

**绝密★启用前**

**试卷类型：A**

**2023年普通高等学校招生全国统一考试**

**新课标Ⅰ卷数学**

**本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.**

**注意事项：**

**1．答题前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.**

**2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.**

**3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.**

**4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：由一元二次不等式的解法求出集合，即可根据交集的运算解出．

方法二：将集合中的元素逐个代入不等式验证，即可解出．

【详解】方法一：因为，而，

所以．

故选：C．

方法二：因为，将代入不等式，只有使不等式成立，所以．

故选：C．

2. 已知，则（ ）

A.  B.  C. 0 D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法运算求出，再由共轭复数的概念得到，从而解出．

【详解】因为，所以，即．

故选：A．

3. 已知向量，若，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的坐标运算求出，，再根据向量垂直的坐标表示即可求出．

【详解】因为，所以，，

由可得，，

即，整理得：．

故选：D．

4. 设函数在区间上单调递减，则的取值范围是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用指数型复合函数单调性，判断列式计算作答.

【详解】函数在**R**上单调递增，而函数在区间上单调递减，

则有函数在区间上单调递减，因此，解得，

所以的取值范围是.

故选：D

5. 设椭圆的离心率分别为．若，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定的椭圆方程，结合离心率的意义列式计算作答.

【详解】由，得，因此，而，所以.

故选：A

6. 过点与圆相切的两条直线的夹角为，则（ ）

A. 1 B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】方法一：根据切线的性质求切线长，结合倍角公式运算求解；方法二：根据切线的性质求切线长，结合余弦定理运算求解；方法三：根据切线结合点到直线的距离公式可得，利用韦达定理结合夹角公式运算求解.

【详解】方法一：因为，即，可得圆心，半径，

过点作圆*C*的切线，切点为，

因为，则，

可得，

则，

，

即为钝角，

所以；

法二：圆的圆心，半径，

过点作圆*C*的切线，切点为，连接，

可得，则，

因为

且，则，

即，解得，

即为钝角，则，

且为锐角，所以；

方法三：圆的圆心，半径，

若切线斜率不存在，则切线方程为，则圆心到切点的距离，不合题意；

若切线斜率存在，设切线方程为，即，

则，整理得，且

设两切线斜率分别为，则，

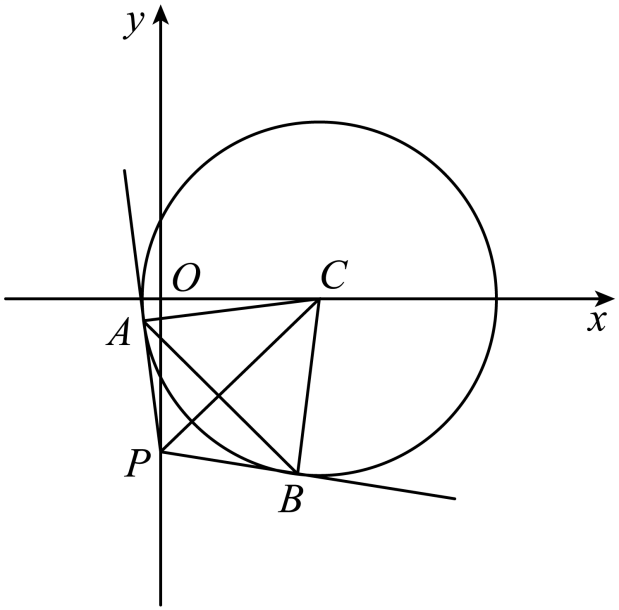
可得，

所以，即，可得，

则，

且，则，解得.

故选：B.



7. 记为数列的前项和，设甲：为等差数列；乙：为等差数列，则（ ）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】利用充分条件、必要条件的定义及等差数列的定义，再结合数列前*n*项和与第*n*项的关系推理判断作答.，

【详解】方法1，甲：为等差数列，设其首项为，公差为，

则，

因此为等差数列，则甲是乙的充分条件；

反之，乙：为等差数列，即为常数，设为，

即，则，有，

两式相减得：，即，对也成立，

因此为等差数列，则甲是乙的必要条件，

所以甲是乙的充要条件，C正确.

方法2，甲：为等差数列，设数列的首项，公差为，即，

则，因此为等差数列，即甲是乙的充分条件；

反之，乙：等差数列，即，

即，，

当时，上两式相减得：，当时，上式成立，

于是，又为常数，

因此为等差数列，则甲是乙必要条件，

所以甲是乙的充要条件.

故选：C

8. 已知，则（ ）．

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用和角、差角的正弦公式求出，再利用二倍角的余弦公式计算作答.

