绝密 ★ 启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 I 卷）

数学参考答案与解析

本参考答案与解析共 7 页，19 小题，满分 150 分.

注意事项:

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|-5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

【答案】A.

【解析】$-5<x^3<5\Rightarrow -5^{\frac{1}{3}}<x<5^{\frac{1}{3}}$，而 $1<5^{\frac{1}{3}}<2$，因此 $A\cap B=\{-1,0\}$.
故答案为 A.

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

【答案】C.

【解析】两边同时减 1 得：$\dfrac{1}{z-1}=\mathrm{i}$, 进而 $z=1+\dfrac{1}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.
故答案为 C.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$. 若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】D.

【解析】即 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=0$. 代入得 $4+x(x-4)=0$, 即 $x=2$.
故答案为 D.

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

【答案】A.

【解析】通分 $\sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$. 积化和差 $\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) = 2\cdot\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$. 即 $\cos(\alpha-\beta) = -3\cos(\alpha+\beta) = -3m$.
故选 A.

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且他们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

【答案】B.

【解析】设二者底面半径为 r，由侧面积相等有 $\pi r\sqrt{r^2+3} = 2\pi r\cdot\sqrt{3}$，解得 $r=3$. 故 $V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\times 9 = 3\sqrt{3}\pi$.
故答案为 B.

6. 已知函数为 $f(x) = \begin{cases} -x^2-2ax-a, & x<0 \\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

【答案】B.

【解析】$x\geqslant 0$ 时，$f'(x) = \mathrm{e}^x+\dfrac{1}{1+x} > 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 而 $y = -x^2-2zx-a$ 的对称轴为直线 $x=-a$, 故由 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增可知 $-a\geqslant 0 \Rightarrow a\leqslant 0$. 在 $x=0$ 时应有 $-x^2-2ax-a\leqslant \mathrm{e}^x+\ln(x+1)$，解得 $a\geqslant -1$，故 $-1\leqslant a\leqslant 0$.
故答案为 B.

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】C.

【解析】五点作图法画图易得应有 6 个交点.
故答案为 C.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x) > f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$　　C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

【答案】B.

【解析】$f(1)=1, f(2)=2 \Rightarrow f(3)>3 \Rightarrow f(4)>5 \Rightarrow f(5)>8 \Rightarrow f(6)>13 \Rightarrow \cdots \Rightarrow f(11)>143 \Rightarrow f(12)>232 \Rightarrow f(13)>300 \Rightarrow f(14)>500 \Rightarrow f(15)>800 \Rightarrow f(16)>1000 \Rightarrow \cdots \Rightarrow f(20)>1000$
故答案为 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值为 $\bar{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$. 已知该种植区以往的亩收入 x 服从正态分布 $M(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x},s^2)$，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$　　B. $P(X>2)<0.5$　　C. $P(Y>2)>0.5$　　D. $P(Y>2)<0.8$

【答案】BC.

【解析】由所给材料知两正态分布均有 $\sigma=0.1$ 及正态分布的对称性得：
$P(X>2)<P(X>1.9)=1-P(X<1.9)=1-0.8413<0.2$, A 错误；$P(X>2)<P(X>1.8)=0.5$, B 正确；
$P(Y>2)>P(Y>2.1)=0.5$, C 正确；
$P(Y>2)=P(Y<2.2)=0.8413>0.8$, D 错误.
故答案为 BC.

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$　　D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

【答案】ACD.

【解析】计算知 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$. 故 $x\in(1,3)$ 时 $f(x)$ 单调减, 其余部分单调增. 由此知 $x=3$ 为 $f(x)$ 极小值点，A 正确；
由上知 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)$ 单调增, 又此时 $x>x^2$, 故 $f(x)>f(x^2)$, B 错误；
此时 $2x-1\in(1,3)$, 故 $f(2x-1)\in(f(3),f(1))=(-4,0)$, C 正确；
由 $f(2-x)=(x-1)^2(-x-2)$, 故 $f(2-x)-f(x)=2(1-x)^3>0$, D 正确.
故答案为 ACD.

