Spiegazioni

Alessio Esposito

November 14, 2022

Numeri complessi

L'insieme dei numeri complessi è così definito:

$$\mathbb{C} := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Da notare come la coppia (a, b) identifica univocamente la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right)$, perciò se definiamo $i = (0, 1)$ e $1 = (1, 0)$ possiamo concludere che qualsiasi numero reale a può essere nella forma $(a, 0)$.
Per quanto scritto sopra, possiamo definire $\mathbb{C}$ come segue:

$$\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Questa definizione porta al seguente lemma:

Lemma

L'applicazione $\varsigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ è un isomorfismo

Proof. La dimostrazione è banale basta considerare la definizione di $\mathbb{R}^2$. □

Bisogna precisare però il fatto che $\mathbb{C}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^2$ solo se li si considera come spazi vettoriali, infatti per costruire un isomorfismo tra algebre bisogna definire una nuova struttura come segue:

Definition 1. *Il prodotto tra vettori è dato dall'operatore binario:*

$$\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tale che ad ogni coppia $((a, b), (c, d))$ *associa il vettore* $(ac - bd, bc + ad)$.

Consideriamo il numero complesso $z \in \mathbb{C}$ con $z = (a, b)$, con l'operazione appena definita possiamo perciò costruirlo come segue:

$$a + ib = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Dotando perciò lo spazio vettoriale di questo prodotto si ottiene la capacità di dividere uno scalare per un vettore di $\mathbb{R}^2$.
Infatti:

$$\frac{\alpha}{(\beta,\gamma)} = \alpha(\delta,\varepsilon) = (\alpha,0)(\delta,\varepsilon) = (\alpha\delta,\alpha\varepsilon)$$

Dove $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}^2$ e $(\delta,\varepsilon) = (\beta,\gamma)^{-1}$.
Tale inverso esiste perchè definendo così il prodotto abbiamo reso $\mathbb{R}^2$ un campo.
la definizione di derivata torna ad avere senso.

Topologia dei cerchi e dei rettagoli

Siano $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_1)$ e $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_2)$ due spazi topologici, con $\mathcal{T}_1$ la totalità dei cerchi di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e di raggio $r \in \mathbb{R}_+$ e $\mathcal{T}_2$ la totalità dei rettangoli del tipo:
$(x_1,x_2) \times \cdots \times (x_{n-1},x_n)$ dove $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.
segue definizione:

Proposition 1. *Sia $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ una base dello spazio topologico $\mathcal{T}_1$ con $B_i = \{B_{\frac{1}{n}}(c) : n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^n\}$, Allora vale l'uguaglianza:*

$$\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{j\in J} R_j$$

dove R_j è la totalità dei rettangoli della topologia $\mathcal{T}_2$ [1].

Proof. $(\supseteq)$ $\mathcal{OSS}$: cominciamo con l'osservare che la diagonale di un rettangolo si ricava in questo modo: $d = \sqrt{h^2+b^2}$ dove b e h sono rispettivamente base e altezza. Possiamo applicare questo concetto anche a degli intervalli, infatti se un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ è definito come $(a,b)\times(c,d)$ basta prendere come base $|a-b|$ e come altezza $|c-d|$. Sia perciò R un rettangolo definito in questo modo: $R = (x_1,x_2)\times\cdots\times(x_{n-1},x_n)$ tale che, fissato un cerchio della base $\mathcal{B}$ con raggio $\frac{1}{n}$ rispetti la seguente condizione:

$$\sqrt{|x_1-x_2|^2+\cdots+|x_{n-1}-x_n|^2} < \frac{2}{n}$$

Dove $\frac{2}{n}$ è il diametro del cerchio.
Con questa condizione possiamo concludere che ogni cerchio contiene un rettangolo. Si può concludere che $\bigcup_{i\in I} B_i \supseteq \bigcup_{j\in J} R_j$.
$(\subseteq)$ Analogamente al caso precedente possiamo usare concetti geometrici del genere per provare la tesi. Si noti che possiamo prendere un qualsiasi rettangolo tale che venga rispettata questa condizione:

$$|x_i - x_{i+1}| \geq \frac{2}{n} \qquad \forall i = 1,\ldots,n-1$$

con queste considerazioni si può infine affermare che $\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup_{j\in J} R_j$ e le topologie coincidono, quindi si ha l'asserto. $\square$

[1] Ho preso la totalità di tutti i rettagoli come base del secondo spazio per motivi di praticità, la definizione di base viene comunque rispettata.