

# SINAIS E SISTEMAS

## LABORATÓRIO

### Modelagem Matemática e Estimação de Parâmetros da Função de Transferência de Sistema Motor do LEGO



**Fonte:** Próprio autor

## Introdução

Com o propósito de conceber um controlador robusto destinado aos projetos de Sistemas de Controle, a etapa inicial consiste na identificação de um modelo matemático rigoroso para o sistema motor do Lego EV3 (Fig.2). A aplicação de tal modelo habilitaria o projeto do controlador com base em métodos de simulação, em contraste com procedimentos experimentais, economizando assim tempo e custos financeiros. A modelagem desse sistema envolve as seguintes fases:

- Caracterização detalhada dos componentes elementares do sistema motor do Lego EV3 em estudo.
- Aquisição de dados de entrada e saída do sistema motor do Lego EV3 mediante métodos experimentais.
- Dedução dos parâmetros do sistema com base nas informações adquiridas.
- Inserir os parâmetros no modelo do sistema para verificar sua resposta através de simulação em ambos os domínios da frequência e do tempo.

O objetivo desse procedimento é encontrar um modelo que reproduz com precisão o desempenho do sistema motor Lego, para que o modelo possa ser usado para projetar formalmente um controlador ótimo para o respectivo sistema.

## Noções Básicas do Sistema Motor Lego

Para iniciar a modelagem, é necessário primeiro compreender os componentes básicos e a estrutura do sistema. A entrada ou atuação do sistema é a potência. A saída é a rotação em graus (Fig.1).

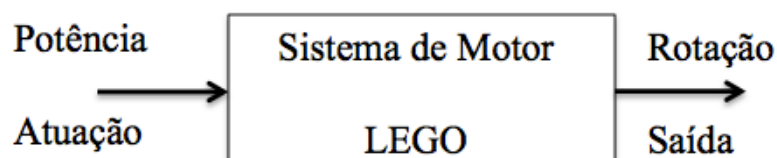


Figura 1 - Diagrama de bloco do sistema do motor LEGO

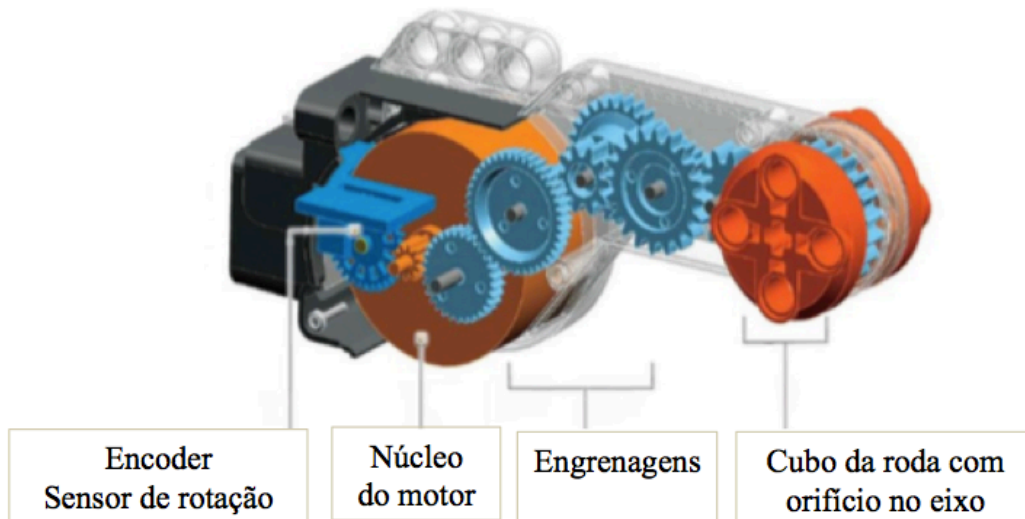


Figura 2 - Servomotor do Robô Lego

Fonte: Manual do usuário – Lego

O robô Lego EV3 possui uma ampla gama de capacidades, mas o foco deste laboratório está no seu controle de distância ou movimento; portanto, um ponto de partida razoável para a modelagem é supor que o sistema de motor Lego poderia ser modelado por um sistema dinâmico de segunda ordem. A forma básica para a função de transferência de um sistema de segunda ordem (ou modelo de resposta em frequência) é mostrada abaixo (vide notas de aula em anexo).

