1 Подмногообразия общих гиперповерхностей в проективном пространстве

Гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$ параметризуются проективным пространством $\mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{P^n}(d)))$; иногда нам будет удобнее параметризовать не сами гиперповерхности, а задающие их многочлены, и тогда пространством параметров будет $S^d = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. Под «общей гиперповерхностью» мы будем понимать такую гиперповерхность, что соответствующая ей точка $\mathbb{P}^{N_d}$ лежит в дополнении к счетному объединению некоторых (очевидных из ситуации) собственных подмногообразий. Таким образом, выражение «для общей гиперповерхности верно A» означает, что те гиперповерхности, для которых A может оказаться неверным, параметризуются счетным объединением собственных замкнутых подмножеств в $\mathbb{P}^{N_d}$.

Первый результат об отсутствии рациональных (и эллиптических) кривых на общей гиперповерхности принадлежит Клеменсу (1986):

Теорема 1.1 *На общей гиперповерхности X_d степени d в $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, нет рациональных кривых, если $d \geq 2n-1$.*

Тогда же Клеменс предложил такую гипотезу:

При $n \geq 4$ это верно и если $d \geq 2n-2$.

(Эта гипотеза была впоследствии доказана Клэр Вуазен, к чему мы еще вернемся.)

Заметим, что при $d = 2n-3$ рациональные кривые на X_d, конечно, есть например, прямые. В самом деле, рассмотрим многообразие инцидентности $F \subset Grass(1,n) \times \mathbb{P}^{N_d}$ такого вида: $F = \{(l, X) \mid l \subset X\}$ (здесь $Grass(1,n)$ многообразие прямых в $\mathbb{P}^n$). Слой F_l над $l \in Grass(1,n)$ естественно отождествляется с проективизацией пространства сечений пучка $\mathcal{I}_l(d)$, а значит, имеет коразмерность $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = d+1$ в силу точной последовательности

$$0 \to \mathcal{I}_l(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \to \mathcal{O}_l(d) \to 0;$$

так что из соображений размерности получаем, что общая гиперповерхность $X_d \subset \mathbb{P}^n$ содержит прямые тогда и только тогда, когда $d+1 \leq \dim(Grass(1,n)) = 2n-2$.

Естественно предположить, что при $d = 2n-3$ рациональных кривых на общей X_d имеется лишь счетное число, т.е. имеется лишь конечное число рациональных кривых заданной степени; но это трудная задача знаменитая гипотеза Клеменса. Видимо, из-за нее теорему Клеменса и формулируют как утверждение об отсутствии рациональных кривых; на самом же деле Клеменс доказал более общее утверждение:

Теорема 1.1A *Для кривой C на общей гиперповерхности X_d имеем*

$$H^0(\tilde{C}, K_{\tilde{C}} \otimes \sigma^* \mathcal{O}_{P^n}(2n-d-1)) \neq 0,$$

где $\sigma\colon \tilde{C} \to C$ нормализация.

Почему в такой формулировке результат Клеменса интереснее? Например, отсюда видно, что при $d \geq 2n$ на общей X_d нет не только рациональных, но и эллиптических кривых; и вообще, $\deg(K_{\tilde{C}}) \geq (2n-d-1)\deg(C)$. То есть при $d \geq 2n$ для любой кривой $C \in X_d$

$$2g(\tilde{C}) - 2 \geq \epsilon \deg(C),$$

где ϵ некоторая положительная константа, не зависящая от C. Это свойство X_d называется *алгебраической гиперболичностью.* Мы увидим, что алгебраическая гиперболичность следствие гиперболичности по Кобаяси.

Гипотеза Кобаяси утверждает, что общая $X_d \subset \mathbb{P}^n$ гиперболична при $d \geq 2n-1$. Несмотря на то что результат Клеменса о рациональных кривых был улучшен Эйном, Сю (Xu) и Вуазен, алгебраическая гиперболичность общей гиперповерхности степени $2n-1$, кажется, пока не доказана даже для $n = 3$.

Л.Эйн обобщил теорему Клеменса следующим образом.

