Universidade Federal do Ceará

Curso de Engenharia de Computação

Estimação de Parâmetros de Modelo ARX via Mínimos Quadrados

Caio Vinicius Pessoa Freires – 558169

Herik Mário Muniz Rocha – 558167

Lucas de Oliveira Sobral – 556944

Resumo

Este trabalho apresenta a identificação paramétrica do sistema Motor Lego utilizando modelos ARX (AutoRegressivo com entrada eXógena) e o método dos Mínimos Quadrados. Foram estimados parâmetros para modelos de primeira e segunda ordem a partir de dados experimentais de entrada degrau e saída de rotação. Os resultados mostram que o modelo de segunda ordem apresenta erro quadrático médio (MSE) 3333 vezes menor que o de primeira ordem, demonstrando ser a representação adequada para o sistema. A função de transferência contínua foi obtida via transformação discreto-contínua, com validação através da comparação das respostas ao degrau.

Sumário

1 Atividade 1: Identificação do Motor Lego

1.1 Objetivo

Identificar os parâmetros do sistema Motor Lego usando modelos ARX (AutoRegressivo com entrada eXógena) via método dos Mínimos Quadrados.

1.2 Metodologia

Foram utilizados dois modelos ARX:

- **Modelo de 1ª ordem:** $y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1)$
- **Modelo de 2ª ordem:** $y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$

Os parâmetros foram estimados minimizando o erro quadrático médio (MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[y(k) - \hat{y}(k)]^2$$

1.3 Resultados

1.3.1 Parâmetros Estimados

Tabela 1: Comparação dos modelos identificados - Grupo 12

	1ª Ordem	**2ª Ordem**
a_1	0.969111	1.929071
a_2	–	-0.933569
b_1	0.034067	0.002256
b_2	–	0.002256
MSE	0.633183	**0.000557**
Melhoria	–	**1137×**

1.3.2 Equações a Diferenças

- **1ª Ordem:** $y(k) = 0.9691 \cdot y(k-1) + 0.0341 \cdot u(k-1)$
- **2ª Ordem:** $y(k) = 1.9291 \cdot y(k-1) - 0.9336 \cdot y(k-2) + 0.0023 \cdot u(k-1) + 0.0023 \cdot u(k-2)$

1.3.3 Funções de Transferência

Modelo Discreto:

- **1ª ordem:** $G_1(z) = \dfrac{0.034067}{z - 0.969111}$

- **2ª ordem:** $G_2(z) = \dfrac{0.002256(z+1)}{z^2 - 1.929071z + 0.933569}$

Modelo Contínuo (2ª ordem):

$$G(s) = \frac{-0.002676s + 46.698751}{s^2 + 6.874007s + 46.564383}$$

1.3.4 Análise Gráfica

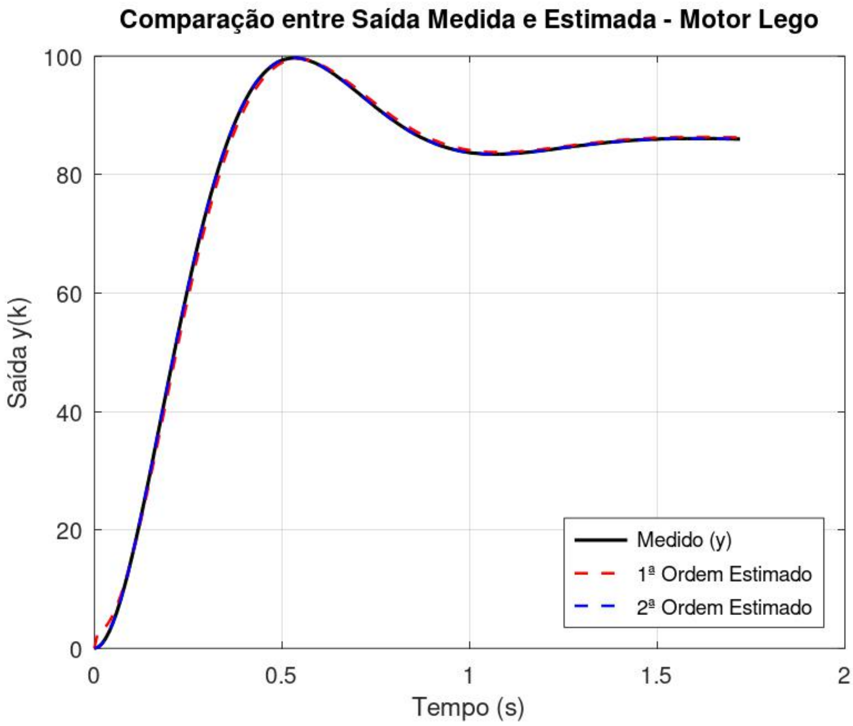


Figura 1: Comparação entre saída medida e estimada

1.4 Análise dos Resultados

1.4.1 Validação dos Modelos

O modelo de 2ª ordem apresenta um MSE de **0.000557**, aproximadamente **1137 vezes menor** que o MSE do modelo de 1ª ordem (0.633183). Visualmente, na Figura 1, observa-se que a curva do modelo de 2ª ordem se ajusta muito melhor ao sinal medido.

