

# **Analisi Matematica B**

Davide Guidetti  
Dipartimento di Matematica  
Piazza di Porta S. Donato, 5  
40127 Bologna





# Capitolo 1

## Funzioni di più variabili reali

### 1.1 $\mathbf{R}^n$ e la metrica euclidea

Ricordiamo che in [Analisi A] sezione 1.4 fu introdotta la nozione di coppia ordinata. Più in generale, dato  $n \in \mathbf{N}$  e gli  $n$  oggetti  $x_1, \dots, x_n$ , introduciamo la nozione primitiva di  $n$ -pla ordinata  $(x_1, \dots, x_n)$ . Richiediamo solo quanto segue: che due  $n$ -ple  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  coincidano se e solo se  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ . Dati gli insiemi  $A_1, \dots, A_n$ , non necessariamente a due a due distinti, definiamo con  $A_1 \times \dots \times A_n$  il loro **prodotto cartesiano**:

**Definizione 1.1.1** *Dati gli insiemi  $A_1, \dots, A_n$ , poniamo*

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}.$$

*Se  $A_1, \dots, A_n$  coincidono tutti con un certo insieme  $A$ , scriveremo  $A^n$  in alternativa a  $A \times \dots \times A$ .*

Ci interesserà in particolare il caso  $A = \mathbf{R}$ , ove  $\mathbf{R}$  indica l'insieme dei numeri reali. Al lettore sarà probabilmente già noto il fatto che i numeri reali costituiscono un modello della retta, mentre l'insieme  $\mathbf{R}^2$  delle coppie ordinate di numeri reali viene utilizzato come modello di piano. Nello stesso modo si può procedere con  $\mathbf{R}^3$  nei confronti dello spazio tridimensionale: basta fissare un piano  $\pi$  e su questo adottare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $(x_1, x_2)$ . Si può poi introdurre un asse  $r$  perpendicolare al piano e su questo introdurre un sistema di ascisse  $(x_3)$ . Assegnato un arbitrario punto  $P$ , questo è univocamente determinato da una tripla di numeri reali  $(x_1, x_2, x_3)$  ottenuta come segue:  $(x_1, x_2)$  sono le coordinate della

proiezione ortogonale del punto su  $\pi$ ,  $x_3$  costituisce l'ascissa della proiezione di  $P$  sull'asse  $r$  vedi la figura 1.1).

Noi considereremo qui  $\mathbf{R}^n$  per un fissato  $n \in \mathbf{N}$ . Dati  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ , definiamo la loro somma  $x + y$  come segue

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n). \quad (1.1.1)$$

In dimensione 2 e 3, la somma definita in tal modo costituisce una generalizzazione della somma di vettori, che probabilmente sarà già familiare al lettore, almeno nel caso bidimensionale: è utile identificare  $x$  e  $y$  con i vettori applicati che hanno il primo estremo nell'origine  $O = (0, \dots, 0)$  e il secondo rispettivamente in  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  (figura 1.2). Trasliamo ora il secondo vettore in modo da trasferirne il primo estremo in  $(x_1, \dots, x_n)$ . Il secondo estremo si troverà proprio in corrispondenza del punto di coordinate  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .

Sia poi  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Per  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , definiamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \quad (1.1.2)$$

Anche questo "prodotto per uno scalare" ammette una semplice interpretazione geometrica: identifichiamo ancora  $x$  con il vettore applicato che ha il primo estremo in  $O$  e il secondo in  $(x_1, \dots, x_n)$  (si veda ancora la figura 1.2, con  $\theta$  che indica l'angolo tra  $x$  e  $y$ ). Consideriamo la retta  $r$  che contiene il vettore (supposto di lunghezza positiva).  $\lambda x$  sarà allora identificabile con il vettore applicato che ha il primo estremo in  $O$ , lunghezza pari alla distanza di  $(x_1, \dots, x_n)$  da  $O$  moltiplicata per  $|\lambda|$  e verso coincidente con quello del vettore identificato con  $x$  se  $\lambda > 0$ , opposto a quello del vettore identificato con  $x$  se  $\lambda < 0$ .

Le seguenti proprietà di somma e prodotto per uno scalare sono di verifica immediata:

$$(ASV1) \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

$$y + x = x + y$$

*(proprietà commutativa della somma);*

$$(ASV2) \forall x, y, z \in \mathbf{R}^n$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

*(proprietà associativa della somma);*

$$(ASV3) \text{ posto } O := (0, \dots, 0), \forall x \in \mathbf{R}^n$$

$$x + O = O + x = x$$

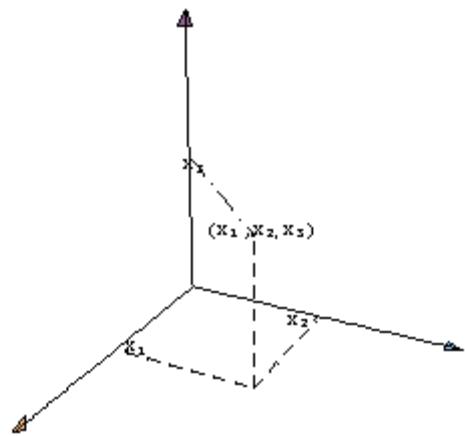


Figura 1.1

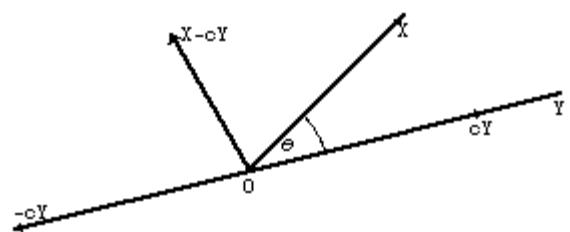


Figura 1.2

(esistenza di un elemento neutro per la somma);

(ASV4) dato  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , indichiamo con  $-x$  l'elemento  $(-x_1, \dots, -x_n)$ . Allora

$$x + (-x) = (-x) + x = O$$

(esistenza di un inverso additivo per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$ );

(ASV5)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^n$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$

(ASV6)  $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x, y \in \mathbf{R}^n$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

(ASV7)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^n$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$$

(ASV8)  $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$1x = x.$$

Si usa dire brevemente che  $\mathbf{R}^n$  con le operazioni di somma (1.1.1) e prodotto per uno scalare (1.1.2) è uno **spazio vettoriale sul campo  $\mathbf{R}$**  dei numeri reali.

**Osservazione 1.1.1** In (ASV6) e (ASV7) abbiamo usato la solita convenzione che, qualora non compaiano parentesi, "i prodotti hanno la precedenza sulle somme". Così  $\lambda x + \lambda y$  sta per  $(\lambda x) + (\lambda y)$ .

Veniamo ora a un altro prodotto tra elementi di  $\mathbf{R}^n$ , che ha però come risultato un elemento di  $\mathbf{R}$ .

**Definizione 1.1.2** Siano  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ . Definiamo come loro **prodotto scalare** e indichiamo col simbolo  $\langle x, y \rangle$  oppure  $x \cdot y$  il numero reale

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

**Osservazione 1.1.2** Si potrebbe far vedere che, nei casi  $n = 2$  e  $n = 3$ , il prodotto scalare ammette la seguente interpretazione geometrica : si considerino i due vettori applicati di estremi rispettivamente  $O$  e  $(x_1, \dots, x_n)$ , e  $O$  e  $(y_1, \dots, y_n)$ . Allora  $x \cdot y$  coincide con il prodotto delle loro lunghezze moltiplicato per il coseno dell'angolo fra essi compreso. Così, se i due vettori sono ortogonali, il loro prodotto scalare vale 0. Ad esempio,

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Come vedremo, il prodotto scalare svolge una funzione ausiliaria assai importante. Cominciamo allora a enunciarne le proprietà fondamentali.

**Teorema 1.1.1** *Siano  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $x, y, z$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ . Allora*

- (I)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$
- (II)  $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y);$
- (III)  $y \cdot x = x \cdot y;$
- (IV)  $x \cdot x \geq 0;$
- (V)  $x \cdot x = 0$  se e solo se  $x = O$ .

*Dimostrazione* Lasciamo la dimostrazione, piuttosto banale, al lettore. Ci limitiamo a osservare che, se  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , allora

$$x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0.$$

Inoltre quest'ultima somma è nulla se e solo se tutti gli addendi sono nulli, da cui segue (V).  $\square$

**Osservazione 1.1.3** Dalle proprietà (I)–(III) segue immediatamente che, per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$  e per ogni  $x, y, z$  in  $\mathbf{R}^n$ , si ha

$$x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y) \tag{1.1.3}$$

e

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{1.1.4}$$

Introduciamo ora la norma euclidea di un elemento di  $\mathbf{R}^n$ .

**Definizione 1.1.3** Sia  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Indichiamo con  $\|x\|$  e chiamiamo **norma euclidea** di  $x$  il numero reale

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

**Osservazione 1.1.4** Qualora  $n$  sia chiaro dal contesto, indicheremo con  $\|\cdot\|$  la norma euclidea in  $\mathbf{R}^n$ . Se, viceversa, tratteremo contemporaneamente varie norme eucleedee, useremo la notazione  $\|\cdot\|_n$ .

**Osservazione 1.1.5** Come è noto, nei casi  $n = 2$  e  $n = 3$   $\|x\|$  può essere pensato come la distanza del punto di coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  da  $O$ , oppure come la lunghezza del vettore applicato di estremi  $O$  e il punto suddetto. Osserviamo anche che, nel caso  $n = 1$ , si ha  $\|x\| = |x|$ .

Per esplorare le proprietà della norma  $\|\cdot\|$ , è assai utile il seguente risultato:

**Teorema 1.1.2** (*Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*) Siano  $x$  e  $y$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ . Allora

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

*Dimostrazione* Sia, per  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$P(t) := (x + ty) \cdot (x + ty).$$

Applicando allora il teorema 1.1.1 e l'osservazione 1.1.3, si ottiene facilmente

$$P(t) = x \cdot x + 2t(x \cdot y) + t^2(y \cdot y).$$

Quindi  $P$  è una funzione polinomiale di secondo grado nella variabile  $t$ . Dal teorema 1.1.1 (IV) si ha che  $P(t) \geq 0 \forall t \in \mathbf{R}$ . Ne segue che il discriminante di  $P$  è non positivo, vale a dire,

$$(x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0,$$

$$(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y),$$

da cui la conclusione estraendo la radice da ciascun termine.  $\square$

Vediamo ora le proprietà fondamentali della norma euclidea.

**Teorema 1.1.3** Siano  $x$  e  $y$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Allora:

- (I)  $\|x\| \geq 0$ ;
- (II)  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = O$ ;
- (III)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
- (IV)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;
- (V)  $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$ .
- (VI) Se  $x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ ,  $|x_j| \leq \|x\|$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

*Dimostrazione* (I) è ovvia.

(II) segue immediatamente dal punto (V) del teorema 1.1.1.

(III) Si ha

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x) \cdot (\lambda x) = \lambda^2 \|x\|^2.$$

Estraendo la radice quadrata, si ottiene la conclusione.

(IV) Si ha

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Applicando ancora la radice quadrata, si ottiene la conclusione.

(V) Si ha

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

applicando (IV). Segue

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Invertendo i ruoli di  $x$  e  $y$ , si ottiene

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Poiché  $\||x| - |y|\| = \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\}$ , vale (V).

(VI) Per  $j \in \{1, \dots, n\}$  si ha

$$x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_j^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2,$$

da cui la conclusione prendendo le radici quadrate.  $\square$

A questo punto, possiamo definire la metrica (o distanza) euclidea in  $\mathbf{R}^n$ .

**Definizione 1.1.4** Siano  $x$  e  $y$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ . Poniamo

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Chiameremo  $d$ , che è una funzione da  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  a  $\mathbf{R}$ , la **metrica euclidea** in  $\mathbf{R}^n$ .

Le principali proprietà di  $d$  sono enunciate nel seguente

**Teorema 1.1.4** Siano  $x, y, z$  generici elementi di  $\mathbf{R}^n$ . Allora (I)  $d(x, y) \geq 0$ ;

- (II)  $d(y, x) = d(x, y)$ ;
- (III)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

*Dimostrazione* (I) è immediato.

(II) Basta osservare che

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \|y - x\| = \|-(x - y)\| = \\ &= \|x - y\| = d(x, y). \end{aligned}$$

(III) Si ha

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| = \\ &= \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

□

**Osservazione 1.1.6** La diseguaglianza (III) nel teorema 1.1.4 si chiama anche "diseguaglianza triangolare", in quanto costituisce una generalizzazione della proprietà geometrica elementare che in ogni triangolo la lunghezza di ciascun lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due.

## 1.2 Insiemi aperti e chiusi, interno, frontiera

Cominciamo con la seguente definizione fondamentale:

**Definizione 1.2.1** Siano  $x \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ . Poniamo

$$B(x, r) := \{y \in \mathbf{R}^n : d(x, y) = \|x - y\| < r\}.$$

Chiameremo  $B(x, r)$  **palla aperta** di centro  $x$  e raggio  $r$ .

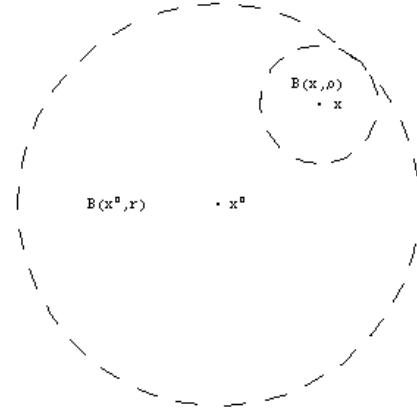


Figura 1.3

**Osservazione 1.2.1** Se  $n = 1$ ,  $B(x, r)$  coincide con l'intorno circolare  $I(x, r)$  (vedi [Analisi A] (2.2.1)).

Estendiamo ora al caso multidimensionale la definizione 3.4.1 in [Analisi A].

**Definizione 1.2.2** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $x_0$  appartiene all'**interno** di  $A$  (e scriveremo  $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ ) se esiste una palla aperta  $B(x_0, r)$ , con  $r > 0$ , tale che  $B(x_0, r) \subseteq A$ .

**Definizione 1.2.3** Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $A$  è **aperto** se  $A = \overset{\circ}{A}$ .

**Esempio 1.2.1** Siano  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ . Proviamo che  $B(x_0, r)$  è aperto. A tale scopo, si deve far vedere che, posto  $A = B(x_0, r)$ , si ha  $\overset{\circ}{A} = A$  oppure che, per ogni  $x \in B(x_0, r)$  esiste  $\rho > 0$  tale che  $B(x, \rho) \subseteq B(x_0, r)$ . Sia  $\rho > 0$ . Se  $y \in B(x, \rho)$ , si ha

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) \leq r$$

se  $\rho \leq r - d(x, x_0)$ . Perciò si può prendere  $\rho = r - d(x, x_0)$  (figura 1.3).

**Esempio 1.2.2** Siano  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ . Poniamo

$$A := \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x^0) \leq r\}.$$

$A$  è la palla "chiusa" di centro  $x^0$  e raggio  $r$ . Proviamo che  $A$  non è aperto. Infatti, sia  $x \in \mathbf{R}^n$  tale che  $d(x, x^0) = r$  (per esempio, se  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , si può prendere  $x = (x_1^0 + r, \dots, x_n^0)$ ).  $x \in A$  ma  $x \notin \overset{\circ}{A}$ . Sia infatti  $\rho > 0$ . Dobbiamo trovare  $y \in B(x, \rho)$  tale che  $y \notin B(x_0, r)$ . Cerchiamo  $y$  nella forma

$$y = x_0 + t(x - x_0),$$

con  $t > 0$ . Si ha  $d(x_0, y) = t\|x - x_0\| = tr > r$  se prendiamo  $t > 1$ . In tal caso  $d(x, y) = \|(t - 1)(x - x_0)\| = (t - 1)r < \rho$  se scegliamo

$$t < 1 + \frac{\rho}{r}.$$

Perciò, se  $y = x_0 + (1 + \frac{\rho}{r})(x - x_0)$ , avremo che  $y \in B(x, \rho)$ , ma non appartiene a  $B(x_0, r)$ .

Generalizziamo ora al caso multidimensionale la definizione di frontiera (vedi [Analisi A], definizione 2.9.1).

**Definizione 1.2.4** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $x_0$  appartiene alla frontiera di  $A$ , e scriveremo  $x_0 \in Fr(A)$ , se ogni palla aperta  $B(x_0, r)$ , con  $r > 0$ , contiene sia elementi appartenenti ad  $A$ , sia elementi non appartenenti ad  $A$ .

**Esempio 1.2.3** Sia  $A = B(x^0, r)$ , con  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ . Verifichiamo che  $Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_0) = r\}$ .

Sia infatti  $x \in \mathbf{R}^n$ . Proviamo che, se  $x \in Fr(A)$ , necessariamente  $\|x - x_0\| = r$ . In effetti, se  $\|x - x_0\| < r$ , per l'esempio 1.2.2 esiste  $\rho > 0$  tale che  $B(x, \rho) \subseteq A$ . Segue che  $x \notin Fr(A)$ . Sia invece  $\|x - x_0\| > r$ . Sia poi  $\rho > 0$  e  $y \in B(x, \rho)$ . Allora

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| + \|y - x_0\| < \rho + \|y - x_0\|,$$

da cui

$$\|y - x_0\| > \|x - x_0\| - \rho \geq r$$

se

$$\rho \leq \|x - x_0\| - r.$$

Con tale scelta di  $\rho$  si ha che  $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$ , da cui  $x \notin Fr(A)$ . Dunque, se  $x \in Fr(A)$ , deve essere necessariamente  $d(x, x_0) = r$ .

Sia, viceversa,  $d(x, x_0) = r$ . Verifichiamo che  $x \in Fr(A)$ . Sia  $\rho > 0$ . Dobbiamo far vedere che  $B(x, \rho)$  contiene sia elementi appartenenti ad  $A$ , sia elementi non appartenenti ad  $A$ . Sia  $y = x_0 + t(x - x_0)$ . Si ha

$$d(x, y) = \|(1-t)(x-x_0)\| = |1-t|r < \rho$$

se  $|1-t| < \frac{\rho}{r}$ , che equivale a

$$1 - \frac{\rho}{r} < t < 1 + \frac{\rho}{r}.$$

Vale inoltre

$$d(x_0, y) = \|t(x-x_0)\| = |t|r.$$

Dunque  $y \in A$  se  $|t| < 1$ , mentre  $y \notin A$  se  $|t| \geq 1$ . Dunque, se  $t = 1$ ,  $y \in B(x, \rho)$  e  $y \notin A$ , se  $t = \max\{1 - \frac{\rho}{2r}, \frac{1}{2}\}$   $y \in B(x, \rho) \cap A$ .

Il seguente risultato costituisce una semplice caratterizzazione degli insiemi aperti:

**Teorema 1.2.1** *Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (I)  *$A$  è aperto;*
- (II)  *$A \cap Fr(A) = \emptyset$ .*

*Dimostrazione* Sia  $A$  aperto e sia  $x \in A$ . Allora  $x \in \mathring{A}$ . Dunque esiste  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq A$ . Ne segue che  $x \notin Fr(A)$  e perciò  $A \cap Fr(A) = \emptyset$ .

Sia, viceversa,  $A \cap Fr(A) = \emptyset$ . Proviamo che  $A$  è aperto. Sia  $x \in A$ . Allora  $x \notin Fr(A)$ . Ne segue che esiste  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq A$ , oppure  $B(x, r) \subseteq \mathbf{R}^n \setminus A$ . La seconda condizione non si può verificare, perché  $x \in A$ . Concludiamo che ogni elemento di  $A$  appartiene anche a  $\mathring{A}$ , e quindi che  $A$  è aperto.

□

La seguente definizione costituisce una generalizzazione della definizione 2.9.2 in [Analisi A]:

**Definizione 1.2.5** *Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $A$  è **chiuso** se  $Fr(A) \subseteq A$ .*

**Esempio 1.2.4** Sia, per  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r \in \mathbf{R}^+$ ,  $A := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}$ . Verifichiamo che  $A$  è chiuso. Basta provare che

$$Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| = r\}.$$

Lasciamo questo compito come esercizio per il lettore (vedi 1.2.1).

**Definizione 1.2.6** Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Chiamiamo **chiusura** di  $A$  e indichiamo col simbolo  $\overline{A}$ , l'insieme

$$\overline{A} := A \cup Fr(A).$$

**Esempio 1.2.5** Dall'esempio 1.2.3 otteniamo subito che, per ogni  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , per ogni  $r \in \mathbf{R}^+$ ,

$$\overline{B(x^0, r)} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}.$$

**Teorema 1.2.2** Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Allora  $Fr(A)$  e  $\overline{A}$  sono sottoinsiemi chiusi di  $\mathbf{R}^n$ .

*Dimostrazione* Cominciamo col provare che  $Fr(A)$  è un chiuso. Sia  $x^0 \in Fr(Fr(A))$ . Dobbiamo far vedere che  $x^0 \in Fr(A)$ . Sia  $r \in \mathbf{R}^+$ . Allora esiste  $x^1$  appartenente a  $Fr(A) \cap B(x^0, r)$ . Poiché  $B(x^0, r)$  è un aperto, esiste  $r_0 > 0$ , tale che  $B(x^1, r_0) \subseteq B(x^0, r)$ . Essendo  $x^1 \in Fr(A)$ ,  $B(x^1, r_0)$  contiene sia elementi di  $A$ , sia elementi di  $\mathbf{R}^n \setminus A$ . Questi stessi elementi appartengono anche a  $B(x^0, r)$ . Dunque, per ogni  $r > 0$ ,  $B(x^0, r)$  contiene sia elementi di  $A$ , sia elementi di  $\mathbf{R}^n \setminus A$ . Concludiamo che  $x^0 \in Fr(A)$ .

Proviamo ora che  $\overline{A}$  è un chiuso. Sia  $x^0 \in Fr(\overline{A})$ . Vogliamo far vedere che  $x^0 \in \overline{A}$ . Due casi sono possibili:  $x^0 \in A$ , oppure  $x^0 \notin A$ . Evidentemente, nel primo caso  $x^0 \in \overline{A}$ . Supponiamo invece che  $x^0 \notin A$ . Verifichiamo che, in questo caso,  $x^0 \in Fr(A)$ . Sia  $r > 0$ . Allora  $B(x^0, r)$  contiene almeno un punto non appartenente ad  $A$ :  $x^0$  stesso. Vogliamo far vedere che contiene anche qualche elemento di  $A$ . Poiché  $x^0 \in Fr(\overline{A})$ , esiste  $x^1 \in \overline{A} \cap B(x^0, r)$ . Se  $x^1 \in A$ , abbiamo trovato un elemento di  $A$  in  $B(x^0, r)$ . Viceversa,  $x^1 \in Fr(A)$ . Sia allora  $\rho \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $B(x^1, \rho) \subseteq B(x^0, r)$ . Un  $\rho$  così fatto esiste per quanto dimostrato nell'esempio 1.2.1. Poiché  $x^1 \in Fr(A)$ ,  $B(x^1, \rho)$  deve contenere qualche elemento  $x^2$  appartenente ad  $A$ . Questo  $x^2$  appartiene anche a  $B(x^0, r)$ . Ne concludiamo che, in ogni caso,  $B(x^0, r)$  contiene qualche elemento di  $A$ . Dunque, se  $x^0 \in Fr(\overline{A}) \setminus A$ ,  $x^0 \in Fr(A)$  e quindi  $x^0 \in \overline{A}$ . Questo ragionamento conclude la dimostrazione.  $\square$

**Esercizio 1.2.1** Verificare che,  $\forall x^0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $\forall r \in \mathbf{R}^+$ , se  $A := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}$ , si ha

$$Fr(A) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| = r\}.$$

**Esercizio 1.2.2** Dati i seguenti insiemi, dire se sono aperti o chiusi e determinarne frontiera e chiusura:

- (I)  $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x - x^0\| = r\}$  ( $x^0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $r \geq 0$ );
- (II)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 \geq 0\}$ ;
- (III)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \min\{1, \ln(1/x_1)\}\}$ ;
- (IV)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}$ ;
- (V)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq x_1^2\}$ ;
- (VI)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq x_2 \geq x_1^2/2\} \setminus \{(0, 0)\}$ ;
- (VII)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$ ;
- (VIII)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \leq 1/x_1\}$ ;
- (IX)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3^2 > x_1^2 + x_2^2, x_3 \geq 1\}$ ;
- (X)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| < 1, x_2 = 0\}$ .

### 1.3 Limiti

In questa sezione generalizziamo al caso di funzioni di più variabili reali alcuni risultati e definizioni già visti in [Analisi A].

**Definizione 1.3.1** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  e  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). Diremo che  $x^0$  è un **punto di accumulazione** per  $A$  se  $\forall r > 0$   $A \cap B(x^0, r)$  contiene qualche elemento distinto da  $x^0$ .

**Esempio 1.3.1** Sia, per  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A := \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ . Allora  $O \in D(A)$ . Infatti, per ogni  $r \in \mathbf{R}^+$ ,  $B(0, r)$  contiene l'elemento  $(r/2, 0, \dots, 0)$  di  $A$ , che è ovviamente distinto da  $O$ .

Passiamo ora alla definizione di limite. Indichiamo con  $\|\cdot\|_n$  e  $\|\cdot\|_m$  le norme euclidee in  $\mathbf{R}^n$  e  $\mathbf{R}^m$ , con  $B_m$  e  $B_n$  palle aperte ancora in  $\mathbf{R}^n$  e  $\mathbf{R}^m$  rispettivamente.

**Definizione 1.3.2** Siano  $n$  e  $m$  numeri naturali,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $x^0 \in D(A)$ ,  $l \in \mathbf{R}^m$ . Scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$$

se  $\forall \epsilon > 0$  esiste  $\delta(\epsilon) > 0$  tale che  $\forall x \in A \cap B_n(x^0, \delta(\epsilon))$  con  $x \neq x^0$  si ha

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

**Osservazione 1.3.1** La condizione  $\|f(x) - l\|_m < \epsilon$  è equivalente a  $f(x) \in B_m(l, \epsilon)$ .

**Esempio 1.3.2** Siano  $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 \neq 0\}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2) := \sin(x_1, x_2)/x_2$ . Verifichiamo che si ha

$$\lim_{x \rightarrow O} f(x) = 0 \quad (1.3.1)$$

A tale scopo, osserviamo, innanzi tutto, che  $O = (0, 0) \in D(A)$ . Useremo poi il fatto che

$$|\sin(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbf{R}. \quad (1.3.2)$$

(1.3.2) può essere facilmente verificata applicando il teorema del valor medio. In base a esso, se  $z \in \mathbf{R}$ ,  $z \neq 0$ , esiste  $c \in ]0, z[$  se  $z > 0$ , oppure  $c \in ]z, 0[$  se  $z < 0$ , tale che

$$\sin(z) = \cos(c)z. \quad (1.3.3)$$

Ne segue che

$$|\sin(z)| = |\cos(c)||z| \leq |z|.$$

Da (1.3.2) segue subito, per  $x = (x_1, x_2) \in A$ ,

$$|f(x_1, x_2)| \leq |x_1|. \quad (1.3.4)$$

Sia  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ . Se  $x \in A \cap B(O, \epsilon)$ , si ha, applicando il teorema 1.1.3 (VI),

$$|f(x)| \leq |x_1| \leq \|x\| < \epsilon.$$

Dunque, la definizione 1.3.2 è verificata con  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ .

Come nel caso  $n = m = 1$  (quello trattato in [Analisi A]), vale un teorema di unicità del limite. La dimostrazione è analoga a quella vista in [Analisi A].

**Teorema 1.3.1** Siano  $m$  e  $n$  naturali,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $x^0 \in D(A)$ ,  $l, l' \in \mathbf{R}^m$ . Supponiamo che valgano contemporaneamente  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l'$ . Allora  $l = l'$ .

Sia ancora  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ , con  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Se indichiamo con  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  le componenti di  $f(x) \in \mathbf{R}^m$  otteniamo che  $f$  identifica univocamente  $m$  funzioni  $f_1, \dots, f_m$  di dominio  $A$  a valori reali. Ci chiediamo che legame c'è tra gli eventuali limiti di  $f$  e quelli delle componenti  $f_1, \dots, f_m$ . Ebbene, vale il seguente

**Teorema 1.3.2** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $x^0 \in D(A)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_m(x))$ . Sia poi  $l \in \mathbf{R}^m$ ,  $l = (l_1, \dots, l_i, \dots, l_m)$ . Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

- (I) si ha  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$ ;
- (II) per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$ , vale  $\lim_{x \rightarrow x^0} f_i(x) = l_i$ .

*Dimostrazione* Proviamo che da (I) segue (II). Sia  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ . Allora esiste  $\delta(\epsilon)$  in  $\mathbf{R}^+$ , tale che, se  $x \in B(x^0, \delta(\epsilon)) \cap A$  e  $x \neq x^0$ , si ha

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Dal teorema 1.1.3 (VI) segue, per  $i = 1, \dots, n$ ,

$$|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Dunque, vale (II).

Supponiamo invece che valga (II). Siano  $\epsilon$  e  $\eta$  elementi di  $\mathbf{R}^+$ . Allora, per ciascun  $i \in \{1, \dots, m\}$ , esiste  $\delta_i(\eta) > 0$ , tale che, se  $x \in B(x^0, \delta_i(\eta)) \cap A$  e  $x \neq x^0$ , si ha

$$|f_i(x) - l_i| < \eta.$$

Poniamo  $\delta(\eta) := \min\{\delta_i(\eta) : 1 \leq i \leq m\}$ . Allora se  $x \in B(x^0, \delta(\eta)) \cap A$  e  $x \neq x^0$ , vale

$$\|f(x) - l\|_m = (\sum_{i=1}^m (f_i(x) - l_i)^2)^{1/2} < (m\eta^2)^{1/2} = \sqrt{m}\eta.$$

Scegliendo  $\eta := \epsilon/\sqrt{m}$ , otteniamo

$$\|f(x) - l\|_m < \epsilon.$$

Quindi da (II) segue (I).

□

I risultati seguenti sono analoghi pluridimensionali dei teoremi 2.2.2, 2.5.1 e 2.5.2 in [Analisi A], con simili dimostrazioni:

**Teorema 1.3.3** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  ( $m, n \in \mathbf{N}$ ),  $x^0 \in D(A)$ ,  $l, m \in \mathbf{R}^m$  e valgono  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow x^0} g(x) = m$ . Allora:

- (I) esiste  $\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x) + g(x))$  e vale  $l + m$ ;
- (II) se  $m = 1$ , esiste  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)g(x)$  e vale  $lm$ ;
- (III) supponiamo ancora  $m = 1$  e, in più,  $g(x) \neq 0 \forall x \in A$  e  $m \neq 0$ ; allora esiste  $\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x)}{g(x)}$  e vale  $\frac{l}{m}$ .

**Teorema 1.3.4** Siano  $A$  e  $B$  sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ , con  $A \subseteq B$ ,  $f : B \rightarrow \mathbf{R}^m$  e  $l \in \mathbf{R}^m$ . Allora:

- (I) se  $x^0 \in D(A)$ , si ha anche  $x^0 \in D(B)$ ;
- (II) sotto le ipotesi di (I), se vale  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$ , si ha anche  $\lim_{x \rightarrow x^0} f|_A(x) = l$ ;
- (III) se esiste  $r > 0$  per cui si ha  $(B(x^0, r) \cap B) \setminus \{x_0\} \subseteq A$  e vale  $\lim_{x \rightarrow x^0} f|_A(x) = l$ , si ha anche  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$ .

**Osservazione 1.3.2** In virtù del teorema 1.3.4, data  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , l'esistenza del limite per  $x$  che tende a  $(0, 0)$  per  $f$  implica l'esistenza del limite per ogni restrizione di  $f$  a una qualsiasi retta per l'origine, con lo stesso valore. Supponiamo, viceversa, che esista il limite della restrizione a ogni retta per l'origine e che il limite non dipenda dalla retta scelta. Si può dire che esiste il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $(0, 0)$ ? La risposta è negativa. Si consideri il seguente controesempio: sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 \geq x_1^2 \text{ oppure } x_2 \leq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Poniamo

$$A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq x_1^2\}.$$

Allora  $(0, 0) \in D(A_1)$  e si ha, ovviamente,  $\lim_{x \rightarrow (0, 0)} f|_{A_1}(x) = 1$ .

Sia invece

$$A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_2 < x_1^2\}$$

Ancora,  $(0, 0) \in D(A_2)$ . Infatti, per ogni  $r \in \mathbf{R}^+$ ,  $B((0, 0), r)$  contiene i punti della forma  $(x_1, x_1^2/2)$  con  $x_1 > 0$  e  $x_1^2 + x_1^4/4 < r^2$ , che appartengono ad  $A_2$  e sono distinti da  $(0, 0)$ . Si ha, ovviamente,  $\lim_{x \rightarrow (0, 0)} f|_{A_2}(x) = 0$ . Quindi la  $f$  non amette limite per  $x \rightarrow (0, 0)$ . Tuttavia, consideriamo la restrizione di  $f$  a una retta per l'origine. Per esempio, sia  $m \in \mathbf{R}^+$ . Poniamo

$$A_m := \{(x_1, mx_1) : x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}.$$

Allora  $f(x_1, mx_1) = 1$  se  $x_1 \in ]-\infty, m[$  (si veda la figura 1.4, in cui abbiamo disegnato in grassetto  $\{x \in A_m : f(x) = 1\}$ ). Osserviamo che, se  $x = (x_1, x_2) \in A_m$  e  $\|x\| < m$ , necessariamente,

$$x_1 \leq |x_1| \leq \|x\| < m.$$

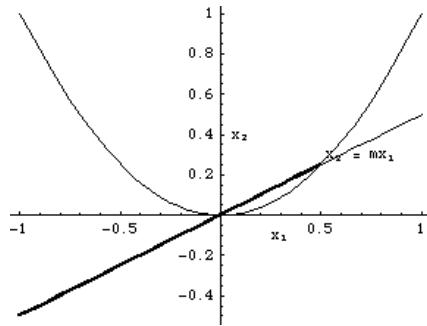


Figura 1.4

Quindi  $f(x) = 1$ . Concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_{A_m}(x) = 1. \quad (1.3.6)$$

Gli insiemi della forma  $A_m$  non esauriscono le rette per l'origine. Invitiamo il lettore a verificare che, effettivamente, se  $A$  è una retta qualunque passante per l'origine, vale  $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_A(x) = 1$  (esercizio 1.3.1).

**Esercizio 1.3.1** Completare nei dettagli le argomentazioni dell'osservazione 1.3.2. Verificare, ad esempio, che se  $r$  è una retta per l'origine e  $A := r \setminus \{(0,0)\}$ , si ha  $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f|_A(x) = 1$ .

**Esercizio 1.3.2** Studiare l'esistenza dei limiti seguenti (le funzioni vanno intese definite nei loro "domini naturali"):

$$(I) \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} (x_1^2 + x_2)^4 \ln(x_1^2 + x_2^2);$$

$$(II) \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(x_1^2 + x_1 x_2)}{x_1 + x_2} \text{ (sugg.: verificare preliminarmente che}$$

$$|\arctan(z)| \leq |z|$$

per ogni  $z \in \mathbf{R}$ );

$$(III) \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} x_1 x_2 \sin\left(\frac{1}{x_1 + x_2}\right);$$

$$(IV) \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

**Esercizio 1.3.3** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x^0 \in D(A)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diremo che  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = +\infty$  ( $-\infty$ ) se  $\forall M \in \mathbf{R}$  esiste  $\delta(M) \in \mathbf{R}^+$ , tale che, se  $x \in A \cap B(x^0, \delta(M))$  e  $x \neq x^0$ ,  $f(x) > M$  ( $f(x) < M$ ).

Verificare che:

- (I)  $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} = +\infty$ ;
- (II)  $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{3x_1^2 + x_2^2} = +\infty$ ;
- (III)  $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2} = -\infty$ .

## 1.4 Funzioni continue

Cominciamo con l'estendere al caso di funzioni di più variabili reali la nozione di continuità. La prossima definizione è un'estensione naturale della definizione 2.7.1 in [Analisi A]:

**Definizione 1.4.1** Siano  $n, m \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Diremo che  $f$  è **continua** in  $x_0$  se  $\forall \epsilon > 0$  esiste  $\delta(\epsilon) > 0$  tale che  $\forall x \in B_n(x_0, \delta(\epsilon)) \cap A$  si ha

$$\|f(x) - f(x_0)\|_m < \epsilon.$$

Diremo che  $f$  è **continua** in  $A$  se è continua in corrispondenza di ogni  $x_0 \in A$ .

Il seguente risultato (con analoga dimostrazione, che lasciamo al lettore) è una generalizzazione del teorema 2.7.1 in [Analisi A]:

**Teorema 1.4.1** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x^0 \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Allora:

- (I) se  $x^0 \in A \setminus D(A)$ ,  $f$  è continua in  $x^0$ .
- (II) se  $x^0 \in A \cap D(A)$ ,  $f$  è continua in  $x^0$  se e solo se esiste  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$  e coincide con  $f(x^0)$ .

Utilizzando il teorema 1.4.1 e i teoremi 1.3.2 e 1.3.3, è ora abbastanza facile dimostrare il seguente risultato, che lasciamo ancora al lettore (esercizio 1.4.2):

**Teorema 1.4.2** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x^0 \in A$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \forall x \in A$ . Allora:

- (I)  $f$  è continua in  $x^0$  se e solo se lo è ciascuna delle funzioni  $f_1, \dots, f_m$ ;

Supponiamo ora che  $f$  e  $g$  siano continue in  $x^0$ . Allora:

- (II)  $f + g$  è continua in  $x^0$ ;
- (III) se  $m = 1$ ,  $fg$  è continua in  $x^0$ ;
- (IV) se  $m = 1$  e  $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ ,  $\frac{f}{g}$  è continua in  $x^0$ .

È importante il fatto che la continuità è invariante per composizione, nel senso seguente:

**Teorema 1.4.3** Siano  $l, m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $B \subseteq \mathbf{R}^m$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  tale che  $f(A) \subseteq B$ ,  $g : B \rightarrow \mathbf{R}^l$ . Allora:

- (I) sia  $x^0 \in A$  tale che  $f$  è continua in  $x^0$  e  $g$  è continua in  $f(x^0)$ . Allora  $g \circ f$  è continua in  $x^0$ ;
- (II) se  $f$  e  $g$  sono continue, lo è anche  $g \circ f$ .

*Dimostrazione* (II) segue subito da (I).

Dimostriamo allora (I). Sia  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ . Poiché  $g$  è continua in  $f(x^0)$ , esiste  $\delta_1(\epsilon)$  in  $\mathbf{R}^+$  tale che, se  $y \in B \cap B(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$ , si ha  $\|g(y) - g(f(x^0))\|_l < \epsilon$ . Poiché  $f$  è continua in  $x^0$ , esiste  $\delta(\epsilon)$  in  $\mathbf{R}^+$  tale che, se  $x \in A \cap B(x^0, \delta(\epsilon))$ , vale  $\|f(x) - f(x^0)\|_m < \delta_1(\epsilon)$ . Ciò implica che  $f(x) \in B \cap B(f(x^0), \delta_1(\epsilon))$ . Ne concludiamo che, se  $x \in A \cap B(x^0, \delta(\epsilon))$ , si ha  $\|g(f(x)) - g(f(x^0))\|_l < \epsilon$ .

□

Presentiamo ora alcuni importanti esempi di funzioni continue di più variabili reali.

**Esempio 1.4.1** Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Per  $j \in \{1, \dots, n\}$ , poniamo

$$\begin{cases} \pi_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \\ \pi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = x_j. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

$\pi_j$  associa a ogni elemento di  $\mathbf{R}^n$  la sua  $j$ -esima componente. Verifichiamo che  $\pi_j$  è continua. Ciò segue immediatamente dal teorema 1.1.3 (VI). Infatti, se  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$  e  $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$  sono generici elementi di  $\mathbf{R}^n$ , si ha

$$|\pi_j(x) - \pi_j(x^0)| = |x_j - x_j^0| \leq \|x - x^0\|.$$

Perciò,  $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$ , se  $x \in B(x^0, \epsilon)$ , si ha  $|\pi_j(x) - \pi_j(x^0)| < \epsilon$ .

Definiamo ora le funzioni polinomiali di  $n$  variabili reali. Una funzione polinomiale in  $\mathbf{R}^n$  di grado non superiore a  $m$  ( $m \in \mathbf{N}_0$ ) è una funzione  $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  rappresentabile nella forma

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad (1.4.2)$$

con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  interi non negativi. Qui adottiamo la convenzione che  $O^0 := 1$ .

Poiché somme e prodotti di funzioni continue danno sempre funzioni continue (teorema 1.4.2) dalla continuità delle funzioni  $\pi_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) e da quella delle funzioni costanti (esercizio 1.4.3) segue subito che tutte le funzioni polinomiali sono continue da  $\mathbf{R}^n$  a  $\mathbf{R}$ .

Se poi  $P$  e  $Q$  sono funzioni polinomiali di  $n$  variabili, risulta continua (in virtù del risultato dell'esercizio 1.4.4) e del teorema 1.4.2(IV)) la funzione razionale

$$\begin{cases} f : \{x \in \mathbf{R}^n : Q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Ad esempio, la funzione

$$\begin{cases} f : \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\} \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases} \quad (1.4.4)$$

è continua. Altre funzioni continue si possono costruire utilizzando il teorema 1.4.3. Per esempio, sia  $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\}$ . Poiché la funzione  $f$  definita in (1.4.4) è continua, la funzione

$$\begin{cases} g : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(x_1, x_2) = \sin(f(x_1, x_2)) = \sin\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}\right) \end{cases} \quad (1.4.5)$$

è continua.

Vogliamo adesso presentare una generalizzazione del teorema di Weierstrass (vedi [Analisi A], teorema 2.9.1). Cominciamo con la definizione di sottoinsieme limitato di  $\mathbf{R}^n$ .

**Definizione 1.4.2** *Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). Diremo che  $A$  è **limitato** se esiste  $M \geq 0$  tale che  $\|x\| \leq M \ \forall x \in A$ .*

**Osservazione 1.4.1** La definizione di sottoinsieme limitato di  $\mathbf{R}$  data in [Analisi A] ( $A$  è limitato se e solo se è sia inferiormente, che superiormente limitato) non si può estendere direttamente a  $\mathbf{R}^n$ , in quanto dipende dalla relazione di ordine in  $\mathbf{R}$ . Tuttavia, nel caso  $n = 1$ , se  $A$  è limitato nel senso della definizione 1.4.2,  $A$  è sia inferiormente, che superiormente limitato, e viceversa. Infatti, se per un certo  $M \geq 0$ , si ha  $|x| \leq M \ \forall x \in A$ , ogni elemento  $x$  di  $A$  verifica

$$-M \leq x \leq M,$$

per cui  $-M$  è un minorante e  $M$  è un maggiorante di  $A$ . Viceversa, sia  $A$  sia inferiormente che superiormente limitato. Siano  $b$  e  $c$ , rispettivamente, un minorante e un maggiorante di  $A$ . Poniamo

$$M := \max\{0, c, -b\}.$$

Allora  $M \geq 0$  e,  $\forall x \in A$ ,

$$-M \leq b \leq x \leq c \leq M,$$

onde  $|x| \leq M \ \forall x \in A$ .

Possiamo ora enunciare e (molto) parzialmente dimostrare il seguente

**Teorema 1.4.4 (di Weierstrass)** *Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  non vuoto, chiuso e limitato,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  continua. Allora:*

- (I)  $f(A)$  è chiuso e limitato in  $\mathbf{R}^m$ ;
- (II) se  $m = 1$ ,  $f$  ammette minimo e massimo.

*Dimostrazione parziale* Non dimostriamo (I), che costituisce la parte veramente profonda del teorema. Ci limitiamo a provare (II) utilizzando (I). Verifichiamo, ad esempio, che  $f(A)$  ammette minimo. Per (I),  $f(A)$  è un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbf{R}$ . Per l'assioma dell'estremo superiore, possiede un estremo inferiore  $m$ . Si tratta di far vedere che  $m \in f(A)$ . Poiché  $f(A)$  è chiuso, basta far vedere che  $m \in Fr(f(A))$ . Sia  $r \in \mathbf{R}^+$ . Allora  $m - r/2 \in I(m, r)$  e non appartiene a  $f(A)$ . D'altra parte, per definizione di estremo inferiore,  $m + r$  non è un minorante di  $f(A)$ . Quindi esiste  $y \in f(A)$ , con  $y < m + r$ . Poiché  $m$  è un minorante di  $f(A)$ , vale anche

$$m - r < m \leq y,$$

per cui  $y \in f(A) \cap I(m, r)$ . Perciò, ogni intorno circolare di  $m$  contiene sia elementi di  $f(A)$ , che elementi non appartenenti di  $f(A)$ . Concludiamo che  $m \in Fr(f(A))$ .

□

**Osservazione 1.4.2** Le funzioni continue non trasformano necessariamente chiusi in chiusi, né limitati in limitati. Per esempio, siano  $A := [0, +\infty[$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \arctan(x)$ . Allora  $A$  è chiuso,  $f$  è continua, ma  $f(A) = [0, \pi/2[$ , che non è chiuso.

Ancora, sia  $B = ]0, 1]$ ,  $g : B \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = 1/x$ . Allora  $B$  è limitato,  $g$  è continua, ma  $g(B) = [1, +\infty[$ , che non è limitato.

**Esercizio 1.4.1** Dimostrare nei dettagli il teorema 1.4.1.

**Esercizio 1.4.2** Dimostrare nei dettagli il teorema 1.4.2.

**Esercizio 1.4.3** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $c \in \mathbf{R}^m$ ,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f(x) = c \forall x \in \mathbf{R}^n$ . Verificare che  $f$  è continua.

**Esercizio 1.4.4** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : B \rightarrow \mathbf{R}^m$  continua. Verificare che la restrizione  $f|_A$  è continua.

**Esercizio 1.4.5** Dimostrare che, per ogni  $n \in \mathbf{N}$ , la norma euclidea è una funzione continua da  $\mathbf{R}^n$  a  $\mathbf{R}$ .

**Esercizio 1.4.6** Tra gli insiemi dell'esercizio 1.2.2, dire quali sono limitati.

## 1.5 Una generalizzazione del teorema di Bolzano

Ricordiamo che il teorema di Bolzano (teorema 2.9.2 in [Analisi A]) afferma che le funzioni continue a valori reali trasformano intervalli in intervalli. In questa sezione vogliamo presentare una generalizzazione multidimensionale di questo fondamentale risultato. Cominciamo allora col presentare una generalizzazione della nozione di intervallo.

**Definizione 1.5.1** Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). Diremo che  $A$  è **connesso per archi** se, comunque si prendano  $x$  e  $y$  in  $A$ , esistono  $a$  e  $b$  reali con  $a \leq b$  e  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  continua, tali che:

- (I)  $\phi(a) = x$ ,  $\phi(b) = y$ ;
- (II)  $\phi([a, b]) \subseteq A$ .

**Osservazione 1.5.1** Come vedremo in seguito, una  $\phi$  con le proprietà richieste è un cammino continuo con sostegno in  $A$ . Dunque, ciò che si chiede è che, comunque si prendano due punti  $x$  e  $y$  in  $A$ , deve esistere un cammino continuo con sostegno in  $A$  che abbia per estremi  $x$  e  $y$ .

**Esempio 1.5.1** Siano  $x$  e  $y$  in  $\mathbf{R}^n$ . Poniamo

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}. \quad (1.5.1)$$

Chiameremo  $[x, y]$  il **segmento con estremi  $x$  e  $y$** . Per un confronto con la notazione  $[x, y]$  usata in [Analisi A], si veda l'esercizio 1.5.1.

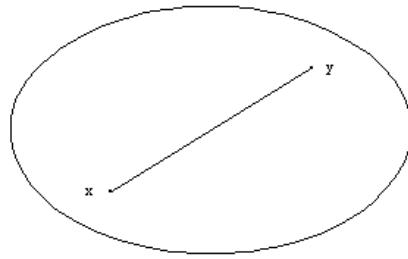


Figura 1.5

Dato  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ , diremo che  $A$  è **convesso** se, comunque si prendano  $x$  e  $y$  in  $A$ ,  $[x, y] \subseteq A$  (figura 1.5).

E' facile verificare che, se  $A$  è convesso, allora  $A$  è connesso per archi. Infatti, se  $x$  e  $y$  sono punti arbitrari di  $A$ , si può prendere

$$\begin{cases} \phi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ \phi(t) = x + t(y - x). \end{cases} \quad (1.5.2)$$

$\phi$  descrive il segmento di estremi  $[x, y]$  ed è continua in virtù del teorema 1.4.2(I).

E' facile vedere che le palle aperte sono insiemi convessi. Siano, infatti,  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ . Allora se  $x$  e  $y$  appartengono a  $B(x^0, r)$ , si ha,  $\forall t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} d(x + t(y - x), x^0) &= \|x + t(y - x) - x^0\| \\ &= \|(1 - t)x + ty - (1 - t)x^0 - tx^0\| \\ &= \|(1 - t)(x - x^0) + t(y - x^0)\| \\ &\leq (1 - t)\|x - x^0\| + t\|y - x^0\| \\ &< (1 - t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Dunque,  $[x, y] \subseteq B(x^0, r)$ . Naturalmente, non tutti i sottoinsiemi connessi per archi di  $\mathbf{R}^n$  sono convessi. Consideriamo, ad esempio, per  $n \geq 2$ ,

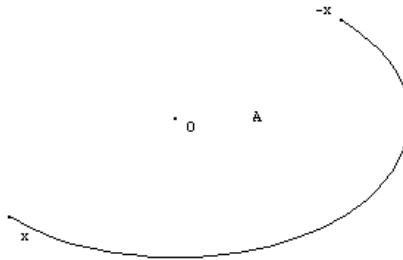


Figura 1.6

l'insieme  $A := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ . Allora, non è difficile dimostrare che  $A$  è connesso per archi. Tuttavia,  $A$  non è convesso. Infatti,  $\forall x \in A, 0 \in [x, -x]$  (figura 1.6).

Verifichiamo ora che, nel caso  $n = 1$ , le tre nozioni di intervallo, connesso per archi e convesso identificano la stessa classe di insiemi.

**Teorema 1.5.1** *Sia  $A \subseteq \mathbf{R}$ . Allora sono equivalenti:*

- (I)  $A$  è un intervallo;
- (II)  $A$  è convesso;
- (III)  $A$  è connesso per archi.

*Dimostrazione* (I) implica (II). Supponiamo, infatti, che  $A$  sia un intervallo. Siano  $x$  e  $y$  in  $A$ ,  $t \in [0, 1]$ . Se  $x \leq y$ , si ha, essendo  $y - x \geq 0$ ,

$$x \leq x + t(y - x) \leq x + (y - x) = y.$$

Se invece  $y - x < 0$ ,

$$y = x + (y - x) \leq x + t(y - x) \leq x.$$

Concludiamo che, poiché  $A$  è un intervallo,  $x + t(y - x) \in A \ \forall t \in [0, 1]$ . Perciò,  $A$  è convesso.

(II) implica (III), perché tutti i convessi sono connessi per archi.

Resta da far vedere che (III) implica (I). Sia  $A$  connesso per archi e siano  $x$  e  $y$  in  $A$ , con  $x \leq y$ . Si tratta di provare che, se  $x \leq z \leq y$ , allora  $z \in A$ . Poiché  $A$  è connesso per archi, esistono  $a$  e  $b$  reali con  $a \leq b$  e  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continua, tali che  $\phi(a) = x$ ,  $\phi(b) = y$ ,  $\phi([a, b]) \subseteq A$ . Per il teorema di Bolzano ([Analisi A], teorema 2.9.2),  $z \in \phi([a, b]) \subseteq A$ , da cui la conclusione.

□

Veniamo infine alla seguente naturale generalizzazione del teorema di Bolzano:

**Teorema 1.5.2** *Siano  $m$  e  $n$  in  $\mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  connesso per archi,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  continua. Allora:*

- (I)  $f(A)$  è connesso per archi in  $\mathbf{R}^m$ ;
- (II) se  $m = 1$ ,  $f(A)$  è un intervallo.

*Dimostrazione* (II) segue immediatamente da (I) e dal teorema 1.5.1.

Proviamo allora (I). Siano  $v$  e  $w$  arbitrari elementi di  $f(A)$ . Sia  $v = f(x)$  e  $w = f(y)$ , con  $x$  e  $y$  in  $A$ . Poiché  $A$  è connesso per archi, esistono  $a$  e  $b$  reali con  $a \leq b$  e  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  continua, tali che  $\phi(a) = x$ ,  $\phi(b) = y$ ,  $\phi([a, b]) \subseteq A$ . Poniamo

$$\begin{cases} \psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m, \\ \psi(t) = f(\phi(t)), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

$\psi$  è continua per il teorema 1.4.3(II). Ovviamente,  $\psi(t) \in f(A)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Infine,  $\psi(a) = f(\phi(a)) = f(x) = v$ ,  $\psi(b) = f(\phi(b)) = f(y) = w$ . Quindi,  $f(A)$  è connesso per archi.

□

**Esercizio 1.5.1** Siano  $x$  e  $y$  numeri reali. Nel caso  $x \leq y$ , la notazione  $[x, y]$  è stata utilizzata in [Analisi A] per indicare  $\{z \in \mathbf{R} : x \leq z \leq y\}$ . In generale, senza necessariamente supporre  $x \leq y$ , poniamo provvisoriamente

$$s(x, y) := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}.$$

Verificare che

$$s(x, y) = [\min\{x, y\}, \max\{x, y\}].$$

**Esercizio 1.5.2** Determinare i domini naturali delle seguenti funzioni, Dire se sono aperti, chiusi, limitati, connessi per archi. Determinare interno e frontiera.

- (I)  $\sqrt{x_1^2 = 5x_1x_2 + 4x_2^2};$
- (II)  $\sqrt{\ln(\frac{x_1-x_2}{x_1x_2})};$
- (III)  $\frac{\sin(\sqrt[4]{-x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 1})}{1 - e^{(x_1-1)/(x_1^2+x_2^2+1)}};$
- (IV)  $\sqrt{-\sin^2(x_1 - x_2)};$
- (V)  $\ln(\cos(x_1^2 + x_2^2));$
- (VI)  $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9}{x_1^2 + x_2^2 - 1}}.$

Consideriamo, ad esempio, (III). Il dominio naturale coincide con

$$\begin{aligned} A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 1 \geq 0, e^{(x_1-1)/(x_1^2+x_2^2+1)} \neq 1\} \\ = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1 \leq 0, x_1 \neq 1\}. \end{aligned}$$

Dato  $x_1 \in \mathbf{R}$ , poniamo  $P_{x_1}(x_2) := x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1$ .  $P_{x_1}$  è un polinomio di secondo grado nella variabile  $x_2$ , con discriminante

$$\Delta_{x_1} = x_1^2 - 4(x_1^2 - 1) = 4 - 3x_1^2.$$

Se  $\Delta_{x_1} < 0$ , si ha  $P_{x_1}(x_2) > 0 \forall x_2 \in \mathbf{R}$ . Dunque,

$$A \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \Delta_{x_1} \geq 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -2/\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2/\sqrt{3}\}.$$

Se  $-2/\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2/\sqrt{3}$ , si ha  $P_{x_1}(x_2) \leq 0$  per

$$\frac{-x_1 - \sqrt{4 - 3x_1^2}}{2} \leq x_2 \leq \frac{-x_1 + \sqrt{4 - 3x_1^2}}{2}.$$

Concludiamo che  $A$  coincide con la parte di  $\mathbf{R}^2$  compresa tra i grafici delle funzioni  $g_{\pm}(x_1) = \frac{-x_1 \pm \sqrt{4 - 3x_1^2}}{2}$  (grafici compresi), esclusi i punti con  $x_1 = 1$ . Tali grafici possono essere determinati con i metodi visti in [Analisi A] (figura 1.7). Possiamo allora dire che:

- (a)  $A$  non è aperto. Infatti, per esempio, il punto  $(0, 1)$ , intersezione della retta  $x_1 = 1$  con il grafico di  $g_+$ , appartiene ad  $A$ , ma non è interno;
- (b)  $A$  non è chiuso. Infatti i punti del segmento di estremi  $P$  e  $Q$  non appartengono ad  $A$ , ma appartengono a  $Fr(A)$ ;

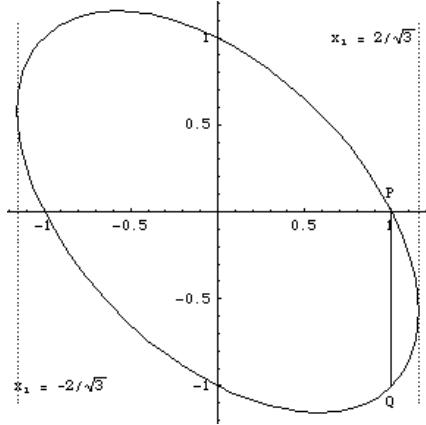


Figura 1.7

(c)  $A$  è limitato. Infatti, se  $(x_1, x_2) \in A$ ,  $|x_1| \leq 2/\sqrt{3}$ . Inoltre,  $g_+$  ammette massimo uguale a  $2/\sqrt{3}$ ,  $g_-$  ammette minimo uguale a  $-2/\sqrt{3}$ . Dunque,  $|x_2| \leq 2/\sqrt{3}$ , e perciò

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{4/3 + 4/3} = \sqrt{8/3}.$$

(d)  $A$  non è connesso per archi, in quanto, se prendiamo  $x \in A$ , con  $x_1 < 1$ ,  $y \in A$ , con  $y_1 > 0$ ,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  continua, con  $\alpha(a) = x$ ,  $\alpha(b) = y$ , si ha  $\alpha_1(a) < 1$ ,  $\alpha_1(b) > 1$ . Segue dal teorema di Bolzano che, per qualche  $t \in [a, b]$ , vale  $\alpha_1(t) = 1$  e perciò  $\alpha(t) \notin A$ .

(e) Infine, si ha

$$\mathring{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1 < 0, x_1 \neq 1\}$$

e

$$Fr(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 1 \leq 0, x_1 = 1\}.$$



## Capitolo 2

# Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali

### 2.1 Derivate rispetto a un vettore e derivate parziali

In questa sezione introduciamo le definizioni di base del calcolo differenziale.

**Definizione 2.1.1** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $v \in \mathbf{R}^n$ ,  $x^0 \in A$ . Poniamo

$$A_{x^0, v} := \{t \in \mathbf{R} : x^0 + tv \in A\}. \quad (2.1.1)$$

Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Per  $t \in A_{x^0, v} \setminus \{0\}$ , poniamo

$$r_{x^0, v}(t) := \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}. \quad (2.1.2)$$

e supponiamo che  $0 \in D(A_{x^0, v})$ . Se esiste

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_{x^0, v}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}, \quad (2.1.3)$$

lo chiameremo **derivata di  $f$  rispetto al vettore  $v$  in  $x^0$**  e lo indicheremo con la notazione  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ .

**Esempio 2.1.1** Siano  $A := \mathbf{R}^2$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ,  $x^0 = (1, 0)$ ,  $v = (1, 1)$ . Evidentemente,  $A_{x^0, v} = \mathbf{R}$  e perciò  $0 \in D(A_{x^0, v})$ . Per  $t \neq 0$ , si ha

$$r_{x^0, v}(t) = \frac{f(1+t, t)}{t} = 1 + t \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0).$$

Dunque, esiste  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$  e vale 1.

**Osservazione 2.1.1** Con riferimento alla definizione 2.1.1, si ha che il dominio di  $r_{x^0,v}$  è l'insieme  $A_{x^0,v} \setminus \{0\}$ . Analogamente ad [Analisi A] (osservazione 3.1.1), osserviamo che  $0 \in D(A_{x^0,v})$  se e solo se  $0 \in D(A_{x^0,v} \setminus \{0\})$ . Dunque, la condizione  $0 \in D(A_{x^0,v})$  è proprio ciò che serve per dare un senso a (2.1.3).

È importante il fatto che, se  $x^0 \in A$ , la condizione  $0 \in D(A_{x^0,v})$  è soddisfatta qualunque sia  $v$  in  $\mathbf{R}^n$ . Sia infatti  $r \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $B(x^0, r) \subseteq A$ . Evidentemente,  $A_{x^0,O} = \mathbf{R}$ , e dunque  $0 \in D(A_{x^0,O})$  (questo è vero supponendo semplicemente  $x^0 \in A$ ). Se invece  $v \neq 0$ ,  $x^0 + tv \in A$  se

$$\|tv\| = d(x^0, x^0 + tv) < r.$$

Ora,

$$\|tv\| = |t|\|v\| < r$$

se  $t \in ] -r/\|v\|, r/\|v\| [$ . Dunque,

$$] -r/\|v\|, r/\|v\| [ \subseteq A_{x^0,v},$$

e questo implica  $0 \in D(A_{x^0,v})$ .

Consideriamo, invece, il caso  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}$ ,  $x^0 = (0, 0)$ . Se  $v^0 = (1, 0)$ , si ha

$$A_{x^0,v^0} = \mathbf{R},$$

per cui la condizione  $0 \in D(A_{x^0,v^0})$  è soddisfatta. Invece, per  $v^1 := (0, 1)$ , si ha

$$A_{x^0,v^1} = \{0\},$$

e quindi  $0 \notin D(A_{x^0,v^1})$ .

Nella prossima definizione, considereremo la così detta **base canonica** di  $\mathbf{R}^n$ . Ricordiamo che con tale espressione si intende la famiglia di vettori  $\{e^1, \dots, e^j, \dots, e^n\}$ , con

$$\begin{matrix} e^j & = & ( & 0, & \dots, & 1, & \dots, & 0 & ), & 1 \leq j \leq n. \\ & & 1 & \dots & j & \dots & n & & & \end{matrix} \quad (2.1.4)$$

**Definizione 2.1.2** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $1 \leq j \leq n$ ,  $x^0 \in A$ , tale che  $0 \in D(A_{x^0,e^j})$ . Chiamiamo **derivata parziale prima rispetto alla variabile  $x_j$  nel punto  $x^0$**  la derivata  $\frac{\partial f}{\partial e^j}(x^0)$  (se esiste).

Tale derivata sarà indicata con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0), \quad D_j f(x^0). \quad (2.1.5)$$

**Osservazione 2.1.2** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $x^0 \in A$ , tale che  $0 \in D(A_{x^0, e^j})$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Se  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$ . Poniamo

$$B := \{y \in \mathbf{R} : (x_1^0, \dots, y, \dots, x_n^0) \in A\},$$

$$\begin{cases} g : B \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(y) = f(x_1^0, \dots, y, \dots, x_n^0), \quad y \in B. \end{cases}$$

Allora, se  $t \in A_{x^0, e^j} \setminus \{0\}$ ,  $x_j^0 + te^j \in B$  e

$$\begin{aligned} \frac{f(x^0 + te^j) - f(x^0)}{t} &= \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)}{t} \\ &= \frac{g(x_j^0 + t) - g(x_j^0)}{t}. \end{aligned}$$

Perciò  $D_j f(x^0)$  coincide (se esiste) con  $g'(x_j^0)$ . Nel processo di limite, la variabile  $x_k$ , con  $k \neq j$ , resta costantemente uguale a  $x_k^0$ . Perciò, il calcolo di  $D_j f(x^0)$  segue regole analoghe al calcolo della derivata ordinaria in  $\mathbf{R}$ , assumendo  $x_j$  come unica variabile. Le altre variabili vanno trattate come costanti. Per esempio, siano

$$A := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 > 0\},$$

$$\begin{cases} f : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2 x_3}, \quad x \in A. \end{cases}$$

Allora,  $\forall x \in A$ , si ha

$$D_1 f(x) = x_1^{x_2 x_3 - 1} x_2 x_3,$$

$$D_2 f(x) = x_1^{x_2 x_3} x_3 \ln(x_1),$$

$$D_3 f(x) = x_1^{x_2 x_3} x_2 \ln(x_1).$$

**Osservazione 2.1.3** In [Analisi A] (teorema 3.2.1) abbiamo visto che, se  $f : A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  è derivabile in  $x^0$ , con  $x^0 \in A \cap D(f)$ ,  $f$  è automaticamente continua in  $A$ .

Per funzioni di più variabili, è abbastanza chiaro che l'esistenza di tutte le derivate parziali prime finite in un punto non implica la continuità della funzione in quel punto. Si consideri, in proposito, il seguente esempio: sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 x_2 = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Allora, è facile verificare che esistono  $D_1f(0,0)$  e  $D_2f(0,0)$  e valgono entrambe 0. Tuttavia,  $f$  non è continua in  $(0,0)$ . Infatti, sia  $\epsilon = 1/2$ . Non esiste alcun  $\delta$  in  $\mathbf{R}^+$  tale che,  $\forall x \in B((0,0), \delta)$ , valga  $|f(x) - f(0,0)| < 1/2$ . Infatti, se poniamo

$$x^\delta := (\delta/(2\sqrt{2}), \delta/(2\sqrt{2})),$$

si ha  $\|x^\delta\| = \delta/2 < \delta$ , ma

$$|f(x^\delta) - f(0,0)| = 1 > 1/2.$$

È possibile presentare un esempio ancora più drastico di una funzione dotata in  $(0,0)$  di tutte le derivate  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$  finite qualunque sia  $v$  in  $\mathbf{R}^2$ , ma discontinua in  $(0,0)$ . Si consideri infatti la funzione definita in (1.3.5). Tale funzione  $f$  non è continua in  $(0,0)$ , in quanto non esiste  $\lim_{x \rightarrow (0,0)} f(x)$ , come già visto

nell'osservazione 1.3.2. Tuttavia, qualunque sia  $v$  in  $\mathbf{R}^2$  e qualunque sia  $t \in \mathbf{R}$ ,  $tv$  appartiene a una certa retta  $A$  passante per l'origine, dipendente da  $v$ . Abbiamo visto che, qualunque sia la retta  $A$ , esiste  $\delta > 0$ , tale che, se  $x \in A$  e  $\|x\| < \delta$ , vale  $f(x) = 1$ . Perciò, qualunque sia  $v \in \mathbf{R}^2$ , esiste  $\delta(v) \in \mathbf{R}^+$ , tale che, comunque si prenda  $t$  in  $] -\delta(v), \delta(v)[$ , si ha  $f(tv) = 1$ . Ne segue che, se  $t \in ] -\delta(v), \delta(v)[ \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = 0,$$

da cui  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ .

