la telefonía celular es posible gracias a los complejos algoritmos de compresión implementados también con técnicas de procesamiento digital. El aumento continuo del uso de computadoras digitales en prácticamente todos los ámbitos del quehacer humano ha sido en parte soportado por la gran variedad de “tipos de datos” que pueden ser manipulados por medios digitales.

Ya en el capítulo 1 se definió una señal digital como aquella existente únicamente en ciertos instantes en el tiempo, y que además solo puede adquirir valores dentro de un conjunto finito de valores. Puesto que el ser humano se desenvuelve en un ambiente eminentemente analógico, debe plantearse entonces la pregunta ¿qué tan factible o tan exacto es utilizar representaciones digitales para fenómenos eminentemente analógicos? El lector podrá inferir de los ejemplos mencionados, que su uso práctico es factible y ventajoso, considerando por ejemplo el incremento notable en la calidad de vídeos y bandas sonoras de uso doméstico.

### 5.1.1 Conversión analógica/digital

Conceptualmente en la conversión de una señal analógica a una representación digital intervienen tres pasos (figura 5.1):

1. *Muestreo* es la conversión de una señal de variable continua a otra de variable discreta que es el resultado de tomar “muestras” de la señal de variable continua en ciertos instantes. Si  $x_a(t)$  es la entrada al bloque de muestreo, entonces la salida puede ser tomada en instantes equidistantes  $x_a(nT)$ , donde a  $T$  se le denomina el *intervalo de muestreo*.
2. *Cuantificación* es la conversión de la señal de variable discreta y valores continuos a otra señal de variable discreta pero con valores discretos. El valor de cada muestra es aproximado entonces con un valor de un conjunto finito de posibles valores. A la diferencia entre el valor continuo y su aproximación se le denomina *error de cuantificación*.
3. *Codificación* consiste en la asignación de una representación usualmente binaria para los valores cuantificados.



**Figura 5.1:** Pasos básicos en la conversión analógica/digital.

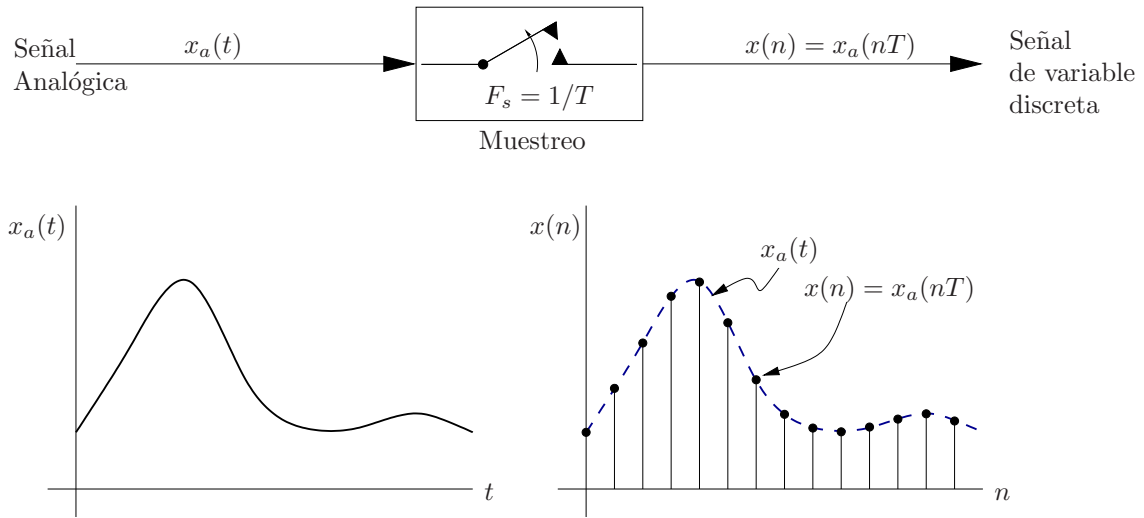
Estos pasos en la práctica se realizan en un solo bloque operacional. Desde un punto de vista de análisis matemático, usualmente se ignora el efecto del segundo paso, asumiendo que el número de valores posible es suficientemente elevado, de tal modo que el efecto de la cuantificación solo introduce un leve nivel de ruido, que puede ser manejado con otras herramientas estadísticas. El último paso es solo de relevancia para los algoritmos de procesamiento propiamente dichos. En otras palabras, el análisis matemático de señales digitales se simplifica en la práctica realizando solamente un análisis de señales en tiempo discreto, para el cual solo el primer paso de la digitalización es relevante.

Existen muchas posibilidades de seleccionar las muestras de una señal en tiempo discreto a partir de una señal analógica. Aquí se utilizará el llamado *muestreo periódico* o *uniforme* por las facilidades que este brinda al análisis matemático. En él, la relación entre la señal analógica  $x_a(t)$  y la señal de variable discreta  $x(n)$  está dada por

$$x(n) = x_a(nT) \quad n \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$$



donde la secuencia  $x(n)$  contiene entonces muestras de la señal analógica  $x_a(t)$  separadas por un intervalo  $T$  (figura 5.2).



**Figura 5.2:** Muestreo periódico de una señal analógica.

Las variables  $t$  y  $n$  de las señales de variable continua y discreta respectivamente están relacionadas a través del intervalo de muestreo  $T$

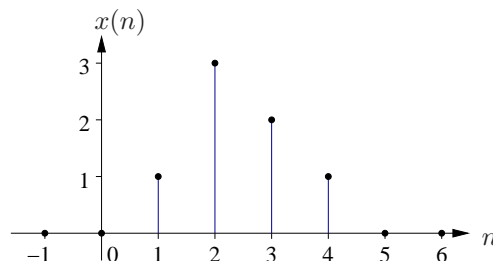
$$t = nT = n/F_s$$

donde a  $F_s$  se le denomina tasa de muestreo.

Otros tipos de muestreo más complejos utilizan tasas variables, que se ajustan de acuerdo a la velocidad de cambio de las señales. Estos son utilizados por ejemplo en algoritmos de compresión de señales.

### 5.1.2 Representaciones de funciones de variable discreta

Se ha visto que  $x(n)$  es una función definida para  $n$  entero. La figura 5.3 presenta un ejemplo de representación gráfica de una señal de este tipo.



**Figura 5.3:** Representación gráfica de una función de variable discreta  $x(n)$ .

Se debe insistir en que  $x(n)$  está definida únicamente para valores enteros  $n$ . No se debe cometer el error de asignar cero o cualquier otro valor a  $x(t)$  para números  $t$  reales no enteros

( $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ), puesto que la señal  $x(n)$  (que es diferente a  $x_a(t)$ ) está definida exclusivamente para valores enteros. A  $n$  se le denomina número de muestra y a  $x(n)$  la  $n$ -ésima muestra de la señal.

En capítulos previos ya se trabajó con una función de variable discreta: el espectro de una señal periódica obtenido por medio de los coeficientes  $c_k$  de la serie de Fourier, que fueron interpretados en su ocasión como una función de variable discreta  $c(k)$ .

Además de la representación gráfica para las señales discretas, hay otras tres representaciones usuales:

1. Funcional:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 5 - n & \text{para } 2 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases}$$

Esta es la representación más usual en el análisis matemático de funciones discretas.

2. Tabular

$n$	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$	...	0	0	1	3	2	1	0	...

En programas computacionales para manipulación y modelado digital de sistemas, como por ejemplo el MATLAB<sup>TM</sup>[13] o el Octave [4], las funciones se representan usualmente de esta manera: por un lado con los números de muestra  $n$ , y por otro con los valores de las muestras  $x(n)$ .

3. Como secuencia.

Una secuencia de duración infinita con el origen en  $n = 0$  (indicado con “ $\uparrow$ ”) se representa como

$$x(n) = \{\dots, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 3, 2, 1, 0, \dots\}$$

Si la secuencia es 0 para  $n < 0$  se puede representar como

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \dots\}$$

y si es finita

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1\} = \{0, 1, 3, 2, 1\}$$

donde la flecha “ $\uparrow$ ” se omite si la primera muestra en la secuencia corresponde a la muestra en 0.

Esta notación es muy útil para interpretación rápida de los efectos que tienen ciertas operaciones básicas (como desplazamiento, inversión, escalado, etc.) sobre señales de variable discreta.

Para el análisis matemático de señales y sistemas en tiempo discreto es útil representar la función muestreada  $x_a(nT)$  por medio de impulsos de Dirac con áreas modificadas de acuerdo al valor de cada muestra. Así, defínase la función muestreada  $\hat{x}_a(t)$  como

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (5.1)$$

Nótese que esta representación ya fue utilizada para representar con la transformada de Fourier el espectro de una señal periódica, que es bien sabido tiene un espectro discreto determinado por los coeficientes  $c_k$  de la serie de Fourier. Esta última representación es fundamental para la obtención de la transformada  $z$ .

### 5.1.3 Señales elementales de variable discreta

Ciertas señales aparecen frecuentemente en el análisis de sistemas y señales discretas.

#### Impulso unitario

El impulso unitario  $\delta(n)$  está definido como (figura 5.4a):

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

#### Escalón unitario

El escalón unitario  $u(n)$  se define como (figura 5.4b):

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^n \delta(i)$$

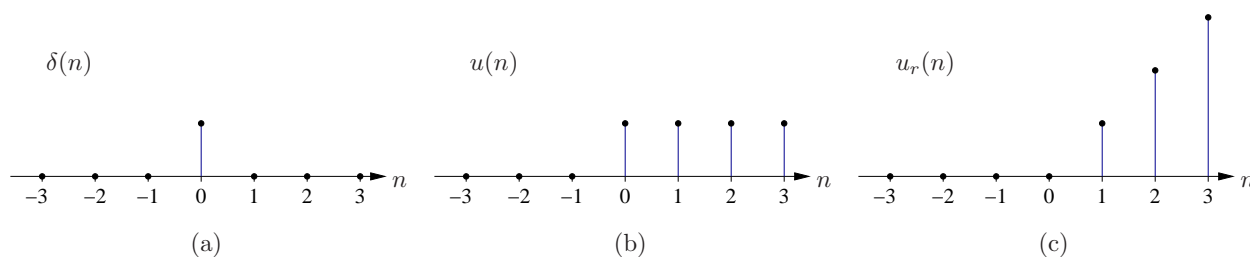
#### Rampa unitaria

La rampa unitaria se obtiene de

$$u_r(n) = \sum_{i=-\infty}^n u(i-1)$$

lo que resulta en (figura 5.4c)

$$u_r(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ n & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$



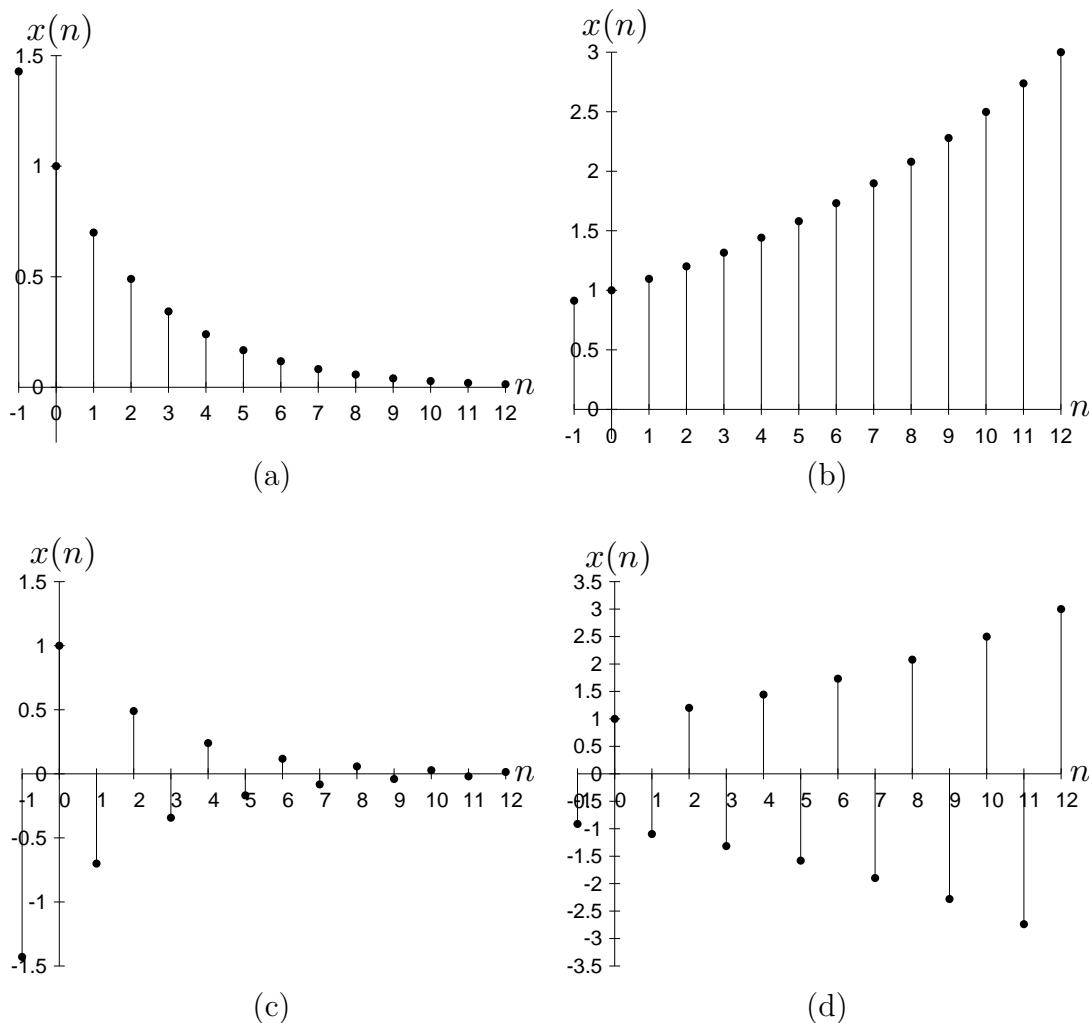
**Figura 5.4:** Tres funciones elementales (a) Impulso unitario. (b) Escalón unitario. (c) Rampa unitaria

## Señal exponencial

La señal exponencial se define como

$$x(n) = a^n$$

y su comportamiento depende de la constante  $a$ . Para valores reales y complejos de  $a$ , el comportamiento es estable si  $|a| < 1$  o inestable si  $|a| > 1$  (figura 5.5).

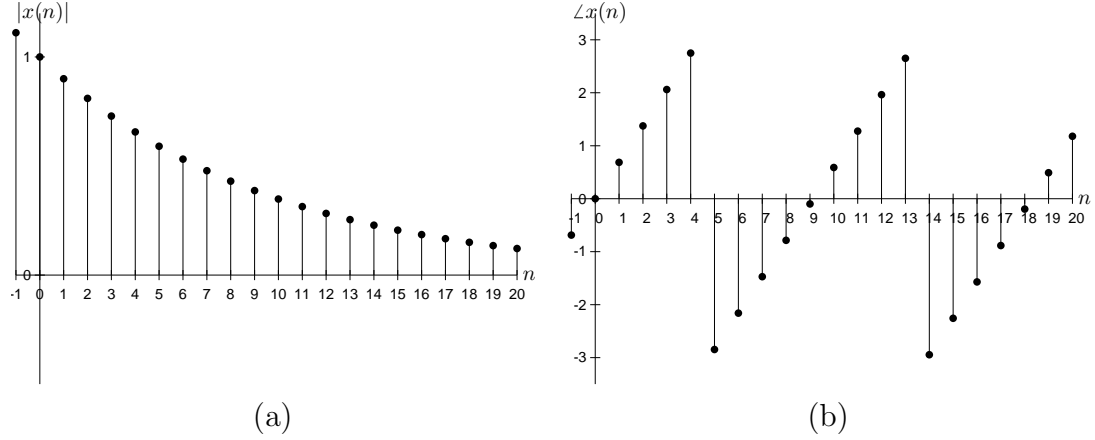


**Figura 5.5:** Funciones exponenciales para valores de  $a$  reales. (a)  $0 < a < 1$  (b)  $a > 1$  (c)  $-1 < a < 0$  (d)  $a < -1$ .

Si  $a$  es complejo entonces puede expresarse como

$$a = re^{j\psi} \Rightarrow x(n) = r^n e^{j\psi n}$$

es decir, un fasor de magnitud  $r^n$  con fase  $\psi n$  (figura 5.6).