Теорема 1.2 *Пусть X общее полное пересечение типа $(d_1, \ldots, d_k)$ в $\mathbb{P}^n$, $d = \sum d_i$, а $Z \subset X$ подмногообразие. Пусть m_0 наименьшее число, удовлетворяющее $H^0(\tilde{Z}, K_{\tilde{Z}} \otimes \sigma^*\mathcal{O}(m_0)) \neq 0$ (здесь $\sigma\colon \tilde{Z} \to Z$ разрешение особенностей Z). Тогда $m_0 \leq 2n - k - d + 1 - \dim(Z)$.*

Таким образом, в случае гиперповерхности имеем $m_0 \leq 2n - d - \dim(Z)$.

Для дивизоров имеется также некоторое усиление «граничного случая» этого результата, принадлежащее Сю:

В условиях теоремы 1.2, *если $d = n+2$, а Z дивизор на X, то $p_g(\tilde{Z}) \geq n-1$.*

В частности, на общей квинтике в $\mathbb{P}^3$ нет эллиптических кривых.

Общий принцип доказательства похожих утверждений был предложен Вуазен. Для простоты обозначений мы будем рассматривать только случай, когда X гиперповерхность, хотя аналогичное доказательство теоремы 1.1A проходит и для полных пересечений.

Прежде чем обратиться к доказательствам, обсудим, что означают слова «подмногообразие общей гиперповерхности»: грубо говоря, «общая гиперповерхность X содержит Z» значит, что Z деформируется вместе с X. Точнее всевозможные подмногообразия Z в $\mathbb{P}^n$ параметризуются схемой Гильберта, которая состоит из счетного числа неприводимых компонент. Для фиксированного Z_0 рассмотрим соответствующую компоненту $Hilb(Z_0)$ и подмногообразие $I \subset Hilb(Z_0) \times \mathbb{P}^{N_d}$: $I = \{(t,u) \mid Z_t \subset X_u\}$; здесь мы предполагаем для простоты, что Z_0 соответствует достаточно общей точке $Hilb(Z_0)$. Z_0 «лежит на общей гиперповерхности», если и только если I доминирует $\mathbb{P}^{N_d}$. (Именно так и возникает дополнение к счетному числу собственных замкнутых подмножеств в определении «общности»: мы должны выкинуть образы всевозможных I, не доминирующих $\mathbb{P}^{N_d}$.)

Обозначим как $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$ универсальную гиперповерхность степени d; как подмногообразие $\mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$, наша $\mathcal{X}$, естественно, имеет бистепень

$(1, d)$. Если Z лежит на общей гиперповерхности, то, выбирая мультисечение относительной схемы Гильберта над открытым подмножеством $\mathbb{P}^{N_d}$ и отбрасывая его ветвление, получим этальный (не сюръективный) морфизм $\tau\colon U \to \mathbb{P}^{N_d}$, такой, что $\mathcal{X}_U := \mathcal{X} \times_{\mathbb{P}^{N_d}} U$ содержит «универсальное подмногообразие» $\mathcal{Z}_U$ (слой $\mathcal{Z}_U$ над точкой $t \in \mathbb{P}^{N_d}$ это Z_t, деформация Z, содержащаяся в гиперповерхности X_t). Для простоты обозначений мы не будем различать $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_U$ это действительно несущественно для наших приложений; иными словами, мы будем вести себя так, как если бы наше «универсальное подмногообразие» было определено уже над открытым подмножеством в $\mathbb{P}^{N_d}$.

Покажем, следуя Вуазен, что теорема 1.1А следует из такого утверждения (здесь T_X, $T_{\mathcal{X}}$ обозначают касательные расслоения):

Предложение 1.3 *Рассмотрим универсальную гиперповерхность*

$$\mathcal{X} \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times \mathbb{P}^n,$$

где $d \geq 2$, $n \geq 3$. Предположим, кроме того, что $H^0(X_t, T_{X_t}(1)) = 0$. Тогда для гладкой X_t расслоение $T\mathcal{X}(1)|_{X_t}$ порождается глобальными сечениями.

Здесь и далее $T\mathcal{X}(1)$ – это $T\mathcal{X} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, где – $p\colon \mathcal{X} \to \mathbb{P}^n$ проекция.

