A Few Knapsacks

Qingchuan Zhang
qingczha@microsoft.com

Microsoft

November 30, 2020

有 N 个物品和 V 元预算。第 i 个物品的成本和收益分别是 c_i 和 v_i。每个物品最多能拿 1 个。

计算总成本不超过预算下的最大收益。

- $N \leq 100$
- $c_i \leq V \leq 10000$

1. 暴力搜索 $O(2^n)$
2. 我们真的关心之前具体选了什么吗？
3. 两种选择方案如果成本相同，只需要记录收益高的那种。
4. 用 $\mathrm{dp}[i][j]$ 表示前 i 种物品一共用了 j 块钱得到的最大收益。
5. 考虑拿与不拿：$\mathrm{dp}[i][j] = \max(\mathrm{dp}[i-1][j-c_i] + v_i, \mathrm{dp}[i-1][j])$
6. 压缩空间

有 N 个物品和 V 元预算。第 i 个物品的成本和收益分别是 c_i 和 v_i。每个物品最多能拿 ∞ 个。

计算总成本不超过预算下的最大收益。

- $N \leq 100$
- $c_i \leq V \leq 50000$

1. 和上题类似，用 $\mathrm{dp}[i][j]$ 表示前 i 种物品一共用了 j 块钱得到的最大收益。
2. 考虑拿与不拿：$\mathrm{dp}[i][j] = \max(\mathrm{dp}[i][j - c_i] + v_i, \mathrm{dp}[i-1][j])$
3. 压缩空间

有 N 个物品和 V 元预算。第 i 个物品的成本和收益分别是 c_i 和 v_i。每个物品最多能拿 m_i 个。

计算总成本不超过预算下的最大收益。

- $N \leq 100$
- $c_i \leq V \leq 50000$
- $m_i \leq 200$

1. 对于每个物品做 m_i 次 01 背包，然而太慢。
2. 拆分成 $\{1, 2, 4, \cdots, m_i - (1 + 2 + 4 + \cdots)\}$
3. 可以证明能恰好凑出 $[0, m_i]$ 中所有的数字。
4. 转化为 $\log(m_i)$ 次 01 背包。

1. 首先我们假设成本 $c_i = 1$。
2. 枚举买了 k 个，那么 $\mathrm{dp}[i][j] = \max_{0 \le k \le m_i}(\mathrm{dp}[i-1][j-k] + k \times v_i)$
3. $\mathrm{dp}[i][j-a] + av_i \ge \mathrm{dp}[i][j-b] + bv_i$
4. $\iff \mathrm{dp}[i][j-a] - \mathrm{dp}[i][j-b] \ge (b-a)v_i$
5. 于是两个决策谁更优只取决于差值
6. $c_i \ne 1$ 时只需要按照 $j \bmod c_i$ 分组即可。

给一个正整数集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$k$ 次询问，每次需要判断 b_i 是否能通过 A 中的数凑出来，每个数可以使用任意多次。

- $n \leq 5000$
- $a_i \leq 50000$
- $b_i \leq 10^9$

1. 暴力跑完全背包，$O(n \times 10^9)$
2. 注意到如果 x 可以凑出来，那么 $x + a_1$ 也可以凑出来。
3. 对于 $r = 0, 1, \ldots, a_1 - 1$ ，求出最小能凑出来的数 x_r 满足 $x_r \bmod a_1 = r$
4. x_r 满足 $x_{(r+a_i) \bmod a_1} \leq x_r + a_i$，最短路即可。

有 N 个物品和 V 元预算。第 i 个物品的成本和收益分别是 c_i 和 v_i。每个物品最多能拿 1 个。

计算总成本为 $1, 2, \ldots, V$ 时的最大收益。

- $N \leq 1000000$
- $V \leq 100000$
- $1 \leq c_i \leq 300$

Jewel Thief

题解

1. 把物品按照价格分组，最多有 300 组。
2. 对于相同价格的物品，肯定优先拿价值高的，所以按照价值从大到小排序。
3. 与单调队列解多重背包一样，我们假设价格为 1。
4. 由于按照价值排序，前缀和具有凸性，所以存在决策单调性。
5. 对于每个点，二分出第一次成为最优决策的位置即可。（也可以用分治的方法做）