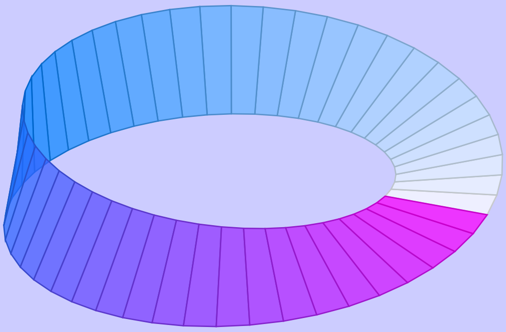
点 集 拓 扑

随 心 记 heart

2025 年 8 月 28 日



风起于青萍之末,浪成于微澜之间。

目录

1 集合论

1.1 基本概念与性质

定义 1.1 (集族的并与交) 设 $\mathcal{A}$ 为集族, 那么我们定义它的并与交分别为

$$\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \mid \text{存在某个 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } x \in A\},$$
$$\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \mid \text{对任意的 } A \in \mathcal{A}, \text{均有 } x \in A\}.$$

当集族 $\mathcal{A}$ 中没有任何成员时, 由定义知它的并为空集 $\varnothing$. 然而, 此时它的交 $\bigcap \mathcal{A}$ 会出现问题. 因此当集族为空时, 我们不定义它的交.

我们把有限集与可数无限集统称为可数集. 不是可数集的集合称为不可数集. 此外, 我们用

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

表示 A 与 B 的差集. 笛卡尔积 $A \times B$ 中的元素用 $a \times b$ 表示. $\mathcal{P}(X)$ 表示集合 X 的幂集, 即 X 的全体子集所成的集合.

命题 1.2 (集合的基本运算性质) 下面是集合的一些基本性质:

(1) (分配律)

$$A \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{j\in J} (A \cap B_j),$$
$$A \cup \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{j\in J} (A \cup B_j).$$

(2) (德摩根律)

$$X - \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcap_{j\in J} (X - B_j),$$
$$X - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcup_{j\in J} (X - B_j).$$

(3) (笛卡尔积)

$$\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big)\times\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big)=\bigcup_{i\in I,j\in J}(X_i\times Y_j),$$
$$\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big)\times\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big)=\bigcap_{i\in I,j\in J}(X_i\times Y_j).$$

(4) (像集) 设有映射 $f: X\to Y$ 与 X 的一族子集 $\{A_j\}_{j\in J}$, 那么

$$f\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)=\bigcup_{j\in J} f(A_j),$$
$$f\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)\subset\bigcap_{j\in J} f(A_j). \tag{1.1}$$

(5) (原像) 设有映射 $f: X\to Y$ 与 Y 的一族子集 $\{B_j\}_{j\in J}$, 那么

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j),$$
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)=\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

(6) (原像与补集) 设有映射 $f: X\to Y$ 与子集 $B\subset Y$, 那么

$$f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B).$$

(7) (复合映射的原像) 设有映射 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$, 则对任意的 $A\subset Z$, 有

$$(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

(8) (像与原像) 设 $f: X\to Y$ 是一个映射, A 是 X 的子集, B 是 Y 的子集, 那么

(a) $A\subset f^{-1}(f(A))$, 并且当 f 为单射时等号成立.

(b) $f(f^{-1}(B))\subset B$, 并且当 f 为满射时等号成立.

注意式 (1.1) 是命题 1.2 中唯一的一个非等式关系. 例如定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=x^2$, 取 $A=\{-1,2\}$, $B=\{1,2\}$, 那么 $f(A\cap B)=\{4\}$, 而 $f(A)\cap f(B)=\{1,4\}$.

1.2 等价关系

定义 1.3 (关系) 设 X 为集合, 我们把 $X \times X$ 的子集 R 称为 X 上的一个关系, 并把 $(x, y) \in R$ 记为 xRy.

一种非常有用的关系是等价关系.

定义 1.4 (等价关系) 设 $R \subset X \times X$ 是集合 X 上的一个关系. 如果对任意的 $x, y, z \in X$ 都有

(1) **(自反性)** xRx,

(2) **(对称性)** 若 xRy, 则 yRx,

(3) **(传递性)** 若 xRy 且 yRz, 则 xRz,

那么称 R 是 X 上的一个等价关系. 如果 $x \sim y$, 则称 x 等价于 y. 此外, 称子集

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

为 $x \in X$ 所在的等价类.

若 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系, 那么将全体等价类收集起来所成的集合称为 X 关于 $\sim$ 的商集, 记为 $X/\sim$, 即

$$X/\sim\, = \{[x] \mid x \in X\}.$$

定义 1.5 (划分) 设 $P = \{X_\alpha\}$ 是 X 的一族非空子集. 若 P 中的成员两两不相交, 且 $\bigcup_\alpha X_\alpha = X$, 则称 P 是 X 的一个划分.

下面的结论告诉我们等价关系和集合的划分是互相决定的.

定理 1.6 (等价关系与划分是互相决定的) 给定集合 X 上的一个等价关系 $\sim$, 那么全体等价类形成了 X 的一个划分. 反之, 若 $P = \{X_\alpha\}$ 是 X 的一个划分, 那么存在 X 上的等价关系 $\sim$, 其等价类恰好是各 X_α.

由此可知一个等价关系 $\sim$ 的两个等价类 $[x]$ 与 $[y]$ 要么相等, 要么不相交.

1.3 序关系

定义 1.7 (线性序) 若集合 A 上的关系 $\leqslant$ 满足对任意的 $x, y, z \in A$, 均有

(1) (可比性) $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$,

(2) (自反性) $x \leqslant x$,

(3) (反对称性) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 那么 $x = y$,

(4) (传递性) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 那么 $x \leqslant z$,

则称 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序集. 若 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$, 则记为 $x < y$.

线性序又叫全序. 此外, 只满足后三条性质的关系称为一个偏序.

定义 1.8 (开区间) 设 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序集, $a < b$, 那么我们把集合

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

称为一个开区间. 若 $(a, b) = \varnothing$, 则称 a 是 b 的直接前继, b 是 a 的直接后继.

定义 1.9 (区间, 射线) 设有线性序集 X 中的元素 $a < b$, 定义

(1) 闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

(2) 半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 与 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

(3) 开射线 $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ 与 $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$.

(4) 闭射线 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$ 与 $(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$.

定义 1.10 (最大/最小元, 上/下确界) 设 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序集, A_0 是 A 的子集, $b \in A$.

(1) 若 $b \in A_0$ 且对任意的 $x \in A_0$, 有 $x \leqslant b$, 则称 b 是 A_0 的最大元. (最小元可类似定义.)

(2) 若对任意的 $x \in A_0$, 有 $x \leqslant b$, 则称 A_0 是有上界的, 且称 b 是 A_0 的一个上界. (下界可类似定义.)

(3) 如果 A_0 的全体上界中有一个最小元, 则称该最小元为 A_0 的上确界, 记为

$\sup A_0$. (下确界可类似定义.)

定义 1.11 (最小上界/最大下界性质) 设 A 是一个线性序集.

(1) 若 A 的任一非空子集都有上确界, 则称 A 具有最小上界性质.

(2) 若 A 的任一非空子集都有下确界, 则称 A 具有最大下界性质.

容易证明线性序集 A 有最小上界性质当且仅当它有最大下界性质. 此外, 实数集 $\mathbb{R}$ 是具有最小上界性质的线性序集.

2 拓扑空间

2.1 拓扑空间

定义 2.1 (拓扑空间) 设 X 是一个集合, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 的一个子集族. 若 $\mathcal{T}$ 满足

(1) 空集 $\varnothing$ 与全集 X 在 $\mathcal{T}$ 中,

(2) $\mathcal{T}$ 中任意有限多个成员的交仍在 $\mathcal{T}$ 中,

(3) $\mathcal{T}$ 中任意多个成员的并仍在 $\mathcal{T}$ 中,

则称 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{T}$ 称为 X 上的一个拓扑.

如果拓扑 $\mathcal{T}$ 是明确的, 我们常常将 $(X, \mathcal{T})$ 简记为 X. 此外, 我们把 $\mathcal{T}$ 中的成员称为开集. 注意对于定义 2.1 中的条件 (2) 我们只需验证两个集合的情形, 因为一般的有限多个开集的情形可归纳得到.