**Esercizio 2.1.1** Verificare che la funzione definita in (2.1.6) ha le derivate parziali prime nulle in  $(0,0)$ .

**Esercizio 2.1.2** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni e calcolare, dove possibile, le derivate parziali prime:

- (I)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2$ ;
- (II)  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$ ;
- (III)  $f(x_1, x_2) = x_1^4x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_2$ ;
- (IV)  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1x_2)$ ;
- (V)  $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2)$ ;
- (VI)  $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ ;
- (VII)  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;
- (VIII)  $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ ;
- (IX)  $f(x_1, x_2) = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$ ;

- (X)  $f(x_1, x_2) = x_2^{-x_1^2};$
- (XI)  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 + 3x_1x_3 + x_2^2}{x_3};$
- (XII)  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$
- (XIII)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3;$
- (XIV)  $f(x) = \|x\|^2 \quad (x \in \mathbf{R}^n);$
- (XV)  $f(x) = \|x\| \quad (x \in \mathbf{R}^n);$
- (XVI)  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot \dots \cdot x_n.$

**Esercizio 2.1.3** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}\right)^2 & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \end{cases}$$

Verificare che,  $\forall v \in \mathbf{R}^2$ , esiste finita  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ . Verificare poi che  $f$  non è continua in  $(0, 0)$ . A tale proposito, considerare  $f(x_1, x_1^2)$  ( $x_1 \in \mathbf{R}$ ).

**Esercizio 2.1.4** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $\nu \in \mathbf{R}^n$ ,  $x^0 \in A$ , tali che  $0 \in D(A_{x^0, \nu})$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$ , tali che esistono in  $\mathbf{R}$   $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)$  e  $\frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)$ . Verificare che:

- (I) esiste  $\frac{\partial(f+g)}{\partial \nu}(x_0)$  e coincide con  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)$ ;
- (II) esiste  $\frac{\partial(fg)}{\partial \nu}(x_0)$  e coincide con  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)g(x^0) + f(x^0)\frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)$ ;
- (III) se  $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ , esiste  $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial \nu}(x_0)$  e coincide con

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)g(x^0) - \frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0)f(x^0)}{g(x^0)^2}.$$

## 2.2 Funzioni di classe $C^1$

La definizione di funzione di classe  $C^1$  è simile a quella vista in [Analisi A]:

**Definizione 2.2.1** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diremo che  $f$  è di classe  $C^1$  in  $A$  ( $f \in C^1(A)$ ), se  $\forall x \in A$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$  esiste a valori reali  $D_j f(x)$ . Inoltre le funzioni  $f$ ,  $D_1 f, \dots, D_n f$  sono continue su  $A$ .

**Osservazione 2.2.1** Per quanto visto nell'osservazione 2.1.1, qualunque sia  $x$  in  $A$ ,  $0$  appartiene a  $D(A_{x, e^j})$  per ciascun  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Esempio 2.2.1** È facile verificare che le funzioni polinomiali sono di classe  $C^1$  in  $\mathbf{R}^n$ . Infatti, sono continue (esempio 1.4.1) e le loro derivate parziali prime sono ancora funzioni polinomiali, per cui sono anch'esse continue.

Nella definizione di funzione di classe  $C^1$ , si richiede soltanto l'esistenza delle derivate parziali. È notevole che dalla loro continuità segua anche l'esistenza delle derivate rispetto a un vettore qualunque. All'enunciazione del prossimo teorema, premettiamo la seguente

**Definizione 2.2.2** Siano  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(A)$ ,  $x \in A$ . Chiamiamo **gradiente** di  $f$  in  $x$  e indichiamo col simbolo  $\nabla f(x)$  il vettore

$$\nabla f(x) := (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)).$$

**Teorema 2.2.1** (del differenziale totale) Siano  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(A)$ ,  $x \in A$ ,  $\nu \in \mathbf{R}^n$ . Allora esiste  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x)$  e

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu = \sum_{j=1}^n D_j f(x) \nu_j.$$

*Dimostrazione parziale* Dimostriamo il teorema nelle ulteriori ipotesi  $n = 2$  e  $A = \mathbf{R}^2$ . Siano  $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ ,  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ . Allora

$$\begin{aligned} f(x + t\nu) - f(x) &= f(x_1 + t\nu_1, x_2 + t\nu_2) - f(x_1, x_2) \\ &= (f(x_1 + t\nu_1, x_2 + t\nu_2) - f(x_1, x_2 + t\nu_2)) \quad (2.2.1) \\ &\quad + (f(x_1, x_2 + t\nu_2) - f(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(y) := f(y, x_2 + t\nu_2). \end{cases}$$

Osserviamo che, per quanto visto nell'osservazione 2.1.2,  $g \in C^1(\mathbf{R})$  e,  $\forall y \in \mathbf{R}$ ,

$$g'(y) = D_1 f(y, x_2 + t\nu_2).$$

Allora, per il teorema del valor medio ([Analisi A], teorema 3.3.4), esiste  $c_1(t) \in [x_1, x_1 + t\nu_1]$  se  $t\nu_1 \geq 0$ ,  $c_1(t) \in [x_1 + t\nu_1, x_1]$  se  $t\nu_1 < 0$ , tale che

$$\begin{aligned} f(x_1 + t\nu_1, x_2 + t\nu_2) - f(x_1, x_2 + t\nu_2) &= g(x_1 + t\nu_1) - g(x_1) \quad (2.2.2) \\ &= g'(c_1(t))t\nu_1 = D_1 f(c_1(t), x_2 + t\nu_2)t\nu_1. \end{aligned}$$

Analogamente, si vede che esiste  $c_2(t) \in [x_2, x_2 + t\nu_2]$  se  $t\nu_2 \geq 0$ ,  $c_2(t) \in [x_2 + t\nu_2, x_2]$  se  $t\nu_2 < 0$ , tale che

$$f(x_1, x_2 + t\nu_2) - f(x_1, x_2) = D_2 f(x_1, c_2(t))t\nu_2. \quad (2.2.3)$$

Da (2.2.1)-(2.2.3) segue allora

$$\frac{f(x + t\nu) - f(x)}{t} = D_1 f(c_1(t), x_2 + t\nu_2)\nu_1 + D_2 f(x_1, c_2(t))\nu_2. \quad (2.2.4)$$

Siano ora  $\epsilon$  e  $\eta$  elementi di  $\mathbf{R}^+$ . Poiché  $D_1 f$  e  $D_2 f$  sono continue, esiste  $\delta(\eta)$  in  $\mathbf{R}^+$ , tale che, se  $z \in \mathbf{R}^2$ , e  $\|z - x\| < \delta(\eta)$ , per  $j = 1, 2$ , si ha

$$|D_j f(z) - D_j f(x)| < \eta. \quad (2.2.5)$$

Si ha

$$\|(c_1(t), x_2 + t\nu_2) - x\| = \sqrt{(c_1(t) - x_1)^2 + t^2\nu_2^2} \leq \sqrt{t^2\nu_1^2 + t^2\nu_2^2} = |t|\|\nu\| \quad (2.2.6)$$

e

$$\|(x_1, c_2(t)) - x\| = |c_2(t) - x_2| \leq |t|\|\nu_2\|. \quad (2.2.7)$$

Fissiamo ora  $\delta_2(\eta)$  in  $\mathbf{R}^+$ , tale che, se  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  e  $|t| < \delta_2(\eta)$ , vale

$$|t|\|\nu\| < \delta_1(\eta).$$

Con questa scelta di  $t$ , da (2.2.4)-(2.2.7) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x + t\nu) - f(x)}{t} - D_1 f(x)\nu_1 - D_2 f(x)\nu_2 \right| \\ & \leq |D_1 f(c_1(t), x_2 + t\nu_2) - D_1 f(x)|\|\nu_1\| + |D_2 f(x_1, c_2(t)) - D_2 f(x)|\|\nu_2\| \\ & \leq \eta(|\nu_1| + |\nu_2|). \end{aligned}$$

Se scegliamo  $\eta$  in modo che  $\eta(|\nu_1| + |\nu_2|) < \epsilon$ , otteniamo allora che

$$\left| \frac{f(x + t\nu) - f(x)}{t} - D_1 f(x)\nu_1 - D_2 f(x)\nu_2 \right| < \epsilon$$

se  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  e  $|t| < \delta_2(\eta)$ .

□

**Esempio 2.2.2** Rivisitiamo l'esempio 2.1.1 alla luce del teorema 2.2.1. Si ha che  $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$  e,  $\forall x = (x_1, x_2)$  in  $\mathbf{R}^2$ ,

$$D_1 f(x) = x_2, \quad D_2 f(x) = x_1,$$

da cui

$$\nabla f(1, 0) = (0, 1).$$

Di conseguenza, se  $v = (1, 1)$ , si ha, applicando il teorema 2.2.1,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = (0, 1) \cdot (1, 1) = 1.$$

Vediamo ora una generalizzazione del teorema del valor medio ([Analisi A], teorema 3.3.4).

**Teorema 2.2.2** Siano  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $f \in C^1(A)$ ,  $x$  e  $y$  in  $A$  tali che  $[x, y] \subseteq A$ . Allora esiste  $z \in [x, y]$ , tale che

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x).$$

*Dimostrazione* Poniamo

$$\begin{cases} F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \\ F(t) = f(x + t(y - x)). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$F$  è derivabile in  $[0, 1]$  e,  $\forall t \in [0, 1]$ ,

$$F'(t) = \nabla f(x + t(y - x)) \cdot (y - x), \quad (2.2.9)$$

Infatti, se  $t \in [0, 1]$ ,  $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  e  $t + h \in [0, 1]$ , si ha, per il teorema del differenziale totale,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+t(y-x)+h(y-x))-f(x+t(y-x))}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial(y-x)}(x + t(y - x)) = \nabla f(x + t(y - x)) \cdot (y - x). \end{aligned}$$

Allora, applicando il teorema del valor medio unidimensionale, esiste  $c \in ]0, 1[$  tale che

$$f(y) - f(x) = F(1) - F(0) = F'(c)$$

$$= \nabla f(x + c(y - x)) \cdot (y - x).$$

Otteniamo allora la conclusione, ponendo  $z = x + c(y - x)$ .

□

**Osservazione 2.2.2** Per uso futuro, osserviamo che la derivata della funzione  $F$  definita in (2.2.8) è espressa dalla formula (2.2.9).

**Esercizio 2.2.1** Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}) & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Verificare che  $\forall v \in \mathbf{R}^2$  esiste  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  ed è uguale a 0.

Calcolare, più in generale,  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_1, x_2)$ ,  $\forall v \in \mathbf{R}^2$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ .

## 2.3 Derivate di ordine superiore

Le "derivate delle derivate" sono importanti, come vedremo, anche in dimensione superiore a 1. Cominciamo con la loro definizione, che generalizza la definizione 3.5.1 in [Analisi A].

**Definizione 2.3.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Poniamo

$$A_j := \{x \in A : \exists D_j f(x) \in \mathbf{R}\}.$$

Su  $A_j$  è definita la funzione  $D_j f$ , che associa a ogni elemento  $x$  di  $A_j$  la derivata  $D_j f(x)$ . Se  $x \in A_j$  e  $1 \leq i \leq n$ , può esistere la derivata  $D_i(D_j f)(x)$  di  $D_j f$  in  $x$ . Essa viene chiamata **derivata seconda** di  $f$  in  $x$  rispetto alle variabili  $x_i, x_j$  (nell'ordine) e viene indicata con uno dei simboli  $D_{ij} f(x)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  ( $D_j^2 f(x)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$  se  $i = j$ ).

Iterando il procedimento, si possono definire le derivate terze, quarte, ecc.. (o derivate di ordine 3, 4, ecc.) Dato  $k \in \mathbf{N}$ ,  $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ , non necessariamente a due a due distinti, porremo

$$D_{j_1 j_2 \dots j_k} f(x) = D_{j_1}(D_{j_2}(\dots(D_{j_k} f)\dots))(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x).$$

**Esempio 2.3.1** Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 x_2^2$ . Allora, si verifica facilmente che,  $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ , si ha

$$D_1 f(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2, D_2 f(x) = -6x_1 x_2,$$

$$D_{11} f(x) = 6x_1, D_{12} f(x) = D_{21} f(x) = -6x_2, D_{22} f(x) = -6x_1,$$

$$D_{111}f(x) = 6, D_{112}f(x) = D_{121}f(x) = D_{211}f(x) = 0,$$

$$D_{122}f(x) = D_{212}f(x) = D_{221}f(x) = -6, D_{222}f(x) = 0.$$

Le derivate di ordine superiore a 3 sono poi identicamente nulle.

Questo esempio suggerisce che applicando lo stesso numero di volte le singole derivate del primo ordine, si ottiene lo stesso risultato (per esempio,  $D_{122}f = D_{212}f$ ). Vedremo tra poco un esempio che mostra che ciò è falso in generale. Ma vedremo anche che diventa vero sotto opportune ulteriori condizioni.

**Esempio 2.3.2** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \end{cases}$$

È facile verificare che,  $\forall x = (x_1, x_2)$  in  $\mathbf{R}^2$ , si ha

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &= \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2 - x_2^5 + 4x_1^2 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases} \\ D_2 f(x) &= \begin{cases} \frac{x_1^5 - x_1 x_2^4 - 4x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} D_{12}f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_2 f(t, 0) - D_2 f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^5 - t t^4 - 4t^3 t^2}{(t^2 + 0^2)^2} - 0}{t} \\ &= 1, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} D_{21}f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_1 f(0, t) - D_1 f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^4 - t^5 + 4t^2 t^3}{(t^2 + 0^2)^2} - 0}{t} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Dunque  $D_{12}f(0, 0) \neq D_{21}f(0, 0)$ .

Tuttavia, vale il seguente teorema, che non dimostriamo:

**Teorema 2.3.1** (di Schwarz) Siano  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Supponiamo che,  $\forall x \in A$ , siano definite e a valori reali  $D_i f(x)$ ,  $D_j f(x)$ ,  $D_{ij} f(x)$ ,  $D_{ji} f(x)$ . Sia poi  $x^0$  in  $A$ , tale che  $D_{ij} f$  e  $D_{ji} f$  sono continue in  $x^0$ . Allora,

$$D_{ij} f(x^0) = D_{ji} f(x^0).$$

Passiamo ora alla definizione delle classi  $C^k(A)$  (per il caso  $n = 1$ , si veda la definizione 3.5.2 in [Analisi A]).

**Definizione 2.3.2** Siano  $A$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diremo che  $f$  è di classe  $C^k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) se possiede a valori reali tutte le derivate parziali di ordine non superiore a  $k$  in ogni punto di  $A$  e tali derivate sono continue in  $A$ . Scriveremo, per indicare tale eventualità,  $f \in C^k(A)$ . Se  $f \in C^k(A)$  per ogni  $k \in \mathbf{N}$  (e quindi possiede derivate parziali continue di ogni ordine), scriveremo  $f \in C^\infty(A)$ .

**Osservazione 2.3.1** Dal teorema di Schwarz, segue subito che, se  $f \in C^2(A)$ , con  $A$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , si ha  $D_{ij} f = D_{ji} f$ . Più in generale, se  $f \in C^k(A)$ , due derivate qualunque di ordine non superiore a  $k$ , che si ottengono applicando lo stesso numero di volte le singole derivate parziali del primo ordine, coincidono. Lo verifichiamo solo nel caso  $n = 3$ , facendo vedere che

$$D_{123} f = D_{321} f.$$

Infatti,  $D_3 f \in C^2(A)$ . Quindi, innanzi tutto,

$$D_{123} f = D_{12}(D_3 f) = D_{21}(D_3 f) = D_{213} f. \quad (2.3.1)$$

Inoltre,  $D_{13} f = D_{31} f$ . Quindi,

$$D_{213} f = D_2(D_{13} f) = D_2(D_{31} f) = D_{231} f. \quad (2.3.2)$$

Infine, usando il fatto che  $D_1 f \in C^2(A)$ , concludiamo che

$$D_{231} f = D_{23}(D_1 f) = D_{32}(D_1 f) = D_{321} f. \quad (2.3.3)$$

La conclusione segue allora da (2.3.1)-(2.3.3).

Introduciamo ora la seguente notazione: siano  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}_0^n$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^k(A)$  ( $k \in \mathbf{N}$ ),  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ . Poniamo

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} := \underbrace{D_1 \dots D_1}_{\alpha_1} \dots \underbrace{D_n \dots D_n}_{\alpha_n} f. \quad (2.3.4)$$

Il seguente risultato segue facilmente, per iterazione dal risultato dell'esercizio 2.1.4:

**Teorema 2.3.2** *Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $f, g \in C^k(A)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}_0^n$ , con  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . Allora:*

- (I)  $f + g, fg, cf \in C^k(A)$ ;
- (II) se  $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ ,  $f/g \in C^k(A)$ ;
- (III)  $D^\alpha(f + g) = D^\alpha f + D^\alpha g$ ,  $D^\alpha(cf) = cD^\alpha f$ .

*Dimostrazione* Vedi l'esercizio 2.3.1.  $\square$

**Esercizio 2.3.1** (I) Dimostrare il teorema 2.3.2.

(II) Verificare che, se  $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$ ,  $f \rightarrow D^\alpha f$  è un'applicazione lineare da  $C^k(A)$  a  $C^{k-\alpha_1-\dots-\alpha_n}(A)$ .

**Esercizio 2.3.2** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \end{cases}$$

Calcolare (dove esistano) le derivate di ordine non superiore a 2 di  $f$ .

Svolgere gli stessi calcoli con le funzioni dell'esercizio 2.1.2.

## 2.4 La formula di Taylor

Le motivazioni dell'introduzione della formula di Taylor per funzioni di più variabili sono simili a quelle viste per funzioni di una sola variabile (vedi [Analisi A], 3.7). Veniamo allora subito al risultato principale, che andiamo a enunciare e che parzialmente dimostreremo:

**Teorema 2.4.1** (*Formula di Taylor*) *Siano  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $f \in C^k(A)$ ,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ . Introduciamo il seguente polinomio di  $n$  variabili reali:*

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) &= f(x^0) + \sum_{j=1}^n D_j f(x^0)(x_j - x_j^0) + \dots \\ &+ \dots + \frac{1}{i!} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_i=1}^n D_{j_1 \dots j_i} f(x^0)(x_{j_1} - x_{j_1}^0) \dots (x_{j_i} - x_{j_i}^0) + \\ &\dots + \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n D_{j_1 \dots j_k} f(x^0)(x_{j_1} - x_{j_1}^0) \dots (x_{j_k} - x_{j_k}^0). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

**Chiamiamo  $P$  polinomio di Taylor di grado non superiore a  $k$  con punto iniziale  $x^0$  per  $f$ .**

Allora  $f - P = o(\|x - x^0\|^k)$  per  $x \rightarrow x^0$ , nel senso che vale

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - P(x)}{\|x - x^0\|^k} = 0.$$

**Osservazione 2.4.1** Nel caso particolare  $n = 1$  avevano trovato che  $f - P = o((x - x^0)^k)$  per  $x \rightarrow x^0$  (vedi [Analisi A], teorema 3.7.1). Nel caso  $n = 1$ , si verifica facilmente che le condizioni  $f - P = o((x - x^0)^k)$  e  $f - P = o(|x - x^0|^k)$  sono equivalenti (esercizio 2.4.1).

Passiamo ora a dare una parziale dimostrazione del teorema 2.4.1. Cominciamo col seguente

**Lemma 2.4.1** *Sia  $F \in C^2([0, 1])$ . Allora esiste  $c$ , appartenente a  $]0, 1[$ , tale che*

$$F(1) = F(0) + F'(0) + F''(c)/2.$$

Dimostrazione Per  $x \in [0, 1]$ , poniamo

$$r(x) = F(x) - F(0) - F'(0)x. \quad (2.4.2)$$

Allora  $r \in C^2([0, 1])$ ,

$$r(0) = 0, \quad (2.4.3)$$

$$r'(x) = F'(x) - F'(0), r''(x) = F''(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.4.4)$$

$$r'(0) = 0. \quad (2.4.5)$$

Applicando il teorema di Cauchy ([Analisi A], teorema 3.3.3) a  $r$  e  $g(x) = x^2$  in  $[0, 1]$ , possiamo dire che esiste  $c_1 \in ]0, 1[$  tale che

$$g'(c_1)[r(1) - r(0)] = r'(c_1)[g(1) - g(0)],$$

da cui

$$F(1) - F(0) - F'(0) = r(1) = r'(c_1)/(2c_1). \quad (2.4.6)$$

Applicando di nuovo il teorema di Cauchy a  $r'$  e  $h(x) = 2x$  nell'intervallo  $[0, c_1]$ , otteniamo che esiste  $c \in ]0, c_1[$  tale che

$$2[r'(c_1) - r'(0)] = r''(c)2c_1, \quad (2.4.7)$$

per cui, applicando (2.4.4)-(2.4.7), otteniamo

$$F(1) - F(0) - F'(0) = r''(c)/2 = F''(c)/2.$$

□

*Dimostrazione parziale del teorema 2.4.1* Dimostriamo il teorema nel caso  $k = 2$ .

Sia  $r \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $B(x^0, r) \subseteq A$ . Per  $x \in B(x^0, r)$ , poniamo

$$\begin{cases} F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \\ F(t) = f(x^0 + t(x - x^0)). \end{cases} \quad (2.4.8)$$

Applicando l'osservazione 2.2.2, si ha

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n D_j f(x^0 + t(x - x^0))(x_j - x_j^0), \quad t \in [0, 1]$$

e, poiché  $f \in C^2(A)$ ,

$$F''(t) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n D_{j_1, j_2} f(x^0 + t(x - x^0))(x_{j_1} - x_{j_1}^0)(x_{j_2} - x_{j_2}^0), \quad t \in [0, 1].$$

Di conseguenza, applicando il lemma 2.4.1, otteniamo, per un certo  $c(x) \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= F(1) = F(0) + F'(0) + F''(c(x))/2 \\ &= f(x^0) + \sum_{j=1}^n D_j f(x^0)(x_j - x_j^0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n D_{j_1, j_2} f(x^0 + c(x)(x - x^0))(x_{j_1} - x_{j_1}^0)(x_{j_2} - x_{j_2}^0) \\ &= P(x) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n [D_{j_1, j_2} f(x^0 + c(x)(x - x^0)) \\ &\quad - D_{j_1, j_2} f(x^0)](x_{j_1} - x_{j_1}^0)(x_{j_2} - x_{j_2}^0), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

con

$$P(x) = f(x^0) + \sum_{j=1}^n D_j f(x^0)(x_j - x_j^0)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n D_{j_1, j_2} f(x^0)(x_{j_1} - x_{j_1}^0)(x_{j_2} - x_{j_2}^0).$$

Resta da provare che si ha

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - P(x)}{\|x - x^0\|^2} = 0.$$

Siano  $\epsilon$  e  $\eta$  in  $\mathbf{R}^+$ . Poiché la funzione  $f$  è di classe  $C^2$ , esiste  $\delta(\eta) > 0$ , tale che  $B(x^0, \delta(\eta)) \subseteq A$  e, se  $y \in B(x^0, \delta(\eta)) \subseteq A$ , per ogni  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$ , si ha

$$|D_{j_1, j_2} f(y) - D_{j_1, j_2} f(x^0)| < \eta. \quad (2.4.10)$$

Se  $x \in B(x^0, \delta(\eta))$ , si ha

$$\begin{aligned} \|(x^0 + c(x)(x - x^0)) - x^0\| &= c(x)\|x - x^0\| \\ &\leq \|x - x^0\| < \delta(\eta). \end{aligned}$$

Da (2.4.9) segue allora

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \frac{1}{2}\eta \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n |x_{j_1} - x_{j_1}^0| |x_{j_2} - x_{j_2}^0| \\ &\leq \frac{n^2}{2}\eta\|x - x^0\|^2. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Da (2.4.11) segue subito, per  $x \in B(x^0, \delta(\eta)) \setminus \{x^0\}$ ,

$$\frac{|f(x) - P(x)|}{\|x - x^0\|^2} \leq \frac{n^2}{2}\eta,$$

da cui

$$\frac{|f(x) - P(x)|}{\|x - x^0\|^2} < \epsilon$$

se

$$\frac{n^2}{2}\eta < \epsilon.$$

□

**Esempio 2.4.1** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

Poniamo  $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 0)$  e scriviamo il polinomio di Taylor di grado 3 di  $f$  con punto iniziale  $x^0$ . Si ha, applicando il teorema 2.4.1 e l'osservazione

2.3.1:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= f(x^0) + \sum_{j=1}^2 D_j f(x^0)(x_j - x_j^0) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 D_{j_1 j_2} f(x^0) \\
&\quad \times (x_{j_1} - x_{j_1}^0)(x_{j_2} - x_{j_2}^0) + \frac{1}{6} \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \sum_{j_3=1}^2 D_{j_1 j_2 j_3} f(x^0) \\
&\quad \times (x_{j_1} - x_{j_1}^0)(x_{j_2} - x_{j_2}^0)(x_{j_3} - x_{j_3}^0) + r(x) \\
&= f(1, 0) + D_1 f(1, 0)(x_1 - 1) + D_2 f(1, 0)x_2 + \frac{1}{2}[D_{11} f(1, 0) \\
&\quad (x_1 - 1)^2 + D_{12} f(1, 0)(x_1 - 1)x_2 + D_{21} f(1, 0)(x_1 - 1)x_2 \\
&\quad + D_{22} f(1, 0)x_2^2] + \frac{1}{6}[D_{111} f(1, 0)(x_1 - 1)^3 + D_{112} f(1, 0) \\
&\quad \times (x_1 - 1)^2 x_2 + D_{121} f(1, 0)(x_1 - 1)^2 x_2 + D_{122} f(1, 0) \\
&\quad \times (x_1 - 1)x_2^2 + D_{211} f(1, 0)(x_1 - 1)^2 x_2 + D_{212} f(1, 0)(x_1 - 1)x_2^2 \\
&\quad + D_{221} f(1, 0)(x_1 - 1)x_2^2 + D_{222} f(1, 0)x_2^3] + r(x) \\
&= f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0)(x_1 - 1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 0)x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(1, 0) \\
&\quad \times (x_1 - 1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(1, 0)(x_1 - 1)x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(1, 0)x_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(1, 0)(x_1 - 1)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(1, 0)(x_1 - 1)^2 x_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(1, 0)(x_1 - 1)x_2^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(1, 0)x_2^3 + r(x),
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

con  $\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{r(x)}{\|x - x^0\|^3} = 0$ .

Si ha, per  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= x_2 x_1^{x_2-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \ln(x_1), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln(x_1)), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= x_1^{x_2} \ln^2(x_1), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_1, x_2) = x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2)x_1^{x_2-3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_1, x_2) &= (x_2 - 1)x_1^{x_2-2} + x_2[(x_2 - 1)x_1^{x_2-2} \ln(x_1) + \frac{x_1^{x_2-1}}{x_1}], \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x_1, x_2) &= x_1^{x_2-1}(x_2 \ln^2(x_1) + 2 \ln(x_1)), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_1, x_2) &= x_1^{x_2} \ln^3(x_1).\end{aligned}$$

Segue

$$\begin{aligned}f(1, 0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(1, 0) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(1, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(1, 0) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(1, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(1, 0) = 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(1, 0) &= -1,\end{aligned}$$

da cui, per (2.4.12),

$$f(x_1, x_2) = 1 + (x_1 - 1)x_2 - \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 x_2 + r(x).$$

**Esercizio 2.4.1** Verificare quanto affermato nell'osservazione 2.4.1.

**Esercizio 2.4.2** Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^2$ . Scrivere il polinomio di Taylor di  $f$  con punto iniziale  $(1, -1, 1)$  di grado non superiore a 3.

Stesso esercizio per  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 e^{x_1^2} + x_3 e^{x_2 x_3} + x_1^2 + 2x_2 - 3x_1$ .

## 2.5 Estremanti relativi, punti critici, punti di sella

La seguente definizione è una naturale generalizzazione della definizione 3.3.1 in [Analisi A]:

**Definizione 2.5.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x^0 \in A$ . Diremo che  $x^0$  è un **punto di minimo (massimo) relativo** per  $f$  se esiste  $\delta \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $f(x^0) \leq f(x)$  (risp.  $f(x^0) \geq f(x)$ )  $\forall x \in A \cap B(x^0, \delta)$ .

Chiameremo **estremanti relativi** di  $f$  i suoi punti di massimo o minimo relativo.

Introduciamo ora la nozione di punto critico.

**Definizione 2.5.2** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^1(A)$ ,  $x^0 \in A$ . Diremo che  $A$  è in **punto critico** di  $f$  se  $\nabla f(x^0) = O$ .

Il seguente risultato costituisce una generalizzazione del teorema 3.3.1 in [Analisi A]:

**Teorema 2.5.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^1(A)$ ,  $x^0 \in A$ . Supponiamo che  $x^0$  sia un estremante relativo di  $f$ . Allora  $x^0$  è un punto critico di  $f$ .

*Dimostrazione* Si tratta di far vedere che, per ciascun  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $D_j f(x^0) = 0$ . Supponiamo, per fissare le idee, che  $x^0$  sia un punto di minimo relativo. Allora esiste  $r \in \mathbf{R}^+$ , tale che, se  $x \in A \cap B(x^0, r)$ ,  $f(x^0) \leq f(x)$ . Poiché  $A$  è aperto, non è restrittivo supporre che  $B(x^0, r) \subseteq A$ . Poniamo, per  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{cases} g_j : ]-r, r[ \rightarrow \mathbf{R}, \\ g_j(t) = f(x^0 + te^j), \end{cases}$$

con  $e^j$   $j$ -esimo elemento della base canonica di  $\mathbf{R}^n$ . Osserviamo che  $g_j$  è ben definita, perché, se  $t \in ]-r, r[$ ,  $x^0 + te^j \in B(x^0, r) \subseteq A$ . Inoltre, 0 è punto di minimo per  $g_j$ . Poiché  $g_j$  è derivabile in 0 e

$$g'_j(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te^j) - f(x^0)}{t} = D_j f(x^0),$$

applicando il teorema 3.3.1 in [Analisi A], concludiamo che  $D_j f(x^0) = 0$ .

□

**Osservazione 2.5.1** Il risultato del teorema 2.5.1 non è invertibile. In altre parole, un punto critico non è necessariamente un estremante relativo. Vediamone un paio di esempi.

Si consideri  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3$ . Allora 0 è un punto critico di  $f$  ( $f'(0) = 0$ ), ma non è un estremante relativo, perché, per ogni  $r \in \mathbf{R}^+$ ,  $\pm r/2 \in I(0, r)$  e

$$f(-r/2) = -r^3/8 < 0 = f(0) < r^3/8 = f(r/2).$$

Un altro esempio si ha ponendo

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2. \end{cases}$$

$(0, 0)$  è un punto critico di  $f$ , ma per ogni  $r \in \mathbf{R}^+$  i punti  $(r/2, 0)$  e  $(0, r/2)$  appartengono a  $B((0, 0), r)$  e si ha

$$f(0, -r/2) = -r^2/4 < 0 = f(0, 0) < r^2/4 = f(r/2, 0).$$

Dunque,  $(0, 0)$  non è un estremante relativo di  $f$ .

Data  $f \in C^1(A)$ , con  $A$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ , chiameremo **punti di sella** di  $f$  i suoi punti critici che non sono estremanti relativi. Nella parte successiva di questa sezione studieremo, utilizzando come strumento principale la formula di Taylor, i punti critici di una funzione, cercando ulteriori condizioni necessarie (oltre al risultato del teorema 2.5.1) e condizioni sufficienti affinché siano estremanti relativi.

Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^2(A)$ . Sia poi  $x^0 \in A$  un punto critico di  $f$ . Allora, dalla formula di Taylor, otteniamo, per  $x \in A$ ,

$$f(x) = f(x^0) + Q(x - x^0) + r(x), \quad (2.5.1)$$

con

$$\begin{cases} Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \\ Q(h_1, \dots, h_n) = (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f(x^0) h_i h_j, \end{cases} \quad (2.5.2)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{r(x)}{\|x - x^0\|^2} = 0. \quad (2.5.3)$$

La funzione  $Q$  definita in (2.5.2) è una forma quadratica, nel senso della prossima definizione.

**Definizione 2.5.3** Una **forma quadratica** in  $\mathbf{R}^n$  è una funzione polinomiale  $Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , della forma

$$Q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j,$$

con  $a_{ij} \in \mathbf{R}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ).

**Osservazione 2.5.2** Presentiamo qui alcune semplici osservazioni, riguardo alle forme quadratiche.

Prima di tutto, se  $Q$  è una forma quadratica in  $\mathbf{R}^n$ ,

$$Q(O) = Q(0, \dots, 0) = 0. \quad (2.5.4)$$

Inoltre, se  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$  e  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$Q(th) = t^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j = t^2 Q(h). \quad (2.5.5)$$

Infine, nella definizione 2.5.3, non è restrittivo supporre che, per  $1 \leq i, j \leq n$ , valga

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (2.5.6)$$

Qualora tale condizione non fosse soddisfatta, basterà sostituire  $a_{ij}$  e  $a_{ji}$  con  $(a_{ij} + a_{ji})/2$ .

Passiamo ora a definire alcune classi di forme quadratiche.

**Definizione 2.5.4** Sia  $Q$  una forma quadratica in  $\mathbf{R}^n$ . Diremo che:

- (I)  $Q$  è **semidefinita positiva** se  $Q(h) \geq 0 \forall h \in \mathbf{R}^n$ ;
- (II)  $Q$  è **semidefinita negativa** se  $Q(h) \leq 0 \forall h \in \mathbf{R}^n$ ;
- (III)  $Q$  è **definita positiva** se  $Q(h) > 0 \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ ;
- (IV)  $Q$  è **definita negativa** se  $Q(h) < 0 \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ .

**Esempio 2.5.1** Presentiamo alcuni esempi di forme quadratiche soddisfacenti le condizioni della definizione 2.5.4.

Sia

$$\begin{cases} Q_0 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ Q_0(h_1, h_2) = h_1^2. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Ovviamente,  $Q_0$  è semidefinita positiva.  $Q_0$  non è definita positiva, in quanto, se  $h_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $Q_0(0, h_2) = 0$ .

Sia

$$\begin{cases} Q_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ Q_1(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

È facile verificare che  $Q_1$  è definita positiva.

Sia

$$\begin{cases} Q_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ Q_2(h_1, h_2) = -h_1^2. \end{cases} \quad (2.5.9)$$

$Q_2$  è semidefinita negativa, ma non definita negativa.

Sia

$$\begin{cases} Q_3 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ Q_3(h_1, h_2) = -h_1^2 - h_2^2. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

$Q_3$  è definita negativa.

Sia

$$\begin{cases} Q_4 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ Q_4(h_1, h_2) = h_1 h_2. \end{cases} \quad (2.5.11)$$

$Q_4$  non è semidefinita, in quanto  $Q_4(1, 1) = 1 > 0$ ,  $Q_4(1, -1) = -1 < 0$ .

Vediamo ora il primo risultato che lega il segno di una forma quadratica al problema principale di questa sezione.

**Teorema 2.5.2** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^2(A)$ ,  $x^0 \in A$ . Allora:*

- (I) *se  $x^0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ , la forma quadratica  $Q$  definita in (2.5.2) è semidefinita positiva;*
- (II) *se  $x^0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ , la forma quadratica  $Q$  definita in (2.5.2) è semidefinita negativa.*

*Dimostrazione* Supponiamo, per fissare le idee, che  $x^0$  sia un punto di minimo relativo per  $f$ . Verifichiamo che

$$Q(h) \geq 0, \quad \forall h \in \mathbf{R}^n. \quad (2.5.12)$$

In base a (2.5.4), ci si può limitare al caso  $h \in \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ .

Sia  $r > 0$ , tale che  $B(x^0, r) \subseteq A$  e  $f(x^0) \leq f(x) \forall x \in B(x^0, r)$ . Poiché  $x^0$  è un punto critico di  $f$  (teorema 2.5.1),  $f$  ammette lo sviluppo di Taylor (2.5.1). Se  $t \in \mathbf{R}$  e  $|t| \|h\| < r$ , si ha allora

$$f(x^0 + th) = f(x^0) + Q(th) + r(x^0 + th) = f(x^0) + t^2 Q(h) + r(x^0 + th), \quad (2.5.13)$$

da cui, se  $t \in ]-r/\|h\|, r/\|h\|[\setminus\{0\}$ ,

$$Q(h) = (f(x^0 + th) - f(x^0))/t^2 - r(x^0 + th)/t^2. \quad (2.5.14)$$

Poiché  $f(x^0 + th) - f(x^0) \geq 0$ , da (2.5.14) segue,  $\forall t \in ]-r/\|h\|, r/\|h\|[\setminus\{0\}$ ,

$$Q(h) \geq -|r(x^0 + th)|/t^2 \quad (2.5.15)$$

D'altra parte,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(x^0 + th)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(x^0 + th)}{\|(x^0 + th) - x^0\|^2} \|h\|^2 = 0,$$

come conseguenza di (2.5.3). Sia allora  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ . Esiste  $\delta(\epsilon) \in \mathbf{R}^+$ , che possiamo supporre non superiore a  $r/\|h\|$ , tale che, se  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  e  $|t| < \delta(\epsilon)$ ,

$$|r(x^0 + th)|/t^2 < \epsilon. \quad (2.5.16)$$

Con questa scelta di  $t$ , da (2.5.15) otteniamo

$$Q(h) > -\epsilon \quad (2.5.17)$$

e, poiché  $\epsilon$  è un arbitrario elemento di  $\mathbf{R}^+$ , possiamo concludere che  $Q(h) \geq 0$ .

□

**Esempio 2.5.2** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^2(A)$ ,  $x^0 \in A$  tale che  $\nabla f(x^0) = O$  e la forma quadratica  $Q$  definita in (2.5.2) è semidefinita. Allora,  $x^0$  non è necessariamente un estremante relativo per  $f$ . Si consideri, in proposito, il seguente esempio: sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che  $x^0 = (0, 0)$  è un punto critico e che la forma quadratica  $Q$  soddisfa

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2, \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Dunque,  $Q$  è semidefinita positiva. Però  $(0, 0)$  non è un estremante relativo, perché,  $\forall r \in \mathbf{R}^+$ ,  $(0, \pm r/2) \in B(x^0, r)$  e si ha

$$f(0, -r/2) = -r^3/8 < 0 = f(0, 0) < r^3/8 = f(0, r/2).$$

Dunque, il fatto che  $\nabla f(x^0) = O$  e  $Q$  sia semidefinita sono condizioni necessarie, ma non sufficienti, affinché  $x^0$  sia un estremante relativo.

Presentiamo ora una condizione sufficiente per avere un estremante relativo.

**Teorema 2.5.3** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $f \in C^2(A)$ ,  $x^0 \in A$ . Allora:*

*(I) se  $x^0$  è un punto critico di  $f$  e la forma quadratica  $Q$  definita in (2.5.2) è definita positiva,  $x^0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ ;*

*(II) se  $x^0$  è un punto critico di  $f$  e la forma quadratica  $Q$  definita in (2.5.2) è definita negativa,  $x^0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ .*

*Dimostrazione* Verifichiamo solo (I). La dimostrazione di (II) è analoga. Utilizziamo, ancora una volta, lo sviluppo di Taylor (2.5.1). Cominciamo allora con l'osservare che esiste  $\nu \in \mathbf{R}^+$ , tale che

$$Q(h) \geq \nu \|h\|^2, \quad \forall h \in \mathbf{R}^n. \quad (2.5.18)$$

Infatti, poiché  $S := \{h \in \mathbf{R}^n : \|h\| = 1\}$  è chiuso e limitato e  $Q$  è continua, esiste

$$\nu := \min_S Q$$

e si ha  $\nu > 0$ , perché  $Q$  è definita positiva. Allora, se  $h \in \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ , da (2.5.5) segue

$$Q(h) = \|h\|^2 Q(h/\|h\|) \geq \nu \|h\|^2.$$

(2.5.18) è poi banalmente soddisfatta se  $h = O$ .

Da (2.5.3) ricaviamo invece che esiste  $\delta \in \mathbf{R}^+$ , che possiamo supporre tale che  $B(x^0, \delta) \subseteq A$ , tale che, se  $x \in B(x^0, \delta) \setminus \{x^0\}$ , vale

$$\frac{|r(x)|}{\|x - x^0\|^2} < \nu/2. \quad (2.5.19)$$

Allora, se  $x \in B(x^0, \delta) \setminus \{x^0\}$ , otteniamo da (2.5.18) e (2.5.19)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^0) + Q(x - x^0) + r(x) \\ &\geq f(x^0) + \nu \|x - x^0\|^2 - |r(x)| \\ &\geq f(x^0) + \nu \|x - x^0\|^2 - (\nu/2) \|x - x^0\|^2 \\ &= f(x^0) + (\nu/2) \|x - x^0\|^2 \\ &> f(x^0). \end{aligned}$$

Quindi  $x^0$  è un punto di minimo relativo.

□

**Osservazione 2.5.3** Dalla dimostrazione del teorema 2.5.3, si vede che vale, di fatto, un risultato più forte di quello dichiarato nell'enunciato: vale a dire, che esiste  $\delta \in \mathbf{R}^+$ , tale che, se  $x \in A \cap B(x^0, \delta)$  e  $x \neq x^0$ , si ha  $f(x^0) < f(x)$  (risp.  $f(x^0) > f(x)$ ). In tal caso, si dice che  $x^0$  è un **estremante relativo forte** di  $f$ .

**Osservazione 2.5.4** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4. \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che  $f$  ammette minimo e l'unico punto di minimo è  $(0, 0)$ . Come deve essere in base ai teoremi 2.5.1 e 2.5.2,  $(0, 0)$  è un punto critico e la forma quadratica  $Q$  definita in (2.5.2) ponendo  $x^0 = (0, 0)$ , che è

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2,$$

è semidefinita positiva. Tuttavia, non è definita positiva.

Questo esempio dimostra che le condizioni del teorema 2.5.3 sono sufficienti, ma non necessarie, per avere un estremante relativo.

I teoremi 2.5.2 e 2.5.3 pongono il problema di stabilire se un'assegnata forma quadratica sia definita o semidefinita. Noi ci limiteremo a considerare il caso  $n = 2$ . Il punto cruciale per caratterizzare in  $\mathbf{R}^2$  le forme quadratiche definite o semidefinite è riportato nel seguente elementare lemma, la cui dimostrazione lasciamo al lettore (vedi l'esercizio 2.5.1):

**Lemma 2.5.1** *Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  numeri reali,*

$$\begin{cases} P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ P(t) = \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma. \end{cases} \quad (2.5.20)$$

Allora:

- (I)  $P(t) \geq 0 \forall t \in \mathbf{R}$  se e solo se  $\alpha \geq 0, \gamma \geq 0, \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$ ;
- (II)  $P(t) \leq 0 \forall t \in \mathbf{R}$  se e solo se  $\alpha \leq 0, \gamma \leq 0, \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$ ;
- (III)  $P(t) > 0 \forall t \in \mathbf{R}$  se e solo se  $\alpha > 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ , oppure  $\alpha = \beta = 0, \gamma > 0$ ;
- (IV)  $P(t) < 0 \forall t \in \mathbf{R}$  se e solo se  $\alpha < 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ , oppure  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma < 0$ .

**Teorema 2.5.4** *Sia  $Q$  una forma quadratica in  $\mathbf{R}^2$ ,*

$$Q(h_1, h_2) = \alpha h_1^2 + 2\beta h_1 h_2 + \gamma h_2^2,$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  reali. Allora:

- (I)  $Q$  è semidefinita positiva se e solo se  $\alpha \geq 0, \gamma \geq 0, \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$ ;
- (II)  $Q$  è semidefinita negativa se e solo se  $\alpha \leq 0, \gamma \leq 0, \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$ ;
- (III)  $Q$  è definita positiva se e solo se  $\alpha > 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ ;
- (IV)  $Q$  è definita negativa se e solo se  $\alpha < 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ .

*Dimostrazione* Sia  $P$  la funzione polinomiale (2.5.20).

(I) Se  $Q$  è semidefinita positiva, si ha,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,

$$P(t) = Q(t, 1) \geq 0.$$

Dal lemma 2.5.1 segue  $\alpha \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta^2 - \alpha\gamma \leq 0$ . Supponiamo, viceversa che queste ultime condizioni siano soddisfatte. Allora,  $P(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbf{R}$ . Se  $h = (h_1, h_2)$  e  $h_2 \neq 0$ , si ha

$$Q(h_1, h_2) = h_2^2 Q(h_1/h_2, 1) = h_2^2 P(h_1/h_2) \geq 0.$$

Infine,  $\forall h_1 \in \mathbf{R}$ ,

$$Q(h_1, 0) = \alpha h_1^2 \geq 0.$$

Perciò, (I) è completamente dimostrato.

(II) può essere verificata analogamente a (I).

Proviamo (III). Se  $Q$  è definita positiva, si ha,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,

$$P(t) = Q(t, 1) > 0.$$

Dal lemma 2.5.1 segue  $\alpha > 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ , oppure  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma > 0$ . Da  $\alpha = 0$  segue  $Q(1, 0) = 0$ . Deve allora necessariamente valere  $\alpha > 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ . Supponiamo, viceversa che queste ultime condizioni siano soddisfatte. Allora,  $P(t) > 0 \ \forall t \in \mathbf{R}$ . Se  $h = (h_1, h_2)$  e  $h_2 \neq 0$ , si ha

$$Q(h_1, h_2) = h_2^2 Q(h_1/h_2, 1) = h_2^2 P(h_1/h_2) > 0.$$

Infine,  $\forall h_1 \in \mathbf{R}$ ,

$$Q(h_1, 0) = \alpha h_1^2$$

che è sempre non negativo e si annulla solo per  $h_1 = 0$ . Perciò, (III) è completamente dimostrato.

La prova di (IV) è analoga a quella di (III).

□

**Esercizio 2.5.1** Dimostrare il lemma 2.5.1.

**Esercizio 2.5.2** Con riferimento al teorema 2.5.4, verificare che (III) e (IV) possono essere modificati come segue:

- (III')  $Q$  è definita positiva se e solo se  $\gamma > 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ ;
- (IV')  $Q$  è definita negativa se e solo se  $\gamma < 0$  e  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ .

**Esercizio 2.5.3** Determinare e studiare i punti critici delle seguenti funzioni  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ :

- (I)  $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ ;
- (II)  $f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2)$ ;
- (III)  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1x_2)$ ;
- (IV)  $f(x_1, x_2) = \cos(x_1) \cosh(x_2)$ ;
- (V)  $f(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 - x_2^2$ ;
- (VI)  $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 - 2)$ ;
- (VII)  $f(x_1, x_2) = x_1x_2(x_1 - 1)$ ;
- (VIII)  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$ .

**Esercizio 2.5.4** Determinare e studiare i punti critici delle seguenti funzioni  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ :

- (I)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ;
- (II)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3$ .

**Esercizio 2.5.5** Siano  $I$  un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ ,  $f \in C^2(I)$ ,  $x_0 \in I$ . Provare quanto segue :

- (I) se  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ ,  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \geq 0$ ;
- (II) se  $x_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ ,  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \leq 0$ ;
- (III) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ ,  $x_0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ ;
- (IV) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$ ,  $x_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ .

## 2.6 Derivate di funzioni a valori vettoriali

Fino ad ora abbiamo considerato derivate solo di funzioni a valori in  $\mathbf{R}$ . Qui estenderemo alcune delle definizioni e dei risultati relativi al calcolo differenziale a funzioni a valori in  $\mathbf{R}^m$ .

Cominciamo con l'estendere la definizione 2.1.1 :

**Definizione 2.6.1** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $v \in \mathbf{R}^m$ ,  $x^0 \in A$ . Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Per  $t \in A_{x^0, v} \setminus \{0\}$ , poniamo

$$r_{x^0, v}(t) := \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}. \quad (2.6.1)$$

e supponiamo che  $0 \in D(A_{x^0, v})$ . Se esiste

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_{x^0, v}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}, \quad (2.6.2)$$

lo chiameremo **derivata di  $f$  rispetto al vettore  $v$  in  $x^0$**  e lo indicheremo con la notazione  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ .

Nel caso  $v = e^j$  ( $j$ -esimo elemento della base canonica di  $\mathbf{R}^n$ ), parleremo di **derivata parziale prima rispetto alla variabile  $x_j$**  e useremo le notazioni in (2.1.5).

**Osservazione 2.6.1** Sotto le ipotesi della definizione 2.6.1, se  $t \in A_{x^0, v} \setminus \{0\}$ , si ha

$$\frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \left( \frac{f_1(x^0 + tv) - f_1(x^0)}{t}, \dots, \frac{f_m(x^0 + tv) - f_m(x^0)}{t} \right).$$

Dunque, in base al teorema 1.3.2,  $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$  esiste se e solo se, per ciascun  $i = 1, \dots, m$ , esistono a valori reali le derivate  $\frac{\partial f_i}{\partial v}(x^0)$ . Si ha inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}(x^0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(x^0) \right). \quad (2.6.3)$$

In particolare, per  $j = 1, \dots, n$ ,

$$D_j f(x^0) = (D_j f_1(x^0), \dots, D_j f_m(x^0)). \quad (2.6.4)$$

Ad esempio, se

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ f(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1)x_2x_3, (1+x_3^2)^{x_2}), \end{cases}$$

si ha,  $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ ,

$$D_2 f(x) = (\sin(x_1)x_3, (1+x_3^2)^{x_2} \ln(1+x_3^2)).$$

Si possono definire senza difficoltà le derivate di ordine superiore di funzioni a valori vettoriali, ricalcando la definizione 2.3.1 :

**Definizione 2.6.2** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Poniamo

$$A_j := \{x \in A : \exists D_j f(x) \in \mathbf{R}^m\}.$$

Su  $A_j$  è definita la funzione  $D_j f$ , che associa a ogni elemento  $x$  di  $A_j$  la derivata  $D_j f(x)$ . Se  $x \in A_j$  e  $1 \leq i \leq n$ , può esistere la derivata  $D_i(D_j f)(x)$  di  $D_j f$  in  $x$ . Essa viene chiamata **derivata seconda di  $f$**

in  $x$  rispetto alle variabili  $x_i, x_j$  (nell'ordine) e viene indicata con uno dei simboli  $D_{ij}f(x)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  ( $D_j^2 f(x)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$  se  $i = j$ ).

Iterando il procedimento, si possono definire le derivate terze, quarte, ecc.. (o derivate di ordine 3, 4, ecc.) Dato  $k \in \mathbf{N}, j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ , non necessariamente a due a due distinti, porremo

$$D_{j_1 j_2 \dots j_k} f(x) = D_{j_1}(D_{j_2}(\dots(D_{j_k} f))\dots)(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x).$$

**Osservazione 2.6.2** Iterando le considerazioni contenute nell'osservazione 2.6.1, è facile verificare che la derivata  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x)$  esiste se e solo se esiste ciascuna delle derivate  $\frac{\partial^k f_1}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x), \dots, \frac{\partial^k f_m}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x)$ . Vale, inoltre,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x) = \left( \frac{\partial^k f_1}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x), \dots, \frac{\partial^k f_m}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x) \right). \quad (2.6.5)$$

La definizione di funzione di classe  $C^k$  a valori vettoriali ricalca quella data nel caso di funzioni a valori scalari (definizione 2.3.2):

**Definizione 2.6.3** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Diremo che  $f$  è di classe  $C^k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) se possiede a valori reali tutte le derivate parziali di ordine non superiore a  $k$  in ogni punto di  $A$  e tali derivate sono continue in  $A$ . Scriveremo, per indicare tale eventualità,  $f \in C^k(A; \mathbf{R}^m)$ . Se  $f \in C^k(A; \mathbf{R}^m)$  per ogni  $k \in \mathbf{N}$  (e quindi possiede derivate parziali continue di ogni ordine), scriveremo  $f \in C^\infty(A; \mathbf{R}^m)$ .

Dall'osservazione 2.6.2 e dai teoremi 1.4.2(I) e 2.3.2 segue subito il risultato:

**Teorema 2.6.1** Siano  $k, m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \forall x \in A$ . Allora

- (I)  $f \in C^k(A; \mathbf{R}^m)$  se e solo se ciascuna delle funzioni  $f_1, \dots, f_m$  appartiene a  $C^k(A)$ ;
- (II) se  $f, g \in C^k(A; \mathbf{R}^m)$  e  $c \in \mathbf{R}$ ,  $f + g, cf \in C^k(A; \mathbf{R}^m)$ ;
- (III) di conseguenza,  $C^k(A; \mathbf{R}^m)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$  con le solite operazioni di somma di funzioni e di moltiplicazione di una funzione per uno scalare.

Dati  $f \in C^1(A; \mathbf{R}^m)$  e  $x^0 \in A$ , introduciamo una matrice che rivestirà una certa importanza nel seguito.

**Definizione 2.6.4** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^m$ ,  $f \in C^1(A; \mathbf{R}^m)$ ,  $x^0 \in A$ . Chiamiamo **matrice jacobiana** di  $f$  in  $x^0$ , e indichiamo con la notazione  $J_f(x^0)$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} \quad (2.6.6)$$

Si tratta di una matrice costituita da  $m$  righe e  $n$  colonne. Osserviamo che, nel caso di  $f$  a valori scalari (vale a dire,  $m = 1$ ), la matrice  $J_f(x^0)$  coincide con il gradiente, scritto in forma di matrice riga  $1 \times n$ .

Concludiamo questa sezione esaminando il caso  $n = 1$ , che, come vedremo, è fisicamente assai importante. Solo in tale caso si può parlare di "derivata" (usando il singolare):

**Definizione 2.6.5** Siano  $m \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}$ ,  $t^0 \in A \cap D(f)$ . Sia poi  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Per  $t \in A \setminus \{t^0\}$ , poniamo

$$r_{x^0}(t) := \frac{f(t) - f(t^0)}{t - t^0}. \quad (2.6.7)$$

Se esiste

$$\lim_{t \rightarrow t^0} r_{x^0}(t) = \lim_{t \rightarrow t^0} \frac{f(t) - f(t^0)}{t - t^0}, \quad (2.6.8)$$

lo chiameremo **derivata di  $f$  in  $t^0$**  e lo indicheremo con una delle notazioni  $\frac{df}{dt}(x^0), f'(t^0), Df(t^0)$ . In tal caso, diremo che  $f$  è **derivabile in  $t^0$** .

**Osservazione 2.6.3** Con riferimento alla definizione 2.6.5, è appena il caso di osservare che, se  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ ,  $f$  è derivabile in  $t^0$  se e solo se ciascuna delle funzioni  $f_1, \dots, f_m$  è derivabile in  $t^0$ . In tal caso, si ha

$$f'(t^0) = (f'_1(t^0), \dots, f'_m(t^0)). \quad (2.6.9)$$

È poi possibile definire anche le derivate di ordine superiore di  $f$ . Lasciamo il compito al lettore, come semplice esercizio.

**Esercizio 2.6.1** Sia  $f : ]a_0, a_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , con  $-\infty \leq a_0 < a_1 < +\infty$ . Supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $]a_0, a_1[$ , continua in  $]a_0, a_1]$  e che valga

$$\lim_{t \rightarrow a_1^-} f'(t) = l,$$

con  $l \in \mathbf{R}^n$ . Dimostrare che  $f$  è derivabile in  $a_1$  e che vale  $f'(a_1) = l$ .

Sugg.: in base all'osservazione 2.6.3 e al teorema 1.3.2 (II), ragionando componente per componente ci si può ricondurre al caso  $n = 1$ . In tal caso, se  $t \in ]a_0, a_1[$ , applicando il teorema del valor medio, possiamo dire che esiste  $c(t) \in ]t, a_1[$ , tale che

$$\frac{f(t) - f(a_1)}{t - a_1} = f'(c(t)).$$

## 2.7 Derivate di funzioni composte ("chain rule")

In questa sezione, enunciamo e dimostriamo un teorema di derivazione di funzioni composte, che costituisce una generalizzazione del teorema 3.2.3 in [Analisi A].

**Teorema 2.7.1** Siano  $m$  e  $n$  naturali,  $A$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $B$  aperto in  $\mathbf{R}^m$ ,  $g \in C^1(A)$ ,  $f \in C^1(B; \mathbf{R}^n)$ , tale che  $f(B) \subseteq A$ . Allora:

- (I)  $g \circ f \in C^1(B)$ ;
- (II)  $\forall x \in B, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$D_i(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot D_i f(x) = \sum_{j=1}^n D_j g(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x). \quad (2.7.1)$$

*Dimostrazione* Sia  $x \in B$ . Fissiamo  $\rho \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $B_n(f(x), \rho) \subseteq A$ . Poichè  $f$  è continua, esiste  $\delta_1 \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $B_m(x, \delta_1) \subseteq B$  e, se  $y$  appartiene a tale palla,  $f(y) \in B_n(f(x), \rho)$ . Sia ora  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Se  $t \in \mathbf{R}$  e  $|t| < \delta_1$ , si ha

$$\|(x + te^i) - x\|_m = |t| < \delta_1.$$

Dunque,  $x + te^i \in B$  e  $f(x + te^i) \in B_n(f(x), \rho)$ . Poiché  $B_n(f(x), \rho)$  è convesso, il segmento  $[f(x), f(x + te^i)]$  è tutto contenuto in  $A$ . Dal teorema del valor medio (teorema 2.2.2), segue che esiste  $z(t) \in [f(x), f(x + te^i)]$ , tale che

$$g(f(x + te^i)) - g(f(x)) = \nabla g(z(t)) \cdot (f(x + te^i) - f(x)),$$

da cui, se  $|t| < \delta_1$  e  $t \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+te^i))-g(f(x))}{t} &= \nabla g(z(t)) \cdot \frac{f(x+te^i)-f(x)}{t} \\ &= [\nabla g(f(x)) + r(t)] \cdot [D_i f(x) + s(t)], \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

con

$$r(t) := \nabla g(z(t)) - \nabla g(f(x)), \quad (2.7.3)$$

$$s(t) := \frac{f(x+te^i) - f(x)}{t} - D_i f(x), \quad (2.7.4)$$

che implica, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &|\frac{g(f(x+te^i))-g(f(x))}{t} - \nabla g(f(x)) \cdot D_i f(x)| \\ &= |r(t) \cdot [D_i f(x) + s(t)] + [\nabla g(f(x)) + r(t)] \cdot s(t)| \\ &\leq \|r(t)\|_n (\|D_i f(x)\|_n + \|s(t)\|_n) + (\|\nabla g(f(x))\|_n + \|r(t)\|_n) \|s(t)\|_n. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

Siano ora  $\epsilon, \eta \in \mathbf{R}^+$ . Per definizione di derivata, esiste  $\delta_2 \in ]0, \delta_1]$ , tale che, se  $0 < |t| < \delta_2$ , si ha

$$\|s(t)\|_n < \eta. \quad (2.7.6)$$

Poiché poi  $g \in C^1(A)$ ,  $\nabla g \in C(A; \mathbf{R}^n)$ . Di conseguenza, esiste  $\delta_3 \in ]0, \rho]$ , tale che, se  $z \in \mathbf{R}^n$  e  $\|z - f(x)\|_n < \delta_3$ , si ha

$$\|\nabla g(z) - \nabla g(f(x))\|_n < \eta. \quad (2.7.7)$$

Essendo  $f$  continua, esiste  $\delta_4 \in ]0, \delta_1]$ , tale che, se  $y \in \mathbf{R}^m$  e  $\|y - x\|_m < \delta_4$ , si ha

$$\|f(y) - f(x)\|_n < \delta_3. \quad (2.7.8)$$

Sia allora  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , con  $|t| < \delta_4$ . Segue che

$$\|(x + te^i) - x\|_m < \delta_4 \quad (2.7.9)$$

e quindi

$$\|f(x + te^i) - f(x)\|_n < \delta_3, \quad (2.7.10)$$

da cui, essendo  $z(t) \in [f(x), f(x + te^i)]$ , vale anche

$$\|z(t) - f(x)\|_n < \delta_3, \quad (2.7.11)$$

e, di conseguenza, per (2.7.7),

$$\|r(t)\|_n < \eta. \quad (2.7.12)$$

Perciò , se  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  e  $|t| < \max\{\delta_2, \delta_4\}$ , da (2.7.5) otteniamo

$$\left| \frac{g(f(x+te^i)) - g(f(x))}{t} - \nabla g(f(x)) \cdot D_i f(x) \right| \leq \eta(\|D_i f(x)\|_n + \|\nabla g(f(x))\|_n + 2\eta). \quad (2.7.13)$$

Se scegliamo  $\eta$  in modo che quest'ultima espressione sia non superiore a  $\epsilon$ , otteniamo che, se  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  e  $|t| < \max\{\delta_2, \delta_4\}$ , vale

$$\left| \frac{g(f(x+te^i)) - g(f(x))}{t} - \nabla g(f(x)) \cdot D_i f(x) \right| < \epsilon.$$

Con ciò , la dimostrazione è conclusa.

La formula (2.7.1) consente poi di dire, utilizzando i teoremi 1.4.3 (II) e 1.4.2 (II), che  $D_i(g \circ f)$  è continua.

Dunque, il teorema è completamente dimostrato.

□

**Esempio 2.7.1** Siano

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ f(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \end{cases} \quad (2.7.14)$$

$g \in C^1(\mathbf{R}^2)$ . Allora, applicando il teorema 2.7.1, otteniamo che,  $\forall(\rho_0, \theta_0) \in \mathbf{R}^2$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0) &= \nabla g(f(\rho_0, \theta_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0) \\ &= D_1 g(\rho_0 \cos(\theta_0), \rho_0 \sin(\theta_0)) \cos(\theta_0) + D_2 g(\rho_0 \cos(\theta_0), \rho_0 \sin(\theta_0)) \sin(\theta_0). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0) &= \nabla g(f(\rho_0, \theta_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0) \\ &= -D_1 g(\rho_0 \cos(\theta_0), \rho_0 \sin(\theta_0)) \rho_0 \sin(\theta_0) \\ &\quad + D_2 g(\rho_0 \cos(\theta_0), \rho_0 \sin(\theta_0)) \rho_0 \cos(\theta_0). \end{aligned}$$

Dal teorema 2.7.1, utilizzando il teorema 2.6.1, segue facilmente il seguente

**Corollario 2.7.1** *Siano  $m, n, p$  naturali,  $A$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $B$  aperto in  $\mathbf{R}^m$ ,  $g \in C^1(A; \mathbf{R}^p)$ ,  $f \in C^1(B; \mathbf{R}^n)$ , tale che  $f(B) \subseteq A$ . Allora:*

- (I)  $g \circ f \in C^1(B; \mathbf{R}^p)$ ;

(II)  $\forall x \in B, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall l \in \{1, \dots, p\}$ , si ha

$$D_i(g_l \circ f)(x) = \nabla g_l(f(x)) \cdot D_i f(x) = \sum_{j=1}^n D_j g_l(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x). \quad (2.7.15)$$

Quindi,

$$J_{g \circ f}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n D_j g_1(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x) & \dots & \sum_{j=1}^n D_j g_1(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n D_j g_p(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x) & \dots & \sum_{j=1}^n D_j g_p(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.7.16)$$

**Osservazione 2.7.1** Il risultato del teorema 2.7.1 si può iterare, nel senso che, se  $f \in C^k(B; \mathbf{R}^n)$  e  $g \in C^k(A)$ , allora  $g \circ f \in C^k(B)$ . Supponiamo, per esempio,  $k = 2$ . Per  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$  e  $x \in B$ , si ha

$$D_{i_1}(g \circ f)(x) = D_1 g(f(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}(x) + \dots + D_n g(f(x)) \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_1}}(x),$$

da cui

$$\begin{aligned} D_{i_2 i_1}(g \circ f)(x) &= [\nabla(D_1 g)(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x)] \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}}(x) + \dots \\ &\quad + [\nabla(D_n g)(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x)] \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_2}}(x) + \dots + D_1 g(f(x)) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x) \\ &\quad + \dots + D_n g(f(x)) \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x). \end{aligned}$$

**Esercizio 2.7.1** Siano

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin(\theta) \cos(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\theta)), \end{cases}$$

$g \in C^1(\mathbf{R}^3)$ . Calcolare le derivate parziali del primo ordine di  $g \circ f$ .

Ripetere l'esercizio, prendendo

$$f(\rho, \theta, \zeta) := (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \zeta).$$

**Esercizio 2.7.2** Sia  $g \in C^2(\mathbf{R}^3)$ . Calcolare le derivate parziali del secondo ordine di  $g \circ f$ , con  $f$  come nell'esercizio 2.7.1.

## 2.8 Teorema di Dini, invertibilità locale, moltiplicatori di Lagrange

In questa sezione conclusiva del capitolo sul calcolo differenziale, vogliamo presentare, limitandoci a dare solo qualche indicazione riguardo alle dimostrazioni, alcuni risultati sulla descrizione locale dell'insieme dei punti in cui si annulla una certa funzione (teorema di Dini, teorema di invertibilità locale). Vogliamo inoltre presentare un importante teorema su estremanti relativi in corrispondenza di punti di frontiera (teorema dei moltiplicatori di Lagrange). Ricordiamo che nella sezione 2.5 abbiamo considerato solo estremanti relativi in punti interni al dominio.

Cominciamo allora con l'esaminare alcuni esempi di insiemi di punti in cui si annulla una certa funzione.

**Esempio 2.8.1** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3, \end{cases} \quad (2.8.1)$$

con  $a_j \in \mathbf{R}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Sia

$$V := \{x \in \mathbf{R}^2 : f(x) = 0\}. \quad (2.8.2)$$

Allora, se  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ ,  $V$  è una retta in  $\mathbf{R}^2$ . Se, ad esempio,  $a_2 \neq 0$ ,  $V$  coincide con il grafico della funzione

$$\begin{cases} \phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ \phi(x_1) = -a_2^{-1}(a_1 x_1 + a_3). \end{cases}$$

Se invece  $a_1 = a_2 = 0$ ,

$$V = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a_3 \neq 0, \\ \mathbf{R}^2 & \text{se } a_3 = 0. \end{cases}$$

In parole povere, possiamo dire che, nel caso  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ ,  $V$  è un oggetto "unidimensionale", nel senso che coincide col grafico della funzione di una variabile. Ciò non accade se  $(a_1, a_2) = (0, 0)$ . Osserviamo che

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \mathbf{R}^2$  e che, nel caso  $a_1 \neq 0$ ,  $V$  può essere pensato come il grafico di una funzione della variabile  $x_2$ , mentre nel caso  $a_2 \neq 0$ ,  $V$  può essere pensato come il grafico di una funzione della variabile  $x_1$ . Nel primo caso, si usa dire che è possibile "esplorare"  $x_1$  in funzione di  $x_2$ , viceversa nel secondo caso.

**Esempio 2.8.2** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4, \end{cases} \quad (2.8.3)$$

con  $a_j \in \mathbf{R}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Sia

$$V := \{x \in \mathbf{R}^3 : f(x) = 0\}. \quad (2.8.4)$$

Allora, se  $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ ,  $V$  è un piano in  $\mathbf{R}^3$ . Se, ad esempio,  $a_3 \neq 0$ ,  $V$  coincide con il grafico della funzione

$$\begin{cases} \phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ \phi(x_1, x_2) = -a_3^{-1}(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4). \end{cases}$$

Se invece  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ,

$$V = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a_4 \neq 0, \\ \mathbf{R}^3 & \text{se } a_4 = 0. \end{cases}$$

Dunque, nel caso  $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ ,  $V$  è un oggetto "bidimensionale", nel senso che coincide col grafico di una funzione di due variabili. Osserviamo ancora che

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \mathbf{R}^3$  e che, nel caso  $a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \neq 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) si può "esplicitare"  $x_j$  in funzione delle altre due variabili.