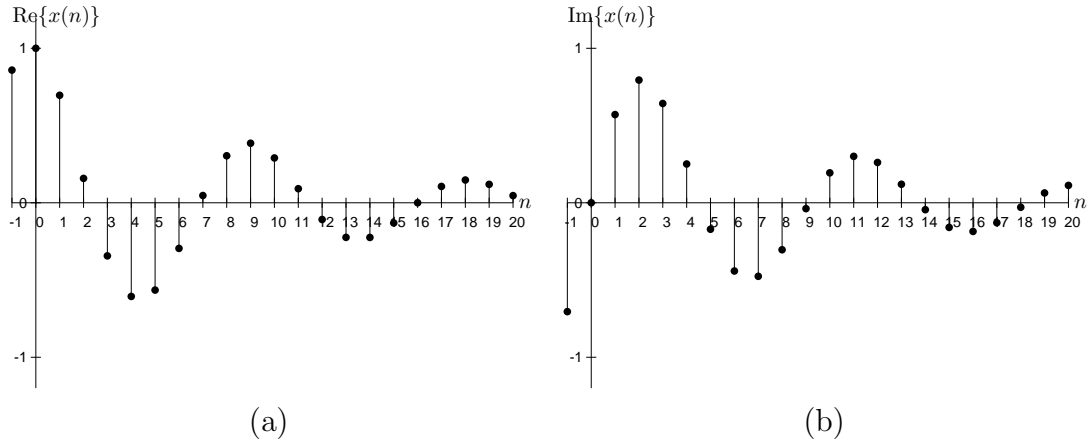


**Figura 5.6:** Magnitud y fase de la función exponencial compleja con  $a = re^{j\psi}$ ,  $r < 1$  y  $0 < \psi < \pi$ .  
(a) Magnitud. (b) Fase

Utilizando la identidad de Euler se obtiene

$$x(n) = r^n \cos(\psi n) + jr^n \sin(\psi n)$$

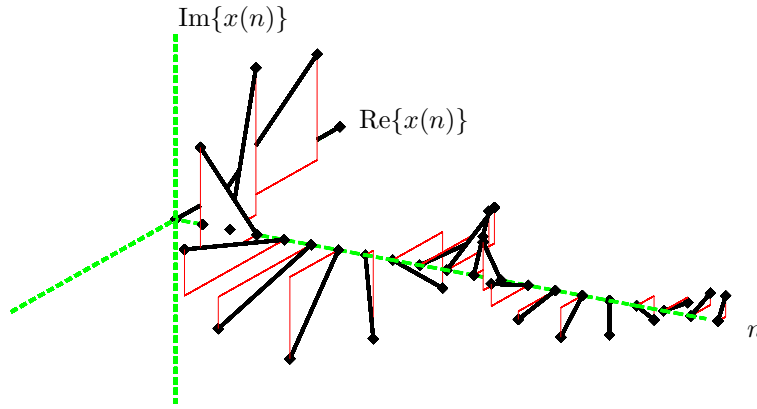
cuyas partes real e imaginaria se muestran en la figura 5.7.



**Figura 5.7:** Partes real e imaginaria de la función exponencial con  $a$  compleja. (a) Parte real.  
(b) Parte imaginaria

Nótese que si  $r = 1$  la señal es amplitud constante.

Otra representación de una señal exponencial compleja se presenta en la figura 5.8, donde el valor de cada muestra se grafica sobre un plano complejo perpendicular al eje  $n$ , generándose así un patrón fasorial en el tiempo discreto, en el que se aprecian tanto las componentes real e imaginaria, como la magnitud y fase de cada muestra.



**Figura 5.8:** Representación de muestras complejas en planos complejos, situados en cada muestra  $n$ .

## 5.2 Transformada $z$ bilateral

### 5.2.1 Transformada $z$ bilateral directa

Tómese ahora la representación  $\hat{x}_a(t)$  de una señal muestreada, tal como se definió en (5.1). Su transformada de Laplace es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\hat{x}_a(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-snT}\end{aligned}$$

Si se define  $z = e^{sT}$  y considerando que  $x(n) = x_a(nT)$  se obtiene

$$\mathcal{L}\{x(n)\} \stackrel{!}{=} \mathcal{L}\{\hat{x}_a(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = X(z)$$

que es la definición de la transformada  $z$  *bilateral* para la secuencia discreta  $x(n)$ , que considera tanto valores positivos como negativos de  $n$ .

La relación entre la secuencia discreta  $x(n)$  y su representación  $X(z)$  en el dominio  $z$  se denota como:

$$x(n) \circ \bullet X(z) \quad \text{ó} \quad x(n) \circ \overset{z}{\bullet} X(z)$$

Como la transformada  $z$  es una serie infinita de potencias, ésta existe solo para los valores de  $z$  en que la serie converge. La región de convergencia (ROC, *region of convergence*) de  $X(z)$  es entonces el conjunto de valores de  $z$  para los que  $X(z)$  es finita.



Si se expresa  $z$  en su forma polar  $z = re^{j\varphi}$ , con  $r = |z|$  y  $\varphi = \angle z$ , entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\varphi n}$$

Dentro de la ROC de  $X(z)$ ,  $|X(z)| < \infty$ , por lo que:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\varphi n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \quad (5.2)$$

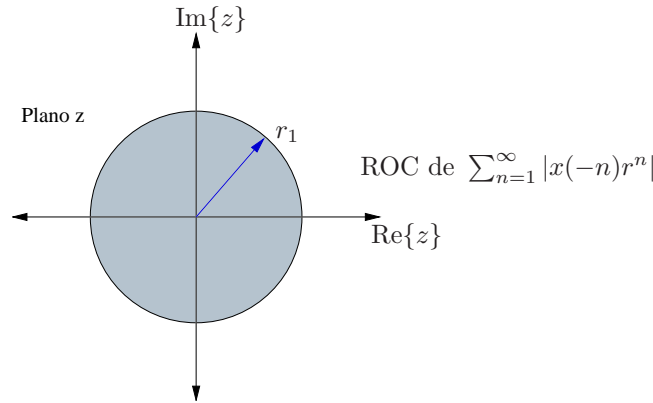
es decir, si  $x(n)r^{-n}$  es absolutamente sumable entonces  $|X(z)|$  es finita.

Para encontrar la ROC se debe entonces encontrar el rango de valores de  $r$  para los que la secuencia  $x(n)r^{-n}$  es absolutamente sumable.

Ahora bien, la ecuación (5.2) puede reescribirse como:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

y ambas sumatorias deben converger si  $|X(z)|$  ha de ser finito. Para la primera suma deben existir valores de  $r$  suficientemente pequeños para que  $x(-n)r^n$  sea absolutamente sumable ( $r < r_1$ ) (figura 5.9).



**Figura 5.9:** Representación gráfica de la ROC para  $r$  suficientemente pequeños.

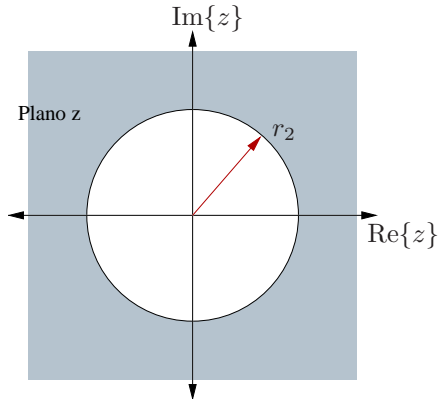
Para que la segunda suma converja, se necesitan valores de  $r$  suficientemente grandes para que  $x(n)r^{-n}$  sea absolutamente sumable. Por ello, la ROC serán los puntos fuera de una circunferencia  $r > r_2$  (figura 5.10).

Como ambas sumas deben converger la ROC de  $X(z)$  es la región anular del plano  $z$ ,  $r_2 < r < r_1$  (figura 5.11), lo que concuerda con el análisis anterior basado en el mapeo conforme  $z = e^{sT}$ .

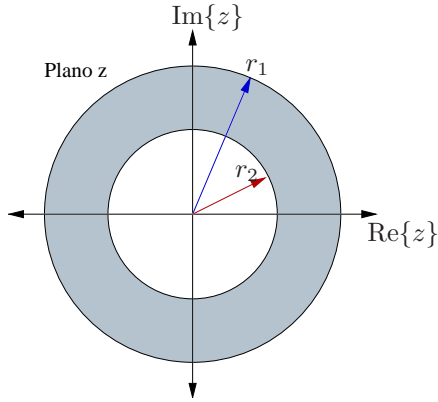
**Ejemplo 5.3** Determine la transformada  $z$  de:

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$





**Figura 5.10:** Representación gráfica de la ROC para  $r$  suficientemente grandes.



**Figura 5.11:** Representación gráfica completa de la ROC.

**Solución:** Se tiene que:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

que converge si  $|\alpha z^{-1}| < 1$  ( $|z| > |\alpha|$ ) a  $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ .

Nótese que si  $\alpha = 1$ , se tiene la transformada  $z$  del escalón unitario:

$$x(n) = u(n) \circ \bullet X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{ROC: } z > 1$$

5.3

**Ejemplo 5.4** Determine la transformada  $z$  de:

$$x(n) = -\alpha^n u(-n - 1)$$

**Solución:**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m = - \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^m$$

que converge sólo si  $|\alpha^{-1}z| < 1$ , es decir, si  $|z| < |\alpha|$ , a:

$$X(z) = -\left(\frac{1}{1 - \alpha^{-1}z} - 1\right) = -\frac{\alpha^{-1}z}{1 - \alpha^{-1}z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Nótese que esta expresión es idéntica a la obtenida para  $x(n) = \alpha^n u(n)$ . Se concluye que la forma compacta de la transformada  $z$  no especifica una única señal en el dominio del tiempo. Esto sólo ocurre indicando además la ROC. El término *transformada  $z$*  indica entonces no sólo la expresión  $X(z)$ , sino también su ROC.

Lo anterior cumple con que la ROC de una señal anticausal es el interior de una circunferencia, mientras que para señales causales es el exterior de una circunferencia. 5.4

**Ejemplo 5.5** Determine la transformada  $z$  de:

$$x(n) = \alpha^n u(n) + b^n u(-n - 1)$$

**Solución:**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n$$

La primera suma converge si  $|\alpha z^{-1}| < 1$  ( $|z| > |\alpha|$ ) y la segunda si  $|b^{-1}z| < 1$  ( $|z| < |b|$ ). Esto implica que la transformada  $z$  existe si y sólo si  $|b| > |\alpha|$  y la ROC es un anillo en el plano  $z$ . 5.5

La figura 5.12 muestra un resumen de lo discutido hasta el momento en cuanto a la relación de la causalidad de una señal con respecto a la ROC de su transformada  $z$ . Nótese la relación con las ROC de la transformada de Laplace.

La tabla 5.1 resume algunas transformaciones importantes. Se aprecia que todas las transformaciones en esta tabla son funciones racionales.

## 5.2.2 Propiedades de la transformada $z$ bilateral

### Linealidad

Si  $x_1(n) \circ \bullet X_1(z)$  y  $x_2(n) \circ \bullet X_2(z)$ , entonces

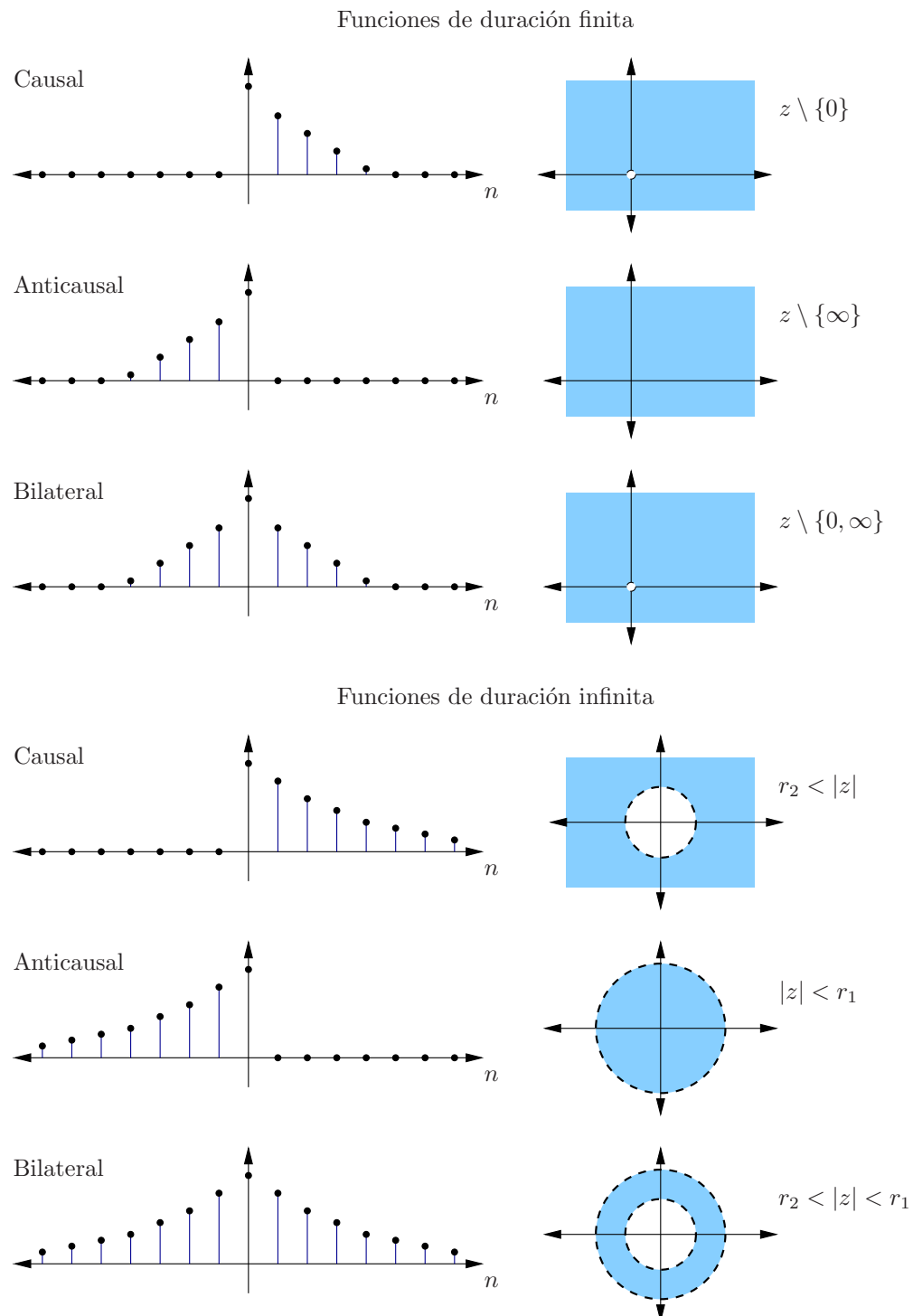
$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \circ \bullet X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z).$$

**Ejemplo 5.6** Determine la transformada  $z$  de  $x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$ .

**Solución:** Si  $x_1(n) = 2^n u(n)$  y  $x_2(n) = 3^n u(n)$ , entonces  $x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n)$

En el ejemplo (5.3) se derivó:

$$\alpha^n u(n) \circ \bullet \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$



**Figura 5.12:** Familia de Señales y sus ROC[16].

**Tabla 5.1:** Transformada  $z$  bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada $z$ , $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano $z$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-(a^n)u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$-n(a^n)u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\text{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1} \text{sen } \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z  > a$
$a^n \text{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1} \text{sen } \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z  > a$

con lo que se obtiene:

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 3$$

y la transformada de  $x(n)$  es:

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{4}{1 - 3z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 3$$

Nótese que la ROC final debe ser al menos la intersección de las dos ROC individuales.

5.6

### Desplazamiento en el tiempo

Si  $x(n) \circ \bullet X(z)$ , entonces  $x(n - k) \circ \bullet z^{-k} X(z)$ .

La ROC de  $z^{-k} X(z)$  es la misma de  $X(z)$  excepto  $z = 0$  si  $k > 0$  y  $z = \infty$  si  $k < 0$ .

Esto se demuestra fácilmente con un cambio de variable del índice de la suma:

$$\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)z^{-n}$$

y con  $m = n - k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)} \\ &= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m} \\ &= z^{-k}X(z) \end{aligned}$$

Ya que el coeficiente de  $z^{-n}$  es el valor de la muestra en el instante  $n$ , se aprecia que retrasar una señal en  $k$  muestras ( $k > 0$ ) es equivalente a multiplicar todos los términos de la transformada  $z$  por  $z^{-k}$ .

### Escalado en el dominio $z$

Si  $x(n) \circ \bullet X(z)$ , ROC:  $r_1 < |z| < r_2$ , entonces:

$$a^n x(n) \circ \bullet X(a^{-1}z), \quad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

para todo  $a \in \mathbb{C}$ .

Demostración:

$$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

dado que la ROC de  $X(z)$  es  $r_1 < |z| < r_2$ , entonces para  $X(a^{-1}z)$  se cumple que  $r_1 < |a^{-1}z| < r_2 \Rightarrow |a|r_1 < |z| < |a|r_2$ .

Con  $a = r_0 e^{j\omega_0}$ ,  $z = r e^{j\omega}$  y  $\zeta = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0}r\right) e^{j(\omega-\omega_0)}$ , se observa con  $\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z)$  y  $\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = X(a^{-1}z) = X(\zeta)$ , que si  $r_0 > 1$  implica una expansión del plano  $z$ , o si  $r_0 < 1$  una contracción del plano  $z$ , en combinación con una rotación (si  $\omega_0 \neq 2k\pi$ ). Nótese que  $\zeta = a^{-1}z$  representa un mapeo lineal del plano  $z$  al plano  $\zeta$ .

