Spazi metrici

1. Dare la definizione di spazio normato. Darne un esempio e dimostrare che effettivamente lo e'.

2. Mostrare come si puo' definire una norma su uno spazio con prodotto interno. Dare un esempio.

3. Definire la norma della convergenza uniforme in $BC(A)$ (A insieme). Provare che con questa norma, la convergenza puntuale di una successione equivale alla convergenza uniforme.

4. Dare la definizione di spazio metrico e presentare, illustrandolo, un esempio.

5. Dare la definizione di interno di un sottoinsieme e di sottoinsieme aperto in uno spazio metrico. Dimostrare che l'intersezione di due aperti e' un aperto.

6. Dare la definizione di frontiera di A sottoinsieme di uno spazio metrico e presentare, illustrandolo, un esempio.

7. Dare la definizione di frontiera di A sottoinsieme di uno spazio metrico e dimostrare che, se $A \subseteq X$, con X spazio metrico, A e' aperto se e solo se $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

8. Sia $A \subseteq X$ spazio metrico. Scrivere cosa significa che A e' chiuso. Provare che A e' chiuso se e solo se $X \setminus A$ e' aperto.

9. Dare la definizione di chiusura $\overline{A}$ di A, con $A \subseteq X$ spazio metrico. Dimostrare che $x^0 \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione a valori in A convergente a x^0.

10. Dare la definizione di limite di una successione in uno spazio metrico. Provare che se il limite esiste, e' unico.

11. Sia $A \subseteq X$ spazio metrico. Dare la definizione di punto di accumulazione di A. Dare un esempio di punto di accumulazione appartenente ad A e uno di punto di accumulazione non appartenente ad A.

12. Dare la definizione dell'espressione $lim_{x \to x^0} f(x) = l$, con $f : A \subseteq X \to Y$ e X, Y spazi metrici, illustrandola con un esempio. Provare che, se f e' continua in x^0 e $\lim_{n\to\infty} a_n = x^0$ ($a_n \in A$), allora $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ ed, eventualmente, il viceversa.

13. Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq X$ spazio metrico. Illustrare il legame tra il limite della funzione per $a \to x^0$ e il limite delle componenti. Dove deve stare x^0?

14. Illustrare cosa si puo' dire sui limiti di restrizioni.

15. Dare la definizione di f continua in a_0, con $f : A \to Y$, $A \subseteq X$, X, Y spazi metrici. Descrivere la connessione tra questa definizione e quella di limite.

16. Enunciare ed, eventualmente, dimostrare un teorema di continuita' per composizioni di funzioni continue.

17. Dare la definizione di sottoinsieme limitato in uno spazio metrico. Caratterizzare i sottoinsiemi limitati negli spazi normati.

18. Dare la definizione di sottoinsieme compatto di uno spazio metrico. Ilustrare la connessione tra "compattezza" e "chiusura e limitatezza".

19. Enunciare ed, eventualmente, dimostrare (anche parzialmente) qualche versione del teorema di Weierstrass negli spazi metrici.

20. Dare la definizione di funzione uniformemente continua nell'ambito degli spazi metrici e in quest'ambito enunciare, ed eventualmente dimostrare, una versione del teorema di Heine-Cantor.

21. Illustrare le nozioni di sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale e di sottoinsieme connesso per archi in uno spazio metrico. Illustrare qualche connessione tra esse.

22. Illustrare ed, eventualmente, dimostrare qualche versione del teorema di Bolzano negli spazi metrici.

23. Dare la definizione di successione di Cauchy in uno spazio metrico e di spazio metrico completo. Presentare un esempio di spazio metrico completo e un esempio di spazio metrico che non lo e'.

24. Dare le definizioni di sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico e di spazio metrico completo. Dimostrare che un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo e' completo.

25. Enunciare ed eventualmente dimostrare il teorema delle contrazioni, specificando il significato di ogni termine che compare in esso.

2. Calcolo differenziale per funzioni di piu' variabili reali

1. Dare la definizione di derivata rispetto a un elemento $v \in \mathbb{R}^n$ nel caso di f a valori in $\mathbb{R}^m$. Dare la definizione di derivata parziale. Specificare bene le ipotesi. Discutere la continuita' di una funzione dotata di derivata(e).

2. Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto nel caso di f a valori in $\mathbb{R}^m$. In tal caso discutere la continuita' della funzione e l'esistenza delle derivate parziali.

3. Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto nel caso di f a valori in $\mathbb{R}^m$ e dare una condizione sufficiente per la differenziabilita' di una funzione in un punto.

4. Enunciare una versione pluridimensionale del teorema del valor medio ed (eventualmente) dimostrarla.

5. Definire le derivate di ordine superiore al primo. Enunciare il teorema di Schwartz. Illustrare le sue implicazioni per derivate di ordine superiore al primo.

6. Discutere la formula di Taylor per funzioni di piu' variabili.

7. Dare la definizione di estremante relativo e di punto critico per funzioni di piu' variabili. Spiegare come sono connesse queste due nozioni. Enunciare (ed eventualmente dimostrare) qualche risultato utile per studiare la natura di un punto critico.

8. Enunciare (ed eventualmente dimostrare) il teorema di differenziabilita' di funzioni composte. Ricavare da questo una formula di derivazione.