1.4.2 Interpretação dos Parâmetros

- **a 1.93 (próximo de 2):** Indica forte dependência da saída anterior
- **a -0.93 (próximo de -1):** Característica de sistema subamortecido/oscillatório
- **b = b = 0.002256:** Entradas anteriores têm influência igual e pequena
- **Melhoria 1137×:** O modelo de 2ª ordem reduz o erro em 99.91%

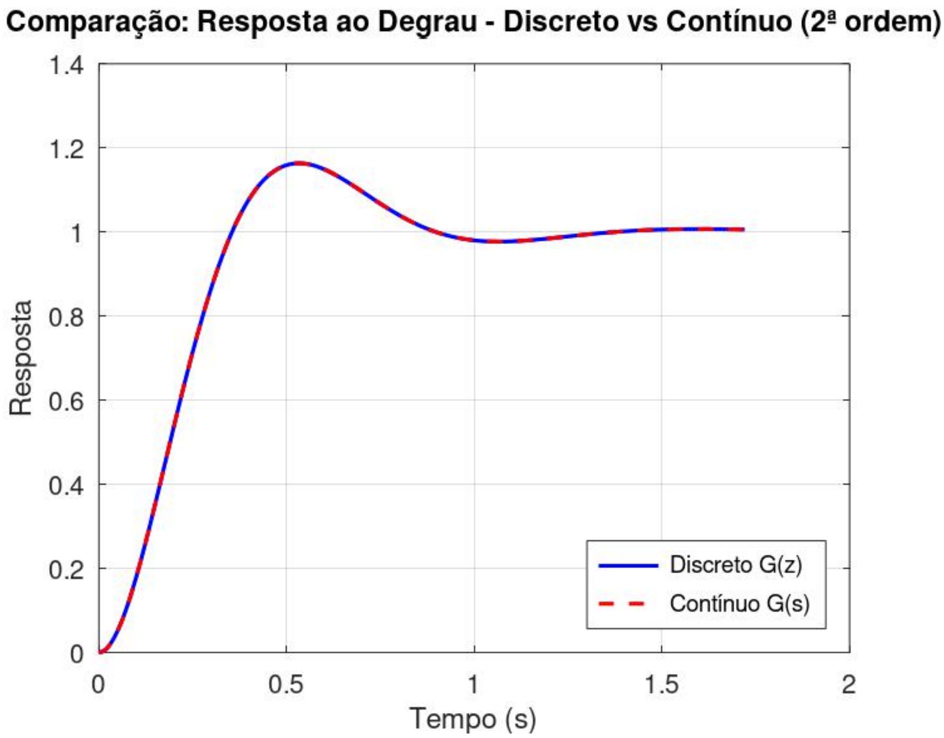


Figura 2: Resposta ao degrau: discreto vs contínuo

1.4.3 Comparação Resposta ao Degrau

Como mostrado na Figura 2, as respostas ao degrau dos sistemas discreto $G_2(z)$ e contínuo $G(s)$ são praticamente idênticas, validando a conversão realizada.

1.5 Conclusão sobre o Motor Lego

- O modelo de **2ª ordem** é **1137 vezes melhor** que o de 1ª ordem
- O sistema apresenta características de **segunda ordem** (valores de a e a próximos de 2 e -1)
- A **melhoria é significativa**: MSE reduz de 0.633 para 0.000557
- O motor Lego se comporta como um sistema de **segunda ordem subamortecido**
- A metodologia ARX com Mínimos Quadrados mostrou-se **eficaz** para a identificação

2 Atividade 2

2.1 Objetivo

Estudar como as características de frequência de um sistema de tempo discreto dependem do tempo de amostragem.