**Ejemplo 5.7** Determine la transformada  $z$  de la señal  $a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$

**Solución:**

Con la identidad de Euler se obtiene primero que:

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

y con  $\mathcal{Z}\{\alpha^n u(n)\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$  se obtiene con  $\alpha = e^{\pm j\omega_0}$  y la linealidad de la transformación:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\cos \omega_0 n u(n)\} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 - z^{-1}(e^{-j\omega_0} + e^{j\omega_0})}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} - e^{j\omega_0} z^{-1} + z^{-2}} \right\}, \quad (e^{-j\omega_0} + e^{j\omega_0}) = 2 \cos \omega_0 \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}; \quad \text{ROC: } |z| > |e^{j\omega_0}| = 1\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{Z}\{a^n \cos(\omega_0 n) u(n)\} = \frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

5.7

## Conjugación

Si  $x(n)$  tiene como transformada  $z$  a  $X(z)$  con ROC  $R$  entonces

$$x^*(n) \circ \bullet X^*(z^*), \quad \text{ROC: } R$$

Esto se demuestra utilizando las propiedades de conjugación:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x^*(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n)(z^*)^{-n})^* \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right)^* \\ &= X^*(z^*)\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que si  $x(n)$  es real, entonces  $X(z) = X^*(z^*)$ , lo que implica que si  $X(z)$  tiene un polo o cero en  $z = z_0$ , también lo tendrá en  $z = z_0^*$ . En otras palabras, los polos y ceros aparecen como pares complejos conjugados en la transformada  $z$  de secuencias reales  $x(n)$ . Obsérvese que la relación  $X(z) = X^*(z^*)$  para funciones reales indica que si se hace un corte paralelo al eje  $\text{Im}\{z\}$  de la superficie correspondiente a  $|X(z)|$ , entonces la función en ese corte presenta simetría par. Por otro lado, la fase tiene un comportamiento impar en los cortes paralelos al eje  $\text{Im}\{z\}$ .

## Inversión temporal

$$\begin{aligned}x(n) \circ \bullet X(z), \quad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2 \\ x(-n) \circ \bullet X(z^{-1}), \quad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}\end{aligned}$$

Demostración:

$$\mathcal{Z}\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

La ROC de  $X(z^{-1})$  sería  $r_1 < |z^{-1}| < r_2 \Rightarrow \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

**Ejemplo 5.8** Determine la transformada  $z$  de  $u(-n)$ .

**Solución:** Puesto que

$$\mathcal{Z}\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ ROC: } |z| > 1$$

entonces

$$\mathcal{Z}\{u(-n)\} = \frac{1}{1-z}, \text{ ROC: } |z| < 1$$

5.8

### Diferenciación en el dominio $z$

Si  $x(n) \circ \bullet X(z)$ , entonces  $nx(n) \circ \bullet -z \frac{dX(z)}{dz}$ .

Para demostrar esta propiedad se derivan ambos lados de la definición con respecto a  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} \\ &= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx(n))z^{-n} = -z^{-1} \mathcal{Z}\{nx(n)\} \\ &\Rightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} = \mathcal{Z}\{nx(n)\} \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.9** Determine la transformada  $z$  de  $x(n) = na^n u(n)$

**Solución:** Con  $x_1(n) = a^n u(n)$ , entonces  $x(n) = nx_1(n)$ , y puesto que  $X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ , ROC  $|z| > |a|$ , se obtiene:

$$na^n u(n) \circ \bullet X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = -z \left[ \frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} \right] = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Con  $a = 1$  se obtiene la transformación de la rampa unidad:

$$nu(n) \circ \bullet \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

5.9

## Convolución de dos secuencias

Si

$$\begin{aligned} x_1(n) &\circ\!\!\!\bullet X_1(z), & \text{ROC: } R_1 \\ x_2(n) &\circ\!\!\!\bullet X_2(z), & \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \circ\!\!\!\bullet X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

la ROC es al menos  $R_1 \cap R_2$ .

Demostración:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = x_1(n) * x_2(n)$$

la transformada  $z$  de  $x(n)$  es:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right) z^{-n}$$

Intercambiando las sumatorias y aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo se obtiene que:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} \right] \\ &= X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_2(z)X_1(z) \end{aligned}$$

## Teorema del valor inicial

Si  $x(n)$  es causal ( $x(n) = 0, \forall n < 0$ ), entonces:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Puesto que  $x(n)$  es causal:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots$$

Si  $z \rightarrow \infty$  todos los términos  $z^{-1}, z^{-2}$ , etc. tienden a cero y por tanto:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Todas las propiedades descritas anteriormente se resumen en la tabla 5.2.



**Tabla 5.2:** Propiedades de la transformada  $z$  bilateral.

Propiedad	Dominio $n$	Dominio $z$	ROC
Notación	$x(n)$	$X(z)$	$R = \{z \mid r_2 <  z  < r_1\}$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	$R_1$
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	$R_2$
Linealidad	$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en $n$	$x(n - k)$	$z^{-k} X(z)$	$R \setminus \{0\}$ si $k > 0$ y $R \setminus \{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en $z$	$a^n x(n)$	$X(a^{-1} z)$	$ a  r_2 <  z  <  a  r_1$
Reflexión en $n$	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} <  z  < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R$
Parte real	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye $R$
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2} [X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye $R$
Derivación en $z$	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 <  z  < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	

### 5.2.3 Transformada $z$ inversa

#### Definición

El procedimiento de encontrar la señal en el dominio del tiempo correspondiente a la expresión algebraica en el dominio  $z$  para una determinada región de convergencia se denomina *transformada  $z$  inversa*. Utilizando el teorema integral de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy se demuestra que se cumple

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k} dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \quad (5.3)$$

para un contorno de integración  $C$  que rodea al origen.

A partir de la definición de la transformada  $z$  para una señal de variable discreta  $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

se obtiene multiplicando ambos lados por  $z^{n-1}$ , e integrando en un contorno cerrado que contiene al origen, y que está dentro de la ROC:

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k+n-1} dz$$

Como la serie converge dentro de  $C$ , la integral y la sumatoria pueden ser intercambiadas:

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C z^{-k+n-1} dz$$

que con el resultado en (5.3) sólo es diferente de cero para  $k = n$ , es decir:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (5.4)$$

**Ejemplo 5.10** Encuentre la transformada  $z$  inversa de la expresión

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

si se sabe que la señal correspondiente es causal.

**Solución:** Aplicando (5.4) se obtiene

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{z - \alpha} z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - \alpha} dz \end{aligned}$$

Como  $C$  debe estar dentro de la ROC, y la señal es causal, entonces se escoje una circunferencia de radio mayor que  $|\alpha|$ . Para  $n > 0$  se tiene un cero de orden  $n$  en  $z = 0$ , o ningún cero cuando  $n = 0$ , y en ambos casos hay un polo en  $z = \alpha$ . En estos casos se puede aplicar la fórmula integral de Cauchy para obtener directamente

$$x(n) = z^n|_{z=\alpha} = \alpha^n$$

Para  $n < 0$  la función  $f(z)$  tiene un polo de orden  $n$  en  $z = 0$ , que también está dentro de  $C$ , por lo que dos polos  $z_1 = 0$  y  $z_2 = a$  contribuyen al valor de la integral.

Con  $n = -1$  y la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z(z-a)} dz &= \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z} \Big|_{z=a} \\ &= -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 0 \end{aligned}$$

Con  $n = -2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2(z-a)} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-\frac{1}{a}}{z^2} + \frac{-\frac{1}{a^2}}{z} + \frac{\frac{1}{a^2}}{z-a} dz \\ &= 0 - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = 0 \end{aligned}$$

Esto se puede repetir para todo  $n < -2$  resultando en  $x(n) = 0$ . Por tanto, resumiendo ambos casos en una ecuación se obtiene:

$$x(n) = a^n u(n)$$

5.10

### La transformada $z$ inversa mediante expansión en serie de potencias

La idea de este método es expandir  $X(z)$  en una serie de potencias de la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

que converge en la región de convergencia asociada a  $X(z)$ . Este método ya se introdujo en la sección 2.4.1 sobre series de potencias, donde se observa que ahora se utiliza el caso particular de series de Laurent centradas en  $z = 0$ .

**Ejemplo 5.11** Calcule la secuencia en tiempo discreto  $x(n)$  si su transformada  $z$  tiene como expresión algebraica

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

para las regiones de convergencia

1. ROC:  $|z| > 1$
2. ROC:  $|z| < 1/2$

**Solución:** Debido a que la ROC  $|z| > 1$  es el exterior de un círculo y  $X(z)$  es racional, entonces  $x(n)$  es una señal causal. Para calcularla se ordenan el numerador y el denominador del mayor coeficiente al menor y se divide:

$$\begin{array}{r|l}
 1 + \frac{1}{2}z^{-1} & 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \\
 -(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) & \hline
 2z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & 1 + 2z^{-1} + \frac{5}{2}z^{-2} + \frac{11}{4}z^{-3} + \frac{23}{8}z^{-4} + \dots \\
 -(2z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}) & \hline
 \frac{5}{2}z^{-2} - z^{-3} & \\
 -(\frac{5}{2}z^{-2} - \frac{15}{4}z^{-3} + \frac{5}{4}z^{-4}) & \hline
 \frac{11}{4}z^{-3} - \frac{5}{4}z^{-4} & \\
 -(\frac{11}{4}z^{-3} - \frac{33}{8}z^{-4} + \frac{11}{8}z^{-5}) & \hline
 \frac{23}{8}z^{-4} - \frac{11}{8}z^{-5} & 
 \end{array}$$

Con lo que se deduce  $x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}, \dots \right\}$ .

La ROC  $|z| < 1/2$  corresponde a una señal anticausal. Para este caso se ordenan el numerador y el denominador de menor a mayor y se divide:

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{1}{2}z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\
 -(\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{2} + z) & \hline
 \frac{5}{2} - z & z + 5z^2 + 13z^3 + 29z^4 + 61z^5 + \dots \\
 -(\frac{5}{2} - \frac{15}{2}z + 5z^2) & \hline
 \frac{13}{2}z - 5z^2 & \\
 -(\frac{13}{2}z - \frac{39}{2}z^2 + 13z^3) & \hline
 \frac{29}{2}z^2 - 13z^3 & \\
 -(\frac{29}{2}z^2 - \frac{87}{2}z^3 + 29z^4) & \hline
 \frac{61}{2}z^3 - 29z^4 & 
 \end{array}$$

y finalmente  $x(n) = \{\dots, 61, 29, 13, 5, 1, \underset{\uparrow}{0}\}$

5.11

Este método no provee la forma cerrada de  $x(n)$  y resulta tedioso si se desea determinar  $x(n)$  para  $n$  grande. Es además inestable numéricamente si se automatiza para ser calculado en computador.

**Ejemplo 5.12** Determine la transformada  $z$  inversa de:

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad \text{ROC: } |z| > |a|.$$

**Solución:**

Puesto que la serie de Taylor para  $\ln(1+x)$ ,  $|x| < 1$  es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

entonces

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n},$$

de donde se obtiene directamente  $x(n) = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u(n-1)$

5.12

### La transformada $z$ inversa mediante expansión en fracciones parciales

Este método es análogo al ya revisado para la transformada inversa de Laplace en la sección 4.1.3. En él se expresa  $X(z)$  como una combinación lineal:

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots + \alpha_k X_k(z)$$

donde  $\{X_i(z)\}$  son las transformaciones de las señales  $\{x_i(n)\}$  disponibles en tablas. Por linealidad se tendrá que:

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots + \alpha_k x_k(n)$$

Si  $X(z)$  es una función racional, entonces:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Nótese que si  $a_0 \neq 1$ , lo anterior se puede obtener dividiendo numerador y denominador por  $a_0$ .

Como se indicó en el capítulo anterior, esta función se denomina *propia* si  $a_N \neq 0$  y  $M < N$ , es decir, si el número de ceros finitos es menor que el número de polos finitos. Una *función impropia* ( $M \geq N$ ) siempre se puede representar como la suma de un polinomio y una función racional propia.

**Ejemplo 5.13** Exprese la función impropia:

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

en términos de un polinomio y una función propia.

**Solución:**

Para hacer esto, se debe hacer la división de tal forma que los términos  $z^{-2}$  y  $z^{-3}$  sean eliminados, y para esto deben ordenarse los divisores de la misma manera que para determinar la expansión en serie de potencias de señales anticausales.

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{11}{6}z^{-2} + 3z^{-1} + 1 & \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \\ -(\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{5}{3}z^{-2} + 2z^{-1}) & 2z^{-1} + 1 \\ \hline \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-1} + 1 & \\ -(\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1) & \\ \hline \frac{1}{6}z^{-1} & \end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

5.13

En general, cualquier función racional impropia ( $M \geq N$ ) se puede expresar como:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_{M-N}z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)}$$

Como la transformada  $z$  inversa de un polinomio en términos de  $z^{-1}$  se puede calcular fácilmente al corresponder éste directamente con las primeras muestras causales de la señal, se prestará ahora especial atención a la transformada de funciones racionales propias. Sea  $X(z)$  una función racional propia:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}$$

con  $a_N \neq 0$  y  $M < N$ . Multiplicando por  $z^N$  tanto el numerador como denominador:

$$X(z) = \frac{b_0z^N + b_1z^{N-1} + \dots + b_Mz^{N-M}}{z^N + a_1z^{N-1} + \dots + a_N}$$

puesto que  $N > M$  entonces

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0z^{N-1} + b_1z^{N-2} + \dots + b_Mz^{N-M-1}}{z^N + a_1z^{N-1} + \dots + a_N}$$

que es siempre propia. Para descomponer esta función como una suma de fracciones simples, se factoriza el denominador en factores que contengan los polos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  de  $X(z)$ .

#### 1. Caso: Polos diferentes de primer orden.

Si todos los polos son diferentes y de primer orden, entonces se busca la expansión:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N}$$

donde

$$A_k = (z - p_k) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_k}$$

**Ejemplo 5.14** Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la componente propia en el ejemplo 5.13, y con ella la transformada inversa  $x(n)$  de la función  $X(z)$  en dicho ejemplo, si se sabe que ésta es causal.

**Solución:** Multiplicando por  $\frac{z^2}{z^2}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} &= \frac{\frac{1}{6}z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} \\ &= \frac{\frac{1}{6}z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{A_1}{\left(z + \frac{1}{3}\right)} + \frac{A_2}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

Nótese que no fue aquí necesario dividir por  $z$  pues la función racional resultante fue propia desde un principio. Multiplicando ambos lados por  $(z + 1/3)$  y haciendo  $z \rightarrow -1/3$  se obtiene  $A_1 = -1/3$ . Por otro lado, multiplicando ambos lados por  $(z + 1/2)$  y haciendo  $z \rightarrow -1/2$  se obtiene  $A_2 = 1/2$ .

Se cumple entonces:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{(z + \frac{1}{3})} + \frac{\frac{1}{2}}{(z + \frac{1}{2})} = \frac{-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

•  
|  
○

$$-\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \left[ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n-1)$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo.

Falta únicamente transformar los términos  $1 + 2z^{-1}$  que corresponden en el tiempo discreto a  $\delta(n) + 2\delta(n-1)$ . De este modo se cumple

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[ \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n-1)$$

5.14

**Ejemplo 5.15** Determine la expansión en fracciones parciales de

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

.

**Solución:** Multiplicando por  $\frac{z^2}{z^2}$  se obtiene:

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z + 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

con los polos  $p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\pm j45^\circ}$  se puede realizar la siguiente descomposición:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} \Rightarrow X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

$$A_1 = (z - p_1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_1} = \frac{z + 1}{z - p_2} \Big|_{z=p_1} = \frac{p_1 + 1}{p_1 - p_2} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j71,6^\circ}$$

$$A_2 = (z - p_2) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_2} = \frac{z + 1}{z - p_1} \Big|_{z=p_2} = \frac{p_2 + 1}{p_2 - p_1} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j71,6^\circ}$$

Recuérdese que para el caso en que los coeficientes de los polinomios en el numerador y denominador son reales, entonces si  $p_1 = p_2^*$  se cumple  $A_1 = A_2^*$ .

Asumiendo que se trata de una señal causal, se obtiene de la tabla 5.1

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} &= x(n) = [A_1 p_1^n + A_1^* p_1^{*n}] u(n) \\ &= |A_1| |p_1|^n [e^{j(\angle A_1 + n\angle p_1)} + e^{-j(\angle A_1 + n\angle p_1)}] u(n) \\ &= 2|A_1| |p_1|^n \cos(\angle A_1 + n\angle p_1) \\ &= \sqrt{\frac{10}{2^n}} \cos(n45^\circ - 71,6^\circ)\end{aligned}$$

5.15

## 2. Caso: polos de orden múltiple.

Si hay un polo de orden  $l$ ,  $(z - p_k)^l$ , entonces la expansión en fracciones parciales tendrá términos:

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l}$$

donde los coeficientes  $\{A_{ik}\}$  pueden obtenerse por medio de derivaciones sucesivas

**Ejemplo 5.16** Determine la expansión en fracciones parciales de:

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2}$$

y encuentre la señal causal equivalente  $x(n)$ .

**Solución:** Multiplicando numerador y denominador por  $z^3$  resulta en:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z + 1)(z - 1)^2} = \frac{A_1}{(z + 1)} + \frac{A_2}{(z - 1)} + \frac{A_3}{(z - 1)^2}$$

$A_1$  y  $A_3$  se encuentran fácilmente multiplicando por los denominadores parciales y haciendo  $z = p_i$ :

$$\begin{aligned}A_1 &= (z + 1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{z^2}{(z - 1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{4} \\ A_3 &= (z - 1)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{z^2}{(1 + z)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

para calcular  $A_2$  se procede:

$$(z - 1)^2 \frac{X(z)}{z} = A_1 \frac{(z - 1)^2}{z + 1} + A_2(z - 1) + A_3$$

y se deriva con respecto a  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z - 1)^2 X(z)}{z} \right\} \Big|_{z=1} &= A_1 \frac{d}{dz} \frac{(z - 1)^2}{z + 1} + A_2 \frac{d}{dz} (z - 1) \\ &= A_1 \left[ \frac{2(z - 1)(z + 1) + (z - 1)^2}{(z + 1)^2} \right]_{z=1} + A_2 \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2}{z + 1} \right) \Big|_{z=1} &= \frac{2z(z + 1) - z^2}{(z + 1)^2} \Big|_{z=1} = \frac{3}{4} = A_2\end{aligned}$$



Por lo tanto, se cumple

$$X(z) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{1+z^{-1}} \right] + \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{1-z^{-1}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right]$$

y bajo la suposición de que la señal correspondiente es causal, se obtiene con las propiedades de linealidad y la tabla 5.1:

$$x(n) = \left[ \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n \right] u(n)$$

5.16

Para obtener la inversión de  $X(z)$  se utiliza entonces la linealidad junto con el hecho ya demostrado de que:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{1-p_k z^{-1}} \right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n), & \text{si ROC: } |z| > |p_k| \text{ (señales causales)} \\ -(p_k)^n u(-n-1), & \text{si ROC: } |z| < |p_k| \text{ (señales anticausales)} \end{cases}$$

Nótese que si la señal es causal, la ROC es  $|z| > p_{max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \dots, |p_N|\}$  y  $x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n) u(n)$ .