例 2.2 任意一个集合 X 上都可以定义以下四种拓扑:

- **(离散拓扑)** X 的全体子集所成集合 $\mathcal{P}(X)$ 形成了一个拓扑, 称为 X 上的离散拓扑.
- **(平庸拓扑)** 子集族 $\{\varnothing, X\}$ 也形成了一个拓扑, 称为 X 上的平庸拓扑.
- **(有限补拓扑)** 将在 X 中补集有限的集合与空集 $\varnothing$ 定义为开集, 由此得到的拓扑称为有限补拓扑.
- **(可数补拓扑)** 将在 X 中补集可数的集合与空集 $\varnothing$ 定义为开集, 由此得到的拓扑称为可数补拓扑.

证明 只证明有限补拓扑的情形. 将在 X 中补集有限的集合连同空集 $\varnothing$ 所成的集族记为 $\mathcal{T}$. 显然 X 和 $\varnothing$ 都在 $\mathcal{T}$. 又任取 $A, B \in \mathcal{T}$. 若 A 或 B 有一个空集, 显然 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 若 A, B 均不为空集, 那么 $X - A$ 和 $X - B$ 都是有限的, 从而由

$$X - A \cap B = (X - A) \cup (X - B)$$

即得 $A \cap B$ 的补集是有限的, 于是 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 最后任取 $\mathcal{T}$ 中的一族成员 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$. 不妨假定每个 A_α 都不是空集, 那么由

$$X - \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) \subset X - A_\beta$$

可知 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 的补集是有限的, 这里 $\beta \in J$ 是某个指标. 于是 $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$. □

如果同一集合上的两个拓扑 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 满足 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, 那么我们就说 $\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{T}'$ 更粗糙, 或者 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 更细致. 如果拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 满足 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ 或者 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 是可比的, 否则称二者是不可比的. 不难发现对任意的集合 X 而言, 平庸拓扑、离散拓扑分别是其上的最粗糙拓扑与最细致拓扑.

2.2 拓扑基

直接描述所有的开集来给出拓扑往往不太方便, 我们希望能够用更少的开集刻画拓扑. 为此我们引入拓扑基这一概念.

定义 2.3 (拓扑基) 设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是集合 X 的一个子集族. 如果

(1) 对任意的 $x \in X$, 存在子集 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$ (即 $\bigcup \mathcal{B} = X$),

(2) 对任意的 $A, B \in \mathcal{B}$ 以及 $x \in A \cap B$, 存在 $C \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in C \subset A \cap B$,

则称 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个拓扑基, $\mathcal{B}$ 中的成员称为基元素. 此外, $\mathcal{B}$ 中成员的并集所成的子集族

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{B}\text{ 中成员的并集}\} \tag{2.1}$$

形成了一个拓扑, 称为由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑, 且称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个基.

我们需要说明式 (2.1) 确实给出了一个拓扑. 首先由 $\bigcup \mathcal{B} = X$ 知 X 在 $\mathcal{T}$ 中. 此外, 空集 $\varnothing$ 作为 0 个成员的并也在 $\mathcal{T}$ 中. 下面证明 $\mathcal{T}$ 对有限交是封闭的. 设 $U, V \in \mathcal{T}$. 将

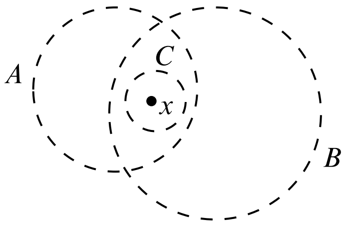


图 2.1: 拓扑基

U 与 V 表示为 $\mathcal{B}$ 中成员的并集 $U = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$ 与 $V = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, 则有

$$U \cap V = \Big(\bigcup_\alpha B_\alpha\Big) \cap \Big(\bigcup_\gamma B_\gamma\Big) = \bigcup_{\alpha,\gamma}(B_\alpha \cap B_\gamma).$$

任取 $x \in B_\alpha \cap B_\gamma$, 由基定义中的条件 (2) 可知存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset B_\alpha \cap B_\gamma$. 这说明 $B_\alpha \cap B_\gamma = \bigcup_{x\in B_\alpha\cap B_\gamma} B_x$ 是 $\mathcal{B}$ 中成员的并, 从而 $U \cap V = \bigcup_{\alpha,\gamma}(B_\alpha \cap B_\gamma)$ 也是 $\mathcal{B}$ 中成员之并, 即 $U \cap V \in \mathcal{T}$. 最后, $\mathcal{T}$ 关于任意并封闭是显然的. 至此我们证明了 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑.

易知由基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}$ 是包含 $\mathcal{B}$ 的最粗糙拓扑, 并且可以表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{\mathcal{B}\text{ 中成员的并集}\} \\ &= \{U \subset X \mid \text{对任意的 } x \in U, \text{存在 } B \in \mathcal{B} \text{ 使得 } x \in B \subset U\}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

例 2.4

- 设 $\mathcal{B}$ 为平面上的全体不含边界的圆盘所成的集族, 那么 $\mathcal{B}$ 是平面的一个拓扑基.
- 另记 $\mathcal{B}'$ 为各边均平行于坐标轴的不含边界的矩形区域全体所成集族, 那么 $\mathcal{B}'$ 也是平面的一个拓扑基. (后面我们将会看到, $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 所生成的拓扑是相同的.)
- 设 X 是任意一个集合, 那么 X 的全体单点子集是离散拓扑的一个基. //

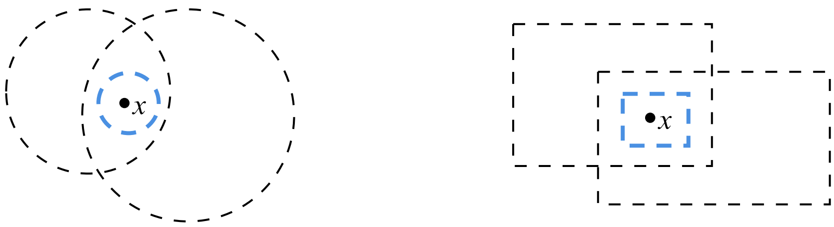


图 2.2: 不含边界的圆盘和矩形区域都是平面的拓扑基

式 (2.2) 给出了由基生成的拓扑的一个具体表示, 下面的命题 2.5 则告诉了我们如何判定拓扑的一个子族是否为该拓扑的基. 注意二者的结论在某种程度上具有相似之处.

命题 2.5 (基的判定) 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, 子集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 那么 $\mathcal{B}$ 是拓扑 $\mathcal{T}$ 的一个基当且仅当对 X 中的每个开集 U 以及 U 中的每个元素 x, 都存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$.

证明 $(\Longrightarrow)$ 因为 $\mathcal{B}$ 是拓扑 $\mathcal{T}$ 的基, 故任意的开集 $U \in \mathcal{T}$ 都可以表示为 $\mathcal{B}$ 中一族成员的并 $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$, 从而对任意的 $x \in U$, 存在某 B_α 使得 $x \in B_\alpha \subset U$.

$(\Longleftarrow)$ 首先证明 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个拓扑基. 因为 X 自身是开集, 故由假设立马可得 $\bigcup \mathcal{B} = X$. 其次, 因为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 故 $\mathcal{B}$ 中的成员都是开集. 任取 $A, B \in \mathcal{B}$, 那么 $A \cap B$ 也是开集, 从而由假设知对任意的 $x \in A \cap B$ 都存在 $C \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in C \subset A \cap B$. 至此我们证明了 $\mathcal{B}$ 是 X 上某个拓扑的基, 下面证明 $\mathcal{B}$ 就是 $\mathcal{T}$ 的基. 任取开集 $U \in \mathcal{T}$, 那么对任意的 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$. 于是 $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ 是 $\mathcal{B}$ 中成员的并, $\mathcal{T} \subset \{\mathcal{B}$ 中成员的并集$\}$. 又因为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 故由拓扑关于并集的封闭性即得 $\{\mathcal{B}$ 中成员的并集$\} \subset \mathcal{T}$, 因此 $\mathcal{T} = \{\mathcal{B}$ 中成员的并集$\}$. □

命题 2.6 (通过基比较拓扑的粗细) 设 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 分别是集合 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 的基, 那么 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 细致当且仅当对任意的 $x \in X$ 以及包含 x 的 $B \in \mathcal{B}$, 都存在 $B' \in \mathcal{B}'$, 使得 $x \in B' \subset B$.

证明 $(\Longrightarrow)$ 任取 $x \in X$ 与包含 x 的 $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. 因 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, 故 $B \in \mathcal{T}'$. 由于 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{T}'$ 的基, 故 B 可表示为 $\mathcal{B}'$ 中成员的并 $B = \bigcup_\alpha B'_\alpha$. 因 $x \in B$, 故存在某 B'_α 使得 $x \in B'_\alpha \subset B$.

