1. Siano $g \in C^1(\mathbf{R}^3)$, $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(\rho, \theta, \phi) = g(\rho \sin(\theta)\cos(\phi), \rho\sin(\theta)\sin(\phi), \rho\cos(\theta))$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial \rho}(0,0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}(0,0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}(0,0,0)$.

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \theta}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \phi}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \phi}(0,0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}(0,0,0)$.

3. Siano $g \in C^2(\mathbf{R}^2)$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = g(\cosh(t), \sinh(t))$. Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f intorno a $t = 0$.

4. Siano $f, g \in C^2(\mathbf{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = g((1 + x_1^2)^{x_2}, \sin(x_2))$. Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di f intorno a $(0,0)$.

5. Siano $g \in C^2(\mathbf{R}^2)$, $f(t) = g(\sin(t), e^t)$. Determinare condizioni necessarie (sulle derivate di g) e condizioni sufficienti affinche' 0 sia un punto di minimo (massimo) relativo per f.

6. Siano $f, g \in C^2(\mathbf{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = g(\sin(x_1) + x_2, \cos(x_1))$. Determinare condizioni necessarie (sulle derivate di g) e condizioni sufficienti affinche' $(0,0)$ sia un punto di minimo (massimo) relativo per f.

7. Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}})$. Poniamo, per $g \in C^2(\mathbf{R}^2)$,

$$\Delta g(x_1, x_2) := D_1^2 g(x_1, x_2) + D_2^2 g(x_1, x_2).$$

Verificare che $\forall g \in C^2(\mathbf{R}^2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\Delta(g \circ T)(x_1, x_2) = (\Delta g)(T(x_1, x_2))$.

8. Determinare le funzioni $f \in C^2(\mathbf{R}^+)$ tali che, se $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$, $g(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$, $\Delta g(x_1, x_2) = 0$ $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (bisogna risolvere un'equazione ordinaria).