

## ANALISI MATEMATICA L-B (L-Z) (C.d.L. Ing. Gestionale)

Università di Bologna - A.A.2008-2009 - Prof. G.Cupini

## Esercizi sui limiti di funzioni di due variabili

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali errori)

**Esercizio 1.** Calcolare, se esiste, il limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  delle seguenti funzioni:

- 1)  $x \sin \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ;      2)  $\log(x^2|y|)$ ;      3)  $\log\left(\frac{x^2|y|}{|y|+1}\right)$ ;
- 4)  $\log\left(\frac{x^2}{|y|+x^2}\right)$ ;      5)  $e^{\frac{x^2}{y^2}}$ ;      6)  $\sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ ;
- 7)  $\frac{\log(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4}$ ;      8)  $\frac{x^2y}{|y|+|x|}$ ;      9)  $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ;
- 10)  $\frac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$ ;      11)  $e^{xy \log|y|}$ ;      12)  $\arctan \frac{1}{xy}$ ;
- 13)  $\arctan \frac{1}{|xy|}$ ;      14)  $\frac{x}{y^2+|x|}$ ;      15)  $\frac{x^2}{y^2+\frac{1}{2}|x|}$ ;
- 16)  $e^{\frac{1}{xy+(xy)^2}}$ ;      17)  $\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^4}$ .

## Suggerimenti e/o soluzioni

**Esercizio 1.**

[Sugg.: 1) funzione limitata per infinitesima; 2) porre  $t = x^2|y|$ ; 3)  $0 \leq \frac{x^2|y|}{|y|+1} \leq x^2$ ; 4) restringersi alle parabole  $y = mx^2$ ; 5) restringersi alle rette  $y = mx$ ; 6)  $0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$ ; 7) porre  $t = x^2 + y^4$ ; 8)  $0 \leq \frac{|x^2y|}{|y|+|x|} \leq x^2$ ; 9) restringersi alle rette  $y = mx$ ; 10) usando il limite notevole  $\log(1+t)/t \rightarrow 1$  per  $t \rightarrow 0$  si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+xy)}{xy} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Poi, restringersi alle rette  $y = mx$ ; 11)  $y \log|y| \rightarrow 0$ , quando  $y \rightarrow 0$ , per limite notevole; 12) restringersi alle rette  $y = x$  e  $y = -x$ ; 13)  $\frac{1}{|xy|} \rightarrow +\infty$ ; 14) restringersi all'asse  $x$  e fare limiti per  $x \rightarrow 0^+$  e per

$x \rightarrow 0^-$ ; 15)  $0 \leq \frac{x^2}{y^2+|x|/2} \leq 2|x|$ ; 16) restringersi alle rette  $y = x$  e  $y = -x$ ; 17) usando il limite notevole  $\sin t/t \rightarrow 1$  per  $t \rightarrow 0$  si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 y^2} \cdot \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}.$$

Osservare poi che

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = \frac{x^2}{x^2 + y^4} y^2 \leq y^2.]$$

[Sol.: 1)  $[0]$ ; 2)  $[-\infty]$ ; 3)  $[-\infty]$ ; 4)  $[\nexists]$ ; 5)  $[\nexists]$ ; 6)  $[0]$ ; 7)  $[1]$ ; 8)  $[0]$ ; 9)  $[\nexists]$ ; 10)  $[\nexists]$ ; 11)  $[1]$ ; 12)  $[\nexists]$ ; 13)  $[\frac{\pi}{2}]$ ; 14)  $[\nexists]$ ; 15)  $[0]$ ; 16)  $[\nexists]$ ; 17)  $[0].]$