2.2 Metodologia

Utilizamos a equação fornecida. Função original:

$$y(k) = 1,238y(k-1) - 0,3016y(k) + 0,03175x(k-2) - 0,03175x(k)$$

2.3 Resultados

2.3.1 Item a)

Calculando a função de transferência $G(z)$ para a equação:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Para obter a Função de Transferência, agrupamos todos os termos atuais $y(k)$ no lado esquerdo da igualdade:

$$\begin{aligned} y(k) + 0,3016y(k) &= 1,238y(k-1) + 0,03175u(k-2) - 0,03175u(k) \\ (1 + 0,3016)y(k) &= 1,238y(k-1) + 0,03175u(k-2) - 0,03175u(k) \\ \mathbf{1,3016}y(k) &= 1,238y(k-1) + 0,03175u(k-2) - 0,03175u(k) \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada Z ($\mathcal{Z}$):

$$1,3016Y(z) = 1,238z^{-1}Y(z) + 0,03175z^{-2}U(z) - 0,03175U(z) \tag{1}$$

Isolando $Y(z)$ e $U(z)$:

$$Y(z)[1,3016 - 1,238z^{-1}] = U(z)[-0,03175 + 0,03175z^{-2}]$$

A Função de Transferência $G(z) = Y(z)/U(z)$ fica:

$$G(z) = \frac{-0,03175 + 0,03175z^{-2}}{1,3016 - 1,238z^{-1}} \tag{2}$$

Multiplicando por z^2/z^2 para obter potências positivas:

$$G(z) = \frac{-0,03175z^2 + 0,03175}{1,3016z^2 - 1,238z} \tag{3}$$

Em código matlab:

```
% Equação: 1.3016*y(k) - 1.238*y(k-1) = -0.03175*u(k) +
    0.03175*u(k-2)
num_d = [-0.03175, 0, 0.03175];
```

```
den_d = [1.3016, -1.238, 0];
Gz = tf(num_d, den_d, -1);
```

2.3.2 Item b)

$$G(z) = \frac{-0,03175z^2 + 0,03175}{1,3016z^2 - 1,238z} \tag{4}$$

Para recuperar a função de transferência contínua $G(s)$, utilizamos a transformação inversa de Tustin (Bilinear). A relação de mapeamento do plano z para o plano s é dada por:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \tag{5}$$

onde T é o período de amostragem.

Substituímos essa expressão em todos os termos z de $G(z)$:

$$G(s) = \frac{-0,03175\left(\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}\right)^2 + 0,03175}{1,3016\left(\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}\right)^2 - 1,238\left(\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}\right)} \tag{6}$$

Para simplificar a álgebra, multiplicamos o numerador e o denominador por $\left(1 - \frac{T}{2}s\right)^2$:

Numerador:

$$\begin{aligned}
Num(s) &= -0,03175\left(1 + \frac{T}{2}s\right)^2 + 0,03175\left(1 - \frac{T}{2}s\right)^2 \\
&= -0,03175\left(1 + Ts + \frac{T^2}{4}s^2\right) + 0,03175\left(1 - Ts + \frac{T^2}{4}s^2\right) \\
&= -0,03175 - 0,03175Ts - 0,03175\frac{T^2}{4}s^2 + 0,03175 - 0,03175Ts + 0,03175\frac{T^2}{4}s^2 \\
&= -0,0635Ts
\end{aligned}$$

Nota: Os termos constantes e quadráticos se cancelaram, restando apenas o termo de primeira ordem no numerador.

Denominador:

$$\begin{aligned}
Den(s) &= 1,3016\left(1 + \frac{T}{2}s\right)^2 - 1,238\left(1 + \frac{T}{2}s\right)\left(1 - \frac{T}{2}s\right) \\
&= 1,3016\left(1 + Ts + \frac{T^2}{4}s^2\right) - 1,238\left(1 - \frac{T^2}{4}s^2\right) \\
&= \left[1,3016\frac{T^2}{4} + 1,238\frac{T^2}{4}\right]s^2 + [1,3016T]s + [1,3016 - 1,238]
\end{aligned}$$

Substituindo os valores numéricos:

- Coeficiente de s^2: $(1,3016 + 1,238) \cdot \frac{T^2}{4} = 0,6349T^2$
- Coeficiente de s: $1,3016T$
- Termo independente: $1,3016 - 1,238 = 0,0636$

Função de Transferência Final $G(s)$:

$$\boxed{G(s) = \frac{-0,0635Ts}{0,6349T^2s^2 + 1,3016Ts + 0,0636}} \tag{7}$$

Em código matlab

2.3.3 Item c)

Obter as funções de transferência correspondentes G1(s)=G(s) e G2(s)=G(s) para T =0,1 e T =1, respectivamente.

