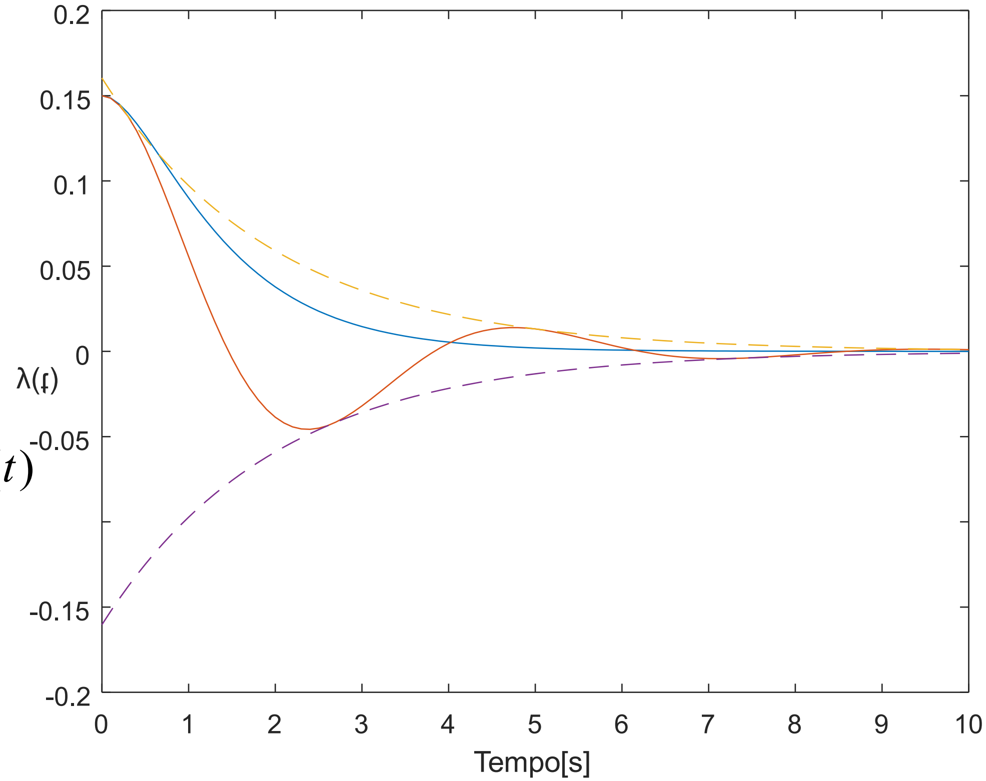
Resposta transitória – Sistemas de 2a ordem



$y(t)$

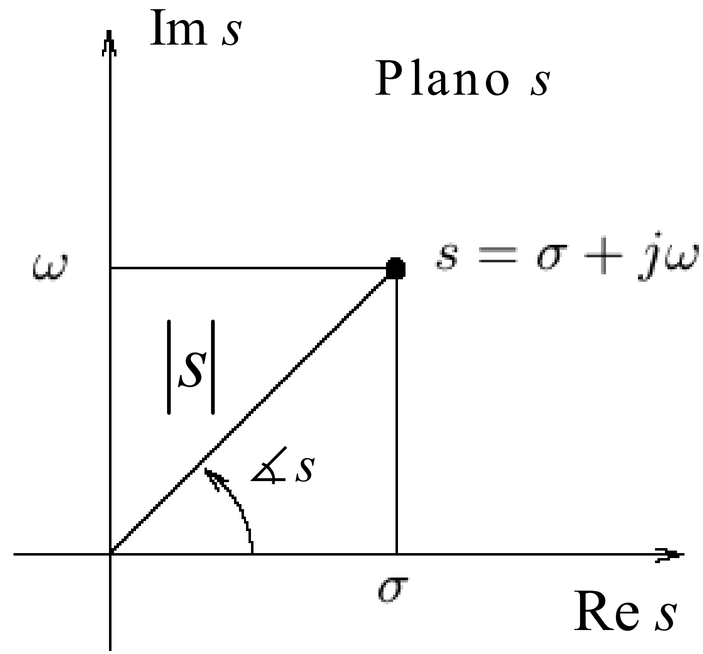
Tempo (s)

Revisão de analise complexa

Numero complexo Par ordenado de números reais. A forma retangular de um no. complexo é:

$$s = \sigma + j\omega \;, \quad \sigma , \omega \in \Re$$

Onde:



$j = \sqrt{-1} \quad \rightarrow$ operador imaginário

$\sigma \quad \rightarrow$ parte real de $s \quad , \sigma = \mathrm{Re}\ s$

$\sigma \quad \rightarrow$ parte imaginária de $s \quad , \omega = \mathrm{Im}\ s$