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{P(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ao verificar o modelo para o sistema, há a necessidade de se observar a resposta do sistema a uma entrada degrau em ambos os domínios, frequência e tempo, para verificar se ela corresponde à saída do sistema motor Lego real para a mesma entrada. O modelo no domínio do tempo é encontrado ao tomar a transformada inversa de Laplace do modelo no domínio da frequência. A resposta ao degrau (amplitude  $A$ ) de um sistema de segunda ordem no domínio do tempo é mostrada a seguir:

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{A}{s} \quad \therefore L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = A \left( K - \frac{K}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ e^{\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \right] \right)$$

onde:  $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

## Coleta de Dados

Para obter percepções sobre a dinâmica interna de um sistema, experimentações devem ser realizadas para coletar dados de entrada e saída: a relação entre os dois pode, assim, ser observada e depois modelada matematicamente usando técnicas de estimação de parâmetros.

O motor Lego EV3 será tratado como um sistema *caixa-preta*:

- Não há conhecimento da dinâmica interna do motor (por exemplo, torque, limites de potência, velocidade angular, etc.)
- O motor será considerado um sistema linear e invariante no tempo para aplicar diretamente nas técnicas de modelagem consideradas neste laboratório.
- Para locomover-se, o robô Lego utiliza uma faixa de potência que pode variar de 0 a 100%. Dessa forma, foram coletados dados referentes à potência aplicada em apenas um motor do robô e aos dados para rotação, com o robô com suas rodas suspensas (livres de atrito) no ar. Portanto, a resposta (saída de rotação) não será afetada pela superfície na qual o robô estava se movendo.

## Estimação de Parâmetros

A seção a seguir detalha como os parâmetros para o modelo do sistema de motor Lego serão estimados. Após coletar dados por meio de experimentação, as características de desempenho transitório e de estado estacionário da resposta ao degrau do sistema foram observadas. Utilizando essas observações, duas técnicas diferentes para estimação de parâmetros foram consideradas:

- equações de especificação no domínio do tempo para ajuste de curvas.
- comparações iterativas automáticas entre as respostas temporais esperadas, derivadas a partir de estimativas para os parâmetros do

sistema motor Lego, e as respostas temporais medidas, adquiridas em experimentações reais.

### Primeira Técnica

A primeira técnica de estimação de parâmetros, usando equações de especificação no domínio do tempo, é a aplicação das relações entre os parâmetros do sistema (ligados às localizações dos polos do sistema) e características de desempenho transitório. Essas relações são as seguintes:

- Tempo de pico - definido como o tempo que o sistema leva para atingir seu valor máximo de saída, estando relacionado à frequência natural amortecida pela equação:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- A percentagem de sobressinal é encontrada dividindo a diferença entre o valor máximo de saída e o valor de estado estacionário pelo valor de estado estacionário. A relação entre percentual de sobressinal e razão de amortecimento é definido usando a seguinte equação:

$$M_p \% = 100 \times e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Os parâmetros do modelo do sistema podem ser estimados usando uma observação das características de resposta no tempo do sistema em conjunto com o conhecimento das relações acima mencionadas. As etapas, para obter uma aproximação gráfica (Fig.3) da resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem subamortecido (oscilante), compreendem:

1. Encontrar a resposta ao degrau  $\Delta y(t)$
2. Encontrar  $\Delta u(t)$  da resposta ao degrau ao degrau
3. Calcular o ganho  $K = \Delta y / \Delta u$
4. Calcular o fator de amortecimento  $\zeta$  a partir do sobressinal
5. Calcular a frequência natural a partir do tempo de pico ( $t_p$ )