$(\Longleftarrow)$ 任取开集 $U \in \mathcal{T}$, 下证 $U \in \mathcal{T}'$. 因 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基, 故对任意的 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$. 由假设知存在 $B'_x \in \mathcal{B}'$ 使得 $x \in B'_x \subset B_x$, 从而 $x \in B'_x \subset U$. 这说明 $U = \bigcup_{x \in U} B'_x$ 是 $\mathcal{B}'$ 中成员的并, 故 $U \in \mathcal{T}'$. □

例 2.7 平面上以全体不含边界的圆盘为基生成的拓扑与以全体不含边界的矩形区域 (各边平行于坐标轴) 为基生成的拓扑是相同的. 后面我们将对这一事实进行更正式的讨论. //

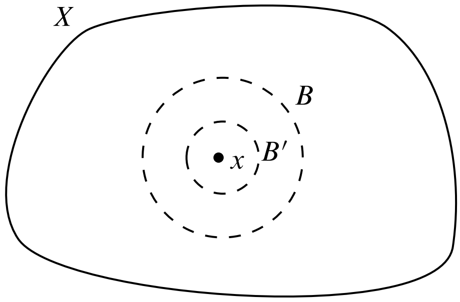


图 2.3: 通过基比较拓扑的粗细

图 2.4: 平面上不含边界的圆盘与矩形生成相同的拓扑

定义 2.8 (实直线上的拓扑) 考虑实直线 $\mathbb{R}$ 上的拓扑.

(1) **(标准拓扑)** 由全体开区间

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑. 除非特别说明, 否则提到 $\mathbb{R}$ 时我们总考虑的是标准拓扑.

(2) **(下限拓扑)** 由全体左闭右开区间

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑. 带有此拓扑的实直线 $\mathbb{R}$ 称为 Sorgenfrey 直线, 记为 $\mathbb{R}_\ell$.

(3) **(K-拓扑)** 记 $K = \{1/n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. 由全体开区间 (a, b) 以及差集 $(a, b) - K$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的 K-拓扑. 带有这种拓扑的实直线记为 $\mathbb{R}_K$.

注意 Sorgenfrey 直线 $\mathbb{R}_\ell$ 在拓扑学中经常作为反例出现.

性质 2.9 (实直线上三种拓扑的粗细) $\mathbb{R}_\ell$ 和 $\mathbb{R}_K$ 上的拓扑均严格细致于 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑, 但二者不可比.

证明 将 $\mathbb{R}, \mathbb{R}_\ell, \mathbb{R}_K$ 上的拓扑分别记为 $\mathcal{T}, \mathcal{T}_\ell$ 与 $\mathcal{T}_K$. 由于 $(a, b) \in \mathcal{T}_\ell$ 以及 $(a, b) \in \mathcal{T}_K$, 而 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 上包含全体开区间的最粗糙拓扑, 故 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\ell$ 且 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_K$. 又 $[a, b) \in \mathcal{T}_\ell - \mathcal{T}$ 且 $(-1, 1) - K \in \mathcal{T}_K - \mathcal{T}$, 故有 $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_\ell$ 及 $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_K$. 最后, 由 $[2, 3) \in \mathcal{T}_\ell - \mathcal{T}_K$ 与 $(-1, 1) - K \in \mathcal{T}_K - \mathcal{T}_\ell$ 可知 $\mathcal{T}_\ell$ 和 $\mathcal{T}_K$ 是不可比的. □

下面的概念让我们能够用一种比基更简洁的方式来描述拓扑.

定义 2.10 (子基) 设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 是集合 X 的一个子集族. 若 $\mathcal{S}$ 满足

$$\bigcup \mathcal{S} = X,$$

则称 $\mathcal{S}$ 为 X 的一个拓扑子基. 此外, 子集族

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{S} \text{ 中成员的有限交之并}\} \tag{2.3}$$

形成了一个拓扑, 称为由子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑.

我们需要说明式 (2.3) 的确给出了一个拓扑, 为此只需验证

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{S} \text{ 中成员的有限交}\}$$

是 X 的一个基. 因为 $\bigcup \mathcal{S} = X$, 故 $\bigcup \mathcal{B} = X$. 又任取 $A, B \in \mathcal{B}$, 设

$$A = S_1 \cap \cdots \cap S_n,$$
$$B = S_1' \cap \cdots \cap S_m'.$$

那么

$$A \cap B = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap S_1' \cap \cdots \cap S_m'$$

也是 $\mathcal{S}$ 中成员的有限交, 因而 $A \cap B$ 也在 $\mathcal{B}$ 中. 综上, $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个基.

2.3 序拓扑

定义 2.11 (序拓扑) 设 X 是所含元素个数大于 1 的线性序集, 那么

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in X \text{ 且 } a < b\} \cup \{(-\infty,a) \mid a \in X\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in X\}$$

给出了 X 上的一个基, 由其生成的拓扑称为 X 上的序拓扑.

我们没有仅以形如 (a,b) 的开区间来生成序拓扑, 因为这样无法包含线性序集的最大元与最小元 (如果存在的话). 易知

$$\mathcal{S} = \{(-\infty,a) \mid a \in X\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in X\}$$

是序拓扑的一个子基.

例 2.12

- 实直线 $\mathbb{R}$ 上由通常的序关系生成的序拓扑就是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑.
- 正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 上由通常的序关系生成的序拓扑就是 $\mathbb{Z}_+$ 上的离散拓扑. //

2.4 乘积拓扑 (两个空间)

定义 2.13 (乘积拓扑) 设 $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间, 那么

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\} \tag{2.4}$$

给出了 $X \times Y$ 上的一个基, 由此基生成的拓扑 $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ 称为 $X \times Y$ 上的乘积拓扑, 相应的拓扑空间称为 X 与 Y 的乘积空间.

现在我们说明式 (2.4) 的确给出了一个基. 显然 $\bigcup \mathcal{B} = X \times Y$. 又若 $U_1 \times V_1$ 与 $U_2 \times V_2$ 都是 $\mathcal{B}$ 中的成员, 那么

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}.$$

因此 $\mathcal{B}$ 是一个基.

命题 2.14 (乘积拓扑的“更小”的基) 若 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ 分别是拓扑空间 X, Y 的基, 那么

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

是 $X \times Y$ 上乘积拓扑的基.

证明 任取 $X \times Y$ 中的开集 W. 对任意的 $x \times y \in W$, 存在 $U \in \mathcal{T}_X$ 与 $V \in \mathcal{T}_Y$ 使得 $x \times y \in U \times V \subset W$. 又因为 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ 分别是 X 与 Y 的基, 因此存在 $B \in \mathcal{B}$ 与 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in B \subset U$ 以及 $y \in C \subset V$, 从而

$$x \times y \in B \times C \subset U \times V \subset W.$$

由命题 2.5 即得 $\mathcal{D}$ 是乘积拓扑的基. □

例 2.15 $\mathbb{R}$ 上标准拓扑的乘积称为 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑. 根据命题 2.14, $\mathbb{R}^2$ 中各边平行于坐标轴的不含边界的矩形

$$\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 上标准拓扑的基.

我们把映射

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\longrightarrow X \\ x \times y &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi_2 : X \times Y &\longrightarrow Y \\ x \times y &\longmapsto y \end{aligned}$$

称为投影. 如果 U 是 X 中的开集, V 是 Y 中的开集, 那么

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \qquad \text{与} \qquad \pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

是 $X \times Y$ 中的开集.

命题 2.16 (乘积拓扑的子基) 设 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间, 那么子集族

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$$

是 $X \times Y$ 上乘积拓扑的一个子基.

证明 因为 $X \times Y \in \mathcal{S}$, 故 $\mathcal{S}$ 是 $X \times Y$ 的一个子基. 任取 $U \in \mathcal{T}_X$ 与 $V \in \mathcal{T}_Y$, 由于

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V,$$

故由子基 $\mathcal{S}$ 生成的基恰好是乘积拓扑的基, 即 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑是乘积拓扑. □

命题 2.16 的作用在于我们能够借此想法对任意多个拓扑空间构造它们的乘积空间, 相应的讨论将在后面进行.

2.5 子拓扑

定义 2.17 (子拓扑) 设 Y 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集, 那么子集族

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\} \tag{2.5}$$

是 Y 上的一个拓扑, 称为子拓扑, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 称为 $(X, \mathcal{T})$ 的子空间.