Заметим, что последнее условие $H^0(X_t, T_{X_t}(1)) = 0$ заведомо выполнено в интересующем нас случае, когда X_t общего типа, т.е. $d > n+1$. Это следует из того, что $H^0(X_t, T_{X_t} \otimes K_{X_t}) = H^0(X_t, \Omega^{n-2}_{X_t}) = 0$ по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении: в самом деле, X_t гиперповерхность общего типа в проективном пространстве, поэтому $K_{X_t} = \mathcal{O}_{X_t}(k)$, где $k \geq 1$.

Вывод 1.2 *из* 1.3: Пусть $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ универсальное подмногообразие, а $\sigma\colon \tilde{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$ какоенибудь разрешение особенностей. Предположим, что для некоторого числа a расслоение $\Omega^{\dim(\mathcal{Z})}_{\mathcal{X}}|_{X_t}(a)$ порождено глобальными сечениями. Поскольку отображение ограничения

$$\Omega^{\dim(\mathcal{Z})}_{\mathcal{X}}|_{X_t}(a) \to \Omega^{\dim(\mathcal{Z})}_{\tilde{\mathcal{Z}}}|_{\tilde{Z}_t}(a) \cong K_{\tilde{Z}_t}(a)$$

сюръективно в общей точке, то $K_{\tilde{Z}_t}(a)$ должно иметь сечения.

Пусть $l = codim(Z, X)$; из предложения 1.3 следует, что $\Lambda^l T\mathcal{X}|_{X_t}(l)$ глобально порождено. Поскольку $K_{\mathcal{X}}|_{X_t} = K_{X_t} = \mathcal{O}_{X_t}(d - n - 1)$, имеем

$$\Lambda^l T\mathcal{X}|_{X_t}(l) \cong \Lambda^{\dim(\mathcal{Z})}\Omega_{\mathcal{X}}|_{X_t}(l - d + n + 1),$$

то есть в качестве a можно взять $l - d + n + 1 = 2n - d - \dim(Z)$, что и требовалось доказать.

Предложение 1.3 доказывается достаточно элементарно; доказательство состоит в подсчете разности размерностей $H^0(T\mathcal{X}(1)|_{X_t})$ и $H^0(T\mathcal{X}(1)|_{X_t} \otimes I_x)$, где x точка X_t, а I_x ее пучок идеалов (для глобальной порожденности необходимо и достаточно, чтобы эта разность была равна $rk(T\mathcal{X}) = \dim(S^d) + n - 1$ для любой точки x). Вместо того чтобы приводить здесь это доказательство (проходящее и для полных пересечений), мы изложим несколько более естественный аргумент, который хорошо работает для гиперповерхностей.

Рассмотрим так называемую «вертикальную компоненту» $T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}$ расслоения $T\mathcal{X}$: это просто касательное расслоение вдоль слоев проекции $p\colon \mathcal{X} \to \mathbb{P}^n$, так что

$$0 \to T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}|_{X_t} \to T\mathcal{X}|_{X_t} \to TP^n|_{X_t} \to 0.$$

Заметим, что можно предполагать, что наше «универсальное подмногообразие» $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ инвариантно по отношению к естественному действию $GL(n+1, C)$ на $\mathbb{P}^n \times S^d$: $g(x, F) = (gx, F \circ g^{-1})$; точнее, этого можно добиться заменой базы. Из этого сразу следует, что $T\mathcal{Z}$ сюръективно отображается на TP^n, то есть «вертикальная коразмерность» $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{X}$ а именно $codim(T\mathcal{Z}^{\mathrm{vert}}, T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}})$ равна $codim(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$.

Отсюда легко выводится, что вместо предложения 1.3 нам достаточно такого:

Предложение 1.3A *$T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}(1)|_{X_t}$ порождается глобальными сечениями.*

Действительно, пусть $l = codim(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$; сечения $\Lambda^l T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}(l)|_{X_t}$ можно вычислять на «вертикальных компонентах» касательных плоскостей к $\mathcal{Z}$ в точках Z_t, поскольку коразмерность этих компонент правильна. Из глобальной порожденности $\Lambda^l T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}(l)|_{X_t}$ следует, что для любой гладкой точки $z \in Z_t$ найдется сечение $s \in H^0(\Lambda^l T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}(l)|_{X_t})$, ненулевое на $T_z\mathcal{Z}^{\mathrm{vert}}$. Применяя, как и выше, двойственность, а потом ограничение на $\mathcal{Z}$, получим ненулевое сечение должным образом подкрученного $K_{\tilde{Z}_t}$.

