Esercizi

1. Date $f(t) = (t^2, t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$ e
$g(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

calcolare $J_{g \circ f}(t)$ e $J_{f \circ g}(x,y)$ sia direttamente che usando il teorema del differenziale della funzione composta

2. Verificare che i seguenti insiemi sono varietà regolari e disegnarle

$$\Gamma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ , \quad z \neq \pm 1 \}$$

$$\Gamma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 5 \}$$

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x-y) = 0 \}$$

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \} \sqcup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \}$$

3. Verificare che la superficie di equazione
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$$
è una varietà regolare e determinarne spazio normale e tangente in $P = (2, \sqrt{3}, 1)$.
Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie in P.

4. Siano $f(x,y,z) = x^2+6xy-z^3$

$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2+6xy^2-z^3=1\}$ e

$Q = (1,-1,2)$.

Detto $\hat{v}$ il versore normale a Γ in Q $(\hat{v} \in N_Q\Gamma)$

tale che $\langle \hat{v}, \hat{k} \rangle > 0$ determinare $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{v}}(Q)$

5. Detto $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y\sin(x+z) - x\cos(y) + \pi = 0\}$

lo spazio tgt. a Γ in $Q = (\pi, 0, \frac{\pi}{2})$ è ~~dato~~

lo spanning di quale vettore (h_1,h_2,h_3) ?

(determinare (h_1,h_2,h_3))

6. Trovare l'equazione del piano tangente alla varietà

$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz - x^2 + 3y^3 - z^4 + 5 = 0\}$

nel punto $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1\right)$

7. Dati $Q = (-2,1,6)$ $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2+3y^2+z^2=47,$

$x^2+2y^2=z\}$ e $\hat{\tau} \in T_Q\Gamma$ tale che

$\langle \hat{\tau}, \hat{i} \rangle > 0$, se ~~f(x,~~ $f(x,y,z) = x+y+z$

quanto vale $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{\tau}}(Q)$?