现在证明式 (2.5) 确实是一个拓扑. 显然 $\varnothing = \varnothing \cap Y$ 与 $Y = X \cap Y$ 都在 $\mathcal{T}_Y$ 中. 又若 $A = U \cap Y$ 与 $B = V \cap Y$ 是 $\mathcal{T}_Y$ 中的两个成员, 那么 $A \cap B = (U \cap V) \cap Y$ 也在 $\mathcal{T}_Y$ 中. 最后若 $\{A_\alpha\}$ 是 $\mathcal{T}_Y$ 中的一族成员, 其中 $A_\alpha = U_\alpha \cap Y$, 那么

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap Y) = \Big(\bigcup_\alpha U_\alpha\Big) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

这说明 $\mathcal{T}_Y$ 是一个拓扑.

为避免引起混淆, 当 $U \in \mathcal{T}_Y$ 时, 我们称 U 在 Y 中是开的; 当 $U \in \mathcal{T}$ 时, 称 U 在 X 中是开的.

命题 2.18 (子拓扑的基) 若 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的基, Y 是 X 的子空间, 则

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

是子拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 的基.

证明 任取 $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$ 与 $x \in U \cap Y$. 因为 $x \in U$, 故存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in \mathcal{B} \subset U$, 从而

$$x \in B \cap Y \subset U \cap Y.$$

由命题 2.5 知 $\mathcal{B}_Y$ 是 $\mathcal{T}_Y$ 的基. □

性质 2.19 (开集的传递性) 设 X 为拓扑空间, $A \subset Y \subset X$. 若 Y 是 X 中的开集, A 是 Y 中的开集, 那么 A 是 X 中的开集.

证明 因为 A 是 Y 中的开集, 故存在 X 中的开集 V 使得 $A = V \cap Y$, 从而 A 作为 X 中两个开集的交仍是 X 中的开集. □

命题 2.20 (子拓扑与乘积拓扑的相容性) 设 A 是 X 的子空间, B 是 Y 的子空间, 则 $A \times B$ 上的乘积拓扑 $\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B$ 与 $A \times B$ 作为 $X \times Y$ 的子空间拓扑 $\mathcal{T}_{A\times B}$ 是相同的.

证明 设 U 是 X 中的开集, V 是 Y 中的开集. 因为

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B),$$

故 $A \times B$ 上的子拓扑的基与 $A \times B$ 上乘积拓扑的基是相同的, 从而先考虑乘积拓扑再考虑子拓扑与先考虑子拓扑再考虑乘积拓扑所得结果是一样的. □

以后若无特殊说明, 当考虑子集的拓扑时, 我们总考虑子拓扑.

2.6 闭集与极限点

定义 2.21 (闭集) 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$. 若 $X - A$ 是 X 中的开集, 则称 A 是 X 中的闭集.

简言之, 开集的补集是闭集. 由定义立马可得闭集的一些基本结论:

定理 2.22 (闭集的基本性质) 设 X 为一拓扑空间, 那么

(1) 空集 $\varnothing$ 与全集 X 是闭集.

(2) 有限多个闭集的并仍是闭集.

(3) 任意多个闭集的交仍是闭集.

例 2.23 (开集与闭集)

• 设实数 $a < b$, 那么 $[a, b]$ 与 $[a, +\infty)$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的闭集, 但 $[a, b)$ 在 $\mathbb{R}$ 中既不是开的也不是闭的.

• 离散拓扑中的每个子集都是既开又闭的.

• 考虑 $\mathbb{R}$ 的子空间 $Y = [0, 1] \cup (2, 3)$, 那么 $[0, 1]$ 与 $(2, 3)$ 在 Y 中既开又闭. 事实上, 由于 $[0, 1] = (-0.5, 1.5) \cap Y$, 而 $(-0.5, 1.5)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 故 $[0, 1]$ 是 Y 中的开集. 此外, $(2, 3) = (2, 3) \cap Y$ 也是 Y 中的开集, 而 $[0, 1]$ 与 $(2, 3)$ 在 Y 中互为补集, 故二者在 Y 中都是既开又闭的. //

回忆一下, A 是子空间 $Y \subset X$ 中的开集当且仅当存在 X 中的开集 U 使得 $A = U \cap Y$. 下面我们将会看到, 子空间中的闭集有着类似的性质.

命题 2.24 (子空间中闭集的刻画) 设 Y 是 X 的子空间, $A \subset Y$, 那么 A 是 Y 中的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 C 使得 $A = C \cap Y$.

证明 ($\Longrightarrow$) 由假设知 $Y - A$ 是 Y 中的开集, 于是根据子拓扑的定义, 存在 X 中的开集 U 使得 $Y - A = U \cap Y$, 从而

$$A = Y - (Y - A) = Y - U \cap Y = Y - U = (X - U) \cap Y.$$

取闭集 $C = X - U$ 即得结论.

($\Longleftarrow$) 因为

$$Y - A = Y - C \cap Y = Y - C = (X - C) \cap Y,$$

而 $X - C$ 是 X 中的开集, 故 $Y - A$ 是 Y 中的开集, A 是 Y 中的闭集. □

性质 2.19 给出了开集的传递性. 我们即将看到, 闭集也有类似的结论.

推论 2.25 (闭集的传递性) 设 X 为拓扑空间, $A \subset Y \subset X$. 若 Y 是 X 中的闭集, A 是 Y 中的闭集, 那么 A 是 X 中的闭集.

证明 因为 A 是 Y 中的闭集, 故存在 X 中的闭集 C 使得 $A = C \cap Y$. 因此 A 作为 X 中两个闭集的交仍是 X 中的闭集. $\square$

定义 2.26 (内部与闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 则称

$$\mathrm{Int}(A) := \bigcup \{U \mid U \text{ 是 } X \text{ 中含于 } A \text{ 的开集}\}$$

为 A 的内部, 称

$$\overline{A} = \mathrm{Cl}(A) := \bigcap \{C \mid C \text{ 是 } X \text{ 中包含 } A \text{ 的闭集}\}$$

为 A 的闭包.

简单来说, A 的内部就是含于 A 的全体开集之并, A 的闭包就是包含 A 的全体闭集之交, 因而 $\mathrm{Int}(A)$ 是 X 中含于 A 的最大开集, $\overline{A}$ 是 X 中包含 A 的最小闭集. 另外易知若 A 为开集, 那么 $A = \mathrm{Int}(A)$; 若 A 为闭集, 那么 $A = \overline{A}$. 为了强调所考虑的外部空间 X, 我们也把 A 在 X 中的内部与闭包分别记为 $\mathrm{Int}_X(A)$ 与 $\mathrm{Cl}_X(A)$.

性质 2.27 (闭包与交并运算) 设 X 为拓扑空间.

(1) 对 X 的任意一族子集 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, 有

$$\bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha}, \qquad \overline{\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}.$$

(2) 对 X 的任意有限个子集 $A_1, \dots, A_n$, 有

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}.$$

证明 (1) 显然闭包具有 “单调性”: 若 $A \subset B$, 那么 $\overline{A} \subset \overline{B}$. 任取 $\beta \in J$, 则 $A_\beta \subset \bigcup A_\alpha$, 故 $\overline{A_\beta} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$, 于是 $\bigcup \overline{A_\beta} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$. 另一结论可以类似得到.

(2) 只需证明两个集合的情况. 由 (1) 知 $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. 另一方面, $\overline{A} \cup \overline{B}$ 是包含 $A \cup B$ 的闭集, 故 $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. $\square$

命题 2.28 (子空间中的闭包) 若 Y 是 X 的子空间, $A \subset Y$, 那么

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y.$$

证明 一方面, 因为 $\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y$ 是 Y 中包含 A 的闭集, 故

$$\mathrm{Cl}_Y(A) \subset \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y.$$

另一方面, 由于 $\mathrm{Cl}_Y(A)$ 在 Y 中是闭的, 故存在 X 中的闭集 C 使得 $\mathrm{Cl}_Y(A) = C \cap Y$, 这说明 $A \subset C$. 注意到 C 是 X 中的闭集, 于是 $\mathrm{Cl}_X(A) \subset C$, 从而

$$\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y \subset C \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(A).$$

因此 $\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y$. $\square$

定义 2.29 (邻域) 设 x 是拓扑空间 X 中的一点. 若开集 $U \subset X$ 包含点 x, 则称 U 是 x 的一个邻域.

下面我们利用邻域来刻画集合的闭包.

命题 2.30 (用邻域刻画闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$, 那么

(1) $x \in \overline{A}$ 当且仅当对 x 的每个邻域 U 都有 $U \cap A \neq \varnothing$.

(2) 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当对每个包含 x 的基元素 B 都有 $B \cap A \neq \varnothing$.