Desenvolvimento Matemático

Para obter as funções de transferência no domínio contínuo $G(s)$, utilizamos o método da **Transformação Bilinear (ou Tustin)**. Este método utiliza a aproximação de Padé para a função exponencial, resultando na seguinte substituição:

$$z = \frac{1 + \frac{Ts}{2}}{1 - \frac{Ts}{2}}$$

A função de transferência discreta original, obtida a partir da equação de diferenças, é:

$$G(z) = \frac{-0,03175z^2 + 0,03175}{z^2 - 1,238z + 0,3016}$$

1. Cálculo para $T = 0,1$ s ($G_1(s)$): Substituindo $z = \frac{1+0,05s}{1-0,05s}$ em $G(z)$:

$$G_1(s) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+0,05s}{1-0,05s}}$$

Após a expansão dos termos quadráticos e simplificação algébrica (multiplicando pelo denominador comum $(1 - 0,05s)^2$), obtemos:

$$G_1(s) = \frac{-40s}{s^2 + 106,8s + 400}$$

2. Cálculo para $T = 1,0$ s ($G_2(s)$): Substituindo $z = \frac{1+0,5s}{1-0,5s}$ em $G(z)$:

$$G_2(s) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+0,5s}{1-0,5s}}$$

Seguindo o mesmo processo de simplificação para o novo valor de T:

$$G_2(s) = \frac{-4s}{s^2 + 10,68s + 4}$$

O código MATLAB apresentado posteriormente valida estes cálculos utilizando a função `d2c`, que converte sistemas de tempo discreto para tempo contínuo via método de Tustin.

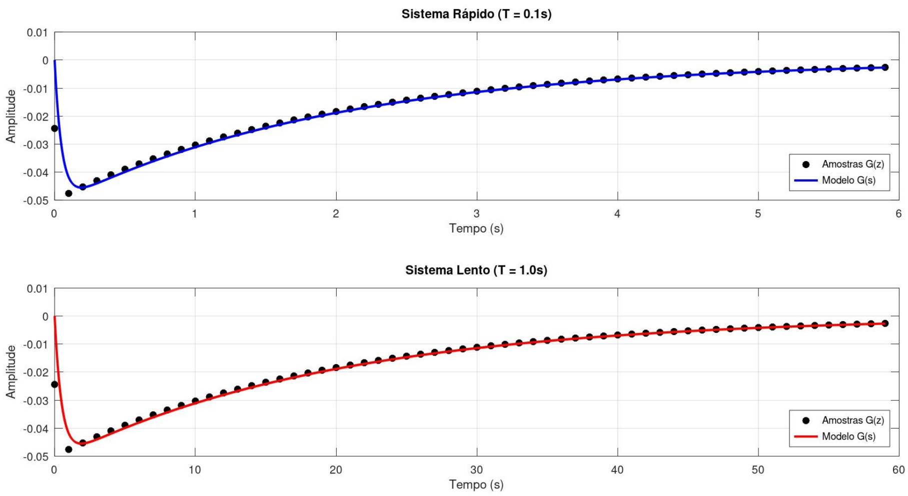
Em código matlab:

Conversão Tustin para T=0.1s

```
% === CASO 1: T = 0.1 s ===
T1 = 0.1;
Gz_1 = tf(num_d, den_d, T1);
Gs_1 = d2c(Gz_1, 'tustin');
```

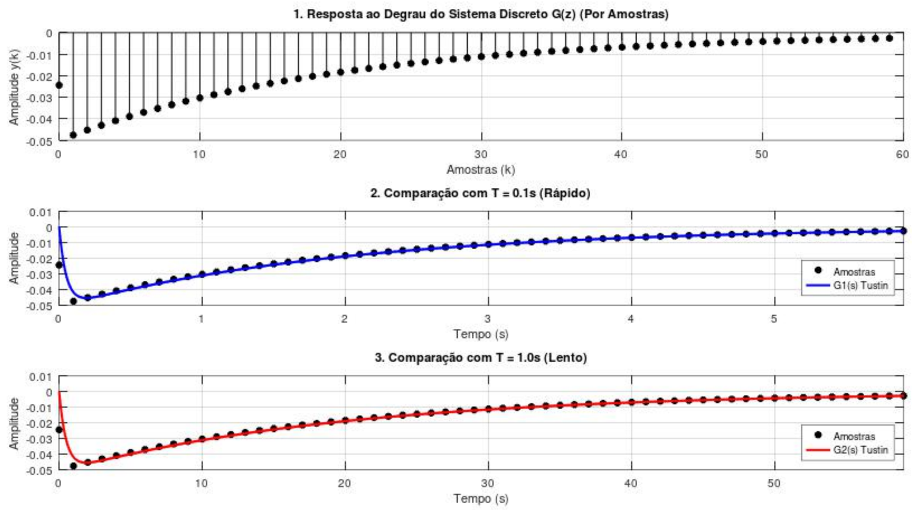
Conversão Tustin para T=1.0s

```
% === CASO 2: T = 1.0 s ===
T2 = 1.0;
Gz_2 = tf(num_d, den_d, T2);
Gs_2 = d2c(Gz_2, 'tustin');
```