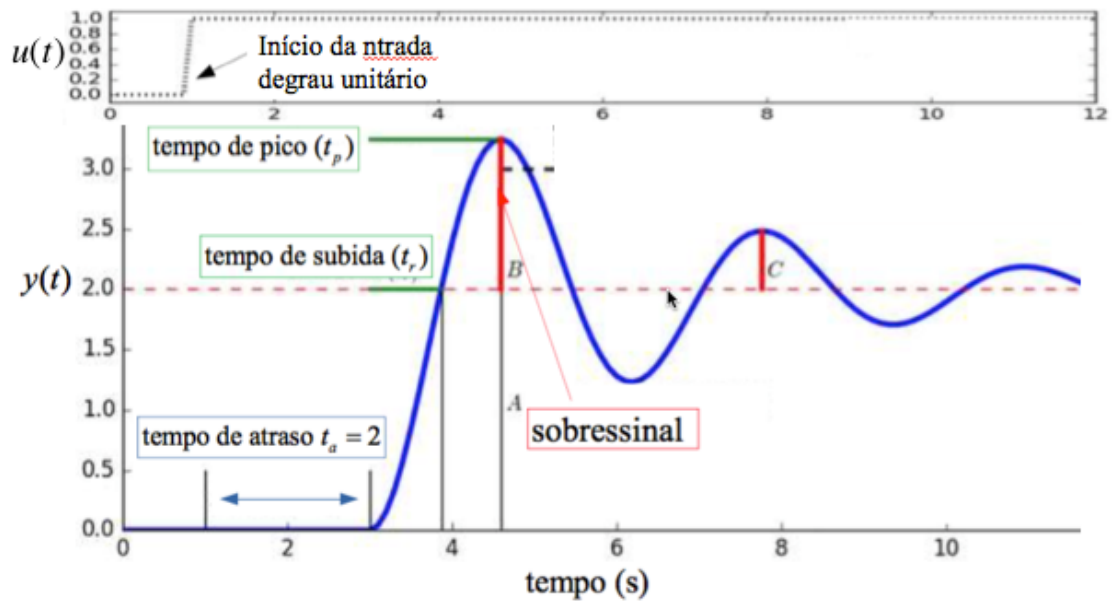


Figura 3 – Especificações de desempenho

### Segunda Técnica

A segunda técnica de estimação de parâmetros utilizada é uma abordagem para verificar de forma automática se as estimativas dos parâmetros estão boas a partir da medição das distâncias entre os pontos reais medidos e os pontos correspondentes da curva aproximada. Esta abordagem visa minimizar a diferença entre a saída  $y_m(t)$  medido do sistema (a partir dos dados) e a saída  $y_e(t)$  esperada (a partir da simulação). Uma função que mede o quão boa é uma dada estimativa para os parâmetros é mostrada abaixo:

$$J(K, \zeta, \omega_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y_m(k) - y_e(k)]^2$$

onde  $N$  é o número de valores amostrados no experimento. A formulação supracitada mensura, conseqüentemente, o Erro Quadrático Médio (*Mean Squared Error* - MSE) entre os valores medidos  $y_m(t)$  e a curva  $y_e(t)$ , obtida da equação abaixo, admitindo-se valores estimados para  $K$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

$$y_e(t) = A \left( K - \frac{K}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ e^{\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \right] \right)$$

Isto implica que é possível adquirir um conjunto ótimo de parâmetros  $K^*, \zeta^*, \omega_n^*$ , almejando valores que direcionem para um mínimo de  $J(K, \zeta, \omega_n)$ .

$$\{K^*, \zeta^*, \omega_n^*\} = \underset{K, \zeta, \omega_n}{\operatorname{argmin}} J(K, \zeta, \omega_n)$$

Cabe salientar que a formulação analítica de  $J(K, \zeta, \omega_n)$  é complexa de se obter. Neste contexto, é imperativo recorrer a uma abordagem numérica.

Entre as diversas abordagens possíveis de otimização numérica, será empregado o método de busca simplex de *Lagarias, J. C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright. "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions." SIAM Journal of Optimization. Vol. 9, Number 1, 1998, pp. 112–147.* Este é um método de busca direta que não utiliza gradientes numéricos ou analíticos. O algoritmo é implementado no MATLAB pela função *fminsearch*.. O algoritmo (descrito em detalhes em *fminsearch Algorithm*) não tem garantia de convergir para um mínimo global, e portanto, os valores iniciais estimados para  $K$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$  são cruciais e devem estar próximos da solução desejada. Caso esteja muito afastada, corre-se o risco de encontrar soluções falsas que representam mínimos locais da função  $J(K, \zeta, \omega_n)$ , em detrimento do mínimo global almejado.

### Atividades

O arquivo GrupoRoboA.mat (a letra A indica a equipe) contem o vetor  $z$  com a primeira coluna formada pelos valores de saída (rotação)  $y_m(t)$  e a segunda coluna formada pelos valores de entrada (potência)  $u(t)$ . O intervalo de amostragem é  $T=0,01$  segundos. Pede-se:

- 1) Escrever um código em Matlab para simulação do modelo e estimação dos parâmetros para as duas técnicas apresentadas.
- 2) Gerar gráficos com os valores dos valores de  $y_m(t)$  e  $y_e(t)$  estimados pelas duas técnicas apresentadas.
- 3) Verificar os critérios de validação para os modelos obtidos pelas duas técnicas apresentadas.
- 4) Obter as funções de transferência no domínio de Laplace para os modelos estimados pelas duas técnicas apresentadas.

**Observação:** Em anexo, estão os arquivos que auxiliarão na elaboração dos códigos em Matlab para implementar as técnicas apresentadas neste laboratório.