证明 先证明 (1). 为此只需证明

$$x \in X - \overline{A} \iff \text{存在 } x \text{ 的邻域 } U \text{ 使得 } U \cap A = \varnothing.$$

($\Longrightarrow$) 由闭包的定义, 存在包含 A 的闭集 C 使得 $x \notin C$, 从而 x 属于开集 $X - C$, 这说明 $X - C$ 是 x 的一个邻域. 因为 $A \subset C$, 故 $(X - C) \cap A = \varnothing$.

($\Longleftarrow$) 取 $C = X - U$, 那么 C 是一个包含 A 的闭集, 并且 $x \notin C$, 于是由闭包的定义知 $x \notin \overline{A}$.

现在证明 (2). 由 (1) 立马可以从左推右. 下面从右推左. 任取 x 的邻域 U, 根据基的

性质, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subset U$. 由于 $B \cap A \neq \varnothing$, 故 $U \cap A \neq \varnothing$. 由 (1) 知 $x \in \overline{A}$. □

例 2.31 (闭包)

- 考虑实直线 $\mathbb{R}$, 那么

$$\overline{(0,1]} = [0,1], \qquad \overline{\{0\} \cup (1,2)} = [1,2], \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$
$$\overline{\{1/n \mid n = 1,2,\ldots\}} = \{0\} \cup \{1/n \mid n = 1,2,\ldots\}, \qquad \overline{\mathbb{Z}_+} = \mathbb{Z}_+.$$

- 考虑 $\mathbb{R}$ 的子空间 $Y = (0,1]$. 设 $A = (0,1/2)$, 那么 A 在 Y 中的闭包为

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(A) \cap Y = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap Y = \left(0, \frac{1}{2}\right]. \qquad //$$

定义 2.32 (极限点) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$. 若对 x 的任意邻域 U 均有

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing,$$

则称 x 是 A 的一个极限点. A 的全体极限点所成集合称为 A 的导集, 记为 A'.

极限点又称为聚点.

例 2.33 (导集) 考虑实直线 $\mathbb{R}$, 那么

$$(0,1]' = [0,1], \qquad \{1/n \mid n = 1,2,\ldots\}' = \{0\},$$

此外

$$\big(\{0\} \cup (1,2)\big)' = [1,2], \qquad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}, \qquad (\mathbb{Z}_+)' = \varnothing. \qquad //$$

命题 2.34 (用导集刻画闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 那么 $\overline{A} = A \cup A'$.

证明 先证 $\overline{A} \subset A \cup A'$. 任取 $x \in \overline{A}$, 那么对 x 的任一邻域 U, 有 $U \cap A \neq \varnothing$. 假设 $x \notin A$, 那么

$$U \cap (A - \{x\}) = U \cap A \neq \varnothing,$$

因此 $x \in A'$. 反之, 任取 $x \in A \cup A'$. 当 $x \in A$ 时显然有 $x \in \overline{A}$. 假设 $x \in A'$ 且 $x \notin A$. 由

极限点的定义知对 x 的任一邻域 U, 有

$$U \cap A = U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing.$$

因此仍有 $x \in \overline{A}$. □

推论 2.35 (用导集刻画闭集) 拓扑空间 X 的子集 A 是闭的当且仅当 $A' \subset A$.

最后我们给出另外几个常见的概念. 尽管它们不会在后面的学习中被用到, 但我们仍有必要了解一下.

定义 2.36 (外部, 边界) 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 称

$$\mathrm{Ext}(A) = X - \overline{A}$$

为 A 的外部, 称

$$\partial A = X - (\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Ext}(A))$$

为 A 的边界.

显然全空间 X 被它的任一子集 A 划分为了三个不相交的部分: 内部 $\mathrm{Int}(A)$、外部 $\mathrm{Ext}(A)$ 与边界 ∂A.

2.7 豪斯道夫空间与收敛

定义 2.37 (豪斯道夫空间) 若对拓扑空间 X 中任意不同的两点 x 与 y, 均存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 使得

$$U \cap V = \varnothing,$$

则称 X 是一个豪斯道夫空间.

豪斯道夫空间中的有限集具有非常良好的性质.

定理 2.38 (豪斯道夫空间中的有限集) 豪斯道夫空间中的有限集都是闭的.

证明 只需证明单点集都是闭的. 设 x_0 是豪斯道夫空间 X 中的一点, 下面证明 $\{x_0\}$ 是闭的. 任取异于 x_0 的 $x_1 \in X$, 那么由豪斯道夫空间的定义知存在 x_0 的邻域 U_0 与 x_1 的邻域 U_1 使得 $U_1 \cap U_0 = \varnothing$, 从而 $U_1 \cap \{x_0\} = \varnothing$. 这说明 $x_1 \notin \overline{\{x_0\}}$. 由 x_1 的任意性知 $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$. □

注意 "有限集是闭的" 比豪斯道夫条件要弱, 例如带有有限补拓扑的实直线 $\mathbb{R}$ 不是豪斯道夫的, 但它的每个单点集都是闭的.

定义 2.39 (T_1 空间) 若拓扑空间 X 中每个有限集都是闭的, 则称 X 是 T_1 的.

对于 T_1 空间中点集的极限点, 我们有一种新的判别方法.

命题 2.40 (T_1 空间中极限点的判定) 设 X 是一个 T_1 空间, A 是 X 的子集, 那么 $x \in A'$ 当且仅当 x 的每个邻域都包含了 A 中的无限多个点.

证明 ($\Longrightarrow$) 假设有 x 的某个邻域 U 使得

$$U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, \ldots, x_m\},$$

这里 m 是一个非负整数. 因为 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ 是闭集, 故 $V := U - \{x_1, \ldots, x_m\}$ 是开的, 从而 V 是 x 的邻域. 由于

$$V \cap (A - \{x\}) = \varnothing,$$

这与 $x \in A'$ 矛盾, 故假设错误.

($\Longleftarrow$) 任取 x 的邻域 U, 则 $U \cap A$ 含有无限多个元素, 从而 $U \cap (A - \{x\})$ 不是空集, 故 $x \in A'$. □

定义 2.41 (序列的收敛) 设 $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是拓扑空间 X 中的一个序列, $x \in X$. 若对 x 的任意邻域 U, 均存在正整数 N 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in U$, 则称序列 (x_n) 收敛于 x, 记为 $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x (n \to \infty)$, 且称 x 是该序列的一个极限.

注意序列收敛的极限不具有唯一性. 例如, 考虑集合 $X = \{a, b, c\}$ 与其上的拓扑

$$\{\varnothing, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\},$$

那么常值序列 $x_n = b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 同时收敛于 a, b, c 三点. 幸运的是, 在豪斯道夫空间中这样的情况是不会发生的.

定理 2.42 (豪斯道夫空间中极限的唯一性) 若 X 是一个豪斯道夫空间, 那么 X 中任意序列的极限至多只有一个.

证明 设序列 (x_n) 收敛于 $x \in X$. 任取异于 x 的 $y \in X$. 由豪斯道夫性知存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 由收敛的定义知存在正整数 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $x_n \in U$. 注意到 $U \cap V = \varnothing$, 故 V 不具有此性质, 因此 y 不是序列 (x_n) 的极限. □

定理 2.43 (豪斯道夫空间的继承性) 豪斯道夫空间的子空间仍是豪斯道夫空间.

证明 设 Y 是豪斯道夫空间 X 的子空间. 任取互异的两点 $x, y \in Y$. 因为 X 是豪斯道夫的, 故存在 X 中的开集 U 与 V 使得 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \varnothing$. 根据子拓扑的定义, $U \cap Y$ 与 $V \cap Y$ 是 Y 中的开集. 注意到 $x \in U \cap Y, y \in V \cap Y$ 且 $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \varnothing$, 故由 x 与 y 的任意性知 Y 是豪斯道夫的. □

2.8 连续映射与同胚

定义 2.44 (连续映射) 设有拓扑空间 X, Y 与映射 $f : X \to Y$. 若 Y 中任意开集的原像是 X 中的开集, 则称 f 是连续的.

下面的结论说明要验证一个映射的连续性, 我们不必考察全部的开集, 而只需考虑基或子基即可.

定理 2.45 (用基与子基判定连续性) 设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射, $\mathscr{B}$ 是 Y 的一个基, $\mathscr{S}$ 是 Y 的一个子基, 那么下面三条是等价的:

(1) $f : X \to Y$ 是连续的.

(2) 对任意的 $B \in \mathscr{B}$, 原像 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

(3) 对任意的 $S \in \mathscr{S}$, 原像 $f^{-1}(S)$ 是 X 中的开集.