**Esempio 2.8.3** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14}, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24}, \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.8.5)$$

con  $a_{ij} \in \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ). Sia

$$V := \{x \in \mathbf{R}^3 : f(x) = 0\}. \quad (2.8.6)$$

Consideriamo la matrice

$$M := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.8.7)$$

Allora, se il rango di  $M$  è massimo ( $= 2$ ),  $V$  è una retta in  $\mathbf{R}^3$ . Per verificarlo, supponiamo, ad esempio, che il minore  $M'$  di  $M$  costituito dalle ultime due righe e colonne abbia determinante diverso da 0, vale a dire

$$\det(M') = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.8.8)$$

Ricordiamo che (2.8.8) implica che  $M'$  è invertibile. Sia  $B$  la sua matrice inversa. Scriviamo il sistema  $f(x) = 0$  nella forma

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = -a_{11}x_1 - a_{14}, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = -a_{21}x_1 - a_{24}. \end{cases} \quad (2.8.9)$$

Sia

$$B := \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.8.10)$$

Allora,  $\forall x_1 \in \mathbf{R}$ , il sistema (2.8.9) ha un'unica soluzione  $(x_2, x_3)$ : si avrà

$$\begin{cases} x_2 = -(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 - b_{11}a_{14} - b_{12}a_{24}, \\ x_3 = -(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 - b_{21}a_{14} - b_{22}a_{24}. \end{cases} \quad (2.8.11)$$

Se invece la matrice  $M$  non ha rango massimo, l'insieme delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 0$  non è una retta. Per fissare le idee consideriamo il caso in cui il rango di  $M$  è 1. Supponiamo che valgano, ad esempio,

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \neq (0, 0, 0), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) = \rho(a_{11}, a_{12}, a_{13}),$$

con  $\rho \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Allora è facile verificare che

$$V = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a_{24} \neq \rho a_{14}, \\ \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbf{R}^3 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14} = 0\} & \text{se } a_{24} = \rho a_{14}. \end{cases}$$

Lasciamo al lettore il problema della determinazione di  $V$  nei vari casi in cui  $M$  non ha rango massimo (vedi l'esercizio 2.8.1). Osserviamo, infine che la matrice  $M$  è la matrice jacobiana di  $f$  per ogni  $x \in \mathbf{R}^3$ .

**Osservazione 2.8.1** Gli esempi 2.8.1-2.8.3 mostrano che, almeno nei casi trattati, se  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ; con  $m, n$  naturali e  $m < n$ , nel caso in cui la matrice jacobiana di  $f$  ha rango massimo, l'insieme  $V := \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = 0\}$  ha una struttura  $n-m$ -dimensionale. In ciascuno dei casi considerati, la matrice jacobiana era la stessa per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$ . Il prossimo teorema 2.8.1 è applicabile a funzioni ben più generali di quelle considerate negli esempi e, mostra, che almeno localmente, qualcosa del genere continua a valere.

**Teorema 2.8.1 (di Dini)** Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ , con  $m < n$ ,  $A$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(A; \mathbf{R}^m)$ . Siano poi  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-m}^0, x_{n-m+1}^0, \dots, x_n^0) \in A$ , tale che  $f(x^0) = O$ . Supponiamo che la matrice jacobiana  $J_f(x^0)$  abbia rango massimo ( $= m$ ) e che il minore costituito dalle ultime  $m$  righe e colonne abbia determinante diverso da 0. Allora esistono  $A_1$  e  $A_2$  aperti in  $\mathbf{R}^{n-m}$  e  $\mathbf{R}^m$  rispettivamente, tali che:

- (I)  $(x_1^0, \dots, x_{n-m}^0) \in A_1$ ,  $(x_{n-m+1}^0, \dots, x_n^0) \in A_2$ ;
- (II)  $A_1 \times A_2 \subseteq A$ ;
- (III)  $\forall (x_1, \dots, x_{n-m}) \in A_1$  esiste unico

$$\phi(x_1, \dots, x_{n-m}) = (\phi_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_{n-m})) \in A_2$$

tale che

$$f(x_1, \dots, x_{n-m}, \phi_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_{n-m})) = O;$$

(IV) la funzione  $\phi$  è di classe  $C^1$  e, se  $f \in C^k(A; \mathbf{R}^m)$  ( $k \in \mathbf{N}$ ),  $\phi \in C^k(A_1; \mathbf{R}^m)$ .

*Idea della dimostrazione* Presentiamo alcuni argomenti che rendono "plausibile" il risultato.

Consideriamo l'equazione

$$f(x) = 0. \quad (2.8.12)$$

Ciascuna delle componenti  $f_1, \dots, f_m$  di  $f$  ammette il seguente sviluppo di Taylor al primo ordine con punto iniziale  $x^0$ :

$$\begin{aligned} & f_i(x_1, \dots, x_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n) \\ &= D_1 f_i(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_{n-m} f_i(x^0)(x_{n-m} - x_{n-m}^0) \\ &+ D_{n-m+1} f_i(x^0)(x_{n-m+1} - x_{n-m+1}^0) + \dots + D_n f_i(x^0)(x_n - x_n^0) + r_i(x), \end{aligned}$$

con

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{r_i(x)}{\|x - x^0\|_n} = 0.$$

Allora possiamo scrivere il sistema (2.8.12) nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{n-m+1} f_1(x^0)(x_{n-m+1} - x_{n-m+1}^0) + \dots + D_n f_1(x^0)(x_n - x_n^0) \\ = -D_1 f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) - \dots - D_{n-m} f_1(x^0)(x_{n-m} - x_{n-m}^0) - r_1(x), \\ \dots \\ D_{n-m+1} f_m(x^0)(x_{n-m+1} - x_{n-m+1}^0) + \dots + D_n f_m(x^0)(x_n - x_n^0) \\ = -D_1 f_m(x^0)(x_1 - x_1^0) - \dots - D_{n-m} f_m(x^0)(x_{n-m} - x_{n-m}^0) - r_m(x). \end{array} \right. \quad (2.8.13)$$

Per ipotesi, la matrice

$$M := \begin{pmatrix} D_{n-m+1}f_1(x^0) & \dots & D_n f_1(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{n-m+1}f_m(x^0) & \dots & D_n f_m(x^0) \end{pmatrix}. \quad (2.8.14)$$

è invertibile. Indichiamo con  $B$  la sua inversa. Sia

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

In (2.8.13) trascuriamo i "resti"  $r_1, \dots, r_m$ . Allora il sistema è univocamente risolubile e otteniamo facilmente

$$\begin{aligned} x_{n-m+1} &\cong x_{n-m+1}^0 - b_{11}[D_1 f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_{n-m} f_1(x^0) \\ &\quad \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)] \dots - b_{1m}[D_1 f_m(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots \\ &\quad + D_{n-m} f_m(x^0) \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)], \\ &\dots \\ x_n &\cong x_n^0 - b_{m1}[D_1 f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_{n-m} f_1(x^0) \\ &\quad \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)] \dots - b_{mm}[D_1 f_m(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots \\ &\quad + D_{n-m} f_m(x^0) \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)]. \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

Abbiamo ottenuto, dunque,

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, \dots, x_m) &\cong x_{n-m+1}^0 - b_{11}[D_1 f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_{n-m} f_1(x^0) \\ &\quad \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)] \dots - b_{1m}[D_1 f_m(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots \\ &\quad + D_{n-m} f_m(x^0) \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)], \\ &\dots \\ \phi_{n-m}(x_1, \dots, x_m) &\cong x_n^0 - b_{m1}[D_1 f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_{n-m} f_1(x^0) \\ &\quad \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)] \dots - b_{mm}[D_1 f_m(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots \\ &\quad + D_{n-m} f_m(x^0) \times (x_{n-m} - x_{n-m}^0)]. \end{aligned} \quad (2.8.16)$$

Naturalmente, l'argomento presentato non è rigoroso, perché abbiamo trascurato i "resti"  $r_1, \dots, r_m$ . Tuttavia, se  $\|x - x^0\|_n$  è "piccola", tale argomento risulta plausibile. Questo spiega anche perché non ci si può aspettare (in generale) una rappresentazione di  $\{x \in: f(x) = 0\}$  nella forma

$$\begin{aligned} x_{n-m+1} &= \phi_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \\ &\dots \\ x_n &= \phi_m(x_1, \dots, x_{n-m}). \end{aligned}$$

che sia globale.  $\square$

**Osservazione 2.8.2** Con riferimento all'enunciato del teorema 2.8.1, chiaramente il minore costituito dalle ultime  $m$  colonne non svolge alcun ruolo privilegiato: qualora uno qualunque dei minori costituiti da  $m$  colonne di  $J_f(x^0)$  abbia determinante diverso da 0, si possono "esplicitare" localmente le variabili corrispondenti in funzione delle altre.

**Esempio 2.8.4** Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ . Se

$$x^0 := (0, 0, 1),$$

si ha  $f(x^0) = 0$ . Inoltre,

$$J_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha rango massimo ( $= 1$ ). La sottomatrice (2) è, ovviamente, invertibile.

Dunque, il teorema di Dini è applicabile: esistono  $A_1$  e  $A_2$  aperti in  $\mathbf{R}^2$  e  $\mathbf{R}$  rispettivamente, tali che:

- (I)  $(0, 0) \in A_1$ ,  $1 \in A_2$ ;
- (II)  $\forall (x_1, x_2) \in A_1$  esiste unico  $\phi(x_1, x_2) \in A_2$  tale che

$$x_1^2 + x_2^2 + \phi(x_1, x_2)^2 - 1 = 0.$$

In effetti, se poniamo

$$A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$A_2 = \mathbf{R}^+,$$

$$\begin{cases} \phi : A_1 \rightarrow \mathbf{R}, \\ \phi(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \end{cases}$$

è facile verificare che  $\forall (x_1, x_2) \in A_1$  esiste unico  $x_3 \in A_2$  tale che

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

e  $x_3 = \phi(x_1, x_2)$ . Osserviamo che, se  $(x_1, x_2) \in A_1$ ,  $(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))$  non è l'unico punto della forma  $(x_1, x_2, x_3)$  in  $\mathbf{R}^3$  che annulla  $f$ : c'è anche  $(x_1, x_2, -\phi(x_1, x_2))$ . Si veda, in proposito, la figura 2.1.

Nel teorema di Dini si considerano funzioni da un aperto di  $\mathbf{R}^n$  a  $\mathbf{R}^m$ , con  $m < n$ . Vediamo adesso il così detto "teorema di invertibilità locale", in cui  $m = n$ .

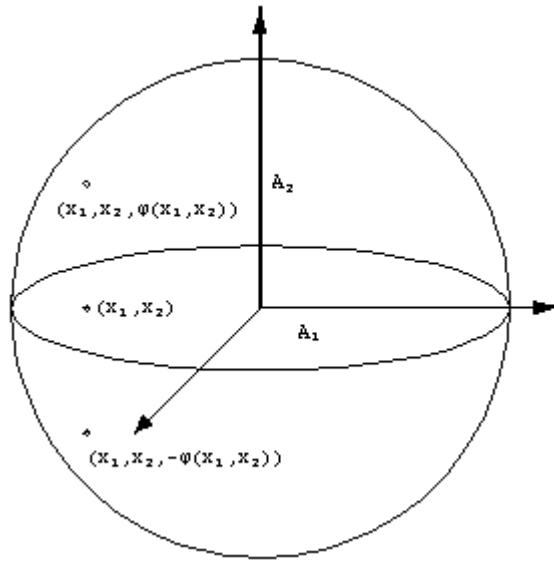


Figura 2.1

**Teorema 2.8.2** (*di invertibilità locale*) Siano  $A$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(A, \mathbf{R}^n)$ ,  $x^0 \in A$ . Supponiamo che la matrice jacobiana  $J_f(x^0)$  abbia determinante diverso da 0. Allora esistono  $A_1$  e  $A_2$  aperti in  $\mathbf{R}^n$ , tali che:

- (I)  $A_1 \subseteq A$ ,  $x^0 \in A_1$ ,  $f(x^0) \in A_2$ ;
- (II) se  $g := f|_{A_1}$ ,  $g$  è una biiezione tra  $A_1$  e  $A_2$ ;
- (III)  $g^{-1} : A_2 \rightarrow A_1$  è di classe  $C^1$  e, se  $f \in C^k(A; \mathbf{R}^n)$  ( $k \geq 1$ ), anche  $g^{-1}$  è di classe  $C^k$ .

**Esempio 2.8.5** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ f(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)). \end{cases} \quad (2.8.17)$$

$\forall(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2$ , si ha

$$J_f(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Quindi il determinante di  $J_f(\rho, \theta)$  vale  $\rho$  ed è diverso da 0 se  $\rho \neq 0$ . Sia poi

$$x^0 = (1, \pi/2). \quad (2.8.18)$$

Allora  $f(x^0) = (0, 1)$ . Poniamo

$$A_1 := (1/2, 2) \times (0, \pi), \quad (2.8.19)$$

$$A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 1/4 < x_1^2 + x_2^2 < 4, x_2 > 0\}. \quad (2.8.20)$$

Poniamo

$$g := f|_{A_1}. \quad (2.8.21)$$

Allora è facile verificare (vedi l'esercizio 2.8.2) che  $g$  è una biiezione tra  $A_1$  e  $A_2$  e che si ha

$$\begin{cases} g^{-1} : A_2 \rightarrow A_1, \\ g^{-1}(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arccos(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}})). \end{cases} \quad (2.8.22)$$

Si osservi che la funzione  $f$  non è globalmente iniettiva. Per esempio, l'equazione

$$f(\rho, \theta) = (0, 1)$$

ha infinite soluzioni in  $\mathbf{R}^2$ , date dalle coppie  $(1, \pi/2 + 2k\pi)$ , con  $k$  intero arbitrario.

Nella sezione 2.5 abbiamo dato la definizione di estremante relativo per  $f : A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  (definizione 2.5.1). Abbiamo poi studiato il caso di un estremante relativo in un insieme aperto. Vogliamo ora presentare un importante risultato che riguarda estremamnti relativi in insiemi non aperti, ma che sono definibili come l'insieme degli zeri di opportune funzioni.

**Teorema 2.8.3** (*dei moltiplicatori di Lagrange*) *Siano  $m$  e  $n$  naturali con  $m < n$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  aperto,  $g \in C^1(A; \mathbf{R}^m)$ ,  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)) \forall x \in A$ ,  $f \in C^1(A)$ . Sia*

$$V := \{x \in A : g(x) = O\} \quad (2.8.23)$$

*Supponiamo che,  $\forall x \in V$  la matrice jacobiana  $J_g(x)$  abbia rango massimo ( $= m$ ).*

*Allora, se  $x^0 \in V$  è un estremante relativo per  $f|_V$ ,  $\nabla f(x^0)$  è combinazione lineare dei vettori  $\nabla g_1(x^0), \dots, \nabla g_m(x^0)$ .*

**Osservazione 2.8.3** L'insieme  $V$  definito in (2.8.23) è un oggetto " $n - m$ -dimensionale", nel senso del teorema di Dini. Infatti, il teorema è applicabile in corrispondenza di ogni  $x \in V$ .

La tesi del teorema 2.8.3 implica l'esistenza di numeri reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , tali che

$$\nabla f(x^0) = \lambda_1 \nabla g_1(x^0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x^0). \quad (2.8.24)$$

Questi numeri reali vengono chiamati *moltiplicatori di Lagrange*, da cui la denominazione del teorema.

**Dimostrazione parziale del teorema 2.8.3** Verifichiamo la tesi del teorema sotto le seguenti ulteriori ipotesi:  $A = \mathbf{R}^3$ ,

$$\begin{cases} g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - h_1(x_1), x_3 - h_2(x_1)), \end{cases}$$

con  $h_1, h_2 \in C^1(\mathbf{R})$ . Dunque,

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_2 = h_1(x_1), x_3 = h_2(x_1)\}.$$

Per semplificare ulteriormente il discorso, supponiamo che  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  sia un punto di minimo per  $f|_V$ , con  $f \in C^1(\mathbf{R}^3)$ .

Osserviamo che,  $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ , si ha

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} -h'_1(x_1) & 1 & 0 \\ -h'_2(x_1) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $J_g(x)$  ha rango 2 in ogni punto di  $\mathbf{R}^3$ . Poniamo

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 - h_1(x_1),$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - h_2(x_1).$$

Avremo allora

$$\nabla g_1(x^0) = (-h'_1(x_1^0), 1, 0), \quad (2.8.25)$$

$$\nabla g_2(x^0) = (-h'_2(x_1^0), 0, 1). \quad (2.8.26)$$

Definiamo

$$\begin{cases} \phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ \phi(t) = f(t, h_1(t), h_2(t)). \end{cases}$$

Allora, per il teorema 2.7.1,  $\phi \in C^1(\mathbf{R})$  ed è facile verificare che, se  $x^0$  è punto di minimo per  $f|_V$ , allora  $x_1^0$  è punto di minimo per  $\phi$ . Dal teorema 3.3.1 in [Analisi A] segue che

$$\phi'(x_1^0) = 0. \quad (2.8.27)$$

Applicando la "chain rule", da (2.8.27) si ottiene (tenendo conto che  $x_2^0 = h_1(x_1^0)$  e  $x_3^0 = h_2(x_1^0)$ )

$$D_1f(x^0) + D_2f(x^0)h'_1(x_1^0) + D_3f(x^0)h'_2(x_1^0) = 0. \quad (2.8.28)$$

(2.8.28), (2.8.25), (2.8.26) implicano

$$\nabla f(x^0) = D_2f(x^0)\nabla g_1(x^0) + D_3f(x^0)\nabla g_2(x^0),$$

da cui la conclusione.  $\square$

**Osservazione 2.8.4** Con riferimento alle ipotesi del teorema 2.8.3, se  $x^0$  appartiene a  $V$  e  $\nabla f(x^0)$  è combinazione lineare di  $\nabla g_1(x^0), \dots, \nabla g_m(x^0)$ ,  $x^0$  non è necessariamente un estremante relativo per  $f|_V$ . Consideriamo, in proposito, il seguente esempio.

Siano  $A = \mathbf{R}^2$ ,  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^3$ ,  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x_1, x_2) = x_2$ . Allora

$$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}$$

e  $\nabla g(x_1, x_2) = (0, 1) \forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ . Si ha  $\nabla f(0, 0) = O$ , da cui

$$\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$$

se  $\lambda = 0$ . Tuttavia,  $(0, 0)$  non è un estremante relativo per  $f|_V$ . Infatti,  $\forall \delta \in \mathbf{R}^+$ , i punti  $(\pm \delta/2, 0)$  appartengono a  $B_\delta(0, 0) \cap V$  e

$$-\delta^3/8 = f(-\delta/2, 0) < 0 = f(0, 0) < \delta^3/8 = f(\delta/2, 0).$$

**Esempio 2.8.6** Siano

$$V := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}, \quad (2.8.29)$$

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2. \quad (2.8.30)$$

$f$  è continua e  $V$  è chiuso e limitato. Dunque  $f$  ammette minimo e massimo in  $B$ . Per determinarli, poniamo

$$\begin{cases} g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1. \end{cases} \quad (2.8.31)$$

$\mathbf{R}^2$  è aperto,  $V = \{x \in \mathbf{R}^2 : g(x) = 0\}$ . Inoltre,  $\nabla g(x) = 2x \forall x \in \mathbf{R}^2$ . Poiché  $O \notin V$ , le ipotesi del teorema dei moltiplicatori di Lagrange sono

tutte soddisfatte. Di conseguenza, se  $x = (x_1, x_2)$  è un estremante relativo per  $f|_V$ , esiste  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tale che

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x), \quad (2.8.32)$$

vale a dire,

$$(x_2, x_1) = 2\lambda(x_1, x_2).$$

Dunque  $(x_1, x_2, \lambda)$  è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_2 = 2\lambda x_1, \\ x_1 = 2\lambda x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (2.8.33)$$

(2.8.33) ammette le soluzioni  $(x_1, x_2, \lambda)$  seguenti:

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/2), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1/2),$$

$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/2), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1/2).$$

Si ha

$$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2,$$

$$f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/2.$$

Poiché i punti di massimo e di minimo per  $f|_V$  sono necessariamente tra quelli trovati, ne deduciamo che  $\min_V f = -1/2$  e i punti di minimo sono  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  e  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ , mentre  $\max_V f = 1/2$  e i punti di massimo sono  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  e  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ .

Osserviamo, infine, che  $V$  è connesso per archi. Dal teorema di Bolzano (teorema 1.5.2), sappiamo che  $f(V)$  è un intervallo. Concludiamo allora che

$$f(V) = [-1/2, 1/2].$$

**Esempio 2.8.7** Siano

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x_2 \leq x_1^4 \leq 1\},$$

$$\begin{cases} f : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1x_2^2 - x_2. \end{cases}$$

(si veda la figura 2.2). Determiniamo  $f(A)$ .

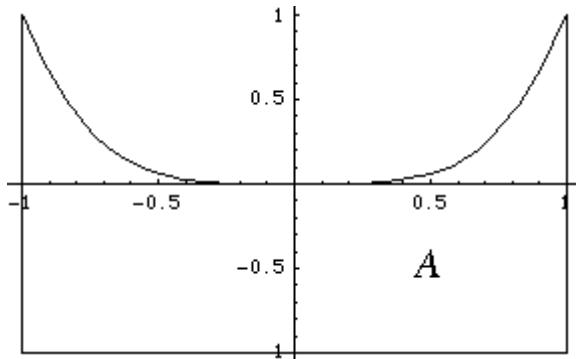


Figura 2.2

$A$  è chiuso, limitato, connesso per archi,  $f$  è continua. Per i teoremi 1.4.4 e 1.5.2,

$$f(A) = [\min_A f, \max_A f].$$

Eventuali punti di massimo o minimo in  $\mathring{A}$  sono punti critici di  $f$ . Inoltre,

$$\mathring{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < x_1^4\}.$$

Dobbiamo allora studiare il sistema di equazioni e disequazioni

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = (0, 0), \\ -1 < x_1 < 1, \\ -1 < x_2 < x_1^4, \end{cases}$$

cioè ,

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = 0, \\ -4x_1x_2 - 1 = 0, \\ -1 < x_1 < 1, \\ -1 < x_2 < x_1^4, \end{cases} \quad (2.8.34)$$

che ammette l'unica soluzione

$$(1/2, -1/2). \quad (2.8.35)$$

Consideriamo ora eventuali punti di massimo o minimo in  $Fr(A)$ . Decomponiamo la frontiera nell'unione dei seguenti insiemi  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , con

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 - x_1^4 = 0\}, \\ B_2 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_2 < 1, x_1 = 1\}, \\ B_3 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_2 < 1, x_1 = -1\}, \\ B_4 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = -1\}, \\ B_5 &:= \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}. \end{aligned} \quad (2.8.36)$$

Osserviamo adesso che a  $B_1$  è applicabile il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Infatti, se poniamo

$$A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_1 < 1\},$$

$A_1$  è aperto e

$$B_1 = \{(x_1, x_2) \in A_1 : g_1(x_1, x_2) = 0\},$$

con  $g_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^4$ . Inoltre, essendo

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = (-4x_1^3, 1) \neq (0, 0),$$

la matrice  $J_{g_1}(x)$  ha rango 1  $\forall x \in \mathbf{R}^2$ . Allora, in base al teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se  $x \in B_1$  è punto di massimo o minimo per  $f$ , esiste  $\lambda \in \mathbf{R}$  tale che

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g_1(x). \quad (2.8.37)$$

Dobbiamo allora studiare, il seguente sistema, che esprime (2.8.37), assieme al fatto che  $x \in B_1$ :

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = -4\lambda x_1^3, \\ -4x_1 x_2 - 1 = \lambda, \\ x_2 = x_1^4, \\ -1 < x_1 < 1, \end{cases} \quad (2.8.38)$$

che ammette l'unica soluzione

$$x_1 = x_2 = 0, \lambda = -1. \quad (2.8.39)$$

Eventuali punti di massimo o minimo in  $B_j$  ( $2 \leq j \leq 4$ ) possono essere ricercati con lo stesso procedimento seguito per  $B_1$ : basterà porre

$$A_2 = A_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_2 < 1\},$$

$$A_4 := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_1 < 1\},$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1 - 1, g_3(x_1, x_2) = x_1 + 1, g_4(x_1, x_2) = x_2 + 1,$$

e osservare che, per  $j \in \{2, 3, 4\}$ ,

$$B_j = \{x \in A_4 : g_j(x) = 0\}.$$

Ci limitiamo a osservare (lasciando la verifica al lettore), che applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, si trovano le seguenti triple (con la prima componente uguale a  $x_1$ , la seconda uguale a  $x_2$ , la terza uguale a  $\lambda$ ):

$$(1, -1/4, 31/8) \quad (B_2), (-1, 1/4, -33/8) \quad (B_3), (1/\sqrt[3]{2}, -1, 4/\sqrt[3]{2} - 1) \quad (B_4). \quad (2.8.40)$$

Infine, restano gli elementi di  $B_5$ . Dunque, i punti candidati a essere di massimo o minimo sono:

$$\begin{aligned} &(1/2, -1/2), (0, 0), (1, -1/4), (-1, 1/4), \\ &(1/\sqrt[3]{2}, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1). \end{aligned}$$

Si ha:

$$f(1/2, -1/2) = 1/2, f(0, 0) = 0, f(1, -1/4) = 9/8, f(-1, 1/4) = 7/8,$$

$$f(1/\sqrt[3]{2}, -1) = 1/\sqrt[3]{16} - 1/\sqrt[3]{4} + 1, f(1, 1) = -2, f(-1, 1) = 2,$$

$$f(-1, -1) = 4, f(1, -1) = 0.$$

Perciò,  $\min_A f = f(1, 1) = -2$ ,  $\max_A f = f(1, 1) = 4$ . Dunque,  $f(A) = [-2, 4]$ .

**Esempio 2.8.8** Ricaviamo la formula classica della distanza di un punto  $x^0 \in \mathbf{R}^3$  da un piano  $A$ .

Sia

$$A := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0\},$$

con  $a_j \in \mathbf{R}$  ( $1 \leq j \leq 4$ ),  $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ . Sia poi

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

Cerchiamo  $x \in A$ , tale che

$$d(x, x^0) = \min_{y \in A} d(y, x^0). \quad (2.8.41)$$

Il fatto che il problema (2.8.41) ammetta soluzioni non è ovvio. Infatti, la funzione

$$\begin{cases} d : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \\ d(y) = d(y, x^0) \end{cases}$$

$y \rightarrow d(y, x^0)$  è continua da  $\mathbf{R}^3$  a  $\mathbf{R}$ ,  $A$  è chiuso, ma non limitato. Dunque, il teorema 1.4.4 non è direttamente applicabile. Per verificare che  $d$  ammette minimo su  $A$ , possiamo ragionare come segue.

Fissiamo arbitrariamente  $x^1 \in A$ . Sia  $\rho := d(x^1, x^0)$ . Sia  $x \in A$ , tale che  $\|x\| > \rho + \|x^0\|$ . Allora, per il teorema 1.1.3 (V), si ha

$$d(x) = \|x - x^0\| \geq \|x\| - \|x^0\| > \rho. \quad (2.8.42)$$

Osserviamo che (2.8.42) implica

$$\|x^1\| \leq \rho + \|x^0\|.$$

Poniamo

$$A' := \{x \in A : \|x\| \leq \rho + \|x^0\|\}.$$

Allora  $A' \neq \emptyset$ , perché  $x^1 \in A'$ , è chiuso e limitato (sul fatto che  $A'$  sia effettivamente chiuso, si veda l'esercizio 2.8.3). Perciò,  $d$  ammette minimo in  $A'$ . Poiché  $x^1 \in A'$ ,

$$\min_{A'} d \leq d(x^1, x^0) = \rho.$$

Sia  $x^2$  un punto di minimo per  $d$  in  $A'$ . Sia poi  $x \in A$ . Se  $x \in A'$ , ovviamente,  $d(x^2) \leq d(x)$ . Se  $x \notin A'$ , allora  $\|x\| > \|x^0\| + \rho$ , per cui

$$d(x^2) \leq \rho < d(x).$$

Concludiamo che  $d$  ammette minimo in  $A$  e vale

$$\min_A d = \min_{A'} d.$$

Poniamo ora

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = d(x, x^0)^2 = \|x - x^0\|^2. \end{cases}$$

È chiaro che, poiché  $d$  ammette minimo su  $A$ , anche  $f$  ammette minimo su  $A$ . Inoltre, i punti di minimo sono gli stessi e

$$\min_A f = (\min_A d)^2.$$

Se  $x$  è un punto di minimo per  $f$  su  $A$ , per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tale che

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x), \quad (2.8.43)$$

con  $g(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4$ , cioè,

$$2(x - x^0) = \lambda(a_1, a_2, a_3). \quad (2.8.44)$$

Se  $x = (x_1, x_2, x_3)$  imponendo la condizione  $x \in A$ , si ottiene da (2.8.44)

$$a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + a_3x_3^0 + \frac{\lambda(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2} + a_4 = 0,$$

da cui

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{2(a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + a_3x_3^0 + a_4)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \\ x &= x^0 + \frac{\lambda}{2}(a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

e

$$\min_A(d) = \|x - x^0\| = \frac{|\lambda|}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \frac{|a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + a_3x_3^0 + a_4|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

**Esercizio 2.8.1** Determinare l'insieme  $V$  definito in (2.8.6) in tutti i casi possibili.

**Esercizio 2.8.2** Con riferimento all'esempio 2.8.5, verificare che  $g$  (definita in (2.8.21)) è una biiezione tra  $A_1$  e  $A_2$  e che  $g^{-1}$  ammette la rappresentazione 2.8.22.

**Esercizio 2.8.3** Siano,  $n, m, l \in \mathbf{N}$ ,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ,  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^l$ ,  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_l(x))$ . Sia poi

$$B := \{x \in \mathbf{R}^n : f_1(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0, g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0\}.$$

Verificare che  $B$  è chiuso.

(Sugg.: sia  $x^0 \notin B$ . Si tratta di provare che  $x^0 \notin Fr(B)$ . Allora, esiste  $i \in \{1, \dots, n\}$  tale che  $f_i(x) > 0$ , oppure esiste  $j \in \{1, \dots, l\}$ , tale che  $g_j(x^0) \neq 0$ . Nel primo caso, sfruttando il fatto che  $f_i$  è continua, far vedere che esiste  $r > 0$  tale che, se  $x \in B(x^0, r)$ ,  $f_i(x) > 0$ . Nel secondo caso, sfruttando il fatto che  $g_j$  è continua, far vedere che esiste  $r > 0$  tale che, se  $x \in B(x^0, r)$ ,  $g_j(x) \neq 0$ .)

**Esercizio 2.8.4** Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Determinare l'immagine  $f(A)$  nei casi seguenti:

(I)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_3^2 \geq 1/4\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 - x_1^2 - x_2^2$ .

(Attenzione!  $A$  non è connesso per archi.)

(II)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq (x_3 - 4)^2, 0 \leq x_3 \leq 8\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

(III)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 \leq \max\{1, x_2^2\}, 0 \leq x_2 \leq 2\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

(IV)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq g^2\}$  ( $g \in \mathbf{R}^+$ ),  $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 8(x_1^2 + x_2^2)$ .

(V)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ .

(VI)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, x_2 \leq 1/2\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3$ .

(VII)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ .

(VIII)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ .

(IX)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1$ .

(X)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + 3x_2^2 \leq 1, R \geq x_3 \geq 1\}$  ( $R \geq 1$ ),  $f(x_1, x_2, x_3) = \arctan(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$ .

# Capitolo 3

## Equazioni differenziali ordinarie

### 3.1 Generalità

Le equazioni differenziali ordinarie appartengono alla categoria delle cosiddette "equazioni funzionali", nel senso che le loro (eventuali) soluzioni non sono numeri o vettori, ma funzioni. Nella loro forma più generale, esse presentano una struttura del tipo

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t)), \quad (3.1.1)$$

con

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (3.1.2)$$

$$\Omega \text{ aperto in } \mathbf{R}^{nm+1}. \quad (3.1.3)$$

Diremo che un'equazione della forma (3.1.1) è di **ordine**  $m$ . Essa fissa un legame tra le derivate di ordine non superiore a  $m$  di una certa funzione  $x$ . Si tratta di cercare le funzioni che soddisfano tale legame.

Nel caso  $n \geq 2$ , parleremo talvolta di "sistema", invece che di "eqiazione".

Diamo ora la definizione di **soluzione locale** di un'equazione differenziale ordinaria.

**Definizione 3.1.1** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^{nm+1}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Una soluzione locale dell'equazione (3.1.1) è una funzione  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , tale che:

- (I)  $I$  è un intervallo in  $\mathbf{R}$  con interno non vuoto;
- (II)  $x$  è derivabile  $m$  volte in  $I$ ;
- (III)  $\forall t \in I \ (t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \in \Omega$  e vale (3.1.1).

**Osservazione 3.1.1** L’aggettivo ”derivabile” nella definizione 3.1.1 ha senso, perché  $x$  è funzione di una sola variabile (si ricordi la definizione 2.6.5).

**Esempio 3.1.1** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, x_0, x_1) := -x_0 + 2x_1. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Consideriamo l’equazione

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) = -x(t) + 2x'(t). \quad (3.1.5)$$

Allora è facile verificare che la funzione

$$\begin{cases} x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ x(t) = e^t \end{cases} \quad (3.1.6)$$

è soluzione locale di (3.1.5). Un’altra soluzione locale è

$$\begin{cases} y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ y(t) = te^t. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

**Esempio 3.1.2** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ f(t, x_1, x_2) := (x_2, -x_1). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Allora l’equazione

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t), \\ x'_2(t) = -x_1(t). \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Una soluzione locale è

$$\begin{cases} x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ x(t) = (\sin(t), \cos(t)). \end{cases}$$

Una seconda soluzione locale è

$$\begin{cases} y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ y(t) = (\cos(t), -\sin(t)). \end{cases}$$

**Esempio 3.1.3** Siano  $g \in C(I)$ , con  $I$  intervallo aperto non vuoto in  $\mathbf{R}$ ,

$$\begin{cases} f : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, x) := g(t). \end{cases} \quad (3.1.10)$$

In questo caso il problema

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

diventa

$$x'(t) = g(t). \quad (3.1.11)$$

Si tratta del problema di determinare le primitive della funzione  $g$ . Tale problema è già stato discusso in [Analisi A], teorema 4.4.3. Fissato  $t_0$  in  $I$ , le soluzioni locali di dominio  $I$  sono le funzioni della forma

$$x(t) = C + \int_{t_0}^t g(s) ds, \quad (3.1.12)$$

con  $C$  arbitrario elemento di  $\mathbf{R}$ .

Equazioni differenziali ordinarie ricorrono frequentemente nelle applicazioni. Ne esaminiamo due casi.

**Esempio 3.1.4** Per  $t$  variabile in un certo intervallo temporale  $I$  ( $I$  intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ ), indichiamo con  $x(t)$  un certa popolazione, variabile nel tempo. Questa popolazione ha certi coefficienti di natalità  $n(t, x)$  e di mortalità  $m(t, x)$ , che supponiamo dipendenti solo dal tempo  $t$  e dall'entità  $x$  della popolazione stessa.  $n(t, x)$  e  $m(t, x)$  indicano, rispettivamente, il numero di nati e di morti nell'unità di tempo all'istante  $t$ , con una popolazione  $x$ . Ammettendo che  $n$  e  $m$  dipendano con continuità da  $t$  e da  $x$ , avremo, per  $\Delta t$  "piccolo",

$$x(t + \Delta t) - x(t) \cong [n(t, x(t)) - m(t, x(t))] \Delta t,$$

da cui, dividendo per  $\Delta t$  e mandando a 0 la durata dell'intervallo temporale  $\Delta t$ , otteniamo

$$x'(t) = n(t, x(t)) - m(t, x(t)).$$

Sia allora  $J$  un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ , tale che  $n(t, x)$  e  $m(t, x)$  sono definiti se  $t \in I$  e  $x \in J$ . Poniamo

$$\begin{cases} f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, x) := n(t, x) - m(t, x). \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Allora, fintanto che la popolazione  $x(t)$  è a valori in  $J$ ,  $x$  soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (3.1.14)$$

**Esempio 3.1.5** Consideriamo un punto pesante che si muove secondo una certa traiettoria  $x(t)$  nello spazio tridimensionale, con  $t$  che indica la variabile temporale. Ricordiamo che le derivate prima e seconda  $x'(t)$  e  $x''(t)$  rappresentano fisicamente, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione all'istante  $t$ .

Indichiamo con  $m$  la massa del punto. Supponiamo che, qualora il punto si trovi nell'istante  $t$  in un certo punto  $x$  e sia dotato di una certa velocità  $v$ , sia sottoposto a una forza  $F(t, x, v)$ . Schematizziamo questa situazione, supponendo

$$F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad (3.1.15)$$

con  $\Omega$  aperto in  $\mathbf{R}^7$ .

In base al secondo principio della dinamica, il prodotto tra la massa e l'accelerazione del punto all'istante  $t$  coincide con la forza a cui il punto è sottoposta. Dunque, istante per istante, vale

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)).$$

Posto allora

$$\begin{cases} f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ f(t, x, v) = m^{-1}F(t, x, v), \end{cases} \quad (3.1.16)$$

otteniamo che la traiettoria del punto soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)). \quad (3.1.17)$$

**Osservazione 3.1.2** Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ , con  $\Omega$  aperto in  $\mathbf{R}^{nm+1}$ . Supponiamo che  $f$  sia continua. Allora, ogni soluzione locale del sistema (3.1.1) è di classe  $C^m$ . Sia, infatti,  $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  una soluzione locale. Poiché  $x$  è derivabile  $m$  volte,  $x$  è almeno di classe  $C^{m-1}$ . Inoltre,  $\forall t \in I$ , vale (3.1.1). Per il teorema 1.4.3, la funzione  $h : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $h(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t))$  è continua. Concludiamo quindi che  $x^{(m)}$  è continua, da cui la conclusione.

## 3.2 Sistemi del primo ordine

Come sarà più chiaro nel seguito, molta parte della teoria delle equazioni differenziali ordinarie può essere dedotta riconducendosi a sistemi del primo

ordine. Qui usiamo il termine "sistema" invece di "equazione" riferendoci al fatto che l'espressione

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (3.2.1)$$

con

$$f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (3.2.2)$$

ove  $\Omega$  è un aperto in  $\mathbf{R}^{n+1}$  è equivalente a

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

ove, naturalmente,  $f_1, \dots, f_n$  sono le componenti di  $f$  e  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ .

Abbiamo già osservato (vedi gli esempi 3.1.1-3.1.3) che un'equazione differenziale ordinaria può avere soluzioni che non coincidono nell'intersezione dei loro domini. Consideriamo, in particolare, l'esempio 3.1.3. Fissiamo  $t_0 \in I$ . Se noi imponiamo a una soluzione  $x$  di dominio  $I$  l'ulteriore condizione  $x(t_0) = x^0$ , con  $x^0$  arbitrario elemento di  $\mathbf{R}$ , otteniamo un'unica soluzione di dominio  $I$ : sarà la funzione

$$\begin{cases} x : I \rightarrow \mathbf{R}, \\ x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t g(s)ds. \end{cases}$$

Vogliamo allora considerare il così detto **problema di Cauchy**, che consiste nel determinare le soluzioni locali di (3.2.1) che, in un prefissato  $t_0$ , assumono un prefissato valore  $x^0$ .

**Definizione 3.2.1** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , tali che  $(t_0, x^0) \in \Omega$ . Per **soluzione locale** del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

intendiamo una soluzione locale  $x$  dell'equazione (3.2.1), di dominio  $I$ , tale che  $t_0 \in I$  e  $x(t_0) = x^0$ .

**Osservazione 3.2.1** La richiesta che  $(t_0, x^0) \in \Omega$ , nella definizione 3.2.1, segue dalla condizione (III) della definizione 3.1.1 (nel caso  $m = 1$ ).

**Esempio 3.2.1** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = (0, 1), \end{cases} \quad (3.2.5)$$

con  $f$  come in (3.1.8). Allora una soluzione globale è

$$\begin{cases} x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ x(t) = (\cos(t), \sin(t)). \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Veniamo allora al principale risultato sul problema di Cauchy, di cui non forniremo dimostrazione.

**Teorema 3.2.1 (di Picard)** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^{n+1}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , tali che  $(t_0, x^0) \in \Omega$ . Supponiamo, inoltre che

- (a)  $f$  sia continua;
  - (b) se indichiamo con  $x_1, \dots, x_n$  le variabili successive a  $t$ ,  $\forall (t, x) \in \Omega$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ , esista la derivata parziale  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  sia continua in  $\Omega$ .
- Consideriamo il problema di Cauchy (3.2.4). Allora
- (I) esiste una soluzione locale, definita su un intervallo aperto contenente  $t_0$ ;
  - (II) due soluzioni locali qualunque di (3.2.4) coincidono sull'intersezione dei loro domini.

**Osservazione 3.2.2** Il teorema 3.2.1 costituisce un risultato molto generale di esistenza e, in un certo senso, unicità di una soluzione locale per il problema di Cauchy. È evidente che non ci si può aspettare un risultato di unicità in senso stretto. Infatti, se  $x$  è una soluzione locale che ha per dominio un intervallo aperto  $I$  a cui appartiene  $t_0$ , è ancora soluzione locale ogni restrizione di  $x$  a un qualsivoglia intervallo aperto contenuto in  $I$  e contenente ancora  $t_0$ .

Per chiarire meglio il significato della condizione (II), presentiamo, ancora senza dimostrazione, un secondo teorema, in cui, sotto ipotesi più deboli, si ottiene soltanto la conclusione (I).

**Teorema 3.2.2 (di Peano)** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , tali che  $(t_0, x^0) \in \Omega$ . Supponiamo, inoltre che  $f$  sia continua. Consideriamo il problema di Cauchy (3.2.4). Allora esiste una soluzione locale, definita su un intervallo aperto contenente  $t_0$ .

Verifichiamo con un esempio che la conclusione (II) del teorema di Picard non è, in generale, valida sotto le ipotesi del teorema di Peano.

**Esempio 3.2.2** Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(t, x) = |x|^{1/2}$ . Osserviamo che  $f$  è continua, ma non ammette derivata parziale finita nei punti  $(t, 0)$ , con  $t \in \mathbf{R}$ . Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) = |x(t)|^{1/2}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Questo problema ha l'ovvia soluzione

$$\begin{cases} x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Tuttavia, esistono soluzioni locali che si annullano solo per  $t = 0$ . Consideriamo, infatti, la funzione

$$\begin{cases} y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ y(t) = sgn(t)t^2/4, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

con  $sgn(t) = 1$  se  $t > 0$ ,  $sgn(t) = -1$  se  $t < 0$ ,  $sgn(0) = 0$ . Ovviamente,  $y(0) = 0$ . Inoltre, se  $t \neq 0$ , si ha

$$y'(t) = sgn(t)t/2 = |t|/2 = |y(t)|^{1/2}.$$

Infine, per  $t \neq 0$ ,

$$\frac{y(t) - y(0)}{t} = sgn(t)t/4 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

Dunque,  $y$  è derivabile in 0 e  $y'(0) = 0$ . Perciò,  $y$  è una soluzione locale di (3.2.7), che coincide con  $x$  solo per  $t = 0$ .

I teoremi di Picard e di Peano forniscono l'esistenza di soluzioni locali su qualche intervallo aperto contenente  $t_0$ . È chiaramente desiderabile disporre di soluzioni definite su intervalli più grandi possibili. Ha quindi interesse la seguente definizione:

**Definizione 3.2.2** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^{nm+1}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Una soluzione locale  $x$  dell'equazione (3.1.1) si dice **massimale** se non esiste un'altra soluzione locale  $y$  che sia prolungamento proprio di  $x$  (tale, cioè, che  $x$  sia una restrizione di  $y$  e il dominio di  $x$  non coincida col dominio di  $y$ ).

Vale il seguente

**Teorema 3.2.3** *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 3.2.1. Allora il problema di Cauchy (3.2.4) possiede un'unica soluzione massimale. Tale soluzione ha come dominio un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ .*

*Dimostrazione* Consideriamo tutte le possibili soluzioni locali di (3.2.4), definite su un intervallo aperto contenente  $t_0$ . Per il teorema 3.2.1, esistono soluzioni siffatte. Sia  $I$  l'unione di tutti questi intervalli. È facile verificare che  $I$  è, a sua volta, un intervallo aperto. Infatti, sia  $t_1 \in I$ . Allora, esiste una soluzione locale  $x^1$ , con dominio l'intervallo aperto  $I_1$  (contenente  $t_0$ ), tale che  $t_1 \in I_1$ . Poiché  $I_1$  è aperto, esiste un intorno circolare  $I(t_1, r)$  di  $t_1$ , tutto contenuto in  $I_1$ . Per definizione,  $I(t_1, r) \subseteq I$ . Perciò,  $I$  è un insieme aperto.

Verifichiamo che  $I$  è un intervallo in  $\mathbf{R}$ . Siano  $t_1$  e  $t_2$  appartenenti a  $I$ , con  $t_1 < t_2$ . Si tratta di far vedere che  $[t_1, t_2] \subseteq I$ . Cominciamo allora col supporre che  $t_1 < t_2 \leq t_0$ . Sia  $x^1$  una soluzione locale di (3.2.4), con dominio  $I_1$  contenente  $t_1$ . Poiché  $x^1$  è soluzione del problema di Cauchy,  $t_0 \in I_1$ , per cui  $t_2 \in I_1$ . Ne segue che  $[t_1, t_2] \subseteq I_1 \subseteq I$ . Analogamente si ragiona se  $t_0 \leq t_1 < t_2$ . Resta da considerare il caso  $t_1 < t_0 < t_2$ . Se, per  $j = 1, 2$ ,  $x^j$  è una soluzione locale di (3.2.4), con dominio  $I_j$  contenente  $t_j$ , si avrà

$$[t_1, t_0] \subseteq I_1, [t_0, t_2] \subseteq I_2,$$

da cui

$$[t_1, t_2] \subseteq I_1 \cup I_2 \subseteq I.$$

Dunque,  $I$  è senz'altro un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ .

Sia ora  $t \in I$ . Fissiamo (arbitrariamente) una soluzione locale  $x^1$  il cui dominio sia un intervallo aperto  $I_1$  contenente  $t$  e poniamo

$$x(t) := x^1(t). \quad (3.2.10)$$

La definizione (3.2.10) non dipende dalla scelta di  $x^1$ . Infatti, se  $x^2$  è un'altra soluzione locale di (3.2.4), il cui dominio è un intervallo aperto  $I_2$  contenente  $t$ , per il teorema 3.2.1,  $x^1$  e  $x^2$  coincidono in  $I_1 \cap I_2$ .

Verifichiamo adesso che  $x$  è soluzione locale di (3.2.4). Infatti, se  $t \in I$  e  $x^1$ , di dominio  $I_1$ , è come prima,  $x$  è un prolungamento di  $x^1$ . Dunque, poiché  $I_1$  è aperto,  $x$  è derivabile in  $I_1$  e si ha

$$x'(t) = (x^1)'(t) = f(t, x^1(t)) = f(t, x(t)).$$

Vale, poi, ovviamente,  $t_0 \in I$  e  $x(t_0) = x^0$ .

Proviamo che  $x$  è una soluzione massimale. Per costruzione,  $I$  contiene i domini di tutte le soluzioni definite su intervalli aperti. Basta allora far vedere che ogni soluzione locale è prolungabile a una soluzione definita su un intervallo aperto. Sia allora  $y$  una soluzione locale di (3.2.4) e, per fissare le idee, supponiamo che il suo dominio sia un certo intervallo  $]a, b]$ , con  $a < t_0 \leq b$ . Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)), \\ z(b) = y(b). \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Per il teorema 3.2.1, (3.2.11) possiede una soluzione locale  $z$  definita su un intervallo aperto contenente  $b$ . Sia  $[b, b + \delta[$  contenuto nel dominio di  $z$ , con  $\delta \in \mathbf{R}^+$ . Poniamo allora

$$\begin{cases} v : ]a, b + \delta[ \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ v(t) = \begin{cases} y(t) & \text{se } t \in ]a, b], \\ z(t) & \text{se } t \in [b, b + \delta[. \end{cases} \end{cases}$$

Allora è facile verificare che  $v$  è una soluzione locale di (3.2.4), che prolunga  $y$ . Ci limitiamo a far vedere che  $v$  è derivabile in  $b$  e che

$$v'(b) = f(b, v(b)).$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{v(t) - v(b)}{t - b} &= \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{y(t) - y(b)}{t - b} = y'(b) = f(b, y(b)) = f(b, v(b)), \\ \lim_{t \rightarrow b^+} \frac{v(t) - v(b)}{t - b} &= \lim_{t \rightarrow b^+} \frac{z(t) - z(b)}{t - b} = z'(b) = f(b, z(b)) = f(b, v(b)). \end{aligned}$$

Per concludere, resta da far vedere che  $x$  è l'unica soluzione massimale. Se  $y$  è una seconda soluzione massimale, per quanto appena visto,  $y$  è definita su un intervallo aperto. Dunque, per costruzione,  $x$  è un prolungamento di  $y$ . Poiché  $y$  è massimale, deve necessariamente valere  $y = x$ .  $\square$

Diamo ora un criterio per stabilire se una soluzione è massimale. Dal teorema 3.2.3, sappiamo già che il dominio è necessariamente un intervallo aperto.

**Teorema 3.2.4** *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Picard. Sia poi  $x : I = ]a_0, a_1[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  una soluzione locale del sistema (3.2.1), con  $-\infty \leq a_0 < a_1 \leq +\infty$ . Allora sono equivalenti:*

- (I)  $x$  non è una soluzione massimale di (3.2.1);  
 (II) per almeno un  $j \in \{0, 1\}$  esiste  $\lim_{t \rightarrow a_j} (t, x(t))$  e tale limite appartiene a  $\Omega$ .

*Dimostrazione* Proviamo che (I) implica (II). Supponiamo allora che  $x$  non sia massimale. Ciò significa che esiste una soluzione locale  $y$  prolungamento proprio di  $x$ . Sia  $J$  il dominio di  $y$ . Allora  $I \subseteq J$  ed esiste qualche elemento di  $J$  non appartenente a  $I$ . Allora esiste  $t \in J$  con  $t \geq a_1$ , oppure  $t \in J$ , con  $t \leq a_0$ . Supponiamo che valga, ad esempio, la prima condizione. Allora, poiché  $J$  è un intervallo, necessariamente  $a_1 \in J$ . Si ha inoltre

$$\lim_{t \rightarrow a_1} (t, x(t)) = \lim_{t \rightarrow a_1} (t, y(t)) = (a_1, y(a_1)) \in \Omega,$$

perché  $y$  è continua e  $(t, y(t)) \in \Omega \forall t \in J$ .

Viceversa, supponiamo che valga (II). Per fissare le idee, supponiamo che esista

$$l := \lim_{t \rightarrow a_1} (t, x(t))$$

e tale limite appartiene a  $\Omega$ . Per il teorema 1.3.2 (II),

$$l = (a_1, x^0),$$

con

$$x^0 := \lim_{t \rightarrow a_1} x(t),$$

per cui, in particolare,  $a_1 \in \mathbf{R}$ . Poniamo allora

$$\begin{cases} y : ]a_0, a_1] \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \in ]a_0, a_1[, \\ x^0 & \text{se } t = a_1. \end{cases} \end{cases}$$

Verifichiamo che  $y$  è soluzione locale del sistema (3.2.1). Ciò proverà che  $x$  non è massimale. A tale scopo, basta verificare che  $y$  è derivabile in  $a_1$  e che  $y'(a_1) = f(a_1, y(a_1))$ . Osserviamo allora che  $y$  è continua in  $]a_0, a_1]$ . Inoltre, per  $t \in ]a_0, a_1[$ ,

$$y'(t) = x'(t) = f(t, x(t)) = f(t, y(t)).$$

Poiché  $y$  è continua, dal teorema 1.4.3 (II), sappiamo che la funzione  $t \rightarrow f(t, y(t))$  è continua in  $]a_0, a_1]$ . Dal teorema 1.4.1 segue allora

$$\lim_{t \rightarrow a_1} y'(t) = \lim_{t \rightarrow a_1} f(t, y(t)) = f(a_1, y(a_1)).$$

Dal risultato dell'esercizio 2.6.1, ricaviamo proprio la conclusione desiderata.

□

**Esempio 3.2.3** Si consideri l'equazione

$$x'(t) = x(t)^2.$$

A essa è applicabile il teorema di Picard, ponendo

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, x) = x^2. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Consideriamo la funzione

$$\begin{cases} x : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \\ x(t) = -\frac{1}{1+t}. \end{cases}$$

Allora è facile verificare che  $x$  è una soluzione locale di (3.2.12). Verifichiamo che è massimale. Infatti, la funzione  $t \rightarrow (t, -\frac{1}{1+t})$  non ha limite in  $\mathbf{R}^2$ , né per  $t$  che tende a  $-1$ , né per  $t$  che tende a  $+\infty$ , valendo

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \left( -\frac{1}{1+t} \right) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty.$$

Possiamo quindi applicare il teorema 3.2.4.

### 3.3 Sistemi di ordine superiore

In questa sezione estendiamo i risultati della sezione 3.2 a sistemi di ordine  $m \geq 2$ . Ci interesserà essenzialmente il caso delle equazioni (vale a dire,  $n = 1$ , con riferimento alla sezione 3.1). Tuttavia, l'esempio 3.1.5, di grande interesse dal punto di vista fisico, suggerire di trattare il caso più generale dei sistemi ( $n \geq 1$ ).

Consideriamo allora un sistema della forma (3.1.1). Cominciamo col chiarire che cosa intendiamo per "problema di Cauchy", nel caso  $m \geq 2$ .

**Definizione 3.3.1** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^{nm+1}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $y^0, \dots, y^{m-1}$  elementi di  $\mathbf{R}^n$ , tali che  $(t_0, y^0, \dots, y^{m-1}) \in \Omega$ . Il problema di Cauchy relativo a (3.1.1), con le condizioni iniziali  $y^0, \dots, y^{m-1}$  assegnate in  $t_0$ , consiste nel determinare le soluzioni locali  $x$  di (3.1.1), tali che, in più verificano le seguenti condizioni :

- (I)  $t_0$  appartiene al dominio di  $x$ ;
- (II)  $x(t_0) = y^0, \dots, x^{(j)}(t_0) = y^j, \dots, x^{(m-1)}(t_0) = y^{m-1}$ .

**Osservazione 3.3.1** Analogamente al caso  $m = 1$ , la condizione  $(t_0, y^0, \dots, y^{m-1}) \in \Omega$  segue dalla richiesta che  $(t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \in \Omega$ , per ogni  $t$  nel dominio di  $x$ .

C'è un metodo generale per ricondurre un sistema di ordine  $m$  a un sistema del primo ordine. Tale metodo è illustrato nella dimostrazione della seguente generalizzazione del teorema di Picard:

**Teorema 3.3.1** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^{nm+1}$  ( $n, m \in \mathbf{N}$ ),  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ .  $t_0 \in \mathbf{R}$ ,  $y^0, \dots, y^{m-1} \in \mathbf{R}^n$ , tali che  $(t_0, y^0, \dots, y^{m-1}) \in \Omega$ . Supponiamo, inoltre che

- (a)  $f$  sia continua;
- (b) se indichiamo con  $X = (X_1, \dots, X_{nm})$  ( $\in \mathbf{R}^{nm}$ ) il blocco delle variabili successive a  $t$  in  $\mathbf{R}^{nm+1}$ ,  $\forall (t, X) \in \Omega$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, nm\}$ , esista la derivata parziale  $\frac{\partial f}{\partial X_j}(t, X)$  e  $\frac{\partial f}{\partial X_j}$  sia continua in  $\Omega$ .

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t)), \\ x(t_0) = y^0, \\ \dots \\ x^{(m-1)}(t_0) = y^{m-1}. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Allora

- (I) esiste una soluzione locale, definita su un intervallo aperto contenente  $t_0$ ;
- (II) due soluzioni locali qualunque di (3.3.1) coincidono sull'intersezione dei loro domini.

*Dimostrazione* Ci limitiamo a trattare il caso  $m = 2$ . Il caso generale segue la stessa idea. Il nostro problema è, dunque,

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \\ x(t_0) = y^0, \\ x'(t_0) = y^1. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Introduciamo la seguente funzione

$$\begin{cases} \mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{2n}, \\ \mathcal{F}(t, u, v) = (v, f(t, u, v)), \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Ove abbiamo indicato con  $u$  e  $v$  i blocchi di  $n$  variabili successivi a  $t$ . Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = \mathcal{F}(t, Y(t)), \\ Y(t_0) = (y^0, y^1). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Allora è chiaro che  $\mathcal{F}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Picard 3.2.1 (con  $2n$  al posto di  $n$ ). In forza di tale teorema, il problema (3.3.4) ammette una soluzione locale  $Y$  definita su un intervallo aperto contenente  $t_0$ . Sia

$$Y(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

ove  $x(t)$  indica il blocco delle prime  $n$  componenti di  $Y$ ,  $y$  il blocco delle ultime  $n$ . Allora, poiché  $Y$  è derivabile in  $I$ , lo sono anche  $x$  e  $y$ . (3.3.4) può essere riscritto in forma estesa come

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = f(t, x(t), y(t)), \\ x(t_0) = y^0, \\ y(t_0) = y^1. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Allora, la prima equazione in (3.3.5) ci dice che  $x$  è derivabile due volte e la sua derivata è  $y$ . Dalla seconda equazione segue allora

$$x''(t) = y'(t) = f(t, x(t), y(t)) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in I.$$

Inoltre,  $x(t_0) = y^0$ ,  $x'(t_0) = y(t_0) = y^1$ . Dunque,  $x$  è una soluzione locale di (3.3.2) e (I) è dimostrato.

Per verificare (II), indichiamo con  $u$  e  $v$  due soluzioni locali di (3.3.2), di dominio, rispettivamente,  $I_u$  e  $I_v$ . Poniamo

$$\begin{cases} U : I_u \rightarrow \mathbf{R}^{2n}, \\ U(t) = (u(t), u'(t)), \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{cases} V : I_v \rightarrow \mathbf{R}^{2n}, \\ V(t) = (v(t), v'(t)). \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Allora è facile verificare che  $U$  e  $V$  sono soluzioni locali di (3.3.4). Dal teorema di Picard, segue che

$$U(t) = V(t), \quad \forall t \in I_u \cap I_v,$$

e ciò implica immediatamente

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in I_u \cap I_v.$$

□

Veniamo ora al problema delle soluzioni massimali nel caso  $m \geq 2$ . I risultati sono semplici generalizzazioni del caso  $m = 1$ . Le relative dimostrazioni si possono ottenere trasformando il sistema di ordine  $m$  in un sistema del primo ordine nella maniera descritta e applicando i risultati corrispondenti della sezione 3.2. Qui ci limitiamo ai semplici enunciati.

**Teorema 3.3.2** *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 3.3.1. Allora il problema di Cauchy (3.3.1) possiede un'unica soluzione massimale. Tale soluzione ha come dominio un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ .*

**Teorema 3.3.3** *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 3.3.1. Sia poi  $x : I = ]a_0, a_1[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  una soluzione locale del sistema (3.3.1), con  $-\infty \leq a_0 < a_1 \leq +\infty$ . Allora sono equivalenti:*

- (I)  *$x$  non è una soluzione massimale di (3.3.1);*
- (II) *per almeno un  $j \in \{0, 1\}$  esiste  $\lim_{t \rightarrow a_j} (t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t))$  e tale limite appartiene a  $\Omega$ .*

**Esercizio 3.3.1** Dimostrare il teorema 3.3.1 nel caso  $m \geq 3$ .

**Esercizio 3.3.2** Dimostrare i teoremi 3.3.2 e 3.3.3.

### 3.4 Alcune classi di equazioni differenziali risolvibili elementarmente

Diciamo subito che la generica equazione differenziale ordinaria non è risolubile in termini espliciti. Qui vedremo alcuni casi particolari in cui la cosa è possibile.

**Esempio 3.4.1** (Equazioni a variabili separabili) Si tratta di equazioni della forma

$$x'(t) = h(t)g(x(t)), \tag{3.4.1}$$

con  $h : I_1 \rightarrow \mathbf{R}$  continua,  $g : I_2 \rightarrow \mathbf{R}$  di classe  $C^1$ . Qui  $I_1$  e  $I_2$  sono intervalli aperti in  $\mathbf{R}$ . A queste equazioni è applicabile il teorema di Picard. Infatti, se poniamo

$$\begin{cases} f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, x) = h(t)g(x), \end{cases} \tag{3.4.2}$$

(3.4.1) è rappresentabile nella forma (3.2.1). Inoltre,  $f$  è continua e,  $\forall(t, x) \in I_1 \times I_2$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = h(t)g'(x).$$

Da questa formula, si vede anche che  $\frac{\partial f}{\partial x}$  è continua in  $I_1 \times I_2$ . Consideriamo allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = h(t)g(x(t)), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

con

$$t_0 \in I_1, \quad x^0 \in I_2. \quad (3.4.4)$$

Dunque, dal teorema 3.2.3 sappiamo che il problema (3.4.3) ammette un'unica soluzione massimale. Ovviamente, il dominio di ogni soluzione locale è un sottoinsieme di  $I_1$  e le soluzioni sono a valori in  $I_2$ .

Cominciamo allora con l'osservare che, se  $g(x^0) = 0$ , la funzione costante  $t \rightarrow x^0$ , di dominio  $I_1$  è la soluzione massimale di (3.4.3). Consideriamo allora il caso

$$g(x^0) \neq 0. \quad (3.4.5)$$

Sia  $x : I \rightarrow \mathbf{R}$  una soluzione locale di (3.4.3), con  $I$  sottointervallo di  $I_1$ . Allora

$$g(x(t)) \neq 0, \quad \forall t \in I. \quad (3.4.6)$$

Per verificarlo, supponiamo, per assurdo, che esista  $t_1 \in I$ , tale che  $g(x(t_1)) = 0$ .  $x$  è, evidentemente, soluzione locale del problema

$$\begin{cases} y'(t) = h(t)g(y(t)), \\ y(t_1) = x(t_1). \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Ma tale sistema ha come soluzione massimale la funzione costante di dominio  $I_1$   $t \rightarrow x(t_1)$ . Dunque, per il teorema di Picard,  $x(t) = x(t_1) \forall t \in I$ . Ne segue che  $g(x(t)) = 0 \forall t \in I$  e questo è falso. Dunque vale (3.4.6). Abbiamo allora

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t), \quad \forall t \in I. \quad (3.4.8)$$

Da (3.4.8) segue subito

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t h(s)ds, \quad \forall t \in I. \quad (3.4.9)$$

Sia ora  $J$  l'immagine di  $x$ .  $J$  è un sottointervallo di  $I_2$  per il teorema di Bolzano. Per (3.4.6),

$$g(y) \neq 0 \quad \forall y \in J.$$

Dunque, la funzione  $y \rightarrow \frac{1}{g(y)}$  è definita e continua in  $J$ . Sia  $G$  una sua primitiva. Allora

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = G(x(t)) - G(x(t_0)) = G(x(t)) - G(x^0), \quad \forall t \in I, \quad (3.4.10)$$

per cui

$$G(x(t)) = G(x^0) + \int_{t_0}^t h(s) ds, \quad \forall t \in I. \quad (3.4.11)$$

Si ha

$$G'(y) = 1/g(y) \neq 0 \quad \forall y \in J.$$

Per il teorema di Bolzano, deve essere  $G'(y) > 0 \quad \forall y \in J$ , oppure  $G'(y) < 0 \quad \forall y \in J$ . In ogni caso,  $G$  è strettamente monotona e quindi iniettiva. Ammette dunque la funzione inversa  $G^{-1}$ , definita sulla sua immagine. Da (3.4.11) otteniamo allora

$$x(t) = G^{-1}(G(x^0) + \int_{t_0}^t h(s) ds), \quad \forall t \in I. \quad (3.4.12)$$

**Esempio 3.4.2** Studiamo il problema di Cauchy per l'**equazione logistica**, che rappresenta uno dei modelli più semplici di dinamica delle popolazioni. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t)(b - x(t)), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Qui  $a, b \in \mathbf{R}^+$ ,  $x^0 \in \mathbf{R}$ . Poiché  $x^0$  rappresenta l'entità della popolazione al tempo  $t = 0$ , ha interesse applicativo il solo caso  $x^0 \geq 0$ . Noi però cercheremo di descrivere la soluzione massimale per ogni  $x^0 \in \mathbf{R}$ .

Osserviamo, innanzi tutto, che si tratta di un'equazione a variabili separabili, con

$$\begin{cases} h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ h(t) = 1, \\ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(x) = ax(b - x). \end{cases}$$

$g$  si annulla per  $x = 0$  e per  $x = b$ . Dunque, se  $x^0 = 0$  la soluzione massimale è la funzione costante  $x(t) = 0 \forall t \in \mathbf{R}$ , se  $x^0 = b$  la soluzione massimale è la funzione costante  $x(t) = b \forall t \in \mathbf{R}$ .

Supponiamo allora  $x^0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, b\}$ , in modo che  $g(x_0) \neq 0$ . Sia  $I$  il dominio della soluzione massimale di (3.4.13). Dalla discussione nell'esempio 3.4.1, sappiamo già che si avrà (3.4.6). Questo implica che:

- (I) se  $x^0 < 0$ , si avrà  $x(t) < 0 \forall t \in I$ ,
- (II) se  $0 < x^0 < b$ , sarà  $0 < x(t) < b \forall t \in I$ ,
- (III) se  $x^0 > b$ , sarà  $x(t) > b \forall t \in I$ .

Verifichiamo solo (I). (II) e (III) si ottengono con un ragionamento analogo. Supponiamo allora, per assurdo,  $x^0 < 0$  e  $x(t_1) \geq 0$ , per qualche  $t_1 \in I$ . Dal teorema di Bolzano, segue l'esistenza di  $t_2$  in  $I$  tale che  $x(t_2) = 0$ , da cui  $g(x(t_2)) = 0$ , in contraddizione con (3.4.6).