【详解】因为，而，因此，

则，

所以.

故选：B

【点睛】方法点睛：三角函数求值的类型及方法

（1）“给角求值”：一般所给出的角都是非特殊角，从表面来看较难，但非特殊角与特殊角总有一定关系．解题时，要利用观察得到的关系，结合三角函数公式转化为特殊角的三角函数．

（2）“给值求值”：给出某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值，解题关键在于“变角”，使其角相同或具有某种关系．

（3）“给值求角”：实质上也转化为“给值求值”，关键也是变角，把所求角用含已知角的式子表示，由所得的函数值结合该函数的单调区间求得角，有时要压缩角的取值范围．

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 有一组样本数据，其中是最小值，是最大值，则（ ）

A. 的平均数等于的平均数

B. 的中位数等于的中位数

C. 的标准差不小于的标准差

D. 的极差不大于的极差

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意结合平均数、中位数、标准差以及极差的概念逐项分析判断.

【详解】对于选项A：设的平均数为，的平均数为，

则，

因为没有确定的大小关系，所以无法判断的大小，

例如：，可得；

例如，可得；

例如，可得；故A错误；

对于选项B：不妨设，

可知的中位数等于的中位数均为，故B正确；

对于选项C：因为是最小值，是最大值，

则的波动性不大于的波动性，即的标准差不大于的标准差，

例如：，则平均数，

标准差，

，则平均数，

标准差，

显然，即；故C错误；

对于选项D：不妨设，

则，当且仅当时，等号成立，故D正确；

故选：BD.

10. 噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级，其中常数是听觉下限阈值，是实际声压．下表为不同声源的声压级：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 声源 | 与声源的距离 | 声压级 |
| 燃油汽车 | 10 |  |
| 混合动力汽车 | 10 |  |
| 电动汽车 | 10 | 40 |

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车处测得实际声压分别为，则（ ）．

A.  B. 

C.  D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意可知，结合对数运算逐项分析判断.

【详解】由题意可知：，

对于选项A：可得，

因为，则，即，

所以且，可得，故A正确；

对于选项B：可得，

因为，则，即，

所以且，可得，

当且仅当时，等号成立，故B错误；

对于选项C：因为，即，

可得，即，故C正确；

对于选项D：由选项A可知：，

且，则，

即，可得，且，所以，故D正确；

故选：ACD.

11. 已知函数的定义域为，，则（ ）．

A.  B. 

C. 是偶函数 D. 为的极小值点

【答案】ABC

【解析】

【分析】方法一：利用赋值法，结合函数奇遇性的判断方法可判断选项ABC，举反例即可排除选项D.

方法二：选项ABC的判断与方法一同，对于D，可构造特殊函数进行判断即可.

【详解】方法一：

因为，

对于A，令，，故正确.

对于B，令，，则，故B正确.

对于C，令，，则，

令，

又函数的定义域为，所以为偶函数，故正确，

对于D，不妨令，显然符合题设条件，此时无极值，故错误

方法二：

因为，

对于A，令，，故正确.

对于B，令，，则，故B正确.

对于C，令，，则，

令，

又函数的定义域为，所以为偶函数，故正确，

对于D，当时，对两边同时除以，得到，

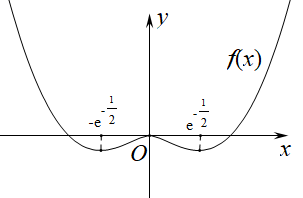
故可以设，则，

当肘，，则，

令，得；令，得；

故在上单调递减，在上单调递增，

因为为偶函数，所以在上单调递增，在上单调递减，



显然，此时是的极大值，故D错误.

故选：.

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（ ）

A. 直径为的球体

B. 所有棱长均为的四面体

C. 底面直径为，高为的圆柱体

D. 底面直径为，高为的圆柱体

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意结合正方体的性质逐项分析判断.

【详解】对于选项A：因为，即球体的直径小于正方体的棱长，

所以能够被整体放入正方体内，故A正确；

对于选项B：因为正方体的面对角线长为，且，

所以能够被整体放入正方体内，故B正确；

对于选项C：因为正方体的体对角线长为，且，

所以不能够被整体放入正方体内，故C正确；

对于选项D：因为正方体的体对角线长为，且，

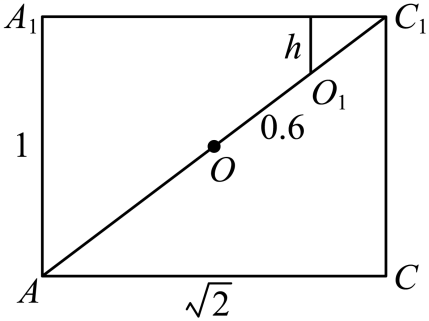
设正方体的中心为，以为轴对称放置圆柱，设圆柱的底面圆心到正方体的表面的最近的距离为，

如图，结合对称性可知：，

则，即，解得，

所以能够被整体放入正方体内，故D正确；

故选：ABD.