证明 对任一子集族 $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(Y)$ 都有 $f^{-1}\left(\bigcup \mathcal{C}\right) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} f^{-1}(C)$ 及 $f^{-1}\left(\bigcap \mathcal{C}\right) =$

$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} f^{-1}(C)$, 由此即得结论. □

例 2.46 回忆一下, $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑严格细致于标准拓扑, 故恒等映射 $i:\mathbb{R}_\ell\to\mathbb{R}$ 是连续的, 但 $j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$ 不是连续的. //

定义 2.47 (在某一点连续) 设 $f:X\to Y$ 为拓扑空间之间的映射, $x_0\in X$. 若对 $f(x_0)$ 的任一邻域 V, 存在 x_0 的邻域 U 使得 $f(U)\subset V$, 则称 f 在 x_0 处是连续的.

我们马上就能看到, 映射连续性的局部定义与整体定义是相容的.

定理 2.48 (连续映射的等价刻画) 设 $f:X\to Y$ 是拓扑空间之间的映射, 则下列各条是等价的:

(1) $f:X\to Y$ 连续.

(2) Y 中任意闭集的原像是 X 中的闭集.

(3) f 在 X 的每一点处都连续.

(4) 对 X 的每个子集 A, 都有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

证明 (1) 与 (2) 的等价性是显然的.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 任取 $x_0\in X$. 对 $f(x_0)$ 的任一邻域 V, 其原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中包含了 x_0 的开集. 取 $U=f^{-1}(V)$, 便有 $f(U)=f(f^{-1}(V))\subset V$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 V 是 Y 中的开集, 下证 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 任取 $x\in f^{-1}(V)$, 那么由 f 在 x 处的连续性可知存在 x 的邻域 U_x 使得 $f(U_x)\subset V$, 因而 $x\in U_x\subset f^{-1}(V)$, 故 $f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x$ 作为开集之并也是开的.

(2) $\Longrightarrow$ (4) 因为 $\overline{f(A)}$ 是 Y 中的闭集, 故 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是 X 中的闭集. 由于 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 包含了 A, 因此 $\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 从而 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

(4) $\Longrightarrow$ (2) 设 C 是 Y 中的闭集. 由假设知

$$f(\overline{f^{-1}(C)})\subset\overline{f(f^{-1}(C))}\subset\overline{C}=C,$$

故 $\overline{f^{-1}(C)}\subset f^{-1}(C)$, 因而 $f^{-1}(C)$ 是闭的. □

定义 2.49 (同胚) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射. 若 f 是连续双射, 并且它的逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 也是连续的, 则称 f 是一个同胚. 若 X 到 Y 存在一个同胚, 则称 X 同胚于 Y.

易知同胚是全体拓扑空间所成类上的一个等价关系. 我们最关心的是处于同一等价类的拓扑空间所具有的共同性质 (称为拓扑性质). 具体来说, 若 X 与 Y 是同胚的拓扑空间且 X 具有某种性质 P, 那么 Y 也一定具有性质 P, 这样的性质便称之为拓扑性质.

定义 2.50 (拓扑嵌入) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续单射. 若限制 f 的陪域所得到的映射

$$\begin{aligned} \overline{f}: X &\longrightarrow f(X) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

是同胚, 则称 f 是一个拓扑嵌入, 简称嵌入.

例 2.51 由 $f(x) = 3x + 1$ 确定的映射 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个同胚, 其逆映射为 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)/3$. //

例 2.52 (连续双射不是同胚) 恒等映射 $i: \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$ 是连续双射, 但逆映射不连续. 此外, 记 S^1 为单位圆周, 那么由

$$f: [0,1) \to S^1, \quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

给出的映射 f 是一个连续双射, 但它的逆映射 $f^{-1}: S^1 \to [0,1)$ 却不连续. 这是因为, 取 $[0,1)$ 中的开集 $U = [0, 1/4)$, 那么 U 在 f 下的像 $f(U)$ 不是 S^1 中的开集 (如图 2.5). //

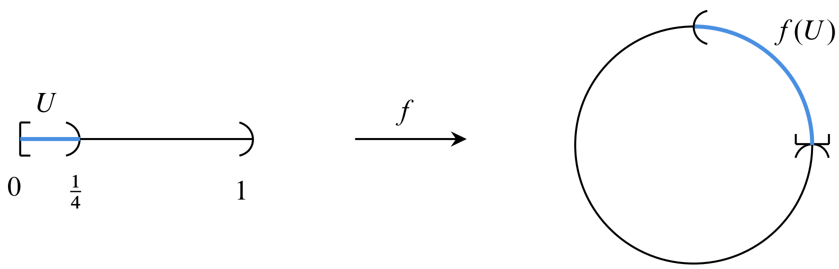


图 2.5: 连续双射不是同胚

定理 2.53 (连续映射的构造) 设 X, Y, Z 均为拓扑空间, 那么

(1) **(常值映射)** 常值映射 $f : X \to Y, x \mapsto y_0$ 是连续的.

(2) **(含入映射)** 设 A 是 X 的子空间, 那么含入映射 $j : A \to X$ 是连续的.

(3) **(复合映射)** 若 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$ 均连续, 那么复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 也是连续的.

(4) **(限制定义域)** 若 $f : X \to Y$ 连续, $A \subset X$, 那么 f 在 A 上的限制 $f|_A : A \to Y$ 也是连续的.

(5) **(改变陪域)** 设 $f : X \to Y$ 是连续的. 若 $f(X) \subset Z \subset Y$, 那么将 f 的陪域限制为 Z 所得的映射 $g : X \to Z$ 是连续的; 若 $Y \subset Z$, 那么扩张 f 的陪域所得的映射 $h : X \to Z$ 是连续的.

(6) **(分块连续)** 设 $f : X \to Y$. 若 X 是一族开集 $\{U_\alpha\}$ 的并, 且每个 $f|_{U_\alpha}$ 是连续的, 那么 f 是连续的.

证明 (1) 对 Y 中的任一开集 V, 原像 $f^{-1}(V)$ 要么是空集 $\varnothing$, 要么是全集 X. 无论哪种情形 $f^{-1}(V)$ 都是 X 中的开集.

(2) 对 X 中的任一开集 V 都有 $j^{-1}(V) = V \cap A$, 这是 A 中的开集.

(3) 任取 Z 中开集 W, 那么 $g^{-1}(W)$ 是 Y 中的开集, $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 中的开集, 而 $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$, 于是 $g \circ f$ 是连续的.

(4) 只需注意到 $f|_A : A \to Y$ 是 $f : X \to Y$ 与含入映射 $j : A \to X$ 的复合即可.

(5) 先考虑限制陪域的情形. 任取 Z 中开集 $W = V \cap Z$, 这里 V 是 Y 中开集, 那么

$$g^{-1}(W) = g^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z).$$

由于 $f(X) \subset Z$, 故 $f^{-1}(Z) = X$, 从而 $g^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ 是开的. 再考虑扩大陪域的情况. 只需注意到 $h = j \circ f$ 是含入映射 $j : Y \to Z$ 与 $f : X \to Y$ 的复合即可.

(6) 任取 Y 中的开集 V, 那么 $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 U_α 中的开集. 又因为 U_α 是 X 中的开集, 故 $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 从而 $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. $\square$

定理 2.54 (拼接引理) 设拓扑空间 X, Y 且 $X = A \cup B$, 其中 A, B 是 X 中的闭集. 若 $f: A \to Y$ 与 $g: B \to Y$ 都是连续的, 且在 $A \cap B$ 上有 $f(x) = g(x)$, 那么由

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

给出的映射 $h: X \to Y$ 是连续的.

证明 易知对 Y 中的任意闭集 C 都有 $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. 又因为 A 是 X 中的闭集, 而 $f^{-1}(C)$ 是 A 中的闭集, 故 $f^{-1}(C)$ 是 X 中的闭集. 同理 $g^{-1}(C)$ 也是 X 中的闭集, 于是 $h^{-1}(C)$ 作为二者之并也是 X 中的闭集. □

例 2.55 定义为

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{2}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

的函数 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的. //

命题 2.53 的 (6) 与拼接引理 2.54 有相似之处: 二者都是将局部的连续映射粘合成整个空间上的连续映射. 事实上, 由命题 2.53 (6) 的证明可以看出这一操作对一族开集和有限多个闭集的情形都是成立的, 但对无限个闭集则没有相应结论 (因为无限多个闭集之并不一定是闭集).

