PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

ESCOLA DE CIÊNCIAS EXATAS E DA COMPUTAÇÃO

CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

AED VIII – MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEM 4

Goiânia

2018

LUCAS MACEDO DA SILVA

AED VIII – MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEM 4

Atividade extra disciplinar, apresentada na disciplina CMP1058 Fundamentos de Computação IV, para avaliação parcial dos conceitos extra disciplinares, sob orientação da professora Dr. Clarimar José Coelho.

Goiânia

2018

1 MÉTODOS DE RUNGE KUTTA

Os métodos de Runge Kutta, foram desenvolvidos em 1900 pelos matemáticos C. Runge e M.W. Kutta, são métodos que possibilitam a resolução de equações diferenciais ordinárias. Wikipédia (2018).

Os métodos generalizam o método de Euler melhorado inserindo mais estágios de cálculo e buscando ordens mais altas de precisão (JUSTO et al., 2018). A acurácia é obtida a partir de uma série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior. O método de primeira ordem é na verdade o método de Euler, existem além destes vários métodos de Runge Kutta. O mais utilizado e também abordado neste trabalho é o método de Runge Kutta de Ordem 4, ou método de Runge Kutta de quarta ordem clássico.

Sendo bastante semelhante ao método de Heun (Método de Euler melhorado), onde são desenvolvidas múltiplas estimativas da inclinação para se chegar a uma inclinação média melhorada no intervalo. Chapra e Canale (2011). Matematicamente, a expressão que define o método é:

$$yi + 1 = yi + \frac{k1 + 2k2\ + 2k3 + k4}{6}$$

Onde:

$k1 = f(xi, yi)$

$k2 = f(xi + \frac{h}{2}, yi + \frac{k1h}{2})$

$k3 = f(xi + \frac{h}{2}, yi + \frac{k2h}{2})$

$k4 = f(xi + h, yi + k3h)$

O método possui um erro igual a $O(h^4)$. Tal método será empregado no presente trabalho para resolução de Problemas de Valor inicial (PVI).

2 ENUNCIADO DO PROBLEMA

Os conceitos do método de Runge Kutta de 4 ° Ordem se deu na resolução de valores problemas de valores iniciais (PVI). Sendo eles:

Figura 2 – PVI's a serem resolvidos

Com $h = 0.025$ no intervalo $[0,\ 1.1]$

$$\begin{cases} y' = tan(y) + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Com $h = 0.1$ no intervalo $[1,\ 1.5]$

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Com $h = 0.1$ no intevalo $[0,\ 1.4]$

$$\begin{cases} y' = 1 + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Fonte: Atividade extra disciplinar 8 (2018)

Para resolução dos PVI's foi desenvolvido um código no *software* Octave.

3 CÓDIGO DESENVOLVIDO

O código a seguir denominado "ruge_kutta", busca calcular os resultados dos problemas de valor inicial baseado no método de Rugen Kutta de 4º ordem.

Os parâmetros de entrada são:

a = intervalo inferior.

b = intervalo superior.

h = passo.

x0 = valor inicial de x.

y0 = valor inicial de y. De forma que y(x0) = y0.

Para cada problema, existe o cálculo do número de iterações a serem realizados pelo laço, indo de a até b com passo h. Com isso o valor de x atual é definido como x = x + h. Os coeficientes são então calculados conforme o método define.

Com isso a seguir encontra-se definido o código desenvolvido.

```
function [rk] = ruge_kutta(a, b, h, x0, y0)
  x = x0; y = y0;
  n = abs(b-a)/h %numero de iteracoes
  for i = 1 : n
    k1 = f(x, y)
    k2 = f(x + (1.0/2)*h, y + (1.0/2)*k1*h)
    k3 = f(x + (1.0/2)*h, y + (1.0/2)*k2*h)
    k4 = f(x + h, y + k3*h)
    y_i = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*(h/6.0)
    y = y_i
    x = x + h
  endfor
```

```
  y
endfunction
```

Para o cálculo dos valores dos PVI's foi utilizado uma função auxiliar, que apenas calcula o valor da função no ponto (xi, yi) atual.