Per determinare, in ciascun caso,  $x$ , seguiamo il metodo descritto nell'esempio 3.4.1. Per ogni  $t$  in  $I$  deve valere

$$\frac{1}{a} \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)(b-x(s))} ds = \int_0^t ds = t. \quad (3.4.14)$$

Dalla formula di integrazione per sostituzione ([Analisi A], teorema 4.5.1), tenendo conto che  $x(0) = x^0$ , possiamo riscrivere (3.4.14) nella forma

$$\frac{1}{a} \int_{x^0}^{x(t)} \frac{1}{x(b-x)} dx = t, \quad \forall t \in I. \quad (3.4.15)$$

Osserviamo ora che,  $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, b\}$ ,

$$\frac{1}{x(b-x)} = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right). \quad (3.4.16)$$

Dunque, da (3.4.15), seguono

$$\frac{1}{ab} \left[ \ln \left( \frac{|x(t)|}{|b-x(t)|} \right) - \ln \left( \frac{|x^0|}{|b-x^0|} \right) \right] = t \quad \forall t \in I, \quad (3.4.17)$$

$$\frac{|x(t)|}{|b-x(t)|} = \frac{|x^0|}{|b-x^0|} e^{abt} \quad \forall t \in I. \quad (3.4.18)$$

Dalla discussione precedente segue che  $\frac{x(t)}{b-x(t)}$  ha lo stesso segno di  $\frac{x^0}{b-x^0}$   $\forall t \in I$ . Ciò implica

$$\frac{x(t)}{b-x(t)} = \frac{x^0}{b-x^0} e^{abt} \quad \forall t \in I \quad (3.4.19)$$

e

$$x(t) = \frac{bx^0 e^{abt}}{b + x^0(e^{abt} - 1)} \quad \forall t \in I. \quad (3.4.20)$$

Cerchiamo adesso di determinare  $I$ . L'equazione

$$b + x^0(e^{abt} - 1) = 0$$

- (a) non ha soluzioni se  $0 < x_0 < b$ ;
- (b) ha la soluzione

$$\tau(x^0) := \frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{x^0}\right)$$

se  $x^0 \in ]-\infty, 0[ \cup ]b, +\infty[$ . Osserviamo anche che  $\tau(x^0) > 0$  se  $x^0 < 0$ , mentre  $\tau(x^0) < 0$  se  $x^0 > b$ . Tenuto allora conto del fatto che  $I$  è un intervallo che contiene 0, la funzione candidata naturale a essere la soluzione massimale di (3.4.13) è data dall'espressione (3.4.20) sul dominio  $I$  seguente:

$$I = \begin{cases} ]-\infty, \frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{x^0}\right)[ & \text{se } x^0 < 0, \\ \mathbf{R} & \text{se } 0 < x^0 < b, \\ ]\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{x^0}\right), +\infty[ & \text{se } x^0 > b. \end{cases} \quad (3.4.21)$$

In effetti,  $x$  è soluzione locale. Infatti,  $\forall t \in I$ ,

$$x'(t) = \frac{ab^2 x^0 (b - x^0) e^{abt}}{[b + x^0(e^{abt} - 1)]^2} = ax(t)[b - x(t)].$$

Verifichiamo che è soluzione massimale solo nel caso  $x^0 > b$ . In base al teorema 3.2.4, dobbiamo verificare che la funzione di dominio  $I$   $t \rightarrow (t, x(t))$  non ha limite in  $\mathbf{R}^2$  per  $t$  che tende a  $\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{x^0}\right)$ . Ciò segue dal teorema 1.3.2e dal fatto che

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{x^0}\right)} x(t) = +\infty.$$

Nel caso  $x^0 < 0$ , la verifica è analoga: basta osservare che si ha

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{b}{x^0}\right)} x(t) = -\infty.$$

Non è poi difficile verificare che, se  $x^0 > 0$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = b,$$

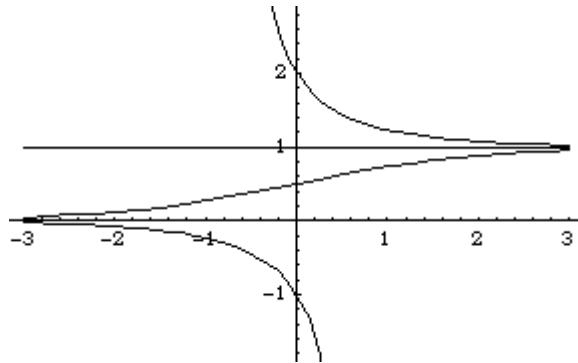


Figura 3.1

se  $x^0 < b$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0.$$

Si veda la figura 3.1, relativa al caso  $a = b = 1$ , in cui sono riportati i grafici di tre soluzioni con diverso dato iniziale.

**Esempio 3.4.3** Consideriamo equazioni della forma

$$x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad (3.4.22)$$

con  $g \in C^1(U)$ ,  $U$  aperto in  $\mathbf{R}$ . Un'equazione della forma (3.4.22) può essere inquadrata nella teoria generale, ponendo

$$\Omega := \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : t \neq 0, \frac{x}{t} \in U\}, \quad (3.4.23)$$

$$\begin{cases} f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, x) = g\left(\frac{x}{t}\right). \end{cases} \quad (3.4.24)$$

È chiaro che  $\Omega$  è aperto (esercizio 3.4.1) e  $f$  soddisfa le condizioni del teorema di Picard.

Una prima osservazione può essere che, poiché

$$\Omega \cap \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : t \neq 0\} = \emptyset,$$

il dominio di una qualunque soluzione è contenuto in  $\mathbf{R}^+$ , oppure in  $\{t \in \mathbf{R} : t < 0\}$ .

Le equazioni della forma (3.4.22) possono essere ricondotte a equazioni a variabili separabili, ponendo

$$y(t) := \frac{x(t)}{t}. \quad (3.4.25)$$

Infatti, se  $x : I \rightarrow \mathbf{R}$ , con  $I$  intervallo in  $\mathbf{R}$ , si ha, per  $t \in I$ ,

$$x'(t) = ty'(t) + y(t),$$

da cui, tenendo conto che  $0 \notin I$ ,

$$y'(t) = \frac{g(y(t)) - y(t)}{t}, \quad (3.4.26)$$

che è a variabili separabili.

Consideriamo, ad esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2}{t^2} = (\frac{x(t)}{t})^2, \\ x(-1) = 1. \end{cases} \quad (3.4.27)$$

Osserviamo subito che il dominio  $I$  della soluzione massimale  $x$  è contenuto in  $] -\infty, 0[$ , perché deve contenere  $-1$ . Con la posizione (3.4.25), si ottiene allora

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)^2 - y(t)}{t}, & t \in I, \\ y(-1) = -1. \end{cases} \quad (3.4.28)$$

Poniamo

$$\begin{cases} h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ h(y) = y^2 - y. \end{cases}$$

Allora  $h$  si annulla per  $y \in \{0, 1\}$  e  $h(-1) = 2 > 1$ . Sia  $J$  un sottointervallo di  $I$  contenente  $-1$ , tale che

$$y(t) < 0 \quad \forall t \in J.$$

Allora, col procedimento descritto nell'esempio 3.4.1, abbiamo

$$\int_{-1}^t \frac{y'(s)}{y(s)^2 - y(s)} ds = \int_{-1}^t \frac{1}{s} ds = \ln(-t).$$

Inoltre,

$$\int_{-1}^t \frac{y'(s)}{y(s)^2 - y(s)} ds = \int_{-1}^{y(t)} \frac{dz}{z^2 - z}$$

$$= \int_{-1}^{y(t)} \frac{1}{z-1} dz - \int_{-1}^{y(t)} \frac{1}{z} dz = \ln\left(\frac{y(t)-1}{2y(t)}\right).$$

Da

$$\ln\left(\frac{y(t)-1}{2y(t)}\right) = \ln(-t)$$

segue

$$y(t) = \frac{1}{1+2t}, \quad t \in J,$$

da cui

$$x(t) = \frac{t}{1+2t}, \quad t \in J. \quad (3.4.29)$$

Il dominio naturale dell'espressione al secondo membro di (3.4.29) è  $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ . Perciò il candidato naturale a essere soluzione massimale di (3.4.27) è la funzione

$$\begin{cases} x : ]-\infty, -\frac{1}{2}[, \\ x(t) = \frac{t}{1+2t}. \end{cases} \quad (3.4.30)$$

Lasciamo al lettore la verifica che è effettivamente così (esercizio 3.4.2).

**Esempio 3.4.4** Consideriamo equazioni problemi di Cauchy della forma

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x'(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1. \end{cases} \quad (3.4.31)$$

Si possono trattare, ponendo  $y := x'$  e risolvendo preliminarmente il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = x_1. \end{cases} \quad (3.4.32)$$

e prendendo poi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(s) ds. \quad (3.4.33)$$

Consideriamo, ad esempio, il problema

$$\begin{cases} x''(t) = e^{x'(t)}, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 1. \end{cases} \quad (3.4.34)$$

Poniamo  $y(t) = x'(t)$ . Allora,  $y$  è soluzione di

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (3.4.35)$$

Siamo nel caso di un'equazione a variabili separabili. Da (3.4.35) otteniamo, infatti, indicando con  $I$  il dominio della soluzione massimale,

$$e^{-y(t)}y'(t) = 1, \quad t \in I,$$

$$\int_0^t e^{-y(s)}y'(s)ds = t, \quad t \in I.$$

Si ha

$$\int_0^t e^{-y(s)}y'(s)ds = \int_1^{y(t)} e^{-z}dz = e^{-1} - e^{-y(t)}.$$

Abbiamo perciò ottenuto

$$e^{-1} - e^{-y(t)} = t, \quad t \in I,$$

da cui

$$y(t) = \ln\left(\frac{e}{1-et}\right), \quad t \in I. \quad (3.4.36)$$

Il dominio naturale della funzione in (3.4.36) è  $] -\infty, 1/e[$ . Se  $t < 1/e$ , poniamo

$$\begin{aligned} x(t) &:= 1 + \int_0^t y(s)ds = 1 + t - \int_0^t \ln(1-es)ds \\ &= 1 + t + \frac{1}{e} \int_1^{1-et} \ln(r)dr \\ &= 1 + 2t + \frac{1-et}{e} \ln(1-et). \end{aligned}$$

Allora, la candidata naturale a essere soluzione massimale di (3.4.34) è

$$\begin{cases} x : ] -\infty, 1/e[ \rightarrow \mathbf{R}, \\ x(t) = 1 + 2t + \frac{1-et}{e} \ln(1-et). \end{cases} \quad (3.4.37)$$

Lasciamo verificare al lettore (utilizzando il teorema 3.3.3) che le cose vanno veramente come ci si aspetta.

**Esempio 3.4.5** Consideriamo un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x''(t) = g(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \end{cases} \quad (3.4.38)$$

con  $g \in C^1(I)$ ,  $I$  sottointervallo aperto di  $\mathbf{R}$  e  $x_0 \in I$ . Il problema (3.4.38) è una caso particolare del problema (3.3.1): basta porre

$$\Omega := \mathbf{R} \times I \times \mathbf{R},$$

e

$$\begin{cases} f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, X_1, X_2) = g(X_1). \end{cases}$$

Dal teorema 3.3.2, sappiamo allora che (3.4.38) possiede un'unica soluzione massimale. Vedremo tra poco che, a parte alcuni casi particolari, (3.4.38) è riconducibile, almeno "vicino a  $t_0$ ", a un'equazione a variabili separabili. Moltiplichiamo, infatti, entrambi i membri della prima equazione in (3.4.38) per  $x'(t)$ . Siano poi  $G$  una primitiva di  $g$  in  $I$  e  $J$  il dominio della soluzione massimale  $x$ . Allora, da

$$x''(t)x'(t) = g(x(t))x'(t), \quad t \in J$$

segue

$$D\left(\frac{1}{2}x'(.)^2\right) = D_t(G(.)), \quad (3.4.39)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 = G(x(t)) + C, \quad t \in J, \quad (3.4.40)$$

per qualche costante  $C \in \mathbf{R}$ .  $C$  può essere determinata utilizzando le due condizioni iniziali: esse implicano

$$\frac{1}{2}x_1^2 = G(x_0) + C, \quad (3.4.41)$$

da cui

$$C = \frac{1}{2}x_1^2 - G(x_0) \quad (3.4.42)$$

e

$$x'(t)^2 = 2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0), \quad t \in J. \quad (3.4.43)$$

Consideriamo adesso alcuni casi particolari. Cominciamo col supporre

$$x_1 > 0. \quad (3.4.44)$$

In tal caso, vale  $x'(t) > 0$  in qualche intorno di  $t_0$ . In tale intorno, da (3.4.43) segue l'equazione a variabili separabili

$$x'(t) = \sqrt{2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0)}. \quad (3.4.45)$$

Nel caso, invece,

$$x_1 < 0, \quad (3.4.46)$$

con ragionamento analogo si ottiene, in qualche intorno di  $t_0$ ,

$$x'(t) = -\sqrt{2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0)}. \quad (3.4.47)$$

Consideriamo invece il caso

$$x_1 = 0. \quad (3.4.48)$$

Osserviamo, innanzi tutto, che ogni soluzione locale è di classe  $C^2$ . Infatti, se  $y$  è una soluzione locale,  $y$  è continua e  $y'' = f \circ y$ . Dunque,  $y''$  è continua in quanto composizione di funzioni continue (teorema 1.4.3 (II)). Consideriamo allora

$$x''(t_0) = f(x(t_0)) = f(x_0).$$

Consideriamo il caso

$$x_1 = 0, f(x_0) > 0. \quad (3.4.49)$$

In tale caso,  $x''(t) = f(x(t)) > 0$  in qualche intorno di  $t_0$ . In tale intorno  $x'$  è crescente. Otteniamo allora che, in tale intorno,

$$x'(t) = \begin{cases} \sqrt{2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0)} & \text{se } t \geq t_0, \\ -\sqrt{2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0)} & \text{se } t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.4.50)$$

Vicversa, se

$$x_1 = 0, f(x_0) < 0, \quad (3.4.51)$$

avremo

$$x'(t) = \begin{cases} -\sqrt{2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0)} & \text{se } t \geq t_0, \\ \sqrt{2G(x(t)) + x_1^2 - 2G(x_0)} & \text{se } t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.4.52)$$

L'ultimo caso che resta da esaminare è

$$x_1 = 0, f(x_0) = 0. \quad (3.4.53)$$

In tale caso, la soluzione globale è la funzione di dominio  $I$  costantemente uguale a  $x_0$ .

Per un esempio concreto, consideriamo il problema

$$\begin{cases} x''(t) = x(t)^2, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases} \quad (3.4.54)$$

Applicando il metodo descritto, otteniamo

$$x''(t)x'(t) = x(t)^2x'(t),$$

da cui

$$\frac{x'(t)^2}{2} = \frac{x(t)^3}{3} + C, \quad t \in J, \quad (3.4.55)$$

ove abbiamo indicato con  $J$  il dominio della soluzione massimale di (3.4.54), per una certa costante reale  $C$ . Applicando le condizioni iniziali, otteniamo  $C = 0$ . Poiché  $x'(0) > 0$  e  $x(0) > 0$ , su qualche intorno di 0  $x$  soddisfa il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}x(t)^{3/2}, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (3.4.56)$$

Applicando quanto visto nel precedente esempio 3.4.1, otteniamo, sempre in qualche intorno di 0,

$$\begin{aligned} x(t)^{-3/2}x'(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \int_0^t x(s)^{-3/2}x'(s)ds &= \sqrt{\frac{2}{3}}t, \\ 2 - 2x(t)^{-1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}t, \end{aligned}$$

da cui

$$x(t) = \frac{\sqrt{6}}{(6-t)^2}. \quad (3.4.57)$$

Lasciamo al lettore verificare che la soluzione massimale è la funzione di dominio  $]-\infty, \sqrt{6}[$ , con l'espressione (3.4.57).

**Osservazione 3.4.1** Consideriamo un punto pesante, vincolato a muoversi lungo una linea retta, su cui è stata fissata una certa coordinata  $x$ . Supponiamo che il punto sia sottoposto a una forza  $f(x)$  (in un'opportuna unità di misura), costante nel tempo e dipendente solo dalla posizione  $x$ . Allora, da quanto visto nell'esempio 3.1.5, la funzione  $x(t)$  che dà la posizione del punto nell'istante  $t$  soddisfa la condizione

$$mx''(t) = f(x(t)), \quad (3.4.58)$$

ove  $m$  indica la massa. Se poniamo, dunque,  $g(x) := \frac{f(x)}{m}$  otteniamo che  $x$  è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$x''(t) = g(x(t)), \quad (3.4.59)$$

che è del tipo descritto nell'esempio 3.4.5.

**Esercizio 3.4.1** Verificare che l'insieme  $\Omega$  definito in (3.4.23) è aperto in  $\mathbf{R}^2$ .

**Esercizio 3.4.2** Verificare che la funzione definita in (3.4.30) è la soluzione massimale di (3.4.27).

**Esercizio 3.4.3** Verificare che la funzione definita in (3.4.37) è la soluzione massimale di (3.4.34).

**Esercizio 3.4.4** Verificare che la funzione definita in (3.4.57) con dominio  $] -\infty, \sqrt{6}[$  è la soluzione massimale di (3.4.56).

**Esercizio 3.4.5** Determinare le soluzioni massimale dei seguenti problemi di Cauchy:

(I)

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2, \\ x(0) = 0; \end{cases}$$

(II)

$$\begin{cases} x'(t) = -5t^4x(t)^2, \\ x(0) = -1; \end{cases}$$

(III)

$$\begin{cases} x'(t) = -(t+1)x(t)^3, \\ x(0) = 1; \end{cases}$$

(IV)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{\cos(x(t))}, \\ x(0) = 0; \end{cases}$$

(V)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{\cos(x(t))}, \\ x(0) = \pi; \end{cases}$$

(VI)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\sin^2(t)}{x(t)}, \\ x(0) = -1; \end{cases}$$

(VII)

$$\begin{cases} x'(t) = t^3 e^{-x(t)}, \\ x(2) = 0; \end{cases}$$

(VIII)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2 - 1}{tx(t)}, \\ x(1) = \sqrt{2}/2; \end{cases}$$

(IX)

$$\begin{cases} x''(t) = e^{2x(t)}, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1; \end{cases}$$

(X)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2}{t^2}, \\ x(-1) = 1; \end{cases}$$

(XI)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2}{t^2}, \\ x(-1) = -1; \end{cases}$$

(XII)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t}{x(t)} + \frac{x(t)}{t}, \\ x(1) = 1; \end{cases}$$

(XIII)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2}{t^2} + 1, \\ x(1) = 0; \end{cases}$$

### 3.5 Equazioni differenziali ordinarie lineari

In questa sezione, considereremo una classe molto importante di equazioni differenziali ordinarie: quelle lineari. Ci limiteremo al caso di equazioni scalari.

**Definizione 3.5.1** *Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) è un'equazione della forma*

$$x^{(m)}(t) = a_0(t)x(t) + \dots + a_j(t)x^{(j)}(t) + \dots + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + b(t), \quad (3.5.1)$$

con  $a_0, \dots, a_j, \dots, a_{m-1}, b : I \rightarrow \mathbf{R}$  continue e  $I$  intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ .

L'equazione si dice **omogenea** se  $b(t) = 0 \ \forall t \in I$ .

**Osservazione 3.5.1** L'equazione (3.5.1) è un caso particolare dell'equazione (3.1.1): in questo caso, si ha  $m = 1$ ,

$$\Omega = I \times \mathbf{R}^m, \quad (3.5.2)$$

$$\begin{cases} f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(t, X_0, \dots, X_{m-1}) = a_0(t)X_0 + \dots + a_j(t)X_j + \dots \\ \quad + a_{m-1}(t)X_{m-1} + b(t), \\ t \in I, X_0, \dots, X_j, \dots, X_{m-1} \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Si osservi che  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Picard 3.3.1, perché è continua e, per  $j = 0, \dots, m-1$ ,  $(t, X_0, \dots, X_j, \dots, X_{m-1}) \in \Omega$ , si ha

$$\frac{\partial f}{\partial X_j}(t, X_1, \dots, X_j, \dots, X_{m-1}) = a_j(t).$$

Dunque, comunque si prendano  $t_0 \in I$ ,  $y^0, \dots, y^j, \dots, y^{m-1}$  in  $\mathbf{R}$ , il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = a_0(t)x(t) + \dots + a_j(t)x^{(j)}(t) + \dots + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + b(t), \\ x(t_0) = y^0, \\ \dots \\ x^{(j)}(t_0) = y^j, \\ \dots \\ x^{(m-1)}(t_0) = y^{m-1} \end{cases} \quad (3.5.4)$$

ha un'unica soluzione massimale.

Ovviamente, il dominio di qualunque soluzione locale è un sottoinsieme di  $I$ .

Vediamo ora una prima, importante proprietà delle equazioni lineari. Ci limitiamo a enunciarla.

**Teorema 3.5.1** *Siano soddisfatte le condizioni della definizione 3.5.1. Sia poi  $x$  una soluzione massimale di (3.5.1). Allora il dominio di  $x$  è  $I$ .*

**Corollario 3.5.1** *Si consideri il problema di Cauchy (3.5.3), sotto le ipotesi della definizione 3.5.1. Allora, comunque si prendano  $t_0 \in I$ ,  $y^0, \dots, y^{m-1} \in \mathbf{R}$ , questo problema ammette un'unica soluzione massimale, che appartiene a  $C^m(I)$ .*

*Dimostrazione* Per quanto visto nell'osservazione 3.5.1, il teorema 3.3.2 è applicabile. Perciò, esiste un'unica soluzione massimale  $x$ , che, per il teorema 3.5.1, ha dominio  $I$ . Applicando poi l'osservazione 3.1.2, possiamo concludere che  $x \in C^m(I)$ .

□

**Esempio 3.5.1** Verifichiamo il teorema 3.5.1 nel caso  $m = 1$ . In questo caso, le soluzioni di (3.5.1) possono essere scritte esplicitamente.

Siano, dunque,  $I$  un intervallo  $J$  un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ ,  $a, b \in C(J)$ ,  $J$  un sottointervallo di  $I$  con interno non vuoto,  $x : J \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile, tale che

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad \forall t \in J. \quad (3.5.5)$$

Sia  $A$  un'arbitraria primitiva di  $a$  in  $I$ . Da (3.5.5) segue

$$e^{-A(t)}x'(t) - a(t)e^{-A(t)}x'(t) = e^{-A(t)}b(t) \quad \forall t \in J. \quad (3.5.6)$$

Poniamo

$$\begin{cases} \Phi : J \rightarrow \mathbf{R}, \\ \Phi(t) = e^{-A(t)}x(t). \end{cases}$$

Osserviamo che il primo membro di (3.5.6) è esattamente uguale a  $\Phi'(t)$ . Fissato dunque  $t_0 \in J$ , esiste  $C \in \mathbf{R}$ , tale che

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s)ds + C \quad \forall t \in J,$$

da cui

$$x(t) = e^{A(t)} \left[ \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s)ds + C \right] \quad \forall t \in J \quad (3.5.7)$$

Viceversa, si verifica facilmente che, se  $J$  un sottointervallo di  $I$  con interno non vuoto e  $x : J \rightarrow \mathbf{R}$  è della forma (3.5.7) per qualche  $C \in \mathbf{R}$ ,  $x$  è soluzione locale dell'equazione (3.5.5).

Dall'espressione (3.5.7), si vede subito che, se  $J$  non coincide con  $I$ ,  $x$  non è massimale. Infatti, la funzione  $y$  definita dalla stessa espressione e di dominio  $I$  è un prolungamento proprio di  $x$  ed è, a sua volta, soluzione locale.

Vediamo ora un esempio esplicito.

Siano  $I = ] -\infty, 0[$ ,  $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $a(t) = \frac{1}{t}$ ,  $b(t) = 1$  (funzione costante). Studiamo dunque l'equazione

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + 1, \quad t \in ] -\infty, 0[. \quad (3.5.8)$$

Una primitiva di  $a$  in  $I$  è

$$\begin{cases} A : I \rightarrow \mathbf{R}, \\ A(t) = \ln(-t). \end{cases}$$

Dalla formula (3.5.7), prendendo  $t_0 = -1$ , otteniamo l'espressione della generica soluzione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\ln(-t)} [\int_{t_0}^t e^{-\ln(-s)} ds + C] \\ &= -t [\int_{-1}^t (-1/s) ds + C] \\ &= t \ln(-t) - Ct, \end{aligned}$$

con  $C \in \mathbf{R}$  arbitrario.

Veniamo ora al motivo per cui si usa il termine "lineare". Nel seguito useremo le consuete convenzioni notazionali relative a somme e prodotti di funzioni a valori reali (si veda [Analisi A], (2.7.1)-(2.7.2)).

**Lemma 3.5.1** *Siano  $I$  un intervallo aperto non vuoto in  $\mathbf{R}$ ,  $a_0, \dots, a_{m-1} \in C(I)$  ( $m \in \mathbf{N}$ ),*

$$\begin{cases} T : C^m(I) \rightarrow C(I), \\ Tx = x^{(m)} - a_0 x - \dots - a_j x^{(j)} - a_{m-1} x^{(m-1)}. \end{cases} \quad (3.5.9)$$

Allora  $T$  è un operatore lineare tra gli spazi vettoriali  $C^m(I)$  e  $C(I)$ .

*Dimostrazione* Innanzi tutto, è chiaro che, se  $x \in C^m(I)$ ,  $Tx \in C(I)$ . Inoltre, se  $x$  e  $y$  sono elementi di  $C^m(I)$  e  $\lambda$  e  $\mu$  sono numeri reali, si ha

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x + \mu y)^{(m)} - a_0(\lambda x + \mu y) - \dots - a_j(\lambda x + \mu y)^{(j)} \\ &\quad - \dots - a_{m-1}(\lambda x + \mu y)^{(m-1)} \\ &= \lambda x^{(m)} + \mu y^{(m)} - \lambda a_0 x - \mu a_0 y - a_1(\lambda x' + \mu y') - \dots \\ &\quad - a_j(\lambda x^{(j)} + \mu y^{(j)}) - \dots - a_{m-1}(\lambda x^{(m-1)} + \mu y^{(m-1)}) \\ &= \lambda(x^{(m)} - a_0 x - \dots - a_j x^{(j)} - \dots - a_{m-1} x^{(m-1)}) \\ &\quad + \mu(y^{(m)} - a_0 y - \dots - a_j y^{(j)} - \dots - a_{m-1} y^{(m-1)}) \\ &= \lambda Tx + \mu Ty. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 3.5.2** Dal lemma 3.5.1 e dal teorema 3.5.1 segue che determinare le soluzioni massimali dell'equazione (3.5.1) equivale a determinare le soluzioni in  $C^m(I)$  dell'equazione

$$Tx = b, \tag{3.5.10}$$

con  $T$  definito in (3.5.9). (3.5.10) è un'equazione lineare, nel senso che  $T$  è un operatore lineare.

**Definizione 3.5.2** Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria lineare come nella definizione 3.5.1. L'insieme delle soluzioni massimali (e quindi di dominio  $I$ , per il teorema 3.5.1) si chiama **integrale generale** dell'equazione.

Cominciare col considerare equazioni omogenee.

**Teorema 3.5.2** Consideriamo un'equazione differenziale lineare come nella definizione 3.5.1, nel caso omogeneo (cioè, con  $b(t) = 0 \forall t \in I$ ). Allora l'integrale generale è un sottospazio vettoriale di  $C^m(I)$  di dimensione  $m$ .

*Dimostrazione* Osserviamo, innanzi tutto, che, nel caso omogeneo, l'integrale generale coincide con il nucleo dell'operatore lineare  $T$  definito in (3.5.9). È ben noto che il nucleo di un operatore lineare è un sottospazio vettoriale del dominio. Si tratta allora di mostrare che tale sottospazio ha dimensione finita e uguale a  $m$ . Ciò può essere fatto esibendo una base con

$m$  elementi. A tale scopo, fissiamo  $t_0$  in  $I$  e consideriamo i seguenti  $m$  problemi di Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} Tx = 0, \\ x(t_0) = 1, \\ x'(t_0) = 0, \\ \dots \\ x^{(m-1)}(t_0) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Tx = 0, \\ x(t_0) = 0, \\ x'(t_0) = 1, \\ \dots \\ x^{(m-1)}(t_0) = 0, \end{array} \right. \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} Tx = 0, \\ x(t_0) = 0, \\ x'(t_0) = 0, \\ \dots \\ x^{(m-1)}(t_0) = 1. \end{array} \right. \quad (3.5.11)$$

Per il corollario 3.5.1, ciascuno di questi problemi ha un'unica soluzione massimale, di dominio  $I$ . Chiamiamo  $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$  queste soluzioni e verifichiamo che costituiscono una base del nucleo di  $T$ . Si tratta di far vedere che:

- (I) ogni elemento del nucleo di  $T$  è combinazione lineare di  $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$ ;
- (II)  $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$  sono linearmente indipendenti.

Cominciamo col punto (I).

Sia  $x \in C^m(I)$ , tale che  $Tx = 0$ . Sia poi

$$y := x(t_0)\phi_0 + x'(t_0)\phi_1 + \dots + x^{(m-1)}(t_0)\phi_{m-1}.$$

Chiaramente,  $y$  è una combinazione lineare di  $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$ . Facciamo vedere che  $y = x$ . A tale scopo, consideriamo il problema di Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} Tz = 0, \\ z(t_0) = x(t_0), \\ z'(t_0) = x'(t_0), \\ \dots \\ z^{(m-1)}(t_0) = x^{(m-1)}(t_0). \end{array} \right. \quad (3.5.12)$$

Ovviamente,  $x$  è soluzione massimale di (3.5.12). Ma lo è anche  $y$ . Infatti,  $Ty = 0$ , perché  $T$  è lineare. Inoltre,

$$\begin{aligned} y(t_0) &= x(t_0)\phi_0(t_0) + x'(t_0)\phi_1(t_0) + \dots + x^{(m-1)}(t_0)\phi_{m-1}(t_0) = x(t_0), \\ y'(t_0) &= x(t_0)\phi'_0(t_0) + x'(t_0)\phi'_1(t_0) + \dots + x^{(m-1)}(t_0)\phi'_{m-1}(t_0) = x'(t_0), \\ &\dots, \\ y^{(m-1)}(t_0) &= x(t_0)\phi_0^{(m-1)}(t_0) + x'(t_0)\phi_1^{(m-1)}(t_0) + \dots + x^{(m-1)}(t_0)\phi_{m-1}^{(m-1)}(t_0) \\ &= x^{(m-1)}(t_0). \end{aligned}$$

L'identità tra  $x$  e  $y$  segue allora dall'unicità della soluzione massimale del problema di Cauchy. Dunque,  $x$  è combinazione lineare di  $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$ .

(II) Verifichiamo che  $\phi_0, \dots, \phi_{m-1}$  sono linearmente indipendenti. Si tratta allora di mostrare che l'unica loro combinazione lineare che fornisce la funzione identicamente nulla su  $I$  (che è lo zero dello spazio vettoriale  $C^m(I)$ ) è quella banale.

Siano  $c_0, \dots, c_{m-1}$  numeri reali tali che

$$c_0\phi_0(t) + \dots + c_{m-1}\phi_{m-1}(t) = 0 \quad \forall t \in I. \quad (3.5.13)$$

Da (3.5.13) segue subito

$$\begin{aligned} c_0\phi'_0(t) + \dots + c_{m-1}\phi'_{m-1}(t) &= 0 & \forall t \in I, \\ \dots &\dots \\ c_0\phi_0^{(m-1)}(t) + \dots + c_{m-1}\phi_{m-1}^{(m-1)}(t) &= 0 & \forall t \in I. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Prendendo allora  $t = t_0$  e utilizzando (3.5.13)-(3.5.14), si ottiene in successione

$$c_0 = 0, c_1 = 0, \dots, c_{m-1} = 0.$$

Con ciò la dimostrazione è conclusa.  $\square$

**Definizione 3.5.3** *Data un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $m$ , si definisce sistema fondamentale di soluzioni una base qualunque dell'integrale generale.*

*Per il teorema 3.5.2, tutti i sistemi fondamentali di soluzioni hanno  $m$  elementi.*

**Esempio 3.5.2** Data l'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad t \in I,$$

con  $I$  intervallo con interno non vuoto in  $\mathbf{R}$  e  $a \in C(I)$ , per quanto visto nell'esempio 3.5.1, un sistema fondamentale di soluzioni è costituito da  $\{\phi_0\}$ , con

$$\phi_0(t) = e^{A(t)},$$

ove  $A$  è un'arbitraria primitiva di  $a$ .

**Osservazione 3.5.3** È conveniente disporre di un metodo per verificare se, date  $m$  soluzioni massimali  $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$  di una certa equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $m$ ,  $\{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$  sia un sistema fondamentale di soluzioni. A tale scopo, introduciamo il così detto **wronskiano**

$w(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})(t)$  di  $\{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$ . Si tratta della funzione di dominio  $I$  tale che,  $\forall t \in I$ ,

$$w(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})(t) := \det \begin{pmatrix} \psi_0(t) & \dots & \psi_{m-1}(t) \\ \psi'_0(t) & \dots & \psi'_{m-1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_0^{(m-1)}(t) & \dots & \psi_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.5.15)$$

**Teorema 3.5.3** (*Teorema del wronskiano*) Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $m$ ,

$$x^{(m)}(t) = a_0(t)x(t) + \dots + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t), \quad (3.5.16)$$

con  $a_0, \dots, a_{m-1} \in C(I)$ , ove  $I$  è un intervallo con interno non vuoto in  $\mathbf{R}$ . Siano  $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$   $m$  soluzioni massimali di (3.5.16). Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (I)  $\{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$  è un sistema fondamentale di soluzioni per (3.5.16);
- (II)  $\forall t \in I$   $w(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})(t) \neq 0$ ;
- (III) esiste  $t_0$  in  $I$ , tale che  $w(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})(t_0) \neq 0$ .

*Dimostrazione* Verifichiamo che da (I) segue (II).

Sia  $\{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$  un sistema fondamentale di soluzioni per (3.5.16) e supponiamo (per assurdo) che, per un certo  $t_1 \in I$ , valga

$$w(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})(t_1) = 0.$$

Ciò implica che le colonne

$$\begin{pmatrix} \psi_0(t_1) \\ \psi'_0(t_1) \\ \dots \\ \psi_0^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1(t_1) \\ \psi'_1(t_1) \\ \dots \\ \psi_1^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \psi_{m-1}(t_1) \\ \psi'_{m-1}(t_1) \\ \dots \\ \psi_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \quad (3.5.17)$$

sono linearmente dipendenti. Dunque, esistono  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  numeri reali non tutti nulli, tali che

$$\begin{aligned} c_0\psi_0(t_1) + c_1\psi_1(t_1) + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}(t_1) &= 0 \\ c_0\psi'_0(t_1) + c_1\psi'_1(t_1) + \dots + c_{m-1}\psi'_{m-1}(t_1) &= 0 \\ \dots \\ c_0\psi_0^{(m-1)}(t_1) + c_1\psi_1^{(m-1)}(t_1) + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}^{(m-1)}(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Si consideri allora la funzione  $\psi := c_0\psi_0 + c_1\psi_1 + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}$ . Essa risolve l'equazione (3.5.16) e si annulla in  $t_1$ , assieme a tutte le sue derivate di ordine non superiore a  $m-1$ . Allora, per l'unicità della soluzione massimale del problema di Cauchy, possiamo dire che  $\psi(t) = 0 \forall t \in I$ . Ciò è in contraddizione con (I) e col fatto che  $\psi$  è una combinazione lineare non banale di  $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$ . Siamo dunque arrivati a una contraddizione.

É ovvio che (II) implica (III).

Mostriamo che (III) implica (I). Infatti, siano  $c_0, \dots, c_{m-1}$  numeri reali tali che

$$c_0\psi_0(t) + c_1\psi_1(t) + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}(t) = 0 \quad \forall t \in I. \quad (3.5.19)$$

Si tratta di provare che

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0. \quad (3.5.20)$$

Da (3.5.19) segue che, per ogni  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} c_0\psi'_0(t) + c_1\psi'_1(t) + \dots + c_{m-1}\psi'_{m-1}(t) &= 0, \\ \dots \\ c_0\psi_0^{(m-1)}(t) + c_1\psi_1^{(m-1)}(t) + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}^{(m-1)}(t) &= 0. \end{aligned}$$

In particolare, per  $t = t_0$ ,

$$\begin{aligned} c_0\psi_0(t_0) + c_1\psi_1(t_0) + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}(t_0) &= 0, \\ c_0\psi'_0(t_0) + c_1\psi'_1(t_0) + \dots + c_{m-1}\psi'_{m-1}(t_0) &= 0, \\ \dots \\ c_0\psi_0^{(m-1)}(t_0) + c_1\psi_1^{(m-1)}(t_0) + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}^{(m-1)}(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Da (III) e da noti risultati sui sistemi lineari algebrici, segue allora (3.5.20).

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Osservazione 3.5.4** In generale, la determinazione esplicita di un sistema fondamentale di soluzioni per un'equazione differenziale ordinaria lineare è impossibile. Ciò si può fare in alcuni casi particolari. Nel seguito, tratteremo equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti. Nell'esercizio 3.5.3 viene trattata una particolare equazione a coefficienti variabili.

**Definizione 3.5.4** Siano  $a_0, \dots, a_j, \dots, a_{m-1}$  numeri reali. Chiameremo **polinomio caratteristico** dell'equazione

$$x^{(m)}(t) = a_0x(t) + \dots + a_jx^{(j)}(t) + \dots + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) \quad (3.5.21)$$

il polinomio

$$P(\lambda) := \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \dots - a_1\lambda - a_0. \quad (3.5.22)$$

**Lemma 3.5.2** Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti (3.5.21). Siano  $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ , tale che  $P(\lambda_0) = 0$ , con  $P$  polinomio caratteristico di (3.5.21) e  $x(t) = e^{\lambda_0 t}$ . Allora  $x$  è soluzione in tutto  $\mathbf{R}$  di (3.5.21).

*Dimostrazione* Si ha,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,

$$x'(t) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}, \dots, x^{(j)}(t) = \lambda_0^j e^{\lambda_0 t}, \dots, x^{(m-1)}(t) = \lambda_0^{m-1} e^{\lambda_0 t}.$$

Segue subito che,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,

$$x^{(m)}(t) - a_0 x(t) - \dots - a_j x^{(j)}(t) - \dots - a_{m-1} x^{(m-1)}(t) = P(\lambda_0) e^{\lambda_0 t} = 0.$$

□

Veniamo ora al caso di un'equazione del secondo ordine.

**Teorema 3.5.4** Consideriamo in un intervallo con interno non vuoto  $I$  l'equazione

$$x''(t) = a_0 x(t) + a_1 x'(t), \quad (3.5.23)$$

con  $a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ . Sia  $P(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$  il suo polinomio caratteristico. Allora:

(I) se  $P$  ha due zeri reali e distinti  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ , le funzioni  $\psi_0(t) = e^{\lambda_0 t}$  e  $\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni;

(II) se  $P$  ha l'unico zero reale  $\lambda_0$  di molteplicità algebrica 2, le funzioni  $\psi_0(t) = e^{\lambda_0 t}$  e  $\psi_1(t) = te^{\lambda_0 t}$  costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni;

(III) se  $P$  ha gli zeri complessi coniugati  $\alpha \pm i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\beta \neq 0$ ), le funzioni  $\psi_0(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  e  $\psi_1(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$  costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni.

*Dimostrazione* Si tratta di verificare che, in ciascun caso,  $\psi_0$  e  $\psi_1$  sono soluzioni linearmente indipendenti.

Consideriamo il caso (I). Dal lemma 3.5.2, si ha che  $\psi_0$  e  $\psi_1$  sono soluzioni. Per verificare che sono linearmente indipendenti, usiamo il teorema del wronskiano. Si ha facilmente che,  $\forall t \in I$ ,

$$w(\psi_0, \psi_1)(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 t} & \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_0) e^{(\lambda_0 + \lambda_1)t} \neq 0.$$

Consideriamo il caso (II).  $\psi_0$  è soluzione. Per far vedere che lo è anche  $\psi_1$ , osserviamo che, poiché  $\lambda_0$  è l'unico zero di  $P$  e ha molteplicità 2,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2.$$

Dunque,  $\forall t \in I$ ,

$$\begin{aligned} \psi_1''(t) - a_1\psi_1'(t) - a_0\psi_1(t) &= \lambda_0(2 + \lambda_0 t)e^{\lambda_0 t} - 2\lambda_0(1 + t\lambda_0)e^{\lambda_0 t} + \lambda_0^2 t e^{\lambda_0 t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$w(\psi_0, \psi_1)(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 t} & (1 + t\lambda_0) e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{2\lambda_0 t} \neq 0.$$

Consideriamo infine il caso (III). Poiché  $\alpha \pm i\beta$ , sono gli zeri di  $P$ , si ha,  $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ :

$$P(\lambda) = (\lambda - \alpha - i\beta)(\lambda - \alpha + i\beta) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2.$$

Segue che,  $\forall t \in I$ ,

$$\begin{aligned} \psi_0''(t) - a_1\psi_0'(t) - a_0\psi_0(t) &= \psi_0''(t) - 2\alpha\psi_0'(t) + (\alpha^2 + \beta^2)\psi_0(t) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha t} \cos(\beta t) - 2\alpha\beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ &\quad - 2\alpha[\alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t)] \\ &\quad + (\alpha^2 + \beta^2)e^{\alpha t} \cos(\beta t) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, si verifica che anche  $\psi_1$  è soluzione dell'equazione. Per quanto riguarda la lineare indipendenza, si ha,  $\forall t \in I$ ,

$$\begin{aligned} w(\psi_0, \psi_1)(t) &= \det \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{pmatrix} \\ &= \beta e^{2\alpha t} \neq 0. \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Veniamo ora a trattare equazioni lineari non omogenee. Abbiamo già osservato che la generica equazione (3.5.1), con la posizione (3.5.9), può essere trascritta nella forma (3.5.10).

Si dirà che l'equazione

$$x^{(m)}(t) = a_0(t)x(t) + \dots + a_j(t)x^{(j)}(t) + \dots + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) \quad (3.5.24)$$

è l'**omogenea associata** dell'equazione (3.5.1).

Cominciamo allora col descrivere la struttura dell'integrale generale di un'equazione lineare non necessariamente omogenea.

**Teorema 3.5.5** *Si consideri l'equazione differenziale lineare (3.5.1), sotto le condizioni della definizione 3.5.1. Siano  $\{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$  un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata e sia  $\phi$  una soluzione massimale (qualunque) di (3.5.1). Allora l'integrale generale di (3.5.1) coincide con*

$$\{c_0\psi_0 + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1} + \phi : c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbf{R}\}. \quad (3.5.25)$$

*Dimostrazione* Sia  $x = c_0\psi_0 + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1} + \phi$ , con  $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbf{R}$ . Allora, poiché  $T$  è lineare, si ha

$$Tx = c_0T\psi_0 + \dots + c_{m-1}T\psi_{m-1} + T\phi = b.$$

Viceversa, sia  $x$  una soluzione massimale (quindi di dominio  $I$ ) di (3.5.1). Allora

$$T(x - \phi) = b - b = 0.$$

Dunque,  $x - \phi$  è soluzione massimale dell'equazione omogenea associata. Perciò, esistono  $c_0, \dots, c_{m-1}$  in  $\mathbf{R}$  tali che

$$x - \phi = c_0\psi_0 + \dots + c_{m-1}\psi_{m-1}.$$

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Osservazione 3.5.5** In base al teorema 3.5.5, per determinare l'integrale generale di (3.5.1), basta conoscere un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata e una singola soluzione della non omogenea. Nel seguito descriveremo un metodo generale (il così detto **metodo della variazione delle costanti**, un ossimoro), per determinare, noto un sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea associata, una soluzione particolare della non omogenea. Ci limiteremo a trattare equazioni del secondo ordine, anche se il metodo può essere generalizzato a equazioni di ordine qualunque.

**Esempio 3.5.3 (Metodo della variazione delle costanti)** Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$x''(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x'(t) + b(t), \quad t \in I, \quad (3.5.26)$$

con  $I$  intervallo aperto non vuoto in  $\mathbf{R}$ , e  $a_0, a_1, b$  appartenenti a  $C(I)$ . Vogliamo determinare una soluzione massimale di (3.5.26). Supponiamo di conoscere un sistema fondamentale di soluzioni  $\{\psi_0, \psi_1\}$  dell'equazione omogenea associata

$$x''(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x'(t). \quad (3.5.27)$$

Cerchiamo una soluzione  $\phi$  di (3.5.26) nella forma

$$\phi(t) = c_0(t)\psi_0(t) + c_1(t)\psi_1(t), \quad (3.5.28)$$

con  $c_0, c_1$  appartenenti a  $C^1(I)$ . Osserviamo che, se  $c_0$  e  $c_1$  sono costanti, (3.5.28) è soluzione dell'equazione omogenea (3.5.27). Di qui la denominazione "variazione delle costanti". Si ha allora, per ogni  $t \in I$ ,

$$\phi'(t) = c'_0(t)\psi_0(t) + c'_1(t)\psi_1(t) + c_0(t)\psi'_0(t) + c_1(t)\psi'_1(t). \quad (3.5.29)$$

Imponiamo allora la prima condizione

$$c'_0(t)\psi_0(t) + c'_1(t)\psi_1(t) = 0, \forall t \in I. \quad (3.5.30)$$

Da (3.5.29)-(3.5.30) segue allora  $\forall t \in I$ , tenuto conto che  $\psi_0$  e  $\psi_1$  sono soluzioni di (3.5.28),

$$\begin{aligned} \phi'' - a_1\phi' - a_0\phi &= c'_0\psi'_0 + c'_1\psi'_1 + c_0\psi''_0 + c_1\psi''_1 - a_1(c_0\psi'_0 + c_1\psi'_1) \\ &\quad - a_0(c_0\psi_0 + c_1\psi_1) \\ &= c'_0\psi'_0 + c'_1\psi'_1. \end{aligned}$$

Ci siamo dunque ricondotti al seguente sistema di equazioni lineari algebriche, dipendente dal parametro  $t \in I$ , nelle incognite  $c'_0(t)$ ,  $c'_1(t)$ :

$$\begin{cases} c'_0(t)\psi_0(t) + c'_1(t)\psi_1(t) = 0, \\ c'_0(t)\psi'_0(t) + c'_1(t)\psi'_1(t) = b(t). \end{cases} \quad (3.5.31)$$

Per il teorema del wronskiano, il sistema (3.5.31) è univocamente risolubile per ogni  $t \in I$  e si ottiene:

$$c'_0(t) = -\frac{b(t)\psi_1(t)}{w(\psi_0, \psi_1)(t)}, \quad c'_1(t) = \frac{b(t)\psi_0(t)}{w(\psi_0, \psi_1)(t)}. \quad (3.5.32)$$

Allora, se  $c_0$  e  $c_1$  sono primitive delle funzioni  $c'_0$  e  $c'_1$  definite in (3.5.32), (3.5.28) è soluzione di (3.5.26).

**Esempio 3.5.4** Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t^{-1}e^t, \quad t \in \mathbf{R}^+. \quad (3.5.33)$$

Cominciamo col considerare l'equazione omogenea associata

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0. \quad (3.5.34)$$

Si tratta di un'equazione a coefficienti costanti, con polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1. \quad (3.5.35)$$

$P$  ha in  $\mathbf{C}$  l'unico zero  $-1$ , con molteplicità algebrica 2. Dunque, in base al teorema 3.5.4, un sistema fondamentale di soluzioni per (3.5.34) è costituito da

$$\psi_0(t) = e^{-t}, \quad \psi_1(t) = te^{-t}.$$

Cerchiamo allora una soluzione particolare di (3.5.33) nella forma

$$\phi(t) = c_0(t)e^{-t} + c_1(t)te^{-t}.$$

Con il metodo descritto nell'esempio 3.5.3, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c'_0(t)e^{-t} + c'_1(t)te^{-t} = 0, \\ -c'_0(t)e^{-t} + c'_1(t)(1-t)e^{-t} = t^{-1}e^t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}^+$$

che fornisce

$$c'_0(t) = -e^{2t}, \quad c'_1(t) = t^{-1}e^{2t}.$$

Possiamo allora prendere

$$c_0(t) = -\frac{e^{2t}}{2}, \quad c_1(t) = \int_1^t s^{-1}e^{2s}ds,$$

da cui

$$\phi(t) = c_0(t)\psi_0(t) + c_1(t)\psi_1(t) = te^{-t} \int_1^t s^{-1}e^{2s}ds - \frac{e^t}{2}. \quad (3.5.36)$$

Concludendo, l'integrale generale di (3.5.33) è costituito dalla famiglia di funzioni, di dominio  $\mathbf{R}^+$ ,

$$\{t \rightarrow (c_0 + c_1 t)e^{-t} + te^{-t} \int_1^t s^{-1}e^{2s}ds - \frac{e^t}{2} : c_0, c_1 \in \mathbf{R}\}. \quad (3.5.37)$$

Volendo allora, per esempio, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t^{-1}e^t, & t \in \mathbf{R}^+, \\ x(1) = 0, \\ x'(0) = 0, \end{cases}$$

si ottiene, imponendo le due condizioni in  $t_0 = 1$  alla generica funzione della forma (3.5.37),  $c_0 = e^2/2$ ,  $c_1 = 0$ . Otteniamo allora la soluzione

$$x(t) = \frac{e^2}{2}e^{-t} + te^{-t} \int_1^t s^{-1}e^{2s}ds - \frac{e^t}{2}.$$

**Osservazione 3.5.6** Il metodo della variazione delle costanti, descritto nel precedente esempio 3.5.3, porta spesso a calcoli piuttosto onerosi. In alcuni casi è più semplice cercare direttamente una soluzione particolare di una certa equazione non omogenea.

Vediamo uno di questi casi.

Consideriamo un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea del tipo

$$x''(t) = a_0x(t) + a_1x'(t) + b(t), \quad (3.5.38)$$

con  $a_0$  e  $a_1$  in  $\mathbf{R}$ . Supponiamo che  $b$  sia della forma

$$b(t) = t^m e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad (3.5.39)$$

oppure

$$b(t) = t^m e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

con  $m \in \mathbf{N}_0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  reali. Sia  $P$  il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata. Supponiamo che  $\alpha + i\beta$  sia uno zero di molteplicità  $r \in \mathbf{N}_0$ , intendendo che la molteplicità è nulla se  $P(\alpha + i\beta) \neq 0$ . Allora si potrebbe dimostrare che (3.5.38) ammette una soluzione  $\phi$  della forma

$$\phi(t) = t^r [P(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t) + Q(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t)], \quad (3.5.40)$$

con  $P$  e  $Q$  polinomi di grado non superiore a  $m$ .

**Esempio 3.5.5** Supponiamo di voler determinare l'integrale generale di

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 e^t, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.5.41)$$

L'equazione omogenea associata

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$$

ha il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

che ha un unico zero, 1 di molteplicità 2. Dunque, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\{t \rightarrow (c_0 + c_1 t)e^t : c_0, c_1 \in \mathbf{R}\}$$

Per determinare una soluzione particolare di (3.5.41), applichiamo il metodo descritto nell'osservazione 3.5.6.

La funzione  $b(t) = t^2 e^t$  è della forma (3.5.39), con

$$m = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

$\alpha + i\beta = 1$  è uno zero di molteplicità 2 del polinomio caratteristico. Cercheremo perciò una soluzione della forma

$$\phi(t) = t^2 P(t) e^t, \quad (3.5.42)$$

con  $P$  polinomio di grado non superiore a 2. Quindi  $\phi$  sarà nella forma

$$\phi(t) = t^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) e^t, \quad (3.5.43)$$

con  $a_0, a_1, a_2$  numeri reali da determinarsi.

Con calcoli tediosi, ma elementari, si ottiene che, se  $\phi$  è della forma (3.5.43), si ha

$$\phi''(t) - 2\phi'(t) + \phi(t) = e^t(2a_0 + 6a_1 t + 12a_2 t^2).$$

Prendiamo allora

$$2a_0 = 6a_1 = 0, \quad 12a_2 = 1,$$

vale a dire,

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{12}.$$

Una soluzione particolare della non omogenea è allora

$$\phi(t) = \frac{1}{12}t^4 e^t \quad (3.5.44)$$

e l'integrale generale di (3.5.41) è

$$\{t \rightarrow (c_0 + c_1 t + \frac{1}{12}t^4) e^t : c_0, c_1 \in \mathbf{R}\}$$

**Esercizio 3.5.1** Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(I)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), & t \in \mathbf{R}, \\ x(0) = 1; \end{cases}$$

(II)

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{x(t)}{1+t}, & t > -1, \\ x(0) = 2; \end{cases}$$

(III)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{t}, & t < 0, \\ x(-1) = -1; \end{cases}$$

(IV)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{t}, & t > 0, \\ x(1) = -1; \end{cases}$$

(V)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \tan(t), & -\pi/2 < t < \pi/2, \\ x(0) = \pi; \end{cases}$$

(VI)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{1-t^2} + t + 1, & -1 < t < 1, \\ x(0) = 0; \end{cases}$$

(VII)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \tan(t) + \frac{1}{\cos(t)}, & -\pi/2 < t < \pi/2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(VIII)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \tan(t) + \cos(t), & -\pi/2 < t < \pi/2. \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 3.5.2** Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

(I)

$$x''(t) = 4x(t) + t^2 e^{2t}, \quad t \in \mathbf{R};$$

(II)

$$x''(t) = -9x(t) + \cos(2t), \quad t \in \mathbf{R};$$

(III)

$$x''(t) = -4x(t) + 4x'(t) + \sin(2t) + e^{2t}, \quad t \in \mathbf{R};$$

(IV)

$$x''(t) = -2x(t) - 2x'(t) + e^t \sin(t), \quad t \in \mathbf{R};$$

(V)

$$x''(t) = -6x(t) + 5x'(t) + (t^2 + 1)e^t, \quad t \in \mathbf{R};$$

(VI)

$$x''(t) = -x'(t) + \sin^2(t), \quad t \in \mathbf{R};$$

(VII)

$$x''(t) = -x(t) + \tan(t), \quad -\pi/2 < t < \pi/2;$$

(VIII)

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{t} + t, & t \in \mathbf{R}^+; \end{cases}$$

(IX)

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{2x(t)}{t} + t^3, & t \in \mathbf{R}^+; \end{cases}$$

(X)

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{2x(t)}{t} + t^3, & t < 0. \end{cases}$$

**Esercizio 3.5.3** Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea

$$t^2 x''(t) - a_1 t x'(t) - a_0 x(t) = 0 \quad (3.5.45)$$

nell'intervallo  $I_+ = ]0, +\infty[$ , oppure  $I_- = ]-\infty, 0[$ , in modo che sia ri-conducibile (dividendo per  $t^2$ ) alla forma (3.5.1). Determinare un sistema fondamentale di soluzioni. Sfruttare il fatto che, ponendo  $t = e^s$  nel caso di  $I_+$  e  $t = -e^s$  nel caso di  $I_-$ , l'equazione diventa a coefficienti costanti.

## Capitolo 4

# Misura e integrazione in $\mathbf{R}^n$

### 4.1 Aritmetica di $[0, +\infty]$

In questo capitolo vogliamo fornire i rudimenti della teoria della misura e integrazione secondo Lebesgue.

Intuitivamente, la nozione di misura secondo Lebesgue, che vedremo nel caso generale di  $\mathbf{R}^n$ , ha un significato strettamente legato alla dimensione: in dimensione 1 è essenzialmente una generalizzazione del concetto di lunghezza, in dimensione 2 di area, in dimensione 3 di volume.

Poiché tale misura può anche essere uguale a  $+\infty$ , è conveniente estendere le solite operazioni di somma e prodotto tra numeri reali non negativi al caso in cui un addendo o un fattore sia  $+\infty$ . Poniamo allora

$$[0, +\infty] := [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}, \quad (4.1.1)$$

ove  $+\infty$  è un oggetto non appartenente a  $[0, +\infty[$ . Ammettiamo che

$$a < +\infty \quad \forall a \in [0, +\infty[. \quad (4.1.2)$$

Al solito, dati  $a$  e  $b$  in  $[0, +\infty]$ , la scrittura

$$a \leq b \quad (4.1.3)$$

significherà che  $a < b$ , oppure  $a = b$ . Osserviamo che, con questa estensione della classica relazione di ordine in  $[0, +\infty[$ , si verifica facilmente il seguente fatto, la cui facile dimostrazione lasciamo come esercizio (vedi l'esercizio 4.1.1):

**Teorema 4.1.1** *Sia  $A$  un arbitrario sottoinsieme non vuoto di  $[0, +\infty]$ . Allora  $A$  è dotato di estremo superiore e inferiore in  $[0, +\infty]$ , nel senso che ammette sia il minimo maggiorante, che il massimo minorante.*

Ad esempio, in  $[0, +\infty]$ ,

$$\sup([0, 1]) = 1, \quad \sup(\mathbf{N}) = +\infty.$$

Estendiamo ora somma e prodotto a  $[0, +\infty]$ :  $a+b$  e  $ab$  avranno il solito significato nel caso di  $a$  e  $b$  in  $[0, +\infty[$ , mentre dato  $a \in [0, +\infty]$ ,

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \tag{4.1.4}$$

e

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \neq 0, \\ 0 & \text{se } a = 0. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Osserviamo che, in particolare,  $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$ . Questa posizione può sembrare strana. Per il momento, la possiamo giustificare col fatto che, per esempio, una retta in dimensione due può essere pensata come un rettangolo degenere con dimensioni 0 e  $+\infty$ . Ebbene, noi vogliamo che una retta abbia, in dimensione due, misura nulla.

Le operazioni di somma e prodotto ora definite godono di buone proprietà algebriche:

**Teorema 4.1.2** *Le operazioni di somma e prodotto definite in  $[0, +\infty]$  godono delle proprietà commutativa e associativa. Inoltre, la moltiplicazione gode della proprietà distributiva nei confronti della somma.*

Lasciamo al lettore la facile dimostrazione del teorema 4.1.2 (esercizio 4.1.2).

Vogliamo infine considerare la somma di una serie. Ricordiamo, innanzi tutto, che, se  $a_n \in [0, +\infty[ \forall n \in \mathbf{N}$ , la successione delle somme parziali  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , con

$$s_n := a_1 + \dots + a_n,$$

ha sempre limite, eventualmente uguale a  $+\infty$ . Tale limite coincide con  $\sup_{n \in \mathbf{N}} s_n$  (vedi [Analisi A], teorema 5.2.1). Sarà quindi naturale porre, data una successione  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  a valori in  $[0, +\infty]$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sup\{s_n : n \in \mathbf{N}\}. \tag{4.1.6}$$

Naturalmente, l'estremo superiore andrà inteso in  $[0, +\infty]$ . Chiaramente, la somma coinciderà con la solita somma se la serie converge in  $\mathbf{R}$ , mentre sarà uguale a  $+\infty$  in tutti gli altri casi. In particolare, è chiaro che, se  $a_n = +\infty$  per qualche  $n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ .

**Esercizio 4.1.1** Dimostrare dettagliatamente il teorema 4.1.1.

**Esercizio 4.1.2** Dimostrare dettagliatamente il teorema 4.1.2. Ovviamente, basterà considerare il caso in cui almeno uno degli addendi o dei fattori è  $+\infty$ .

## 4.2 Intervalli $n$ -dimensionali e loro volumi

In questa sezione, consideremo solo insiemi con una struttura molto semplice, i così detti intervalli  $n$ -dimensionali. Ne definiremo il volume ( $n$ -dimensionale). Essi svolgeranno una funzione ausiliaria per definire misure e misure esterne di insiemi più complicati.

Cominciamo col definire la lunghezza di un intervallo limitato in dimensione uno.

**Definizione 4.2.1** Sia  $I$  un intervallo limitato in  $\mathbf{R}$ . Poniamo

$$l(I) := \begin{cases} \sup(I) - \inf(I) & \text{se } I \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } I = \emptyset. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Chiameremo  $l(I)$  **lunghezza** dell'intervallo  $I$ .

**Osservazione 4.2.1** In base alla definizione 4.2.1, gli intervalli  $]0, 1[, ]0, 1[$ ,  $[0, 1[, [0, 1]$  hanno tutti lunghezza 1.

Diamo ora la definizione di **intervallo  $n$ -dimensionale**.

**Definizione 4.2.2** Sia  $I \subseteq \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). Diremo che  $I$  è un intervallo  $n$ -dimensionale se esistono  $I_1, \dots, I_n$ , intervalli limitati in  $\mathbf{R}$ , tali che

$$I = I_1 \times \dots \times I_n$$

(prodotto cartesiano).

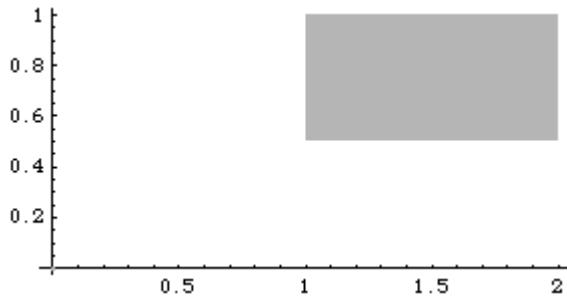


Figura 4.1

**Osservazione 4.2.2** Gli intervalli 2–dimensionali sono rettangoli in  $\mathbf{R}^2$  con i lati paralleli agli assi, che possono contenere almeno parte della loro frontiera. Nella figura 4.1 è , ad esempio, rappresentato l’intervallo 2–dimensionale

$$I = ]1, 2[ \times ]1/2, 1[.$$

In dimensione 3 abbiamo invece dei parallelepipedi, ancora con i lati paralleli agli assi. Nella figura 4.2, è , ad esempio, rappresentato l’intervallo tridimensionale

$$I = [1, 3/2] \times [1, 3/2] \times [2, 3].$$

Passiamo ora a definire il **volumen** *n*–dimensionale di un intervallo *n*–dimensionale.

**Definizione 4.2.3** Sia  $I$  un intervallo *n*–dimensionale,  $I = I_1 \times \dots \times I_n$  e  $I_1, \dots, I_n$  intervalli limitati in  $\mathbf{R}$ . Chiamiamo volume *n*–dimensionale di  $I$ , e indichiamo con la scrittura  $\text{vol}_n(I)$ , il numero reale

$$\text{vol}_n(I) = l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_n). \quad (4.2.2)$$

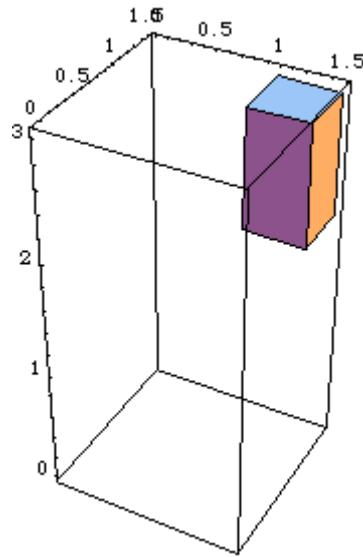


Figura 4.2

**Osservazione 4.2.3** Si verifica facilmente che la definizione (4.2.3) è ben posta. Infatti, se  $I \neq \emptyset$ , gli intervalli  $I_1, \dots, I_n$  sono univocamente determinati: per  $j = 1, \dots, n$ , si ha infatti  $I_j = \pi_j(I)$ , con  $\pi_j$  definita in (1.4.1). Se invece  $I = \emptyset$ , necessariamente almeno uno degli  $I_j$  è vuoto. Ne segue che il prodotto in (4.2.2) è uguale a 0.

Per qualche esempio, ci riferiamo all'osservazione 4.2.2: si ha

$$\text{vol}_2([1, 2] \times [1/2, 1]) = 1 \cdot (1/2) = 1/2,$$

$$\text{vol}_3([1, 3/2] \times [1, 3/2] \times [2, 3]) = (1/2) \cdot (1/2) \cdot 1 = 1/4.$$

Naturalmente,  $\text{vol}_2$  e  $\text{vol}_3$  sono, rispettivamente, l'area e il volume tridimensionale soliti.

### 4.3 Misura esterna

Presentiamo ora un'estensione della definizione di volume  $n$ -dimensionale a un generico sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$ .

**Definizione 4.3.1** Sia  $E \subseteq \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ). Dato  $E$  generico sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$ , poniamo

$$L_n^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k) : E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I^k \right\}.$$

Chiamiamo  $L_n^*(E)$  **misura esterna** di  $E$ .

**Osservazione 4.3.1** Il senso della definizione 4.3.1 è il seguente:  $L_n^*(E)$  dovrebbe essere una sorta di volume  $n$ -dimensionale, nel caso che  $E$  non sia necessariamente un intervallo  $n$ -dimensionale. Se  $(I^k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di intervalli  $n$ -dimensionali la cui unione contiene  $E$  (useremo anche l'espressione "ricopre  $E$ "), è ragionevole richiedere che

$$L_n^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k). \quad (4.3.1)$$

La condizione (4.3.1) valida per ogni famiglia  $(I^k)_{k \in \mathbf{N}}$  tale che  $E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I^k$  può essere formulata anche dicendo che  $L_n^*(E)$  deve essere un minorante di

$$A_E := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k) : E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I^k \right\}.$$

D'altra parte, vogliamo che  $L_n^*(E)$  sia approssimabile con arbitraria precisione con una somma del tipo suddetto. Ciò implica che nessun numero maggiore di  $L_n^*(E)$  può essere minorante di  $A_E$ . Infatti, se esistesse  $L > L_n^*(E)$ , con  $L$  minorante di  $A_E$ , per ogni famiglia  $(I^k)_{k \in \mathbf{N}}$  tale che  $E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I^k$ , varrebbe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k) - L_n^*(E) \geq L - L_n^*(E).$$

Da queste considerazioni segue la definizione 4.3.1.

**Esempio 4.3.1** Sia

$$E := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, 0 \leq x_2 \leq 1/x_1^2\}.$$

Per  $k \in \mathbf{N}$ , poniamo

$$I^k := \left[ \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2} \right] \times [0, 4/(k+1)^2].$$

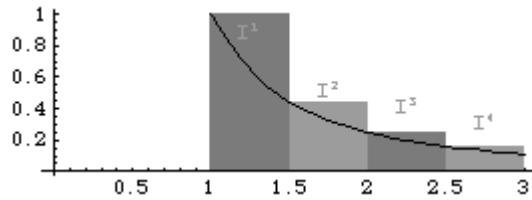


Figura 4.3

Allora è chiaro che

$$E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I^k.$$

(si osservi la figura 4.3).

Si ha allora, per la definizione 4.3.1,

$$L_2^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_2(I^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)^2}.$$

Poiché quest'ultima serie è convergente, possiamo dire che  $L_2^*(E) < +\infty$ .

**Esempio 4.3.2** Siano  $n = 1$ ,  $A = \mathbf{N}$  (l'insieme dei numeri naturali). Verifichiamo che  $L_1^*(A) = 0$ . A tale scopo, basta osservare che,  $\forall k \in N$ , l'insieme  $\{k\}$  è un intervallo limitato di lunghezza 0. Segue, tenuto conto che, ovviamente,  $\mathbf{N} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{k\}$ ,

$$0 \leq L_1^*(\mathbf{N}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(\{k\}) = 0$$

**Osservazione 4.3.2** Sia  $A$  un insieme (i cui elementi hanno natura arbitraria). Diremo che  $A$  è **numerabile** se esiste una biiezione  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow A$ . Ciò significa, in altre parole, che gli elementi di  $A$  possono essere elencati in una successione  $\{\phi(1), \phi(2), \dots\}$ .  $\mathbf{N}$  è, ovviamente, numerabile. Non è difficile verificare che anche  $\mathbf{Z}$  (l'insieme dei numeri interi) lo è: basta definire  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $\phi(1) = 0$ ,  $\phi(2) = 1$ ,  $\phi(3) = -1$ , eccetera. Anche se non è affatto ovvio, si potrebbe verificare che l'insieme  $\mathbf{Q}$  dei numeri interi è numerabile. Ora, è facile vedere, con un ragionamento analogo a quello riportato nell'esempio 4.3.2, che, se  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  e  $A$  è numerabile,  $L_n^*(A) = 0$  (esercizio 4.3.1). Si potrebbe dimostrare, invece, che se  $a$  e  $b$  sono numeri reali e  $a < b$ , l'insieme  $]a, b[$  non è numerabile. Più esattamente, non esiste una funzione suriettiva da  $\mathbf{N}$  ad  $]a, b[$ . Quindi, in un certo senso,  $]a, b[$  ha "più elementi" di  $\mathbf{N}$ .