2.9 乘积拓扑 (任意个空间)

定义 2.56 (一族集合的乘积) 任给一族集合 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$, 定义它的乘积 (笛卡尔积) 为

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \left\{ x: J \to \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha \;\middle|\; \text{对每个 } \alpha \in J, \text{有 } x(\alpha) \in X_\alpha \right\}.$$

通常把 $x(\alpha)$ 记为 x_α, 称为 x 的第 α 个坐标. 注意到 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 中映射的定义域与陪域是固定的, 因此要确定映射 x, 我们只需要对每个 $\alpha \in J$ 确定 $x_\alpha \in X_\alpha$ 即可. 由此我们可以把 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 中的元素表示为 $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$. 如果乘积 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 中的每个因子 X_α 都是同一个集合 X, 那么我们通常将 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 简记为 X^J, 其中的元素称为 X 的 J-元组.

当指标集 J 不重要或者是明确的时候, 我们可以将 $\prod_{\alpha\in J}$ 简写为 $\prod$, 将 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 简写为 (x_α).

任给 $\beta\in J$, 我们把映射

$$\begin{aligned}\pi_\beta:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha&\longrightarrow X_\beta\\(x_\alpha)_{\alpha\in J}&\longmapsto x_\beta\end{aligned}$$

称为关于第 β 个分量的投影.

定义 2.57 (盒拓扑) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则称由基

$$\mathscr{B}_{\text{box}}=\left\{\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\;\middle|\;\text{对每个 }\alpha\in J, U_\alpha\text{ 是 }X_\alpha\text{ 中的开集}\right\}\tag{2.6}$$

生成的拓扑为 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 上的盒拓扑 (box topology).

容易知道式 (2.6) 确实给出了一个基: 显然 $\mathscr{B}_{\text{box}}$ 覆盖了 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 且因为

$$\Big(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\Big)\cap\Big(\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\Big)=\prod_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap V_\alpha),$$

故 $\mathscr{B}_{\text{box}}$ 中任意两个成员的交仍在 $\mathscr{B}_{\text{box}}$ 中.

定义 2.58 (乘积拓扑) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 称由子基

$$\mathscr{S}=\bigcup_{\beta\in J}\left\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\;\middle|\;U_\beta\text{ 是 }X_\beta\text{ 中的开集}\right\}\tag{2.7}$$

生成的拓扑称为 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 上的乘积拓扑, 相应的拓扑空间称为乘积空间.

将由式 (2.7) 生成的基记为 $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$. 因 $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ 中的成员是 $\mathscr{S}$ 中成员的有限交, 故任意的 $B\in\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ 可以表示为

$$B=\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1})\cap\cdots\cap\pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n}),$$

这里 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 是互异的指标. 因此 $(x_\alpha)\in B$ 当且仅当 $x_{\beta_1}\in U_{\beta_1},\dots,x_{\beta_n}\in U_{\beta_n}$. 注意

到其余的分量 x_α 可以任意选取, 故 B 可以表示为

$$B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

这里当 $\alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_n$ 时 $U_\alpha = X_\alpha$. 总结以上讨论我们便得到了:

定理 2.59 (盒拓扑与乘积拓扑基的比较) 盒拓扑与乘积拓扑分别有基

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \,\middle|\, \text{对每个 } \alpha, U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集} \right\},$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \,\middle|\, \text{对每个 } \alpha, U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集, 并且除有限个 } \alpha \text{ 外有 } U_\alpha = X_\alpha \right\}.$$

至此可以看出: 对于有限个空间的乘积 $\prod_{i=1}^n X_i$, 其上的盒拓扑与乘积拓扑是相同的, 但一般情况下盒拓扑要比乘积拓扑细致, 因为由定理 2.59 知 $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}_{\text{box}}$. 以后若无特殊说明, 我们总在笛卡尔积 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 上考虑乘积拓扑.

定理 2.60 (盒拓扑与乘积拓扑的 “更小” 的基) 设有一族拓扑空间 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$, 每个 X_α 有基 $\mathcal{B}_\alpha$, 那么

$$\left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \,\middle|\, \text{对每个 } \alpha \text{ 都有 } B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \right\}$$

是 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 上盒拓扑的基,

$$\left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha \,\middle|\, \text{对有限个 } \alpha, \text{有 } B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, \text{其余的 } \alpha \text{ 满足 } B_\alpha = X_\alpha \right\}$$

是 $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ 上乘积拓扑的基.

例 2.61 ($\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑) 全体开区间构成了 $\mathbb{R}$ 的一个基, 因此形如

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

的 n 维立方体全体构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 注意到 $\mathbb{R}^n$ 是有限个空间的乘积, 因此其上的盒拓扑与乘积拓扑是一样的, 我们称之为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑. 若无特殊说明, 提到 $\mathbb{R}^n$ 时我们总考虑它的标准拓扑. //

定理 2.62 (乘积空间的基本性质) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间.

(1) **(子空间)** 若 A_α 是 X_α 的子空间, 那么 $\prod A_\alpha$ 是 $\prod X_\alpha$ 的子空间.

(2) **(豪斯道夫性)** 若每个 X_α 都是豪斯道夫空间, 那么 $\prod X_\alpha$ 也是豪斯道夫空间.

(3) **(闭包)** 设 A_α 是 X_α 的子集, 那么 $\overline{\prod A_\alpha} = \prod \overline{A_\alpha}$.

证明 (1) 由等式

$$\prod(U_\alpha \cap A_\alpha) = \left(\prod U_\alpha\right) \cap \left(\prod A_\alpha\right),$$

易得结论, 其中 U_α 是 X_α 中的开集, 并且只有至多有限个不等于全空间 X_α.

(2) 设 $x = (x_\alpha)$ 与 $y = (y_\alpha)$ 是 $\prod X_\alpha$ 中的互异两点. 因为 $x \neq y$, 故存在 $\beta \in J$ 使得 $x_\beta \neq y_\beta$. 由 X_β 的豪斯道夫性知 X_β 中存在开集 U_β 与 V_β 使得 $x_\beta \in U_\beta, y_\beta \in V_\beta$ 且 $U_\beta \cap V_\beta = \varnothing$. 取 $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ 与 $V = \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$, 那么 U 与 V 分别是 x 与 y 的邻域且 $U \cap V = \varnothing$.

(3) 先证右边含于左边. 任取 $x = (x_\alpha) \in \prod \overline{A_\alpha}$. 设 $U = \prod U_\alpha$ 是包含 x 的一个基元素, 那么

$$U \cap \left(\prod A_\alpha\right) = \left(\prod U_\alpha\right) \cap \left(\prod A_\alpha\right) = \prod(U_\alpha \cap A_\alpha).$$

因为 $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$, 故 $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing$, 于是取 $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$, 则有 $y = (y_\alpha) \in U \cap \left(\prod A_\alpha\right)$, 因此 $x \in \overline{\prod A_\alpha}$.

再证左边含于右边. 设 $x = (x_\alpha) \in \overline{\prod A_\alpha}$, 下证 $x \in \prod \overline{A_\alpha}$. 对每个指标 $\beta \in J$, 任取 x_β 的邻域 U_β, 那么 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ 是 x 的一个邻域, 从而

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \left(\prod A_\alpha\right) \neq \varnothing.$$

取 $y = (y_\alpha) \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \left(\prod A_\alpha\right)$, 那么 $y_\beta \in U_\beta \cap A_\beta$, 故 $x_\beta \in \overline{A_\beta}$, 于是 $x \in \prod \overline{A_\alpha}$. □

定理 2.63 (到乘积空间的映射的连续性等价于分量的连续性) 设有拓扑空间之间的一族映射 $\{f_\alpha : A \to X_\alpha\}_{\alpha\in J}$. 定义 $f : A \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 为 $f(x) = \left(f_\alpha(x)\right)_{\alpha\in J}$, 那么 f 连续当且仅当每个 f_α 均连续.

证明 ($\Longrightarrow$) 直接由乘积拓扑的定义即得每个投影 $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ 都是连续的, 因

此 $f_\beta = \pi_\beta \circ f$ 连续.

($\Longleftarrow$) 任取 $\prod X_\alpha$ 子基中的成员 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, 其中 U_β 是 X_β 中的开集. 因 f_β 连续, 故 $f_\beta^{-1}(U_\beta)$ 是 A 中的开集, 从而 $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta)$ 也是 A 中开集, 故 f 连续. $\square$

注意定理 2.63 对盒拓扑是不成立的, 为此我们给出下面的例子.