A cada numero complexo pode-se associar um ponto no chamado plano complexo s ou plano s

Revisão de analise complexa

Forma polar

$$\boxed{\sigma = |s|\cos\varphi \quad , \quad \omega = |s|\, sen\,\varphi}$$

Forma exponencial

$$\boxed{\begin{gathered} s = \sigma + j\omega = |s|\cos\varphi + j|s|\, sen\,\varphi \\ = |s|e^{j\varphi} \end{gathered}}$$

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j sen\,\varphi}$$

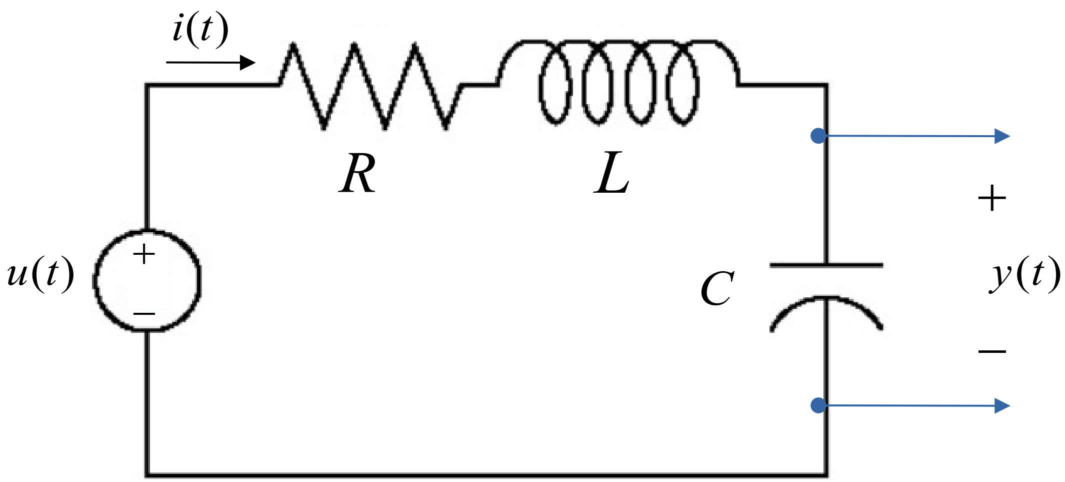
Formula de Euler

Complexo conjugado

$$\boxed{s = \sigma + j\omega \, , \quad s = \sigma - j\omega}$$

Resposta transitória – Sistemas de 2ª. ordem

Seja sistema SISO composto de um circuito RLC série:



Resposta Transitória

1) (houve oscilação ?
2) a resposta foi lenta demais ?
3) está de acordo com as especificações de projeto? ...

Resposta transitória – Sistemas de 2ª. ordem

O circuito RLC série apresentado pode ser descrito por uma equação diferencial de segunda ordem, do tipo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot y(t) = \frac{1}{LC} \cdot u(t)$$

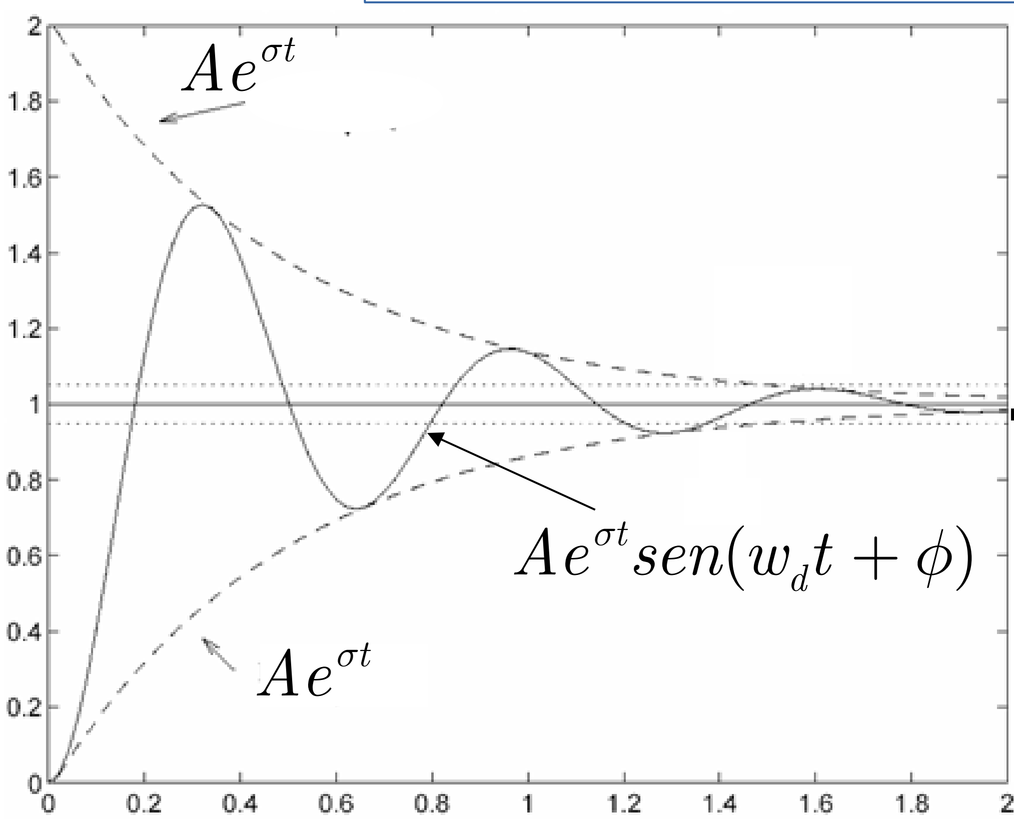
Polos: raízes da equação característica:

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Revisão: A equação característica com um par de raízes complexas conjugadas

Seja o polinômio do segundo grau da forma: $b_2 s^2 + b_1 s + b_0$

As raízes são: $$s_{1,2} = -\frac{b_1}{2b_2} \pm j\sqrt{\frac{4b_2 b_0 - b_1^2}{4b_2^2}} = \sigma \pm j\omega_d$$



σ expoente da exponecial

ω_d é a frequência natural amortecida da parte oscilatória

b_1 – constante de amortecimento efetiva

Se $b_1 = 2\sqrt{b_2 b_0}$ as duas raízes são iguais, representando o valor critico da constante. de amortecimento

Resposta transitória – Formas normalizadas

ζ - *Coeficiente de amortecimento* : a razão entre o valor da constante de amortecimento real e o valor crítico desta constante

$$\zeta = \frac{\text{amortecimento real}}{\text{amortecimento crítico}} = \frac{b_1}{2\sqrt{b_2 b_0}}$$

A frequência natural não amortecida é a frequência de oscilação do transitório para amortecimento nulo

$$w_n = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$$

O polinômio de 2º. Grau são escritos em termos de: $\zeta \geq 0$ e $w_n (rd/seg)$

Forma Normalizada

$$\Delta(s) = \frac{b_2}{b_0}s^2 + \frac{b_1}{b_0}s + 1 = \frac{1}{w_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{w_n}s + 1$$

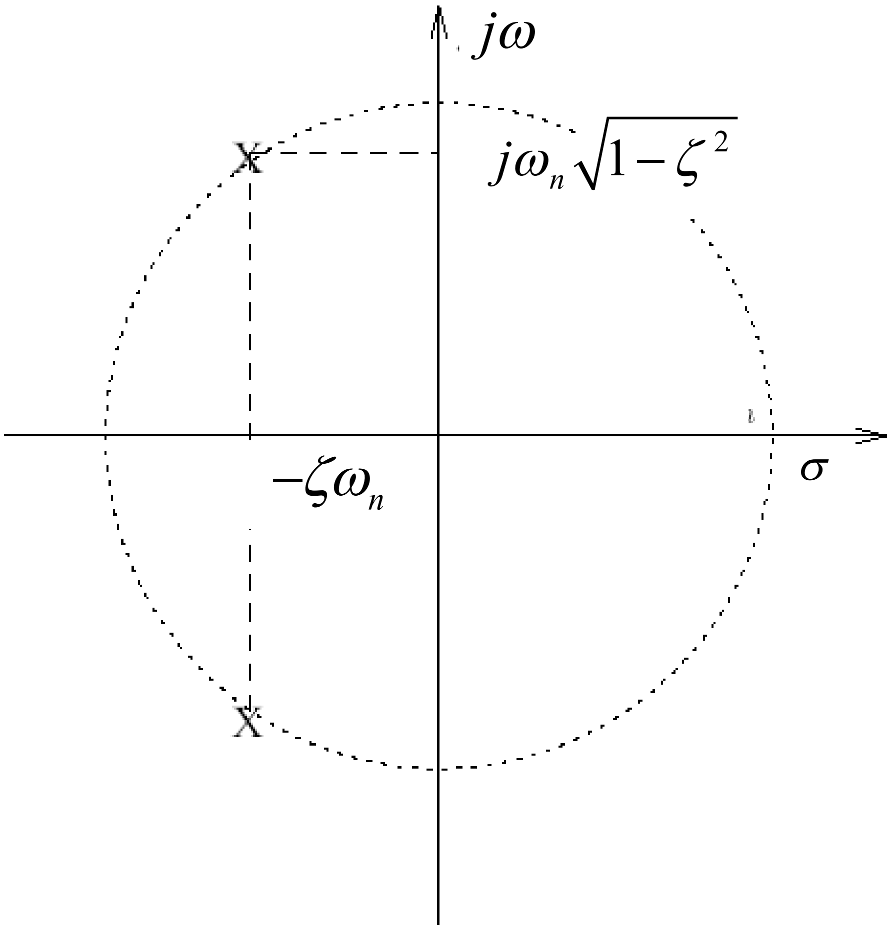
Multiplicando por w_n^2 tem-se:

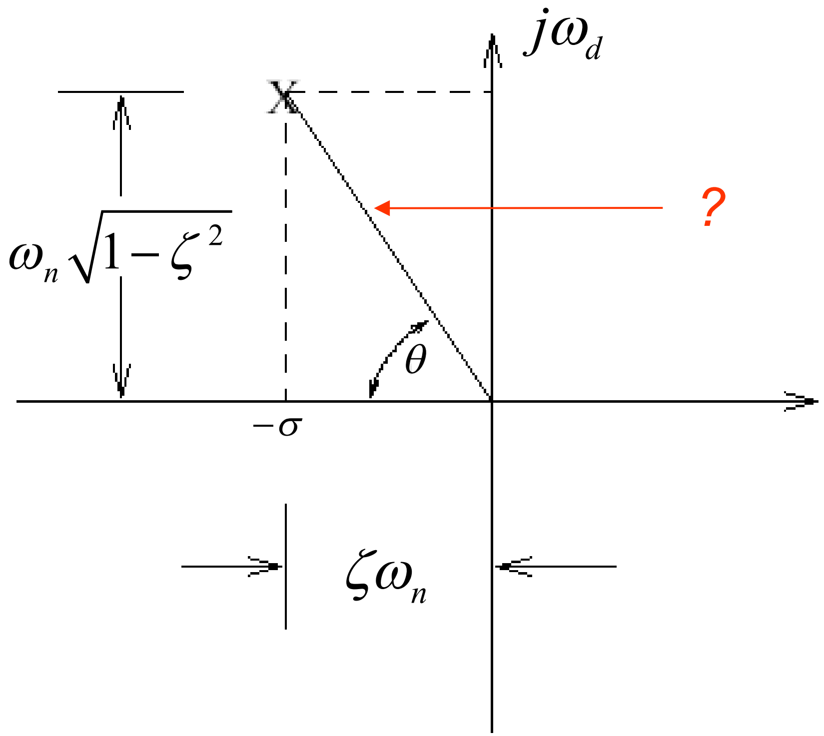
$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2$$

As raízes correspondentes são:

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Representação no plano s





$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Forma Normalizada

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\zeta w_n \pm jw_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Se:

$\zeta > 1$ raízes distintas

$\zeta = 1$ raízes múltiplas

$\zeta < 1$ raízes complexas conjugadas

Se $\zeta < 1$ então:

$$w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

é a frequência de oscilação forcada

Do circuito RLC série tem-se:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1/LC}{s^2 + 2\dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}}} \longrightarrow Y(s)$$

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \zeta &= \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned}}$$

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Resposta ao degrau – Análise do domínio s

Considerar uma função de degrau unitário como a entrada do sistema dinâmico de 2ª. ordem na forma normalizada.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Obtendo as frações parciais:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$$

Resposta ao degrau – Análise do domínio s

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)} \quad , \quad \omega_d=\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n\cdot\omega_d}{\omega_d(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n\cdot\omega_d}{\omega_d(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right\}$$

Resposta ao degrau – Análise do domínio s

Relação trigonométrica:

$$A\cos\theta + Bsen\theta = \sqrt{A^2+B^2}\,sen\left(\theta + ar\tan\left(\frac{A}{B}\right)\right)$$

Nota:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\zeta\,\omega_n}{(s+\zeta\,\omega_n)^2+\omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\cos(\omega_d\,t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s+\zeta\,\omega_n)^2+\omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\,\mathrm{sen}(\omega_d\,t)$$

Resposta ao degrau – Análise do domínio s

A transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\,Y(s)\,\right] = y(t) = 1 - e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\left(\cos\omega_d\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d\,t\right)$$