Vediamo ora ad alcune proprietà della misura esterna  $L_n^*$ .

**Teorema 4.3.1** *Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Allora*

- (I) *se  $I$  è un intervallo  $n$ -dimensionale, si ha  $L_n^*(I) = \text{vol}_n(I)$ .*
- (II)  *$L_n^*(\emptyset) = 0$ .*
- (III) *Se  $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}^n$ , si ha  $L_n^*(A) \leq L_n^*(B)$ .*
- (IV) *Se  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $E^k \subseteq \mathbf{R}^n \forall k \in \mathbf{N}$  e  $E \subseteq \cup_{k \in \mathbf{N}} E^k$ , si ha  $L_n^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L_n^*(E^k)$ .*
- (V) *Se  $m \in \mathbf{N}$ ,  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $E^k \subseteq \mathbf{R}^n \forall k \in \{1, \dots, m\}$  e  $E \subseteq \cup_{1 \leq k \leq m} E^k$ , si ha  $L_n^*(E) \leq \sum_{k=1}^m L_n^*(E^k)$ .*

*Dimostrazione parziale* (I) Poniamo  $I^1 = I$ ,  $I^2 = I^3 = \dots = \emptyset$ . Allora  $I = \cup_{k \in \mathbf{N}} I^k$ , per cui

$$L_n^*(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k) = \text{vol}_n(I).$$

Non dimostriamo la disegualanza opposta, molto più tecnica.

(II) segue immediatamente da (I), essendo  $\emptyset$  un intervallo  $n$ -dimensionale.

(III) Se  $A \subseteq B$  e  $(I^k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di intervalli  $n$ -dimensionali tale che  $B \subseteq \cup_{k \in \mathbf{N}} I^k$ , vale anche  $A \subseteq \cup_{k \in \mathbf{N}} I^k$ . Ne segue che

$$L_n^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k). \quad (4.3.2)$$

(4.3.2) implica che  $L_n^*(A)$  è un minorante di  $\{\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I^k) : B \subseteq \cup_{k \in \mathbf{N}} I^k\}$ .  
 (III) segue allora dalla definizione di  $L_n^*(B)$ .

Non riportiamo la dimostrazione di (IV).

Proviamo (V). Poniamo  $E^{m+1} = E^{m+2} = \dots = \emptyset$ . Allora, per (IV), si ha

$$L_n^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L_n^*(E^k) = \sum_{k=1}^m L_n^*(E^k).$$

□

**Osservazione 4.3.3** Dal teorema 4.3.1 (V) segue che, se  $A$  e  $B$  sono sottinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ , si ha

$$L_n^*(A \cup B) \leq L_n^*(A) + L_n^*(B).$$

Sarebbe auspicabile che, nel caso  $A \cap B = \emptyset$ , valesse anche

$$L_n^*(A \cup B) = L_n^*(A) + L_n^*(B). \quad (4.3.3)$$

Purtroppo, ciò (in generale) non accade. Questo fatto costituisce una grave carenza della misura esterna. Per rimediare a essa, ci si limita a considerare una certa famiglia di sottinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ , i così detti insiemi **misurabili secondo Lebesgue**, in cui, come vedremo, la misura esterna dell'unione di due insiemi disgiunti è uguale alla somma delle misure esterne. Di fatto, vedremo che in questa classe, vale una proprietà ancora più forte.

**Esercizio 4.3.1** Dimostrare che, se  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  e  $A$  è numerabile, allora  $L_n^*(A) = 0$ . Verificare preliminarmente che gli insiemi con un solo elemento sono intervalli  $n$ -dimensionali, con volume nullo.

## 4.4 Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue

In questa sezione, definiamo gli insiemi misurabili secondo Lebesgue e ne enunciamo (in gran parte senza dimostrazione) le principali proprietà.

Cominciamo con l'introdurre la seguente comoda notazione: sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Poniamo

$$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A. \quad (4.4.1)$$

Passiamo ora alla definizione principale.

**Definizione 4.4.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$  e  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . diremo che  $A$  è misurabile secondo Lebesgue se, per ogni  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ ,

$$L_n^*(E) = L_n^*(E \cap A) + L_n^*(E \cap A^c). \quad (4.4.2)$$

Indicheremo con  $\mathcal{M}_n$  la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in  $\mathbf{R}^n$ .

**Osservazione 4.4.1** Osserviamo che

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c).$$

Dunque, in base al teorema 4.3.1 (V), vale in ogni caso la diseguaglianza

$$L_n^*(E) \leq L_n^*(E \cap A) + L_n^*(E \cap A^c). \quad (4.4.3)$$

Dunque, (4.4.2) è equivalente a

$$L_n^*(E \cap A) + L_n^*(E \cap A^c) \leq L_n^*(E). \quad (4.4.4)$$

Osserviamo che gli insiemi  $E \cap A$  e  $E \cap A^c$  sono disgiunti. Con la definizione 4.4.1, chiediamo dunque che valga, in questo caso particolare, il fatto che la misura esterna dell'unione di due insiemi disgiunti sia uguale alla somma delle misure esterne, proprietà che in generale non vale (si ricordi l'osservazione 4.3.3).

**Definizione 4.4.2** Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Indichiamo con  $L_n$  la restrizione della funzione misura esterna  $L_n^*$  a  $\mathcal{M}_n$ . Chiameremo  $L_n$  misura di Lebesgue in  $\mathbf{R}^n$ .

**Teorema 4.4.1** (di Caratheodory) Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Allora:

- (I)  $\emptyset \in \mathcal{M}_n$ .
- (II) Se  $A \in \mathcal{M}_n$ , allora  $A^c \in \mathcal{M}_n$ .
- (III) Se  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{M}_n$ , allora  $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k \in \mathcal{M}_n$ .
- (IV)  $L_n(\emptyset) = 0$ .
- (V) Se  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{M}_n$  a due a due disgiunti, si ha

$$L_n\left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} L_n(A_k). \quad (4.4.5)$$

*Dimostrazione parziale* (I) Se  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ , si ha

$$L_n^*(E \cap \emptyset) + L_n^*(E \cap \emptyset^c) = L_n^*(\emptyset) + L_n^*(E \cap \mathbf{R}^n) = 0 + L_n^*(E) = L_n^*(E).$$

(II) Se  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ , si ha

$$L_n^*(E \cap A^c) + L_n^*(E \cap (A^c)^c) = L_n^*(E \cap A^c) + L_n^*(E \cap A) = L_n^*(E)$$

perché  $A \in \mathcal{M}_n$ .

Non riportiamo la dimostrazione di (III), essa più difficile.

(IV) segue immediatamente dal teorema 4.3.1 (II) e da (I).

Non riportiamo la dimostrazione di (V).

□

**Osservazione 4.4.2** Sia  $\Omega$  un insieme. Si dice che una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottointersiemi di  $\Omega$  è una  $\sigma$ -algebra se:

(I)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;

(II) se  $A \in \mathcal{A}$ , allora  $A^c \in \mathcal{A}$ , con  $A^c := \Omega \setminus A$ ;

(III) Se  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{A}$ , allora  $\cup_{k \in \mathbf{N}} A_k \in \mathcal{A}$ .

Data una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$  in  $\Omega$ , una misura  $\mu$  su  $\mathcal{A}$  è una funzione  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ , tale che

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(b) se  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{A}$  a due a due disgiunti, si ha

$$\mu(\cup_{k \in \mathbf{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Quest'ultima somma va, naturalmente, intesa nel senso dell'aritmetica sviluppata nella sezione 4.1.

Perciò, il teorema 4.4.1 può essere enunciato affermando che  $\mathcal{M}_n$  è una  $\sigma$ -algebra in  $\mathbf{R}^n$  e  $L_n$  è una misura su  $\mathcal{M}_n$ .

Per enunciare e parzialmente dimostrare altre proprietà della classe  $\mathcal{M}_n$  e della misura  $L_n$ , presentiamo, preliminarmente, il seguente lemma.

**Lemma 4.4.1** *Sia  $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$  una famiglia di sottointersiemi di  $\mathbf{R}^n$ , con  $\mathcal{I}$  insieme di indici. Allora*

$$((\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i)^c = \cap_{i \in \mathcal{I}} A_i^c. \quad (4.4.6)$$

*Dimostrazione* Dato  $x$  in  $\mathbf{R}^n$ ,  $x \in (\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i)^c$  se e solo se  $x \notin \cup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ . Ciò significa che, qualunque sia  $i \in \mathcal{I}$ ,  $x \notin A_i$ , il che vuol dire che qualunque sia  $i \in \mathcal{I}$ ,  $x \in A_i^c$ . Ciò equivale alla condizione  $x \in \cap_{i \in \mathcal{I}} A_i^c$ .  $\square$

Veniamo ora a enunciare e parzialmente dimostrare ulteriori importanti proprietà di  $\mathcal{M}_n$  e  $L_n$ .

**Teorema 4.4.2** *Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Allora:*

- (I)  $\mathbf{R}^n \in \mathcal{M}_n$ ;
- (II) se  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{M}_n$ , allora  $\cap_{k \in \mathbf{N}} A_k \in \mathcal{M}_n$ ;
- (III) se  $m \in \mathbf{N}$  e  $A_1, \dots, A_m$  sono elementi di  $\mathcal{M}_n$ , allora  $\cup_{k \in \{1, \dots, m\}} A_k \in \mathcal{M}_n$ ;
- (IV) se  $m \in \mathbf{N}$  e  $A_1, \dots, A_m$  sono elementi di  $\mathcal{M}_n$ , allora  $\cap_{k \in \{1, \dots, m\}} A_k \in \mathcal{M}_n$ ;
- (V) se  $A$  e  $B$  sono elementi di  $\mathcal{M}_n$ , allora  $B \setminus A \in \mathcal{M}_n$ ;
- (VI) se  $m \in \mathbf{N}$  e  $A_1, \dots, A_m$  sono elementi di  $\mathcal{M}_n$  a due a due disgiunti,

$$L_n(\cup_{k \in \{1, \dots, m\}} A_k) = \sum_{k=1}^m L_n(A_k); \quad (4.4.7)$$

(VII) se  $A$  e  $B$  sono elementi di  $\mathcal{M}_n$ ,  $A \subseteq B$  e  $L_n(B) < +\infty$ , allora  $L_n(A) < +\infty$  e vale

$$L_n(B \setminus A) = L_n(B) - L_n(A). \quad (4.4.8)$$

*Dimostrazione* (I) Si ha  $\mathbf{R}^n = \emptyset^c$ . Dunque, (I) segue dal teorema 4.4.1 (I)-(II).

(II) Per il lemma 4.4.1,

$$\cap_{k \in \mathbf{N}} A_k = (\cup_{k \in \mathbf{N}} A_k^c)^c.$$

Perciò , (II) segue dal teorema 4.4.1 (II)-(III).

(III) Poniamo  $A_k = \emptyset$  se  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k > m$ . Allora la conclusione segue dal teorema 4.4.1 (I) e (III).

(IV) ammette una dimostrazione analoga a (II), utilizzando (III).

(V) Si ha  $B \setminus A = B \cap A^c$ . La conclusione segue allora dal teorema 4.4.1 (II) e da (IV).

(VI) Innanzi tutto,  $\cup_{k \in \{1, \dots, m\}} A_k \in \mathcal{M}_n$  per (III). inoltre, ponendo ancora  $A_k = \emptyset$  per  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k > m$  e utilizzando i punti (I), (III), (IV), (V) del

teorema 4.4.1, si ha

$$L_n(\cup_{k \in \{1, \dots, m\}} A_k) = L_n(\cup_{k \in \mathbf{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} L_n(A_k) = \sum_{k=1}^m L_n(A_k).$$

(VII) Si ha  $B = A \cup (B \setminus A)$  e  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ . Dunque, per (VI),

$$L_n(B) = L_n(A) + L_n(B \setminus A),$$

da cui segue immediatamente la conclusione.

□

**Osservazione 4.4.3** La validità dei punti (V) del teorema 4.4.1 e (VI) del teorema 4.4.2 implica che, se consideriamo la classe  $\mathcal{M}_n$ , vale una proprietà molto più forte di quella a cui si accennava nell'osservazione 4.3.3: persino prendendo una famiglia numerabile (e dunque infinita) di elementi di  $\mathcal{M}_n$  a due a due disgiunti, vale il fatto che la misura dell'unione coincide con la somma delle misure!

A questo punto, resta il problema di stabilire se un certo sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$  appartenga a  $\mathcal{M}_n$ . Per ora sappiamo solo che  $\mathcal{M}_n$  contiene  $\emptyset$  e  $\mathbf{R}^n$  (punti (I) dei teoremi 4.4.1 e 4.4.2). Alcune condizioni sufficienti sono date nel prossimo teorema.

**Teorema 4.4.3** *Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Allora:*

- (I) *ogni intervallo  $n$ -dimensionale appartiene a  $\mathcal{M}_n$ ;*
- (II) *ogni sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^n$  appartiene a  $\mathcal{M}_n$ ;*
- (III) *ogni sottoinsieme chiuso di  $\mathbf{R}^n$  appartiene a  $\mathcal{M}_n$ ;*
- (IV) *se  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  e  $L_n^*(A) = 0$ , allora  $A \in \mathcal{M}_n$ .*

*Dimostrazione parziale* Verifichiamo solo (IV). Per una dimostrazione di (III) utilizzando (II) (e viceversa), si rimanda all'esercizio 4.4.1.

Sia  $E \subseteq \mathbf{R}^n$ . Per il teorema 4.3.1 (III), si ha

$$0 \leq L_n^*(E \cap A) \leq L_n^*(A) = 0.$$

Ne segue che

$$L_n^*(E \cap A) + L_n^*(E \cap A^c) = L_n^*(E \cap A^c) \leq L_n^*(E),$$

utilizzando ancora il punto (III) del teorema 4.3.1. Dunque, vale (4.4.4), che implica (4.4.2). □

**Osservazione 4.4.4** I teoremi 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 implicano che praticamente ogni sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$  che compare nelle applicazioni è misurabile secondo Lebesgue. Di fatto, la costruzione di un sottoinsieme non misurabile è alquanto laboriosa e richiede nozioni "fini" della teoria degli insiemi.

**Esercizio 4.4.1** Dato  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ , dimostrare (utilizzando il teorema 1.2.1) che  $A$  è chiuso se e solo se  $A^c$  è aperto. Ricavare dal punto (II) del teorema 4.4.3 il punto (III) e viceversa.

## 4.5 Funzioni semplici

Nelle sezioni precedenti, abbiamo delineato una teoria della misura in  $\mathbf{R}^n$ . In questa sezione, cominciamo a sviluppare una corrispondente teoria dell'integrazione. Per il momento, ci limiteremo a considerare una classe di funzioni estremamente ristretta, che svolgerà un ruolo ausiliario nella considerazione di classi di funzioni assai più generali.

Cominciamo, allora, con l'introdurre questa classe di funzioni.

**Definizione 4.5.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diremo che  $f$  è una **funzione semplice** se esistono  $A_1, \dots, A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), sottoinsiemi misurabili di  $A$  a due a due disgiunti, con unione  $A$ , e dei numeri reali  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , tali che, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x) = \alpha_i$ .

Vale il seguente, utile, lemma:

**Lemma 4.5.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplici. Allora esistono  $A_1, \dots, A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), sottoinsiemi misurabili di  $A$  a due a due disgiunti, con unione  $A$ , e dei numeri reali  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , tali che, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x) = \alpha_i$ ,  $g(x) = \beta_i$ .

*Dimostrazione parziale* Ci limitiamo a considerare un caso particolare. Supponiamo che  $A = B_1 \cup B_2$ , con  $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  ed esistano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  reali tali che, se  $x \in B_1$ ,  $f(x) = \gamma_1$ , se  $x \in B_2$ ,  $f(x) = \gamma_2$ .

Nello stesso modo, supponiamo che  $A = C_1 \cup C_2$ , con  $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_n$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  ed esistano  $\delta_1$  e  $\delta_2$  reali tali che, se  $x \in C_1$ ,  $g(x) = \delta_1$ , se  $x \in C_2$ ,  $g(x) = \delta_2$ .

Poniamo:

$$A_1 := B_1 \cap C_1, A_2 := B_1 \cap C_2, A_3 := B_2 \cap C_1, A_4 := B_2 \cap C_2.$$

Allora è facile verificare che  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sono misurabili, a due a due disgiunti e la loro unione è  $A$ . Ponendo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1, \alpha_3 = \alpha_4 = \gamma_2,$$

$$\beta_1 = \beta_3 = \delta_1, \beta_2 = \beta_4 = \delta_2,$$

si ha la conclusione.  $\square$

**Teorema 4.5.1** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplici. Allora:*

- (I)  *$f + g$  e  $fg$  sono semplici;*
- (II) *se  $g(x) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  è semplice.*

*Dimostrazione* Ci limitiamo a far vedere che  $f + g$  è semplice. Gli altri punti si possono verificare analogamente.

Per il lemma 4.5.1, esistono  $A_1, \dots, A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), sottoinsiemi misurabili di  $A$  a due a due disgiunti, con unione  $A$ , e dei numeri reali  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , tali che, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x) = \alpha_i$ ,  $g(x) = \beta_i$ . Allora, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), si ha

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \alpha_i + \beta_i.$$

Dunque,  $f + g$  è semplice.

$\square$

Passiamo ora alla prima definizione di integrale che incontriamo in questo capitolo: quello di una funzione semplice non negativa.

**Definizione 4.5.2** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplice, a valori non negativi. Allora esistono  $A_1, \dots, A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), sottoinsiemi misurabili di  $A$  a due a due disgiunti, con unione  $A$ , e dei numeri reali non negativi  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , tali che, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x) = \alpha_i$ . Poniamo*

$$\int_A f(x) dx := \alpha_1 L_n(A_1) + \dots + \alpha_m L_n(A_m) = \sum_{i=1}^m \alpha_i L_n(A_i). \quad (4.5.1)$$

Chiameremo  $\int_A f(x) dx$  **integrale (nel senso di Lebesgue) di  $f$  su  $A$** .

**Osservazione 4.5.1** Naturalmente, la somma in (4.5.1) va intesa nel senso dell'aritmetica in  $[0, +\infty]$ . Infatti, per definizione,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sono numeri reali, ma gli  $L_n(A_i)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) possono anche essere uguali a  $+\infty$ .

Dal lemma 4.5.1, è chiaro che, in generale, la scelta degli insiemi  $A_1, \dots, A_m$  non è univoca. A priori, la definizione(4.5.1) dipende da tale scelta. Ebbene, si potrebbe far vedere che non è così, nel senso che una diversa scelta fornisce lo stesso valore di  $\int_A f(x) dx$ .

**Esempio 4.5.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 1 \forall x \in A$ . Allora

$$\int_A f(x) dx = L_n(A).$$

**Esempio 4.5.2** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 2 & \text{se } 1 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases}$$

Allora  $f$  è semplice. Per verificarlo, possiamo prendere

$$A_1 = [0, 1] \times [0, 1], A_2 = ]1, 2] \times [0, 1], A_3 = \mathbf{R}^2 \setminus (A_1 \cup A_2).$$

Allora gli  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ , sono misurabili, a due a due disgiunti e la loro unione è  $\mathbf{R}^2$ . Inoltre,  $f(x) = \alpha_i$  se  $x \in A_i$ , con  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 0$ . Dalla definizione 4.5.2 e dal teorema 4.3.1 (I), abbiamo allora

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x) dx = 1 \cdot \text{vol}_2(A_1) + 2 \cdot \text{vol}_2(A_2) + 0 \cdot L_2(A_3) = 1 + 2 = 3.$$

**Esempio 4.5.3** Sia

$$\begin{cases} f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases}$$

Allora  $f$  è semplice. Infatti, ponendo

$$A_1 = ]-\infty, 0], A_2 = ]0, +\infty[$$

gli  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) sono misurabili, disgiunti e la loro unione è  $\mathbf{R}$ . La misurabilità segue, ad esempio, dal fatto che  $A_1$  è chiuso e  $A_2$  è aperto. Inoltre,  $f(x) = \alpha_i$  se  $x \in A_i$ , con  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Dalla definizione 4.5.2, abbiamo allora

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 0 \cdot L_1(A_1) + 1 \cdot L_1(A_2) = L_1(A_2).$$

Per determinare  $L_1(A_2)$ , basta osservare che  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $]0, n] \subseteq A_2$ . Ne segue che

$$L_1(A_2) \geq L_1(]0, n]) = n.$$

Poiché ciò vale qualunque sia  $n \in \mathbf{N}$ , possiamo concludere che  $L_1(A_2) = +\infty$ . Dunque

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = +\infty.$$

Veniamo ora alle principali proprietà dell'integrale delle funzioni semplici non negative.

**Teorema 4.5.2** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$ , semplici non negative. Allora:*

- (I)  $\int_A f(x)dx \in [0, +\infty]$ ;
- (II) se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in A$ , allora  $\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$ ;
- (III)  $f + g$  è semplice non negativa e

$$\int_A (f + g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx;$$

- (IV) se  $\alpha \in [0, +\infty[$ ,  $\alpha f$  è semplice non negativa e

$$\int_A \alpha f(x)dx = \alpha \int_A f(x)dx;$$

(V) se  $B = B_1 \cup \dots \cup B_p$  ( $p \in \mathbf{N}$ ), con  $B_1, \dots, B_p$  misurabili a due a due disgiunti,

$$\int_A f(x)dx = \int_{B_1} f(x)dx + \dots + \int_{B_p} f(x)dx, \quad (4.5.2)$$

con  $\int_{B_j} f(x)dx := \int_{B_j} f|_{B_j}(x)dx$  ( $1 \leq j \leq p$ ).

*Dimostrazione* (I) segue immediatamente dalla definizione 4.5.1.

(II) In base al lemma 4.5.1, esistono  $A_1, \dots, A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), sottoinsiemi misurabili di  $A$  a due a due disgiunti, con unione  $A$ , e dei numeri reali non negativi  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , tali che, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x) = \alpha_i$ . Supponendo, come è lecito, che ciascuno degli  $A_i$  sia non vuoto, abbiamo che, per ciascun  $i \in \{1, \dots, m\}$ , vale  $\alpha_i \leq \beta_i$ . Si ottiene allora immediatamente

$$\int_A f(x)dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i L_n(A_i) \leq \sum_{i=1}^m \beta_i L_n(A_i) = \int_A g(x)dx.$$

(III) Se gli  $A_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) sono come nella dimostrazione di (II), si ha che  $f(x) + g(x) = \alpha_i + \beta_i$  se  $x \in A_i$ . Dunque, per il teorema 4.1.2, si

ha

$$\begin{aligned}\int_A(f+g)(x)dx &= (\alpha_1 + \beta_1)L_n(A_1) + \dots + (\alpha_i + \beta_i)L_n(A_i) + \dots \\ &\quad + (\alpha_m + \beta_m)L_n(A_m) \\ &= \alpha_1L_n(A_1) + \dots + \alpha_iL_n(A_i) + \dots + \alpha_mL_n(A_m) \\ &\quad + \beta_1L_n(A_1) + \dots + \beta_iL_n(A_i) + \dots + \beta_mL_n(A_m) \\ &= \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx.\end{aligned}$$

(IV) Se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ , si ha  $\alpha f(x) = \alpha\alpha_i$ . Dunque

$$\begin{aligned}\int_A \alpha f(x)dx &= \alpha\alpha_1L_n(A_1) + \dots + \alpha\alpha_iL_n(A_i) + \dots + \alpha\alpha_mL_n(A_m) \\ &= \alpha(\alpha_1L_n(A_1) + \dots + \alpha_iL_n(A_i) + \dots + \alpha_mL_n(A_m)) \\ &= \alpha \int_A f(x)dx.\end{aligned}$$

(V) Ci limitiamo a considerare il caso  $p = 2$ . Il caso generale si può ottenere aggiungendo successivamente  $B_2, \dots, B_p$ . Siano  $A_1, \dots, A_m$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  come in (II). Allora, per  $j \in \{1, 2\}$ , si ha

$$B_j = (B_j \cap A_1) \cup \dots \cup (B_j \cap A_m),$$

gli insiemi  $B_j \cap A_1, \dots, B_j \cap A_m$  sono a due a due disgiunti e misurabili. Allora

$$\begin{aligned}\int_{B_1} f(x)dx + \int_{B_2} f(x)dx &= \alpha_1L_n(A_1 \cap B_1) + \dots + \alpha_mL_n(A_m \cap B_1) \\ &\quad + \alpha_1L_n(A_1 \cap B_2) + \dots + \alpha_mL_n(A_m \cap B_2) \\ &= \alpha_1[L_n(A_1 \cap B_1) + L_n(A_1 \cap B_2)] + \dots \\ &\quad + \alpha_m[L_n(A_m \cap B_1) + L_n(A_m \cap B_2)] \\ &= \alpha_1L_n(A_1) + \alpha_mL_n(A_m) = \int_A f(x)dx,\end{aligned}$$

osservando che  $(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) = A_1, \dots, (A_m \cap B_1) \cup (A_m \cap B_2) = A_m$ .  
 $\square$

## 4.6 Funzioni misurabili

In questa sezione, vogliamo estendere le definizioni e i risultati della sezione precedente a una classe vastissima di funzioni: le così dette "funzioni misurabili".

Per cominciare, sarà opportuno considerare la retta reale estesa

$$[-\infty, +\infty] := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \tag{4.6.1}$$

introdotta in [Analisi A], osservazione 2.2.4. Introduciamo allora la seguente

**Definizione 4.6.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Diremo che  $f$  è misurabile se esiste una successione  $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  di funzioni semplici di dominio  $A$ , tale che

$$\forall x \in A \quad f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x). \quad (4.6.2)$$

**Esempio 4.6.1** Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Verifichiamo che  $f$  è misurabile.

Osserviamo, innanzi tutto, che  $f$  è a valori in  $[0, 1]$ . Sia  $k \in \mathbf{N}$ . Allora

$$\begin{aligned} [0, 1] &= [0, 1/k] \cup \dots \cup [(j-1)/k, j/k] \cup \dots \cup [(k-1)/k, 1] \\ &= \cup_{j \in \{1, \dots, k-1\}} [(j-1)/k, j/k] \cup [(k-1)/k, 1]. \end{aligned}$$

Per  $j = 1, \dots, k$ , poniamo

$$A_{kj} = \begin{cases} \{x \in [-1, 1] : x^2 \in [(j-1)/k, j/k]\} & \text{se } j \in \{1, \dots, k-1\}, \\ \{x \in [-1, 1] : x^2 \in [(k-1)/k, 1]\} & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Si osservi che gli  $A_{kj}$  sono a due a due disgiunti, la loro unione è  $[-1, 1]$  e sono misurabili, in quanto

$$A_{kj} = ]-\sqrt{j/k}, -\sqrt{(j-1)/k}] \cup [\sqrt{(j-1)/k}, \sqrt{j/k}[$$

se  $j = 1, \dots, k-1$ , mentre

$$A_{kk} = [-1, -\sqrt{(k-1)/k}] \cup [\sqrt{(k-1)/k}, 1].$$

Poniamo

$$\begin{cases} \phi_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \\ \phi_k(x) = (j-1)/k & \text{se } x \in A_{kj}. \end{cases} \quad (4.6.3)$$

Allora è chiaro che  $\phi_k$  è una funzione semplice per ogni  $k \in \mathbf{N}$ .

Sia  $x \in [0, 1]$ . Sia  $k \in \mathbf{N}$ . Allora, per qualche  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $x \in A_{kj}$ . Ciò significa che  $f(x) \in [(j-1)/k, j/k]$  se  $j \leq k-1$ ,  $f(x) \in [(k-1)/k, 1]$  se  $j = k$ . Ne deduciamo che, in ogni caso,

$$0 \leq f(x) - \phi_k(x) \leq 1/k,$$

per cui, qualunque sia  $x \in [-1, 1]$ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x) = f(x).$$

Dunque,  $f$  è misurabile. Si veda anche la figura 4.4, in cui è riportato in grassetto il grafico della funzione  $\phi_4$ .

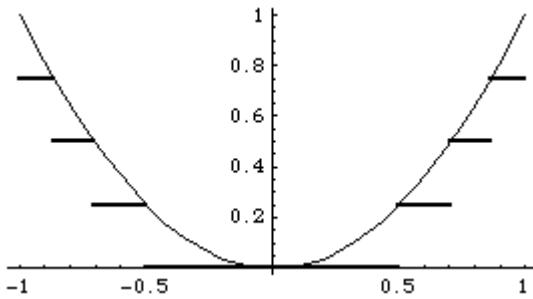


Figura 4.4

Più in generale, vale il seguente

**Teorema 4.6.1** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  continua. Allora  $f$  è misurabile.*

Un altro utile risultato è il seguente

**Teorema 4.6.2** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$  misurabili,  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua,  $c \in \mathbf{R}$ . Allora:*

- (I)  $f + g$  e  $fg$  sono misurabili;
- (II) se  $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ ,  $f/g$  è misurabile;
- (III)  $h \circ f$  è misurabile;
- (IV)  $cf$  è misurabile.

*Dimostrazione* Per definizione, esistono due successioni  $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  e  $(\psi_k)_{k \in \mathbf{N}}$  di funzioni semplici di dominio  $A$ , tali che

$$\forall x \in A, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_k(x) = g(x). \quad (4.6.4)$$

Allora,

$$\begin{aligned}\forall x \in A, \quad & \lim_{k \rightarrow +\infty} (\phi_k(x) + \psi_k(x)) = f(x) + g(x), \\ & \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x)\psi_k(x) = f(x)g(x).\end{aligned}$$

(I) segue allora dal teorema 4.5.1(I).

Supponiamo ora che  $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ . Allora è facile verificare che

$$\forall x \in A, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\phi_k(x)\psi_k(x)}{\psi_k(x)^2 + 1/k} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Il teorema 4.5.1 implica che la funzione  $g_k$  di dominio  $A$ ,  $g_k(x) = \frac{\phi_k(x)\psi_k(x)}{\psi_k(x)^2 + 1/k}$  è semplice. Dunque, vale (II).

Inoltre,

$$\forall x \in A, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} h(\phi_k(x)) = h(f(x)).$$

Se  $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}$  è semplice, anche  $h \circ \phi$  è semplice. Supponiamo, infatti, che esistano  $A_1, \dots, A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), sottoinsiemi misurabili di  $A$  a due a due disgiunti, con unione  $A$ , e dei numeri reali  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , tali che, se  $x \in A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $\phi(x) = \alpha_i$ . Allora, sempre se  $x \in A_i$ , si ha  $(h \circ \phi)(x) = h(\alpha_i)$ . Dunque le funzioni  $h \circ \phi_k$  sono tutte semplici, per cui  $h \circ f$  è misurabile.

Infine, (IV) segue da (III) prendendo  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(y) = cy$ .

□

Veniamo ora a definire l'integrale di una funzione misurabile non negativa.

**Definizione 4.6.2** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Poniamo

$$\int_A f(x)dx := \sup \left\{ \int_A \phi(x)dx : \phi : A \rightarrow \mathbf{R} \text{ semplice, } 0 \leq \phi(x) \leq f(x) \forall x \in A \right\}. \quad (4.6.5)$$

Chiamiamo  $\int_A f(x)dx$  **integrale di  $f$  su  $A$  nel senso di Lebesgue**.

**Osservazione 4.6.1**  $\int_A \phi(x)dx$  nella definizione 4.6.2 è inteso nel senso della definizione 4.5.2. Ovviamente il "sup" va inteso in  $[0, +\infty]$ .

**Osservazione 4.6.2** Sia  $f : A \rightarrow [0, +\infty[$  semplice.  $f$  è misurabile. Per verificarlo, basta prendere, per  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\phi_k : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\phi_k(x) = f(x)$ . Indichiamo allora con  $I_0$  e  $I_1$  gli integrali di  $f$  secondo le definizioni 4.5.2 e 4.6.2 rispettivamente. Prendendo  $\phi = f$  nella definizione 4.6.2, otteniamo  $I_0 \leq I_1$ . D'altra parte, se  $\phi$  soddisfa le condizioni della definizione 4.6.2, in base al teorema 4.5.2 (II), si ha  $\int_A \phi(x)dx \leq I_0$ . Ne deduciamo che  $I_1 \leq I_0$ , per cui  $I_0 = I_1$ .

Estendiamo ora il teorema 4.5.2 alle funzioni misurabili non negative.

**Teorema 4.6.3** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f, g : A \rightarrow [0, +\infty[$ , misurabili. Allora:*

$$(I) \int_A f(x)dx \in [0, +\infty];$$

$$(II) \text{ se } f(x) \leq g(x) \forall x \in A, \text{ allora } \int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx;$$

(III)

$$\int_A (f + g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx;$$

$$(IV) \text{ se } \alpha \in [0, +\infty[,$$

$$\int_A \alpha f(x)dx = \alpha \int_A f(x)dx;$$

(V) se  $A = A_1 \cup \dots \cup A_p$  ( $p \in \mathbf{N}$ ), con  $A_1, \dots, A_p$  misurabili a due a due disgiunti,

$$\int_A f(x)dx = \int_{A_1} f(x)dx + \dots + \int_{A_p} f(x)dx, \quad (4.6.6)$$

$$\text{con } \int_{A_j} f(x)dx := \int_{A_j} f|_{A_j}(x)dx \ (1 \leq j \leq p).$$

*Dimostrazione parziale* (I) segue subito dalla definizione 4.6.2 e dal teorema 4.5.2 (I).

(II) Sia  $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplice,  $0 \leq \phi(x) \leq f(x) \forall x \in A$ . Allora  $0 \leq \phi(x) \leq g(x) \forall x \in A$ , per cui

$$\int_A \phi(x)dx \leq \int_A g(x)dx.$$

Dunque,  $\int_A g(x)dx$  è un maggiorante di

$$\left\{ \int_A \phi(x)dx : \phi : A \rightarrow \mathbf{R} \text{ semplice, } 0 \leq \phi(x) \leq f(x) \forall x \in A \right\}.$$

Da ciò segue (II).

La parziale dimostrazione di (III) è oggetto dell'esercizio 4.6.2.

La dimostrazione di (IV) è oggetto dell'esercizio 4.6.3.

□

**Esercizio 4.6.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A, B \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$  misurabile,  $B \subseteq A$ . Dimostrare che la restrizione  $f|_B$  è misurabile.

**Esercizio 4.6.2** Con riferimento al teorema 4.6.3, provare che vale (III) nel caso in cui  $\max\{\int_A f(x)dx, \int_A g(x)dx\} = +\infty$ .

(Sugg.: osservare che, qualunque sia  $x \in A$ ,  $\max\{f(x), g(x)\} \leq f(x) + g(x)$ .)

Dimostrare che vale in ogni caso

$$\int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx \leq \int_A (f(x) + g(x))dx.$$

Sugg.: ci si può limitare al caso in cui  $\max\{\int_A f(x)dx, \int_A g(x)dx\} < +\infty$ . Sia  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ . Prendere  $\phi, \psi : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplici tali che,  $\forall x \in A$ ,  $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ ,  $0 \leq \psi(x) \leq g(x)$ ,  $\int_A \phi(x)dx \geq \int_A f(x)dx - \epsilon/2$ ,  $\int_A \psi(x)dx \geq \int_A g(x)dx - \epsilon/2$ ; Allora  $\phi(x) + \psi(x) \leq f(x) + g(x) \forall x \in A$ . Dedurre che

$$\begin{aligned} \int_A (f(x) + g(x))dx &\geq \int_A (\phi(x) + \psi(x))dx = \int_A \phi(x)dx + \int_A \psi(x)dx \\ &\geq \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx - \epsilon. \end{aligned}$$

**Esercizio 4.6.3** Dimostrare il punto (IV) del teorema 4.6.3. Ne caso  $\alpha = 0$ , osservare che l'integrale della funzione identicamente nulla su  $A$  è comunque uguale a 0.

Sia  $\alpha > 0$ . Cominciare a supporre  $\int_A f(x)dx = +\infty$ . Dedurre che  $\forall M \in \mathbf{R}^+$ , esiste  $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplice, tale che  $\forall x \in A$ ,  $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$  e  $\int_A \phi(x)dx \geq M/\alpha$ . Allora  $\forall x \in A$ ,  $0 \leq \alpha\phi(x) \leq \alpha f(x)$ , per cui

$$\int_A \alpha f(x)dx \geq \int_A \alpha\phi(x)dx = \alpha \int_A \phi(x)dx \geq M.$$

Sia invece  $\int_A f(x)dx < +\infty$ . Sia  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ . Prendere  $\phi$  semplice non negativa, maggiorata da  $f$ , tale che

$$\int_A \phi(x)dx \geq \int_A f(x)dx - \epsilon/\alpha.$$

Dedurre che  $\int_A \alpha f(x)dx \geq \alpha \int_A f(x)dx - \epsilon$ .

Usare il fatto che  $f = \alpha^{-1}(\alpha f)$  per rovesciare i ruoli tra  $f$  e  $\alpha f$ .

**Esercizio 4.6.4** Sugg.: osservare, innanzi tutto, che, per il risultato dell'esercizio 4.6.1, per ciascun  $j = 1, \dots, p$ ,  $f|_{A_j}$  è misurabile.

Sia  $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}$  semplice, tale che  $\forall x \in A$ ,  $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ . Dedurre dal punto (V) del teorema 4.5.2 che

$$\begin{aligned} \int_A \phi(x)dx &= \int_{A_1} \phi(x)dx + \dots + \int_{A_p} \phi(x)dx \\ &\leq \int_{A_1} f(x)dx + \dots + \int_{A_p} f(x)dx. \end{aligned}$$

Concludere che

$$\int_A f(x)dx \leq \int_{A_1} f(x)dx + \dots + \int_{A_p} f(x)dx.$$

Siano  $\phi_1, \dots, \phi_p$  funzioni semplici non negative, di dominio, rispettivamente,  $A_1, \dots, A_p$ , tali che,  $\forall j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\forall x \in A_j$ ,  $\phi_j(x) \leq f(x)$ . Poniamo  $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\phi(x) = \phi_j(x)$  se  $x \in A_j$ . Verificare che  $\phi$  è una funzione semplice non negativa di dominio  $A$ , tale che  $\phi(x) \leq f(x) \forall x \in A$ . Applicando il teorema 4.5.2 (V), osservare che

$$\int_A \phi(x)dx = \int_{A_1} \phi_1(x)dx + \dots + \int_{A_p} \phi_p(x)dx.$$

Per  $j = 1, \dots, p$ , fissare  $c_j \geq 0$ , tale che  $c_j < \int_{A_j} f(x)dx$  se  $\int_{A_j} f(x)dx > 0$ . Scegliere  $\phi_j$  in modo che

$$\int_{A_j} \phi_j(x)dx \geq c_j$$

per ciascun  $j = 1, \dots, p$ . Dedurre che

$$\int_A f(x)dx \geq \int_A \phi(x)dx \geq c_1 + \dots + c_p.$$

Concludere che

$$\int_A f(x)dx \geq \int_{A_1} f(x)dx + \dots + \int_{A_p} f(x)dx.$$

## 4.7 Funzioni sommabili e loro integrazione

In questa sezione, vogliamo eliminare (entro certi limiti) la condizione che la funzione integranda sia non negativa. L'idea di base è cercare di esprimere una certa funzione  $f$  come differenza di due funzioni non negative  $f_{\pm}$ :  $f = f_+ - f_-$ . Ciò fatto, si potrà definire, se  $f_{\pm}$  sono lo consentono,  $\int_A f(x)dx$  come  $\int_A f_+(x)dx - \int_A f_-(x)dx$ . Introduciamo allora le due funzioni ausiliarie  $\phi_{\pm}$ .

**Definizione 4.7.1** Poniamo

$$\begin{cases} \phi_+ : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ \phi_+(x) = \max\{x, 0\}, \end{cases} \quad (4.7.1)$$

$$\begin{cases} \phi_- : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \\ \phi_-(x) = \max\{-x, 0\}, \end{cases} \quad (4.7.2)$$

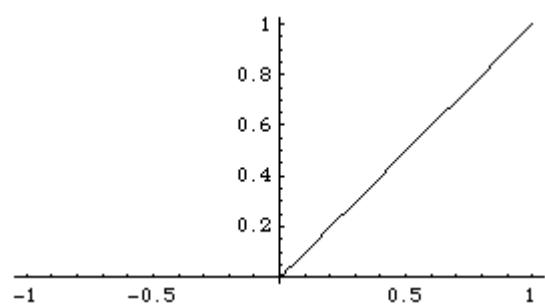


Figura 4.5

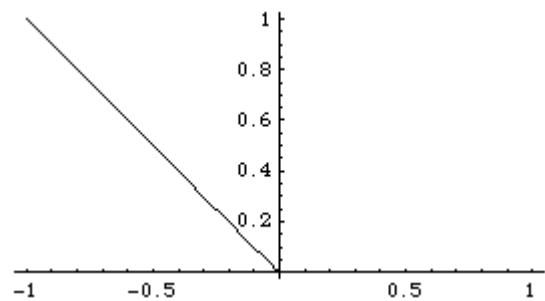


Figura 4.6

I grafici delle funzioni  $\phi_{\pm}$  sono riportati nelle figure 4.5 e 4.6.  
Lasciamo la verifica del prossimo risultato al lettore.

**Lemma 4.7.1** *Siano  $\phi_{\pm}$  le funzioni della definizione 4.7.1. Allora:*

- (I)  $\phi_+$  e  $\phi_-$  sono continue;
- (II)  $\forall x \in \mathbf{R}, x = \phi_+(x) - \phi_-(x);$
- (III)  $\forall x \in \mathbf{R}, |x| = \phi_+(x) + \phi_-(x);$
- (IV)  $\phi_{\pm}$  sono a valori non negativi.

Introduciamo ora le funzioni  $f_{\pm}$ .

**Definizione 4.7.2** *Siano  $A$  un insieme (arbitrario)  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Poniamo*

$$f_{\pm} := \phi_{\pm} \circ f. \quad (4.7.3)$$

**Lemma 4.7.2** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  misurabile. Allora:*

- (I)  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f_+(x) - f_-(x);$
- (II)  $\forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| = f_+(x) + f_-(x);$
- (III)  $f_{\pm}$  sono misurabili, a valori non negativi.

*Dimostrazione* Lasciamo la facile dimostrazione al lettore. Ci limitiamo a osservare che la misurabilità di  $f_{\pm}$  segue dalla continuità di  $\phi_{\pm}$  e dal teorema 4.6.2 (III).

□

**Definizione 4.7.3** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  misurabile. Diremo che  $f$  è sommabile se  $\int_A |f(x)| dx < +\infty$ . In tal caso, poniamo*

$$\int_A f(x) dx := \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx. \quad (4.7.4)$$

**Osservazione 4.7.1** Se  $f$  è misurabile, per il teorema 4.6.2(III),  $|f|$  è misurabile non negativa. Ne segue che  $\int_A |f(x)| dx$  è definito, nel senso della definizione 4.6.2. Dal lemma 4.7.2 (II), segue che

$$\forall x \in A \quad f_+(x) \leq |f(x)|, f_-(x) \leq |f(x)|.$$

Di conseguenza, per il teorema 4.6.3 (II),

$$\int_A f_+(x) dx < +\infty, \quad \int_A f_-(x) dx < +\infty.$$

Il punto (I) del lemma 4.7.2 rende allora naturale la definizione 4.7.3.

Osserviamo poi che, se  $f$  è non negativa,  $f_+ = f$  e  $f_-(x) = 0 \forall x \in A$ . Ne segue che, in tal caso, la definizione 4.7.3 coincide con la definizione 4.6.2.

Vogliamo ora estendere alle funzioni sommabili il teorema 4.6.3.

**Teorema 4.7.1** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$ , sommabili. Allora:*

- (I) se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in A$ , allora  $\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$ ;
- (II)  $f + g$  è sommabile e

$$\int_A (f + g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx;$$

- (III) se  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha f$  è sommabile e

$$\int_A \alpha f(x)dx = \alpha \int_A f(x)dx;$$

sia  $A = A_1 \cup \dots \cup A_p$  ( $p \in \mathbf{N}$ ), con  $A_1, \dots, A_p$  misurabili a due a due disgiunti; allora,

- (IV)  $f$  è sommabile su ciascuno degli insiemi  $A_1, \dots, A_p$ . Inoltre,

$$\int_A f(x)dx = \int_{A_1} f(x)dx + \dots + \int_{A_p} f(x)dx; \quad (4.7.5)$$

(V) viceversa, se  $f$  è sommabile su ciascuno degli insiemi  $A_1, \dots, A_p$ ,  $f$  è sommabile su  $A$ .

*Dimostrazione* L'esercizio 4.7.2 contiene una dimostrazione guidata del teorema 4.7.1.  $\square$

Nel seguito sarà utile anche il seguente

**Teorema 4.7.2** *Siano  $A \in \mathcal{M}_n$ , con  $L_n(A) = 0$ ,  $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Allora:*

- (I)  $f$  è misurabile;
- (II) se  $f$  è a valori in  $[0, +\infty]$ ,  $\int_A f(x)dx = 0$ ;
- (III) se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f$  è sommabile e  $\int_A f(x)dx = 0$ .

*Dimostrazione parziale* Non dimostriamo (I). Ci limitiamo a osservare che si può ricavare dal fatto che ogni sottoinsieme di  $A$  è misurabile (a causa del teorema 4.4.3 (IV)) e ha, ovviamente misura nulla. Ne segue che ogni funzione semplice non negativa ha integrale nullo su  $A$ . Quindi, per la definizione 4.6.2, ogni funzione a valori in  $[0, +\infty]$  ha integrale nullo. Questo fatto e la definizione 4.7.3 implicano anche (III).  $\square$

**Teorema 4.7.3** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  sommabile. Allora

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

*Dimostrazione* Si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) dx \right| &= \left| \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx \right| \\ &\leq \int_A f_+(x) dx + \int_A f_-(x) dx = \int_A |f(x)| dx, \end{aligned}$$

in virtù del lemma 4.7.2 (II).  $\square$

**Esercizio 4.7.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $h, k : A \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, tali che  $\int_A h(x) dx < +\infty$ ,  $\int_A k(x) dx < +\infty$ . Sia  $f = h - k$ . Dimostrare che  $f$  è sommabile e

$$\int_A f(x) dx = \int_A h(x) dx - \int_A k(x) dx.$$

Sugg.: se  $f(x) \geq 0$ ,  $f_+(x) = f(x) \leq h(x)$ . Dedurre che  $f_+(x) \leq h(x), f_-(x) \leq k(x) \forall x \in A$ . Concludere che  $f$  è sommabile e utilizzare l'eguaglianza  $f_+ + k = h + f_-$  e il teorema 4.6.3 (III).

**Esercizio 4.7.2** Vogliamo dimostrare il teorema 4.7.1.

Sia  $f(x) \leq g(x) \forall x \in A$ . Dedurre che  $f_+(x) + g_-(x) \leq g_+(x) + f_-(x) \forall x \in A$ . Dal teorema 4.6.3 (II)-(III), ricavare che

$$\int_A f_+(x) dx + \int_A g_-(x) dx \leq \int_A g_+(x) dx + \int_A f_-(x) dx.$$

Dedurre il punto (I) del teorema 4.7.1.

Dedurre il punto (II) dal risultato dell'esercizio 4.7.1, prendendo  $h := f_+ + g_+$ ,  $k = f_- + g_-$ .

Ricavare il punto (III), prendendo  $h = \alpha f_+$ ,  $k = \alpha f_-$  se  $\alpha \geq 0$ ,  $h = -\alpha f_-$ ,  $k = -\alpha f_+$  se  $\alpha \leq 0$ .

Ricavare (IV) e (V) dal fatto che, per  $j = 1, \dots, p$ ,  $(f|_{A_j})_\pm = (f_\pm)|_{A_j}$ .

## 4.8 Il caso unidimensionale. Integrali generalizzati

Nel caso  $n = 1$ , limitatamente ad  $A$  intervallo chiuso e limitato, disponiamo già della definizione di integrale su  $A$  nel senso di Riemann (vedi [Analisi A], capitolo 4). Andiamo ora a confrontarla con quella (di Lebesgue) introdotta nella definizione 4.7.3.

Si ha:

**Teorema 4.8.1** *Siano  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$ , con  $a < b$ ,  $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile nel senso di Riemann. Allora  $f$  è sommabile nel senso della definizione (4.7.3). Inoltre, l'integrale nel senso di Lebesgue di  $f$  coincide con l'integrale nel senso di Riemann.*

*Dimostrazione parziale* Vedi il seguente esercizio 4.8.1.  $\square$

**Osservazione 4.8.1** Il risultato del teorema 4.8.1 non si può invertire: se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è sommabile, non è necessariamente integrabile secondo Riemann. Per un esempio, si consideri la funzione di Dirichlet, introdotta in [Analisi A], esempio 4.2.1:

$$\begin{cases} f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

Sappiamo già che  $f$  è limitata, ma non è integrabile secondo Riemann. Ma  $f$  è semplice nel senso della definizione 4.5.1. Per vederlo, basta porre  $A_1 := \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ ,  $A_2 := [0, 1] \setminus A_1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ .  $\mathbf{Q}$  è numerabile e quindi  $L_1^*(\mathbf{Q}) = 0$ . Ne segue che  $L_1^*(A_1) = 0$ . Dal teorema 4.4.3 (IV), otteniamo allora che  $A_1$  è misurabile. Di conseguenza, per il teorema 4.4.2 (V), anche  $A_2$  è misurabile.  $f$  è non negativa. Perciò ,

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = 1 \cdot L_1(A_1) + 0 \cdot L_1(A_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Nel seguito, dovremo considerare integrali su intervalli semiaperti. Un primo risultato utile è il seguente

**Teorema 4.8.2** *Siano  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , non negativa e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo  $[a, c]$ , con  $a < c < b$ . Allora:*

(I) *esiste (eventualmente uguale a  $+\infty$ )  $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ ;*

(II)  *$f$  è misurabile e  $\int_{[a,b[} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ .*

*Dimostrazione parziale* Una dimostrazione di (I) si può ottenere col metodo proposto nell'esercizio 4.8.2.

$\square$

Nel caso di un intervallo della forma  $]a, b]$ , si ha invece:

**Teorema 4.8.3** Siano  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ,  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , non negativa e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo  $[c, b]$ , con  $a < c < b$ . Allora:

(I) esiste (eventualmente uguale a  $+\infty$ )  $\lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx$ ;

(II)  $f$  è misurabile e  $\int_{[a,b]} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx$ .

**Esempio 4.8.1** Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Calcoliamo  $\int_{[1,+\infty[} x^\alpha dx$ .

Poniamo  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha$ . Allora  $f$  è continua e non negativa. Dunque, il teorema 4.8.2 è applicabile. Per  $c \in ]1, +\infty[$ , si ha

$$\int_1^c x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{c^{1+\alpha}-1}{1+\alpha} & \text{se } \alpha \neq -1, \\ \ln(c) & \text{se } \alpha = -1. \end{cases}$$

Passando al limite per  $c \rightarrow +\infty$ , otteniamo allora

$$\int_{[1,+\infty[} x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{|1+\alpha|} & \text{se } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq -1. \end{cases} \quad (4.8.1)$$

Calcoliamo invece, sempre per  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\int_{]0,1]} x^\alpha dx$ , applicando il teorema 4.8.3. Per  $c \in ]0, 1[$ , si ha

$$\int_c^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1-c^{1+\alpha}}{1+\alpha} & \text{se } \alpha \neq -1, \\ -\ln(c) & \text{se } \alpha = -1. \end{cases}$$

Passando al limite per  $c \rightarrow 0$ , otteniamo allora

$$\int_{]0,1]} x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha} & \text{se } \alpha > -1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq -1. \end{cases} \quad (4.8.2)$$

Infine, consideriamo  $\int_{\mathbf{R}^+} x^\alpha dx$ . Osserviamo che

$$\mathbf{R}^+ = ]0, 1] \cup ]1, +\infty[.$$

Applicando allora il teorema 4.6.3 (V), si ha

$$\int_{\mathbf{R}^+} x^\alpha dx = \int_{]0,1]} x^\alpha dx + \int_{]1,+\infty[} x^\alpha dx. \quad (4.8.3)$$

Osserviamo ora che  $L_1(\{1\}) = 0$ . Dal teorema 4.7.2 segue allora

$$\int_{[1,+\infty[} x^\alpha dx = \int_{\{1\}} x^\alpha dx + \int_{]1,+\infty[} x^\alpha dx = \int_{]1,+\infty[} x^\alpha dx.$$

(4.8.1)-(4.8.3) implicano, dunque, che, qualunque sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,

$$\int_{\mathbf{R}^+} x^\alpha dx = +\infty.$$

Veniamo ora a funzioni di segno qualunque su intervalli semiaperti.

**Teorema 4.8.4** *Siano  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$ , integrabile secondo Riemann in ogni intervallo  $[a, c]$ , con  $a < c < b$ . Supponiamo inoltre che  $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c |f(x)| dx < +\infty$ . Allora:*

- (I)  *$f$  è sommabile in  $[a, b[$ ;*
- (II) *esiste in  $\mathbf{R}$   $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ ;*
- (III)  *$\int_{[a, b[} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ , ove abbiamo indicato con  $\int_{[a, b[} f(x) dx$  l'integrale nel senso di Lebesgue.*

**Osservazione 4.8.2** L'esistenza di  $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c |f(x)| dx$  segue dal teorema 4.8.2 (I). Per una dimostrazione del teorema 4.8.3, si veda l'esercizio 4.8.5.

Naturalmente, il teorema 4.8.4 ammette un analogo per intervalli della forma  $]a, b]$  ( $-\infty \leq a < b < +\infty$ ). Invitiamo il lettore a enunciarlo e dimostrarlo (esercizio 4.8.6).

Siano ancora  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile secondo Riemann su ogni intervallo  $[a, c]$ , con  $c \in ]a, b[$ . Se esiste in  $\mathbf{R} \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ , si chiama tale limite **integrale generalizzato** di  $f$  su  $[a, b[$  (analoga definizione per intervalli della forma  $]a, b]$ , con  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ). In tal caso, si dice anche che  $f$  è integrabile in senso generalizzato in  $[a, b[$ . Il teorema 4.8.4 dà una condizione sufficiente di integrabilità in senso generalizzato e di identità tra un integrale generalizzato e un integrale di Lebesgue. Si osservi che una funzione può essere integrabile in senso generalizzato senza essere sommabile (si veda il seguente esercizio 4.8.7). Si rammenti, in proposito, che una funzione sommabile  $f$  è tale che anche  $|f|$  ha integrale finito.

**Esempio 4.8.2** Sia  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x^2}$ . Poiché  $f$  è continua, è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo  $[1, c]$ , con  $1 < c < +\infty$ . Verifichiamo che è sommabile e calcoliamo l'integrale  $\int_{[1, +\infty[} f(x) dx$ . Osserviamo, innanzi tutto, che  $|f(x)| \leq x^{-2} \forall x \geq 1$ . Segue da (4.8.1) e dal teorema 4.8.2 che

$$\int_{[1, +\infty[} |f(x)| dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c |f(x)| dx \leq \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c x^{-2} dx < +\infty.$$

Dal teorema 4.8.4 segue allora che  $f$  è sommabile. Inoltre,

$$\int_{[1, +\infty[} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} (\cos(1/c) - \cos(1)) = 1 - \cos(1).$$

**Esercizio 4.8.1** Diamo una dimostrazione parziale del teorema 4.8.1.

Utilizzeremo le notazioni  $\int_{[a,b]} f(x)dx$  per indicare integrali nel senso di Lebesgue,  $\int_a^b f(x)dx$  per indicare integrali nel senso di Riemann.

(I) Sia  $\sigma := \{a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b\}$  una scomposizione di  $[a, b]$ . Siano poi  $c_1, \dots, c_p$  numeri reali e  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , tale che  $\phi(x) = c_j$  se  $a_{j-1} \leq x < a_j$ , con  $j \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $f(x) = c_p$  se  $x \in [a_{p-1}, a_p]$ . Osservare che  $\phi$  è una funzione semplice, e che è anche integrabile secondo Riemann, perché limitata e con uno numero finito di punti di discontinuità. Verificare che

$$\int_{[a,b]} \phi(x)dx = \sum_{j=1}^p c_j(a_j - a_{j-1}) = \int_a^b \phi(x)dx.$$

Ne seguito dimostreremo il teorema 4.8.1 nel caso di  $f$  continua in  $[a, b]$ .

(II) Osservare, innanzi tutto, che, in virtù del teorema 4.6.1,  $f$  è misurabile.

(III) Per il teorema di Weierstrass, esiste  $M \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $|f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ . Dedurre che  $f$  è sommabile.

(IV) Per il teorema di Heine-Cantor ([Analisi A], teorema 4.2.3), comunque si prenda  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ , è possibile determinare una scomposizione  $\sigma = \{a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b\}$  di  $[a, b]$ , tale che  $|f(x) - f(a_j)| < \epsilon$  se  $x \in [a_{j-1}, a_j]$ , con  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Considerare la funzione  $\phi$  in (I), con  $c_j = f(a_j)$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Dedurre, applicando il teorema 4.7.3 e il teorema 4.3.3 in [Analisi A], che

$$\begin{aligned} |\int_{[a,b]} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx| &\leq |\int_{[a,b]} f(x)dx - \int_{[a,b]} \phi(x)dx| \\ &\quad + |\int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \\ &\leq \int_{[a,b]} |f(x) - \phi(x)|dx + \int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx \\ &\leq 2\epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Poiché  $\epsilon$  è arbitrario, concludere che i due integrali coincidono.

**Esercizio 4.8.2** Verifichiamo il punto (I) del teorema 4.8.2.

Poniamo, per  $c \in [a, b[$ ,  $F(x) := \int_a^c f(x)dx$ .

(I) Osservare che  $F$  è non decrescente.

(II) Poniamo  $l := \sup_{[a,b]} F$  (eventualmente uguale a  $+\infty$ ). Sia  $m < l$ , arbitrario. Per definizione, esiste  $c_0 \in [a, b[$ , tale che  $F(c_0) > m$ . Dedurre da (I) che, se  $c \in ]c_0, b[$ ,  $F(c) > m$ .

(III) Verificare che vale  $\lim_{c \rightarrow b} F(c) = l$ .

**Esercizio 4.8.3** Dimostrare il punto (I) del teorema 4.8.3.

**Esercizio 4.8.4** Calcolare i seguenti integrali:

- (I)  $\int_{[0,+\infty[} e^{-x} dx;$
- (II)  $\int_{[1,+\infty[} x^\alpha \ln(x) dx, \alpha \in \mathbf{R};$
- (III)  $\int_{\mathbf{R}} e^{-|x|} dx;$
- (IV)  $\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^2} dx;$
- (V)  $\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$

**Esercizio 4.8.5** Dimostriamo il teorema 4.8.4.

(I) Osservare, preliminarmente che le funzioni  $f_\pm$  sono integrabili secondo Riemann su ogni intervallo  $[a, c]$ , con  $c \in [a, b]$ , in quanto

$$f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|), \quad f_- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

(II) Poiché  $f_\pm$  sono non negative, dedurre che a esse è applicabile il teorema 4.8.2.

(III) Dal lemma 4.7.2 (II), ricavare che  $\int_{[a,b[} f_\pm(x) dx < +\infty$ , per cui  $f$  è sommabile.

(IV) Concludere osservando che

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \int_a^c f_+(x) dx - \int_a^c f_-(x) dx \\ &\rightarrow \int_{[a,b[} f_+(x) dx - \int_{[a,b[} f_-(x) dx \quad (c \rightarrow b). \end{aligned}$$

**Esercizio 4.8.6** Enunciare e dimostrare l'analogo del teorema 4.8.4 per un intervallo della forma  $]a, b]$ , con  $-\infty \leq a < b < +\infty$ .

**Esercizio 4.8.7** Sia  $f : [\pi, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Verifichiamo che  $f$  è integrabile in senso generalizzato in  $[\pi, +\infty[$ , senza essere sommabile.

(I) Integrando per parti, verificare che  $\forall c \in ]\pi, +\infty[$ ,

$$\int_\pi^c f(x) dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos(c)}{c} + \int_\pi^c \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

(II) Ossevando che  $|\cos(x)|x^{-2} \leq x^{-2}$ , dedurre che il teorema 4.8.4 è applicabile a  $x \rightarrow \frac{\cos(x)}{x^2}$  in  $[\pi, +\infty[$ .

(III) Ricavare che esiste in  $\mathbf{R}$   $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_\pi^c f(x) dx$ .

(IV)  $\forall k \in \mathbf{N}$ , verificare che

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \int_{k\pi+\pi/4}^{(k+1)\pi-\pi/4} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k+1-\pi/4}.$$

- (V) Dedurre che  $\int_{\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j-\pi/4}$ .
- (VI) Poiché la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j-\pi/4}$  non è convergente, concludere che  $\int_{\pi}^c \frac{|\sin(x)|}{x} dx \rightarrow +\infty$  ( $c \rightarrow +\infty$ ). Applicando il teorema 4.8.2, concludere che  $f$  non è sommabile su  $[\pi, +\infty[$ .

**Esercizio 4.8.8** Verificare se  $f$  è sommabile su  $A$  nei casi seguenti. In tal caso, calcolare  $\int_A f(x) dx$ .

- (I)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ ,  $A = ]0, 2]$ .  
 (II)  $f(x) = x^\alpha \ln(x)$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ),  $A = ]0, 1]$ .  
 (III)  $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ ,  $A = \mathbf{R}$ .

## 4.9 I teoremi di riduzione

I classici teoremi di riduzione, che andiamo a enunciare, consentono, in molti casi, di ridurre il calcolo di integrali in una certa dimensione a integrali in dimensioni più basse, fino a uno, caso in cui sono disponibili i risultati della sezione 4.8. Avvertiamo subito che, per la tecnicità dell'argomento, dimostreremo molto poco.

Cominciamo allora con una definizione suggestiva:

**Definizione 4.9.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $P(x)$  una certa affermazione dipendente da  $x \in A$ . Diremo allora che  $P(x)$  vale quasi dappertutto in  $A$  o per quasi ogni  $x$  appartenente ad  $A$  se  $\{x \in A : P(x) \text{ non vale}\}$  è misurabile e ha misura 0.

Abbrevieremo "quasi dappertutto" con "q. d.".

**Esempio 4.9.1** Sia  $P(x)$  l'affermazione " $x \notin \mathbf{Q}$ " ( $x \in \mathbf{R}$ ). Allora, per quanto visto con l'osservazione 4.3.2 e il teorema 4.4.3(IV),  $P(x)$  è vera q. d. (o per quasi ogni numero reale).

Introduciamo adesso una utile notazione. Siano  $m$  e  $n$  numeri naturali,  $A \subseteq \mathbf{R}^{m+n}$ . Indichiamo con  $(x, y)$  un generico elemento di  $\mathbf{R}^{m+n}$ , ove  $x$  indica il blocco delle prime  $m$  variabili e  $y$  il blocco delle ultime  $n$ . Poniamo,  $\forall x \in \mathbf{R}^m$ ,

$$A_x := \{y \in \mathbf{R}^n : (x, y) \in A\}. \quad (4.9.1)$$

**Osservazione 4.9.1**  $A_x$  indica la "sezione" di  $A$  in corrispondenza di  $x \in \mathbf{R}^m$ . Ovviamente,  $A_x \subseteq \mathbf{R}^n$ .

Vale il seguente fondamentale risultato, che non dimostriamo.

**Teorema 4.9.1** *Siano  $m$  e  $n$  numeri naturali,  $A \in \mathcal{M}_{m+n}$ . Allora:*

- (I) *per quasi ogni  $x$  in  $\mathbf{R}^m$ ,  $A_x \in \mathcal{M}_n$ ;*
- (II) *poniamo*

$$\begin{cases} g : \mathbf{R}^m \rightarrow [0, +\infty], \\ g(x) = \begin{cases} L_n(A_x) & \text{se } A_x \in \mathcal{M}_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.9.2)$$

Allora  $g$  è misurabile, non negativa e

$$\int_{\mathbf{R}^m} g(x) dx = L_{m+n}(A).$$

Per la verifica del teorema 4.9.1 in un caso particolare, si veda l'esercizio 4.9.1.

**Osservazione 4.9.2** Il teorema 4.9.1 costituisce una versione sofisticata del classico "principio di Cavalieri": per determinare  $L_{m+n}(A)$ , si può integrare su  $\mathbf{R}^m$  la misura  $n$ -dimensionale della sezione  $A_x$  al variare di  $x$  in  $\mathbf{R}^m$ .

Naturalmente, le prime  $m$  variabili non godono di alcun ruolo privilegiato avremmo potuto fissare un blocco qualunque di  $k$  variabili (con  $1 \leq k \leq m+n-1$ ) e ottenere  $L_{m+n}(A)$  integrando su  $\mathbf{R}^k$  la misura  $m+n-k$ -dimensionale delle sezioni corrispondenti.

**Esempio 4.9.2** Sia, per  $r \in \mathbf{R}^+$ ,

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\}.$$

$A$  è aperto e quindi misurabile. Calcoliamo  $L_2(A)$ . Dato  $x_1 \in \mathbf{R}$ , si ha

$$A_{x_1} = \{x_2 \in \mathbf{R} : x_1^2 + x_2^2 < r^2\} = \begin{cases} ]-\sqrt{r^2 - x_1^2}, \sqrt{r^2 - x_1^2}[ & \text{se } x_1 \in ]-r, r[,} \\ \emptyset & \text{viceversa.} \end{cases}$$

Dunque,  $A_{x_1} \in \mathcal{M}_1 \forall x_1 \in \mathbf{R}$  e si ha

$$L_1(A_{x_1}) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - x_1^2} & \text{se } x_1 \in ]-r, r[,} \\ 0 & \text{viceversa.} \end{cases}$$

Si veda la figura 4.7 per il caso  $r = 1$ .