9. Enunciare il teorema di invertibilita' locale. Presentare un esempio.

10. Enunciare il teorema delle funzioni implicite. Presentare un esempio.

11. Dare la definizione di spazio tangente e spazio normale a un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dare la definizione di sottovarieta' di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m e classe C^p. Specificare come sono fatti in tal caso spazio tangente e spazio normale.

12. Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Darne una dimostrazione o descriverne un'applicazione.

Misura e integrazione

1. Illustrare l'aritmetica e la relazione di ordine in $[0, +\infty]$. Spiegare in che senso ogni sottoinsieme non vuoto ammette estremo superiore ed (eventualmente) dimostrarlo.

2. Spiegare come si costruisce la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ (introdurre le nozioni di intervallo $n-$dimensionale, misura esterna e la definizione di insieme misurabile).

3. Dare condizioni sufficienti affinche' $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sia misurabile. Dare la definizione di funzione misurabile. Provare che ogni insieme con misura esterna nulla e' misurabile.

4. Dare le definizioni di funzione semplice, integrale di una funzione semplice non negativa, funzione misurabile, integrale di una funzione misurabile non negativa.

5. Dare la definizione di funzione sommabile e di suo integrale, spiegando perche' la definizione ha senso.

6. Illustrare la relazione tra integrazione secondo Riemann e secondo Lebesgue per funzioni definite su intervalli chiusi e limitati. Dare l'esempio di una funzione sommabile che non e' integrabile secondo Riemann.

7. Illustrare l'integrabilita' secondo Riemann in intervalli semiaperti.

8. Enunciare il principio di Cavalieri e i teoremi di Fubili e Tonelli.

9. Dare la definizione di cambiamento di variabile ed enunciare il teorema corrispondente. Presentare un esempio.

Curve, integrali curvilinei e campi vettoriali

1. Dare la definizione di cammino, continuo, C^1 e C^1 a tratti. Dare la definizione di sostegno di un cammino continuo e di cammini equivalenti.

2. Dare la definizione di lunghezza di un cammino continuo e di cammino rettificabile.

3. Dare la definizione di $\int_a^b f(t)dt$ per $f \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Provare che, se $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $T\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Tf(t)dt$.

4. Provare che, se $f \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$, $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.

5. Dare la definizione di lunghezza di un cammino continuo; provare che un cammino di classe C^1 e' rettificabile.

6. Dare la definizione di cammini equivalenti e provare che si tratta di una relazione di equivalenza.

7. Dare la definizione di cammini equivalenti e provare che due cammini equivalenti hanno la stessa lunghezza.

8. Dare la definizione di lunghezza di un cammino continuo; se $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e' un cammino continuo, $g := f_{|[a,c]}$, $h := f_{|[c,b]}$, con $c \in]a,b[$, provare che la lunghezza di f coincide con la somma tra le lunghezze di g e h.

9. Dare la definizione di integrale curvilineo di prima specie nel caso di un cammino C^1 e nel caso di un cammino C^1 a tratti. Provare che l'integrale della somma coincide con la somma degli integrali.

10. Discutere come varia l'integrale curvilineo di prima specie passando da un cammino a uno equivalente.

11. Dare la definizione di integrale curvilineo di seconda specie nel caso di un cammino C^1 e nel caso di un cammino C^1 a tratti. Provare che l'integrale della somma coincide con la somma degli integrali.

12. Discutere come varia l'integrale curvilineo di seconda specie passando da un cammino a uno equivalente.

13. Dare la definizione di sottoinsieme di uno spazio metrico connesso per archi. Dimostrare che, se A e' un aperto in $\mathbb{R}^n$ connesso per archi e $x, y \in A$ esiste un cammino C^1 a tratti che connette x e y.

14. Dimostrare che, se A e' un aperto in $\mathbb{R}^n$ connesso per archi, $f \in C^1(A)$ e $\nabla f(x) = O$ $\forall x \in A$, f e' costante.

15. Dare la definizione di campo vettoriale esatto. Provare che due potenziali dello stesso campo differiscono per una costante.

16. Dare la definizione di campo vettoriale chiuso. Provare che, se F e' un campo vettoriale di classe C^1 ed esatto, e' necessariamente chiuso.

17. Dare la definizione di campo vettoriale conservativo. Discutere la relazione tra le nozioni di campo vettoriale esatto e di campo vettoriale conservativo.

18. Discutere sotto quali condizioni un campo vettoriale chiuso e' necessariamente esatto.

Integrali di superficie, formule di Gauss-Green e di Stokes

1. Dare la definizione di aperto regolare in $\mathbb{R}^2$, assieme a quelle delle varie nozioni che intervengono in essa.

2. Enunciare le formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$. Precisare la nozione di versore normale esterno.

3. Definire e illustrare la nozione di prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

4. Dare la definizione di superficie regolare, con bordo, semplice, aperta. di bordo e di superficie regolare a tratti. Mostrare un esempio.

5. Dare la definizione di area e di integrale per una superficie regolare con bordo semplice, aperta e per una superficie regolare a tratti.

6. Dare la definizione di versore normale e di orientamento per una superficie regolare con bordo semplice, aperta. Mostrare che esistono esattamente due orientamenti.

7. Dare la definizione di aperto regolare in $\mathbb{R}^3$ e di versore normale esterno.

8. Enunciare le formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^3$. Ricavare da esse il teorema della divergenza.

9. Enunciare la formula di Stokes. Presentare un esempio.