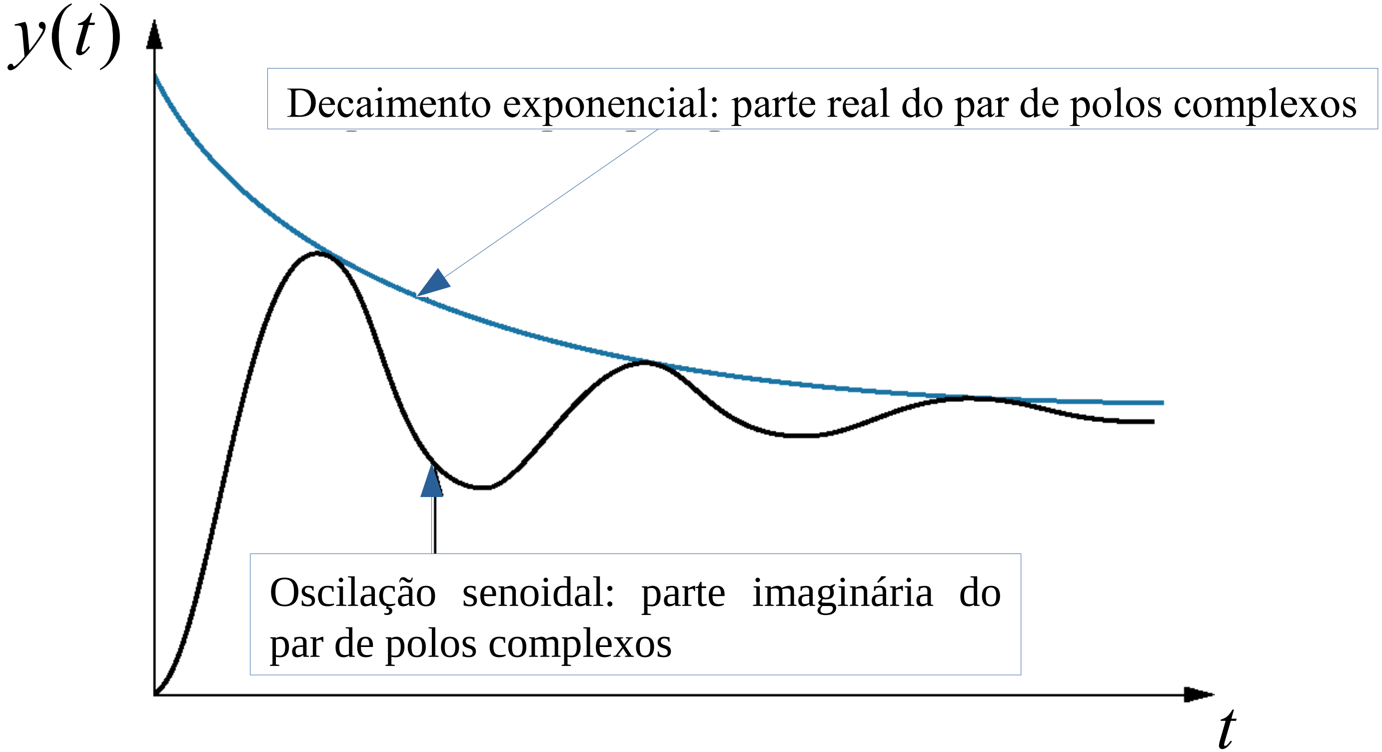
$$= \quad 1 - \frac{e^{-\zeta\,\omega_n\,t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d\;t + \theta\right) \quad , \quad t > 0$$

onde: $\theta = \mathrm{t}\,g^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \cos^{-1}(\zeta)$