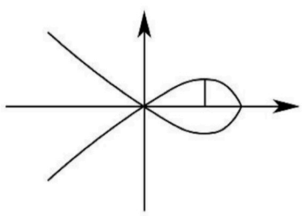
11. 造型 $\propto$ 可以看作图中的曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2；到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则

A. $a=-2$

B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\leqslant\dfrac{4}{x_0+2}$



【答案】ABD.

【解析】由原点 O 在曲线 C 上且 $|OF|=2$ 知 O 到直线 $x=a$ 距离为 2, 由 $a<0$ 知 $a=-2$, A 正确；
由 $x>-2$ 知 C 上点满足 $(x+2)\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$, 代 $(2\sqrt{2},0)$ 知 B 正确；
解出 $y^2=\dfrac{16}{(x+2)^2}-(x-2)^2$, 将左边设为 $f(x)$, 则 $f'(2)=-0.5<0$. 又有 $f(2)=1$, 故存

$x_0 \in (0,1)$ 使 $f(x_0) > 1$. 此时 $y > 1$ 且在第一象限, C 错误;
又 $y^2 = \dfrac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2 < \dfrac{16}{(x+2)^2}$, 故 $y_0 < \dfrac{4}{(x_0+2)}$, D 正确.
故答案为 ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2，过 F_2 做平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点，若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$，则 C 的离心率为__▲__..

【答案】$\dfrac{3}{2}$.

【解析】根据对称性 $|F_2A| = \dfrac{|AB|}{2} = 5$，则 $2a = |F_1A| - |F_2A| = 8$，得到 $a = 4$. 另外根据勾股定理 $2c = |F_1F_2| = 12$，得到 $c = 6$，所以离心率 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$.

13. 若曲线 $y = \mathrm{e}^x + x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线,则 $a =$__▲__..

【答案】$\ln 2$.

【解析】设曲线分别为 y_1, y_2，那么 $y_1' = \mathrm{e}^x + 1$，得到切线方程 $y - 1 = 2x$，根据 $y_2' = \dfrac{1}{x+1}$ 得到切点横坐标为 $-\dfrac{1}{2}$，代入 y_2 得到 $a = \ln 2$.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 $1,3,5,7$，乙的卡片上分别标有数字 $2,4,6,8$. 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）. 则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为__▲__..

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解析】. 由对称性，不妨固定乙出卡片顺序依次为 $(2,4,6,8)$, 为了简便, 设甲依次出 $(a,b,c,d), \{a,b,c,d\} \in \{1,3,5,7\}$. 首先注意到 8 是最大的, 故甲不可能得四分. 若甲得三分, 则从 c 到 a 均要求得分, 比较得必有 $c=7, b=5, a=3, d=1$ 共一种情况；若甲得两分, 则讨论在何处得分：若在 b,c 处, 则同样 $c=7, b=5$, 进而 $a=1, d=3$, 共一种；若在 a,c 处，则必有 $c=7, a\neq 1, b\neq 5$, 在 $b=1$ 时有全部两种, 在 $d=1$ 时仅一种, 共三种；若在 a,b 处, 则 $b \in \{5,7\}, a \neq 1, c \neq 7$. 当 $a=5$ 时, 由上述限制, $c=1$ 时有两种, $d=1$ 时仅一种；当 $a=7$ 时, a,c,d 全排列六种中仅 $a=1$ 的两种不行, 故有四种, 此情形共八种. 故共有 1+3+8=12 种, 又总数为 $4! = 24$, 故所求为 $1 - \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin C = \sqrt{2}\cos B$, $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

（1）求 B;

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

【解析】

（1）根据余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=\sqrt{2}ab$，那么 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又因为 $C\in(0,\pi)$，得到 $C=\dfrac{\pi}{4}$，此时 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，得到 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）根据正弦定理 $b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$，并且 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，那么 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=3+\sqrt{3}$，解得 $c=2\sqrt{2}$.

16.（15 分）

已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点.

（1）求 C 的离心率；

（2）若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 l 的方程.

【解析】

（1）直接代入后解方程，得到 $a^2=12,b^2=9,c^2=3$，所以 $e^2=\dfrac{1}{4}$，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$.