Si hay un par de polos complejos conjugados, ya se mencionó que los coeficientes también serán complejos conjugados siempre y cuando los coeficientes de los polinomios en el numerador y denominador sean reales, y por tanto:

$$x_k(n) = [A_k p_k^n + A_k^* p_k^{*n}] u(n) \quad (5.5)$$

Expresando en forma polar:  $A_k = |A_k| e^{j\alpha_k}$ ,  $p_k = |p_k| e^{j\beta_k}$  y sustituyendo en (5.5), entonces:

$$\begin{aligned} x_k(n) &= |A_k| |p_k|^n [e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_k)}] u(n) \\ &= 2|A_k| |p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n), \quad \text{ROC: } |z| > |p_k| = r_k \end{aligned}$$

Nótese entonces que un par de polos complejos conjugados dan origen a una señal sinusoidal con envolvente exponencial, donde la distancia del polo al origen determina la atenuación exponencial, y el ángulo de los polos respecto al eje real determina la frecuencia de la oscilación.

Los ceros afectan la amplitud y fase a través de su influencia en los coeficientes  $A_k$ .

Para el caso de polos múltiples se utilizan tablas, pero es usual encontrar

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{p z^{-1}}{(1-p z^{-1})^2} \right\} = n p^n u(n), \quad \text{ROC: } |z| > |p|$$

## 5.3 Sistemas en tiempo discreto

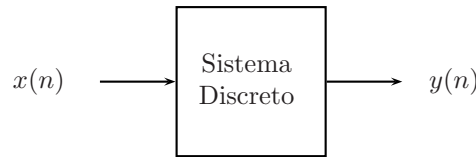
A los dispositivos que operan sobre señales de variable discreta (o tiempo discreto) se les denomina *sistemas discretos*. En general, reciben una señal de entrada  $x(n)$  para producir una señal de salida  $y(n)$ . Se dice que el sistema transforma  $x(n)$  en  $y(n)$ , lo que se expresa como

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$$

donde  $\mathcal{T}[\cdot]$  representa al operador de transformación o procesamiento realizado por el sistema sobre  $x(n)$  para producir  $y(n)$ .

### 5.3.1 Descripción entrada-salida de sistemas

La descripción de entrada-salida define la relación entre  $x(n)$  y  $y(n)$ . La estructura interna del sistema es desconocida o ignorada, es decir, el sistema se interpreta como una *caja negra* (figura 5.13).



**Figura 5.13:** Entrada-salida de un sistema discreto

**Ejemplo 5.17** Determine la salida de los siguientes sistemas para la entrada

$$x(n) = \begin{cases} 3 - |n| & \text{para } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

1.  $y(n) = x(n)$
2.  $y(n) = x(n - 2)$
3.  $y(n) = x(n + 1)$
4.  $y(n) = \frac{1}{3} [x(n + 1) + x(n) + x(n - 1)]$
5.  $y(n) = \max \{x(n + 1), x(n), x(n - 1)\}$
6.  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$

**Solución:**

1. Al sistema  $y(n) = x(n)$  se le denomina *identidad*, pues su salida es idéntica a la entrada:  $y(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$
2. El sistema  $y(n) = x(n - 2)$  retarda la entrada dos unidades:  $y(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$ .
3. El sistema  $y(n) = x(n + 1)$  adelanta la señal una unidad y solo puede ser realizado fuera de línea, por ser imposible en un sistema de tiempo real determinar el valor de la señal una muestra en el futuro:  $y(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$ .

4. El filtro paso bajos  $y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$  calcula el promedio de tres muestras:  $y(n) = \{1/3, 1, 2, 7/3, 2, 1, 1/3\}$ .  
 $\uparrow$
5. El filtro de rango  $y(n) = \max \{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$  entrega el valor máximo de la muestra actual, la anterior y la futura:  $y(n) = \{1, 2, 3, 3, 3, 2, 1\}$ . Este filtro puede considerarse también como filtro paso bajos.  
 $\uparrow$
6. El acumulador  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$  realiza la “integración discreta” de la entrada:  $y(n) = \{1, 3, 6, 8, 9, 9, \dots\}$ . Nóte que el acumulador puede reescribirse como  
 $\uparrow$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)}_{y(n-1)} + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

5.17

En general la salida  $y(n)$  en el instante  $n$  no solo depende de la entrada  $x(n)$  sino de muestras anteriores y posteriores a  $n$ . Además, la salida de un sistema puede depender de un estado interno. Por ejemplo, en el acumulador  $y(n) = y(n-1) + x(n)$  si una secuencia de entrada se aplica en dos instantes de tiempo distintos las dos reacciones del sistema difieren, dependiendo de la historia anterior del sistema “ $y(n-1)$ ”. Para determinar entonces la salida en un instante  $n_0$  es necesario conocer  $y(n_0 - 1)$ . El cálculo de la secuencia de salida  $y(n)$  para todo instante  $n > n_0$  tiene como *condición inicial* al valor  $y(n_0 - 1)$ , que en cierta forma resume todo el pasado del sistema.

Si la condición inicial es cero, se dice que el sistema esta en *reposo*. Siempre se asume que en  $n = -\infty$  todo sistema está en reposo. La salida de un sistema en reposo puede expresarse entonces utilizando únicamente la señal de entrada.

**Ejemplo 5.18** Determine la salida del sistema acumulador para la entrada  $x(n) = nu(n)$  con condición inicial  $y(-1) = \alpha$ .

**Solución:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)}_{y(-1)=\alpha} + \underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha + \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde se ha utilizado

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k &= 1 + 2 + \dots + n \\ \sum_{k=0}^n k &= n + n-1 + \dots + 1 \\ \hline 2 \sum_{k=0}^n k &= n+1 + n+1 + \dots + n+1 \\ 2 \sum_{k=0}^n k &= n(n+1) \\ \sum_{k=0}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

5.18

### 5.3.2 Tipos de sistemas en tiempo discreto

#### Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema en reposo  $\mathcal{T}$  es invariante en el tiempo o invariante al desplazamiento si y solo si

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) \quad \Rightarrow \quad x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n-k)$$

**Ejemplo 5.19** Determine si los siguientes sistemas son invariantes en el tiempo.

1.  $y(n) = x(n) - x(n-1)$
2.  $y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n)$

**Solución:** Para demostrar la invarianza en el tiempo se calcula la respuesta del sistema a la entrada  $x(n-k)$ , que resulta en  $y_k(n) = x(n-k) - x(n-k-1)$ . La respuesta a  $x(n)$ , retrasada  $k$  muestras es  $y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1)$ . Como  $y(n-k) = y_k(n)$  el sistema es invariante en el tiempo.

Para el segundo sistema, su respuesta  $y_k(n)$  a  $x(n-k)$  es  $y_k(n) = x(n-k) \cos(\omega_0 n)$ , y la repuesta a  $x(n)$ , retrasada  $k$  muestras es  $y(n-k) = x(n-k) \cos(\omega_0(n-k))$  que es diferente a  $y_k(n)$ . Por lo tanto el sistema modulador  $y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n)$  es variante en el tiempo,

5.19

#### Sistemas lineales y no lineales

Un sistema es lineal si satisface el teorema de superposición, es decir, para las constantes  $a_1$ ,  $a_2$  y para las señales  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  se cumple

$$\mathcal{T} [a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 \mathcal{T} [x_1(n)] + a_2 \mathcal{T} [x_2(n)] .$$

Como consecuencia, todo sistema lineal tiene la propiedad multiplicativa o de escalado

$$\mathcal{T} [a_1 x_1(n)] = a_1 \mathcal{T} [x_1(n)]$$

y la propiedad aditiva

$$\mathcal{T} [x_1(n) + x_2(n)] = \mathcal{T} [x_1(n)] + \mathcal{T} [x_2(n)] .$$

El principio de superposición con  $M$  entradas puede generalizarse como

$$x(n) = \sum_{k=1}^M a_k x_k(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) = \sum_{k=1}^M a_k \mathcal{T} [x_k(n)]$$

De la propiedad de escalado se deduce además que en un sistema lineal en reposo con entrada cero ( $a_1 \neq 0$ ), entonces la salida debe ser cero.

Si para un sistema la propiedad de superposición no se cumple, entonces el sistema se dice ser no lineal.

**Ejemplo 5.20** Compruebe si los siguientes sistemas son lineales.

1.  $y(n) = nx(n)$
2.  $y(n) = x(n^2)$
3.  $y(n) = x^2(n)$
4.  $y(n) = Ax(n) + B$
5.  $y(n) = e^{x(n)}$

**Solución:**

1. Para el sistema 1 se obtiene primero la respuesta del sistema a una entrada igual a la suma ponderada de dos señales  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ , es decir, para una entrada *total*  $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$  y se obtiene  $y_T(n) = n(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$ . Ahora, la suma ponderada de la salida del sistema para  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  por *separado* es  $y_1(n) = nx_1(n)$  y  $y_2(n) = nx_2(n)$ , y su suma ponderada resulta en  $y_S(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$ , que es igual a  $y_S(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$ . Como  $y_T(n) = y_S(n)$  se puede afirmar que el sistema  $y(n) = nx(n)$  es lineal.
2. Para  $y(n) = x(n^2)$  las salidas  $y_T(n) = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$  y  $y_S = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2)$  son idénticas y por tanto el sistema es lineal.
3. Para  $y(n) = x^2(n)$  la salida  $y_T(n) = (a_1x_1(n) + a_2x_2(n))^2 = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n)$  y la salida  $y_S(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$  evidentemente son diferentes y por tanto el sistema no es lineal.
4. Para  $y(n) = Ax(n) + B$  la salida  $y_T(n) = A(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) + B$  y la salida  $y_S(n) = a_1(Ax_1(n) + B) + a_2(Ax_2(n) + B) = A(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) + B(a_1 + a_2)$  difieren y por tanto el sistema, a pesar de su apariencia, no es lineal.
5. Para  $y(n) = e^{x(n)}$  la salida  $y_T = e^{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)} = e^{a_1x_1(n)}e^{a_2x_2(n)}$  y la salida  $y_S = a_1e^{x_1(n)} + a_2e^{x_2(n)}$  son diferentes y por tanto el sistema tampoco es lineal.

5.20

### 5.3.3 Análisis de sistemas LTI en tiempo discreto

Existen dos métodos básicos para el análisis del comportamiento de un sistema:

1. Descomposición de la señal de entrada en señales elementales para las que se conoce su respuesta.
2. Solución de la *ecuación de diferencias*.

El análisis de sistemas, independientemente del método seleccionado, se simplifica enormemente si estos son lineales e invariantes en el tiempo (LTI: *Linear and Time Invariant*).

## Descomposición en señales elementales

El concepto fundamental del análisis por descomposición es el siguiente: supóngase que la entrada  $x(n)$  puede expresarse como una suma ponderada de funciones elementales  $\{x_k(n)\}$

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

donde  $c_k$  son los coeficientes de ponderación o *pesos* de la descomposición de la señal  $x(n)$ . Si la respuesta del sistema en reposo a  $x_k(n)$  es  $y_k(n)$ , es decir

$$y_k(n) = \mathcal{T}[x_k(n)]$$

entonces con la propiedad de linealidad se obtiene

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] = \sum_k c_k \mathcal{T}[x_k(n)] = \sum_k c_k y_k(n)$$

En otras palabras, si el sistema es lineal, la respuesta del sistema a una entrada es igual a la suma ponderada de las repuestas del sistema a cada una de las componentes en que se puede descomponer la entrada, donde se cumple además que los coeficientes de ponderación de la salida corresponden a los coeficientes de ponderación de la entrada.

Utilizando como funciones elementales a impulsos unitarios desplazados  $\delta(n - k)$  es posible expresar cualquier función de variable discreta  $x(n)$  como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k)$$

Nótese la semejanza con el análisis de sistemas LTI en tiempo continuo derivado en la sección 3.4.1.

**Ejemplo 5.21** Descomponga la señal

$$x(n) = \{0, 1, 2, -1, -1/2, 1\}_{\uparrow}$$

en sus impulsos.

**Solución:** Esta señal puede expresarse como

$$x(n) = 1 \cdot \delta(n - 1) + 2 \cdot \delta(n - 2) - 1 \cdot \delta(n - 3) - \frac{1}{2} \cdot \delta(n - 4) + 1 \cdot \delta(n - 5)$$

5.21

Si  $h'(n, k)$  se utiliza para denotar la respuesta de un sistema lineal a un impulso desplazado  $k$  unidades  $\delta(n - k)$

$$h'(n, k) = \mathcal{T}[\delta(n - k)]$$

entonces la salida del sistema puede calcularse con las respuestas elementales a los impulsos desplazados:

$$y(n) = \sum_k c_k y_k(n) = \sum_k x(k) h'(n, k)$$

Si el sistema es además invariante en el tiempo, entonces con  $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$  se tiene que  $h'(n, k) = h(n - k)$  y por lo tanto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k) = x(n) * h(n)$$

que se denomina suma de *convolución*. Se dice que la respuesta del sistema  $y(n)$  a la entrada  $x(n)$  es igual a la convolución de  $x(n)$  con la respuesta al impulso  $h(n)$ .

Esto quiere decir que en un sistema LTI en reposo su respuesta a cualquier entrada puede determinarse con solo conocer dicha entrada y la respuesta al impulso  $h(n)$ , lo cual es similar a lo analizado en capítulos anteriores para sistemas en tiempo continuo.

El cálculo de la suma de convolución involucra cuatro pasos equivalentes a los estudiados para el caso de la integral de convolución:

1. *Reflexión* de  $h(k)$  con respecto a  $k = 0$  para producir  $h(-k)$ .
2. *Desplazamiento* de  $h(-k)$  hacia el punto  $n$  que se desea calcular.
3. *Multiplicación* de  $x(k)$  y  $h(n - k)$  para obtener una secuencia producto  $v_n(k) = x(k)h(n - k)$ .
4. *Suma* de todos los valores de  $v_n(k)$  para obtener  $y(n)$ .

Los pasos del 2 al 4 deben realizarse para todo instante  $n$  que se desee calcular.

**Ejemplo 5.22** Determine la respuesta a la señal de entrada

$$x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso

$$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$$

**Solución:** Siguiendo el procedimiento indicado, primero se calcula la reflexión de la respuesta al impulso  $h(-k) = \{-1, 1, 2, 1\}$ . Los siguientes pasos se resumen en la tabla 5.14.

Con lo que resulta la señal de salida en

$$y(n) = \{1, 4, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

2. Desplazamiento	3. Multiplicación por $x(k) = \{1, 2, 3, 1\}$	4. Suma
$h(-1-k) = \{-1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_{-1} = \{0, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0\}$	$y_{-1} = 1$
$h(0-k) = \{-1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_0 = \{0, 0, \underset{\uparrow}{2}, 2, 0, 0\}$	$y_0 = 4$
$h(1-k) = \{-1, \underset{\uparrow}{1}, 2, 1\}$	$v_1 = \{0, \underset{\uparrow}{1}, 4, 3, 0\}$	$y_1 = 8$
$h(2-k) = \{-1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_2 = \{-1, \underset{\uparrow}{2}, 6, 1\}$	$y_2 = 8$
$h(3-k) = \{0, -1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_3 = \{0, -2, \underset{\uparrow}{3}, 2\}$	$y_3 = 3$
$h(4-k) = \{0, 0, -1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_4 = \{0, 0, -3, \underset{\uparrow}{1}\}$	$y_4 = -2$
$h(5-k) = \{0, 0, 0, -1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_5 = \{0, 0, 0, -1\}$	$y_5 = -1$

**Figura 5.14:** Ejemplo de convolución de dos secuencias finitas.

Con un cambio de variables es posible demostrar que la convolución es conmutativa:

$$\begin{aligned}
 y(n) = x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \underset{\substack{\uparrow \\ m=n-k}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\
 &= h(n) * x(n)
 \end{aligned}$$

La convolución es además asociativa y distributiva

$$\begin{aligned}
 [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\
 x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.23** Encuentre la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1.$$

ante una entrada  $x(n) = u(n)$ .