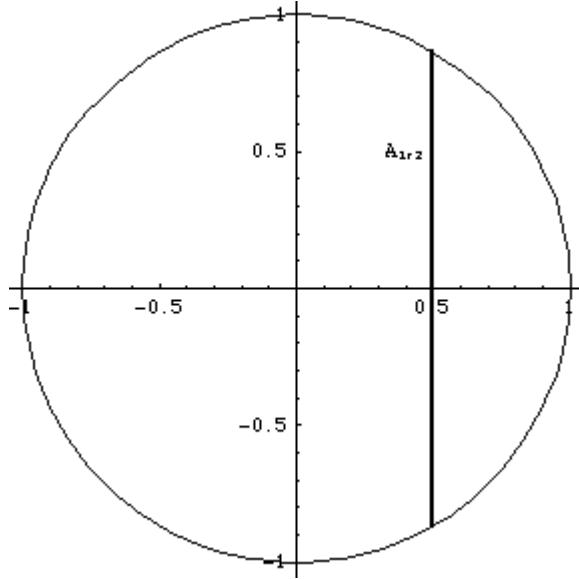


Figura 4.7

Segue dal teorema 4.9.1 che

$$L_2(A) = \int_{[-r,r]} 2(r^2 - x_1^2)^{1/2} dx_1.$$

Dal teorema 4.8.1, si ha allora

$$\begin{aligned} L_2(A) &= \int_{-r}^r 2(r^2 - x_1^2)^{1/2} dx_1 = 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 - r^2 \sin^2(t))^{1/2} \cos(t) dt \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 + \cos(2t)] dt \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

**Esempio 4.9.3** Sia,  $r \in \mathbf{R}^+$ ,

$$A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < r^2\}.$$

$A$  è aperto e quindi misurabile. Calcoliamo  $L_3(A)$ . Dato  $x_3 \in \mathbf{R}$ , si ha

$$\begin{aligned} A_{x_3} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < r^2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2 - x_3^2\} \end{aligned}$$

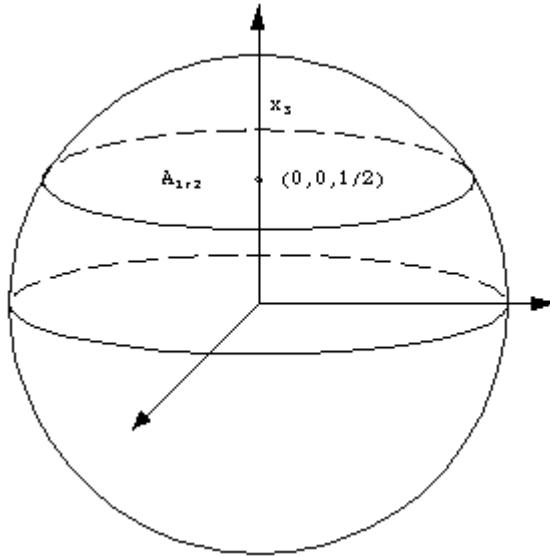


Figura 4.8

Si osservi che  $A_{x_3} = \emptyset$  se  $|x_3| \geq r$ , mentre, se  $|x_3| < r$ ,  $A_{x_3}$  coincide con la palla aperta (in  $\mathbf{R}^2$ ) di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{r^2 - x_3^2}$ . Dall'esempio (4.9.2), segue allora che,  $\forall x_3 \in \mathbf{R}$ ,

$$L_2(A_{x_3}) = \begin{cases} \pi(r^2 - x_3^2) & \text{se } x_3 \in ]-r, r[, \\ 0 & \text{viceversa.} \end{cases}$$

Dai teoremi 4.9.1 e 4.8.1, otteniamo allora

$$L_3(A) = \int_{-r}^r 2\pi(r^2 - x_3^2) dx_3 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Si veda la figura 4.8 per il caso  $r = 1$ .

Passiamo ora al calcolo di integrali.

Cominciamo con funzioni non negative. Useremo la notazione seguente: se  $A \subseteq \mathbf{R}^{m+n}$ , e  $f$  è una funzione di dominio  $A$ , dato  $x \in \mathbf{R}^m$ , indicheremo con  $f(x, .)$  la funzione di dominio  $A_x$ , che fa corrispondere a  $y \in A_x$   $f(x, y)$ .

**Teorema 4.9.2 (di Tonelli)** *Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m+n}$ ,  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile,  $B \in \mathcal{M}_m$ , tale che*

$$\{x \in \mathbf{R}^m : A_x \in \mathcal{M}_n, L_n(A_x) > 0\} \subseteq B.$$

*Definiamo*

$$\begin{cases} g : B \rightarrow [0, +\infty], \\ g(x) = \begin{cases} \int_{A_x} f(x, y) dy & \text{se } A_x \in \mathcal{M}_n, f(x, \cdot) \text{ è misurabile in } A_x, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases} \quad (4.9.3)$$

Allora  $g$  è misurabile e

$$\int_B g(x) dx = \int_A f(x, y) dx dy.$$

**Osservazione 4.9.3** La notazione  $\int_A f(x, y) dx dy$  indica l'integrale di  $f$  su  $A$  nel senso della misura di Lebesgue in  $\mathbf{R}^{m+n}$ . Naturalmente, tutti gli integrali che compaiono nell'enunciato del teorema 4.9.2 sono intesi nel senso della definizione 4.6.2.

Si osservi anche che, se  $f(x, \cdot)$  è sommabile su  $A_x$  per ogni  $x$  in  $A$ , si ha

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_B \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx,$$

formula che giustifica l'espressione "integrale iterato".

**Esempio 4.9.4** Siano

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq x_1^2\}.$$

Calcoliamo

$$\int_A \frac{1}{x_1^4 + x_2^2} dx_1 dx_2. \quad (4.9.4)$$

Osserviamo, innanzi tutto, che  $A$  è misurabile perché chiuso,  $f$  è misurabile su  $A$  perché continua. Inoltre,  $f$  è non negativa. Calcoliamo allora (4.9.4), applicando il teorema di Tonelli.

Dato  $x_1 \in \mathbf{R}$ , si ha

$$A_{x_1} = \begin{cases} [x_1^2, +\infty[ & \text{se } x_1 \geq 1, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poniamo allora

$$B := [1, +\infty[.$$

$B$  è misurabile e contiene tutti gli elementi  $x_1$  di  $\mathbf{R}$  tali che  $A_{x_1} \neq \emptyset$ . Per  $x_1 \in B$ , consideriamo allora

$$g(x_1) := \int_{[x_1^2, +\infty[} \frac{1}{x_1^4 + x_2^2} dx_2.$$

Applicando il teorema 4.8.2, si ha

$$g(x_1) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^c \frac{1}{x_1^4 + x_2^2} dx_2 = \lim_{c \rightarrow +\infty} x_1^{-2} [\arctan(\frac{c}{x_1^2}) - \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{4x_1^2}.$$

Segue dal teorema di Tonelli che

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{x_1^4 + x_2^2} dx_1 dx_2 &= \int_{[1, +\infty[} \frac{\pi}{4x_1^2} dx_1 = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\pi}{4x_1^2} dx_1 \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - \frac{1}{c}) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il teorema di Tonelli ammette un analogo nel caso di  $f$  sommabile, il così detto "teorema di Fubini":

**Teorema 4.9.3 (di Fubini)** *Siano  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m+n}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  sommabile,  $B \in \mathcal{M}_m$ , tale che*

$$\{x \in \mathbf{R}^m : A_x \in \mathcal{M}_n, L_n(A_x) > 0\} \subseteq B.$$

Definiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} g : B \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(x) = \begin{cases} \int_{A_x} f(x, y) dy & \text{se } A_x \in \mathcal{M}_n, f(x, .) \text{ è sommabile in } A_x, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.9.5)$$

Allora  $g$  è sommabile su  $B$  e

$$\int_B g(x) dx = \int_A f(x, y) dx dy.$$

Una dimostrazione del teorema di Fubini in un caso particolare si può ottenere svolgendo il seguente esercizio 4.9.3. A tale scopo, enunciamo, senza dimostrazione, il seguente teorema (per il caso  $n = 1$ , si veda [Analisi A], teorema 4.2.3).

**Teorema 4.9.4 (di Heine-Cantor)** *Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  chiuso e limitato,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  continua. Allora  $f$  è uniformemente continua, nel senso che,  $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$ , esiste  $\delta(\epsilon) \in \mathbf{R}^+$ , tale che,  $\forall x, y \in A$ , se  $\|x - y\| < \delta(\epsilon)$ , si ha  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .*

**Esempio 4.9.5** Siano

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq x_1\},$$

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, f(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 + x_2).$$

Osserviamo, innanzi tutto, che  $A$  è misurabile perché chiuso,  $f$  è misurabile su  $A$  perché continua. Inoltre,  $A \subseteq [0, \pi] \times [0, \pi]$ , per cui  $L_2(A) \leq \pi^2$ . Poiché  $A$  è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass (teorema 1.4.4),  $f$  è limitata. Per il risultato dell'esercizio 4.9.2,  $f$  è sommabile su  $A$ . Applichiamo allora il teorema di Fubini, per calcolare  $\int_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ . Si ha,  $\forall x_1 \in \mathbf{R}$ ,

$$A_{x_1} = \begin{cases} [0, x_1] & \text{se } 0 \leq x_1 \leq \pi, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poniamo allora  $B := [0, \pi]$ . In virtù del teorema 4.8.1,  $\forall x_1 \in B$ ,  $f(x_1, \cdot)$  è sommabile su  $A_{x_1}$  e

$$g(x_1) := \int_{A_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^{x_1} x_1 \cos(x_1 + x_2) dx_2 = x_1 [\sin(2x_1) - \sin(x_1)].$$

Segue che

$$\begin{aligned} \int_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^\pi x_1 [\sin(2x_1) - \sin(x_1)] dx_1 \\ &= [x_1 (\cos(x_1) - \frac{\cos(2x_1)}{2})]_{x_1=0}^{x_1=\pi} \\ &\quad - \int_0^\pi (\cos(x_1) - \frac{\cos(2x_1)}{2}) dx_1 \\ &= -\frac{3\pi}{2} - [\sin(x_1) - \frac{\sin(2x_1)}{4}]_{x_1=0}^{x_1=\pi} = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Osservazione 4.9.4** Il teorema di Fubini riconduce il calcolo dell'integrale di una funzione sommabile di più variabili al calcolo di un integrale "iterato", nel senso che si integra più volte in dimensioni più basse. Ci si può chiedere se la possibilità di effettuare tale "integrazione iterata" implichi che la funzione sia sommabile. Il seguente controesempio mostra che ciò non accade.

Siano  $A := ]0, 1[ \times [-1, 1]$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1}$ . Prendiamo  $B := ]0; 1[$ . Se  $x_1 \in B$ , si ha

$$\int_{[-1, 1]} \frac{x_2}{x_1} dx_2 = \frac{1}{x_1} \int_{-1}^1 x_2 dx_2 = 0.$$

Dunque,

$$\int_B \left( \int_{A_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = 0.$$

Tuttavia,  $f$  non è sommabile. Infatti, applicando il teorema di Tonelli, si ha:

$$\int_A |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 = \int_B \left( \int_{-1}^1 \frac{|x_2|}{x_1} dx_2 \right) dx_1 = \int_B \frac{1}{x_1} dx_1 = +\infty,$$

come risulta dall'esempio 4.8.1.

Una strategia generale potrebbe essere la seguente: verificare prima la sommabilità di  $f$  applicando, eventualmente, il teorema di Tonelli a  $|f|$ . Procedere poi al calcolo dell'integrale di  $f$  per integrazione iterata, applicando poi il teorema di Fubini.

**Esercizio 4.9.1** Siano  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$ , con  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continua, tale che  $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ . Poniamo

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\}.$$

Verifichiamo che vale il teorema 4.9.1.

(I) Si osservi che  $\forall x_1 \in \mathbf{R}$ ,

$$A_{x_1} = \begin{cases} [0, f(x_1)] & \text{se } x_1 \in [a, b], \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(II) Di conseguenza,  $A_{x_1} \in \mathcal{M}_1 \forall x_1 \in \mathbf{R}$  e

$$g(x_1) = L_1(A_{x_1}) = \begin{cases} f(x_1) & \text{se } x_1 \in [a, b], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(III) Verificare che  $g$  è misurabile non negativa in  $\mathbf{R}$  e

$$\int_{\mathbf{R}} g(x_1) dx_1 = \int_a^b f(t) dt.$$

(IV) Sia  $\sigma := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  una scomposizione di  $[a, b]$ . Poniamo

$$A_\sigma^+ := [x_0, x_1] \times [0, \sup_{[x_0, x_1]} f] \cup [x_1, x_2] \times [0, \sup_{[x_1, x_2]} f] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \times [0, \sup_{[x_{n-1}, x_n]} f],$$

$$A_\sigma^- := [x_0, x_1] \times [0, \inf_{[x_0, x_1]} f] \cup [x_1, x_2] \times [0, \inf_{[x_1, x_2]} f] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \times [0, \inf_{[x_{n-1}, x_n]} f].$$

Verificare che  $A_\sigma^- \subseteq A \subseteq A_\sigma^+$ .

(V) Verificare che  $A_\sigma^\pm$  sono misurabili e che  $L_2(A_\sigma^+) = S(f, \sigma)$ ,  $L_2(A_\sigma^-) = s(f, \sigma)$ , rispettivamente la somma superiore e inferiore di  $f$  rispetto a  $\sigma$ .

(VI) Osservare che  $A$  è chiuso e quindi misurabile. Dedurre che  $\forall \sigma \in \Sigma(a, b)$ ,

$$s(f, \sigma) \leq L_2(A) \leq S(f, \sigma).$$

(VII) Utilizzando il criterio di integrabilità di Riemann ([Analisi A], teorema 4.2.1), dedurre che

$$L_2(A) = \int_a^b f(t)dt.$$

**Esercizio 4.9.2** Siano  $n \in \mathbf{N}$ , tale che  $L_n(A) < +\infty$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  misurabile e limitata. Verificare che  $f$  è sommabile su  $A$ .

**Esercizio 4.9.3** Dimostriamo un caso particolare del teorema di Fubini. Supponiamo che  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  sia continua. Poniamo  $B := [0, 1]$ .

(I) Verificare che,  $\forall x_1 \in B$ ,  $A_{x_1} = B$ . Inoltre,  $f(x_1, \cdot)$  è sommabile su  $A_{x_1}$  e,  $\forall x_1 \in B$ ,

$$g(x_1) := \int_{A_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2.$$

(II) Sia, per  $n \in \mathbf{N}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I_{nk} := [(k-1)/n, k/n]$  se  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $I_{nn} := [(n-1)/n, 1]$ . Poniamo

$$\begin{cases} \phi_n : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ \phi_n(x_1, x_2) = f(j/n, k/n) \quad \text{se } (x_1, x_2) \in I_{nj} \times I_{nk}, 1 \leq j, k \leq n. \end{cases}$$

Osservare che  $\phi_n$  è semplice, sommabile su  $A$  e

$$\int_A \phi_n(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = n^{-2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(j/n, k/n).$$

Inoltre,  $\forall x_1 \in B$ ,  $\phi_n(x_1, \cdot)$  è sommabile su  $A_{x_1} = B$  e, se  $x_1 \in I_{nj}$ ,

$$g_n(x_1) := \int_{A_{x_1}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2 = n^{-1} \sum_{k=1}^n f(j/n, k/n).$$

Dedurre che  $g_n$  è semplice e sommabile su  $B$  e

$$\int_B g_n(x_1) dx_1 = \int_A \phi_n(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

(III) Sia  $x_1 \in B$ . Osservare che, se  $x_1 \in I_{nj}$ ,

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g_n(x_1)| &= |\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} [f(x_1, x_2) - f(j/n, k/n)] dx_2| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x_1, x_2) - f(j/n, k/n)| dx_2. \end{aligned}$$

(IV) Dedurre dal teorema di Heine-Cantor che,  $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$ , esiste  $n(\epsilon) \in \mathbf{N}$ , tale che, se  $n > n(\epsilon)$ , si ha  $|g_n(x_1) - g(x_1)| < \epsilon \ \forall x_1 \in B$ . Dedurre che,  $\forall x_1 \in B$ , si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x_1) = g(x_1).$$

Ciò implica che  $g$  è misurabile su  $B$ .

(V) Sia  $M \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $|f(x_1, x_2)| \leq M, \forall (x_1, x_2) \in A$  (un  $M$  così fatto esiste per il teorema di Weirstrass). Verificare che,  $\forall x_1 \in B$ ,  $|g(x_1)| \leq M$ . Applicando (IV) e il risultato dell'esercizio 4.9.2, concludere che  $g$  è sommabile su  $B$ . Da (IV) ricavare anche che

$$|\int_B (g_n(x_1) - g(x_1)) dx_1| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(VI) Applicando ancora il teorema di Heine Cantor, verificare che  $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$ , esiste  $n(\epsilon) \in \mathbf{N}$ , tale che, se  $n > n(\epsilon)$ ,

$$|\phi_n(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)| < \epsilon \quad \forall (x_1, x_2) \in A.$$

(VII) Applicando il risultato dell'esercizio 4.9.2, verificare che  $f$  è sommabile su  $A$ . Applicando (VI), verificare che

$$|\int_A \phi_n(x) dx - \int_A f(x) dx| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(VIII) Verificare che

$$\begin{aligned} & |\int_A f(x) dx - \int_B g(x_1) dx_1| \\ & \leq |\int_A f(x) dx - \int_A \phi_n(x) dx| + |\int_B \phi_n(x_1) dx_1 - \int_B g(x_1) dx_1| \\ & \quad \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Concludere che  $\int_B g(x_1) dx_1 = \int_A f(x) dx$ .

**Esercizio 4.9.4** Calcolare  $\int_A f(x) dx$  in ciascuno dei casi seguenti. Assicurarsi preliminarmente che l'integrale sia definito.

(I)  $A = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ .

(II)  $A = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + x_2^3$ .

(III)  $A = [0, \pi] \times [0, \pi]$ ,  $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1) \sin^2(x_2)$ .

(IV)  $A = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ ,  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$ .

(V)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

(VI)  $A = [1, 2] \times [1, 4]$ ,  $f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + x_2)^{-2} & \text{se } x_1 \leq x_2 \leq 2x_1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

(VII)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\}$  ( $a, b \in \mathbf{R}^+$ ),  $f(x_1, x_2) = 1$   
 (si osservi che l'integrale coincide con  $L_2(A)$ ).

(VIII)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1\}$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ ),  
 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ .

(si osservi che l'integrale coincide con  $L_3(A)$ ).

(IX)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ .

(X)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \sin(x_1)\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ .

(XI)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6\}$ ,  
 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ .

(XII)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq x_2 \geq \frac{x_1^2}{2}\} \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$ .

(XIII)  $A = \mathbf{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}$ .

(XIV)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ ,  $f(x_1, x_2) = e^{-x_1-x_2}$ .

## 4.10 Il teorema di cambiamento di variabile

Come già nel caso unidimensionale, è molto utile per l'integrazione pluridimensionale il teorema di cambiamento di variabile, che andiamo a illustrare.

Cominciamo con l'introdurre alcune notazioni e definizioni.

**Definizione 4.10.1** Siano  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ , oppure  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diremo che  $f$  è integrabile se nel primo caso è misurabile, nel secondo è sommabile.

**Definizione 4.10.2** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$ ,  $T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $T$  è un **cambiamento di variabile** se:

- (I)  $T$  è iniettiva;
- (II)  $T$  è di classe  $C^1$ ;
- (III)  $\forall x \in \Omega$ , il determinante della matrice jacobiana  $J_T(x)$  è diverso da 0.

Enunciamo allora (senza dimostrazione) il principale risultato di questa sezione;

**Teorema 4.10.1 (del cambiamento di variabile)** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cambiamento di variabile,  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  oppure  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Supponiamo, inoltre che  $A \subseteq T(\Omega)$ . Allora:

(I)  $T^{-1}(A) \in \mathcal{M}_n$ ;

(II)  $f$  è integrabile su  $A$  se e solo se la funzione  $x \rightarrow f(T(x))|detJ_T(x)|$ , di dominio  $T^{-1}(A)$ , è integrabile su  $T^{-1}(A)$ ;  
 (III) nel caso ciò avvenga,

$$\int_A f(y) dy = \int_{T^{-1}(A)} f(T(x)) |detJ_T(x)| dx. \quad (4.10.1)$$

(formula del cambiamento di variabile).

**Esempio 4.10.1** Osserviamo preliminarmente che la palla  $B(O, 1)$  in  $\mathbf{R}^n$  ha misura di Lebesgue finita. Infatti, dal teorema 1.1.3 (VI), si ha che

$$B(O, 1) \subseteq ]-1, 1[^n,$$

per cui

$$L_n(B(O, 1)) \leq 2^n.$$

Poniamo

$$\omega_n := L_n(B(O, 1)).$$

Siano  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ),  $r \in \mathbf{R}^+$ . Vogliamo provare che

$$L_n(B(x^0, r)) = \omega_n r^n.$$

Poniamo

$$\begin{cases} T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ T(x) := rx + x^0. \end{cases}$$

$T$  è di classe  $C^1$ ,  $T(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$   $T$  è iniettiva e,  $\forall y \in \mathbf{R}^n$ ,

$$T^{-1}(y) = r^{-1}(y - x^0).$$

Inoltre,  $\forall x \in \mathbf{R}^n$ ,  $J_T(x)$  coincide con la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix},$$

che ha determinante  $r^n$ . Segue dal teorema 4.10.1 che

$$L_n(B(x^0, r)) = \int_{B(x^0, r)} 1 dy = \int_{B(0, 1)} r^n dx = \omega_n r^n.$$

**Esempio 4.10.2** Cominciamo a illustrare la connessione che esiste tra il teorema 4.10.1 e il risultato corrispondente visto in [Analisi A] (teorema 4.5.1).

Siano  $\Omega$  un intervallo aperto in  $\mathbf{R}$ ,  $T \in C^1(\Omega)$  con  $T'(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$ . Allora  $T$  è un cambiamento di variabile nel senso della definizione 4.10.2. Infatti, poiché  $\Omega$  è un intervallo, varrà sempre  $T'(x) > 0 \forall x \in \Omega$ , oppure  $T'(x) < 0 \forall x \in \Omega$ . Viceversa, se esistessero  $x_0$  e  $x_1$  in  $\Omega$  tali che  $T'(x_0) < 0 < T'(x_1)$ , per il teorema di Bolzano esisterebbe anche  $x_2 \in \Omega$ , tale che  $T'(x_2) = 0$ , contro le ipotesi. Dunque,  $T$  è necessariamente strettamente monotona e perciò iniettiva.

Siano ora  $a$  e  $b$  appartenenti a  $T(\Omega)$ , con  $a < b$ . Osserviamo che, poiché  $T(\Omega)$  è un intervallo,  $[a, b] \subseteq T(\Omega)$ . Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , per esempio continua. Allora, in base al teorema 4.8.1,  $f$  è sommabile su  $[a, b]$  e il suo integrale nel senso di Lebesgue coincide con l'integrale nel senso di Riemann. Nel seguito useremo le notazioni  $\int_a^\beta$  e  $\int_{[a, \beta]}$  per indicare, rispettivamente, integrali nel senso di Riemann e di Lebesgue.

Il teorema 4.10.1 ci permette di affermare che la funzione  $x \rightarrow f(T(x))|T'(x)|$  è sommabile su  $T^{-1}([a, b])$  e vale la formula

$$\int_a^b f(y) dy = \int_{[a, b]} f(y) dy = \int_{T^{-1}([a, b])} f(T(x))|T'(x)| dx. \quad (4.10.2)$$

Consideriamo adesso separatamente i due casi:

$$(a) \quad T'(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega; \quad (b) \quad T'(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Ricordiamo che, per il teorema 2.9.3 in [Analisi A],  $T^{-1}$  è continua. Pertanto,  $T^{-1}([a, b])$  sarà in ogni caso un intervallo. Nel caso (a),  $T$  è crescente e quindi  $T^{-1}$  è crescente. In tal caso, perciò,  $T^{-1}([a, b]) = [T^{-1}(a), T^{-1}(b)]$ . Pertanto, nel caso (a),

$$\begin{aligned} \int_{T^{-1}([a, b])} f(T(x))|T'(x)| dx &= \int_{[T^{-1}(a), T^{-1}(b)]} f(T(x))T'(x) dx \\ &= \int_{T^{-1}(a)}^{T^{-1}(b)} f(T(x))T'(x) dx. \end{aligned}$$

Nel caso (b), invece,  $T$  è decrescente e quindi  $T^{-1}$  è decrescente. In tal caso, perciò,  $T^{-1}([a, b]) = [T^{-1}(b), T^{-1}(a)]$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_{T^{-1}([a, b])} f(T(x))|T'(x)| dx &= - \int_{[T^{-1}(b), T^{-1}(a)]} f(T(x))T'(x) dx \\ &= - \int_{T^{-1}(b)}^{T^{-1}(a)} f(T(x))T'(x) dx = \int_{T^{-1}(a)}^{T^{-1}(b)} f(T(x))T'(x) dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che, in questo secondo caso, nell'ultimo integrale scritto il primo estremo è maggiore del secondo.

Abbiamo perciò ottenuto (con ipotesi un po' diverse) il risultato del teorema 4.5.1 in [Analisi A].

**Osservazione 4.10.1** Si potrebbe dimostrare che la funzione inversa  $T^{-1}$  di un cambiamento di variabile è a sua volta un cambiamento di variabile. Si potrebbe infatti far vedere che  $T(\Omega)$  è un aperto, che  $T^{-1}$  è di classe  $C^1$  e che  $\det(J_{T^{-1}}(y)) \neq 0 \forall y \in T(\Omega)$ .

**Esempio 4.10.3** Sia  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  tale che  $\det(T) \neq 0$ . Con la scrittura  $\det(T)$  intendiamo il determinante della matrice di rappresentazione di  $T$ . È noto che in tal caso  $T$  è iniettiva e  $T(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ . Chiaramente,  $T$  è un cambiamento di variabile. Allora, se  $A \in \mathcal{M}_n$  e (per esempio)  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  è sommabile, si ha

$$\int_A f(y) dy = \int_{T^{-1}(A)} f(Tx) |\det(T)| dx. \quad (4.10.3)$$

In particolare, siano  $I$  il rettangolo  $n$ -dimensionale  $[0, 1]^n$ .  $A := T(I)$ . Si osservi che  $A \in \mathcal{M}_n$  perché è chiuso (per il teorema di Weierstrass). Allora, dal teorema 4.10.1,

$$L_n(T(I)) = \int_{T(I)} 1 dy = \int_I |\det(T)| dx = |\det(T)|.$$

Abbiamo dunque ottenuto la seguente interpretazione di  $\det(T)$ : a parte il segno,  $\det(T)$  rappresenta la misura  $n$ -dimensionale di  $I$ , detto anche "cubo unitario  $n$ -dimensionale".

**Esempio 4.10.4** Capitano spesso integrali della forma  $\int_A f(S(y)) dy$ , ove  $S$  è un cambiamento di variabile. Prendendo  $T = S^{-1}$ , che è a sua volta un cambiamento di variabile per l'osservazione 4.10.1, si ha

$$\begin{aligned} \int_A f(S(y)) dy &= \int_{S(A)} f(S(S^{-1}(x))) |\det J_{S^{-1}}(x)| dx \\ &= \int_{S(A)} f(x) |\det J_{S^{-1}}(x)| dx. \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

Consideriamo, ad esempio, l'integrale

$$I = \int_A e^{\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}} dx_1 dx_2, \quad (4.10.5)$$

con

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 2\}.$$

Osserviamo che  $A$  è misurabile perché aperto,  $f$  è misurabile perché continua. Inoltre  $f$  è non negativa. Dunque, l'integrale (4.10.5) (eventualmente uguale a  $+\infty$ ) è ben definito. Poniamo

$$\begin{cases} S : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ S(x_1, x_2) = (x_2 - x_1, x_1 + x_2). \end{cases}$$

(4.10.5) si può allora scrivere nella forma  $\int_A f(S(x_1, x_2)) dx_1 dx_2$ , con

$$f(y_1, y_2) = e^{\frac{y_1}{y_2}}.$$

$S$  è lineare,  $\det(S) = -2$ . Segue che  $\det(S^{-1}) = -1/2$ , per cui, applicando (4.10.4), otteniamo

$$I = \frac{1}{2} \int_{S(A)} e^{y_1/y_2} dy_1 dy_2.$$

Determiniamo  $S(A)$ . Dato  $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ , si tratta di stabilire se esiste  $(x_1, x_2) \in A$ , tale che  $S(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ . Ciò equivale a richiedere che  $S^{-1}(y_1, y_2) \in A$ . È facile verificare che,  $\forall (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$S^{-1}(y_1, y_2) = \left( \frac{y_2 - y_1}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Dunque,

$$\begin{aligned} S(A) &= \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{y_2 - y_1}{2} > 0, \frac{y_1 + y_2}{2} > 0, \frac{y_2 - y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} < 2\} \\ &\quad \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 : 2 > y_2 > |y_1|\}. \end{aligned}$$

Conviene applicare il teorema di Tonelli integrando prima rispetto a  $y_1$ . Si ha allora

$$I = \frac{1}{2} \int_{]0,2[} \left( \int_{]-y_2, y_2[} e^{y_1/y_2} dy_1 \right) dy_2.$$

Poiché  $L_1(\{-y_2, y_2\}) = 0$ , si ha,  $\forall y_2 \in ]0, 2[$ ,

$$\int_{]-y_2, y_2[} e^{y_1/y_2} dy_1 = \int_{[-y_2, y_2]} e^{y_1/y_2} dy_1 = \int_{-y_2}^{y_2} e^{y_1/y_2} dy_1 = (e - e^{-1})y_2.$$

Dunque

$$I = \frac{1}{2} \int_{]0,2[} (e - e^{-1})y_2 dy_2 = \frac{e - e^{-1}}{2} \int_0^2 y_2 dy_2 = e - e^{-1}.$$

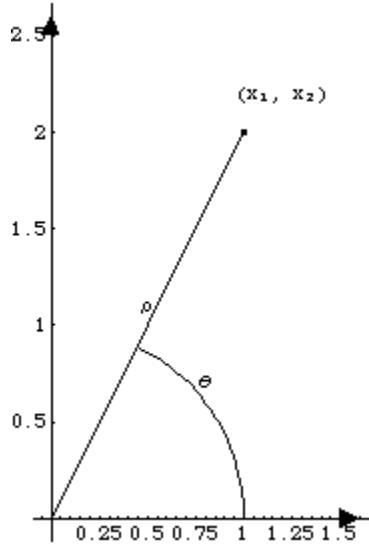


Figura 4.9

**Esempio 4.10.5** (Coordinate polari in  $\mathbf{R}^2$ ) Siano

$$\Omega := \mathbf{R}^+ \times ]0, 2\pi[,$$

$$\begin{cases} T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ T(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \end{cases} \quad (4.10.6)$$

Si veda la figura 4.9.

$T$  è iniettiva e

$$T(\Omega) = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0\}.$$

(esercizio 4.10.1).  $T$  è, ovviamente, di classe  $C^1$ . Inoltre,  $\forall(\rho, \theta) \in \Omega$ , si ha

$$J_T(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det(J_T(\rho, \theta)) = \rho > 0 \quad \forall(\rho, \theta) \in \Omega. \quad (4.10.7)$$

Allora, se  $A \in \mathcal{M}_2$ ,  $A \subseteq T(\Omega)$  e  $f$  è integrabile su  $A$ , dal teorema 4.10.1 otteniamo

$$\int_A f(x)dx = \int_{T^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Supponiamo ora che non valga la condizione  $A \subseteq T(\Omega)$ . Osserviamo che  $T(\Omega)^c$  ha misura nulla in  $\mathbf{R}^2$  (vedi l'esercizio 4.10.2). Si ha

$$A = (A \cap T(\Omega)) \cup (A \cap T(\Omega)^c).$$

Sia  $f$  integrabile su  $A$ . Poiché  $A \cap T(\Omega)^c$  ha misura nulla, in ogni caso  $\int_{A \cap T(\Omega)^c} f(x)dx = 0$  (teorema 4.7.2). Segue dal teorema 4.6.3 (V) o dal teorema 4.7.1 (IV) che

$$\int_A f(x)dx = \int_{A \cap T(\Omega)} f(x)dx,$$

da cui

$$\int_A f(x)dx = \int_{T^{-1}(A \cap T(\Omega))} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta. \quad (4.10.8)$$

Vale la pena verificare che

$$T^{-1}(A \cap T(\Omega)) = \{(\rho, \theta) \in \Omega : T(\rho, \theta) \in A\}, \quad (4.10.9)$$

perché argomenti simili sono applicabili in situazioni più generali.

Sia dunque  $(\rho, \theta) \in T^{-1}(A \cap T(\Omega))$ . Allora  $(\rho, \theta) = T^{-1}(x_1, x_2)$ , per qualche  $(x_1, x_2) \in A \cap T(\Omega)$ . Poiché l'immagine di  $T^{-1}$  è  $\Omega$ , necessariamente  $(\rho, \theta) \in \Omega$ . Inoltre,  $T(\rho, \theta) = (x_1, x_2) \in A$ .

Sia, viceversa,  $(\rho, \theta) \in \Omega$ , tale che  $T(\rho, \theta) \in A$ . Poniamo  $(x_1, x_2) := T(\rho, \theta)$ . Allora  $(x_1, x_2) \in A \cap T(\Omega)$ , per cui, essendo  $(\rho, \theta) \in T^{-1}(x_1, x_2)$ ,  $(\rho, \theta) \in T^{-1}(A \cap T(\Omega))$ .

Vediamo ora un esempio concreto. Calcoliamo di nuovo  $L_2(B(O, r))$ , con  $r \in \mathbf{R}^+$  (vedi l'esempio 4.9.2). Si osservi che  $B(O, r)$  non è contenuto in  $T(\Omega)$ . Si ha allora

$$L_2(B(O, r)) = \int_{B(O, r)} 1 dx = \int_{T^{-1}(B(O, r) \cap T(\Omega))} \rho d\rho d\theta.$$

Si ha

$$\begin{aligned} T^{-1}(B(0, r) \cap T(\Omega)) &= \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times ]0, 2\pi[ : \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) \\ &< r^2\} = ]0, r[ \times ]0, 2\pi[. \end{aligned}$$

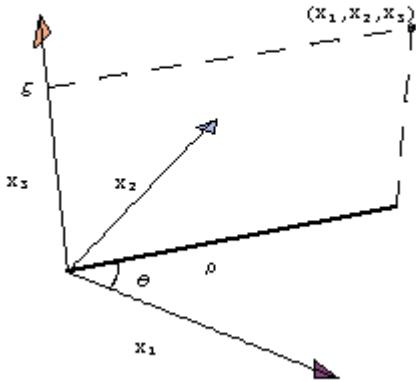


Figura 4.10

Quindi, dal teorema di Tonelli,

$$L_2(B(O, r)) = \int_{]0, r[} \left( \int_{]0, 2\pi[} \rho d\theta \right) d\rho = \int_{]0, r[} 2\pi \rho d\rho = \int_0^r 2\pi \rho d\rho = \pi r^2.$$

**Esempio 4.10.6** (Coordinate cilindriche in  $\mathbf{R}^3$ ) Siano

$$\Omega := \mathbf{R}^+ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbf{R},$$

$$\begin{cases} T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ T(\rho, \theta, \zeta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \zeta) \end{cases} \quad (4.10.10)$$

Si veda la figura 4.10.

Si osservi che \$\rho\$ e \$\theta\$ sono le coordinate polari di \$(x\_1, x\_2)\$ in \$\mathbf{R}^2\$.

\$T\$ è iniettiva e

$$T(\Omega) = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0\}.$$

(esercizio 4.10.3). \$T\$ è, ovviamente, di classe \$C^1\$. Inoltre, \$\forall (\rho, \theta, \zeta) \in \Omega\$, si

ha

$$J_T(\rho, \theta, \zeta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det(J_T(\rho, \theta, \zeta)) = \rho > 0 \quad \forall (\rho, \theta, \zeta) \in \Omega. \quad (4.10.11)$$

Allora, se  $A \in \mathcal{M}_3$ ,  $A \subseteq T(\Omega)$  e  $f$  è integrabile su  $A$ , dal teorema 4.10.1 otteniamo

$$\int_A f(x) dx = \int_{T^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \zeta) \rho d\rho d\theta d\zeta.$$

Supponiamo ora che non valga la condizione  $A \subseteq T(\Omega)$ . Osserviamo che  $T(\Omega)^c$  ha misura nulla in  $\mathbf{R}^3$  (vedi l'esercizio 4.10.3). Ragionando allora come nell'esempio 4.10.5, otteniamo

$$\int_A f(x) dx = \int_{T^{-1}(A \cap T(\Omega))} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \zeta) \rho d\rho d\theta d\zeta. \quad (4.10.12)$$

Ancora come nell'esempio 4.10.5, si vede che

$$T^{-1}(A \cap T(\Omega)) = \{(\rho, \theta, \zeta) \in \Omega : T(\rho, \theta, \zeta) \in A\}. \quad (4.10.13)$$

Le coordinate cilindriche sono particolarmente adatte per il calcolo di integrali in cui compaiono (nella definizione del dominio di integrazione o della funzione integranda) termini della forma  $x_1^2 + x_2^2$ . Vediamo un esempio. Sia

$$A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 \geq 0\}.$$

Calcoliamo

$$\int_A e^{-x_3} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Osserviamo preliminarmente che l'integrale è definito perché  $A$  è chiuso, e quindi misurabile, e  $f(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_3}$  è continua (e dunque misurabile) e non negativa. Allora

$$\int_A e^{-x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_B e^{-\zeta} \rho d\rho d\theta d\zeta,$$

con

$$\begin{aligned} B &:= \{\rho, \theta, \zeta) \in \mathbf{R}^+ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbf{R} : (\rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2 \leq \zeta^2, \zeta \geq 0\} \\ &= \{(\rho, \theta, \zeta) \in \mathbf{R} \times ]0, 2\pi[ \times \mathbf{R} : \zeta > 0, 0 < \rho \leq \zeta\}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$C := \{(\rho, \zeta) \in \mathbf{R}^2 : \zeta > 0, 0 < \rho \leq \zeta\}.$$

Allora, per il teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_A e^{-x_3} dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_C (\int_{[0, 2\pi]} e^{-\zeta} \rho d\theta) d\rho d\zeta = 2\pi \int_C e^{-\zeta} \rho d\rho d\zeta \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}^+} (\int_{[0, \zeta]} e^{-\zeta} \rho d\rho) d\zeta = 2\pi \int_{\mathbf{R}^+} e^{-\zeta} (\int_0^\zeta \rho d\rho) d\zeta \\ &= \pi \int_{\mathbf{R}^+} e^{-\zeta} \zeta^2 d\zeta = \pi \int_{[0, +\infty[} e^{-\zeta} \zeta^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Dal teorema 4.8.2 segue

$$\int_{[0, +\infty[} e^{-\zeta} \zeta^2 d\zeta = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c e^{-\zeta} \zeta^2 d\zeta = \lim_{c \rightarrow +\infty} [2(1 - e^{-c} c - e^{-c}) - e^{-c} c^2] = 2.$$

Dunque, l'integrale vale  $2\pi$ .

**Esempio 4.10.7** (Coordinate polari in  $\mathbf{R}^3$ ) Siano

$$\Omega := \mathbf{R}^+ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[,$$

$$\begin{cases} T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin(\theta) \cos(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\theta)). \end{cases} \quad (4.10.14)$$

Si veda la figura 4.11.

$T$  è iniettiva e

$$T(\Omega) = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0\}.$$

(esercizio 4.10.4).  $T$  è, ovviamente, di classe  $C^1$ . Inoltre,  $\forall(\rho, \theta, \zeta) \in \Omega$ , si ha

$$J_T(\rho, \theta, \zeta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & \rho \cos(\theta) \cos(\phi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & \rho \cos(\theta) \sin(\phi) & \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det(J_T(\rho, \theta, \zeta)) = \rho^2 \sin(\theta) > 0 \quad \forall(\rho, \theta, \phi) \in \Omega. \quad (4.10.15)$$

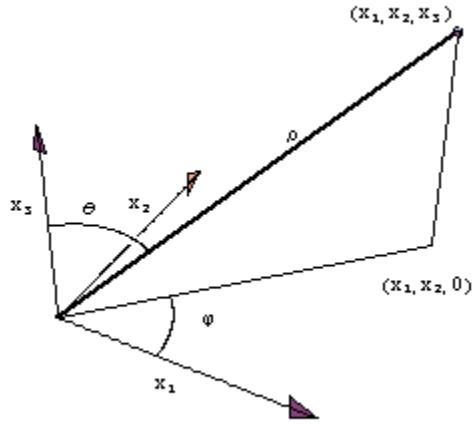


Figura 4.11

Allora, se  $A \in \mathcal{M}_3$ ,  $A \subseteq T(\Omega)$  e  $f$  è integrabile su  $A$ , dal teorema 4.10.1 otteniamo

$$\int_A f(x) dx = \int_{T^{-1}(A)} f(\rho \sin(\theta) \cos(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\theta)) \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta d\phi.$$

Supponendo poi che non valga la condizione  $A \subseteq T(\Omega)$  e ragionando ancora come nell'esempio 4.10.5, otteniamo

$$\int_A f(x) dx = \int_{T^{-1}(A \cap T(\Omega))} f(\rho \sin(\theta) \cos(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\theta)) \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta d\phi. \quad (4.10.16)$$

Ancora come nell'esempio 4.10.5, si vede che

$$T^{-1}(A \cap T(\Omega)) = \{(\rho, \theta, \phi) \in \Omega : T(\rho, \theta, \phi) \in A\}. \quad (4.10.17)$$

Le coordinate polari in  $\mathbf{R}^3$  sono particolarmente adatte per il calcolo di integrali in cui compaiono (nella definizione del dominio di integrazione o della funzione integranda) termini della forma  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Vediamo un esempio. Calcoliamo

$$I_\alpha := \int_A \|x\|^\alpha dx, \quad (4.10.18)$$

con

$$A := \{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\| \geq 1\}, \quad (4.10.19)$$

al variare di  $\alpha$  in  $\mathbf{R}$ . Osserviamo che, qualunque sia  $\alpha$ ,  $I_\alpha$  è ben definito, perché  $A$  è chiuso e la funzione integranda è continua e non negativa. Allora,

$$I_\alpha = \int_{T^{-1}(A \cap T(\Omega))} \rho^{\alpha+2} \sin(\theta) d\rho d\theta d\phi$$

e

$$\begin{aligned} T^{-1}(A \cap T(\Omega)) &= \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbf{R}^+ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ : (\rho \sin(\theta) \cos(\phi))^2 \\ &\quad + (\rho \sin(\theta) \sin(\phi))^2 + (\rho \cos(\theta))^2 \geq 1\} \\ &= [1, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Dunque, applicando il teorema di Tonelli, si ha

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_{[1, +\infty[ \times ]0, \pi[} \left( \int_{]0, 2\pi[} \rho^{\alpha+2} \sin(\theta) d\theta \right) d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_{[1, +\infty[} \left( \int_{]0, \pi[} \rho^{\alpha+2} \sin(\theta) d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_{[1, +\infty[} \rho^{\alpha+2} \left( \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \right) d\rho \\ &= 4\pi \int_{[1, +\infty[} \rho^{\alpha+2} d\rho = 4\pi \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \rho^{\alpha+2} d\rho \\ &= \begin{cases} 4\pi \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{c^{\alpha+3}-1}{\alpha+3} & \text{se } \alpha \neq -3, \\ 4\pi \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln(c) & \text{se } \alpha = -3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi}{|\alpha+3|} & \text{se } \alpha < -3, \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq -3. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10.20)$$

**Esercizio 4.10.1** Dimostrare che  $T$  definita in (4.10.6) è iniettiva e la sua immagine è  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ .

Sugg. : considerare l'equazione

$$\begin{cases} \rho \cos(\theta) = x_1, \\ \rho \sin(\theta) = x_2, \end{cases}$$

con  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ . Si cercano soluzioni  $(\rho, \theta)$  in  $\mathbf{R}^+ \times ]0, 2\pi[$ .

(I) Ricavare  $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Dedurre che, affinché esistano soluzioni in  $\mathbf{R}^+ \times ]0, 2\pi[$ , deve essere  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ . In tal caso,  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Dedurre

$$e^{i\theta} = \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right).$$

(II) Dal teorema 1.14.1 in [Analisi A] ricavare che quest'ultima equazione ha un'unica soluzione  $\theta$  in  $[0, 2\pi[$ . Verificare che  $\theta = 0$  se e solo se  $x_1 > 0$  e  $x_2 = 0$ .

**Esercizio 4.10.2** Poniamo  $B := \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ . Verificare che  $B \in \mathcal{M}_2$  e  $L_2(B) = 0$ .

Sugg.: osservare che,  $\forall x_1 \in \mathbf{R}$ ,  $L_1(B_{x_1}) = 0$  e applicare il teorema 4.9.1.

**Esercizio 4.10.3** Dimostrare che, se  $T$  e  $\Omega$  sono definiti come in (4.10.10), si ha

$$T(\Omega) = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0\}.$$

Verificare che  $L_3(T(\Omega)^c) = 0$ .

**Esercizio 4.10.4** Dimostrare che, se  $T$  e  $\Omega$  sono definiti come in (4.10.14),  $T$  è iniettiva e

$$T(\Omega) = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x_1, 0, x_2) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0\}.$$

Sugg.:

(I) Sia  $(x_1, x_2, x_3) = T(\rho, \theta, \phi)$ , per qualche  $(\rho, \theta, \phi) \in \Omega$ . Ricavare che

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Dedurre che  $(0, 0, 0) \notin T(\Omega)$ .

(II) Sia  $(x_1, x_2, x_3) = T((\rho, \theta, \phi))$ . Poiché  $\theta \in ]0, \pi[$ , ricavare, usando (1),

$$\theta = \arccos\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right).$$

Si osservi che l'espressione ha senso perché  $|\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}| \leq 1$ . Poiché  $\theta \notin \{0, \pi\}$ , deve essere

$$\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \notin \{-1, 1\}.$$

Dedurre che

$$\{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbf{R}\} \cap T(\Omega) = \emptyset.$$

(III) Da (II) ricavare che

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

da cui

$$e^{i\phi} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + i \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

(IV) Poiché  $\phi \in ]0, 2\pi[$ , ricavare che

$$T(\Omega) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\} = \emptyset.$$

Osservare che la coordinata polare  $\phi$  coincide con la coordinata cilindrica  $\theta$ .

**Esercizio 4.10.5** Calcolare  $\int_A f(x)dx$  in ciascuno dei casi seguenti. Giustificare preliminarmente l'esistenza dell'integrale.

- (I)  $A = \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 < \|x\| \leq 1\}$ ,  $f(x) = \|x\|^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ );
- (II)  $A = \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 < \|x\| > 1\}$ ,  $f(x) = \|x\|^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ );
- (III)  $A = \{x \in \mathbf{R}^3 : 0 < \|x\| \leq 1\}$ ,  $f(x) = \|x\|^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ );
- (IV)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 2\}$ ,  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;
- (V)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_2$ ;  
(Sugg.: porre inizialmente  $x_1 - 1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$  o, che è lo stesso, utilizzare il cambiamento di variabile  $T(y_1, y_2) = (y_1 + 1, y_2)$ ).
- (VI)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \leq 0\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ;
- (VII)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .  
(VIII)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{9}}$ .  
(Sugg.: porre  $\frac{x_1}{2} = y_1$ ,  $\frac{x_2}{3} = y_2$ ).
- (IX)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq x_1\}$ ,  $f(x_1, x_2) = 1$ ;
- (X)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2^2 \leq \min\{10x_1 + 25, 9 - 6x_1\}\}$ ,  $f(x_1, x_2) = 1$ ;
- (XI)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, 0 \leq x_3 \leq x_2\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  ( $a \in \mathbf{R}^+$ );  
(XII)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ );  
(XIII)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 2ax_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 3a^2\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  ( $a \in \mathbf{R}^+$ );  
(XIV)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \geq x_3^2, x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 \leq 0\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  ( $a \in \mathbf{R}^+$ );  
(XV)  $A = \mathbf{R}^2$ ,  $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ ;
- (XVI)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq \min\{x_3^2, 1\}\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)^2 e^{-x_3}$ .
- (XVII)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(x_1+x_2+x_3+1)^2}$ .
- (XVIII)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 \leq 1, x_3 > 0\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ );

(XIX)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq |x_3| \leq 1\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 - 1$ ;

(XX)  $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2, -1 \leq x_3 \leq 2\}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_j$  ( $j \in \{1, 2, 3\}$ ).

## Capitolo 5

# Integrali curvilinei e campi vettoriali

### 5.1 Cammini e loro lunghezza

**Definizione 5.1.1** Un cammino (continuo)  $\alpha$  è una funzione continua da  $J$  a  $\mathbf{R}^n$ , con  $J$  intervallo chiuso e limitato in  $\mathbf{R}$ .

Se  $J = [a, b]$ ,  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  ( $\in \mathbf{R}^n$ ) si chiamano estremi del cammino.

Se  $\alpha \in C^1(J; \mathbf{R}^n)$ , si dice che è un cammino di classe  $C^1$ .

Sia  $J = [a, b]$ . Diremo che  $\alpha$  è  $C^1$  a tratti se esistono  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , tali che, per  $j = 1, \dots, k$ ,  $\alpha_{[t_{j-1}, t_j]}$  è di classe  $C^1$ .

L'immagine  $\alpha(J)$  si chiama sostegno di  $\alpha$ .

**Esempio 5.1.1** Sia

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \in [0, 1], \\ (1, t - 1) & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases} \end{cases}$$

È chiaro che  $\alpha$  è un cammino di classe  $C^1$  a tratti. Si veda la figura 5.1.

**Osservazione 5.1.1** È conveniente pensare a un cammino come a una legge oraria, che descrive, istante per istante, la posizione di un punto che si muove con continuità in  $\mathbf{R}^n$ . Significativamente, abbiamo usato la lettera  $t$  come variabile, a segnalare il fatto che, spesso, essa rappresenta il tempo. Per esempio, se  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2k\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$$

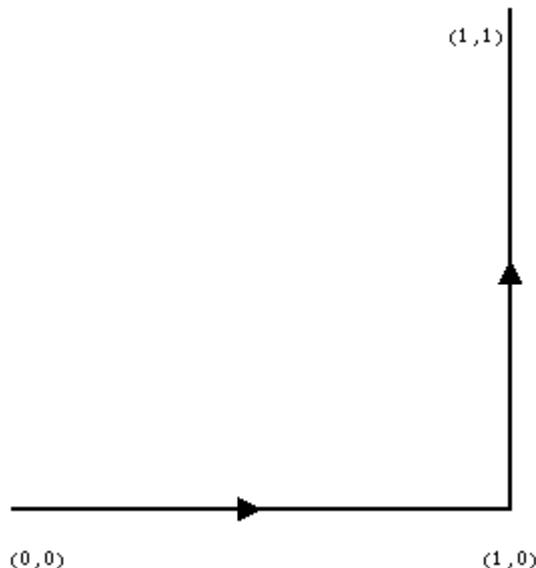


Figura 5.1

rappresenta la traiettoria di un punto che percorre in senso antiorario  $k$  volte la circonferenza di centro  $(0,0)$  e raggio 1.

La prossima definizione identifica cammini che, intuitivamente, percorrono la stessa traiettoria lo stesso numero di volte, ma non necessariamente nello stesso verso.

**Definizione 5.1.2** Siano  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$  due cammini continui. Essi si dicono **equivalenti** se esiste  $u : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , iniettiva e suriettiva, di classe  $C^1$  con  $u'(s) \neq 0 \forall s \in [c, d]$ , tale che

$$\beta(s) = \alpha(u(s)) \quad \forall s \in [c, d].$$

**Osservazione 5.1.2** Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono equivalenti, si vede subito che hanno lo stesso sostegno (esercizio 5.1.1). Quindi,  $\alpha$  e  $\beta$  si possono pensare, intuitivamente, come parametrizzazioni della stessa curva. Con riferimento alla definizione 5.1.2, per il teorema di Bolzano, deve essere  $u'(s) > 0 \forall s \in [c, d]$ , oppure  $u'(s) < 0 \forall s \in [c, d]$ . Nel primo caso,  $u$  è crescente, nel secondo decrescente. Segue subito che, nel primo caso coincidono primo e secondo estremo, nel secondo gli estremi sono invertiti (esercizio 5.1.2).

**Definizione 5.1.3** Nelle ipotesi della definizione 5.1.2, diremo che  $\alpha$  e  $\beta$  sono **positivamente equivalenti** se  $u$  è crescente.

**Esempio 5.1.2** Siano

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \end{cases}$$

Allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono positivamente equivalenti, in quanto  $\beta(s) = \alpha(2s)$   $\forall s \in [0, \pi]$ . Poniamo invece

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) = (\cos(t), -\sin(t)). \end{cases}$$

Allora  $\alpha$  e  $\gamma$  sono equivalenti, ma non positivamente equivalenti, in quanto  $\beta(s) = \alpha(2\pi - s)$   $\forall s \in [0, 2\pi]$ . Si osservi che  $\alpha$  e  $\beta$  percorrono entrambi una volta in senso antiorario la circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 1,  $\beta$  a velocità doppia di  $\alpha$ . Invece  $\gamma$  percorre la stessa circonferenza, ma in senso orario.

Veniamo ora alla definizione di lunghezza di un cammino.

**Definizione 5.1.4** Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino continuo. Chiameremo **lunghezza** di  $\alpha$  e indicheremo con la scrittura  $l(\alpha)$

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| : k \in \mathbf{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \right\}. \quad (5.1.1)$$

Diremo che  $\alpha$  è **rettificabile** se  $l(\alpha) < +\infty$ .

**Osservazione 5.1.3** Ovviamente, qualunque sia  $\alpha$ , si ha  $0 \leq l(\alpha) \leq +\infty$ . Osserviamo che, fissati  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , la somma  $\sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$  rappresenta la lunghezza di una poligonale inscritta nel cammino (figura 5.2).

Per un caso particolare, si veda la sezione 1.14 in [Analisi A].

Riportiamo ora senza dimostrazione il seguente importante

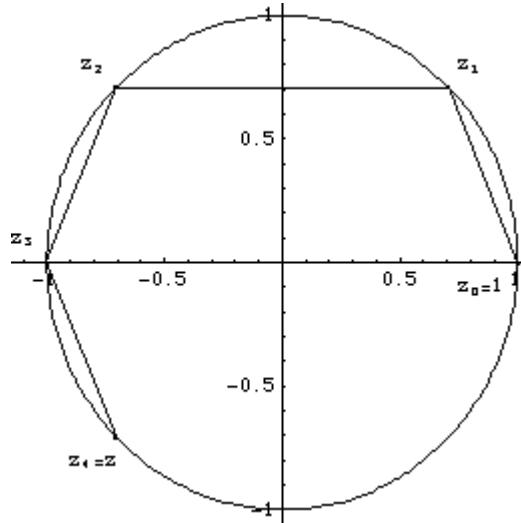


Figura 5.2

**Teorema 5.1.1** Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino di classe  $C^1$ . Allora  $\alpha$  è rettificabile e

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

**Esempio 5.1.3** Siano  $r \in \mathbf{R}^+$ ,  $\omega \in ]0, 2\pi]$ ,

$$\begin{cases} \alpha : [0, \omega] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)). \end{cases}$$

Allora  $\alpha'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \quad \forall t \in [0, \omega]$ . Segue

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r \quad \forall t \in [0, \omega].$$

Dal teorema 5.1.1 segue allora

$$l(\alpha) = \int_0^\omega r dt = r\omega.$$

**Osservazione 5.1.4** Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino di classe  $C^1$  a tratti: supponiamo che, per certi  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ ,

$\alpha_{[t_{j-1}, t_j]}$  sia di classe  $C^1$  per ciascun  $j = 1, \dots, k$ . Poniamo  $\alpha^j := \alpha_{[t_{j-1}, t_j]}$ . Allora  $\alpha$  è rettificabile e

$$l(\alpha) = l(\alpha^1) + \dots + l(\alpha^k). \quad (5.1.2)$$

Per la dimostrazione, si veda l'esercizio 5.1.4.

**Esempio 5.1.4** Sia  $\alpha$  il cammino considerato nell'esempio 5.1.1. Poniamo

$$\begin{cases} \alpha^1 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha^1(t) = (t, 0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 : [1, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha^2(t) = (0, t - 1), \end{cases}$$

Allora, per l'osservazione 5.1.4, si ha

$$l(\alpha) = l(\alpha^1) + l(\alpha^2) = \int_0^1 \|(\alpha^1)'(t)\| dt + \int_1^2 \|(\alpha^2)'(t)\| dt = 1 + 1 = 2.$$

**Esercizio 5.1.1** Dimostrare che due cammini equivalenti hanno lo stesso sostegno. Dimostrare anche che hanno gli stessi estremi.

**Esercizio 5.1.2** Con riferimento alla definizione 5.1.2, dimostrare che, se  $u$  è crescente,  $\alpha(a) = \beta(c)$  e  $\alpha(b) = \beta(d)$ . Viceversa,  $\alpha(a) = \beta(d)$  e  $\alpha(b) = \beta(c)$ .

**Esercizio 5.1.3** Siano  $\alpha$  e  $\beta$  cammini equivalenti. Dimostrare che  $l(\alpha) = l(\beta)$ .

**Esercizio 5.1.4** Siano  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino continuo,  $c \in ]a, b[$ ,  $\beta := \alpha|_{[a, c]}$ ,  $\gamma := \alpha|_{[c, b]}$ .

(I) Dimostrare che  $l(\alpha) = l(\beta) + l(\gamma)$ .

Sugg.: Cominciamo col dimostrare che  $l(\alpha) \leq l(\beta) + l(\gamma)$ . Ciò è ovvio se  $l(\beta) + l(\gamma) = +\infty$ , cioè, quando uno dei due addendi è  $+\infty$ . Viceversa, siano  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ . Supponiamo che  $t_{j_0-1} < c \leq t_{j_0}$ , con  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ . Allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| &= \sum_{j < j_0} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| + \|\alpha(t_{j_0}) - \alpha(t_{j_0-1})\| \\ &\quad + \sum_{j > j_0} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \\ &\leq (\sum_{j < j_0} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| + \|\alpha(c) - \alpha(t_{j_0-1})\|) \\ &\quad + (\|\alpha(t_{j_0}) - \alpha(c)\| + \sum_{j > j_0} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|) \\ &\leq l(\beta) + l(\gamma), \end{aligned}$$

$l(\beta) + l(\gamma)$  è un maggiorante dell'insieme che compare nel secondo membro di (5.1.1). Di conseguenza,  $l(\alpha) \leq l(\beta) + l(\gamma)$ . La diseguaglianza opposta è ovvia se  $l(\alpha) = +\infty$ . Sia, viceversa,  $l(\alpha) < +\infty$ . Osservare che, se  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = c$ , si ha

$$\sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| + \|\alpha(b) - \alpha(c)\| \leq l(\alpha).$$

Dedurre che  $l(\beta) \leq l(\alpha)$  e, con un argomento simile, che  $l(\gamma) \leq l(\alpha)$ . Sia  $\epsilon > 0$ . Per definizione, esistono  $t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+l}$ , tali che

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = c < t_{k+1} < \dots < t_{k+l} = b,$$

con

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| &> l(\beta) - \epsilon/2, \\ \sum_{j=k+1}^{k+l} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| &> l(\gamma) - \epsilon/2. \end{aligned}$$

Dedurre che

$$l(\alpha) \geq \sum_{j=1}^{k+l} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| > l(\beta) + l(\gamma) - \epsilon.$$

Dall'arbitrarietà di  $\epsilon$ , dedurre che  $l(\beta) + l(\gamma) \leq l(\alpha)$ .

(II) Con riferimento all'osservazione 5.1.4, utilizzando (I), provare (5.1.2).

## 5.2 Integrali curvilinei

Questa sezione è dedicata ai due tipi di integrale curvilineo che considereremo.

**Definizione 5.2.1** Siano  $a, b \in \mathbf{R}$ , con  $a < b$ ,  $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ ,  $f : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbf{R}$ . Supponiamo che  $t \rightarrow f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|$  sia sommabile in  $[a, b]$ . Allora poniamo

$$\int_{\alpha} f(x) ds := \int_{[a, b]} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\| dt.$$

Chiamiamo  $\int_{\alpha} f(x) ds$  **integrale curvilineo di prima specie di  $f$  sul cammino  $\alpha$** .

**Esempio 5.2.1** Poniamo

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \\ f : \alpha([0, 2\pi]) \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{cases}$$

Allora dalla definizione 5.2.1 otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(x) ds &= \int_{[0, 2\pi]} (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2)(\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1)^{1/2} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = 2\sqrt{2}\pi(1 + \frac{4\pi^2}{3}). \end{aligned}$$

Estendiamo adesso la definizione 5.2.1 a cammini di classe  $C^1$  a tratti.

**Definizione 5.2.2** Siano  $a, b \in \mathbf{R}$ , con  $a < b$ ,  $\alpha \in C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ , di classe  $C^1$  a tratti. Siano  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , tali che, per ciascun  $j = 1, \dots, k$ ,  $\alpha^j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  è di classe  $C^1$ . Sia poi  $f : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbf{R}$ , tale che, per ciascun  $j$  è definito  $\int_{\alpha^j} f(x) ds$ . Poniamo allora

$$\int_{\alpha} f(x) ds := \int_{\alpha^1} f(x) ds + \dots + \int_{\alpha^k} f(x) ds = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha^j} f(x) ds.$$

**Osservazione 5.2.1** Con riferimento alla definizione 5.2.2, si potrebbe verificare che essa non dipende dal modo in cui si decompone l'intervallo  $[a, b]$ .

**Osservazione 5.2.2** Nel seguito, considereremo spesso integrali in cui la  $f$  ha dominio contenente  $\alpha([a, b])$ . Naturalmente la scrittura  $\int_{\alpha} f(x) ds$  sarà sinonimo di  $\int_{\alpha} f|_{\alpha([a, b])}(x) ds$ . Ciò varrà anche per altri tipi di integrale che introdurremo in seguito e non ripeteremo l'osservazione.

**Osservazione 5.2.3** Vogliamo adesso presentare una possibile interpretazione degli integrali curvilinei di prima specie.

Consideriamo un filo costituito di un materiale con densità variabile. Assumiamo il filo al sostegno di un certo cammino  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ , di classe  $C^1$ . Dato un punto  $x$  del filo, indichiamo con  $f(x)$  la densità lineare del materiale nel punto  $x$ . Questa può essere definita nel modo seguente: sia  $x = \alpha(t)$ , con (per esempio),  $t \in ]a, b[$ . Dato  $\Delta t > 0$ , tale che  $t + \Delta t \leq b$ , consideriamo (in una certa unità di misura) la massa  $m(t, t + \Delta t)$  della parte del filo che identifichiamo con  $\{\alpha(s) : s \in [t, t + \Delta t]\}$ . La lunghezza  $l(t, t + \Delta t)$  di tale tratto di filo vale  $\int_t^{t+\Delta t} \|\alpha'(s)\| ds$ .

Il quoziente  $\frac{m(t,t+\Delta t)}{l(t,t+\Delta t)}$  esprime la densità media del materiale nello stesso tratto. Il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  di tale quoziente può allora essere ragionevolmente definito come densità del materiale in  $x$ .

Supponiamo allora che la densità  $f(x)$  del materiale sia "costante a tratti", nel senso che esistono  $t_0, t_1, \dots, t_k$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  e  $\delta_1, \dots, \delta_k$  tali che la densità  $f(x)$  vale  $\delta_j$  se  $t \in [t_{j-1}, t_j[$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Allora la massa totale del filo sarà  $\sum_{j=1}^k \delta_j l(\alpha^j)$ , ove abbiamo indicato con  $\alpha^j$  la restrizione di  $\alpha$  a  $[t_{j-1}, t_j]$ . Si osservi che

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(x) ds &= \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{j=1}^k \delta_j \int_{[t_{j-1}, t_j]} \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \sum_{j=1}^k \delta_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{j=1}^k \delta_j l(\alpha^j). \end{aligned}$$

Estrapolando allora questo risultato, nelle definizioni (5.2.1)-(5.2.2) possiamo pensare a  $f$  (non più necessariamente costante a tratti) come una densità lineare e all'integrale come la massa totale corrispondente.

La precedente interpretazione dell'integrale rende plausibile il seguente

**Teorema 5.2.1** *Siano  $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $\beta : [c,d] \rightarrow \mathbf{R}^n$  cammini  $C^1$  a tratti equivalenti. Sia poi  $f : \alpha([a,b]) = \beta([c,d]) \rightarrow \mathbf{R}$ , tale che è definito  $\int_{\alpha} f(x) ds$ . Allora è definito anche  $\int_{\beta} f(x) ds$  e*

$$\int_{\beta} f(x) ds = \int_{\alpha} f(x) ds.$$

*Dimostrazione parziale* Ci limitiamo a trattare il caso di  $\alpha$  e  $\beta$  di classe  $C^1$ . Dall'esercizio 5.1.1 sappiamo già che  $\alpha([a,b]) = \beta([c,d])$ . Sia  $u$  la funzione considerata nella definizione 5.1.2. Osserviamo che  $u|_{[c,d]}$  è un cambiamento di variabile. Inoltre,  $\forall s \in [c,d]$ ,

$$\beta'(s) = u'(s) \alpha'(u(s)),$$

da cui

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(u(s))\| |u'(s)|.$$

Allora, dal teorema di cambiamento di variabile,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(x) ds &= \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_{[c,d]} f(\alpha(u(s))) \|\alpha'(u(s))\| |u'(s)| ds = \int_{[c,d]} f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| ds \\ &= \int_{\beta} f(x) ds. \end{aligned}$$

□

Concludiamo questo studio degli integrali curvilinei di prima specie enunciando le loro proprietà di linearità. Per la dimostrazione, si veda l'esercizio 5.2.1).

**Teorema 5.2.2** *Siano  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) un cammino di classe  $C^1$  a tratti,  $f, g : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbf{R}$ , tali che sono definiti  $\int_{\alpha} f(x)ds$  e  $\int_{\alpha} g(x)ds$ . Allora,  $\forall l, m \in \mathbf{R}$ , è definito  $\int_{\alpha} (lf(x) + mg(x))ds$ . Si ha inoltre*

$$\int_{\alpha} (lf(x) + mg(x))ds = l \int_{\alpha} f(x)ds + m \int_{\alpha} g(x)ds.$$

Passiamo ora a definire gli integrali curvilinei di seconda specie.

**Definizione 5.2.3** *Siano  $a, b \in \mathbf{R}$ , con  $a < b$ ,  $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ ,  $f : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Supponiamo che  $t \rightarrow f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$  sia sommabile in  $[a, b]$ . Allora poniamo*

$$\int f \cdot d\alpha := \int_{[a, b]} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt.$$

*Chiamiamo  $\int f \cdot d\alpha$  integrale curvilineo di seconda specie di  $f$  sul cammino  $\alpha$ .*

**Osservazione 5.2.4** Notiamo che, mentre nel caso degli integrali curvilinei di prima specie si consideravano funzioni a valori scalari, nella definizione 5.2.3 si considerano funzioni a valori vettoriali.

