Lista 2 - Funções de Variáveis Complexas

Exercício 1

Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

a) Mostrar que $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$.

b) Considerando $|z_2| > |z_3|$, mostrar que

$$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|}.$$

Exercício 2

Representar graficamente os conjuntos dados abaixo e classificá-los em aberto, fechado e limitado.

a) $\Re(z) < -3$

b) $\Im(z) \geq 1$

c) $|z - 2i| > 2$

d) $|z + 1| \leq 2$

e) $|z - 1 + i| < 3$

f) $z \neq 0,\ 0 \leq \arg(z) < \dfrac{\pi}{3}$

g) $|z| > 2,\ |\arg(z)| < \pi$

h) $1 < |z + 1 - 2i| \leq 2$

i) $\Re\left(\dfrac{1}{z}\right) < \frac{1}{4}$

Exercício 3

Determinar o domínio máximo de definição das seguintes funções:

a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\,\sin(y)}$

b) $f(z) = \dfrac{z}{x - y^z}$

c) $f(z) = \dfrac{z^2 + (z-1)^3}{(e^z - 1)\cos(y)}$

Exercício 4

Determinar os seguintes limites:

a) $\lim_{z \to -3i}(z^2 - 5z)$

b) $\lim_{z \to 2i}(2x + y^2)$

c) $\lim_{z \to i} \dfrac{4z + i}{z + 1}$

d) $\lim_{z \to i} \dfrac{z^4 - 1}{z - i}$

Exercício 5

Empregar a definição de limite para demonstrar que:

a) $\lim_{z \to z_0}(az + b) = az_0 + b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$

b) $\lim_{z \to \alpha} \dfrac{1}{z - \alpha} = \infty, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$

c) $\lim_{z \to \infty} \dfrac{3}{z - i} = 0.$

Exercício 6

Obter as derivadas das seguintes funções:

a) $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$

b) $f(z) = (z^2 - i)^3(iz + 1)^2$

c) $f(z) = \dfrac{z - 3i}{z + 3i}$

Exercício 7

Demonstrar que o produto de duas funções analíticas f e g é uma função analítica, com derivada

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Exercício 8

Seja

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3y(y - ix)}{x^6 + y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Mostrar que

$\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} \to 0 \quad$ para $z \to 0$ ao longo de qualquer reta passando pela origem,

mas que $\lim_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ não existe.

Exercício 9

Empregar as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções abaixo, qual é analítica e em que domínio. Em caso positivo, obter $f'(z)$. Há alguma função inteira?

a) $f(z) = z^3$

b) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$

c) $f(z) = \bar{z}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

e) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$

f) $f(z) = (e^y + e^{-y})\sin(x) + i(e^y - e^{-y})\cos(x)$

g) $f(z) = e^y(\cos x + i \sin x)$

Exercício 10

Considerar $f(z)$ uma função inteira. Mostrar que $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ também é inteira. Demonstrar que $h(z) = \overline{f(z)}$ é derivável em 0 se, e somente se, $f'(0) = 0$.

Exercício 11

Mostrar que a função $f(z) = x^2 + iy^3$ não é analítica em nenhum ponto.

Exercício 12

a) Mostrar que $u(x, y) = e^{-x}(x \sin(y) - y \cos(y))$ é harmônica.

b) Determinar v de tal modo que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica.

Exercício 13

Considerar as funções $f, g : (0, 1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$f(x) = x, \quad g(x) = x + x^2 e^{i/x^2}.$$

Mostrar que a regra de L'Hospital não vale para funções a valores complexos ressaltando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \text{mas} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Exercício 14

Considerar agora as funções $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = z, \quad g(z) = \begin{cases} z + z^2 e^{i/z^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

O que pode ser dito sobre a regra de L'Hospital neste caso? Mais especificamente, o que acontece com

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} \quad \text{e} \quad \lim_{z \to 0} \frac{f'(z)}{g'(z)}?$$

Exercício 15

Demonstrar um caso particular da regra de L'Hospital para funções analíticas: se $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Na verdade, vale: se $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0$ e $g^{(k)}(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

Gabarito

Exercício 2:

a) aberto e ilimitado.

b) fechado e ilimitado.

c) aberto e ilimitado.

d) fechado e limitado.

e) aberto e limitado.

f) não é aberto, não é fechado e é ilimitado.

g) aberto e ilimitado.

h) não é aberto, não é fechado e é limitado.

i) aberto e ilimitado.

Exercício 3:

a) $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i,\ \Im(z) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ \Re(z) \neq 0\}$.

c) $D_f = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z},\ \Im(z) \neq \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Exercício 4:

a) $-9 + 15i$

b) 4

c) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

d) $-4i$

Exercício 6:

a) $f'(z) = -2z + 20iz^4$

b) $f'(z) = 2(z^2 - i)^2(iz + 1)\,[\,3z(iz + 1) + i(z^2 - i)\,]$

c) $f'(z) = \dfrac{6i}{(z+3i)^2}$

Exercício 9:

a) O domínio de f é $\mathbb{C}$, f é inteira e $f'(z) = 3z^2$.

b) f não é analítica.

c) f não é analítica.

d) f é analítica em $\mathbb{C}^*$ e $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

e) O domínio de f é $\mathbb{C}$, f é inteira e $f'(z) = if(z)$.

f) O domínio de f é $\mathbb{C}$, f é inteira e $f'(z) = -i[(e^y - e^{-y})\sin(x) + i(e^y + e^{-y})\cos(x)]$.

g) f não é analítica.

Exercício 12:

$$v(x,y) = e^{-x}(y\sin(y) + x\sin(y)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$