$0 < \zeta < 1 \rightarrow$ Resposta transitória subamortecida

Resposta ao degrau – Análise do domínio s

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

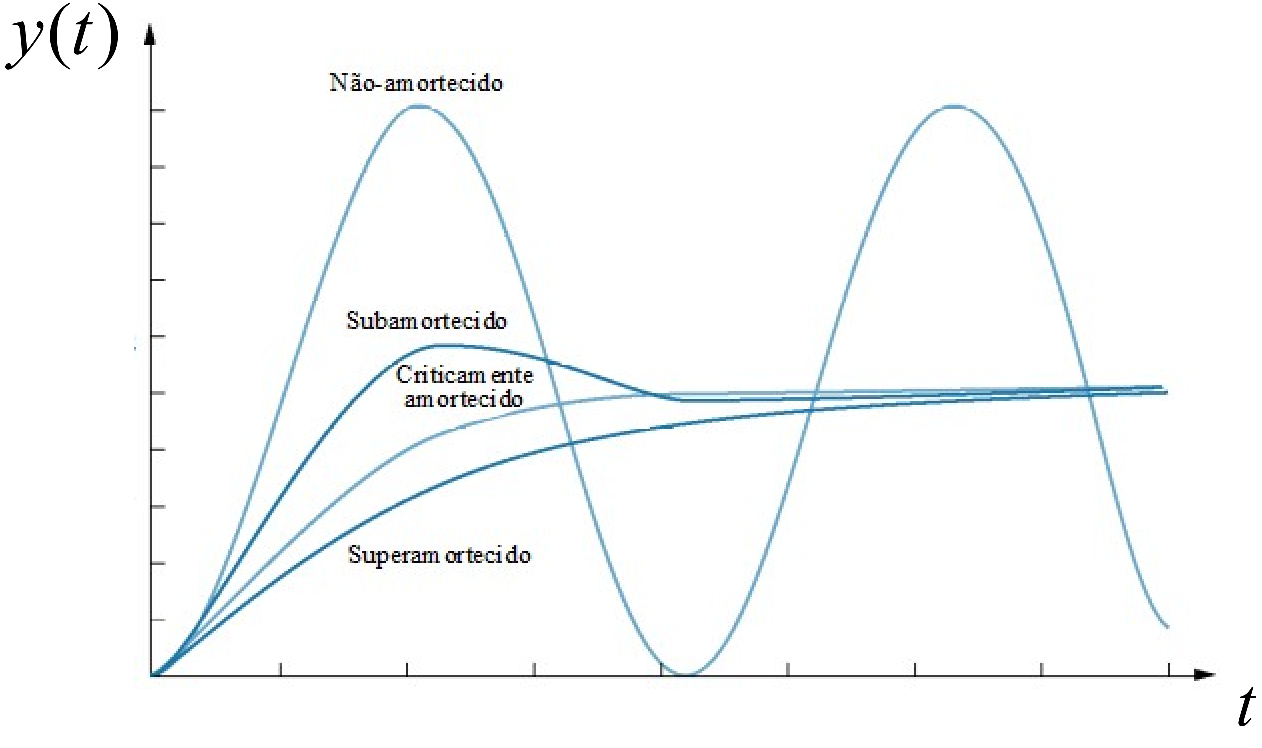


$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t + \theta) \quad , \quad t > 0$$

$\zeta = 0 \rightarrow$ Resposta transitória não amortecida

Polos distintos, $s_{1,2} = \omega_n \sqrt{-1} = \pm j\,\omega_n$ puramente imaginários, complexos conjugados entre si

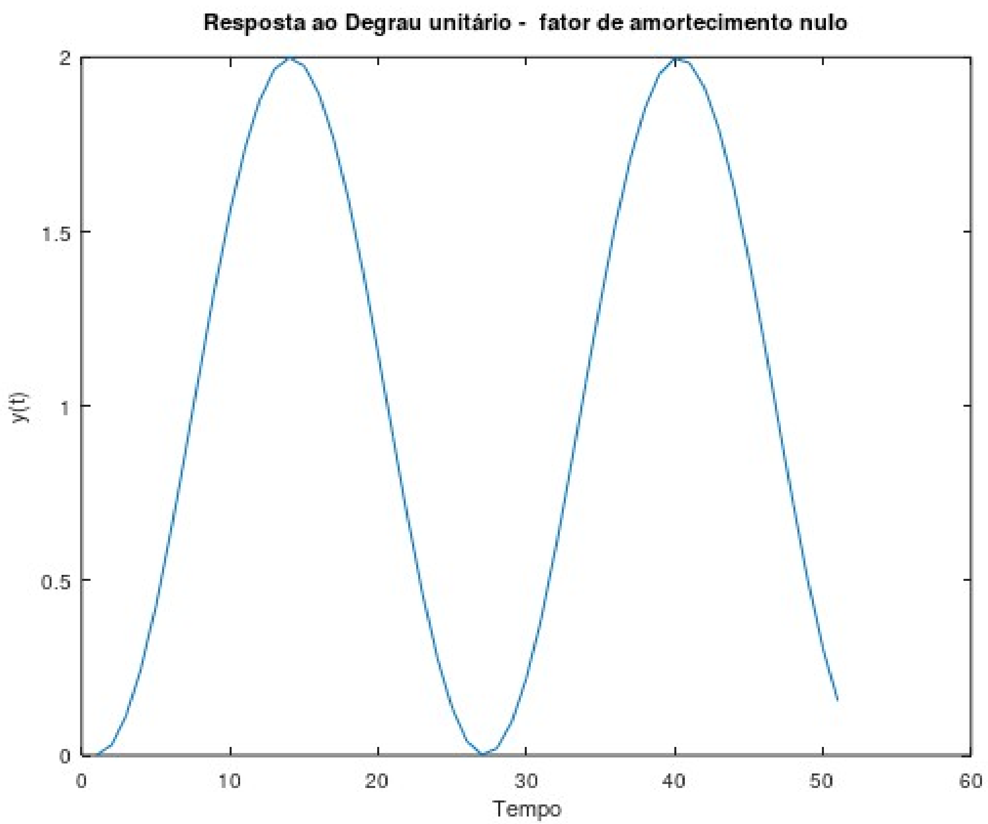
$$y(t) = 1 - \cos w_n t \quad , \quad t > 0$$