Segnaliamo anche il fatto che, nelle ipotesi della stessa definizione, qualche autore usa le notazioni  $\int f_j d\alpha_j$ , oppure  $\int_{\alpha} f_j dx_j$ , per indicare  $\int_{[a, b]} f_j(\alpha(t)) \alpha'_j(t) dt$ . Con tali notazioni, si ha, ad esempio,

$$\int f \cdot d\alpha = \int f_1 d\alpha_1 + \dots + \int f_n d\alpha_n.$$

**Esempio 5.2.2** Siano

$$\begin{cases} \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha(t) = (t, t), \\ f : \alpha([0, 1]) \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ f(x_1, x_2) = (x_2^{1/2}, x_1^3 + x_2), \quad (x_1, x_2) \in \alpha([0, 1]). \end{cases}$$

Allora

$$\int f \cdot d\alpha = \int_{[0, 1]} f(t, t) \cdot (1, 1) dt = \int_{[0, 1]} (t^{1/2} + t^3 + t) dt = \frac{17}{12}.$$

La definizione 5.2.3 ammette una naturale estensione a cammini di classe  $C^1$  a tratti:

**Definizione 5.2.4** Siano  $a, b \in \mathbf{R}$ , con  $a < b$ ,  $\alpha \in C([a, b]; \mathbf{R}^n)$ , di classe  $C^1$  a tratti. Siano  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , tali che, per ciascun  $j = 1, \dots, k$ ,  $\alpha^j := \alpha_{[t_{j-1}, t_j]}$  è di classe  $C^1$ . Sia poi  $f : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ , tale che, per ciascun  $j$  è definito  $\int f \cdot d\alpha^j$ . Poniamo allora

$$\int f \cdot d\alpha := \int f \cdot d\alpha^1 + \dots + \int f \cdot d\alpha^k.$$

Si può verificare che la definizione è indipendente dal modo in cui si decomponga l'intervallo  $[a, b]$ .

**Esempio 5.2.3** Siano  $\alpha$  il cammino considerato nell'esempio 5.1.1,

$$\begin{cases} f : \alpha([0, 2]) \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2). \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int f \cdot d\alpha &= \int_{[0,1]} f(t, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_{[1,2]} f(1, t-1) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt = 1. \end{aligned}$$

**Osservazione 5.2.5** Vogliamo ora illustrare un'importante interpretazione fisica degli integrali curvilinei di seconda specie.

Consideriamo un punto pesante che si muove di moto rettilineo e uniforme in  $\mathbf{R}^3$  nell'intervallo di tempo  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ ). Se  $v \in \mathbf{R}^3$  è il vettore velocità (costante), la legge oraria del moto del punto è descritta dal cammino

$$\begin{cases} \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \alpha(t) = x^0 + (t-a)v, \end{cases}$$

ove  $x^0 \in \mathbf{R}^3$  rappresenta la posizione del tempo nell'istante  $t = a$ . Supponiamo che sul punto agisca una certa forza costante  $F$ , che possiamo pensare come un certo elemento di  $\mathbf{R}^3$ . Allora il lavoro svolto dalla forza sul punto nell'intervallo temporale  $[a, b]$  è dato da

$$L = F \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] = F \cdot [x^0 + (b-a)v - x^0] = (b-a)F \cdot v. \quad (5.2.1)$$

Supponiamo ora che la forza non sia più necessariamente costante, né che il punto si muova di moto rettilineo e uniforme. Supponiamo allora che la

traiettoria del punto sia descritta da un certo cammino  $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^3)$  e che la forza che si esercita punto per punto nello spazio sia schematizzabile con la funzione continua  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Sia  $\tau \in [a, b]$ . Allora, per la formula di Taylor applicata componente per componente,

$$\alpha(t) = \alpha(\tau) + (t - \tau)\alpha'(\tau) + o(t - \tau) \quad (t \rightarrow \tau).$$

Trascurando allora il resto, possiamo osservare che, per piccoli valori di  $\Delta\tau > 0$ , nell'intervallo temporale  $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ , si ha

$$a(t) \approx \alpha(\tau) + (t - \tau)\alpha'(\tau),$$

vale il dire, il moto è essenzialmente rettilineo e uniforme. Inoltre, se  $f$  è continua, ancora per  $\Delta\tau$  "piccolo", si avrà  $f(t) \approx f(\tau)$  se  $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ .

Allora, per definire il lavoro svolto dalla forza, possiamo decomporre l'intervallo  $[a, b]$  in  $k$  parti uguali, ponendo  $t_0 = a$ ,  $t_1 = a + \frac{b-a}{k}, \dots, t_j = a + \frac{j(b-a)}{k}, \dots, t_k = b$ . Indichiamo con  $L_j$  il lavoro svolto nell'intervallo temporale  $[t_{j-1}, t_j]$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Da (5.2.1) sarà ragionevole supporre

$$L_j \approx (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1}),$$

e, sommando in  $j$ ,

$$L = \sum_{j=1}^k L_j \approx \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1}). \quad (5.2.2)$$

Ci si aspetta che l'approssimazione migliori aumentando il valore di  $k$ . Ora, nelle ipotesi fatte su  $\alpha$  e  $f$  si può dimostrare che la somma al secondo membro di (5.2.2) tende, per  $k \rightarrow +\infty$ , a

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int f \cdot d\alpha$$

(si veda, per questo, l'esercizio 5.2.2). Si pone allora, per definizione,

$$L := \int f \cdot d\alpha. \quad (5.2.3)$$

Vediamo ora come cambiano gli integrali curvilinei di seconda specie passando da un cammino a un cammino equivalente.

**Teorema 5.2.3** Siano  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$  cammini  $C^1$  a tratti equivalenti. Sia poi  $f : \alpha([a, b]) = \beta([c, d]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ , tale che è definito  $\int f \cdot d\alpha$ . Allora è definito anche  $\int f \cdot d\beta$  e, se  $u$  è la funzione che interviene nella definizione 5.1.2,

$$\int f \cdot d\beta = \begin{cases} \int f \cdot d\alpha & \text{se } u \text{ è crescente,} \\ - \int f \cdot d\alpha & \text{se } u \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

*Dimostrazione parziale* Ci limitiamo a trattare il caso di  $\alpha$  e  $\beta$  di classe  $C^1$ . Avviamo già osservato che  $u_{|[c,d]}$  è un cambiamento di variabile. Inoltre,  $\forall s \in [c, d]$ ,

$$\beta'(s) = u'(s)\alpha'(u(s)).$$

Allora, dal teorema di cambiamento di variabile,

$$\begin{aligned} \int f \cdot d\alpha &= \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_{[c,d]} f(\alpha(u(s))) \cdot \alpha'(u(s)) |u'(s)| ds. \end{aligned}$$

Dunque, se  $u$  è crescente,

$$\int f \cdot d\alpha = \int_{[c,d]} f(\alpha(u(s))) \cdot \alpha'(u(s)) u'(s) ds = \int_{[c,d]} f(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds = \int f \cdot d\beta,$$

mentre, se  $u$  è decrescente,

$$\begin{aligned} \int f \cdot d\alpha &= - \int_{[c,d]} f(\alpha(u(s))) \cdot \alpha'(u(s)) u'(s) ds = - \int_{[c,d]} f(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds \\ &= - \int f \cdot d\beta. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 5.2.6** Tenuto conto delle osservazioni 5.1.2 e 5.2.5, il teorema 5.2.3 rispecchia il fatto che, se invertiamo il verso di percorrenza, il lavoro si inverte a sua volta.

Concludiamo la sezione con la proprietà di linearità degli integrali curvilinei di seconda specie.

Per la dimostrazione, si veda l'esercizio 5.2.3.

**Teorema 5.2.4** Siano  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) un cammino di classe  $C^1$  a tratti,  $f, g : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ , tali che sono definiti  $\int f \cdot d\alpha$  e  $\int g \cdot d\alpha$ . Allora,  $\forall l, m \in \mathbf{R}$ , è definito  $\int (lf + mg) \cdot d\alpha$ . Si ha inoltre

$$\int (lf + mg) \cdot d\alpha = l \int f \cdot d\alpha + m \int g \cdot d\alpha.$$

**Esercizio 5.2.1** Dimostrare il teorema 5.2.2. Cominciare col caso  $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ .

**Esercizio 5.2.2** Con riferimento all'osservazione 5.2.5, dimostrare che si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1}) = \int f \cdot d\alpha.$$

Sugg.:

$$\begin{aligned} & \int f \cdot d\alpha - \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) - f(t_{j-1}) \cdot \alpha'(t_{j-1})] dt. \end{aligned}$$

Usare il fatto che  $t \rightarrow f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$  è uniformemente continua in  $[a, b]$ .

**Esercizio 5.2.3** Dimostrare il teorema 5.2.4.

**Esercizio 5.2.4** Calcolare gli integrali curvilinei di prima specie sui cammini  $\alpha$  indicati:

- (I)  $\int_{\alpha} (x_1 + x_2) ds$ , con  $\alpha$  cammino di classe  $C^1$  a tratti il cui sostegno è il triangolo in  $\mathbf{R}^2$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ;
- (II)  $\int_{\alpha} x_2^2 ds$ , con  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$  ( $a \in \mathbf{R}$ );
- (III)  $\int_{\alpha} (x_1^2 + x_2^2) ds$ , con  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (a(\cos(t) - t \sin(t)), a(\sin(t) - t \cos(t)))$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

**Esercizio 5.2.5** Se  $\alpha$  è un cammino di classe  $C^1$  a tratti con lunghezza  $l(\alpha) > 0$ , per centroide di  $\alpha$  intendiamo il vettore

$$l(\alpha)^{-1} \left( \int_{\alpha} x_1 ds, \int_{\alpha} x_2 ds, \int_{\alpha} x_3 ds \right).$$

Determinare i centroidi dei seguenti cammini  $\alpha$ :

- (I)  $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ ;
- (II)  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), at)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

**Esercizio 5.2.6** Calcolare i seguenti integrali curvilinei di seconda specie  $\int f \cdot d\alpha$ :

- (I)  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),  $f(x_1, x_2) = (2a - x_2, x_1)$ ;
- (II)  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 - x_3^2, 2x_2 x_3, -x_1^2)$ .

**Esercizio 5.2.7** In ciascun caso, determinare un cammino di classe  $C^1$  a tratti che abbia come sostegno l'insieme  $A$  indicato e lo percorra (se richiesto) nel verso indicato. Calcolare poi  $\int f \cdot d\alpha$ .

(I)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = x_1^2\}$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_1 x_2, x_2^2 - 2x_1 x_2)$ .

(II)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \in [0, 1], x_2 = 1 - |1 - x_1|\}$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$ .

(III)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1\}$  percorso in senso antiorario,  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ .

(IV)  $A$  è il segmento in  $\mathbf{R}^3$  di estremi  $(1, 0, 2)$  e  $(3, 4, 1)$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 x_2, x_1^2 + x_3, x_2)$ .

(V)  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  percorso in senso antiorario,  $f(x_1, x_2) = (\frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_1-x_2}{x_1^2+x_2^2})$ .

(VI)  $A$  è la frontiera del quadrato di vertici  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ , percorsa in senso orario,  $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{|x_1|+|x_2|}, \frac{|x_1|}{|x_1|+|x_2|})$ .

### 5.3 Campi vettoriali e loro potenziali

Facciamo qualche premessa al principale argomento di questa sezione. Cominciamo col seguente utile lemma, che non dimostriamo.

**Lemma 5.3.1** *Sia  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$  connesso per archi. Allora, comunque si prendano  $x$  e  $y$  in  $A$ , esiste un cammino di classe  $C^1$ , con sostegno in  $A$ , che ha  $x$  come primo estremo e  $y$  come secondo.*

Vediamo ora un teorema che appartiene, in realtà, al calcolo differenziale.

**Teorema 5.3.1** *Siano  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^1(A)$ , tale che  $\nabla f(x) = O \forall x \in A$ . Allora  $f$  è costante in  $A$ .*

*Dimostrazione* Siano  $x$  e  $y$  punti arbitrari di  $A$ . Si tratta di provare che  $f(x) = f(y)$ . Per il lemma 5.3.1, esistono  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}$ , con  $a < b$  e  $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ , tali che  $\alpha([a, b]) \subseteq A$ ,  $\alpha(a) = x$ ,  $\alpha(b) = y$ . Poniamo

$$\begin{cases} g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, \\ g(t) = f(\alpha(t)). \end{cases}$$

Allora  $g \in C^1([a, b])$  e, per la "chain rule",

$$g'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Dal teorema 3.4.1 in [Analisi A] segue che  $g$  è costante. Perciò

$$f(x) = f(\alpha(a)) = g(a) = g(b) = f(\alpha(b)) = f(y).$$

□

**Osservazione 5.3.1** Il teorema 5.3.1 costituisce una generalizzazione del teorema 3.4.1 in [Analisi A]. Naturalmente, l'ipotesi che  $A$  sia connesso per archi è essenziale. Si veda l'osservazione 3.4.3 in [Analisi A], tenendo anche conto del teorema 1.5.1.

Possiamo ora introdurre le principali definizioni di questa sezione.

**Definizione 5.3.1** *Sia  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ .*

*Un campo vettoriale in  $A$  è una funzione  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  continua.*

*Un potenziale del campo vettoriale  $F$  è una funzione  $U \in C^1(A)$ , tale che  $\nabla U(x) = F(x) \forall x \in A$ .*

*Il campo vettoriale  $F$  si dice esatto se possiede dei potenziali.*

**Osservazione 5.3.2** Se  $U$  è un potenziale di  $F$ , qualunque sia  $c \in \mathbf{R}$ , la funzione di dominio  $A$  che associa a  $x$   $U(x) + c$  è ancora un potenziale di  $F$ . Inversamente, se  $V$  è un secondo potenziale di  $F$ ,

$$\nabla(U - V)(x) = \nabla U(x) - \nabla V(x) = F(x) - F(x) = 0 \quad \forall x \in A.$$

Dal teorema 5.3.1, segue che  $U - V$  è una funzione costante. Questa è, in effetti, la ragione principale per cui consideriamo esclusivamente campi vettoriali definiti su aperti connessi per archi: vogliamo che due potenziali qualunque dello stesso campo vettoriale differiscano per una costante.

**Esempio 5.3.1** Siano

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = (x_2 \cos(x_1 x_2), x_1 \cos(x_1 x_2)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} U : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \\ U(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2). \end{cases}$$

Allora è facile verificare che  $U$  è un potenziale di  $F$ . Dunque,  $F$  è esatto.

**Osservazione 5.3.3** Nel caso  $n = 1$ , per il teorema 1.5.1, se  $A$  è connesso per archi,  $A$  è un intervallo. Sia  $F : A \rightarrow \mathbf{R}$  continua. È evidente che in questo caso i potenziali di  $F$  sono le sue primitive. Sappiamo dal teorema 4.4.3 in [Analisi A] che ogni funzione continua possiede delle primitive. Quindi, nel caso  $n = 1$ , tutti i campi vettoriali sono esatti. Come vedremo, ciò non vale in dimensione superiore.

Introduciamo ora la seguente

**Definizione 5.3.2** Siano  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $F \in C^1(A; \mathbf{R}^n)$ . Diremo che il campo vettoriale  $F$  è chiuso se  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}. \quad (5.3.1)$$

**Esempio 5.3.2** Sia

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = (x_1, x_2). \end{cases}$$

$F$  è chiuso, essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^2.$$

Sia invece

$$\begin{cases} G : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ G(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2). \end{cases}$$

$G$  non è chiuso, in quanto

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(x) = 1, \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^2.$$

**Teorema 5.3.2** Siano  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $F \in C^1(A; \mathbf{R}^n)$ . Allora, se  $F$  è esatto,  $F$  è chiuso.

*Dimostrazione* Sia  $U$  un potenziale di  $F$ . Poiché  $F \in C^1(A; \mathbf{R}^n)$ ,  $U \in C^2(A)$ . Segue allora dal teorema di Schwarz che,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

□

**Osservazione 5.3.4** Vedremo tra poco che il teorema 5.3.2 non si può , in generale, invertire. In altre parole, non ogni campo vettoriale chiuso è esatto.

Vediamo ora una nozione che ha un forte contenuto fisico.

**Definizione 5.3.3** Siano  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $F \in C(A; \mathbf{R}^n)$ . Diremo che il campo vettoriale  $F$  è **conservativo** se, comunque si prendano due cammini  $\alpha$  e  $\beta$  di classe  $C^1$  a tratti, con sostegno in  $A$  e aventi lo stesso primo estremo e lo stesso secondo estremo, si ha

$$\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta.$$

**Osservazione 5.3.5** Dire che  $F$  è conservativo significa dire che  $\int F \cdot d\alpha$  dipende solo dagli estremi di  $\alpha$ . Dunque, tenuto conto dell'interpretazione fisica di questi integrali (osservazione 5.2.5) ciò vuol dire che il lavoro svolto da  $F$  su un certo punto pesante non dipende dalla traiettoria completa del punto, ma solo dai suoi estremi.

**Osservazione 5.3.6** Se  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  è conservativo e  $\alpha$  è un cammino di classe  $C^1$  a tratti con sostegno in  $A$  avente estremi coincidenti (ciò che si chiama un cammino chiuso), allora

$$\int F \cdot d\alpha = 0.$$

Per verificarlo, introduciamo il cammino

$$\begin{cases} \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ \beta(t) = \alpha(a) = \alpha(b) \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Allora, poiché  $F$  è conservativo,

$$\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta = 0.$$

**Teorema 5.3.3** Siano  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $F \in C(A; \mathbf{R}^n)$ . Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

- (I)  $F$  è esatto;
- (II)  $F$  è conservativo.

*Dimostrazione* Sia  $F$  esatto. Dimostriamo che  $F$  è conservativo. Più precisamente, proviamo che, se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  è un cammino di classe  $C^1$  a tratti con sostegno in  $A$  e  $U$  è un potenziale di  $F$ , vale la formula

$$\int F \cdot d\alpha = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)). \quad (5.3.2)$$

Cominciamo dal caso  $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ . Allora, per la "chain rule", si ha

$$(U \circ \alpha)'(t) = \nabla U(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Dunque,

$$\int F \cdot d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (U \circ \alpha)'(t) dt = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)). \quad (5.3.3)$$

(5.3.2) può essere facilmente estesa al caso di  $\alpha$  di classe  $C^1$  a tratti: se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  e per ciascun  $j = 1, \dots, k$   $\alpha^j := \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$  è di classe  $C^1$ ,

$$\begin{aligned} \int F \cdot d\alpha &= \int F \cdot d\alpha^1 + \int F \cdot d\alpha^2 + \dots + \int F \cdot d\alpha^k \\ &= [U(\alpha(t_1)) - U(\alpha(t_0))] + [U(\alpha(t_2)) - U(\alpha(t_1))] + \dots \\ &\quad + [U(\alpha(t_{k-1})) - U(\alpha(t_{k-2}))] + [U(\alpha(t_k)) - U(\alpha(t_{k-1}))] \\ &= U(\alpha(t_k)) - U(\alpha(t_0)) = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)). \end{aligned}$$

Da (5.3.2) segue subito che  $F$  è conservativo.

Supponiamo ora che  $F$  sia conservativo. Proviamo che è esatto. A tale scopo, dobbiamo esibirne un potenziale. Fissiamo  $x^0 \in A$ . Per ogni  $x \in A$  prendiamo un cammino  $\alpha^x$  di classe  $C^1$  a tratti con sostegno in  $A$ , che abbia come primo estremo  $x^0$  e come secondo estremo  $x$ . Un cammino così fatto esiste per il lemma 5.3.1. Definiamo poi

$$\begin{cases} U : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ U(x) := \int F \cdot d\alpha^x. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Osserviamo che, poiché  $F$  è conservativo, l'integrale in (5.3.4) non dipende dalla scelta di  $\alpha^x$ , purché abbia gli estremi indicati. Verifichiamo che  $U$  è un potenziale di  $F$ . A tale scopo, dobbiamo far vedere che,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall x \in A$ , è definita  $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$  e

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x). \quad (5.3.5)$$

Fissiamo allora  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $x \in A$ . Sia  $\delta \in \mathbf{R}^+$ , tale che  $B(x, \delta) \subseteq A$ . Se  $t \in \mathbf{R}$  e  $|t| < \delta$ , allora il segmento  $[x, x + te^i]$  è tutto contenuto in  $A$ . Sia  $\alpha^x : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino di classe  $C^1$  a tratti, con sostegno in  $A$ , avente come primo estremo  $x^0$  e come secondo estremo  $x$ . Sia, infine,  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , con  $|t| < \delta$ . Poniamo allora

$$\begin{cases} \alpha^{x+te^i} : [a, b+1] \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ \alpha^{x+te^i}(s) = \begin{cases} \alpha^x(s) & \text{se } s \in [a, b], \\ x + (s-b)te^i & \text{se } s \in [b, b+1]. \end{cases} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

$\alpha^{x+te^i}$  è un cammino di classe  $C^1$  a tratti di estremi  $x^0$  e  $x + te^i$ . Il suo sostegno è contenuto in  $A$ , in quanto lo è il sostegno di  $\alpha^x$  e  $\alpha^{x+te^i}$  descrive nell'intervallo  $[b, b+1]$  il segmento  $[x, x + te^i]$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} U(x + te^i) - U(x) &= \int F \cdot d\alpha^{x+te^i} - \int F \cdot d\alpha^x \\ &= \int_{[b, b+1]} F(x + (s-b)te^i) \cdot (te^i) ds \\ &= t \int_b^{b+1} F_i(x + (s-b)te^i) ds. \end{aligned}$$

Segue

$$\frac{U(x + te^i) - U(x)}{t} = \int_b^{b+1} F_i(x + (s-b)te^i) ds = \frac{1}{t} \int_0^t F_i(x + \sigma e^i) d\sigma.$$

Poichè  $\sigma \rightarrow F_i(x + \sigma e^i)$  è continua in  $]-\delta, \delta[$ , per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(x + te^i) - U(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t F_i(x + \sigma e^i) d\sigma = F_i(x).$$

Vale dunque (5.3.5) e la dimostrazione è conclusa.

□

Siamo ora in grado di far vedere che non ogni campo vettoriale chiuso è esatto.

**Esempio 5.3.3** Sia

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = \left( -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right). \end{cases}$$

$F$  è chiuso. Infatti,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2).$$

Sia

$$\begin{cases} \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)). \end{cases}$$

Se  $F$  fosse esatto, poiché  $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ , in base all'osservazione 5.3.6 e al teorema 5.3.3, dovrebbe essere

$$\int F \cdot d\alpha = 0.$$

Invece,

$$\begin{aligned} \int F \cdot d\alpha &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}, \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \right) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Tuttavia, sotto opportune ipotesi sul dominio  $A$ , il teorema 5.3.2 è invertibile. Introduciamo, a tale scopo la seguente

**Definizione 5.3.4** Siano  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $x^0 \in A$ . Diremo che  $A$  è **stellato rispetto a  $x^0$**  se,  $\forall x \in A$ ,  $[x^0, x] \subseteq A$ .

**Osservazione 5.3.7** Se  $A$  è stellato rispetto a qualche suo punto  $x^0$ , è connesso per archi (esercizio 5.3.2). Si osservi poi che, se  $A$  è convesso, allora è stellato rispetto a qualunque suo punto  $x^0$ . Un esempio di insieme stellato rispetto a qualche suo punto, ma non convesso, è costituito da  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \leq 0\}$ , che è stellato rispetto a ogni punto  $x^0$  del tipo  $(a, 0)$ , con  $a > 0$  (vedi la figura 5.3).

**Teorema 5.3.4** Siano  $A$  un aperto in  $\mathbf{R}^n$ , stellato rispetto a qualche suo punto  $x^0$ ,  $F \in C^1(A; \mathbf{R}^n)$  un campo vettoriale chiuso. Allora  $F$  è esatto.

*Dimostrazione parziale* Per  $x \in A$ , poniamo

$$\begin{cases} \alpha^x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ \alpha^x(t) = x^0 + t(x - x^0). \end{cases}$$

$\alpha^x$  descrive il segmento di estremi  $x^0$  e  $x$  e quindi ha sostegno in  $A$ . Poniamo

$$\begin{cases} U : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ U(x) = \int F \cdot d\alpha^x. \end{cases}$$

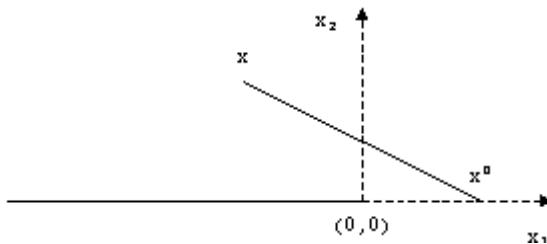


Figura 5.3

Verifichiamo direttamente che  $U$  è un potenziale di  $F$ . Naturalmente, dovremo far vedere che,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\forall x \in A$ , è definita  $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$  e vale  $F_i(x)$ . Scrivendo per esteso  $U$ , si ha

$$U(x) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0) \int_0^1 F_j(x^0 + t(x - x^0)) dt. \quad (5.3.7)$$

Poniamo  $V_j(x) := \int_0^1 F_j(x^0 + t(x - x^0)) dt$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Nella derivazione di  $V_j$ , eseguiamo un passaggio che non giustifichiamo: "scambiamo la derivata con l'integrale". Precisamente, poniamo

$$W_t(x) := F_j(x^0 + t(x - x^0)).$$

Dalla "chain rule", si ha, dato  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial W_t}{\partial x_i}(x) = t \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0)).$$

Allora, poiché  $V_j(x) = \int_0^1 W_t(x) dt$ , si ha, almeno formalmente,

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial W_t}{\partial x_i}(x) dt = \int_0^1 t \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0)) dt. \quad (5.3.8)$$

Si potrebbe effettivamente verificare che il passaggio è corretto.

Da (5.3.7)-(5.3.8), si ottiene,  $\forall x \in A$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0) \int_0^1 t \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0)) dt \\ &\quad + \int_0^1 F_i(x^0 + t(x - x^0)) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0))(x_j - x_j^0) dt \\ &\quad + \int_0^1 F_i(x^0 + t(x - x^0)) dt,\end{aligned}$$

usando l'ipotesi che  $F$  è chiuso. Poniamo ora

$$\begin{cases} r : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \\ r(t) = F_i(x^0 + t(x - x^0)). \end{cases}$$

Allora  $r'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x^0 + t(x - x^0))(x_j - x_j^0) \forall t \in [0, 1]$ , per cui, dalla formula di integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 t r'(t) dt + \int_0^1 r(t) dt \\ &= [tr(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 r(t) dt + \int_0^1 r(t) dt \\ &= r(1) = F_i(x).\end{aligned}$$

Con ciò, la dimostrazione è completa  $\square$

**Esempio 5.3.4** Sia

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = (x_1, x_2). \end{cases}$$

Poiché  $F$  è chiuso e  $\mathbf{R}^2$  è convesso,  $F$  è esatto. Determiniamone un potenziale. Poniamo  $x^0 := (0, 0)$ . Dato  $x \in \mathbf{R}^2$ , poniamo

$$U(x) := \int F \cdot d\alpha^x,$$

ove  $\alpha^x$  è un cammino di classe  $C^1$  a tratti con estremi  $x^0$  e  $x$ .  $U$  è un potenziale di  $F$  per quanto visto nella seconda parte della dimostrazione del teorema 5.3.3. L'integrale è indipendente dalla scelta di  $\alpha^x$ , ma le difficoltà di calcolo possono essere ben diverse! In molti casi, conviene scegliere cammini che si muovono, "a tratti", parallelamente agli assi. Nel caso in questione, possiamo considerare un cammino  $\alpha^x$  che percorra prima il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(x_1, 0)$ , poi il segmento di estremi  $(x_1, 0)$  e  $(x_1, x_2)$ . Per esempio,

$$\begin{cases} \alpha^x : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha^x(t) = \begin{cases} (tx_1, 0) & \text{se } t \in [0, 1], \\ (x_1, (t-1)x_2) & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases} \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) & \int F \cdot d\alpha^x = \int_0^1 (tx_1, 0) \cdot (x_1, 0) dt + \int_1^2 (x_1, (t-1)x_2) \cdot (0, x_2) dt \\ & = x_1^2 \int_0^1 t dt + x_2^2 \int_1^2 (t-1) dt = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

**Esempio 5.3.5** Sia

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\} \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ F(x_1, x_2) = \left( -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right). \end{cases}$$

Nell'esempio 5.3.3, abbiamo già visto che  $F$  è chiuso, ma non esatto. Tuttavia, in base al teorema 5.3.4, se noi consideriamo le restrizioni di  $F$  ad aperti stellati rispetto a qualche loro punto, otteniamo dei campi vettoriali esatti. Così, se

$$A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \leq 0\},$$

$F|_A$  è esatto. Calcoliamone un potenziale. Poniamo  $x^0 := (1, 0)$ . Dato  $x = (x_1, x_2) \in A$ , scegliamo  $\alpha^x$  in modo da sfruttare la struttura di  $F$ . Sia  $\phi \in ]-\pi, \pi[$ , tale che

$$\begin{cases} x_1 = \|x\| \cos(\phi), \\ x_2 = \|x\| \sin(\phi). \end{cases} \quad (5.3.9)$$

Si osservi che  $\phi$  non coincide con la coordinata polare  $\theta$  dell'esempio 4.10.5, perché varia in  $] -\pi, \pi[$  e non in  $]0, 2\pi[$ . Possiamo allora porre

$$U(x) := \int F \cdot d\alpha^x,$$

con  $\alpha^x$  che percorre, in successione, prima il segmento di estremi  $(1, 0)$  e  $(\|x\|, 0)$ , poi l'arco della circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\|x\|$  di estremi  $(\|x\|, 0)$  e  $x$  contenuto in  $A$  (vedi la figura 5.4).

Possiamo prendere, ad esempio:

$$\begin{cases} \alpha^x : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \alpha^x(t) = \begin{cases} (1, 0) + t[(\|x\|, 0) - (1, 0)] = (1 + t(\|x\| - 1), 0) & \text{se } t \in [0, 1], \\ (\|x\| \cos((t-1)\phi), \|x\| \sin((t-1)\phi)) & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases} \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} U(x) & = \int_0^1 (0, \frac{1+t(\|x\|-1)}{(1+t(\|x\|-1))^2}) \cdot (\|x\|-1, 0) dt + \int_1^2 (-\frac{\|x\|\sin((t-1)\phi)}{\|x\|^2}, \\ & \quad \frac{\|x\|\cos((t-1)\phi)}{\|x\|^2}) \cdot (-\|x\|\phi\sin((t-1)\phi), \|x\|\phi\cos((t-1)\phi)) dt \\ & = \phi. \end{aligned}$$

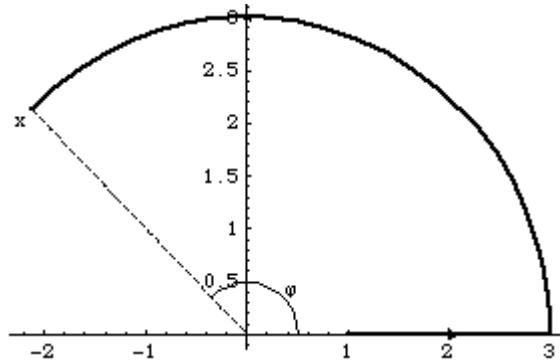


Figura 5.4

$\phi$  dipende, naturalmente, da  $x$ . Ad esempio, se  $x_1 > 0$ ,  $\phi \in ]-\pi/2, \pi/2[$  e quindi, da (5.3.9),

$$U(x) = \phi = \arcsin\left(\frac{x_2}{\|x\|}\right).$$

**Esempio 5.3.6** Sia

$$\begin{cases} F : (\mathbf{R}^+)^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ F(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{x_1^2 x_2 x_3}, -\frac{1}{x_1 x_2^2 x_3}, -\frac{1}{x_1 x_2 x_3^2}\right). \end{cases}$$

Allora  $F$  è chiuso, essendo  $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbf{R}^+)^3$ ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) = \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x), \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) = \frac{1}{x_1^2 x_2 x_3^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x) = \frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x).$$

Poiché  $(\mathbf{R}^+)^3$  è convesso,  $F$  è esatto. Per determinarne un potenziale, poniamo

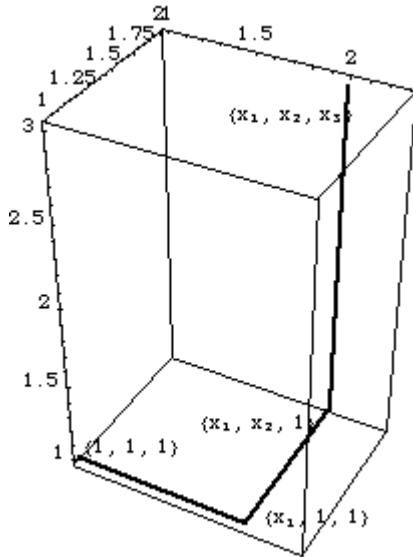


Figura 5.5

amo  $x^0 = (1, 1, 1)$  e,  $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbf{R}^+)^3$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^x : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \alpha^x(t) = \begin{cases} (1, 1, 1) + t[(x_1, 1, 1) - (1, 1, 1)] = (1 + t(x_1 - 1), 1, 1) & \text{se } t \in [0, 1], \\ (x_1, 1, 1) + (t - 1)[(x_1, x_2, 1) - (x_1, 1, 1)] = (x_1, 1 + (t - 1)(x_2 - 1), 1) & \text{se } t \in [1, 2], \\ (x_1, x_2, 1) + (t - 2)[(x_1, x_2, x_3) - (x_1, x_2, 1)] = (x_1, x_2, 1 + (t - 2)(x_3 - 1)) & \text{se } t \in [2, 3]. \end{cases} \end{array} \right.$$

Chiaramente,  $\alpha^x$  ha per sostegno la poligonale con vertici nei punti  $(1, 1, 1)$ ,  $(x_1, 1, 1)$ ,  $(x_1, x_2, 1)$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = x$  (figura 5.5). Allora un potenziale sarà

dato da

$$\begin{aligned}
U(x_1, x_2, x_3) &= \int F \cdot d\alpha^x \\
&= \int_0^1 \left( -\frac{1}{(1+t(x_1-1))^2}, \frac{1}{1+t(x_1-1)}, \frac{1}{1+t(x_1-1)} \right) \cdot (x_1 - 1, 0, 0) dt \\
&\quad + \int_1^2 \left( -\frac{1}{x_1^2[1+(t-1)(x_2-1)]}, -\frac{1}{x_1[1+(t-1)(x_2-1)]^2}, -\frac{1}{x_1[1+(t-1)(x_2-1)]} \right. \\
&\quad \cdot (0, x_2 - 1, 0) dt + \int_2^3 \left( -\frac{1}{x_1^2 x_2 [1+(t-2)(x_3-1)]}, -\frac{1}{x_1 x_2^2 [1+(t-2)(x_3-1)]}, \right. \\
&\quad \left. \left. -\frac{1}{x_1^2 x_2 [1+(t-2)(x_3-1)]^2} \right) \cdot (0, 0, x_3 - 1) dt \right. \\
&= - \int_0^1 \frac{x_1-1}{(1+t(x_1-1))^2} dt - \int_1^2 \frac{x_2-1}{x_1[1+(t-1)(x_2-1)]^2} dt \\
&\quad - \int_2^3 \frac{x_3-1}{x_1 x_2 [1+(t-2)(x_3-1)]^2} dt \\
&= - \int_1^{x_1} \frac{1}{y^2} dy - \int_1^{x_2} \frac{1}{x_1 y^2} dy - \int_1^{x_3} \frac{1}{x_1 x_2 y^2} dy \\
&= \frac{1}{x_1 x_2 x_3} - 1.
\end{aligned}$$

**Osservazione 5.3.8** Sia  $A = \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ .  $A$  non è stellato rispetto ad alcuno dei suoi punti: infatti, qualunque sia  $x \in A$ ,  $-x \in A$  e  $O \in [x, -x]$ . Dunque, il teorema 5.3.4 non è applicabile. In effetti (esempio 5.3.5), esistono campi chiusi di dominio  $\mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$  che non sono esatti. Sia allora  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $F$  è un **campo centrale** se esiste  $g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  continua, tale che

$$F(x) = g(\|x\|^2)x \quad \forall x \in A. \quad (5.3.10)$$

È immediato verificare che, se  $F$  è come in (5.3.10),  $F$  è esatto e un suo potenziale è

$$\begin{cases} U : A \rightarrow \mathbf{R}, \\ U(x) = \frac{G(\|x\|^2)}{2}, \end{cases} \quad (5.3.11)$$

con  $G$  primitiva di  $g$  (esercizio 5.3.3). I campi centrali hanno una certa importanza nella fisica. Consideriamo, ad esempio,

$$\begin{cases} F : \mathbf{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ F(x) = \|x\|^{-3}x. \end{cases} \quad (5.3.12)$$

$F$  è della forma (5.3.10), con  $g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(r) = r^{-3/2}$ . Poiché una primitiva di  $g$  è  $G(r) = -2r^{-1/2}$ , un potenziale di  $F$  è

$$\begin{cases} U : \mathbf{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbf{R}, \\ U(x) = \frac{G(\|x\|^2)}{2} = -\|x\|^{-1}. \end{cases}$$

**Osservazione 5.3.9** Si potrebbe dimostrare che le conclusioni del teorema 5.3.4 sono ancora valide nell'ipotesi (meno restrittiva) che  $A$  sia **semplicemente connesso**. Ciò significa quanto segue: sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un arbitrario cammino continuo e chiuso (cioè  $\alpha(a) = \alpha(b)$ ) con sostegno in  $A$ . Allora esistono  $F : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$  e  $x^0 \in A$  tali che:

- (I)  $F$  è continua;
- (II)  $F(0, t) = \alpha(t)$ ,  $F(1, t) = x^0 \forall t \in [a, b]$ ;
- (III)  $F(s, a) = F(s, b) \forall s \in [0, 1]$ .

Un'applicazione con tali caratteristiche si chiama **omotopia** tra  $\alpha$  e il cammino costante  $\beta(t) = x^0$  di dominio  $[a, b]$ . Il significato di questa definizione è il seguente: è possibile "deformare con continuità" un qualunque cammino chiuso con sostegno in  $A$ , fino a trasformarlo in un cammino costante, senza mai uscire da  $A$  e tenendolo sempre chiuso in ogni fase della trasformazione (condizione (III)). È conveniente pensare a  $s \in [0, 1]$  come a un parametro temporale: all'istante  $s = 0$  abbiamo  $\alpha$ , che si deforma con continuità in  $x^0$ , con la deformazione completata al tempo  $s = 1$ .

È facile verificare che, se  $A$  è un aperto stellato rispetto a qualche suo punto,  $A$  è semplicemente connesso (esercizio 5.3.4). Si potrebbe poi far vedere che, se  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{R}^n \setminus \{O\}$  è semplicemente connesso.

**Esercizio 5.3.1** Siano  $A$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $F \in C(A; \mathbf{R}^n)$ , tale che, comunque si prenda  $\alpha$  cammino chiuso di classe  $C^1$  a tratti, con sostegno in  $A$ , vale  $\int F \cdot d\alpha = 0$ . Verificare che  $F$  è conservativo e quindi, per il teorema 5.3.3, esatto.

Sugg: si tratta di provare che, comunque si prendano due cammini  $\beta$  e  $\gamma$  di classe  $C^1$  a tratti, con sostegno in  $A$ , aventi lo stesso primo e lo stesso secondo estremo, si ha  $\int F \cdot d\beta = \int F \cdot d\gamma$ . Sia  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Definire

$$\begin{cases} \alpha : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ \alpha(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \gamma(d + b - t) & \text{se } t \in [b, b + d - c]. \end{cases} \end{cases}$$

Allora  $\alpha$  è di classe  $C^1$  a tratti, chiuso, con sostegno in  $A$ . Segue che  $\int F \cdot d\alpha = 0$ . Osservare che  $\alpha|_{[a, b]} = \beta$ , mentre  $\alpha|_{[b, b+d-c]}$  è equivalente, ma non positivamente equivalente, a  $\gamma$ . Dedurre che  $\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta - \int F \cdot d\gamma$ .

**Esercizio 5.3.2** Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ , stellato rispetto a qualche suo punto  $x^0$ . Dimostrare che  $A$  è connesso per archi.

Sugg.: siano  $x$  e  $y$  arbitrari elementi di  $A$ . Costruire un cammino con sostegno in  $A$  di estremi  $x$  e  $y$ , percorrendo in successione i segmenti  $[x, x^0]$  e  $[x^0, y]$ .

**Esercizio 5.3.3** Verificare quanto asserito nell'osservazione 5.3.8.

**Esercizio 5.3.4** Dimostrare che, se  $A$  è un aperto di  $\mathbf{R}^n$  stellato rispetto a qualche suo punto  $x^0$ ,  $A$  è semplicemente connesso.

Sugg. : sia  $A$  stellato rispetto a  $x^0$ . Sia poi  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino chiuso con sostegno in  $A$ . Considerare  $F : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $F(t, s) = \alpha(t) + s(x^0 - \alpha(t))$ .

**Esercizio 5.3.5** Verificare se i seguenti campi vettoriali sono esatti e determinarne, eventualmente, un potenziale.

- (I)  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (3x_1^2 x_2, x_1^3)$ ;
- (II)  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (2x_1 e^{x_2} + x_2, x_1^2 e^{x_2} + x_1 - 2x_2)$ ;
- (III)  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (\sin(x_2) - x_2 \sin(x_1) + x_1, \cos(x_1) + x_1 \cos(x_2) + x_2)$ ;
- (IV)  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ ;
- (V)  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 \cos(x_1) + x_3^2, 2x_2 \sin(x_1) - 4, -4x_2^2 x_3^2 - 2x_1^3 x_3)$ ;
- (VI)  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $F(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 x_2 - 3x_1^2 x_3^2 + 1, 2(x_1^2 + 1), -2x_1^3 x_3 - 3x_3^2)$ ;
- (VII)  $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (-\frac{\sin(x_1/x_2)}{x_2}, \frac{\sin(x_1/x_2)x_1}{x_2^2})$ ;
- (VIII)  $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (\frac{2x_1 e^{x_1^2 - 2x_2}}{x_2}, -\frac{e^{x_1^2 - 2x_2}(1+2x_2)}{x_2^2})$ ;
- (IX)  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $F(x) = \cos(\|x\|^2)x$ ;
- (X)  $F : \mathbf{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $F(x) = \|x\|^\alpha x$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ );
- (XI)  $F : \mathbf{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $F(x) = \ln(\|x\|)x$ .

# Capitolo 6

## Integrali di superficie, formule di Gauss-Green e di Stokes

### 6.1 Le formule di Gauss-Green nel piano

Cominciamo con le seguenti

**Definizione 6.1.1** Siano  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un cammino continuo.  
Diremo che  $\gamma$  è

- (I) semplice se le restrizioni di  $\gamma$  a  $[a, b[$  e  $a ]a, b]$  sono iniettive;
- (II) regolare se è di classe  $C^1$ , semplice e  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$ .

**Osservazione 6.1.1** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  regolare. Sia poi  $x = \gamma(t)$ , con  $t \in ]a, b[$ . Si osservi che, poiché  $\gamma$  è semplice,  $t$  è univocamente determinato. Chiameremo **retta tangente a**  $\gamma$  in  $x$

$$\{y = x + s\gamma'(t) : s \in \mathbf{R}\}.$$

Supponiamo ora  $n = 2$ . Sia, per  $t \in [a, b]$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Allora gli elementi della forma  $\rho(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$ , con  $\rho \in \mathbf{R}$ , sono ortogonali a  $\gamma'(t)$ . Prendendo  $\rho = \pm \|\gamma'(t)\|^{-1}$ , si ottengono i due **versori ortogonali (normali) a**  $\gamma$  in  $x$ .

**Definizione 6.1.2** Sia  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^2$ . Diremo che  $\Omega$  è **regolare** se  
(I) è limitato e connesso per archi;

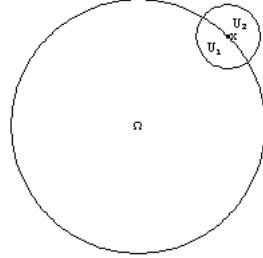


Figura 6.1

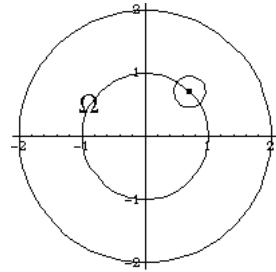


Figura 6.2

(II)  $Fr(\Omega)$  è unione di una famiglia finita di sostegni di cammini  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  regolari;

(III) se  $1 \leq k < l \leq p$ , i sostegni di  $\gamma^k$  e  $\gamma^l$  si intersecano al più negli estremi;

(IV) se  $x \in Fr(\Omega)$ , esiste  $r > 0$ , tale che, se  $0 < \rho < r$ ,  $B(x, \rho) \setminus Fr(\Omega)$  è unione di due aperti  $U_1$  e  $U_2$  connessi per archi, tali che  $U_1 \subseteq \Omega$ ,  $U_2 \cap \Omega = \emptyset$ .

**Osservazione 6.1.2** Il significato della condizione (IV) nella definizione 6.1.2 è il seguente: che, almeno localmente,  $\Omega$  sta tutto da una parte rispetto alla sua frontiera  $Fr(\Omega)$  (vedi la figura 6.1).

Se, ad esempio, poniamo

$$\Omega := \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\| < 2, \|x\| \neq 1\},$$

e prendiamo  $x \in \mathbf{R}^2$  con  $\|x\| = 1$ , allora  $x \in Fr(\Omega)$ , ma la condizione (IV) non è soddisfatta, in quanto, per  $0 < \rho < 1$ ,  $B(x, \rho) \setminus Fr(\Omega) \subseteq \Omega$  (vedi la figura 6.2).

**Osservazione 6.1.3** Siano  $\Omega$  un aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$ ,  $x \in Fr(\Omega)$ ,  $x = \gamma^j(t)$ , con  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\gamma^j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $t \in ]a_j, b_j[$ . Consideriamo i due

versori ortogonali a  $\gamma^j$  in  $x$ . Allora si potrebbe dimostrare che uno e uno solo di essi, che indicheremo col simbolo  $\nu^j(x)$ , gode della seguente proprietà : esiste  $\tau > 0$  tale che, se  $s \in [0, \tau[$ , allora  $x + s\nu^j(x) \notin \Omega$ . Chiameremo  $\nu^j(x)$  **versore normale esterno a  $\Omega$  in  $x$** .

Si potrebbe dimostrare che la funzione  $\nu^j$ , definita sul sostegno di  $\gamma^j$  esclusi gli estremi, è estendibile con continuità a tutto il sostegno. Per semplicità , continueremo a chiamare  $\nu^j$  il prolungamento continuo.

**Esempio 6.1.1** Sia  $\Omega := B(0, r_2) \setminus B(0, r_1)$  in  $\mathbf{R}^2$ , con  $0 < r_1 < r_2$ . Non è difficile verificare che  $\Omega$  è un aperto regolare di  $\mathbf{R}^2$ . La frontiera di  $\Omega$  è unione dei sostegni dei cammini regolari

$$\begin{cases} \gamma^j : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^j(t) = (r_j \cos(t), r_j \sin(t)), \end{cases} \quad (6.1.1)$$

con  $j \in \{1, 2\}$ .

Se  $x = (r_j \cos(t), r_j \sin(t))$ , si ha  $(\gamma^j)'(t) = (-r_j \sin(t), r_j \cos(t))$ ,

$$((\gamma_2^j)'(t), -(\gamma_1^j)'(t)) = (r_j \cos(t), r_j \sin(t)) = x, \quad (6.1.2)$$

$$\|(\gamma^j)'(t)\| = r_j, \quad (6.1.3)$$

per cui il versore normale esterno  $\nu^j(x)$  coincide con uno dei due tra  $r_j^{-1}x$  e  $-r_j^{-1}x$ . Se  $s \in \mathbf{R}^+$  e  $x = (r_2 \cos(t), r_2 \sin(t))$ , si ha

$$\|x + sr_2^{-1}x\| = (1 + sr_2^{-1})\|x\| = r_2 + s > r_2. \quad (6.1.4)$$

Ne concludiamo che

$$\nu^2(x) = r_2^{-1}x. \quad (6.1.5)$$

Se invece  $x = (r_2 \cos(t), r_2 \sin(t))$ , si ha, per  $s > 0$ ,

$$\|x + s(-r_1^{-1}x)\| = |1 - sr_1^{-1}|\|x\| = |r_1 - s| \quad (6.1.6)$$

e  $|r_1 - s| < r_1$  se  $s \in ]0, r_1[$ . Dunque,

$$\nu^1(x) = -r_1^{-1}x. \quad (6.1.7)$$

**Esempio 6.1.2** Diano  $a$  e  $b$  numeri reali con  $a < b$ ,  $g, h \in C^1([a, b])$ , tali che  $g(t) < h(t) \forall t \in [a, b]$ . Poniamo

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : a < x_1 < b, g(x_1) < x_2 < h(x_1)\}. \quad (6.1.8)$$

Allora non è difficile verificare che  $\Omega$  è un aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$  e che  $Fr(\Omega)$  è unione dei sostegni dei seguenti cammini regolari:

$$\begin{cases} \gamma^1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^1(t) = (t, g(t)), \end{cases} \quad (6.1.9)$$

$$\begin{cases} \gamma^2 : [g(b), h(b)] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^2(t) = (b, t). \end{cases} \quad (6.1.10)$$

$$\begin{cases} \gamma^3 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^3(t) = (t, h(t)), \end{cases} \quad (6.1.11)$$

$$\begin{cases} \gamma^4 : [g(a), h(a)] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^4(t) = (a, t). \end{cases} \quad (6.1.12)$$

Da (6.1.9)-(6.1.12) si ottengono facilmente le seguenti espressioni del versore normale esterno:

$$\begin{cases} \nu^1(\gamma^1(t)) = \left( \frac{g'(t)}{\sqrt{1+g'(t)^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+g'(t)^2}} \right) & t \in [a, b], \\ \nu^2(\gamma^2(t)) = (1, 0) & t \in [g(b), h(b)], \\ \nu^3(\gamma^3(t)) = \left( -\frac{h'(t)}{\sqrt{1+h'(t)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+h'(t)^2}} \right) & t \in [a, b], \\ \nu^4(\gamma^4(t)) = (-1, 0) & t \in [g(a), h(a)]. \end{cases} \quad (6.1.13)$$

Sarà comoda nel seguito la seguente

**Definizione 6.1.3** Siano  $m$  e  $n$  naturali,  $A \subseteq \mathbf{R}^n$ . Diremo che  $f \in C^1(A; \mathbf{R}^m)$  se  $f \in C^1(U; \mathbf{R}^m)$ , per qualche  $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ,  $U$  aperto, tale che  $A \subseteq U$ .

Nel caso  $m = 1$ , scriveremo semplicemente  $C^1(A)$  invece di  $C^1(A; \mathbf{R})$ .

Vale il seguente importante risultato, di cui diamo solo una dimostrazione parziale:

**Teorema 6.1.1** (*Formule di Gauss-Green nel piano*) *Sia  $\Omega$  un aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$ , con  $Fr(\Omega)$  unione dei sostegni dei cammini regolari  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  come nella definizione 6.1.2. Siano  $\nu^1, \dots, \nu^p$  i versori normali esterni a  $\Omega$  rispettivamente su  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$ . Sia, infine,  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ . Allora, per  $i \in \{1, 2\}$ ,*

$$\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx = \sum_{j=1}^p \int_{\gamma^j} f \nu_i^j ds. \quad (6.1.14)$$

*Dimostrazione parziale* Verifichiamo la formula (6.1.14) nel caso  $i = 2$ , per un aperto  $\Omega$  come nell'esempio 6.1.2.

Per il teorema di Fubini, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) dx &= \int_{[a,b]} \left( \int_{[g(x_1), h(x_1)]} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{[a,b]} \left( \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{[a,b]} [f(x_1, h(x_1)) - f(x_1, g(x_1))] dx_1 \\ &= \int_a^b [f(x_1, h(x_1)) - f(x_1, g(x_1))] dx_1. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo membro in (6.1.14), poiché  $\nu_2^2$  e  $\nu_2^4$  sono identicamente nulle (vedi (6.1.13)), si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma^j} f \nu_2^j ds &= \int_{\gamma^1} f \nu_2^1 ds + \int_{\gamma^3} f \nu_2^3 ds \\ &= \int_a^b f(t, g(t)) \left[ -\frac{1}{\sqrt{1+g'(t)^2}} \right] \sqrt{1+g'(t)^2} dt \\ &\quad + \int_a^b f(t, h(t)) \frac{1}{\sqrt{1+h'(t)^2}} \sqrt{1+h'(t)^2} dt \\ &= \int_a^b [f(t, h(t)) - f(t, g(t))] dt, \end{aligned}$$

da cui la conclusione.  $\square$

Per uso futuro, introduciamo la seguente definizione:

**Definizione 6.1.4** *Siano  $\Omega$  un aperto regolare in  $R^2$ ,  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  cammini regolari come nella definizione 6.1.2, di dominio rispettivamente  $[a_1, b_1], \dots, [a_p, b_p]$ . Diremo che  $Fr(\Omega)$  è positivamente orientata da  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  se,  $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \forall t \in ]a_j, b_j[,$*

$$\nu^j(\gamma^j(t)) = \|(\gamma^j)'(t)\|^{-1}((\gamma_2^j)'(t), -(\gamma_1^j)'(t)),$$

con  $\nu^j$  versore normale esterno a  $\Omega$  sul sostegno di  $\gamma^j$ .

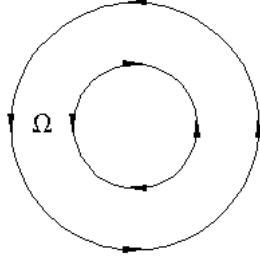


Figura 6.3

**Esempio 6.1.3** Consideriamo l’aperto  $\Omega$  dell’esempio 6.1.1. Allora la condizione della definizione 6.1.4 è soddisfatta per  $j = 2$ , non è soddisfatta per  $j = 1$ . In luogo di  $\gamma^1$ , ci si può mettere, ad esempio,

$$\begin{cases} \delta^1 : [-2\pi, 0] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \delta^1(t) = \gamma^1(-t) = (r_1 \cos(t), -r_1 \sin(t)). \end{cases} \quad (6.1.15)$$

**Osservazione 6.1.4** Per quanto riguarda la definizione 6.1.4, un criterio euristico per verificare se i cammini  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  orientano positivamente  $Fr(\Omega)$  è il seguente: si immagini un osservatore che cammina con i piedi all’interno di  $\Omega$ , posto su un pavimento. Si immagini inoltre che l’osservatore si muova nel verso crescente del parametro  $t$ . Allora  $Fr(\Omega)$  deve essere localmente a destra dell’osservatore. Si osservi, per questo, la figura 6.3.

**Esercizio 6.1.1** Data  $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ , trasformare  $\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) in una somma di integrali curvilinei, e poi in una somma di integrali unidimensionali, per gli  $\Omega$  seguenti:

- (I)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x_1 < 3, -1 < x_2 < 3, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 > 1\};$
- (II)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4\};$

- (III)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 2\};$

- (IV)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1\},$  con  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}^+$ ;

- (V)  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x_1 - 1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - 2)^2}{b^2} < 1\},$  con  $a$  e  $b$  in  $\mathbf{R}^+.$

Per esempio, vediamo (IV).

La frontiera di  $\Omega$  è il sostegno del cammino regolare  $\gamma$  seguente:

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)). \end{cases}$$

Si ha

$$(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) = (b \cos(t), a \sin(t)),$$

e il versore normale esterno a  $\Omega$  nel punto  $\gamma(t)$  è

$$\nu(\gamma(t)) = (b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t))^{-\frac{1}{2}}(b \cos(t), a \sin(t)).$$

Pertanto, limitandosi al caso  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{\gamma} f(x_1, x_2) \nu_1(x) ds \\ &= \int_0^{2\pi} f(a \cos(t), b \sin(t)) b \cos(t) dt. \end{aligned}$$

## 6.2 Il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$

**Definizione 6.2.1** Siano  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Indichiamo (al solito) con  $\{e^1, e^2, e^3\}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^3$ . Definiamo **prodotto vettoriale** tra  $x$  e  $y$ , e indichiamo col simbolo  $x \wedge y$ , il determinante (formale) della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix}. \quad (6.2.1)$$

**Osservazione 6.2.1** I determinanti formali delle matrici della forma (6.2.1) possono essere manipolati utilizzando le note proprietà dei determinanti delle matrici a coefficienti scalari. Nel caso specifico, sviluppando rispetto alla terza riga, si ottiene

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e^1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e^3 \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

**Definizione 6.2.2** Siano  $x, y, z$  elementi di  $\mathbf{R}^3$ . Chiamiamo **prodotto misto** di  $x, y, z$  il numero reale

$$x \wedge y \cdot z. \quad (6.2.3)$$

**Osservazione 6.2.2** Nell'espressione (6.2.3) il prodotto vettoriale ha la precedenza su quello scalare. Si osservi, per inciso, che  $y \cdot z$  è un numero reale, e quindi la scrittura  $x \wedge (y \cdot z)$  è priva di senso!

Siano, inoltre,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $z = (z_1, z_2, z_3)$ . Allora è facile verificare che il prodotto misto  $x \wedge y \cdot z$  coincide con il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Vediamo ora le principali proprietà del prodotto vettoriale.

**Teorema 6.2.1** *Siano  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $z = (z_1, z_2, z_3)$  elementi di  $\mathbf{R}^3$ ,  $a$  e  $b$  numeri reali. Allora:*

- (I)  $x \wedge y = -y \wedge x$ ;
- (II)  $(ax + by) \wedge z = a(x \wedge z) + b(y \wedge z)$ ,  $z \wedge (ax + by) = a(z \wedge x) + b(z \wedge y)$  ;
- (III)  $x \wedge y = O$  se e solo se  $x$  e  $y$  sono linearmente dipendenti;
- (IV)  $x \wedge y \cdot x = x \wedge y \cdot y = 0$ ;
- (V) se  $x \neq O$  e  $y \neq O$ ,  $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin(\theta)$ , con

$$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}\right). \quad (6.2.5)$$

*Dimostrazione* (I) si ha, per le proprietà dei determinanti,

$$\begin{aligned} y \wedge x &= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} \\ &= -x \wedge y. \end{aligned}$$

(II) Ancora per le proprietà dei determinanti, si ha

$$\begin{aligned} (ax + by) \wedge z &= \det \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 & ax_3 + by_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} \\ &= a \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} \\ &= a(x \wedge z) + b(y \wedge z). \end{aligned}$$

Analogamente si prova la seconda identità in (II).

(III) Siano  $x$  e  $y$  linearmente indipendenti. Sia, ad esempio,  $y = cx$  con  $c \in \mathbf{R}$ . Allora

$$\begin{aligned}
x \wedge y &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ cx_1 & cx_2 & cx_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} \\
&= c \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix} \\
&= O,
\end{aligned}$$

in quanto una matrice con due righe uguali ha determinante nullo.

Siano, viceversa,  $x$  e  $y$  tali che  $x \wedge y = O$ . Vogliamo far vedere che sono linearmente dipendenti. Si osservi, innanzi tutto, che  $x \wedge y \cdot z = 0 \forall z \in \mathbf{R}^3$ . Scegliamo  $z$  non appartenente al sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  generato da  $x$  e  $y$ . Ciò significa che  $z$  non è della forma  $c_1x + c_2y$  per qualche scelta di  $c_1$  e  $c_2$  reali. Il fatto che il sottospazio generato da  $x$  e  $y$  non esaurisca  $\mathbf{R}^3$  dipende dal fatto che tale sottospazio ha dimensione non superiore a 2. Sia allora  $z$  come ora dichiarato. Si ha che

$$\begin{aligned}
0 &= x \wedge y \cdot z \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ora, è ben noto che, se una matrice ha determinante nullo, le sue righe sono linearmente dipendenti. Dunque esistono tre numeri reali  $c_1, c_2, c_3$  non tutti nulli, tali che

$$c_1x + c_2y + c_3z = O. \quad (6.2.6)$$

Necessariamente deve essere  $c_3 = 0$ . Infatti, se così non fosse, da (6.2.6) ricaveremmo

$$z = -c_3^{-1}(c_1x + c_2y), \quad (6.2.7)$$

che implicherebbe l'appartenenza di  $z$  al sottospazio generato da  $x$  e  $y$ . Deve perciò essere  $c_3 = 0$ , da cui

$$c_1x + c_2y = O, \quad (6.2.8)$$

con  $c_1$  e  $c_2$  non entrambi nulli. Da ciò segue che  $x$  e  $y$  sono linearmente dipendenti.

Lasciamo la (banale) prova di (IV) al lettore. Ci limitiamo a segnalare che essa segue ancora dal fatto che una matrice con due righe uguali ha determinante nullo.

Proviamo (V). Consideriamo, innanzi tutto, il caso  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Allora, da (6.2.2),

$$\begin{aligned}\|x \wedge y\|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= x_1^2(y_2^2 + y_3^2) + x_2^2(y_1^2 + y_3^2) + x_3^2(y_1^2 + y_2^2) \\ &\quad - 2(x_1x_2y_1y_2 + x_1x_3y_1y_3 + x_2x_3y_2y_3) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 \\ &\quad - x_3^2y_3^2 - 2(x_1x_2y_1y_2 + x_1x_3y_1y_3 + x_2x_3y_2y_3) \\ &= 1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= 1 - (x \cdot y)^2 \\ &= 1 - \cos^2(\theta),\end{aligned}$$

con  $\theta$  definito in (6.2.5) (ricordiamo che stiamo ancora considerando il caso  $\|x\| = \|y\| = 1$ ).

Dunque,

$$\|x \wedge y\| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sin(\theta),$$

in quanto  $\theta \in [0, \pi]$ , e quindi  $\sin(\theta) \geq 0$ .

Con ciò, il caso  $\|x\| = \|y\| = 1$  è completo. Consideriamo ora il caso generale. Si ha, utilizzando (II) e il fatto che

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1,$$

$$\begin{aligned}\|x \wedge y\| &= \left\| \|x\| \|y\| \left( \frac{x}{\|x\|} \wedge \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \\ &= \|x\| \|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} \wedge \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \|x\| \|y\| \sin(\theta).\end{aligned}$$

**Osservazione 6.2.3** Il punto (IV) del teorema 6.2.1 implica che  $x \wedge y$  è normale sia a  $x$ , che a  $y$ .

Inoltre, trattando del prodotto scalare  $x \cdot y$  nel caso  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , osservammo che, se si consideravano i due vettori applicati di estremi rispettivamente  $O$  e  $(x_1, \dots, x_n)$ , e  $O$  e  $(y_1, \dots, y_n)$ , allora  $x \cdot y$  coincideva con il prodotto delle loro lunghezze moltiplicato per il coseno dell'angolo  $\theta$  fra essi compreso. In formule,

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos(\theta),$$

da cui, prendendo  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\theta$  è esattamente il valore definito in (6.2.5).

Siano ora  $x, y, z$  elementi di  $\mathbf{R}^3$ , con  $x \neq 0, y \neq 0$ . Poniamo

$$P := \{z + sx + ty : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}.$$

$P$  è il parallelogramma di vertici  $z, z + x, z + y, z + x + y$ . Si osservi che tale parallelogramma si riduce a un segmento se  $x$  e  $y$  sono linearmente dipendenti. Per un ben noto risultato di geometria elementare, in base al punto (V) del teorema 6.2.1 e all'interpretazione di  $\theta$ ,  $\|x \wedge y\|$  può essere pensato come l'area del parallelogramma  $P$ .

### 6.3 Superfici, area e integrali di superficie

**Definizione 6.3.1** *Sia  $S \subseteq \mathbf{R}^3$ . Diremo che  $S$  è una superficie regolare con bordo semplice e aperta se esistono  $\Omega$  aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$  e  $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^3)$  tali che:*

- (I)  $\Phi(\overline{\Omega}) = S$ ;
- (II)  $\Phi|_{\overline{\Omega}}$  è iniettiva;
- (III)  $\forall(\theta, \phi) \in \overline{\Omega}$   $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi)$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi)$  sono linearmente indipendenti.

Una coppia  $(\Phi, \Omega)$  con le proprietà (I)-(III) si chiama **parametrizzazione** di  $S$ .

**Osservazione 6.3.1** La condizione (III) nella definizione 6.3.1 è equivalente (in base al punto (III) del teorema 6.2.1), a richiedere che  $\forall(\theta, \phi) \in \overline{\Omega}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \neq O.$$

Intuitivamente, essa assicura che  $S$  è effettivamente un oggetto bidimensionale. Ad esempio, siano  $x, y$  e  $z$  elementi di  $\mathbf{R}^3$ ,  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\Phi(\theta, \phi) = x + \theta y + \phi z$ .  $\Omega$  è un aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$  e  $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^3)$ . Poniamo

$$S := \Phi(\overline{\Omega}).$$

Si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) = y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) = z, \quad \forall(\theta, \phi) \in \overline{\Omega}.$$

Si osservi che, se  $y$  e  $z$  sono linearmente indipendenti,  $\Phi$  è iniettiva (verificarlo!) e  $S$  è una superficie regolare con bordo semplice e aperta. Di fatto,  $S$  è il parallelogramma di vertici  $x, x + y, x + z, x + y + z$ .

Supponiamo invece che  $y$  e  $z$  siano linearmente dipendenti. Sia, per fissare le idee,  $z = cy$ , con  $c \in \mathbf{R}$ . Allora  $\forall(\theta, \phi) \in \overline{\Omega}$ ,

$$\Phi(\theta, \phi) = x + (\theta + c\phi)y,$$

per cui  $S$  è contenuta nella retta  $\{x + sy : s \in \mathbf{R}\}$ .

Inoltre, come vedremo tra poco, la condizione (III) consente di definire, punto per punto in  $S$ , il piano tangente.

**Esempio 6.3.1** Siano  $\Omega$  un aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$ ,  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ . Poniamo

$$\begin{cases} \Phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \Phi(\theta, \phi) = (\theta, \phi, f(\theta, \phi)), \quad (\theta, \phi) \in \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (6.3.1)$$

Si verifica facilmente che  $\Phi$  è iniettiva. Si ha inoltre,  $\forall(\theta, \phi) \in \overline{\Omega}$ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \phi)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial \phi}(\theta, \phi)), \quad (6.3.2)$$

da cui

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (-\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \phi), -\frac{\partial f}{\partial \phi}(\theta, \phi), 1) \neq O. \quad (6.3.3)$$

Quindi  $(\Phi, \Omega)$  è una parametrizzazione di  $S := \Phi(\overline{\Omega})$ , coincidente col grafico di  $f$  (vedi la figura 6.4).

**Esempio 6.3.2** Siano  $R \in \mathbf{R}^+$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  numeri reali, con  $-R < \zeta_1 < \zeta_2 < R$ . Poniamo

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_2 \geq 0, \zeta_1 \leq x_3 \leq \zeta_2\}. \quad (6.3.4)$$

$S$  è una porzione della sfera di centro  $O$  e raggio  $R$ .