Доказательство 1.3A: [Доказательство предложения 1.3A] Из $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times S^d$ имеем

$$0 \to T\mathcal{X}|_{X_t} \to TP^n|_{X_t} \oplus (S^d \otimes \mathcal{O}_{X_t}) \to \mathcal{O}_{X_t}(d) \to 0,$$

поскольку $\mathcal{O}_{X_t}(d)$ это ограничение на X_t нормального расслоения $\mathcal{X}$ в $\mathbb{P}^n \times S^d$. Отсюда и из

$$0 \to T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}|_{X_t} \to T\mathcal{X}|_{X_t} \to TP^n|_{X_t} \to 0$$

имеем, что $T\mathcal{X}^{\mathrm{vert}}|_{X_t} \cong M^d_{\mathbb{P}^n}|_{X_t}$, где $M^d_{\mathbb{P}^n}$ ядро отображения вычисления глобальных сечений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$:

$$0 \to M^d_{\mathbb{P}^n} \to S^d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \to 0.$$

Значит, достаточно доказать, что $M^d_{\mathbb{P}^n}(1)$ порождается глобальными сечениями. А это следует, например, из его 0регулярности в смысле Кастельнуово Мамфорда (которая, в свою очередь, очевидна из точной последовательности, определяющей $M^d_{\mathbb{P}^n}$). Напомним (см., например, [?]), что пучок F на $\mathbb{P}^n$ *mрегулярен по Кастельнуово Мамфорду*, если для всех $i > 0$ выполнено условие $H^i(P^n, F(m-i)) = 0$; индукцией по n доказывается, что если F mрегулярен, то $F(l)$ порождается глобальными сечениями при $l \geq m$. Итак, предложение 1.3A, а с ним и теорема Эйна, доказано.

Замечания (некоторые из них очень длинные!):

Замечания (некоторые из них очень длинные!)

1) Оценка Эйна для m_0 не оптимальна; хотелось бы, конечно, улучшить ее на 1. В случае, когда $\mathcal{Z}$ дивизор, это очень трудно, если вообще возможно: так, из улучшенного варианта, полагая $n = 4$ и $d = 5$, мы получили бы, что на общей квинтике в $\mathbb{P}^5$ не существует дивизора, покрытого рациональными кривыми а это и есть гипотеза Клеменса о конечности числа рациональных кривых заданной степени на такой квинтике.

2) Клэр Вуазен попыталась уменьшить m_0 на 1 в случае $codim(\mathcal{Z}) \geq 2$, рассматривая расслоение $\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t}$. Это бы полностью удалось, если бы было верно, что линейная система $H^0(\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t})$, рассматриваемая как пространство сечений некоторого линейного расслоения на относительном грассманиане подпространств коразмерности 2 в слоях $T\mathcal{X}|_{X_t}$, не имеет базисных точек на множестве GLинвариантных (т.е.касательных к GLинвариантным семействам подмногообразий) подпространств коразмерности 2 в $T\mathcal{X}|_{X_t}$. Действительно, рассуждая, как и раньше, на этот раз мы получили бы сечение подкрученного канонического класса из сечений

$$\Lambda^{codim(Z,X)} T\mathcal{X}(codim(Z,X) - 1)|_{X_t},$$

т.е.подкрутка оказалась бы на единицу меньше. К сожалению, утверждение неверно: в $\mathcal{X}$ есть довольно много (GLинвариантных) подмногообразий $\mathcal{Z}$, таких, что ограничение сечений «должным образом» подкрученных дифференциальных форм с $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Z}$ нулевое.

Такие подмногообразия легко строятся для небольших d. Вот самый элементарный пример:

Пример 1: Пусть k натуральное число, а $d = 2n - 2 - k$. Рассмотрим $P_t \subset X_t$ подмногообразие, заметаемое прямыми. Подсчет размерностей (как после формулировки теоремы 1.1) показывает, что $\dim(P_t) = k$. Рассмотрим универсальное $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$. Если бы $\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t}$ порождалось глобальными сечениями, то же было бы верно и для

$$\Lambda^{n-1-k} T\mathcal{X}(n - 2 - k)|_{X_t} \cong \Lambda^{\dim(\mathcal{P})} \Omega_{\mathcal{X}}(1)|_{X_t},$$

то есть у расслоения $K_{\tilde{P}_t}(1)$ были бы сечения, а это невозможно, так как P_t заметается прямыми.