 【点睛】关键点睛：对于C、D：以正方体的体对角线为圆柱的轴，结合正方体以及圆柱的性质分析判断.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 某学校开设了4门体育类选修课和4门艺术类选修课，学生需从这8门课中选修2门或3门课，并且每类选修课至少选修1门，则不同的选课方案共有\_\_\_\_\_\_\_\_种（用数字作答）．

【答案】64

【解析】

【分析】分类讨论选修2门或3门课，对选修3门，再讨论具体选修课的分配，结合组合数运算求解.

【详解】（1）当从8门课中选修2门，则不同的选课方案共有种；

（2）当从8门课中选修3门，

①若体育类选修课1门，则不同的选课方案共有种；

②若体育类选修课2门，则不同的选课方案共有种；

综上所述：不同的选课方案共有种.

故答案：64.

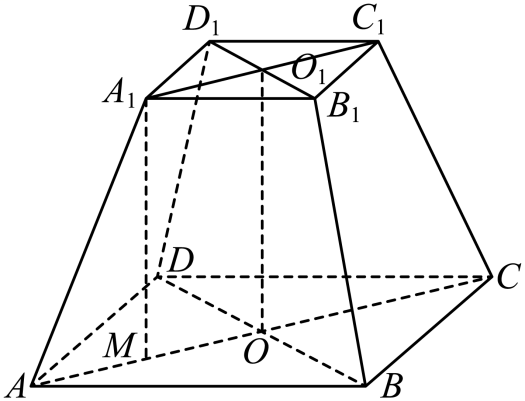
14. 在正四棱台中，，则该棱台的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【解析】

【分析】结合图像，依次求得，从而利用棱台的体积公式即可得解.

【详解】如图，过作，垂足为，易知为四棱台的高，



因为，

则，

故，则，

所以所求体积为.

故答案为：.

15. 已知函数在区间有且仅有3个零点，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

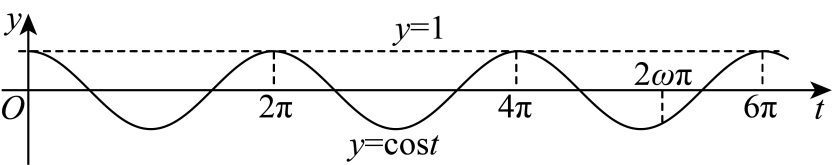
【分析】令，得有3个根，从而结合余弦函数的图像性质即可得解.

【详解】因为，所以，

令，则有3个根，

令，则有3个根，其中，

结合余弦函数的图像性质可得，故，



故答案为：.

16. 已知双曲线的左、右焦点分别为．点在上，点在轴上，，则的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】## 

【解析】

【分析】方法一：利用双曲线的定义与向量数积的几何意义得到关于的表达式，从而利用勾股定理求得，进而利用余弦定理得到的齐次方程，从而得解.

方法二：依题意设出各点坐标，从而由向量坐标运算求得，，将点代入双曲线得到关于的齐次方程，从而得解；

【详解】方法一：

依题意，设，则，

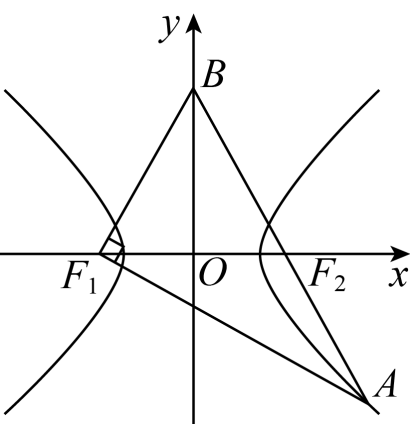
在中，，则，故或（舍去），

所以，，则，

故，

所以在中，，整理得，

故.



方法二:

依题意，得，令，

因为，所以，则，

又，所以，则，

又点上，则，整理得，则，

所以，即，

整理得，则，解得或，

又，所以或（舍去），故.

故答案为：.

【点睛】关键点睛：双曲线过焦点的三角形的解决关键是充分利用双曲线的定义，结合勾股定理与余弦定理得到关于的齐次方程，从而得解.