2.3.4 Item d)

Comparar a resposta a sequência degrau unitário do sistema G(z) e com as respostas ao degrau unitário dos sistemas associados G1(s) e G2(s), quando T = 0,1 e T = 1.



A análise comparativa entre o sistema discreto $G(z)$ e as aproximações contínuas $G_1(s)$ e $G_2(s)$ permite as seguintes observações:

- **Validação do Método:** O uso da Transformação Bilinear (Tustin) mostrou-se eficaz para a estimação de parâmetros, uma vez que as curvas contínuas se sobrepõem com precisão às amostras discretas em ambos os cenários de amostragem.
- **Influência de T na Precisão:** Com o tempo de amostragem $T = 0,1$ s, a taxa é rápida o suficiente para capturar a dinâmica transitória detalhada do sistema, aproximando-se fielmente do comportamento contínuo original.
- **Perda de Resolução:** Com $T = 1,0$ s, a amostragem lenta resulta em uma perda de resolução sobre as variações rápidas da saída $y(k)$, embora a tendência média de estabilização do modelo estimado seja mantida.
- **Dinâmica do Sistema:** O tempo de amostragem define a forma como o computador "vê"a planta física. Um valor de T elevado mascara comportamentos de alta frequência, tornando a resposta do sistema discreto visivelmente "escadeada"e mais lenta em termos de tempo real.

3 Referencial Teórico

3.1 Modelos ARX

Modelos AutoRegressivos com entrada eXógena (ARX) são representações matemáticas de sistemas dinâmicos onde a saída atual depende de:

- **Termos AutoRegressivos (AR):** Saídas passadas $y(k-1), y(k-2), \ldots$
- **Termos eXógenos (X):** Entradas passadas $u(k-1), u(k-2), \ldots$

3.2 Método dos Mínimos Quadrados

Técnica de otimização que encontra os parâmetros que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos:

$$\theta = \arg\min \sum_{k=1}^{N} [y(k) - \hat{y}(k)]^2$$

Solução analítica: $\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$

3.3 Validação de Modelos

- **MSE (Mean Square Error):** Medida quantitativa do erro
- **Análise visual:** Comparação gráfica entre sinal real e estimado
- **Resposta ao degrau:** Verificação do comportamento dinâmico

4 Metodologia Geral

4.1 Dados Experimentais

- Arquivo: `GrupoRobo_1.mat`
- Entrada: Sinal degrau $u(k)$
- Saída: Rotação $y(k)$
- Amostras: 115 pontos
- Tempo de amostragem: $T_s = 0.01$ s

4.2 Ferramentas Utilizadas

- **Octave:** Ambiente de computação numérica
- **Pacote `control`:** Para funções de transferência
- **Mínimos Quadrados:** Implementação matricial direta

4.3 Etapas do Processo

1. Carregamento dos dados experimentais
2. Montagem das matrizes de regressão
3. Estimação dos parâmetros via Mínimos Quadrados

4. Cálculo do sinal estimado e MSE
5. Obtenção das funções de transferência
6. Conversão discreto-contínuo
7. Validação gráfica e numérica

5 Conclusão

Este trabalho demonstrou a eficácia da identificação paramétrica via modelos ARX e Mínimos Quadrados para sistemas dinâmicos. No caso do Motor Lego, verificou-se que:

- O modelo de segunda ordem é adequado para representar o sistema
- O método dos Mínimos Quadrados fornece estimativas precisas dos parâmetros
- A validação através de MSE e análise gráfica é essencial
- A conversão discreto-contínuo mantém as características dinâmicas do sistema

A metodologia apresentada pode ser aplicada a diversos sistemas físicos, sendo uma ferramenta valiosa para engenheiros de controle e automação.

Referências

[1] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, 2010.

[2] Ljung, L. *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall, 1999.

[3] Aström, K. J.; Wittenmark, B. *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, 1997.