Вот «лучший» пример из (лучший он потому, что эту конструкцию можно обобщить на произвольные d):

Пример 2 : Рассмотрим $Q_t \subset X_t$ подмножество таких точек x, что для некоторой прямой l имеем $X_t \cap l = dx$. Это семейство рационально эквивалентных 0циклов на X_t. Аналогичный подсчет размерностей показывает $\dim(Q_t) = 2n - d - 1$. Пусть $\mathcal{Q} \subset \mathcal{X}$ универсальное подмногообразие и $d = 2n - 1 - k$. Тогда

$$\Lambda^{n-1-k} T\mathcal{X}(n - 2 - k) \cong \Lambda^{\dim(\mathcal{Q})} \Omega_{\mathcal{X}}.$$

Теперь сошлемся на одно полезное при работе с алгебраическими циклами утверждение (повидимому, впервые появившееся в работах Блоха):

Предложение 1.4 *Пусть W гладкое неприводимое семейство 0циклов на $\mathcal{X}$, а $Y \subset X \times W$ его график («универсальный цикл»). Предположим, что все циклы из W рационально эквивалентны циклам с носителем на подмногообразии X_0 размерности m_0. Тогда цикл Y рационально эквивалентен сумме $Y' + Y''$, где Y' $\dim(W)$цикл на $X_0 \times W$, а Y'' $\dim(W)$цикл на $X \times W'$, где W' собственное подмногообразие W.*

В частности, отображение

$$[Y]^*\colon H^0(X, \Omega_X^m) \to H^0(W, \Omega_W^m)$$

нулевое для $m > m_0$.

(См., например, книгу Вуазен «Theorie de Hodge et geometrie algebrique complexe», гл. 22, в которой эта тема обсуждается достаточно подробно.)

«Наше» m_0 равно размерности пространства параметров $\dim(S^d)$, а W является разрешением особенностей $\mathcal{Q}$.

Вуазен доказала, что при $d = 2n - 2$ это «единственная неприятность», и проверила, что геометрический род Q_t положителен. Таким образом, гипотеза Клеменса об отсутствии рациональных кривых на гиперповерхности степени $2n-2$ в P^n, $n \geq 4$, верна. К сожалению, для больших d базисное множество $H^0(\Lambda^2 T\mathcal{X}(1)|_{X_t})$ довольно велико; так что улучшить на 1 оценку в теореме 1.2 (при $n \geq 4$) вышеописанным способом не удается.

3) При $d = 2n$ имеем, что для любого Z на общей X $H^0(\tilde{Z}, K_{\tilde{Z}} \otimes \sigma^*\mathcal{O}_Z(-1)) \neq 0$, где $\sigma\colon \tilde{Z} \to Z$ разрешение особенностей. Из этого сразу следует, что все подмногообразия X общего типа. В самом деле, расслоение $L = \sigma^*\mathcal{O}_Z(1)$ *объемно* как бирациональный прообраз обильного, т.е.$h^0(\tilde{Z}, L^{\otimes m})$ растет как $m^{\dim(\tilde{Z})}$; очевидно, что сумма эффективного и объемного дивизоров объемна, т.е.$K_{\tilde{Z}}$ объемен, что и означает, что Z общего типа. Забегая вперед, заметим, что одна из гипотез Ленга утверждает, что из этого должна следовать гиперболичность по Кобаяси многообразия X.

2 Теорема Богомолова о конечности числа рациональных и эллиптических кривых на поверхности общего типа с $c_1^2 > c_2$

Цель этого раздела доказать следующий факт:

Теорема 2.1 (Богомолов) *Пусть X поверхность общего типа, причем $c_1^2(X) > c_2(X)$. Тогда для любого g семейство кривых геометрического рода g на X ограничено.*

Другими словами, такие кривые параметризуются конечным числом неприводимых алгебраических многообразий.

В частности, на X лишь конечное число рациональных или эллиптических кривых: действительно, поскольку X общего типа, она не может заметаться ни рациональными, ни эллиптическими кривыми, так что все такие кривые на X изолированы; значит, по теореме 2.1 их конечное число.