**Solución:** Para determinar la salida  $y(n)$  del sistema con la entrada escalón unitario  $u(n)$  se utiliza la sumatoria de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)h(k) \quad (5.6)$$

Para  $n < 0$  el producto de  $u(n-k)$  y  $h(k)$  es siempre cero y por tanto  $y(n) = 0$ . Evaluando



(5.6) para algunos valores de  $n$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= h(0) = 1 \\
 y(1) &= h(0) + h(1) = 1 + a \\
 y(2) &= h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2 \\
 &\vdots \\
 y(n) &= \sum_{k=0}^n h(k) = \sum_{k=0}^n a^k
 \end{aligned}$$

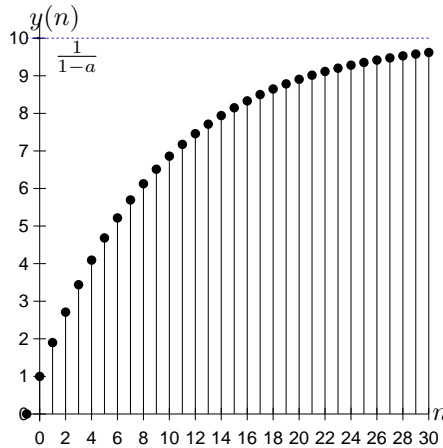
Puesto que

$$\begin{array}{rcl}
 \sum_{k=0}^n a^k & = & 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\
 a \sum_{k=0}^n a^k & = & a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1} \\
 \hline
 (1-a) \sum_{k=0}^n a^k & = & 1 - a^{n+1}
 \end{array}$$

se deriva para  $n \geq 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Si  $|a| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0$  lo que implica que  $y(\infty) = \frac{1}{1-a}$ . La figura 5.15 muestra un ejemplo de la respuesta para  $a = 0,9$ .



**Figura 5.15:** Respuesta del sistema en el ejemplo 5.23 al escalón, con  $a = 0,9$ .

5.23

La propiedad de convolución de la transformada  $z$  permite simplificar el análisis de sistemas LTI en el dominio  $z$ , donde la salida del sistema puede calcularse a través del producto de las transformadas  $z$  de la entrada y de la respuesta al impulso, de forma análoga a lo expuesto anteriormente para la transformada de Laplace y el análisis de sistemas en el tiempo continuo.

En sistemas de variable discreta también se le denomina a  $H(z)$  función de transferencia del sistema, que corresponde con la transformada  $z$  de la respuesta al impulso unitario  $h(n)$ . Si

$Y(z) = \mathcal{Z} \{y(n)\}$  y  $X(z) = \mathcal{Z} \{x(n)\}$  entonces se cumple:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$



$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Si se conoce la transformada de la salida  $Y(z)$  y la transformada  $X(z)$  de la entrada que dio origen a dicha salida, es entonces posible encontrar la respuesta al impulso:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \bullet \longrightarrow \circ h(n)$$

**Ejemplo 5.24** Repita el ejemplo 5.23 pero utilice la transformada  $z$  para su solución.

**Solución:**

Debe encontrarse la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1.$$

ante una entrada  $x(n) = u(n)$ .

En secciones anteriores se demostró:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

con lo que se obtiene la salida en el dominio  $z$ :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

que se puede descomponer en fracciones parciales como

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} = \frac{1}{1 - a} \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] - \frac{a}{1 - a} \left[ \frac{1}{1 - az^{-1}} \right]$$

que transformado al dominio del tiempo discreto resulta en

$$y(n) = \frac{1}{1 - a} u(n) - \frac{a}{1 - a} a^n u(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u(n)$$

lo que confirma el resultado del ejemplo anterior.

5.24

### Sistemas LTI causales

Un sistema es *causal* si  $y(n)$  depende solo de las entradas presentes y pasadas  $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \dots\}$ , y salidas pasadas  $\{y(n-1), y(n-2), \dots\}$ , pero no de las entradas o salidas

futuras  $\{x(n+1), x(n+2), \dots; y(n+1), y(n+2), \dots\}$ . En caso contrario, el sistema es no causal.

Sistemas que funcionan “en línea” deben ser causales por la imposibilidad de determinar el valor de la entrada o la salida en el futuro.

En un sistema causal la salida en  $n = n_0$  depende exclusivamente de valores de entrada  $x(n)$  para  $n \leq n_0$ . Como en un sistema LTI

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\underbrace{x(n_0 - k)}_{\substack{\text{Muestras} \\ \text{pasadas y} \\ \text{actual}}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)\underbrace{x(n_0 - k)}_{\substack{\text{Muestras} \\ \text{futuras}}}$$

se deriva que para que la salida sea independiente de entradas futuras entonces se debe cumplir  $h(k) = 0$  para todo  $k \leq -1$ .

Dado que  $h(n)$  es la respuesta impulsional de un sistema LTI en reposo,  $h(n) = 0$  para  $n < 0$  es condición necesaria y suficiente para la causalidad.

Así, un sistema LTI es causal si y solo si  $h(n) = 0$ ,  $\forall n < 0$ , lo que también es consistente con lo mencionado para sistemas de variable continua.

Si un sistema es causal entonces la convolución puede simplificarse en

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n - k)$$

Generalizando, a una secuencia  $x(n)$  con  $x(n) \neq 0$  para algún  $n < 0$  se le denomina secuencia no causal, y de lo contrario, secuencia causal.

Si tanto la entrada  $x(n)$  como la respuesta impulsional son causales, entonces la convolución se simplifica en:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n - k) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n - k)$$

Nótese que esta respuesta es a su vez causal, es decir,  $y(n) = 0$  para todo  $n < 0$ .

En general, puesto que un sistema causal tiene como respuesta al impulso una señal  $h(n)$  causal, se puede afirmar que la región de convergencia de la función de transferencia  $H(z)$  es el exterior de un círculo centrado en el origen.

## Estabilidad de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Un sistema arbitrario en reposo se dice de entrada acotada - salida acotada (BIBO: *bounded input - bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \xrightarrow{\mathcal{T}} |y(n)| \leq M_y < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Si para alguna entrada acotada se produce una salida no acotada (es infinita), el sistema se dice ser inestable.

Dada la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

se cumple para su valor absoluto

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|M_x$$

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

lo que implica que  $|y(n)|$  es acotada solo si

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty$$

En consecuencia un sistema LTI es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable. Esta condición es necesaria y suficiente.

**Ejemplo 5.25** Determine el rango del parámetro  $a$  para el que el sistema LTI de respuesta al impulso  $h(n) = a^n u(n)$  es estable.

**Solución:**

El sistema es estable si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \dots$$

converge. Esto ocurre si y solo si  $|a| < 1$  y converge a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|}$$

5.25

**Ejemplo 5.26** Determine el rango de valores de  $a$  y  $b$  para los cuales el sistema LTI de respuesta

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

es estable. La condición de estabilidad es

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n + \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{b} \right|^n}_{\text{Converge si } |b| > 1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n}_{\text{Converge si } |a| < 1} \\ &= \frac{|b|}{|b| - 1} + \frac{1}{1 - |a|} \end{aligned}$$

El sistema es estable si  $|a| < 1$  y si  $|b| > 1$ .

5.26

En el dominio  $z$  la estabilidad se puede observar fácilmente considerando que

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

para el caso especial  $|z| = 1$ , que es el círculo unitario en el plano  $z$ , y considerando que si un sistema es estable su respuesta al impulso es absolutamente sumable, entonces lo anterior se reduce a

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad |z| = 1$$

lo que implica un sistema descrito por  $H(z)$  es estable si su región de convergencia incluye al círculo unitario.

De lo anterior se deriva que si un sistema es estable y causal, entonces los polos de su función de transferencia deben estar dentro del círculo unitario.

## Sistemas en tiempo discreto y ecuaciones de diferencias

El cálculo de la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

sólo es aplicable en sistemas LTI que tienen una respuesta al impulso de longitud finita (llamados también sistemas FIR por *Finite Impulse Response*), puesto que de otro modo se requeriría de una memoria infinita para almacenar  $h(n)$ , y un número infinito de multiplicaciones y adiciones.

Las llamadas *ecuaciones de diferencias* permiten trabajar con sistemas con una respuesta al impulso de longitud infinita (o sistemas IIR por *Infinite Impulse Response*), y son el equivalente en el dominio discreto de las ecuaciones diferenciales.

Un sistema causal es *recursivo* si su salida en el instante  $n$  depende no solo de los valores presentes y pasados a la entrada, sino también de valores anteriores de la salida,  $y(n-1), y(n-2), \dots$ :

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

donde  $F[\cdot]$  denota una función cualquiera con argumentos iguales a las entradas y salidas presentes y pasadas.

El sistema se denomina *no recursivo* si depende únicamente de las entradas presentes y pasadas:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

Nótese que los sistemas LTI causales con una respuesta finita al impulso de longitud  $M$  son no recursivos, puesto que pueden expresarse de la forma

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

que depende de la entrada actual  $x(n)$  y las  $M-1$  entradas anteriores.

En general, los sistemas recursivos tienen respuestas al impulso infinitas, pero que pueden calcularse en un número finito de pasos considerando las salidas anteriores. Esto tiene la inconveniencia de que la salida de un sistema recursivo debe calcularse en orden estrictamente secuencial, por requerirse los cálculos de dichas salidas anteriores. En un sistema no recursivo las salidas anteriores no son consideradas y se puede calcular un valor para cualquier  $n$  directamente.

**Ejemplo 5.27** El sistema de media acumulativa

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k)$$

es recursivo pues

$$\begin{aligned} (n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^n x(k) \\ \Rightarrow ny(n-1) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) \\ \Rightarrow (n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n) \\ y(n) &= \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n) \\ &= \frac{1}{n+1} (ny(n-1) + x(n)) \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.27

Los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes son una subclase de los sistemas recursivos y no recursivos. Considérese por ejemplo el sistema

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

que a pesar de su similitud con (5.7), difiere por la naturaleza de los coeficientes, lo que tiene implicaciones sobre la invarianza en el tiempo. En este último caso, el coeficiente  $a$  es constante y el sistema es invariante en el tiempo. Para la media acumulativa, los coeficientes  $\frac{n}{n+1}$  y  $\frac{1}{n+1}$  son dependiente del tiempo y el sistema es variante en el tiempo.

Evalúese ahora la respuesta de este sistema ante una entrada  $x(n)$  causal y con una condición inicial  $y(-1)$ :

$$\begin{aligned}
 y(0) &= ay(-1) + x(0) \\
 y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1) \\
 y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2) \\
 &\vdots \\
 y(n) &= a^{n+1}y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1}x(1) + \dots + a^0 x(n) \\
 &= \underbrace{a^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^n a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, \quad n \geq 0
 \end{aligned}$$

El término  $y_{zi}(n)$  depende de las condiciones iniciales y se obtendría si la entrada fuese cero (*zero input*), como resultado del estado inicial del sistema y de sus características propias. A  $y_{zi}(n)$  se le denomina respuesta natural o libre del sistema, o también, respuesta a entrada nula.

El término  $y_{zs}(n)$  se obtiene cuando el estado del sistema es cero (*zero state*), es decir, con una entrada  $x(n)$  cuando el sistema está en reposo, y se le denomina respuesta en estado nulo o respuesta forzada. Nótese que en el ejemplo,  $y_{zs}(n)$  puede interpretarse como la convolución de  $x(n)$  con la respuesta al impulso:

$$h(n) = a^n u(n)$$

donde los índices son finitos debido a la causalidad de ambas señales  $x(n)$  y  $h(n)$ . Este ejemplo corresponde a una ecuación de diferencias de primer orden, y es un caso particular de la ecuación de diferencias:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

o con  $a_0 = 1$ :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5.8)$$

donde el entero  $N$  recibe el nombre de orden de la ecuación de diferencias u orden del sistema.

Las condiciones iniciales  $y(-1), \dots, y(-N)$  resumen toda la historia pasada del sistema, y son necesarias para efectuar el cálculo de las salidas presentes y futuras.

La respuesta al impulso  $h(n)$  en sistemas recursivos se define como la respuesta del sistema cuando la entrada  $x(n)$  es igual al impulso  $\delta(n)$ , y el sistema está inicialmente en reposo.

Cualquier sistema recursivo descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes es un sistema de respuesta infinita al impulso, pero no todo sistema de respuesta infinita LTI puede ser descrito con estas ecuaciones.

En el dominio  $z$  la ecuación (5.8) se transforma, utilizando la propiedad de desplazamiento, en

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} &= \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k} \\ Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} &= X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}\end{aligned}$$

lo que quiere decir que cualquier sistema en tiempo discreto descrito por una ecuación de diferencias con coeficientes constantes tiene una función de transferencia racional. Puesto que la descomposición en fracciones parciales de  $H(z)$  contendrá una suma de términos con un único polo de orden  $n$ , los cuales corresponden en el dominio  $n$  con una secuencia de longitud infinita, se deriva que todo sistema descrito por una ecuación de diferencias con coeficientes constantes tiene una respuesta al impulso  $h(n)$  de longitud infinita.

**Ejemplo 5.28** Encuentre la ecuación de diferencias correspondiente a un sistema causal con función de transferencia


$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

**Solución:** Se tiene que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

esto es equivalente a

$$Y(z) \left[ 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \right] = X(z) [1 + z^{-1}]$$



$$y(n) + \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

con lo que finalmente se obtiene

$$y(n) = -\frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$



## 5.4 Transformada $z$ unilateral

Al igual que en el caso de sistemas en tiempo continuo, la mayoría de aplicaciones en ingeniería involucra sistemas y señales causales, por lo que tiene sentido definir la transformada  $z$  unilateral.

### 5.4.1 Definición y propiedades

La transformada  $z$  unilateral se define como:

$$\mathcal{Z}_u \{x(n)\} = X(z) \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

y la relación se denota como  $x(n) \xrightarrow{z_u} X(z)$ .

La transformada  $z$  unilateral y la bilateral se diferencian en el límite inferior de la sumatoria, y presenta por lo tanto las siguientes características:

1. No contiene información sobre la señal  $x(n)$  para los valores negativos de  $n$ .
2. Es única sólo para señales causales, puesto que éstas son las únicas señales que son cero para  $n < 0$ .
3.  $\mathcal{Z}_u \{x(n)\} = \mathcal{Z} \{x(n)u(n)\}$ . Puesto que  $x(n)u(n)$  es causal, la ROC de su transformada  $X(z)$  es siempre exterior a un círculo. Por lo tanto, cuando se trate con transformadas  $z$  unilaterales, no es necesario referirse a su región de convergencia.

**Ejemplo 5.29** Determine la transformada  $z$  unilateral de:

1.  $x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$ .
  2.  $x_2(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$ .
  3.  $x_3(n) = \{2, 4, 5, 7, 0, 1\}$ .
  4.  $x_4(n) = \delta(n)$ .
  5.  $x_5(n) = \delta(n - k), k > 0$ .
  6.  $x_6(n) = \delta(n + k), k > 0$ .
1.  $1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5}$ .
  2.  $5 + 7z^{-1} + z^{-3}$ .
  3.  $5 + 7z^{-1} + z^{-3}$ .
  4. 1.
  5.  $z^{-k}$ .
  6. 0.

5.29

Nótese que la transformada  $z$  unilateral no es única para señales con componentes anticausales diferentes (por ejemplo  $X_2(z) = X_3(z)$ , aun cuando  $x_2(n) \neq x_3(n)$ ). Para señales anticausales,  $X(z)$  siempre será cero.

Las propiedades de esta transformada son similares a las de la transformada  $z$  bilateral, pero el desplazamiento merece especial atención.

### Retardo temporal

Si  $x(n) \xrightarrow{z_u} X(z)$ , entonces

$$x(n-k) \xrightarrow{z_u} z^{-k} \left[ X(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right]$$

para  $k > 0$ . Si  $x(n)$  es causal entonces  $x(n-k) = z^{-k}X(z)$ .

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_u \{x(n-k)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)} = \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-m}z^{-k} \\ &= z^{-k} \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-m} = z^{-k} \left\{ \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} \right\} \\ &= z^{-k} \left\{ X(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n \right\} \end{aligned}$$

Nótese que si se desplaza  $x(n)$  hacia la derecha entonces aparecen  $k$  nuevas muestras que deben considerarse.

### Adelanto temporal

Si  $x(n) \xrightarrow{z_u} X(z)$ , entonces

$$x(n+k) \xrightarrow{z_u} z^k \left[ X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right]$$

para  $k > 0$ .

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_u \{x(n+k)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n} = \sum_{m=k}^{\infty} x(m)z^{-(m-k)} = z^k \left[ \sum_{m=k}^{\infty} x(m)z^{-m} \right] \\ &= z^k \left[ \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{-m} \right] = z^k \left[ X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{-m} \right] \end{aligned}$$

Nótese que si la señal se desplaza a la izquierda, entonces  $k$  muestras de la transformada  $X(z)$  deben desaparecer.

**Ejemplo 5.30** Calcule la transformada  $z$  unilateral de:

1.  $x(n) = a^n$ .
2.  $x_2(n) = x(n-2)$ .
3.  $x_3(n) = x(n+2)$ .

**Solución:**

1. Se cumple

$$\mathcal{Z}_u \{x(n)\} = \mathcal{Z} \{x(n)u(n)\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad .$$

- 2.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_u \{x(n-2)\} &= z^{-2} \left[ X(z) + \sum_{n=1}^2 x(-n)z^n \right] \\ &= z^{-2} [X(z) + x(-1)z + x(-2)z^2] \\ &= \frac{z^{-2}}{1 - az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2} \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_u \{x(n+2)\} &= z^2 \left[ X(z) - \sum_{n=0}^1 x(n)z^{-n} \right] \\ &= z^2 \left[ \frac{1}{1 - az^{-1}} - 1 - az^{-1} \right] \\ &= \frac{z^2}{1 - az^{-1}} - z^2 - az \end{aligned}$$

5.30

La propiedad de desplazamiento de la transformada  $z$  unilateral se utiliza en la solución de ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes y condiciones iniciales no nulas.