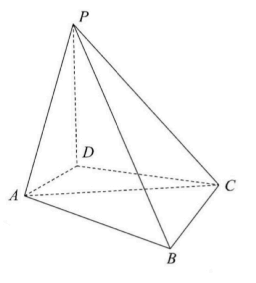
（2）设 $B(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{AB}=\left(x_0-3,y_0-\dfrac{3}{2}\right),\overrightarrow{AP}=\left(3,-\dfrac{3}{2}\right)$. 得到 $9=S=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{3}{2}(x_0-3)-3\left(y_0-\dfrac{3}{2}\right)\right|$,或者 $x_0+2y_0=-6$,与椭圆方程联立,得到 $B_1(-3,-15),B_2(0,-3)$，对应的直线方程 $y=\dfrac{1}{2}x$ 或者 $y=\dfrac{3}{2}x-3$.

17.（15 分）

如图，四棱锥 $P-ANCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.

（1）若 $AD\perp AB$，证明：$AD\parallel$ 平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.



【解析】

（1）由 $PA\perp$ 面 $ABCD$ 知 $PA\perp AD$, 又 $AD\perp PB$, 故 $AD\perp$ 面 PAB. 故 $AD\perp AB$, 又由勾股定理知 $AB\perp BC$, 故 $AD//BC$, 进而 $AD//$ 面 PBC.

（2）由 $PA\perp$ 面 $ABCD$. $PA\perp AC$, $PC=2\sqrt{2}$, 设 $AD=t$, 则 $PD=\sqrt{4+t^2}$, $CD=\sqrt{4-t^2}$, 由勾股定理知 $PD\perp CD$. 则 $S_{\triangle PCD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{16-t^4}$, $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{4-t^2}$,

设 A 到 PCD 距离为 h. 由等体积, $S_{\triangle PCD}\cdot h=S_{\triangle ACD}\cdot PA$. 代入解出 $h=\dfrac{2t}{\sqrt{4+t^2}}$. 考虑 A 向 CP 作垂线 AM, 二面角设为 θ 则 $h=AM\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. 由此解出 $t=\sqrt{3}$.

18.（17 分）

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant 0$，求 a 的最小值;

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

【解析】

函数定义域 $(0,2)$.

(1) 当 $b=0$ 时, $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a=\dfrac{2}{x(2-x)}+a\geqslant 0$ 恒成立. 令 $x=1$ 得 $a\geqslant -2$. 当 $a=-2$ 时, $f'(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{x(2-x)}\geqslant 0$, 从而 a 的最小值为 -2.

(2) $f(x)+f(2-x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3+\ln\dfrac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3=2a=2f(1)$, 且定义域也关于 1 对称, 因此 $y=f(x)$ 是关于 $(1,a)$ 的中心对称图形.

(3) 先证明 $a=-2$. 由题意, $a=f(1)\leqslant -2$. 假设 $a<-2$, 由 $f\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{|b|+1}}{1+\mathrm{e}^{|b|+1}}\right)>|b|+1-|b|=1$, 应用零点存在定理知存在 $x_1\in\left(1,\dfrac{2\mathrm{e}^{|b|+1}}{1+\mathrm{e}^{|b|+1}}\right)$, $f(x_1)=0$, 矛盾. 故 $a=-2$. 此时, $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(2-x)}[3bx(2-x)+2]$. 当 $b\geqslant -\dfrac{2}{3}$, $f'(x)\geqslant\dfrac{(x-1)^2}{x(2-x)}(2-4x+2x^2)\geqslant 0$, 且不恒为 0, 故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 递增. $f(x)>-2=f(1)$ 当且仅当 $1<x<2$, 此时结论成立. 当 $b<-\dfrac{2}{3}$, 令 $x_0=\dfrac{3b-\sqrt{9b^2-6b}}{3b}\in(0,1)$, $f'(x_0)=0$, 且 $f'(x)<0$, 当 $x\in(x_0,1)$, 因此 $f(x)$ 在 $(x_0,1)$ 递减, 从而 $f(x_0)>f(1)=-2$, 而 $x_0\notin(1,2)$ 此时结论不成立. 综上, b 的取值范围是 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

19.（17 分）

设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$ 是 $(i,j)-$ 可分数列.