Условие, что X общего типа, существенно. Действительно, на P^2 есть особые рациональные кривые произвольно большой степени (поскольку вообще любая кривая проектируется на P^2 с некоторым числом двойных точек); Мори и Мукаи показали, что то же верно для достаточно общей K3-поверхности, например, общей квартики в P^3.

Теорема 2.1 это первая часть основного утверждения работы . Вторая часть это утверждение об ограниченности семейства кривых на *произвольной* поверхности общего типа, инварианты которых как вложенных кривых удовлетворяют некоторым неравенствам. Например, эта вторая часть утверждает, что число кривых с отрицательным квадратом на поверхности общего типа конечно.

Последнее тоже неверно для произвольной поверхности. Классический пример это раздутие P^2 в девяти точках, являющихся базисным множеством достаточно общего пучка кубик. Каждая исключительная прямая будет сечением получившегося расслоения на эллиптические кривые. Приняв одно такое сечение за «нулевое» и послойно применяя групповую операцию к оставшимся восьми, получим бесконечное множество (-1)-кривых.

Здесь мы подробно изложим доказательство теоремы 2.1 (следуя в основном) и укажем, как доказывается утверждение о кривых с отрицательным квадратом.

Вот основная идея доказательства 2.1: неравенство $c_1^2(X) > c_2(X)$ означает, что тавтологическое расслоение $\mathcal{O}_{PTX}(1)$ на проективизации касательного расслоения к X объемно. PTX отображается в проективное пространство линейной системой сечений $\mathcal{O}_{PTX}(m)$ для достаточно большого m, и затем отдельно изучается семейство кривых рода g, не лежащих в множестве неопределенности, и кривые, в нем лежащие.

Поскольку понятие объемности будет важно и далее, то прежде чем начать доказывать теорему 2.1, мы сделаем небольшое отступление на эту тему. Оно совершенно элементарно; но, на мой взгляд, все это важно хорошо понимать.

Небольшое отступление об объемных дивизорах

Пусть X неприводимое проективное многообразие размерности n, D $\mathbb{Q}$-дивизор Картье на X, а L соответствующее линейное расслоение $\mathcal{O}_X(D)$. Рассмотрим множество

$$N(X, D) = \{m \in \mathbb{N} \mid h^0(X, L^{\otimes m}) \neq 0\}.$$

Ясно, что все элементы этого множества кратности некоторого числа $e(L)$, их наибольшего общего делителя; и наоборот, все достаточно большие кратности $e(L)$ попадут в $N(X, D)$.

Определение: Дивизор D называется объемным, если для некоторого положительного C и всех $m \gg 0$, $m \in N(X, D)$, верно, что $h^0(X, L^{\otimes m}) \geq$

Cm^n.

Утверждение 2.2: *Следующие условия эквивалентны:*

1) *D объемен;*

2) *при $m \gg 0$, $m \in N(X, D)$, верно, что $mD \sim A + E$, где A обилен, а E эффективен; более того, A можно выбирать произвольно;*

3) *при $m \gg 0$, $m \in N(X, D)$, рациональное отображение*

$$\phi_{|mD|} : X \to P(H^0(X, L^{\otimes m})^*)$$

бирационально на свой образ.

Доказательство: 1) $\Rightarrow$ 2): пусть A очень обилен на X, тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(mD - A) \to \mathcal{O}(mD) \to \mathcal{O}(mD)|_A \to 0.$$

Размерность пространства $H^0(A, \mathcal{O}(mD)|_A)$ не может расти быстрее, чем $C'm^{n-1}$ для некоторого положительного C', так что при больших m из $N(X, D)$ дивизор $mD - A$ эффективен.

2) $\Rightarrow$ 3): то, что сечения $A+E$ разделяют общие точки и касательные векторы в них, непосредственно следует из того, что это делают сечения A.

3) $\Rightarrow$ 1): очевидно, поскольку mD собственный прообраз расслоения гиперплоскости при отображении $\phi_{|mD|}$, и, значит, имеет сечений не меньше, чем расслоение гиперплоскости (в точках неопределенности $\phi_{|mD|}$ используем теорему Хартогса).

В частности, свойство быть объемным открыто, и конус классов объемных дивизоров в $H^{1,1}(X)$ это внутренность конуса эффективных классов.