### Teorema del valor final

Se tiene que:

$$X(z) = \mathcal{Z}_u \{x(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x(n)z^{-n}$$

y además:

$$\mathcal{Z}_u \{x(n+1)\} = zX(z) - zx(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x(n+1)z^{-n}$$

con lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_u \{x(n+1)\} - \mathcal{Z}_u \{x(n)\} &= (zX(z) - zx(0)) - X(z) \\
&= (z-1)X(z) - zx(0) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^N x(n)z^{-n} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=-1}^{N-1} x(n+1)z^{-n-1} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1)z^{-n} + x(N+1)z^{-N} - x(0) - \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1)z^{-n-1} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1)(z^{-n} - z^{-n-1}) + x(N+1)z^{-N} \right) - x(0) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1)z^{-n-1}(z-1) + x(N+1)z^{-N} \right) - x(0)
\end{aligned}$$

con lo que se deduce:

$$(z-1)X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1)z^{-n-1}(z-1) + x(N+1)z^{-N} \right) + (z-1)x(0)$$

y aplicando el límite cuando  $z$  tiende a 1 a ambos lados se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

lo que se conoce como *teorema del valor final*. En la demostración se ha asumido que la ROC de  $(z-1)X(z)$  incluye a  $|z| = 1$ .

Este teorema se utiliza para calcular el valor asintótico de la señal  $x(n)$  cuando  $n$  tiende a infinito, si se conoce  $X(z)$  pero no  $x(n)$ .

**Ejemplo 5.31** Determine la respuesta del sistema con respuesta impulsional  $h(n) = a^n u(n)$ ,  $|a| < 1$ , ante un escalón unitario, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Solución:** La salida del sistema ante la entrada dada se calcula en el dominio  $z$  como:

$$y(n) = h(n) * x(n) \xrightarrow{\bullet} Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)}, \text{ROC: } |z| > 1$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \underbrace{\frac{z^2}{(z-a)(z-1)}}_{\text{ROC: } |z| > a < 1} = \frac{1}{1-a}$$

Este resultado es consistente con lo mostrado en la figura 5.15.

### 5.4.2 Respuestas natural y forzada

Las propiedades de desplazamiento en el tiempo de la transformada  $z$  unilateral permiten evaluar el comportamiento de un sistema cuando las condiciones iniciales no son nulas. En general, si se asume que el sistema está en reposo, es decir, si se asume que todas las condiciones iniciales del sistema son nulas, entonces la respuesta  $y(n)$  del sistema ante la entrada causal  $x(n)$  se conoce como *respuesta forzada* del sistema. Si por otro lado la entrada  $x(n)$  es nula, pero el sistema tiene condiciones iniciales no nulas, entonces a la reacción del sistema a partir de la muestra cero  $y(n)$  se le conoce como *respuesta natural* del sistema. La respuesta total del sistema es entonces aquella conformada por las respuestas natural y forzada. El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos.

**Ejemplo 5.32** Un sistema LTI en tiempo discreto está descrito por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = \frac{4}{5}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) - x(n-2)$$

Encuentre la respuesta natural del sistema ante las condiciones iniciales  $y(-1) = 0$  y  $y(-2) = -4$ , y la respuesta forzada del sistema ante un escalón unitario.

**Solución:**

Aplicando la transformada  $z$  unilateral, sus propiedades de retraso en el tiempo, y considerando que la entrada  $x(n)$  es causal, se cumple:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{4}{5} [Y(z)z^{-1} + y(-1)] \\ &\quad - \frac{1}{4} [Y(z)z^{-2} + y(-1)z^{-1} + y(-2)] \\ &\quad + X(z) - X(z)z^{-2} - x(-1)z^{-1} + x(-2) \\ Y(z) \left[ 1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \right] &= X(z) [1 - z^{-2}] + \frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1) \\ Y(z) &= \underbrace{\frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} X(z)}_{\text{Respuesta forzada}} + \underbrace{\frac{\frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1)}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}}_{\text{Respuesta natural}} \end{aligned}$$

Obsérvese que ambas componentes, la natural y la forzada, comparten los mismos polos, y determinan así la forma de las señales en cuanto a atenuación/amplificación exponenciales y la frecuencia de las componentes oscilatorias. Los ceros serán responsables de la fase y amplitud de las señales resultantes.

La respuesta natural del sistema se obtiene haciendo  $X(z) = 0$ :

$$Y(z) = \frac{\frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1)}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

y con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right) \left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - j\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} + j\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n \arctan \frac{3}{4}\right) u(n) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(n \arctan \frac{3}{4}\right) u(n)$$

La respuesta forzada ante un escalón unitario estará dada por la transformada  $z$  inversa de

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

El cero en 1 se cancela con el polo en el mismo sitio. El lector puede demostrar por descomposición en fracciones parciales que: expresión se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right) \left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - j\frac{7}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} + j\frac{7}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}} \end{aligned}$$

que corresponde a la señal

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n \arctan \frac{3}{4}\right) u(n) + \frac{14}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(n \arctan \frac{3}{4}\right) u(n)$$

5.32

## 5.5 Interconexión de sistemas

Los siguientes conceptos se aplican tanto a sistemas discretos como continuos. Puesto que en los dominios de la frecuencia  $j\omega$ ,  $s$  y  $z$  la convolución del tiempo se transforma en un producto algebraico, además de que las transformaciones son lineales, esto permite generalizar los conceptos a los tres dominios por igual. Se tratará aquí el caso especial de los sistemas discretos, pero los principios son válidos si se sustituye la variable discreta  $n$  por la variable continua  $t$ , y si se reemplaza el dominio  $z$  y la transformada  $z$ , por el dominio  $s$  y la transformada de Laplace.

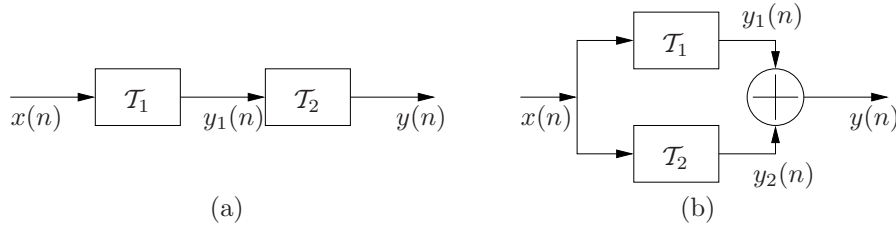
Hay dos maneras fundamentales de interconectar sistemas: interconexión en cascada (serie) e interconexión paralela (figura 5.16). La interconexión en cascada se describe con sistemas de la forma:

$$y(n) = \mathcal{T}_2[\mathcal{T}_1[x(n)]] = \mathcal{T}_c[x(n)]$$

En general, para la conexión en cascada el orden de los bloques no es relevante. Si los sistemas son lineales e invariantes en el tiempo entonces  $\mathcal{T}_c$  es invariante en el tiempo, y  $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ .

La interconexión en paralelo se describe por

$$y(n) = \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] = \mathcal{T}_p[x(n)].$$



**Figura 5.16:** Interconexión de sistemas discretos. (a) Cascada. (b) Paralelo

Nótese que si el sistema es LTI, entonces se cumple  $y_1(n) = x(n) * h_1(n)$  y por tanto en el dominio  $z$  esta relación se puede representar por  $Y_1(z) = X(z)H_1(z)$ . Puesto que también se cumple  $Y(z) = H_2(z)Y_1(z)$  se concluye que

$$Y(z) = [H_1(z)H_2(z)]X(z)$$

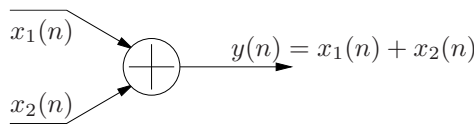
o en otras palabras la función de transferencia de la cascada de sistemas es igual al producto de las mismas. Para la conexión en paralelo se puede hacer uso de la linealidad y así obtener

$$Y(z) = [H_1(z) + H_2(z)]X(z)$$

### 5.5.1 Diagramas de bloques

#### Sumador

El *sumador* es un bloque que realiza la adición entre dos señales, sumando las muestras en un instante dado y se representa como lo indica la figura 5.17.



**Figura 5.17:** Diagrama de un sumador.

#### Multiplicador por constante

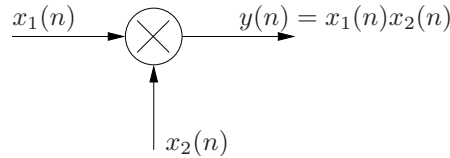
El *multiplicador* por constante es un bloque que escala la amplitud y cambia la fase de una señal, y se representa como lo indica la figura 5.18.



**Figura 5.18:** Diagrama de un multiplicador por constante.

### Multiplicador de señal

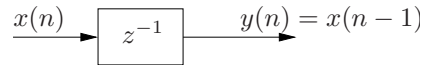
El *multiplicador* de señal es un bloque que multiplica en cada instante de tiempo sus diversas entradas. Éste es representado como lo indica la figura 5.19.



**Figura 5.19:** Diagrama de un multiplicador de señales.

### Retardador de un elemento

El *retardador* es un bloque que retrasa la señal de entrada en una unidad de tiempo. Este es utilizado principalmente en el análisis y modelado de sistemas discretos. Se representa como lo indica la figura 5.20.



**Figura 5.20:** Diagrama de elemento retardador.

### Adelantador de un elemento

El *adelantador* es un elemento que adelanta una señal una unidad de tiempo en el futuro. No es realizable físicamente y solo existe en sistemas discretos que operan “fuera de línea”. Se representa como lo indica la figura 5.21.

**Ejemplo 5.33** Realice el diagrama de bloques para

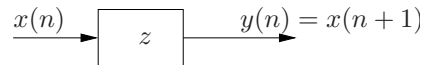
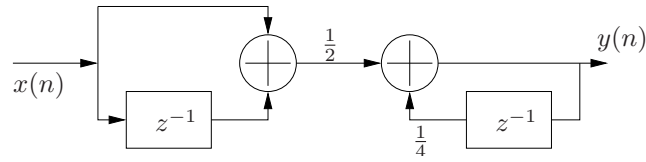
$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

Nótese primero que esta expresión puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$$

con lo que se deriva fácilmente el diagrama mostrado en la figura 5.22.



**Figura 5.21:** Diagrama de elemento adelantador.**Figura 5.22:** Diagrama de bloques de la ecuación 5.22.

**Ejemplo 5.34** Encuentre la función de transferencia del sistema mostrado en la figura 5.23.

**Solución:** Las funciones en los bloques denotan sus respuestas al impulso. Así se tiene que los bloques y señales tienen las siguientes transformadas:

$$x(n) \circ \bullet X(z)$$

$$y(n) \circ \bullet Y(z)$$

$$q(n) \circ \bullet Q(z)$$

$$g(n) \circ \bullet G(z)$$

$$e(n) \circ \bullet E(z)$$

La señal  $e(n)$  se obtiene con la substracción de la entrada  $x(n)$  y la salida del bloque con función de transferencia  $G(z)$ , y se cumple entonces en el dominio  $z$  que  $E(z) = X(z) - Y(z)G(z)$ .

Aplicando las propiedades de linealidad y de convolución se tiene que

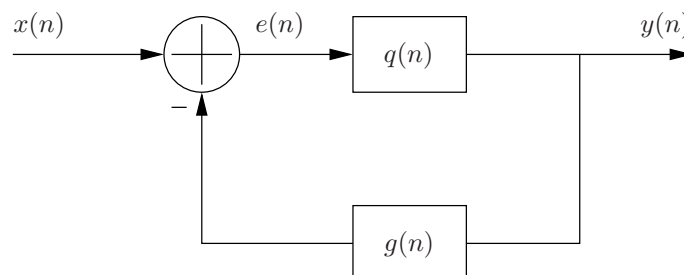
$$E(z)Q(z) = Y(z)$$

$$[X(z) - G(z)Y(z)]Q(z) = Y(z)$$

$$X(z)Q(z) = Y(z)[1 + G(z)Q(z)]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Q(z)}{1 + G(z)Q(z)}$$

Esta estructura será utilizada ampliamente en control automático. Nótese que si  $X(z)$ , y

**Figura 5.23:** Sistema retroalimentado

$Q(z)$ ,  $G(z)$  son funciones racionales, entonces  $H(z)$  también lo será.

5.34
------

## 5.6 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [16, 14], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

**Problema 5.1.** Considere la representación de la función de variable discreta  $x(n)$  en términos continuos

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT)$$

donde  $x(n)$  se obtiene muestreando periódicamente a la señal analógica  $x_a(t)$ .

Si  $x_a(t)$  tiene una respuesta en frecuencia  $X_a(j\omega)$ , encuentre el espectro correspondiente de  $x(n)$ . ¿Qué relación debe existir entre el periodo de muestreo  $T$  y el espectro  $X_a(j\omega)$  para que la señal original  $x_a(t)$  sea reconstruible?

**Problema 5.2.** Dada la secuencia  $x(n) = \{1, 2, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}\}$ , grafique las secuencias:

- |            |                |                |
|------------|----------------|----------------|
| 1. $2x(n)$ | 3. $x(-2 - n)$ | 5. $x(-2 + n)$ |
| 2. $x(-n)$ | 4. $x(2 - n)$  | 6. $x(2 + n)$  |

**Problema 5.3.** Si  $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ , exprese las siguientes secuencias en términos de  $x(n)$

- |                           |                     |
|---------------------------|---------------------|
| 1. $\{1, 2, 3, 4, 0, 0\}$ | 3. $\{4, 3, 2, 1\}$ |
| 2. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$    | 4. $\{4, 3, 2, 1\}$ |

**Problema 5.4.** Represente las siguientes secuencias en términos de rampas  $u_r(n)$  y escalones unitarios  $u(n)$ .

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x_1(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0\}$       | 4. $x_4(n) = \{4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4\}$     |
| 2. $x_2(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 0\}$ |   |
| 3. $x_3(n) = \{0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$             | 5. $x_5(n) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ |

**Problema 5.5.** Grafique las siguientes funciones e indique cualitativamente qué regiones de convergencia (ROC) tiene su transformada  $z$ :

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. $x(n) = \sin(\omega n)u(n)$  | 4. $x(n) = u_r(n) - 2u_r(n - 5) + u_r(n - 10)$ |
| 2. $x(n) = u(n + 4) - u(n - 2)$ | 5. $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{- n }$   |
| 3. $x(n) = u(-n - 2)$           | 6. $x(n) = u_r(n + 5)u(-n - 5)$                |

**Problema 5.6.** Encuentre las regiones del plano  $z$  donde las siguientes series convergen:

1.  $\sum_{n=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} z^{-n}$
3.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+2} z^n$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] z^{-n}$
4.  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^n$

**Problema 5.7.** Encuentre la transformada  $z$  de

$$x(n) = \frac{u(n-2)}{4^n}$$

con su correspondiente ROC.

**Problema 5.8.** Sea

$$x(n) = (-1)^n u(n) + \alpha^n u(-n - n_0)$$

Encuentre para qué valores de  $\alpha$  y  $n_0$  es la ROC de la transformada  $z$  de  $x(n)$

$$1 < |z| < 2$$

**Problema 5.9.** Encuentre la transformada  $z$  de

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

Indique los polos, ceros y ROC.

**Problema 5.10.** Para las siguientes expresiones identifique los ceros y polos finitos e infinitos.

1.  $\frac{z^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$
3.  $\frac{z^{-2} (1 - z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$
2.  $\frac{(1 - z^{-1}) (1 - 2z^{-1})}{(1 - 3z^{-1}) (1 - 4z^{-1})}$

**Problema 5.11.** Si  $x(n)$  es absolutamente sumable y tiene transformada  $z$  racional, con un polo en  $1/2$ , entonces ¿podría  $x(n)$  ser

1. una señal finita?
3. una señal derecha?
2. una señal izquierda?
4. una señal bilateral?

**Problema 5.12.** Sea

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right) \left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

Indique cuántas y cuáles regiones de convergencia son posibles para  $X(z)$ .

**Problema 5.13.** Encuentre para todas las señales discretas  $x(n)$  mostradas en la tabla 5.1 la transformada  $z$  correspondiente utilizando la definición.

**Problema 5.14.** Sea  $x(n)$  una señal con transformada  $z$  racional  $X(z)$ , que tiene un polo en  $z = 1/2$ . Se sabe además que

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n x(n)$$

es absolutamente sumable, pero

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n x(n)$$

no es absolutamente sumable. Con esta información indique si  $x(n)$  es izquierda, derecha, bilateral o finita.

**Problema 5.15.** Encuentre las funciones en tiempo discreto equivalentes a las transformadas  $z$  indicadas en la tabla 5.1 utilizando la definición integral de la transformada  $z$  inversa.

**Problema 5.16.** Utilizando la definición de la transformada  $z$  inversa, encuentre la secuencia en el tiempo discreto equivalente a

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

**Problema 5.17.** Encuentre la transformada  $z$  inversa de:

1.  $X(z) = \cos(z)$
2.  $X(z) = \sen(z)$

sabiendo que en ambos casos el círculo unitario del plano  $z$  se encuentra en la ROC.

**Problema 5.18.** Encuentre por división polinomial la transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

para ROC:  $|z| > 1/3$  y para ROC:  $|z| < 1/3$ .

**Problema 5.19.** Encuentre la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

para todas las posibles regiones de convergencia por medio de descomposición en fracciones parciales.

