PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA GOIÁS
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO
ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO

AED III – DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

GOIÂNIA 2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA GOIÁS

AED III – DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

LUCAS MACEDO DA SILVA

GOIÂNIA, 2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA GOIÁS

AED III – DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

Trabalho apresentado por Lucas Macedo da Silva para avaliação e aplicação dos conceitos aprendidos em atividade extra disciplinar.

GOIÂNIA, 2018

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A decomposição de Cholesky tem como objetivo diminuir o esforço necessário para decomposição *Lower* e *Uper* (Decomposição LU) de uma matriz, levando em consideração a simétrica (FRANCO, 2006). Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada nxn, de forma que seus elementos aij são iguais aos seus elementos aji, para cada ij (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011)., ou seja $[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]^t$.

As vantagens computacionais da decomposição de Cholesky para resolução de sistemas, estão no fato de que é necessário apenas metade armazenamento e metade do tempo de execução (CHAPRA; CANALE, 2011). O primeiro fato comprova-se observando que é necessário armazenar apenas metade da matriz, já o segundo ocorri pelo mesmo motivo, onde é necessário calcular apenas metade da matriz.

2 DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

O método baseia-se na simetria da matriz, de forma que uma matriz possa ser decomposta em um produto $[\mathrm{G}][\mathrm{G}]^t$, sendo G a matriz triangular inferior e $[\mathrm{G}]^t$, a matriz triangular inferior transposta (FRANCO, 2006).

Ao realizar a multiplicação da matriz triangular inferior com sua transposta, de forma que, $[A] = [\mathrm{G}][\mathrm{G}]^t$, onde $[A]$, é a matriz antes de ser composta, obtém-se a seguinte relação:

$$a11 = g^2 11,$$

$$a21 = g21g11,$$

$$a22 = g^2 21 + \ g^2 22,$$

...

$$ann = g^2 n1 + \ g^2 n2 + \cdots + g^2 nn.$$

Todos os termos podem ser operados e igualados, obtendo duas relações de recorrência presentes na figura 1, com isso, para a *k*-ésima linha,

Figura 1 – Relações de recorrência

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k-1$$

e

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Fonte: Chapra e Canale (2011)

Portanto a decomposição de uma matriz a partir da decomposição de Cholesky, fica por parte da resolução de resolução de relações de recorrência.

3 APLICAÇÕES DA DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

A decomposição de Cholesky apresenta várias aplicações dentre elas, temos:

Resolução de sistemas lineares: As matrizes resultantes da decomposição de Cholesky, podem ser utilizadas para encontrar a solução de sistemas lineares. Partindo do princípio da resolução de problemas a partir da decomposição LU, (FRANCO, 2006).

Podemos encontrar a solução a partir do sistema abaixo:

$$\begin{cases} [\mathrm{G}]\mathrm{y}^{t} = b \\ [\mathrm{G}]^{t}x = y \end{cases}$$

Diferente da decomposição LU esta técnica requer menos cálculos. Facilitando assim a resolução do sistema linear. Além de reduzir problemas ocasionados por instabilidade numérica gerada por manipulações matriciais para encontrar as matrizes inversas.

Big Data: A decomposição de Cholesky é utilizada para facilitar a manipulação das matrizes de covariância. Permitindo assim a compreensão do novo conjunto de dados gerado.

Regressão Linear: Quando uma hipótese é violada a decomposição de Cholesky permite a utilização dos métodos dos mínimos quadrados generalizados.

4 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA AED 3

Para a resolução do problema foi utilizada a aplicação da decomposição de Cholesky para a solução de sistemas de equações.

4.1 Enunciado do problema

Pesquise sobre a decomposição de Cholesky e implemente o método em Octave para resolver o sistema linear de equação:

Figura 2 – Sistema linear do problema

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix}$$

Fonte: AED3 (2018)

4.2 Código Octave

O código desenvolvido no software Octave, se encontra abaixo:

Função que decompõe a matriz na matriz triangular inferior, sendo baseada nas relações de recorrência presentes na figura 1.

```
function [l] = cholesky_decomposicao (A = [])
t = length(A);
n = termial(t);
i = 1;
j = 1;
k = 1;
l = zeros(t);
for m = 1: n
 if i == k
  s = 0;
  for j = 1: k - 1
   s = s + l(k,j) * l(k,j);
  endfor
  l(k, k) = sqrt (A(k, k) - s);
  k = k + 1;
  if k == t+1
   break;
  endif
 else
  for i = 1: k
   s = 0;
   for j = 1: i - 1
    if (k <= t)
     s = s + l(i,j) * l (k, j);
    endif
   endfor
   if l(i,i) != 0
     l(k,i) = (A(k, i) - s)/l(i,i);
```

```
    endif
  endfor
 endif
endfor
endfunction
```