Доказательство теоремы Богомолова 2.1: Рассмотрим PTX проективизацию касательного расслоения к X, многообразие прямых (а не гиперплоскостей!) в TX. Пусть C гладкая неприводимая проективная кривая, а $f : C \to X$ непостоянное отображение. Тогда определен подъем f на PTX:

$$\tilde{f} : C \to PTX; \quad \tilde{f}(c) = (f(c), [f'(c)])$$

(конечно, это выражение имеет смысл только там, где $f'(c)$ не обращается в нуль, но любое рациональное отображение проективной кривой продолжается до регулярного).

По построению, касательное расслоение T_C отображается в обратный образ универсального подрасслоения на PTX:

$$T_C \to \tilde{f}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1).$$

Коядро этого отображения сосредоточено на множестве критических точек f.

Следующее предложение является ключевым в доказательстве:

Предложение 2.3: *В условиях теоремы* 2.1 *расслоение* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$ *объемно.*

Доказательство: По формуле Римана Роха, для дивизора D на трехмерном многообразии M имеем

$$\chi(M, \mathcal{O}(mD)) = \frac{m^3 D^3}{6} + O(m^2).$$

Значит, достаточно показать, во-первых, что $\xi^3 > 0$, где ξ класс $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$, а во-вторых, что вторые когомологии $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)$ растут не быстрее, чем пространство глобальных сечений.

Первое утверждение это следствие нашего неравенства на классы Чженя поверхности X. Действительно, если E векторное расслоение ранга r на многообразии M, то на $Y = \mathbb{P}_M(E)$ имеем

$$\sum_{i=0}^{r} \xi^i p^* c_i(E) = 0,$$

где $\xi = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}_M(E)}(1)]$, а p проекция. Значит,

$$\xi(\xi^2 + p^* c_1(X)\xi + p^* c_2(X)) = \xi^3 - p^* c_1^2(X)\xi + p^* c_2(X)\xi = 0,$$

то есть $\xi^3 = c_1^2 - c_2 > 0$, что и требовалось.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $4mup_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m) = S^m \Omega_X^1$, а высших прямых образов нет; то есть

$$h^2(\mathbb{P}TX, \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)) = h^2(X, S^m \Omega_X^1) = h^0(X, S^m TX \otimes K_X);$$

поскольку $TX \cong \Omega_X^1 \otimes K_X^{-1}$, то

$$h^0(X, S^m TX \otimes K_X) = h^0(S^m \Omega_X^1 \otimes K_X^{\otimes(1-m)}).$$

Поскольку $K_X^{\otimes(m-1)}$ имеет сечения при больших m, то это не превосходит

$$h^0(X, S^m \Omega_X^1) = h^0(\mathbb{P}TX, \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)),$$

а значит, $h^0(\mathbb{P}TX, \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m))$ действительно растет как m^3, что и требовалось доказать.

Замечание 2.4: Кроме неравенства на классы Чженя, мы использовали только то, что $K_X^{\otimes m}$ имеет сечения при больших m (а не то, что K_X объемно, т.е.X общего типа). Но из классификации поверхностей следует, что любая поверхность с $c_1^2 - c_2 > 0$ и эффективным $K_X^{\otimes m}$ общего типа.

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Итак, имеем бирациональное на свой образ отображение $G\colon \mathbb{P}TX \to \mathbb{P}^M$, заданное сечениями $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)$ при некотором достаточно большом m. Пусть $Z \subset \mathbb{P}TX$ такое собственное замкнутое подмножество, что G изоморфизм вне Z. Мы разберем отдельно два случая: сначала мы докажем, что неприводимые кривые рода g, подъем которых на $\mathbb{P}TX$ не лежит в Z, образуют ограниченное семейство, а потом что то же верно и для кривых рода g с подъемом в Z. Точнее, последнее утверждение очевидное следствие результата Жуанолу, который интересен сам по себе и который мы разберем в следующем разделе.

Итак, пусть C гладкая кривая рода g, а $f\colon C \to X$ такое отображение, что образ $\tilde{f}\colon C \to \mathbb{P}TX$ не лежит в Z (при этом, как и раньше, f предполагается бирациональным на свой образ). Тогда $G\tilde{f}$ отображает C в $\mathbb{P}^M$, причем если образы C и C' в X различны, то же верно и для их образов в $\mathbb{P}^M$. Достаточно ограничить степень $G\tilde{f}(C)$ в $\mathbb{P}^M$ (это легко следует из того хорошо известного факта, что семейство кривых степени не выше данной в проективном пространстве ограничено).