**Problema 5.20.** Encuentre la transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1}{256} \left[ \frac{256 - z^{-8}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right], \quad \text{ROC: } |z| > 0$$

**Problema 5.21.** Para la ventana rectangular

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea

$$g(n) = x(n) - x(n-1)$$

1. Encuentre una expresión para  $g(n)$  y su transformada  $z$ .
2. Encuentre la transformada  $z$  de  $x(n)$  considerando que

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^n g(k)$$

**Problema 5.22.** Demuestre que dos términos polinomiales simples complejos conjugados, y una ROC externa a los dos polos, dan origen a las señales:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p_1^* z^{-1}} &= 2|A||p_1|^n \cos(n\angle p_1 + \angle A)u(n) \\ &= 2|p_1|^n \operatorname{Re}\{A\} \cos(n\angle p_1) - 2|p_1|^n \operatorname{Im}\{A\} \sin(n\angle p_1) \end{aligned}$$

**Problema 5.23.** Dada la señal triangular

$$g(n) = u_r(n) - 2u_r(n-a) + u_r(n-2a)$$

si  $x(n)$  es una ventana rectangular

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

encuentre los valores de  $k$  y  $n_0$  en términos de  $a$  necesarios para que se cumpla

$$g(n) = x(n) * x(n - n_0)$$

Encuentre la transformada  $z$  de  $g(n)$  directamente de su definición, y utilizando la propiedad de convolución.

**Problema 5.24.** Para las siguientes funciones de transferencia de sistemas discretos, si se sabe que estos son estables indique si además son causales:

1.  $\frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$
2.  $\frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{16}}$
3.  $\frac{z + 1}{z + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}}$

**Problema 5.25.** Un sistema LTI tiene función de transferencia  $H(z)$  y respuesta al impulso  $h(n)$ . Se sabe

1.  $h(n)$  es real
2.  $h(n)$  es derecha
3.  $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$
4.  $H(z)$  tiene dos ceros
5.  $H(z)$  tiene uno de sus polos en una ubicación no real en el círculo  $|z| = 3/4$

¿Es el sistema causal? ¿Es estable?

**Problema 5.26.** Encuentre la transformada  $z$  unilateral de las siguientes señales.

1.  $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+5)$
2.  $x_2(n) = \delta(n+3) + \delta(n) + 2^n u(-n)$
3.  $x_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

**Problema 5.27.** Un sistema de entrada  $x(n)$  y salida  $y(n)$  se rige por la ecuación de diferencias:

$$y(n-1) + 2y(n) = x(n)$$

1. Determine la respuesta de entrada cero al sistema si su condición inicial es  $y(-1) = 2$ .
2. Encuentra la respuesta de estado cero si su entrada es  $x(n) = (1/4)^n u(n)$ .
3. Determine la salida del sistema para  $n \geq 0$  si  $y(-1) = 2$  y  $x(n) = (1/4)^n u(n)$





# Bibliografía

- [1] Y. S. Bugrov and S. M. Nikolsky. *Matemáticas superiores, ecuaciones diferenciales, integrales múltiples, series, funciones de variable compleja*. Mir Moscu, 1988.
- [2] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw Hill, 7ma edición, 2004.
- [3] H. F. Davis. *Fourier series and orthogonal functions*. Dover Publications, Inc., 1963.
- [4] John W. Eaton. Octave [online]. 1998 [visitado el 26 de marzo de 2010]. URL <http://www.octave.org>.
- [5] John W. Eaton. Octave repository [online]. 1998 [visitado el 26 de marzo de 2010]. URL <http://octave.sourceforge.net/afunclist.html>.
- [6] S. Haykin and B. van Veen. *Señales y sistemas*. Limusa Wiley, 2001.
- [7] A.S.B Holland. *Complex Function Theory*. Elsevier North Holland, 1980.
- [8] G. James. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Prentice Hall, 2da edición, 2002.
- [9] E. Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, volume II. Limusa Wiley, 3ra edición, 2000.
- [10] E. Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, volume I. Limusa Wiley, 3ra edición, 2000.
- [11] W. R. LePage. *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. Dover Publications, Inc., 1961.
- [12] D. Lindner. *Introducción a las señales y los sistemas*. McGraw Hill, 2002.
- [13] MathWorks. Matlab [online]. 1994 [visitado el 26 de marzo de 2010]. URL <http://www.matlab.com>.
- [14] A. Oppenheim, A. Willsky, and S. H. Nawab. *Señales y Sistemas*. Prentice Hall, 2da edición, 1998.
- [15] G. Pahl and W. Beitz. *Engineering Design. A Systematic Approach*. Springer Verlag, 2da edición, 1996.

- [16] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Tratamiento Digital de Señales*. Prentice Hall, 1998.
- [17] M. J. Roberts. *Señales y Sistemas. Análisis mediante métodos de transformada y MatLab*. McGraw Hill, 2005.
- [18] R. Schinzinger and P.A.A. Laura. *Conformal Mapping. Methods and Applications*. Dover Publications, Inc., 1991.
- [19] G. E. Shilov. *Elementary Real and Complex Analysis*. Dover Publications, Inc., 1973.
- [20] E. Soria Olivas, M. Martínez Sober, J. V. Francés Villora, and G. Camps Valls. *Tratamiento Digital de Señales. Problemas y ejercicios resueltos*. Prentice Hall, Madrid, 2003.
- [21] M. R. Spiegel. *Variable Compleja*. Schaum. McGraw-Hill, 1991.
- [22] M. R. Spiegel. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería y Ciencias*. Schaum. McGraw-Hill, 2004.
- [23] F. G. Stremler. *Introducción a los sistemas de comunicación*. Addison Wesley Longman, 3ra edición, 1993.
- [24] Wikimedia. Wikipedia [online]. Julio 2005 [visitado el 26 de marzo de 2010]. URL <http://en.wikipedia.org/wiki>.

# Apéndice A

## Teorema de Green

El Teorema de Green es nombrado así en honor al matemático inglés George Green (1793-1841), quien se iniciara como panadero y progresó en la matemática de forma autodidacta hasta llegar a ser miembro del Caius College en Cambridge. A pesar de ello permaneció en el anonimato, incluso en Inglaterra, hasta después de su muerte. Él se dedicó a la teoría del potencial con relación a la electricidad y el magnetismo, vibraciones, ondas y teoría de la elasticidad [10].

El Teorema de Green en el plano, utilizado para demostrar el Teorema de Cauchy en la sección 2.6.2, establece que dada una región  $R$ , cerrada y acotada en el plano  $xy$  cuya frontera  $C$  se compone de un número finito de curvas suaves en sentido positivo, entonces para dos funciones continuas  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , con derivadas parciales  $\partial u(x, y)/\partial y$  y  $\partial v(x, y)/\partial x$  también continuas en todo dominio que contiene a  $R$ , se cumple

$$\iint_R \left( \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) dx dy = \oint_C (u(x, y) dx + v(x, y) dy) \quad (\text{A.1})$$

lo que permite transformar entonces una integral de área en una integral de contorno.

Para demostrar el teorema se asumirá primero que la región  $R$  se puede representar de las dos formas siguientes (figura A.1)

$$a \leq x \leq b, \quad r(x) \leq y \leq s(x) \quad (\text{A.2})$$

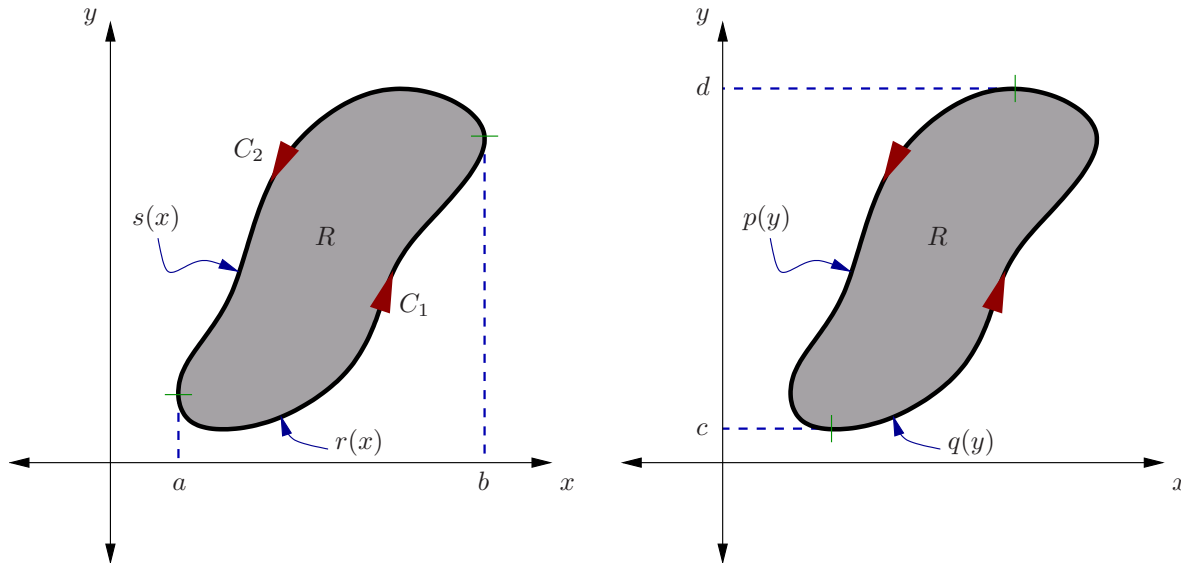
$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y) \quad (\text{A.3})$$

El primer término del integrando a mano izquierda se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\iint_R \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{r(x)}^{s(x)} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dy \right] dx \quad (\text{A.4})$$

y considerando que

$$\int_{r(x)}^{s(x)} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dy = u(x, y) \Big|_{y=r(x)}^{y=s(x)} = u(x, s(x)) - u(x, r(x)) \quad (\text{A.5})$$



**Figura A.1:** Región especial simplemente conexa utilizada para demostrar el teorema de Green.

entonces (invirtiendo los índices de integración),

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dx dy &= \int_a^b u(x, s(x)) dx - \int_a^b u(x, r(x)) dx \\ &= - \left( \int_a^b u(x, r(x)) dx + \int_b^a u(x, s(x)) dx \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y puesto que  $y = r(x)$  representa la curva  $C_1$  y  $y = s(x)$  es  $C_2$ , entonces las últimas integrales pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dx dy &= - \left( \int_{C_1} u(x, y) dx + \int_{C_2} u(x, y) dx \right) \\ &= - \oint_C u(x, y) dx \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De forma equivalente para el otro término del integrando en el lado izquierdo de (A.1):

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) dx dy &= \int_c^d \left[ \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_c^d v(q(y), y) dy + \int_d^c v(p(y), y) dy \\ &= \oint_C v(x, y) dy \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

con lo que finalmente el Teorema de Green

$$\iint_R \left( \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) dx dy = \oint_C (u(x, y) dx + v(x, y) dy)$$

queda demostrado. En caso de que la región no pueda expresarse como en (A.2) y (A.3) entonces las integrales pueden realizarse para un conjunto de regiones de la forma mencionada cuya unión es la región deseada y cuya intersección es vacía.

# Apéndice B

## Demostraciones de integrales

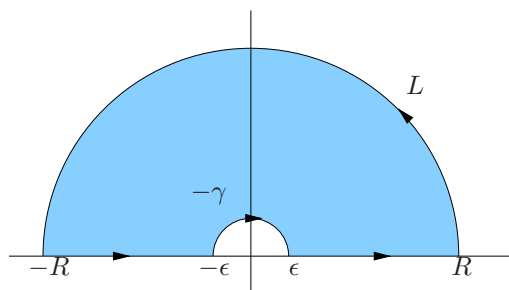
A continuación se presentan dos demostraciones de integrales impropias reales utilizando los métodos de integración compleja.

### Integral de la función $\text{sa}$

Se desea demostrar que se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sa}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi \quad . \quad (\text{B.1})$$

Para ello se parte<sup>1</sup> de la trayectoria de integración mostrada en la figura B.1, y de la función  $e^{jz}/z$ , que es analítica dentro y sobre la trayectoria indicada.



**Figura B.1:** Trayectoria de integración para encontrar el área bajo la función  $\text{sa}$ .

Se debe cumplir entonces por el teorema de Cauchy y considerando que  $z = x + jy = re^{j\phi}$ .

$$\int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_L \frac{e^{jz}}{z} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{jz}}{z} dz = 0$$

---

<sup>1</sup>La demostración aquí presentada se basa en el trabajo del estudiante Erick Salas Chaverri, elaborada en el primer semestre de 2006, a su vez basada en [1]

El segmento  $L$  se puede describir con  $z = Re^{j\phi} = R \cos(\phi) + jR \sin(\phi)$  con  $\phi$  variando desde cero hasta  $\pi$ . Con  $dz = jRe^{j\phi}d\phi$  se cumple

$$\begin{aligned} \left| \int_L \frac{e^{jz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin(\phi)} e^{jR \cos \phi}}{Re^{j\phi}} jRe^{j\phi} d\phi \right| \\ &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin(\phi)} d\phi \end{aligned}$$

Puesto que  $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$  se puede reescribir la integral anterior haciendo un cambio de variable  $\theta = \pi - \phi$  y  $d\theta = -d\phi$  como

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R \sin(\phi)} d\phi &= \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(\phi)} d\phi + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R \sin(\phi)} d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(\phi)} d\phi - \int_{\pi/2}^0 e^{-R \sin(\theta)} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(\phi)} d\phi \end{aligned}$$

Puesto que dentro del intervalo  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  se cumple

$$\sin(\phi) > \frac{2\phi}{\pi}$$

entonces

$$e^{-R \sin(\phi)} < e^{-2R\phi/\pi}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R \sin(\phi)} d\phi &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi/\pi} d\phi \\ &= \frac{\pi e^{-2R\phi/\pi}}{-2R} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi(1 - e^{-R})}{2R} \end{aligned}$$

Para  $R \rightarrow \infty$  el numerador tiende a uno y el denominador a infinito, por lo que esta integral converge en este caso a cero:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L \frac{e^{jz}}{z} dz = 0 \quad (\text{B.2})$$

Para el arco  $\gamma$  de radio  $\epsilon$  se cumple considerando que el límite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{j\epsilon z}$  es, para todo  $z$  finito, igual a uno

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\gamma \frac{e^{jz}}{z} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{e^{j\epsilon(\cos \phi + j \sin \phi)}}{\epsilon e^{j\phi}} j\epsilon e^{j\phi} d\phi \\ &= j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{j\epsilon(\cos \phi + j \sin \phi)} d\phi \\ &= j \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\phi = j\pi \end{aligned}$$

Considerando los cuatro segmentos de la trayectoria se debe cumplir entonces

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx}}{x} dx + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{jx}}{x} dx &= j\pi \\ \int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx}}{x} dx - \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{jx}}{x} dx &= j\pi\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable  $x' = x$  en el segundo término se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx}}{x} dx - \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-jx'}}{x'} dx' &= j\pi \\ \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} 2j \int_{\epsilon}^R \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2x} dx &= 2j \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = j\pi \\ \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

y considerando que la función  $\text{sen}(x)$  posee simetría par, se concluye

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\text{sen}(x)}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi$$

con lo que (B.1) queda demostrado.

## Área bajo el impulso gaussiano

El impulso gaussiano se define como

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

Se desea demostrar ahora que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 1 \quad (\text{B.3})$$

utilizando los métodos de integración compleja<sup>2</sup>.

Haciendo un cambio de variable

$$\nu = \frac{t}{\sigma\sqrt{2}}; \quad \nu^2 = \frac{t^2}{2\sigma^2}; \quad d\nu = \frac{dt}{\sigma\sqrt{2}}$$

se puede reescribir la integral como

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2} \sigma\sqrt{2} d\nu &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\nu^2} d\nu &= 1\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Esta demostración se basa en el trabajo del estudiante Carlos Andrés Pérez en el primer semestre de 2006, basada a su vez en las páginas 182-183 del libro de Holland [7]

y utilizando la paridad del integrando se obtiene finalmente

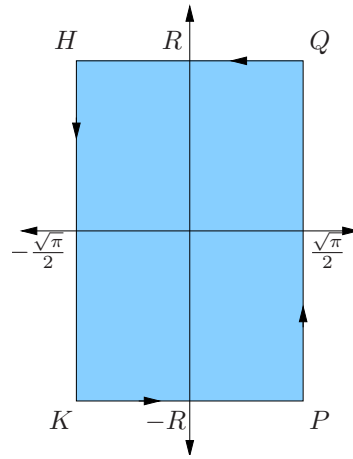
$$\int_0^{\infty} e^{-\nu^2} d\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{B.4})$$

Si se logra demostrar que (B.4) se cumple, se habrá demostrado que (B.3) es cierta, puesto que bastará invertir los pasos seguidos en el cambio de variable para llegar al punto de partida.

Para demostrar esto se utilizará la integral de contorno en el plano complejo  $z = x + jy$

$$\oint_C \frac{e^{jz^2}}{\text{sen}(z\sqrt{\pi})} dz$$

donde el contorno de integración rectangular  $C$  se muestra en la figura B.2. Separando al



**Figura B.2:** Contorno de integración utilizado para encontrar el área bajo el impulso gaussiano.

contorno en cuatro segmentos lineales se cumple

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{jz^2}}{\text{sen}(z\sqrt{\pi})} dz &= \int_{PQ} \frac{e^{jz^2}}{\text{sen}(z\sqrt{\pi})} dz + \int_{HK} \frac{e^{jz^2}}{\text{sen}(z\sqrt{\pi})} dz + \\ &\quad \int_{KP} \frac{e^{jz^2}}{\text{sen}(z\sqrt{\pi})} dz + \int_{QH} \frac{e^{jz^2}}{\text{sen}(z\sqrt{\pi})} dz \end{aligned}$$

La integral en cada uno de los segmentos se evaluará a continuación.