（1）写出所有的 (i,j), $1\leqslant i\leqslant j\leqslant 6$，使数列 $a_1,a_2,\cdots a_6$ 是 $(i,j)-$ 可分数列;

（2）当 $m\geqslant 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$ 是 $(2,13)-$ 可分数列;

（3）从 $1,2,\cdots 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j(i<j)$，记数列 $a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$ 是 $(i,j)-$ 可分数列的概率为 P_m，证明 $P_m>\dfrac{1}{8}$.

【解析】

记 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

(1) 从 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 中去掉两项后剩下 4 项, 恰构成等差数列, 公差必为 d, 否则原数列至少有 7 项. 因此剩下的数列只可能为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_2, a_3, a_4, a_5, a_3, a_4, a_5, a_6 三种可能, 对应的 (i,j) 分别为 $(5,6)$, $(1,6)$, $(1,2)$.

(2) 考虑分组 (a_1, a_4, a_7, a_{10}), (a_3, a_6, a_9, a_{12}), $(a_5, a_8, a_{11}, a_{14})$, $(a_{4k-1}, a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2})(4 \leqslant k \leqslant m)$, (当 $m=3$ 时只需考虑前三组即可) 即知结论成立.

(3) 一方面, 任取两个 $i, j(i<j)$ 共有 C_{4m+2}^2 种可能. 另一方面, 再考虑一种较为平凡的情况: $i-1, j-i-1$ 均可被 4 整除, 此时, 只要依次将剩下的 $4m$ 项按原顺序从头到尾排一列, 每四个截取一段, 得到 m 组公差为 d 的数列, 则满足题意, 故此时确实是 $(i,j)-$ 可分的. 接着计算此时的方法数. 设 $i=4k+1(0 \leqslant k \leqslant m)$, 对于每个 k, j 有 $\dfrac{(4m+2)-(4k+1)-1}{4}+1=m-k+1$(种), 因此方法数为

$$\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

当 $m=1,2$, 已经有 $\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}/C_{4m+2}^2>\dfrac{1}{8}$. 下面考虑 $m \geqslant 3$. 我们证明: 当 $i-2, j-i+1$ 被 4 整除, 且 $j-i+1>4$ 时, 数列是 $(i,j)-$ 可分的. 首先我们将 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-2}$, 及 $a_{j+2}, a_{j+3}, \cdots, a_{4m+2}$ 顺序排成一列, 每 4 个排成一段, 得到一些公差为 d 的四元数组, 因此我们只需考虑 $a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}$ 这 $j-i+1$ 个数即可. 为书写方便, 我们记 $j-i=4t-1(t>1)$, 并记 $b_n=a_{n+i-2}$, 即证 $b_1, b_3, b_4, \cdots, b_{4t}, b_{4t+2}$ 可被划分成若干组.

引理: 设 $j-1$ 能被 4 整除. 若 $b_1, b_2, \cdots, b_{j+1}$ 是 $(2,j)-$ 可分的, 则 $b_1, b_2, \cdots, b_{j+9}$ 是 $(2, j+8)-$ 可分的.

引理证明: 将 $b_1, b_2, \cdots, b_{j+1}$ 去掉 b_2, b_j 后的 $\dfrac{j-1}{4}$ 组四元组再并上 $(b_j, b_{j+2}, b_{j+4, b_{j+6}})$, $(b_{j+3}, b_{j+5}, b_{j+7}, b_{j+9})$ 即证.

回原题. 由 (2), $b_1, \cdots, b_{14}$ 是 $(2,13)-$ 可分数列, 且 (b_1, b_3, b_5, b_7) 和 (b_4, b_6, b_8, b_{10}) 知 $b_1, \cdots, b_{10}$ 是 $(2,9)-$ 可分数列, 因而结合引理知 $b_1, b_3, b_4, \cdots, b_{4t}, b_{4t+2}$ 可被划分成若干组, 由此结论成立. 计算此时的方法数. 设 $i=4k+2(0 \leqslant k \leqslant m-1)$, 则此时 j 有 $\dfrac{(4m+2)-(4k+2)}{4}-1=m-k-1$ 种, 因此方法数为

$$\sum_{k=0}^{m-1}(m-k-1)=\frac{m(m-1)}{2}.$$

因此我们有

$$p_m \geqslant \frac{m(m-1)+(m+1)(m+2)}{2C_{m+1}^2}>\frac{1}{8}.$$