Poniamo

$$\Omega := \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \arccos\left(\frac{\zeta_2}{R}\right) < \theta < \arccos\left(\frac{\zeta_1}{R}\right), 0 < \phi < \pi\}, \quad (6.3.5)$$

$$\begin{cases} \Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \Phi(\theta, \phi) = (R \sin(\theta) \cos(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\theta)). \end{cases} \quad (6.3.6)$$

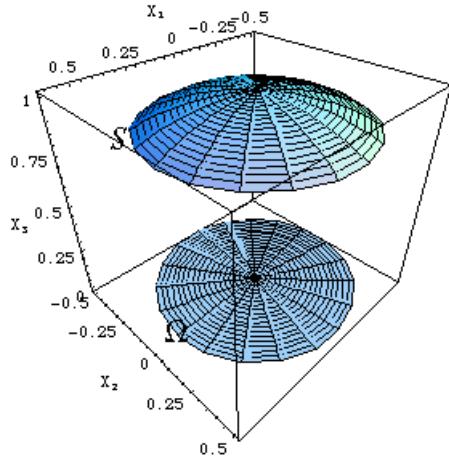


Figura 6.4

Si verifica facilmente che  $\Phi$  è iniettiva e che  $\Phi(\overline{\Omega}) = S$ . Inoltre,  $\forall(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) = (R \cos(\theta) \cos(\phi), R \cos(\theta) \sin(\phi), -R \sin(\theta)), \quad (6.3.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (-R \sin(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta) \cos(\phi), 0), \quad (6.3.8)$$

da cui

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (R^2 \sin^2(\theta) \cos(\phi), R^2 \sin^2(\theta) \sin(\phi), R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)). \quad (6.3.9)$$

Con facili calcoli, tenendo conto che  $\sin(\theta) > 0$ , da (6.3.9) si ottiene

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| = R^2 \sin(\theta) \neq 0. \quad (6.3.10)$$

Quindi  $S$  è una superficie regolare con bordo semplice e aperta (si veda la figura 6.4, con  $R = 1$ ,  $\zeta_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\zeta_2 = \frac{1}{2}$ ).

**Esempio 6.3.3** Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  un cammino regolare in  $\mathbf{R}^2$ , con  $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  numeri reali, con  $z_1 < z_2$ . Poniamo

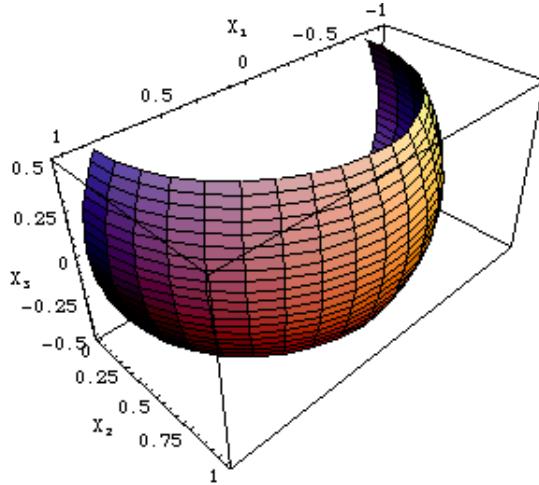


Figura 6.5

$$S := \gamma([a, b]) \times [z_1, z_2]. \quad (6.3.11)$$

$S$  è una porzione del cilindro generato dalla traslazione verticale del sostegno di  $\gamma$  (vedi la figura 6.6).

Poniamo

$$\Omega := ]a, b[ \times ]z_1, z_2[, \quad (6.3.12)$$

$$\begin{cases} \Phi : U \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \Phi(t, \zeta) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \zeta) \end{cases} \quad (6.3.13)$$

con  $U$  aperto in  $\mathbf{R}^2$  contenente  $[a, b] \times [z_1, z_2]$ .

Si verifica facilmente che  $\Phi|_{[a, b] \times [z_1, z_2]}$  è iniettiva e che  $\Phi(\bar{\Omega}) = S$ . Inoltre,  $\forall (t, \zeta) \in [a, b] \times [z_1, z_2]$ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \zeta) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), 0), \quad (6.3.14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(t, \zeta) = (0, 0, 1), \quad (6.3.15)$$

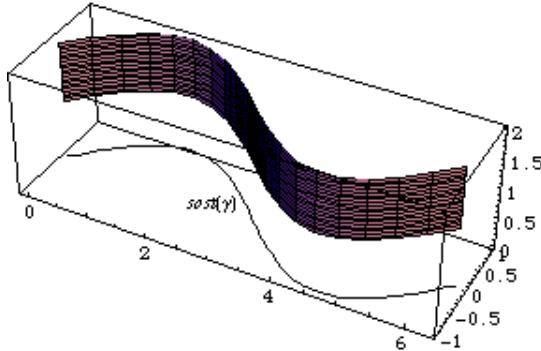


Figura 6.6

da cui

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \zeta) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(t, \zeta) = (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t), 0). \quad (6.3.16)$$

Da (6.3.16) segue subito

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \zeta) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(t, \zeta) \right\| = \|\gamma'(t)\| \neq 0. \quad (6.3.17)$$

Quindi  $S$  è una superficie regolare con bordo semplice e aperta.

**Definizione 6.3.2** Siano  $S$  una superficie regolare con bordo semplice, aperta  $(\Phi, \Omega)$  una sua parametrizzazione. Definimmo **bordo** di  $S$  e indichiamo col simbolo  $\partial S$ , l'insieme  $\Phi(Fr(\Omega))$ . Si potrebbe far vedere che questa definizione è indipendente dalla scelta della parametrizzazione.

**Teorema 6.3.1** Sia  $S$  una superficie regolare con bordo semplice e aperta e  $\partial S$  il suo bordo. Allora  $\partial S$  è unione dei sostegni di una famiglia finita di cammini regolari  $\eta^1, \dots, \eta^p$ , tali che, se  $1 \leq k < l \leq p$ , i sostegni di  $\eta^k$  e  $\eta^l$  si intersecano al più negli estremi.

*Dimostrazione* Sia  $(\Phi, \Omega)$  una parametrizzazione di  $S$ . Siano poi  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  come nella definizione 6.1.2. Supponiamo che, per  $j = 1, \dots, p$ , sia  $\gamma^j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , con  $a_j$  e  $b_j$  reali,  $a_j < b_j$ . Poniamo

$$\begin{cases} \eta^j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^j(t) = \Phi(\gamma^j(t)). \end{cases} \quad (6.3.18)$$

Allora è chiaro che  $\partial\Omega$  è unione dei sostegni di  $\eta^1, \dots, \eta^p$ . Dall'iniettività di  $\Phi$  segue facilmente che tali sostegni, per valori distinti del parametro, si intersecano al più negli estremi. Per concludere, resta solo da dimostrare che  $\eta^1, \dots, \eta^p$  regolari. Il fatto che  $\eta^j$  sia semplice segue dal fatto che lo è  $\gamma^j$  e dall'iniettività di  $\Phi$ . Resta da far vedere che  $(\eta^j)'(t) \neq O$  per ogni  $t \in [a_j, b_j]$ .

Si ha, applicando la "chain rule" componente per componente,

$$(\eta^j)'(t) = (\gamma_1^j)'(t) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\gamma(t)) + (\gamma_2^j)'(t) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\gamma(t)).$$

Poiché  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\gamma(t))$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\gamma(t))$  sono linearmente indipendenti e  $(\gamma_1^j)'(t)$  e  $(\gamma_2^j)'(t)$  non sono entrambi nulli (perché  $\gamma^j$  è regolare),  $(\eta^j)'(t) \neq O$ .  $\square$

**Definizione 6.3.3** Siano  $S$  una superficie regolare con bordo semplice, aperta e  $(\Phi, \Omega)$  una sua parametrizzazione. Chiamiamo **area** di  $S$  il numero reale

$$\int_{\overline{\Omega}} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| d\theta d\phi. \quad (6.3.19)$$

Si potrebbe dimostrare che l'integrale (6.3.19) è indipendente dalla parametrizzazione  $(\Phi, \Omega)$ .

**Osservazione 6.3.2** L'integrale (6.3.19) è ben definito. Infatti,  $\overline{\Omega}$  è misurabile, in quanto chiuso. Inoltre,  $g : (\theta, \phi) \rightarrow \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\|$  è continua, e quindi misurabile, su  $\overline{\Omega}$  (vedi il teorema 4.6.4). Infine,  $\overline{\Omega}$  è limitato e ha, per questo, misura finita, mentre  $g$  è limitata su  $\overline{\Omega}$  per il teorema di Weierstrass. Perciò  $g$  è sommabile su  $\overline{\Omega}$  e l'area è sempre un numero reale non negativo.

**Osservazione 6.3.3** Giustifichiamo intuitivamente la definizione 6.3.3.

Consideriamo il caso di una superficie regolare con bordo semplice aperta  $S$  che ammette una parametrizzazione  $(\Phi, \Omega)$ , con  $\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[$ , per certi numeri reali  $a, b, c, d$ , con  $a < b, c < d$ . Sia  $n \in \mathbf{N}$ . Per  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , poniamo

$$\theta_i := a + i \frac{b-a}{n}, \quad (6.3.20)$$

$$\phi_j := c + j \frac{d-c}{n}, \quad (6.3.21)$$

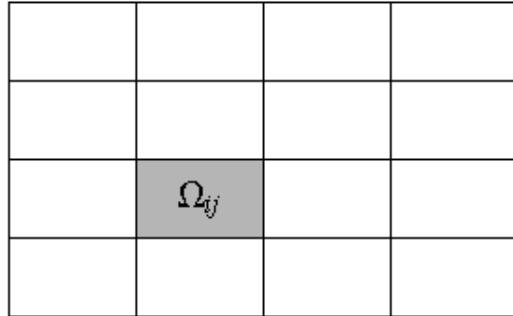


Figura 6.7

$$\Omega_{ij} := [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [\phi_{j-1}, \phi_j] \quad (6.3.22)$$

(si veda la figura 6.7).

Si ha, utilizzando la formula di Taylor componente per componente,

$$\Phi(\theta, \phi) = \Phi(\theta_i, \phi_j) + (\theta - \theta_i) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_i, \phi_j) + (\phi - \phi_j) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_i, \phi_j) + r^{ij}(\theta, \phi), \quad (6.3.23)$$

con

$$\lim_{(\theta, \phi) \rightarrow (\theta_i, \phi_j)} \frac{r^{ij}(\theta, \phi)}{\sqrt{(\theta - \theta_i)^2 + (\phi - \phi_j)^2}} = O. \quad (6.3.24)$$

Approssimiamo allora  $\Phi$  con l'applicazione  $(\theta, \phi) \rightarrow \Phi(\theta_i, \phi_j) + (\theta - \theta_i) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_i, \phi_j) + (\phi - \phi_j) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_i, \phi_j)$ . Tale approssimazione sarà tanto migliore quanto più  $(\theta, \phi)$  è prossimo a  $(\theta_i, \phi_j)$ . Utilizzando questa approssimazione, avremo che, per  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\begin{aligned} S_{ij} &:= \Phi([\theta_{i-1}, \theta_i] \times [\phi_{j-1}, \phi_j]) \\ &\cong S'_{ij} := \left\{ \Phi(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) + (\theta - \theta_{i-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + (\phi - \phi_{j-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) : \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i], \phi \in [\phi_{j-1}, \phi_j] \right\} \\ &= \left\{ \Phi(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) + s \frac{b-a}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) + t \frac{d-c}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. : s \in [0, 1], t \in [0, 1] \right\} \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

(si vedano le figure 6.8 e 6.9).

228 INTEGRALI DI SUPERFICIE, FORMULE DI GAUSS-GREEN ECC.

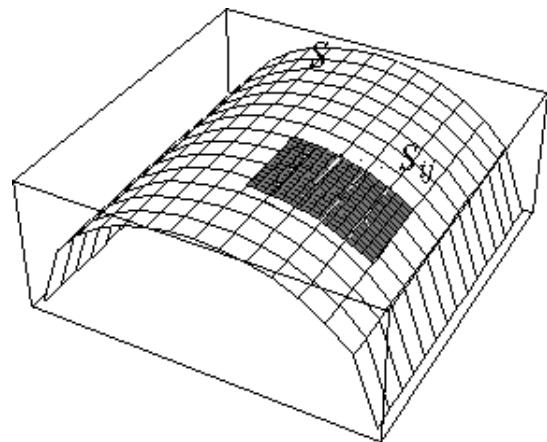


Figura 6.8

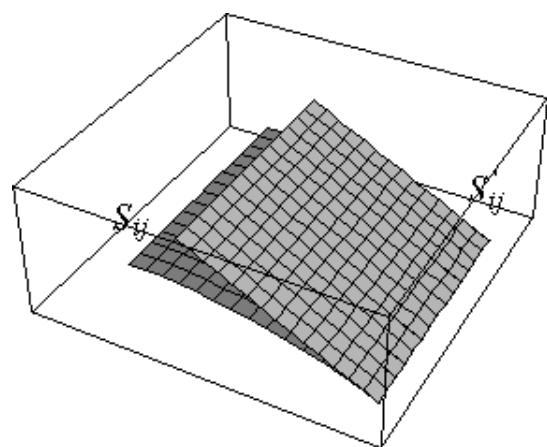


Figura 6.9

Dunque, almeno per grandi valori di  $n$ ,  $S_{ij}$  è assimilabile al parallelogramma  $S'_{ij}$  di vertici  $\Phi(\theta_{i-1}, \phi_{j-1})$ ,  $\Phi(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) + \frac{b-a}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1})$ ,  $\Phi(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) + \frac{d-c}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1})$ ,  $\Phi(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) + \frac{b-a}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_i, \phi_j) + \frac{d-c}{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1})$ , la cui area, in base alle considerazioni dell'osservazione 6.2.3, vale

$$\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \right\|.$$

Sommando in  $i$  e  $j$ , otteniamo la seguente valutazione dell'area di  $S$ , tanto migliore (intuitivamente) quanto più  $n$  è grande:

$$\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \right\|. \quad (6.3.26)$$

Introduciamo ora, per  $n \in \mathbf{N}$ , la seguente funzione

$$\begin{cases} f_n : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}, \\ f_n(\theta, \phi) = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_{i-1}, \phi_{j-1}) \right\| \\ \text{se } (\theta, \phi) \in [\theta_{i-1}, \theta_i] \times [\phi_{j-1}, \phi_j], 1 \leq i, j \leq n. \end{cases} \quad (6.3.27)$$

$f_n$  è semplice su  $[a, b] \times [c, d]$  e  $\int_{[a, b] \times [c, d]} f_n(\theta, \phi) d\theta d\phi$  coincide con (6.3.26). Inoltre, si potrebbe dimostrare che si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b] \times [c, d]} f_n(\theta, \phi) d\theta d\phi = \int_{\bar{\Omega}} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| d\theta d\phi.$$

Queste considerazioni giustificano intuitivamente la definizione 6.3.3.

**Esempio 6.3.4** Consideriamo la superficie introdotta nell'esempio 6.3.1 (il grafico della funzione  $f$ ). Tenuto conto di (6.3.3), l'area di tale superficie vale

$$\int_{\bar{\Omega}} \sqrt{\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \phi)^2 + \frac{\partial f}{\partial \phi}(\theta, \phi)^2 + 1 \right\|^2} d\theta d\phi.$$

Ad esempio, poniamo, dati  $0 < \zeta < R$ ,

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_3 \geq \zeta\}. \quad (6.3.28)$$

Osserviamo che  $S$  coincide con il grafico della funzione

$$\begin{cases} f : \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq \sqrt{R^2 - \zeta^2}\} \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \end{cases}$$

Dunque, posto  $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < \sqrt{R^2 - \zeta^2}\}$ , l'area di  $S$  coincide con

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Omega}} \sqrt{\frac{x_1^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{x_2^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2} + 1} \, dx_1 dx_2 \\ &= R \int_{\bar{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \, dx_1 dx_2 \\ &= R \int_{]0, \sqrt{R^2 - \zeta^2}] \times ]0, 2\pi[} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\rho d\theta \\ &= 2\pi R \int_0^{\sqrt{R^2 - \zeta^2}} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\rho \\ &= 2\pi R(R - \zeta). \end{aligned}$$

**Esempio 6.3.5** Sia  $S$  la superficie definita in (6.3.4). Allora, tenendo conto di (6.3.10), la sua area coincide con

$$\begin{aligned} & \int_{[\arccos(\frac{\zeta_2}{R}), \arccos(\frac{\zeta_1}{R})] \times [0, \pi]} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= \pi R^2 \int_{\arccos(\frac{\zeta_2}{R})}^{\arccos(\frac{\zeta_1}{R})} \sin(\theta) d\theta \\ &= \pi R(\zeta_2 - \zeta_1). \end{aligned}$$

**Esempio 6.3.6** Sia  $S$  la superficie definita in (6.3.11). Allora, tenendo conto di (6.3.17), la sua area coincide con

$$\begin{aligned} & \int_{[a, b] \times [z_1, z_2]} \|\gamma'(t)\| \, dt d\zeta \\ &= l(\gamma)(z_2 - z_1), \end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con  $l(\gamma)$  la lunghezza del cammino  $\gamma$ .

Passiamo ora alla definizione di integrale di superficie.

**Definizione 6.3.4** Siano  $S$  una superficie regolare con bordo semplice aperto,  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(\Phi, \Omega)$  una parametrizzazione di  $S$ . Diremo che  $f$  è **integrabile** su  $S$  se la funzione  $(\theta, \phi) \rightarrow f(\Phi(\theta, \phi)) \|\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi)\|$  è sommabile su  $\bar{\Omega}$ . In tal caso porremo, per definizione,

$$\int_S f(x) d\sigma := \int_{\bar{\Omega}} f(\Phi(\theta, \phi)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| d\theta d\phi. \quad (6.3.29)$$

Si potrebbe dimostrare che la definizione di funzione integrabile su  $S$  e il valore dell'integrale (6.3.29) non dipendono dalla parametrizzazione. Quest'ultimo integrale si chiama **integrale di superficie** di  $f$  su  $S$ .

**Osservazione 6.3.4** Se  $f$  è continua su  $S$ , sicuramente l'integrale di superficie è ben definito. Infatti, la funzione  $(\theta, \phi) \rightarrow f(\Phi(\theta, \phi)) \|\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi)\|$  è continua su  $\bar{\Omega}$ , che è chiuso e limitato.

**Osservazione 6.3.5** L'integrale di superficie ammette un'interpretazione analoga a quella dell'integrale curvilineo di prima specie (vedi l'osservazione 5.2.3). Almeno nel caso di  $f$  non negativa, la funzione può essere pensata come una densità superficiale e il valore dell'integrale rappresenta la massa totale supportata dalla superficie.

**Esempio 6.3.7** Sia

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 = 4, |x_3| \leq 1\}. \quad (6.3.30)$$

$S$  costituisce una porzione del cilindro  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ . Posto

$$\begin{cases} \gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), \end{cases}$$

si ha

$$S = \gamma([0, \pi]) \times [-1, 1].$$

Quindi,  $S$  è una superficie regolare con bordo semplice aperto del tipo descritto nell'esempio 6.3.3.

Calcoliamo

$$I = \int_S (2x_1 x_2 + 1) d\sigma. \quad (6.3.31)$$

Utilizzando una parametrizzazione  $\Phi$  come in (6.3.13), con  $[0, \pi] \times [-1, 1] \subseteq U$ , poiché  $\|\gamma'(t)\| = 2 \forall t \in [0, \pi]$ , si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0, \pi] \times [-1, 1]} 2(8 \cos(t) \sin(t) + 1) dt d\zeta \\ &= 4 \int_0^\pi (8 \cos(t) \sin(t) + 1) dt \\ &= 4[4 \sin^2(t) + t]_0^\pi \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

**Esempio 6.3.8** Se una massa è distribuita su una superficie  $S$  e  $\mu(x)$  è la sua densità, il **momento di inerzia**  $I$  della massa rispetto a una retta assegnata  $L$ , è, per definizione,

$$\int_S \mu(x) d(x)^2 d\sigma, \quad (6.3.32)$$

ove  $d(x)$  indica la distanza di  $x$  dalla retta  $L$ .

Sia allora  $S$  la superficie regolare con bordo semplice aperta descritta nell'esempio 6.3.2. Supponiamo che su di essa sia distribuita una certa massa con densità uniformemente uguale a 1. Sia poi  $L := \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbf{R}\}$ . Calcoliamo il momento di inerzia rispetto alla retta  $L$ . Si ha, tenuto conto di (6.3.5)-(6.3.10) e del fatto che  $d(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , che

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar{\Omega}} (R^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + R^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi)) R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= R^4 \int_{\bar{\Omega}} \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\ &= \pi R^4 \int_{\arccos(\frac{\zeta_1}{R})}^{\arccos(\frac{\zeta_2}{R})} \sin^3(\theta) d\theta \\ &= \pi R^4 \int_{\arccos(\frac{\zeta_1}{R})}^{\arccos(\frac{\zeta_2}{R})} (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \pi R^4 \left[ \frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) \right]_{\arccos(\frac{\zeta_1}{R})}^{\arccos(\frac{\zeta_2}{R})} \\ &= \pi R^3 (\zeta_2 - \zeta_1 - \frac{\zeta_2^3 - \zeta_1^3}{3R^2}). \end{aligned}$$

**Esempio 6.3.9** Se una massa è distribuita su una superficie  $S$  e  $\mu(x)$  è la sua densità, il **baricentro**, o **centro di massa** è, per definizione, il punto  $(b_1, b_2, b_3)$  di coordinate

$$b_j = \frac{\int_S x_j \mu(x) d\sigma}{\int_S \mu(x) d\sigma}, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.3.33)$$

Sia allora  $S$  la superficie regolare con bordo semplice aperta descritta nell'esempio 6.3.3. Supponiamo che su di essa sia distribuita una certa massa con densità uniformemente uguale a 1. Calcoliamo il centro di massa.

In base all'esempio 6.3.6,  $\int_S \mu(x)d\sigma = l(\gamma)(z_2 - z_1)$ . Per  $j = 1, 2$ , si ha

$$\begin{aligned}\int_S x_j \mu(x)d\sigma &= \int_{[a,b] \times [z_1, z_2]} \gamma_j(t) \|\gamma'(t)\| dt d\zeta \\ &= (z_2 - z_1) \int_\gamma x_j ds.\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\int_S x_3 \mu(x)d\sigma &= \int_{[a,b] \times [z_1, z_2]} \zeta \|\gamma'(t)\| dt d\zeta \\ &= l(\gamma) \frac{z_2 - z_1}{2}.\end{aligned}$$

Dunque, il centro di massa è il punto

$$\left( \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma x_1 ds, \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma x_2 ds, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Consideriamo ora una classe più vasta di superfici:

**Definizione 6.3.5** *Sia  $S \subseteq \mathbf{R}^3$ . Diremo che  $S$  è una superficie regolare a tratti se*

- (I)  $S$  è connesso per archi;
- (II) esistono  $S_1, \dots, S_p$  ( $p \in \mathbf{N}$ ) superfici regolari con bordo semplici, aperte, tali che

$$S = \bigcup_{i=1}^p S_i; \quad (6.3.34)$$

(III) se  $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$ ,  $S_{i_1} \cap S_{i_2} = \partial S_{i_1} \cap \partial S_{i_2}$ .

Definiremo **area** della superficie  $S$  la somma delle aree delle superfici regolari con bordo, semplici, aperte  $S_1, \dots, S_p$ .

Infine, data  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ , diremo che  $f$  è **integrabile** su  $S$  se è integrabile su ciascuna delle superfici  $S_1, \dots, S_p$ . In tal caso, porremo

$$\int_S f(x)d\sigma := \sum_{i=1}^p \int_{S_i} f(x)d\sigma. \quad (6.3.35)$$

Si potrebbe verificare che le definizioni di area e di integrale sono indipendenti dalla scelta delle superfici  $S_1, \dots, S_p$  (purché soddisfacenti, ovviamente, le condizioni (II)-(III)).

**Esempio 6.3.10** Siano  $R \in \mathbf{R}^+$ ,  $z_1$  e  $z_2$  in  $\mathbf{R}$ , con  $z_1 < z_2$ . Poniamo

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2, z_1 \leq x_3 \leq z_2\}. \quad (6.3.36)$$

Si ha che  $S = S_1 \cup S_2$ , con

$$S_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_2 \geq 0, z_1 \leq x_3 \leq z_2\}, \quad (6.3.37)$$

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_2 \leq 0, z_1 \leq x_3 \leq z_2\}. \quad (6.3.38)$$

$S_1$  e  $S_2$  sono superfici regolari con bordo semplici, aperte del tipo descritto nell'esempio 6.3.3. Per  $S_1$ , si può porre

$$\Omega_1 := ]0, \pi[ \times [z_1, z_2[, \quad (6.3.39)$$

$$\begin{cases} \Phi^1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \Phi^1(t, \zeta) = (R \cos(t), R \sin(t), \zeta), \end{cases} \quad (6.3.40)$$

per  $S_2$

$$\Omega_2 := ]\pi, 2\pi[ \times [z_1, z_2[, \quad (6.3.41)$$

$$\begin{cases} \Phi^2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \Phi^2(t, \zeta) = (R \cos(t), R \sin(t), \zeta), \end{cases} \quad (6.3.42)$$

$Fr(\Omega_1)$  è unione dei sostegni dei quattro cammini seguenti:

$$\begin{cases} \gamma^{11} : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{11}(t) = (t, z_1), \\ \gamma^{12} : [z_1, z_2] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{12}(t) = (\pi, t), \\ \gamma^{13} : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{13}(t) = (-t, z_2), \\ \gamma^{14} : [-z_2, -z_1] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{14}(t) = (0, -t). \end{cases} \quad (6.3.43)$$

Da (6.3.43), ricaviamo che  $\partial S_1$  è unione dei sostegni dei quattro cammini seguenti:

$$\begin{cases} \eta^{11} : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{11}(t) = (R \cos(t), R \sin(t), z_1), \\ \eta^{12} : [z_1, z_2] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{12}(t) = (-R, 0, t), \\ \eta^{13} : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{13}(t) = (R \cos(t), -R \sin(t), z_2), \\ \eta^{14} : [-z_2, -z_1] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{14}(t) = (R, 0, -t). \end{cases} \quad (6.3.44)$$

Analogamente,  $Fr(\Omega_2)$  è unione dei sostegni dei quattro cammini seguenti:

$$\begin{cases} \gamma^{21} : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{21}(t) = (t, z_1), \\ \gamma^{22} : [z_1, z_2] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{22}(t) = (2\pi, t), \\ \gamma^{23} : [-2\pi, -\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{23}(t) = (-t, z_2), \\ \gamma^{24} : [-z_2, -z_1] \rightarrow \mathbf{R}^2, & \gamma^{24}(t) = (\pi, -t). \end{cases} \quad (6.3.45)$$

Da (6.3.45), ricaviamo che  $\partial S_2$  è unione dei sostegni dei quattro cammini seguenti:

$$\begin{cases} \eta^{21} : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{21}(t) = (R \cos(t), R \sin(t), z_1), \\ \eta^{22} : [z_1, z_2] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{22}(t) = (R, 0, t), \\ \eta^{23} : [-2\pi, -\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{23}(t) = (R \cos(t), -R \sin(t), z_2), \\ \eta^{24} : [-z_2, -z_1] \rightarrow \mathbf{R}^3, & \eta^{24}(t) = (-R, 0, -t). \end{cases} \quad (6.3.46)$$

Si vede allora subito che  $S_1 \cap S_2 = \partial S_1 \cap \partial S_2$ . Quindi  $S$  è una superficie regolare a tratti.

In base all'esempio 6.3.6, l'area di  $S_1$  coincide con  $l(\gamma^1)(z_2 - z_1)$ , con

$$\begin{cases} \gamma^1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^1(t) = (R \cos(t), R \sin(t)), \end{cases}$$

mentre l'area di  $S_2$  coincide con  $l(\gamma^2)(z_2 - z_1)$ , con

$$\begin{cases} \gamma^2 : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma^2(t) = (R \cos(t), R \sin(t)), \end{cases}$$

Perciò, le aree di  $S_1$  e  $S_2$  valgono entrambe  $\pi R(z_2 - z_1)$ . Ne concludiamo che l'area di  $S$  è  $2\pi R(z_2 - z_1)$ .

**Esempio 6.3.11** Sia, per  $R > 0$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$ . Si ha che  $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$ , essendo

$$S_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_3 \geq \frac{R}{2}\}, \quad (6.3.47)$$

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_3 \leq -\frac{R}{2}\}, \quad (6.3.48)$$

$$S_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_2 \geq 0, -\frac{R}{2} \leq x_3 \leq \frac{R}{2}\}, \quad (6.3.49)$$

$$S_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_2 \leq 0, -\frac{R}{2} \leq x_3 \leq \frac{R}{2}\}. \quad (6.3.50)$$

$S_1$  e  $S_2$  sono superfici regolari con bordo semplici aperte del tipo descritto nell'esempio 6.3.1 (vedi anche l'esempio 6.3.4), con parametrizzazione (rispettivamente)  $(\Phi^1, \Omega_1)$  e  $(\Phi^2, \Omega_2)$ , essendo

$$\Phi^1(\theta, \phi) := (\theta, \phi, \sqrt{R^2 - \theta^2 - \phi^2}), \quad (6.3.51)$$

$$\Omega_1 := \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \theta^2 + \phi^2 \leq \frac{3R^2}{4}\}, \quad (6.3.52)$$

$$\Phi^2(\theta, \phi) := (\theta, \phi, -\sqrt{R^2 - \theta^2 - \phi^2}), \quad (6.3.53)$$

$$\Omega_2 := \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \theta^2 + \phi^2 \leq \frac{3R^2}{4}\}. \quad (6.3.54)$$

$S_3$  è una superficie regolare con bordo semplice aperta del tipo descritto nell'esempio 6.3.2, con parametrizzazione  $(\Phi^3, \Omega_3)$ , essendo

$$\Phi^3(\theta, \phi) := (R \sin(\theta) \cos(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\theta)), \quad (6.3.55)$$

$$\Omega_3 := ]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[ \times ]0, \pi[. \quad (6.3.56)$$

Infine, lasciamo al lettore la verifica del fatto che anche  $S_4$  è una superficie regolare con bordo semplice, aperta, e una sua parametrizzazione è  $(\Phi^4, \Omega_4)$ , con

$$\Phi^4(\theta, \phi) := (R \sin(\theta) \cos(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\theta)), \quad (6.3.57)$$

$$\Omega_4 := ]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[ \times ]\pi, 2\pi[. \quad (6.3.58)$$

Lasciamo ancora al lettore la verifica del fatto che, se  $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$ , allora  $S_{i_1} \cap S_{i_2} = \partial S_{i_1} \cap \partial S_{i_2}$ .

Dunque,  $S$  è una superficie regolare a tratti. Calcoliamone l'area.

Sulla base dei calcoli svolti nell'ambito dell'esempio 6.3.4, possiamo dire che l'area di  $S_1$  vale  $\pi R^2$ . Il lettore potrà verificare che anche l'area di  $S_2$  è  $\pi R^2$ . Sulla base dei calcoli svolti nell'ambito dell'esempio 6.3.5, sappiamo che l'area di  $S_3$  vale  $\pi R^2$ . Lasciamo ancora al lettore la verifica che anche l'area di  $S_4$  è  $\pi R^2$ . Ne concludiamo che l'area di  $S$  è  $4\pi R^2$ .

**Definizione 6.3.6** Siano  $S$  una superficie regolare con bordo semplice, aperta,  $x^0 \in S \setminus \partial S$ ,  $(\Phi, \Omega)$  una parametrizzazione di  $S$ . Sia  $x^0 = \Phi(\theta_0, \phi_0)$ , con  $(\theta_0, \phi_0) \in \Omega$ .

Chiamiamo **spazio tangente** a  $S$  in  $x^0$ , e indichiamo col simbolo  $T_{x^0}(S)$ , il sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  generato dai vettori  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0)$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0)$ .

Si potrebbe dimostrare che  $T_{x^0}(S)$  è indipendente dalla parametrizzazione.

Chiamiamo **spazio normale** a  $S$  in  $x^0$ , e indichiamo col simbolo  $N_{x^0}(S)$ , il complemento ortogonale di  $T_{x^0}(S)$ , vale a dire, l'insieme degli elementi di  $\mathbf{R}^3$  che sono normali a ogni elemento di  $T_{x^0}(S)$ .

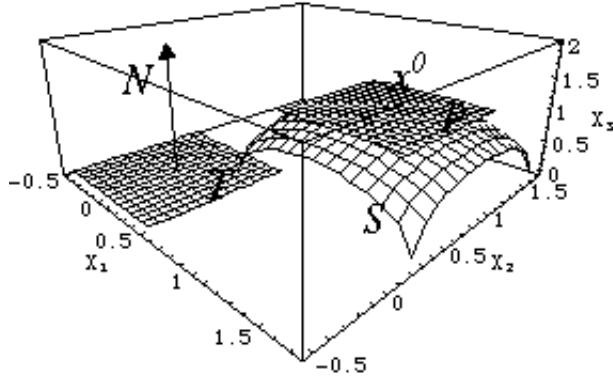


Figura 6.10

**Osservazione 6.3.6** Poiché  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0)$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0)$  sono linearmente indipendenti, lo spazio tangente  $T_{x^0}(S)$  ha dimensione 2. Di conseguenza, lo spazio normale  $N_{x^0}(S)$  ha dimensione  $3 - 2 = 1$ . In base al teorema 6.2.1(IV), il vettore  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0) \in N_{x^0}(S)$ . Il prodotto non è nullo ancora per la lineare indipendenza di  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0)$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0)$ . Pertanto,

$$N_{x^0}(S) = \{c \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0) : c \in \mathbf{R}\}. \quad (6.3.59)$$

**Definizione 6.3.7** Siano  $S$  una superficie regolare con bordo semplice, aperta,  $x^0 \in S \setminus \partial S$ . Chiamiamo **piano tangente** a  $S$  in  $x^0$  l'insieme  $\{x^0 + v : v \in T_{x^0}(S)\}$ .

Nella figura 6.10 vengono indicate con le lettere  $N$ ,  $P$  e  $T$  rispettivamente lo spazio normale, il piano tangente e lo spazio tangente alla superficie  $S$  nel punto  $x^0$ .

**Esempio 6.3.12** Consideriamo una superficie regolare con bordo semplice, aperta  $S$  del tipo descritto nell'esempio 6.3.3. Siano  $t_0 \in ]a, b[$ ,  $\zeta_0 \in ]z_1, z_2[$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \Phi(t_0, \zeta_0)$ . Allora

$$\begin{aligned} T_S(x^0) &= \{c_1(\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), 0) + c_2(0, 0, 1) : c_1 \in \mathbf{R}, c_2 \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(c_1\gamma'_1(t_0), c_1\gamma'_2(t_0), c_2) : c_1 \in \mathbf{R}, c_2 \in \mathbf{R}\}, \end{aligned} \quad (6.3.60)$$

$$N_S(x^0) = \{(c\gamma'_2(t_0), -c\gamma'_1(t_0), 0) : c \in \mathbf{R}\}. \quad (6.3.61)$$

Il piano tangente coincide con

$$\{(x_1^0 + c_1 \gamma'_1(t_0), x_2^0 + c_1 \gamma'_2(t_0), x_3^0 + c_2) : c_1 \in \mathbf{R}, c_2 \in \mathbf{R}\}.$$

**Definizione 6.3.8** Sia  $S$  una superficie regolare con bordo semplice, aperta. Chiamiamo **orientamento** di  $S$  una funzione  $\nu : S \rightarrow \mathbf{R}^3$  tale che:

- (I)  $\forall x \in S \setminus \partial S \quad \nu(x) \in N_x(S);$
- (II)  $\forall x \in S \quad \|\nu(x)\| = 1;$
- (III)  $\nu$  è continua.

**Teorema 6.3.2** Sia  $S$  una superficie regolare con bordo semplice, aperta. Allora  $S$  ammette esattamente due orientamenti.

*Dimostrazione parziale* Sia  $(\Phi, \Omega)$  una parametrizzazione di  $S$ . Poniamo  $\Psi := \Phi_{|\Omega}^{-1}$ . Allora si potrebbe dimostrare che  $\Psi$  è continua su  $S$  ( $\Psi$  è l'applicazione che fa corrispondere a un generico elemento  $x$  di  $S$  i parametri  $(\theta, \phi)$  tali che  $\Phi(\theta, \phi) = x$ ). Definiamo

$$\begin{cases} \nu : S \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \nu(x) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\Psi(x)) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\Psi(x))}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\Psi(x)) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\Psi(x)) \right\|}. \end{cases}$$

Allora, in base all'osservazione 6.3.6, utilizzando la continuità di  $\Psi$ , è facile verificare che  $\nu$  è un orientamento. Un secondo orientamento è l'applicazione  $x \rightarrow -\nu(x)$ .

Verifichiamo ora che non ne esistono altri. Siano  $\nu'$  un orientamento in  $S$ . Allora, poiché per ogni  $x \in S \setminus \partial S$   $N_x(S)$  ha dimensione 1,  $\nu'(x)$  coincide (punto per punto) con  $\nu(x)$  o con  $-\nu(x)$ . Verifichiamo che  $\nu'(x) = \nu(x) \quad \forall x \in S \setminus \partial S$ , oppure  $\nu'(x) = -\nu(x) \quad \forall x \in S \setminus \partial S$ .

Poniamo

$$\begin{cases} f : S \rightarrow \mathbf{R}, \\ f(x) = \|\nu(x) - \nu'(x)\|. \end{cases}$$

Allora  $f$  è continua e  $f(S) \subseteq \{0, 2\}$ . Poiché  $S$  è connesso per archi,  $f(S)$  è un intervallo non vuoto contenuto in  $\{0, 2\}$ . Ma gli unici intervalli non vuoti contenuti in  $\{0, 2\}$  sono  $\{0\}$  e  $\{2\}$ . Di conseguenza, si avrà  $f(S) = \{0\}$ , nel qual caso  $\nu' = \nu$ , oppure  $f(S) = \{2\}$ , nel qual caso  $\nu' = -\nu$ .  $\square$

**Definizione 6.3.9** Siano  $S$  una superficie regolare con bordo, semplice, aperta,  $\nu$  un orientamento di  $S$ ,  $(\Phi, \Omega)$  una parametrizzazione di  $S$ . Diremo

che  $(\Phi, \Omega)$  è **compatibile** con  $\nu$  se

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\Psi(x)) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\Psi(x))}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\Psi(x)) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\Psi(x)) \right\|} \quad \forall x \in S, \quad (6.3.62)$$

con  $\Psi := \Phi_{|\Omega}^{-1}$ .

Chiameremo **superficie orientata** una coppia ordinata  $(S, \nu)$ , ove  $S$  è una superficie regolare con bordo, semplice, aperta,  $\nu$  è un orientamento di  $S$ .

**Osservazione 6.3.7** In base al teorema 6.3.2, se una certa parametrizzazione non è compatibile con l'orientamento  $\nu$ , è necessariamente compatibile con l'orientamento  $-\nu$ .

**Esercizio 6.3.1** Verificare che i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^3$  sono superfici regolari con bordo semplici, aperte. Calcolarne poi l'area:

- (I)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = a, x_1^2 + x_2^2 \leq a^2\}$ ,  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ;
- (II)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 = 2x_1 x_2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ ;
- (III)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3^2 = 2x_1 x_2, 1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2, x_3 \geq 0\}$ ;
- (IV)  $\{(u \cos(v), u \sin(v), u^2) : 1 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq \pi\}$ ;
- (V)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2, x_2 \geq 0, 1 \leq x_3 \leq 2\}$ ;
- (VI)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 = 2ax_2, x_2 \leq a\}$ , con  $a \in \mathbf{R}^+$ .

**Esercizio 6.3.2** Sia  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$ . Verificare che  $S$  è una superficie regolare a tratti. Determinare poi, sulle singole parti della superficie, il versore normale esterno  $\nu$  alla palla di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio 1. Calcolare infine  $\int_S (x_1, x_2, 0) \cdot \nu(x) d\sigma$ .

**Esercizio 6.3.3** Sia  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0, z_1 \leq x_3 \leq z_2\}$ , con  $z_1, z_2$  reali,  $z_1 < z_2$ . Supponiamo che su  $S$  sia distribuita una massa, con densità superficiale costante unitaria. Si determini il momento di inerzia di tale massa rispetto all'asse  $x_3$ .

**Esercizio 6.3.4** Sia  $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq \frac{1}{2}\}$ . Supponiamo che su  $S$  sia distribuita una massa, con densità superficiale  $\mu(x_1, x_2, x_3) = x_3$ . Determinare il centro di massa.

## 6.4 Le formule di Gauss-Green in $\mathbf{R}^3$

**Definizione 6.4.1** Sia  $\Omega$  un aperto in  $\mathbf{R}^3$ . Diremo che  $\Omega$  è **regolare** se

- (I) è limitato e connesso per archi;
- (II)  $Fr(\Omega)$  è unione di una famiglia finita di superfici regolari con bordo semplici, aperte  $S_1, \dots, S_p$ ;
- (III) se  $1 \leq k < l \leq p$ ,  $S_k \cap S_l = \partial S_k \cap \partial S_l$ ;
- (IV) se  $x \in Fr(\Omega)$ , esiste  $r > 0$ , tale che, se  $0 < \rho < r$ ,  $B(x, \rho) \setminus Fr(\Omega)$  è unione di due aperti  $U_1$  e  $U_2$  connessi per archi, tali che  $U_1 \subseteq \Omega$ ,  $U_2 \cap \Omega = \emptyset$ .

**Osservazione 6.4.1** La condizione (III) della definizione 6.4.1 ha significato analogo alla condizione (III) della definizione 6.1.2 (vedi l'osservazione 6.1.2).

Veniamo ora a una versione tridimensionale del risultato riportato nell'osservazione 6.1.3, che riportiamo senza dimostrazione:

**Teorema 6.4.1** Siano  $\Omega$  un aperto regolare in  $\mathbf{R}^3$ ,  $S_1, \dots, S_p$  superfici regolari con bordo semplici, aperte come nella definizione 6.4.1. Allora, per ciascun  $j = 1, \dots, p$ , esiste unico un orientamento  $\nu^j$  su  $S_j$  tale che, per ogni  $x \in S_j \setminus \partial S_j$ , esiste  $\tau \in \mathbf{R}^+$  per cui si ha che, se  $s \in [0, \tau[$ ,  $x + s\nu^j(x) \notin \Omega$ .

Chiameremo questo orientamento  $\nu^j$  **versore normale esterno a  $\Omega$  in  $x$** .

**Osservazione 6.4.2** Come conseguenza di (6.3.62), prendendo  $\Phi^j$  parametrizzazione di  $S_j$  compatibile con  $\nu^j$ , si ha che  $\nu^j$  è prolungabile con continuità a  $S_j$ . Continueremo a chiamare  $\nu^j$  il prolungamento continuo a  $S_j$ .

Veniamo ora al principale risultato di questa sezione.

**Teorema 6.4.2 (Formule di Gauss-Green in  $\mathbf{R}^3$ )** Sia  $\Omega$  un aperto regolare in  $\mathbf{R}^3$ , con  $Fr(\Omega)$  unione delle superfici regolari con bordo semplici, aperte  $S_1, \dots, S_p$  come nella definizione 6.4.1. Siano  $\nu^1, \dots, \nu^p$  i versori normali esterni a  $\Omega$  rispettivamente su  $S_1, \dots, S_p$ . Sia, infine,  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ . Allora, per  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx = \sum_{j=1}^p \int_{S_j} f \nu_i^j d\sigma. \quad (6.4.1)$$

*Dimostrazione parziale* Verifichiamo la formula (6.1.14) nel caso  $i = 1$ , per l'aperto

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < R^2, z_1 < x_3 < z_2\}, \quad (6.4.2)$$

con  $R \in \mathbf{R}^+$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbf{R}$ ,  $z_1 < z_2$ .

Si ha

$$Fr(\Omega) = \bigcup_{j=1}^4 S_j, \quad (6.4.3)$$

con

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_2 \geq 0, z_1 \leq x_3 \leq z_2\}, \quad (6.4.4)$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_2 \leq 0, z_1 \leq x_3 \leq z_2\}, \quad (6.4.5)$$

$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_3 = z_1\}, \quad (6.4.6)$$

$$S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_3 = z_2\}. \quad (6.4.7)$$

Gli insiemi  $S_1, \dots, S_4$  sono tutti superfici regolari con bordo semplici aperte, che ammettono le parametrizzazioni  $(\Phi^1, \Omega_1), \dots, (\Phi^4, \Omega_4)$  seguenti:

$$\begin{cases} \Phi^1(t, \zeta) = (R \cos(t), R \sin(t), \zeta), \\ \Omega_1 = ]0, \pi[ \times ]z_1, z_2[, \end{cases} \quad (6.4.8)$$

$$\begin{cases} \Phi^2(t, \zeta) = (R \cos(t), R \sin(t), \zeta), \\ \Omega_2 = ]\pi, 2\pi[ \times ]z_1, z_2[, \end{cases} \quad (6.4.9)$$

$$\begin{cases} \Phi^3(\theta, \phi) = (\theta, \phi, z_1), \\ \Omega_3 = \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \theta^2 + \phi^2 < R^2\}, \end{cases} \quad (6.4.10)$$

$$\begin{cases} \Phi^4(\theta, \phi) = (\theta, \phi, z_2), \\ \Omega_4 = \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \theta^2 + \phi^2 < R^2\}. \end{cases} \quad (6.4.11)$$

Inoltre, non è difficile verificare che i versori normali esterni  $\nu^1, \dots, \nu^4$ , rispettivamente su  $S_1, \dots, S_4$ , ammettono le espressioni seguenti:

$$\nu^1(R \cos(t), R \sin(t), \zeta) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad (6.4.12)$$

$$\nu^2(R \cos(t), R \sin(t), \zeta) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad (6.4.13)$$

$$\nu^3(\theta, \phi, z_1) = (0, 0, -1), \quad (6.4.14)$$

$$\nu^4(\theta, \phi, z_2) = (0, 0, 1). \quad (6.4.15)$$

Per il teorema di Fubini, si ha allora, posto  $\Omega' := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ ,

$$\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx = \int_{z_1}^{z_2} \left( \int_{\Omega'} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right) dx_3.$$

$\Omega'$  è un aperto regolare in  $\mathbf{R}^2$ , con  $Fr(\Omega')$  coincidente col sostegno del cammino

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t)). \end{cases}$$

Ricordando le considerazioni dell'esempio 6.1.1, è facile verificare che, dato  $x' \in Fr(\Omega')$ , il versore normale esterno a  $\Omega'$   $\mu(x')$  coincide con  $\frac{x'}{R}$  (vedi (6.1.5)). Dunque, per le formule piane di Gauss-Green, si ha, per ogni  $x_3 \in [z_1, z_2]$ ,

$$\int_{\overline{\Omega'}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t), x_3) \cos(t) R dt,$$

da cui

$$\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx = \int_{z_1}^{z_2} \left( \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t), x_3) \cos(t) R dt \right) dx_3 \quad (6.4.16)$$

D'altra parte, in base a (6.4.8)-6.4.11) e a (6.4.12)-6.4.15), si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \int_{S_j} f \nu_1^j d\sigma &= \sum_{j=1}^2 \int_{S_j} f \nu_1^j d\sigma \\ &= \int_{[0,\pi] \times [z_1, z_2]} f(R \cos(t), R \sin(t), \zeta) \cos(t) R dt d\zeta \\ &\quad + \int_{[\pi, 2\pi] \times [z_1, z_2]} f(R \cos(t), R \sin(t), \zeta) \cos(t) R dt d\zeta, \end{aligned}$$

che coincide con l'espressione finale di (6.4.16).  $\square$

**Definizione 6.4.2** Siano  $U$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  su  $U$ . Chiameremo **divergenza** di  $F$  la funzione

$$\begin{cases} \operatorname{div}(F) : U \rightarrow \mathbf{R}, \\ \operatorname{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x). \end{cases}$$

Se  $(S, \nu)$  è una superficie orientata, con  $S \subseteq U$ , chiamiamo **flusso** di  $F$  attraverso  $(S, \nu)$  il valore dell'integrale

$$\int_S F(x) \cdot \nu(x) d\sigma.$$

**Osservazione 6.4.3** Per indicare la divergenza di  $F$ , si usa anche la notazione  $\nabla \cdot F$ . Formalmente,  $\nabla$  può essere pensato come il vettore

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (6.4.17)$$

e la notazione con il prodotto scalare è ispirata da tale identificazione.

Inoltre, se  $(\Phi, \Omega)$  è una parametrizzazione di  $S$  compatibile con l'orientamento  $\nu$ , il flusso del campo vettoriale  $F$  attraverso  $(S, \nu)$  coincide con

$$\int_{\overline{\Omega}} F(\Phi(\theta, \phi)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right) d\theta d\phi.$$

La seguente semplice conseguenza delle formule di Gauss-Green è di vasta applicazione. Si osservi che il secondo membro di (6.4.18) rappresenta il flusso totale verso l'esterno attraverso  $Fr(\Omega)$  del campo  $F$ .

**Corollario 6.4.1** (Teorema della divergenza) Siano  $\Omega$  un aperto regolare in  $\mathbf{R}^3$ , con  $Fr(\Omega)$  unione delle superfici regolari con bordo semplici, aperte  $S_1, \dots, S_p$  come nella definizione 6.4.1,  $U$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^3$ , con  $\overline{\Omega} \subseteq U$ ,  $F$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  su  $U$ . Siano infine  $\nu^1, \dots, \nu^p$  i versori normali esterni a  $\Omega$  rispettivamente su  $S_1, \dots, S_p$ . Allora

$$\int_{\overline{\Omega}} \operatorname{div}(F)(x) dx = \sum_{j=1}^p \int_{S_j} F(x) \cdot \nu^j(x) d\sigma. \quad (6.4.18)$$

*Dimostrazione* Applicando il teorema 6.4.2, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}} \operatorname{div}(F)(x) dx &= \sum_{i=1}^3 \int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^p \int_{S_j} F_i(x) \nu_i^j(x) d\sigma \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^3 \int_{S_j} F_i(x) \nu_i^j(x) d\sigma \\ &= \sum_{j=1}^p \int_{S_j} F(x) \cdot \nu^j(x) d\sigma. \end{aligned}$$

**Esercizio 6.4.1** Data  $f \in C^1(\mathbf{R}^3)$ , trasformare  $\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) in una somma di integrali di superficie, e poi in una somma di integrali bidimensionali, per gli  $\Omega$  seguenti:

- (I)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 25, x_3 > 3\};$
- (II)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 25, x_3 < 3\};$
- (III)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 > 0, x_3 < x_1 + x_2 + 4\};$
- (IV)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_1 + x_2 + x_3 < 1\};$
- (V)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < (x_3 - 3)^2, 0 < x_3 < 2\}.$

## 6.5 La formula di Stokes

In questa sezione presentiamo una formula importante, molto utilizzata in fisica, in particolare nell'elettromagnetismo e nella fluidodinamica, la così detta formula di Stokes.

Cominciamo con alcune premesse.

**Definizione 6.5.1** Siano  $U$  un aperto连通的 per archi in  $\mathbf{R}^3$ ,  $F$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  su  $U$ . Chiamiamo **rotore** di  $F$ , e indichiamo col simbolo  $\text{rot}(F)$  oppure  $\nabla \times F$ , il campo vettoriale

$$\text{rot}(F)(x) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right).$$

$\text{rot}(F)$  si può anche ottenere sviluppando il determinante della matrice simbolica

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix}. \quad (6.5.1)$$

**Teorema 6.5.1** (Formula di Stokes) Siano  $U$  un aperto连通的 per archi in  $\mathbf{R}^3$ ,  $(S, \nu)$  una superficie orientata con  $S \subseteq U$ ,  $F$  un campo vettoriale in  $U$  di classe  $C^1$ . Sia poi  $(\Phi, \Omega)$  una parametrizzazione di  $S$  compatibile con l'orientamento  $\nu$ . Siano, infine,  $\gamma^1, \dots, \gamma^p$  cammini regolari in  $\mathbf{R}^2$  che orientano positivamente  $\text{Fr}(\Omega)$  (si veda la definizione 6.1.4). Per  $j = 1, \dots, p$ , consideriamo i cammini regolari  $\eta^j := \Phi \circ \gamma^j$ . Allora

$$\int_S \text{rot}(F)(x) \cdot \nu(x) d\sigma = \sum_{j=1}^p \int F \cdot d\eta^j. \quad (6.5.2)$$

*Dimostrazione parziale* Dimostriamo la formula nel caso di

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = f(x_1, x_2)\}, \quad (6.5.3)$$

con  $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ ,  $F$  della forma

$$F(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, g(x_1, x_2, x_3)), \quad (6.5.4)$$

con  $g \in C^1(\mathbf{R}^3)$ , e l'orientamento in  $S$

$$\begin{aligned} \nu(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2), 1 \right). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Si tratta di un caso particolare della classe di superfici trattata nell'esempio 6.3.1. Posti

$$\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad (6.5.6)$$

e

$$\Phi(x_1, x_2) := (x_1, x_2, f(x_1, x_2)), \quad (6.5.7)$$

si ha, in base a (6.3.3), che  $(\Phi, \Omega)$  è compatibile con l'orientamento  $\nu$ . La frontiera  $Fr(\Omega)$  è positivamente orientata dal cammino

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)). \end{cases} \quad (6.5.8)$$

Si ha inoltre, posto  $\eta := \Phi \circ \gamma$ ,

$$\begin{cases} \eta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta(t) = (\cos(t), \sin(t), f(\cos(t), \sin(t))). \end{cases} \quad (6.5.9)$$

Poiché

$$rot(F)(x) = (D_2g(x), -D_1g(x), 0) \quad (x \in \mathbf{R}^3),$$

si ha, utilizzando (6.3.3), per  $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} &rot(F)(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Poniamo

$$h(x_1, x_2) := g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)). \quad (6.5.10)$$

Allora, per la "chain rule",

$$D_1 h(x_1, x_2) = D_1 g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + D_3 g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2),$$

$$D_2 h(x_1, x_2) = D_2 g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + D_3 g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2),$$

da cui

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ &= [D_1 h(x_1, x_2) - D_3 g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)] \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ &\quad - [D_2 h(x_1, x_2) - D_3 g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)] \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ &= D_1 h(x_1, x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - D_2 h(x_1, x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ &= D_1(h \frac{\partial f}{\partial x_2})(x_1, x_2) - h(x_1, x_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ &\quad - D_2(h \frac{\partial f}{\partial x_1})(x_1, x_2) + h(x_1, x_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ &= D_1(h \frac{\partial f}{\partial x_2})(x_1, x_2) - D_2(h \frac{\partial f}{\partial x_1})(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Quindi, applicando le formule di Gauss-Green nel piano e tenendo conto che il versore normale esterno a  $\Omega$  in  $(x_1, x_2)$  è  $(x_1, x_2)$  stesso (vedi l'esempio 6.1.1), otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_S \text{rot}(F)(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma \\ &= \int_{\bar{\Omega}} [D_1(h \frac{\partial f}{\partial x_2})(x_1, x_2) - D_2(h \frac{\partial f}{\partial x_1})(x_1, x_2)] dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\gamma} [h(x_1, x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) x_1 - h(x_1, x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) x_2] \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} h(\cos(t), \sin(t)) [\frac{\partial f}{\partial x_2}(\cos(t), \sin(t)) \cos(t) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\cos(t), \sin(t)) \sin(t)] \, dt \end{aligned}$$

Figura 6.11

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} g(\cos(t), \sin(t), f(\cos(t), \sin(t))) \eta'_3(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} F(\eta(t)) \cdot \eta'(t) dt \\
&= \int F \cdot d\eta.
\end{aligned}$$

□

**Osservazione 6.5.1** Il primo membro di (6.5.2) rappresenta il flusso del rotore attraverso la superficie orientata  $(S, \nu)$ . Per quanto riguarda il secondo membro, l'unione dei sostegni dei cammini  $\eta^1, \dots, \eta^p$  costituisce il bordo di  $S$ . Tale secondo membro viene anche chiamato **circuitazione** del campo  $F$  lungo il bordo nel verso dei cammini  $\eta^1, \dots, \eta^p$ . Naturalmente, la formula (6.5.2) continua a essere valida se si sostituiscono a  $\eta^1, \dots, \eta^p$  dei cammini  $C^1$  positivamente equivalenti. In parole povere, affinché la formula sia valida, le varie parti di  $\partial S$  devono essere orientate correttamente. Un criterio euristico per stabilire se gli orientamenti sono corretti, analogo a quello indicato nell'osservazione 6.1.4, è il seguente: si immagini un osservatore che cammina con i piedi sulla superficie  $S$ , con il capo orientato nella direzione  $\nu$ . Si immagini inoltre che questo osservatore si muova nel verso crescente del parametro  $t$  (appartenente al dominio di  $\eta^j$ , con  $1 \leq j \leq p$ ), lungo una certa porzione del bordo. Allora tale bordo deve essere localmente a destra dell'osservatore. Si veda in proposito la figura 6.11.

**Osservazione 6.5.2** La formula di Stokes può essere applicata anche a una superficie regolare a tratti, sommando i flussi del rotore attraverso le superfici regolari con bordo semplici, aperte la cui unione dà  $S$  (si veda la definizione 6.3.5). Per illustrare questo fatto, invece di dare un risultato generale, presentiamo un esempio.

Sia  $F \in C^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$ . Poniamo

$$\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\}. \quad (6.5.11)$$

$\Omega$  è un aperto regolare in  $\mathbf{R}^3$ .  $Fr(\Omega)$  è unione delle quattro superfici regolari con bordo  $S_1, S_2, S_3, S_4$  seguenti:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 1\}, \quad (6.5.12)$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \leq 0, 0 \leq x_3 \leq 1\}, \quad (6.5.13)$$

$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}, \quad (6.5.14)$$

$$S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 1\}. \quad (6.5.15)$$

Su ciascuna di esse, abbiamo (rispettivamente) i seguenti versori normali esterni  $\nu^1, \dots, \nu^4$ :

$$\begin{aligned} \nu^1(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, 0) && \text{su } S_1, \\ \nu^2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, 0) && \text{su } S_2, \\ \nu^3(x_1, x_2, x_3) &= (0, 0, -1) && \text{su } S_3, \\ \nu^4(x_1, x_2, x_3) &= (0, 0, 1) && \text{su } S_4. \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

Vogliamo calcolare il flusso totale esterno di  $rot(F)$  attraverso la frontiera di  $\Omega$ , vale a dire,  $\sum_{j=1}^4 \int_{S_j} rot(F)(x) \cdot \nu^j(x) \, d\sigma$ .

Cominciamo col calcolare  $\int_{S_1} rot(F)(x) \cdot \nu^1(x) \, d\sigma$ . La parametrizzazione (6.3.39)-(6.3.40), con  $R = 1, z_1 = 0, z_2 = 1$ , è compatibile con l'orientamento  $\nu^1$ . Dunque, per la formula di Stokes,

$$\int_{S_1} rot(F)(x) \cdot \nu^1(x) \, d\sigma = \sum_{k=1}^4 \int F \cdot d\eta^{1k},$$

essendo

$$\begin{cases} \eta^{11} : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{11}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \end{cases} \quad (6.5.17)$$

$$\begin{cases} \eta^{12} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{12}(t) = (-1, 0, t), \end{cases} \quad (6.5.18)$$

$$\begin{cases} \eta^{13} : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{13}(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1), \end{cases} \quad (6.5.19)$$

$$\begin{cases} \eta^{14} : [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{14}(t) = (1, 0, -t). \end{cases} \quad (6.5.20)$$

Calcoliamo  $\int_{S_2} \operatorname{rot}(F)(x) \cdot \nu^2(x) d\sigma$ . La parametrizzazione (6.3.41)-(6.3.42), con  $R = 1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ , è compatibile con l'orientamento  $\nu^2$ . Dunque, per la formula di Stokes,

$$\int_{S_2} \operatorname{rot}(F)(x) \cdot \nu^2(x) d\sigma = \sum_{k=1}^4 \int F \cdot d\eta^{2k},$$

essendo

$$\begin{cases} \eta^{21} : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{21}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \end{cases} \quad (6.5.21)$$

$$\begin{cases} \eta^{22} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{22}(t) = (1, 0, t), \end{cases} \quad (6.5.22)$$

$$\begin{cases} \eta^{23} : [-2\pi, -\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{23}(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1), \end{cases} \quad (6.5.23)$$

$$\begin{cases} \eta^{24} : [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^{24}(t) = (-1, 0, -t). \end{cases} \quad (6.5.24)$$

Calcoliamo  $\int_{S_3} \operatorname{rot}(F)(x) \cdot \nu^3(x) d\sigma$ .  $S_3$  ammette la parametrizzazione  $(\Phi^3, \Omega_3)$ , con

$$\Phi^3(\theta, \phi) = (\theta, \phi, 0), \quad (6.5.25)$$

$$\Omega_3 = \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \theta^2 + \phi^2 < 1\}. \quad (6.5.26)$$

Tale parametrizzazione non è compatibile con l'orientamento  $\nu^3$ , bensì con l'orientamento  $-\nu^3$ . Dunque,

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \text{rot}(F)(x) \cdot \nu^3(x) \ d\sigma &= - \int_{S_3} \text{rot}(F)(x) \cdot (-\nu^3(x)) \ d\sigma \\ &= - \int F \cdot d\eta^3, \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} \eta^3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^3(t) = (\cos(t), \sin(t), 0). \end{cases} \quad (6.5.27)$$

Calcoliamo, infine,  $\int_{S_4} \text{rot}(F)(x) \cdot \nu^4(x) \ d\sigma$ .  $S_4$  ammette la parametrizzazione  $(\Phi^4, \Omega_4)$ , con

$$\Phi^4(\theta, \phi) = (\theta, \phi, 1), \quad (6.5.28)$$

$$\Omega_4 = \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 : \theta^2 + \phi^2 < 1\}. \quad (6.5.29)$$

Tale parametrizzazione è compatibile con l'orientamento  $\nu^4$ . Dunque,

$$\int_{S_4} \text{rot}(F)(x) \cdot \nu^4(x) \ d\sigma = \int F \cdot d\eta^4,$$

con

$$\begin{cases} \eta^4 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \\ \eta^4(t) = (\cos(t), \sin(t), 1). \end{cases} \quad (6.5.30)$$

Osserviamo ora che

$$\int F \cdot d\eta^{11} + \int F \cdot d\eta^{21} = \int F \cdot d\eta^3, \quad (6.5.31)$$

$$\int F \cdot d\eta^{12} = - \int F \cdot d\eta^{24}, \quad (6.5.32)$$

$$\int F \cdot d\eta^{13} + \int F \cdot d\eta^{23} = - \int F \cdot d\eta^4, \quad (6.5.33)$$

$$\int F \cdot d\eta^{14} = - \int F \cdot d\eta^{22}, \quad (6.5.34)$$

Dunque,

$$\sum_{j=1}^4 \int_{S_j} \text{rot}(F)(x) \cdot \nu^j(x) \ d\sigma = 0$$

**Esercizio 6.5.1** Siano  $U$  un aperto connesso per archi in  $\mathbf{R}^3$  tale che  $\{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\| \leq 1\} \subseteq U$ ,  $F \in C^1(U; \mathbf{R}^3)$ ,  $S := \{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\| = 1\}$ . Verificare che

$$\int_S \text{rot}(F)(x) \cdot x \ d\sigma = 0.$$

**Esercizio 6.5.2** Dati  $f \in C^1(\mathbf{R}^3)$ ,  $S$  superficie regolare con bordo, semplice, aperta,  $\nu$  orientamento su  $S$ , trasformare  $\int_S \operatorname{rot}(F) \cdot \nu(x) d\sigma$  in una somma di integrali curvilinei, e poi in una somma di integrali unidimensionali, nei seguenti casi:

- (I)  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25, x_2 \geq 0, -1 \leq x_3 \leq 2\}$ ,  
 $\nu(2, 1, 0) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ ;
- (II)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25, x_3 \leq -3\}$ ,  $\nu(0, 0, -5) = (0, 0, 1)$ ;
- (III)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0, x_3 \leq x_1 + x_2 + 4\}$ ,  
 $\nu(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ;
- (IV)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ ,  
 $\nu(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ;
- (V)  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = (x_3 - 3)^2, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq 2\}$ ,  
 $\nu(0, 2, 1) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

252 INTEGRALI DI SUPERFICIE, FORMULE DI GAUSS-GREEN ECC.

# Indice

<b>1 Funzioni di più variabili reali</b>	<b>3</b>
1.1 $\mathbf{R}^n$ e la metrica euclidea . . . . .	3
1.2 Insiemi aperti e chiusi, interno, frontiera . . . . .	10
1.3 Limiti . . . . .	15
1.4 Funzioni continue . . . . .	20
1.5 Una generalizzazione del teorema di Bolzano . . . . .	24
<b>2 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali</b>	<b>31</b>
2.1 Derivate rispetto a un vettore e derivate parziali . . . . .	31
2.2 Funzioni di classe $C^1$ . . . . .	35
2.3 Derivate di ordine superiore . . . . .	39
2.4 La formula di Taylor . . . . .	42
2.5 Estremanti relativi, punti critici, punti di sella . . . . .	47
2.6 Derivate di funzioni a valori vettoriali . . . . .	56
2.7 Derivate di funzioni composte ("chain rule") . . . . .	60
2.8 Teorema di Dini, invertibilità locale, moltiplicatori di Lagrange	64
<b>3 Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>81</b>
3.1 Generalità . . . . .	81
3.2 Sistemi del primo ordine . . . . .	84
3.3 Sistemi di ordine superiore . . . . .	91
3.4 Alcune classi di equazioni differenziali risolubili elementarmente	94
3.5 Equazioni differenziali ordinarie lineari . . . . .	108
<b>4 Misura e integrazione in <math>\mathbf{R}^n</math></b>	<b>125</b>
4.1 Aritmetica di $[0, +\infty]$ . . . . .	125
4.2 Intervalli $n$ -dimensionali e loro volumi . . . . .	127

*254 INTEGRALI DI SUPERFICIE, FORMULE DI GAUSS-GREEN ECC.*

4.3	Misura esterna . . . . .	129
4.4	Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue . . . . .	133
4.5	Funzioni semplici . . . . .	138
4.6	Funzioni misurabili . . . . .	142
4.7	Funzioni sommabili e loro integrazione . . . . .	148
4.8	Il caso unidimensionale. Integrali generalizzati . . . . .	152
4.9	I teoremi di riduzione . . . . .	158
4.10	Il teorema di cambiamento di variabile . . . . .	168
<b>5</b>	<b>Integrali curvilinei e campi vettoriali</b>	<b>183</b>
5.1	Cammini e loro lunghezza . . . . .	183
5.2	Integrali curvilinei . . . . .	188
5.3	Campi vettoriali e loro potenziali . . . . .	196
<b>6</b>	<b>Integrali di superficie, formule di Gauss-Green e di Stokes</b>	<b>211</b>
6.1	Le formule di Gauss-Green nel piano . . . . .	211
6.2	Il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$ . . . . .	217
6.3	Superfici, area e integrali di superficie . . . . .	221
6.4	Le formule di Gauss-Green in $\mathbf{R}^3$ . . . . .	240
6.5	La formula di Stokes . . . . .	244