Recebe como parâmetros:

x0 = valor atual de x

y0 = valor atual de y.

```
function [y] = f(x0, y0)
  y = tan(y0) + 1; %q1
  %y = 2 * x0 * y0; %q2
  %y = 1 + x0 ^ 2; %q3
endfunction
```

4 RESULTADOS OBTIDOS

4.1 PRIMEIRO PVI

Executando o código para o primeiro PVI, com passo h = 0.025 e no intervalo [0, 1.1], obtém se os seguintes resultados:

A quantidade de iterações representada pela variável n é 44.

O resultado do PVI representado pela variável y é -22.3880972890824.

Figura 2 – Saída para execução do primeiro PVI

```
>> ruge_kutta(0, 1.1, 0.025, 0, 1)

n =  44
y = -22.3880972890824
```

Fonte: O autor (2018)

4.2 SEGUNDO PVI

Executando o código para o segundo PVI com passo h = 0.1 no intervalo [1, 1.5], obtém se os seguintes resultados:

A quantidade de iterações representada pela variável n é 5.

O resultado do PVI representado pela variável y é 3.49021063637295.

Figura 3 – Saída para execução do segundo PVI

```
>> ruge_kutta(1, 1.5, 0.1, 1, 1)
n =   5
y =   3.49021063637295
```

Fonte: O autor (2018)

Ao calcular o PVI analiticamente obtém a função a seguir.

$$y = e^{x^2-1}$$

Ao aplicar o valor de 1.5 na função acima, obtém-se:

$$y = 3.49034295746184$$

Calculando o erro absoluto. Tem-se que:

$$abs = |\ 3.49034295746184 - 3.49021063637295|$$
$$abs = 1.32321088889942e - 004$$

Obtendo, portanto, um erro muito pequeno da ordem da quarta casa decimal, mostrando assim, a acurácia do código e consequentemente do método.

4.3 TERCEIRO PVI

Executando o código para o terceiro PVI com passo h = 0.1 no intervalo [0, 1.4], obtém se os seguintes resultados:

A quantidade de iterações representada pela variável n é 14.

O resultado do PVI representado pela variável y é 2.31466666666667.

Figura 4 – Saída para execução do terceiro PVI

```
>> ruge_kutta(0, 1.4, 0.1, 0, 0)

n =  14.000000000000
y =  2.31466666666667
```

Fonte: O autor (2018)

Ao calcular o PVI analiticamente obtém a função a seguir.

$$y = x + \frac{x^3}{3}$$

Ao aplicar o valor de 1.4 na função acima, obtém-se:

$$y = 2.31466666666667$$

Calculando o erro absoluto. Tem-se que:

$$abs = |\, 2.31466666666667 - 2.31466666666667|$$
$$abs = 0$$

Obtendo, portanto, um erro absoluto zero, com isso percebe-se que o método é eficaz e preciso para casos polinomiais com ordem inferior ou igual ao quarto grau, visto que o erro é proporcional ao quarto grau, como ocorre no corrente problema.

Portanto, percebe-se a importância do método na resolução de problemas iniciais, a acurácia do método o torna atraente para diversas aplicações. Porém sua complexidade e quantidade de cálculos a serem realizados, torna sua aplicação manual mais demorada e suscetível a erros. Sendo assim, computacionalmente o método é muito importante para a resolução de problemas de valor inicial.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: AMGH, 2011.

JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzotto et al. **Cálculo Numérico Um Livro Colaborativo Versão Python.** Rio Grande do Sul: Ufrgs, 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/main.html>. Acesso em: 30 set. 2018.

WIKIPÉDIA. **Método de Runge Kutta.** Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta>. Acesso em: 08 dez. 2018.