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 已知在中，．

（1）求；

（2）设，求边上的高．

【答案】（1）

（2）6

【解析】

【分析】（1）根据角的关系及两角和差正弦公式，化简即可得解；

（2）利用同角之间的三角函数基本关系及两角和的正弦公式求,再由正弦定理求出，根据等面积法求解即可.

【小问1详解】

，

，即，

又，

，

，

，

即，所以，

.

【小问2详解】

由（1）知，，

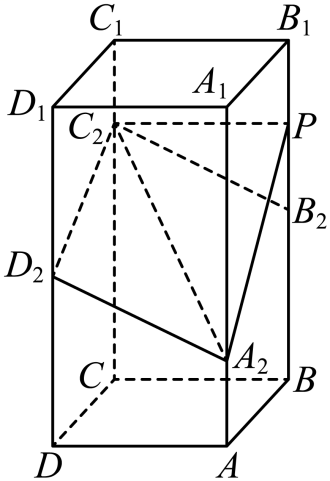
由，

由正弦定理，，可得，

，

.

18. 如图，在正四棱柱中，．点分别在棱,上，．



（1）证明：；

（2）点在棱上，当二面角为时，求．

【答案】（1）证明见解析；

（2）1

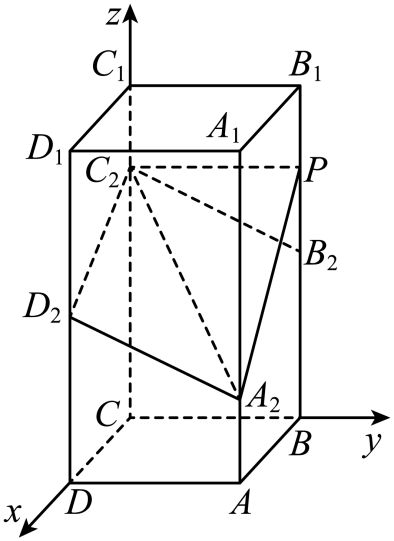
【解析】

【分析】（1）建立空间直角坐标系，利用向量坐标相等证明；

（2）设，利用向量法求二面角，建立方程求出即可得解.

【小问1详解】

以为坐标原点，所在直线为轴建立空间直角坐标系，如图，



则，

，

，

又不在同一条直线上，

.

【小问2详解】

设，

则，

设平面的法向量，

则，

令 ，得，

，

设平面的法向量，

则，

令 ，得，

，

，

化简可得，，

解得或，

或，

.

19. 已知函数．

（1）讨论的单调性；

（2）证明：当时，．

【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）先求导，再分类讨论与两种情况，结合导数与函数单调性的关系即可得解；

（2）方法一：结合（1）中结论，将问题转化为的恒成立问题，构造函数，利用导数证得即可.

方法二：构造函数，证得，从而得到，进而将问题转化为的恒成立问题，由此得证.

【小问1详解】

因为，定义域为，所以，

当时，由于，则，故恒成立，

所以在上单调递减；

当时，令，解得，

当时，，则在上单调递减；

当时，，则在上单调递增；

综上：当时，在上单调递减；

当时，在上单调递减，在上单调递增.

【小问2详解】

方法一：

由（1）得，，

要证，即证，即证恒成立，

令，则，

令，则；令，则；

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以，则恒成立，

所以当时，恒成立，证毕.

方法二：

令，则，

由于在上单调递增，所以在上单调递增，

又，

所以当时，；当时，；

所以在上单调递减，在上单调递增，

故，则，当且仅当时，等号成立，

因为，

当且仅当，即时，等号成立，

所以要证，即证，即证，

令，则，

令，则；令，则；

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以，则恒成立，

所以当时，恒成立，证毕.

20. 设等差数列的公差为，且．令，记分别为数列的前项和．

（1）若，求的通项公式；

（2）若为等差数列，且，求．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）根据等差数列的通项公式建立方程求解即可；

（2）由为等差数列得出或，再由等差数列的性质可得，分类讨论即可得解.

【小问1详解】

，，解得，

，

又，

，

即，解得或（舍去），

.

【小问2详解】

为等差数列，

，即，

，即，解得或，

，，

又，由等差数列性质知，，即，

，即，解得或（舍去）

当时，，解得，与矛盾，无解；

当时，，解得.

综上，.

21. 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投籃，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

（1）求第2次投篮的人是乙的概率；

（2）求第次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量服从两点分布，且，则．记前次（即从第1次到第次投篮）中甲投篮的次数为，求．

【答案】（1）

（2）

（3）

【解析】

【分析】（1）根据全概率公式即可求出；

（2）设，由题意可得，根据数列知识，构造等比数列即可解出；

（3）先求出两点分布的期望，再根据题中的结论以及等比数列的求和公式即可求出．

【小问1详解】

记“第次投篮的人是甲”为事件，“第次投篮的人是乙”为事件，

所以，

.