$\zeta = 0 \rightarrow$ Resposta transitória não amortecida

Polos distintos, $s_{1,2} = \omega_n \sqrt{-1} = \pm j\,\omega_n$ puramente imaginários, complexos conjugados entre si.

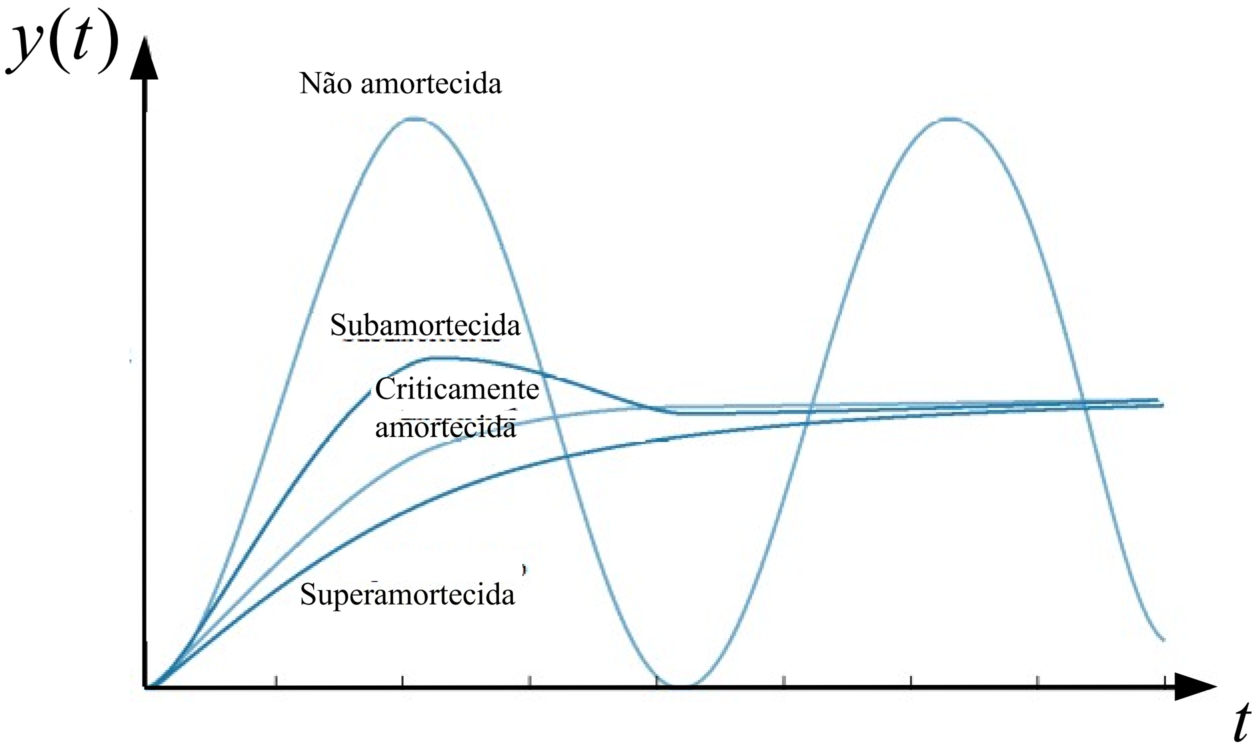
$$\boxed{y(t) = 1 - \cos w_n t \quad , \quad t > 0}$$



ζ = 1 → Resposta transitória criticamente amortecida: $s_{1,2} = -\omega_n$

Polos reais e iguais → $e^{-\omega_n t}, t\, e^{-\omega_n t}$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s\,(s + \omega_n)^2} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\,(1 + \omega_n t) \;\;, t \geq 0}$$