Função que calcula a solução do sistema a partir da decomposição de Cholesky.

```
function [x] = resolucao_sistema (A = [], b = [])
 l = cholesky_decomposicao (A);

 t = length (A);
 y = [];
 x = [];

 n = termial (t);

 %i = 1;

 for i = 1 : t
  s = 0;
  k = 1;
  for j = 1 : i - 1
   s = s + l(i, j)*y(k);
   k = k + 1;
  endfor
  y(i,1) = (b(i) - s)/l(i,i);
  i = i + 1;
 endfor
```

```
  l1 = l';


  z = 0;
  i = t;
  while (i >= 1)
    s = 0;
    k = t;
    j = t;
    while (j > i-1 && i != j)
      s = s + x(k)*l1(i,j);
      s
      k = k - 1;
      j = j - 1;


    endwhile
    x(i,1) = (y(i,1) - s)/l1(i,i);
    i = i - 1;
  endwhile
endfunction
```

Função extra que calcula a quantidade de termos da matriz triangular inferior, ou seja, a quantidade de termos que serão calculados pela função cholesky_decomposicao.

```
function n = termial (t)
  a = t;
  n = 0;
  for u = 1: t
    n = n + a;
    a = a - 1;
  endfor
endfunction
```

4.3 Resultados obtidos

A aplicação do método desenvolvido para a resolução do problema resultou em 7 iterações, inerentes a decomposição da matriz, em matriz triangular. Sendo, portanto, um resultado satisfatório para o escopo da aplicação.

Para a resolução do sistema em si, foram utilizadas 4 iterações. Totalizando 11 iterações, sem levar em conta a função utilizada para calcular a transposta da matriz obtida pela decomposição.

No quesito complexidade a decomposição de Cholesky, assim como os métodos de Gauss e Decomposição LU para resolução de sistemas lineares, apresentam complexidade $O(n^3)$ (GURGEL et al., 2012). e (SANCHES; BEZERRA, [2018]). Já levando em consideração o armazenamento requerido a decomposição de Cholesky requer um menor espaço. Além de apresentar uma implementação mais simples.

Os resultados obtidos a partir da experimentação foram satisfatórios. Visto que para a resolução do problema, o vetor resposta foi o mesmo que o obtido com as funções já definidas pelo software (c = inv(A)*b). Além de permitir o aprofundamento e estudo de uma nova técnica para resolução de sistemas lineares.

5 CONCLUSÃO

A decomposição de Cholesky apresenta várias aplicações dentre elas destaca-se a resolução de sistemas lineares. Requerendo uma menor quantidade de espaço para armazenamento, o método se sobressai em relação aos mais disseminados como a decomposição LU.

A aplicação na resolução do problema proposto, implicou em uma solução correta. Resultou no desenvolvimento de um código para a resolução de sistemas lineares a partir da decomposição de Cholesky. Bem como implicou na pesquisa e estudo da nova técnica.

Portanto, a decomposição de Cholesky, trata-se de uma grande ferramenta para a resolução de sistemas lineares, se mostrando mais eficiente em ambiente computacional. Visto que necessita de um menor esforço por parte do sistema.

6 ANEXO

```
Janela de Comandos
>> resolucao_sistema(A, b)
m =   1
l =

     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

m =   2
l =

     3     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

m =   3
l =

     3     0     0     0
     2     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

m =   4
l =

     3     0     0     0
     2     4     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

m =   5
l =

     3     0     0     0
     2     4     0     0
    -1     1     0     0
     0     0     0     0
```

```
m =   6
l =

     3     0     0     0
     2     4     0     0
    -1     1     2     0
     0     0     0     0

m =   7
l =

     3     0     0     0
     2     4     0     0
    -1     1     2     0
     1     5    -1     0

l =

     3     0     0     0
     2     4     0     0
    -1     1     2     0
     1     5    -1     1

ans =

     2
    -3
     1
     5
```

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Brooks/cole, Cengage Learning, 2011.

[2] CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: AMGH, 2011.

[3] FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Númerico.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[4] GURGEL, Valciano C. et al. **Comparativo entre fatoração LU tradicional e através das fórmulas de Crout e Doolitlle**.2012. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-ne/2012/trabalhos/PDF/201.pdf>. Acesso em: 30 set. 2018.

[5] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJIN, David. **Matemática Volume Único**. São Paulo: Atual Editora, 2002.

[6] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. **Álgebra Linear**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

[7] SANCHES, Carlos Alberto Alonso; BEZERRA, Juliana de Melo. **Matemática Computacional.** São Paulo: Instituto Tecnológico de Aeronaútica, [2018]. Color.