【小问2详解】

设，依题可知，，则

，

即，

构造等比数列，

设，解得，则，

又，所以是首项为，公比为的等比数列，

即．

【小问3详解】

因为，，

所以当时，，

故．

【点睛】本题第一问直接考查全概率公式的应用，后两问的解题关键是根据题意找到递推式，然后根据数列的基本知识求解．

22. 在直角坐标系中，点到轴的距离等于点到点的距离，记动点的轨迹为．

（1）求的方程；

（2）已知矩形有三个顶点在上，证明：矩形的周长大于．

【答案】（1）

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）设，根据题意列出方程，化简即可；

（2）法一：设矩形的三个顶点，且，分别令，，且，利用放缩法得，设函数，利用导数求出其最小值，则得的最小值，再排除边界值即可.

法二：设直线的方程为，将其与抛物线方程联立，再利用弦长公式和放缩法得，利用换元法和求导即可求出周长最值，再排除边界值即可.

法三：利用平移坐标系法，再设点，利用三角换元再对角度分类讨论，结合基本不等式即可证明.

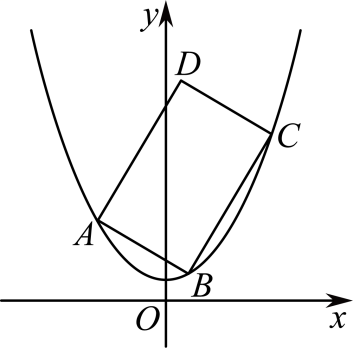
【小问1详解】

设,则，两边同平方化简得，

故.

【小问2详解】

法一：设矩形的三个顶点在上,且，易知矩形四条边所在直线的斜率均存在，且不为0，



则,令，

同理令，且，则，

设矩形周长为,由对称性不妨设，，

则.，易知

则令,

令，解得，

当时，，此时单调递减，

当，，此时单调递增，

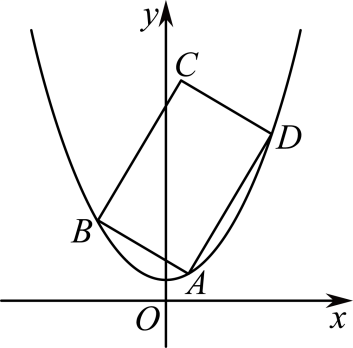
则，

故,即.

当时,,且，即时等号成立，矛盾，故,

得证.

法二：不妨设在上，且，



依题意可设，易知直线，的斜率均存在且不为0，

则设,的斜率分别为和，由对称性，不妨设，

直线的方程为，

则联立得，

，则

则，

同理，





令，则，设，

则，令，解得，

当时，，此时单调递减，

当，，此时单调递增，

则，

，

但，此处取等条件为，与最终取等时不一致，故.

法三：为了计算方便,我们将抛物线向下移动个单位得抛物线,

矩形变换为矩形,则问题等价于矩形的周长大于.

设 , 根据对称性不妨设 .

则 , 由于 , 则 .

由于 , 且  介于  之间,

则 . 令 ,

,则,从而



故

①当时,



②当  时,由于,从而,

从而又,

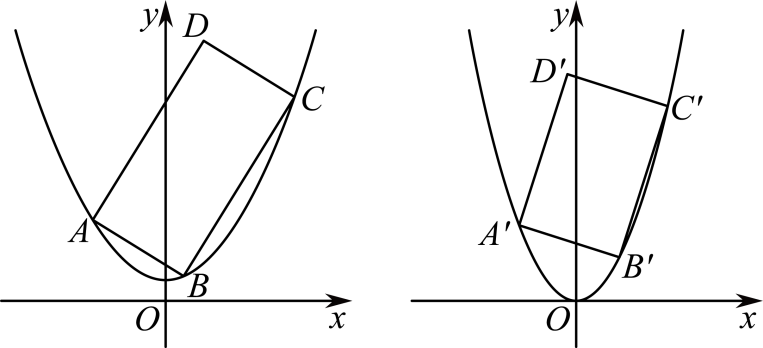
故,由此





，

当且仅当时等号成立，故，故矩形周长大于.

 .

【点睛】关键点睛：本题的第二个的关键是通过放缩得，同时为了简便运算，对右边的式子平方后再设新函数求导，最后再排除边界值即可.