Но мы уже видели, что T_C естественно отображается в $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$; значит, степень T_C не больше степени $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(-1)$. Соответственно,

$$\deg(G\tilde{f}(C)) \leq \deg(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m)) \leq m \cdot \deg(\Omega^1_C) = m(2g-2),$$

что и требовалось показать.

Замечание 2.5:

Таким образом, подъем всех рациональных или эллиптических кривых с X на TX обязательно попадет в множество Z: в самом деле, для таких кривых $m(2g-2) \leq 0$.

Осталось разобрать случай кривых, лежащих в Z.

Множество Z является объединением конечного числа неприводимых компонент Z_i. Те из них, образ которых при проекции на X кривая C_i, мы можем не рассматривать: действительно, на X имеем лишь конечное число кривых, подъем которых попадает в эти Z_i, а именно сами кривые C_i. Так что достаточно рассмотреть случай, когда Z неприводимая поверхность, доминирующая X.

В этом случае пусть $\alpha\colon \tilde{Z} \to Z$ разрешение особенностей. Тогда $\tilde{Z}$ снабжено естественным слоением. Его можно представлять себе, например, так: локально в окрестности достаточно общей точки Z есть сечение проекции p; оно индуцирует некоторое (тавтологическое) распределение прямых на X, которое (все еще локально!) поднимается на Z. Формально мы можем определить слоение как обратимый подпучок $L \subset \Omega^1_{\tilde{Z}}$; поскольку на $\mathbb{P}TX$ имеем точную последовательность

$$0 \to M \to p^*\Omega^1_X \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1) \to 0,$$

то в качестве L можно взять $\alpha^*M|_Z$: действительно, композиция $\alpha^*M|_Z \to \alpha^*p^*\Omega^1_X \to \Omega^1_{\tilde{Z}}$ ненулевая, поскольку по условию p изоморфно отображает Z на X в общей точке Z. Из обеих конструкций очевидно, что подъем $f(C)$ на $\mathbb{P}TX$ будет интегральной кривой нашего слоения, если, конечно, $f(C)$ попадет на Z.

Для того чтобы закончить доказательство, достаточно сослаться на следующее утверждение:

Теорема Жуанолу: *Пусть X гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{F}$ такое слоение на X, что коразмерность его листов равна* 1 (*таким образом, $\mathcal{F}$ задается некоторой мероморфной дифференциальной формой ω*). *Тогда либо число алгебраических интегральных гиперповерхностей $\mathcal{F}$*

конечно, либо $\mathcal{F}$ имеет мероморфный первый интеграл (*здесь* первый интеграл *это рациональная функция f с $\omega \wedge df = 0$; таким образом, интегральные гиперповерхности являются компонентами слоев отображения $f\colon X rightarrow \mathbb{P}^1$).*

Из теоремы Жуанолу следует, что либо наших кривых лишь конечное число, либо они параметризуются некоторой алгебраической кривой; так что теорема 2.1 доказана.

Теорему Жуанолу мы разберем отдельно; а в заключение этого раздела расскажем, очень приблизительно кратко расскажем, как Богомолов получил конечность числа кривых данного геометрического рода с отрицательным квадратом (другими словами, ограниченность их семейства ведь такие кривые не деформируются!) на поверхности общего типа с произвольными классами Чженя. В этом случае $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(1)$ не обязательно объемно на $\mathbb{P}TX$; но, оказывается, можно подобрать конечное число таких линейных расслоений F_i на X, что:

1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}TX}(m_i) \otimes p^*F_i$ объемны для некоторых m_i;

2) для C с отрицательным квадратом найдется i такое, что $F_iC \leq 0$, а значит, степень $G_i(C)$ в одном из конечного числа бирациональных отображений G_i, соответствующих подкруткам на F_i, окажется ограниченной. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Для проверки объемности используется, с одной стороны, теорема Римана Роха, а с другой для того, чтобы контролировать H^2 стабильность по Богомолову кокасательного расслоения на поверхности общего типа. В дальнейшем мы еще увидим примеры таких рассуждений.