Para el segmento  $PQ$  se cumple  $z = x + jy$ , donde  $x = \sqrt{\pi}/2$ . Por lo tanto, el numerador se puede expresar como

$$\begin{aligned} e^{jz^2} &= e^{-2xy} e^{j(x^2 - y^2)} \\ &= e^{-\sqrt{\pi}y} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - y^2\right)} \end{aligned}$$

y para el denominador se obtiene

$$\text{sen}(\sqrt{\pi}z) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + j\sqrt{\pi}y\right)$$



Utilizando la identidad de Euler lo anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{j(\frac{\pi}{2}+j\sqrt{\pi}y)} - e^{-j(\frac{\pi}{2}+j\sqrt{\pi}y)}}{2j} \\ &= \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-\sqrt{\pi}y} - e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{\sqrt{\pi}y}}{2j} = \frac{je^{-\sqrt{\pi}y} + je^{\sqrt{\pi}y}}{2j} \end{aligned}$$

y por tanto sobre el segmento  $PQ$

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\pi}z) = \frac{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}}{2} = \cosh(\sqrt{\pi}y)$$

de modo que con  $dz = jdy$

$$\int_{PQ} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz = \int_{-R}^R \frac{2e^{-\sqrt{\pi}y}e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)}}{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}} j dy$$

Del mismo modo para el segmento  $HK$  se cumple que  $z = x + jy$  con  $x = -\sqrt{\pi}/2$ . Por lo tanto, el numerador se puede expresar como

$$\begin{aligned} e^{jz^2} &= e^{-2xy}e^{j(x^2-y^2)} \\ &= e^{\sqrt{\pi}y}e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} \end{aligned}$$

y para el denominador se obtiene

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\pi}z) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + j\sqrt{\pi}y\right)$$

Utilizando la identidad de Euler lo anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{j(-\frac{\pi}{2}+j\sqrt{\pi}y)} - e^{-j(-\frac{\pi}{2}+j\sqrt{\pi}y)}}{2j} \\ &= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-\sqrt{\pi}y} - e^{j\frac{\pi}{2}}e^{\sqrt{\pi}y}}{2j} = \frac{-je^{-\sqrt{\pi}y} - je^{\sqrt{\pi}y}}{2j} \end{aligned}$$

y por tanto sobre el segmento  $HK$

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\pi}z) = -\frac{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}}{2} = -\cosh(\sqrt{\pi}y)$$

de modo que con  $dz = jdy$

$$\begin{aligned} \int_{HK} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz &= \int_R^{-R} -\frac{2e^{\sqrt{\pi}y}e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)}}{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}} j dy \\ &= \int_{-R}^R \frac{2e^{\sqrt{\pi}y}e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)}}{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}} j dy \end{aligned}$$

Combinando los resultados de los segmentos  $PQ$  y  $HK$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{PQ} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz + \int_{HK} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz &= j \int_{-R}^R \frac{2e^{-\sqrt{\pi}y} e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)}}{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}} + \frac{2e^{\sqrt{\pi}y} e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)}}{e^{\sqrt{\pi}y} + e^{-\sqrt{\pi}y}} dy \\ &= 2j \int_{-R}^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy \end{aligned}$$

Para el segmento  $QH$  se cumple  $z = x + jy$  con  $y = R$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} |e^{jz^2}| &= |e^{j(x+jR)^2}| \\ &= |e^{j(x^2-R^2)} e^{-2xR}| \\ &= e^{-2xR} \end{aligned}$$

Además, en dicho segmento  $QH$  se cumple

$$|\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})| = |\operatorname{sen}((x+jR)\sqrt{\pi})|$$

y considerando que  $|\operatorname{sen} z|^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y)$  con  $z = x + jy$  (ver problema 2.52) entonces

$$|\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})|^2 = \operatorname{sen}^2(x\sqrt{\pi}) + \operatorname{senh}^2(R\sqrt{\pi})$$

y puesto que ambos términos en la suma anterior son positivos, se cumple para todo valor positivo de  $R$  que

$$|\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})| \geq \operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})$$

por lo que para  $z = x + jR$

$$\begin{aligned} \left| \int_{QH} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz \right| &\leq \left| \int_{QH} \left| \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} \right| dz \right| \\ &\leq \left| \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{e^{-2xR}}{\operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} \frac{e^{-2xR}}{-2R} \right|_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \\ &\leq \frac{1}{R \operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} \left( \frac{e^{R\sqrt{\pi}} - e^{-R\sqrt{\pi}}}{2} \right) = \frac{\operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})}{R \operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} \\ &\leq \frac{1}{R} \end{aligned}$$

de modo que si  $R \rightarrow \infty$  el aporte del segmento de trayectoria  $QH$  es cero.

Para el segmento  $KP$  se cumple  $z = x - jR$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} |e^{jz^2}| &= |e^{j(x-jR)^2}| \\ &= |e^{j(x^2-R^2)} e^{2xR}| \\ &= e^{2xR} \end{aligned}$$

Además, en dicho segmento  $KP$  se cumple

$$|\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})| = |\operatorname{sen}((x - jR)\sqrt{\pi})|$$

y considerando que  $|\operatorname{sen} z|^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y)$  y que el seno hiperbólico es una función impar entonces

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})|^2 &= \operatorname{sen}^2(x\sqrt{\pi}) + \operatorname{senh}^2(-R\sqrt{\pi}) \\ &= \operatorname{sen}^2(x\sqrt{\pi}) + (-1)^2 \operatorname{senh}^2(R\sqrt{\pi}) \\ &= \operatorname{sen}^2(x\sqrt{\pi}) + \operatorname{senh}^2(R\sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

y puesto que ambos términos en la suma anterior son positivos, se cumple para todo valor positivo de  $R$  que

$$|\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})| \geq \operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})$$

por lo que para  $z = x - jR$

$$\begin{aligned} \left| \int_{KP} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz \right| &\leq \left| \int_{KP} \left| \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} \right| dz \right| \\ &\leq \left| \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{e^{2xR}}{\operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} \frac{e^{2xR}}{2R} \right|_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \\ &\leq \left| \frac{1}{R \operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} \left( \frac{e^{-R\sqrt{\pi}} - e^{R\sqrt{\pi}}}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{-\operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})}{R \operatorname{senh}(R\sqrt{\pi})} \right| \\ &\leq \frac{1}{R} \end{aligned}$$

de modo que si  $R \rightarrow \infty$  el aporte del segmento de trayectoria  $KP$  es también cero.

Por lo tanto, combinando los resultados para los cuatro segmentos se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{PQ} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz + \int_{HK} \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2j \int_{-R}^R e^{j(\frac{\pi}{4} - y^2)} dy \end{aligned}$$

y considerando que el integrando es analítico dentro y sobre el contorno  $C$  excepto en el punto  $z = 0$  se obtiene con el teorema del residuo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz = 2\pi j a_{-1}$$

donde el residuo  $a_{-1}$  se calcula con

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{jz^2}}{\frac{\sqrt{\pi} \operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})}{z\sqrt{\pi}}}$$

y puesto que se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$$

se obtiene

$$a_{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

de modo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{jz^2}}{\operatorname{sen}(z\sqrt{\pi})} dz = \frac{2\pi j}{\sqrt{\pi}} = j2\sqrt{\pi} = \lim_{R \rightarrow \infty} 2j \int_{-R}^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy$$

de donde se deriva

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy &= \sqrt{\pi} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^0 e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy + \int_0^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy \right) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

y con  $y' = -y$  y  $dy' = -dy$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( - \int_R^0 e^{j(\frac{\pi}{4}-y'^2)} dy' + \int_0^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy \right) &= \sqrt{\pi} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \int_0^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy &= \sqrt{\pi} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{j(\frac{\pi}{4}-y^2)} dy &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-jy^2} dy &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable  $\nu^2 = jy^2$  y considerando que una de las raíces cuadradas de  $j$  es  $e^{j\frac{\pi}{4}}$  se cumple  $\nu = e^{j\frac{\pi}{4}}y$  y  $dy = e^{-j\frac{\pi}{4}}d\nu$  y por tanto

$$\int_0^\infty e^{-\nu^2} d\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

que fue el punto de partida.

# Índice alfabético

- adelantador, 294
- álgebra lineal
  - teorema fundamental, 112
- analógica, 2
- análisis, 132
  - ecuación de, 127
- ancho de banda, 179
- ángulo, 17
- anillo, 13
  - conmutativo, 13
  - de división, 13
- anticausalidad, 223
- Argand, 17
- argumento, 17
- armónico, 151
- axiomas, 11
- axiomas de Peano, 13
- Banach
  - espacio de, 113
- base, 111
  - canónica, 118, 127
  - ortogonal, 116
  - ortonormal, 116
- BIBO, 281
- Bromwich, 213
- canales, 2
- carta de Smith, 36
- cascada, 292
- Cauchy
  - Fórmula de la integral, 80
  - secuencia de, 15, 113
  - Teorema de la integral, 76
- Cauchy-Goursat, 77
- Cauchy-Hadamard
  - fórmula, 55
- Cauchy-Riemann
  - Ecuaciones, 48
- Cauchy-Schwarz
  - desigualdad de, 114
- causalidad, 187, 223, 280
- cero, 66
  - aislado, 66
- codificación, 246
- codominio, 25
- combinación lineal, 110
- completitud, 15
- componente
  - imaginaria, 16
  - real, 16
- condición inicial, 273
- condiciones de Dirichlet, 135
- conjugación, 209, 232, 260
- conjugación compleja, 20
- conjunto, 9, 11
  - abierto, 42
  - acotado, 42
  - cerrado, 42
  - clausura, 42
  - compacto, 42
  - ilimitado, 42
  - imagen, 25
- conjunto generador, 111
- conjunto libre, 111
- conjunto ligado, 111
- continuación analítica, 19, 53
- continuidad, 43
- contorno
  - Bromwich, 212
- convergencia

- región de, 201
- convolución, 176, 185, 210, 233, 262, 277
  - discreta, 148
  - periódica, 148
- coordenada, 112
- cuantificación
  - definición, 246
  - error, 246
- cuerpo, 13, 15, 109
- curva
  - cerrada, 71
  - de Jordan, 71
  - simple, 71
  - suave, 71
- D’Alambert
  - razón, 55
- degenerado
  - mapeo, 27
- delta
  - Dirac, 130
- derivada, 44
- descomposición, 276
- desigualdad
  - Cauchy-Schwarz, 114
  - Minkowski, 76, 113, 115
  - ML, 76
  - triángulo, 115
- desplazamiento, 167, 209, 230, 258, 277
- diagrama de Argand, 17
- diagrama de polos y ceros, 203
- diferencia, 10
- diferenciación, 170, 210, 233, 261
- digital, 2
- dimensión, 111, 112
- distancia, 112
- división, 22
- dominio, 25, 42
- dominio de la frecuencia, 153
- dualidad, 174
- ecuación
  - de diferencias, 283
- ecuaciones
  - diferenciales, 225, 235
- elemento
  - inverso, 11
  - neutro, 11
- elementos, 9
- escalón
  - unitario, 159, 162, 249
- escalado, 259
- escalamiento, 174, 210, 232
- espacio
  - Banach, 113
  - completo, 113, 116
  - euclidiano, 117
  - funcional, 123
  - Hilbert, 116
  - lineal, 110
  - métrico, 112
  - pre-Hilbert, 113
  - producto interno, 113
  - vectorial, 110
- espacio lineal
  - finito, 111
- espectro continuo, 155
- estabilidad, 187, 224, 281
- estructura algebraica, 11
- Euler
  - fórmula, 19
  - identidad, 19
- exponenciación, 23
- exponencial, 159, 250
  - relacionada armónicamente, 131
- Fourier
  - transformada, 153, 154
  - transformada inversa, 155
- fracciones parciales, 59, 64, 80, 267
  - descomposición, 215
- frecuencia
  - de muestreo, 178
- función, 24
  - analítica, 44
  - armónica, 49
  - asimétrica, 144
  - conjugada, 48

- de transferencia, 223
- del sistema, 223
- Heaviside, 159
- holomorfa, 44
- impropia, 267
- meromorfa, 67
- propia, 186, 267
- racional propia, 216
- regular, 44
- residuo, 67
- simétrica, 144
- grupo, 12
  - abeliano, 12
- grupoide, 12
- identidad, 272
- impulso
  - Dirac, 130, 158
  - gaussiano, 163
  - unitario, 158, 249
- integración, 172, 211, 234
- integral
  - definida, 71
  - indefinida, 70
  - trayectoria, 71
- integral de contorno, 73
- integral de línea, 73
- interconexión
  - cascada, 292
  - paralela, 292
- intersección, 10
- invarianza
  - en el tiempo, 182, 274
- inversión
  - temporal, 260
- Jordan
  - curva de, 71
  - lema, 89
- Laplace
  - transformada, 199
  - transformada bilateral, 200
  - transformada inversa, 211
  - transformada unilateral, 228
- Laurent
  - parte principal, 62
- línea
  - espectral, 137
- linealidad, 166, 181, 208, 229, 256, 274
- logaritmo, 24
- magma, 12
- magnitud, 17, 21
- mapeo, i, 26
  - bilineal, 35
  - conforme, 51
  - de inversión, 32
  - degenerado, 27
  - determinante, 36
  - lineal, 27
- mediatriz, 28
- métrica, 112
- métrica euclidiana, 118
- Minkowski
  - desigualdad de, 76, 113, 115
- modelo, 4
  - lineal, 4
- modulación, 168
- módulo, 17, 21
- Moivre
  - teorema de, 23
- monoide, 12
  - conmutativo, 12
- muestreo, 127
  - definición, 246
  - intervalo, 246
  - periódico, 246
  - teorema del, 180
  - uniforme, 246
- multiplicación, 14, 22, 277
- multiplicador, 293, 294
- norma, 113, 114
- número, 13
  - complejo, 16
  - entero, 14
  - natural, 13

- racional, 14
- real, 15
- operación
  - binaria, 11
  - cerrada, 11
  - unaria, 11
- operaciones, 11
- operador, 141
- operador lineal, 46
- ortogonal, 109
- ortogonalidad, 116
- paralelo, 292
- Parseval
  - relación de, 175
- periodo, 131
  - de muestreo, 178
  - fundamental, 131
- plano complejo, 17
- polinomio bilineal, 35
- polo, 66
  - orden, 66
- potenciación, 23
- principio de incertidumbre, 163
- producto cartesiano, 10
- producto escalar, 113
- producto interno, 113
- producto punto, 118
- punto
  - de acumulación, 42
  - fijo, 26
  - frontera, 42
  - interior, 42
  - límite, 42
  - regular, 66
- radio de convergencia, 54
- raíz
  - compleja, 23
- rampa, 249
- rango, 25
- reflexión, 277
- región
  - abierta, 42
  - cerrada, 42
  - convexa, 71
  - de convergencia, 201, 204, 252
- relación, 24
- relación de Parseval, 151
- reposo, 273
- residuo, 67
  - teorema, 85
- respuesta
  - forzada, 291
  - natural, 291
- respuesta al impulso, 184
- respuesta en frecuencia, 184, 223
- resta, 14, 21
- retardador, 294
- ROC, 201
- sa
  - función, 67
- señal, 1
  - aleatoria, 3
  - bilateral, 206
  - derecha, 205
  - determinista, 3
  - izquierda, 206
  - multicanal, 2
  - tiempo discreto, 2
- secuencia
  - de Cauchy, 15, 113
- semianillo, 12
- semigrupo, 12
- seminorma, 113
- señal
  - causal, 187
  - de energía, 176
  - de potencia, 176
- serie
  - de potencias, 53
  - Fourier, 132
  - generalizada de Fourier, 127
- Serie de MacLaurin, 58
- Serie de Taylor, 58
- sesquilinealidad, 114
- simetría, 167



- conjugada, 132
- hermítica, 132
- impar, 144
- par, 144
- singularidad, 61, 66
  - esencial, 66
  - polo, 66
- síntesis, 132
  - ecuación de, 127
- sistema, 3
  - causal, 187, 280
  - discreto, 272
  - estable, 282
  - inestable, 282
  - lineal, 181
  - no causal, 187
  - no recursivo, 284
  - recursivo, 283
  - tiempo discreto, 272
- Smith
  - carta de, 36
- subespacio, 111
- suma, 14, 21, 277
- sumador, 293
- teorema
  - del muestreo, 180
  - del valor final, 290
  - fundamental de integración compleja, 77
  - integral de Cauchy, 77
- tiempo
  - invarianza, 182
- transformación, 26
- transformada
  - $z$ , 245
  - Fourier, 153
  - Laplace, 199
  - $z$  inversa, 264
  - $z$  unilateral, 287
- transformada  $z$ 
  - inversa, 264
- trayectoria
  - cerrada, 71
  - de integración, 71
  - simple, 71
- triángulo
  - desigualdad, 115
- tupla, 109
- unión, 9
- valor absoluto, 21
- valor final
  - teorema, 235, 289
- valor inicial
  - teorema, 234, 262
- valor principal, 24
- vecindad, 41
  - reducida, 41
- vector, 2, 110
  - generador, 111
  - ortogonal, 116
- vectores
  - linealmente dependientes, 111
  - linealmente independientes, 111