

ANALISI MATEMATICA L-B (L-Z) (C.d.L. Ing. Gestionale)**Università di Bologna - A.A.2008-2009 - Prof. G.Cupini****Esercizi sui limiti di funzioni di due variabili**

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

Esercizio 1. Calcolare, se esiste, il limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lll} 1) x \sin \frac{x+y}{x^2+y^2}; & 2) \log(x^2|y|); & 3) \log\left(\frac{x^2|y|}{|y|+1}\right); \\ 4) \log\left(\frac{x^2}{|y|+x^2}\right); & 5) e^{\frac{x^2}{y^2}}; & 6) \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); \\ 7) \frac{\log(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4}; & 8) \frac{x^2y}{|y|+|x|}; & 9) \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}; \end{array}$$

$$10) \frac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}; \quad 11) e^{xy \log|y|}; \quad 12) \arctan \frac{1}{xy};$$

$$13) \arctan \frac{1}{|xy|}; \quad 14) \frac{x}{y^2+|x|}; \quad 15) \frac{x^2}{y^2+\frac{1}{2}|x|};$$

$$16) e^{\frac{1}{xy+(xy)^2}}; \quad 17) \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^4}.$$

Suggerimenti e/o soluzioni**Esercizio 1.**

[Sugg.: 1) funzione limitata per infinitesima; 2) porre $t = x^2|y|$, 3) $0 \leq \frac{x^2|y|}{|y|+1} \leq x^2$; 4) restringersi alle parabole $y = mx^2$; 5) restringersi alle rette $y = mx$; 6) $0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$; 7) porre $t = x^2 + y^4$; 8) $0 \leq \frac{|x^2y|}{|y|+|x|} \leq x^2$, 9) restringersi alle rette $y = mx$; 10) usando il limite notevole $\log(1+t)/t \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+xy)}{xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Poi, restringersi alle rette $y = mx$; 11) $y \log|y| \rightarrow 0$, quando $y \rightarrow 0$, per limite notevole; 12) restringersi alle rette $y = x$ e $y = -x$; 13) $\frac{1}{|xy|} \rightarrow +\infty$; 14) restringersi all'asse x e fare limiti per $x \rightarrow 0^+$ e per

$x \rightarrow 0^-$; 15) $0 \leq \frac{x^2}{y^2+|x|/2} \leq 2|x|$; 16) restringersi alle rette $y = x$ e $y = -x$; 17) usando il limite notevole $\sin t/t \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}.$$

Osservare poi che

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{x^2+y^4}y^2 \leq y^2.]$$

[Sol.: 1) [0]; 2) $[-\infty]$; 3) $[-\infty]$; 4) $\{\#$; 5) $\{\#$; 6) [0]; 7) [1]; 8) [0]; 9) $\{\#$; 10) $\{\#$; 11) [1]; 12) $\{\#$; 13) $[\frac{\pi}{2}]$; 14) $\{\#$; 15) [0]; 16) $\{\#$; 17) [0].]