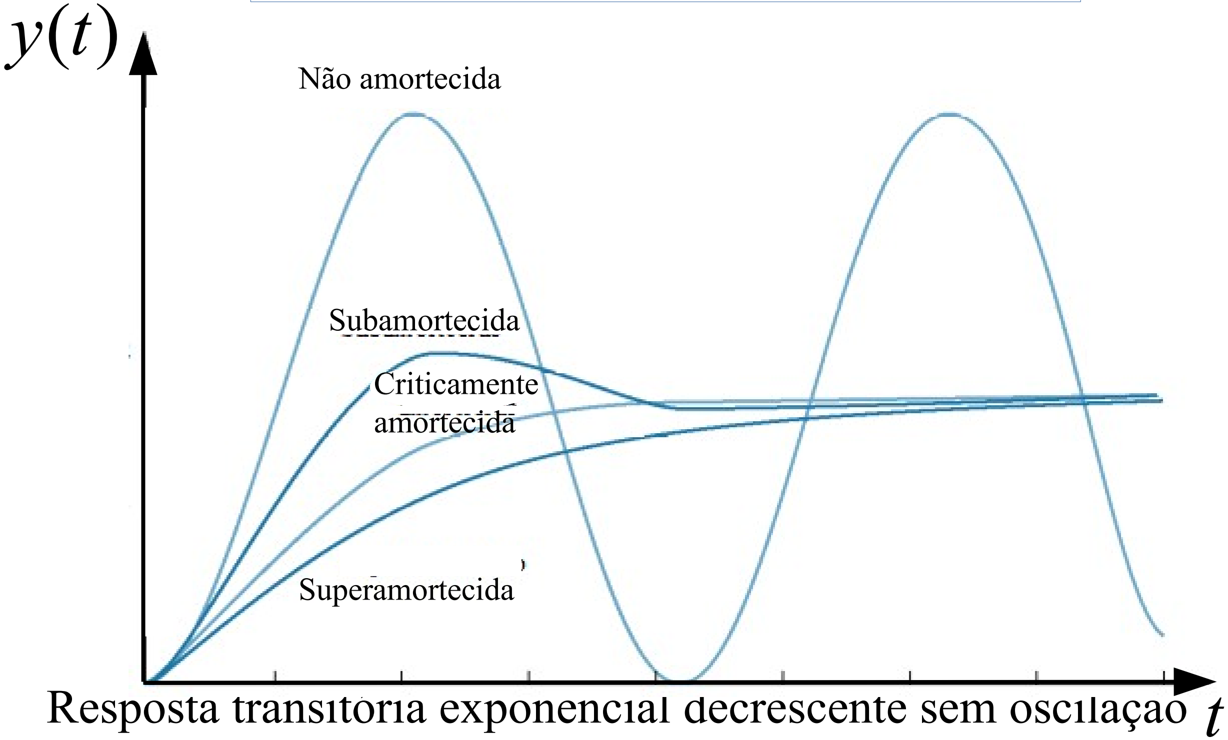


$\zeta > 1 \rightarrow$ Resposta transitória superamortecida:

Pólos reais e distintos $\longrightarrow$ $s_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{\omega_n^2}{\left(s + \zeta\,\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\,\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

$$\boxed{y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)}$$



Resposta transitória exponencial decrescente sem oscilação

Se $s_1 >> s_2$ então $e^{s_1 t}$ decai muito mais rápido do que $e^{s_2 t}$ e $y(t)$ pode ser aproximado por

$$y(t) \simeq 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}$$

Diz-se que a raiz s_2 é dominante em relação a s_1. A resposta obtida é tipicamente a de um sistema de 1ª. ordem

Comentários

- A cada par ζ e w_n corresponde um par de polos (em geral, complexos conjugados) representado no plano *s*.

- A constante de tempo do sistema de 2ª. ordem é $1/\zeta w_n$

- A frequência de oscilação forcada w_d aumenta com a diminuição de ζ ou com o aumento de w_n

- Como $\zeta = \cos(\theta)$,observa-se que $\zeta \to 1$ quando $\theta \to 0$ e $\zeta \to 0$

  quando $\theta \to \pi/2$

- *Diversas características da resposta ao degrau de um sistema de 2ª. ordem*

  podem ser determinadas em função de ζ e w_n

Comentários

- Dentre as respostas não - oscilatórias, a mais rápida corresponde ao caso criticamente amortecido

- É possível obter os valores de ζ e w_n diretamente a partir da resposta do sistema de 2a. ordem ao degrau

OCTAVE

```
% Resposta Transitória para valores do fator de amortecimento
%
pkg load control

clear;
clf;

omega=1;            % Frequência natural
xi=[0.001:0.1:2];  % Fator de amortecimento

hold on
Figure(1)

for i=1:12
  % Função de Transferência

  G=tf([omega^2],[1  2*xi(i)*omega omega^2]);

  y=step(G,10);   % Resposta ao Degrau unitário

plot(y)              % Gráficos

end

hold off

xlabel ('Tempo')
ylabel('y(t)')
title('Resposta ao Degrau unitário - Valores de fator de amortecimento')
```