例 2.64 令 $X_n = \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, 并记 $\mathbb{R}^\omega := \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} X_n$. 定义函数

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega, \quad f(t) = (t, t, \ldots).$$

对每个正整数 n, 函数 f 的第 n 个分量为恒等映射

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(t) = t.$$

如果为 $\mathbb{R}^\omega$ 赋予乘积拓扑, 那么根据定理 2.63, 函数 f 是连续的. 然而, 如果为 $\mathbb{R}^\omega$ 赋予盒拓扑, 那么 f 就不是连续的. 为了说明这一点, 只需注意到

$$U = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \cdots$$

是盒拓扑中的开集, 但其原像 $f^{-1}(U) = \{0\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的开集. //

定理 2.65 (乘积空间中序列的收敛性等价于各个分量的收敛性) 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是乘积空间 $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中的一个序列, $x \in X$, 那么 $x_n \to x$ 当且仅当对每个 $\alpha \in J$ 都有 $\pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$.

证明 ($\Longrightarrow$) 任意取定 α. 因投影 $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ 是连续的, 故任取 $\pi_\alpha(x)$ 的邻域 V, 存在 x 的邻域 U 使得 $\pi_\alpha(U) \subset V$. 由于 $x_n \to x$, 故存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in U$, 于是 $\pi_\alpha(x_n) \in V$. 这说明 $\pi_\alpha(x_n) \to \pi_\alpha(x)$.

($\Longleftarrow$) 设 $\prod U_\alpha$ 是 X 中包含 x 的任一基元素. 不妨设 $\prod U_\alpha \neq X$. 记不等于全空间 X_α 的那些 U_α 所对应的指标为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. 对每个 $i = 1, \ldots, k$, 因 $\pi_{\alpha_i}(x_n) \to \pi_{\alpha_i}(x)$, 故存在正整数 N_i 使得当 $n \geqslant N_i$ 时有 $\pi_{\alpha_i}(x_n) \in U_{\alpha_i}$. 取 $N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$, 那么当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in \prod U_\alpha$. 这说明 $x_n \to x$. $\square$

例 2.66 仍然考虑例 2.64 中的 $\mathbb{R}^\omega$. 取 $\mathbb{R}^\omega$ 中的点 $x = (0, 0, 0, \ldots)$, 又定义 $\mathbb{R}^\omega$ 中的

序列 (x_n) 为

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots\right).$$

任意取定指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, 那么 $\pi_\alpha(x_n) = 1/n$, 因此 $\pi_\alpha(x_n) \to 0 = \pi_\alpha(x)$. 考虑 $\mathbb{R}^\omega$ 上的乘积拓扑, 那么根据定理 2.65, 序列 (x_n) 收敛于 x. 然而若考虑 $\mathbb{R}^\omega$ 上的盒拓扑, (x_n) 却不收敛于 x. 要证明这一事实, 取 x 的邻域

$$U = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \cdots.$$

注意到对每个正整数 n, 点 x_n 的第 n 个坐标为 $1/n$, 而 $1/n$ 不在开区间 $(-1/n, 1/n)$ 内, 于是 $x_n \notin U$. 由于序列 (x_n) 没有任何一项在 U 中, 因此 (x_n) 不收敛于 x. //

至此我们已经发现盒拓扑的性质要比乘积拓扑差很多, 这就是我们在集合的笛卡尔积上往往考虑乘积拓扑而不是盒拓扑的原因.

2.10 度量拓扑

定义 2.67 (度量空间) 设 X 是一个集合. 若函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足对任意的 $x, y, z \in X$, 均有

(1) **(正定性)** $d(x, y) \geqslant 0$. 此外, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(2) **(对称性)** $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) **(三角不等式)** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

则称 d 是 X 上的度量或距离函数, (X, d) 称为一个度量空间.

对度量空间 (X, d) 中任意的点 $x \in X$ 与实数 $r > 0$, 我们定义以 x 为中心, $r > 0$ 为半径的开球为

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

如果度量 d 是明确的, 我们常常将 $B_d(x, r)$ 简写为 $B(x, r)$.

下面我们将会看到 “开球” 这一名词术语是合理的, 因为在相应的度量拓扑中它是开集.

定义 2.68 (度量拓扑) 设 (X,d) 为度量空间, 那么以全体开球

$$\{B(x,r) \mid x \in X, r > 0\} \tag{2.8}$$

为基生成的拓扑 $\mathcal{T}_d$ 称为 X 上由 d 诱导的度量拓扑.

现在验证式 (2.8) 确实给出了一个基. 显然全体开球覆盖了整个空间. 其次, 任取两个开球 $B(x,r), B(y,\delta)$ 以及点 $z \in B(x,r) \cap B(y,\delta)$, 令

$$\varepsilon = \min\{r - d(x,z), \delta - d(y,z)\},$$

那么 $B(z,\varepsilon) \subset B(x,r) \cap B(y,\delta)$. 至此我们证明了全体开球满足基的两个条件.

下面的结论说明对开球内的任意一点都能找到一个以该点为中心的小开球含于原来的开球.

命题 2.69 (中心球性质) 设 (X,d) 为度量空间, $B(x,r)$ 是其中的开球, 那么对 $B(x,r)$ 内的任意一点 y, 存在 $\delta > 0$ 使得 $B(y,\delta) \subset B(x,r)$.

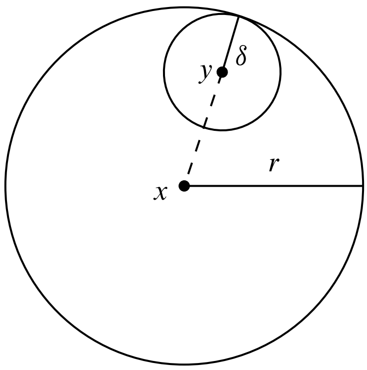


图 2.6: 中心球性质

证明 取 $\delta = r - d(x,y)$ 即可. □

由度量拓扑的定义立马可得

命题 2.70 (度量空间中开集的刻画) 设 (X,d) 为度量空间, 那么 $U \subset X$ 是相应度

量拓扑中的开集当且仅当对任意的 $x \in U$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset U$. 换言之,

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X \mid \text{对任意的 } x \in U, \text{存在 } r > 0 \text{ 使得 } B(x,r) \subset U\}.$$

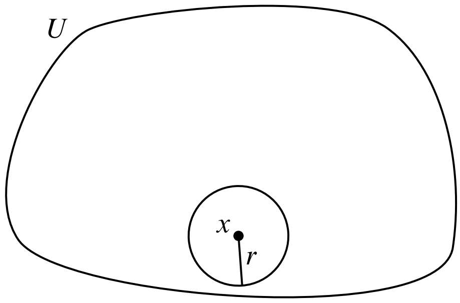


图 2.7: 度量空间中的开集

利用命题 2.70 易知度量空间 (X,d) 中半径小于 1 的全体开球

$$\{B(x,r) \mid x \in X, 0 < r < 1\}$$

也是相应度量拓扑 $\mathcal{T}_d$ 的一个基.

例 2.71 (离散度量) 设 X 是一个集合, 定义 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 为

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

那么 d 是一个度量, 称为 X 上的离散度量, 由其诱导的拓扑就是 X 上的离散拓扑. (事实上, 这正是 "离散度量" 这一名称的由来.) //

例 2.72 ($\mathbb{R}$ 上的标准度量) 定义 $\mathbb{R}$ 上的标准度量为

$$d(x,y) = |x - y|,$$

那么其上的开球就是开区间, 因而由标准度量 d 诱导的拓扑就是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑. //

定义 2.73 (可度量化空间) 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间. 若存在 X 上的度量 d 使得由 d 诱导的拓扑恰好为 $\mathcal{T}$, 则称 $(X,\mathcal{T})$ 是可度量化的.

并非所有的拓扑都是可度量化的. 数学家们非常关心拓扑空间要满足哪些条件才可度量化, 对此我们将在后面的章节作进一步的讨论.

定义 2.74 (有界集) 设 (X,d) 是度量空间, $A \subset X$. 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x, y \in A$ 均有

$$d(x,y) \leqslant M,$$

则称子集 A 是有界的. 如果 A 是非空的有界子集, 那么我们把

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

称为 A 的直径.

定义 2.75 (标准有界度量) 设 (X,d) 为度量空间, 定义 $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ 为

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\},$$

称 $\bar{d}$ 是相应于 d 的标准有界度量.

我们需要说明 $\bar{d}$ 确实是一个度量. 首先, $\bar{d}$ 的正定性与对称性是容易得到的. 其次对于三角不等式

$$\bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z) \geqslant \bar{d}(x,z),$$

当 $d(x,y) \geqslant 1$ 或 $d(y,z) \geqslant 1$ 时是显然成立的. 如果 $d(x,y) < 1$ 且 $d(y,z) < 1$, 那么

$$\bar{d}(x,z) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) = \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z).$$

因此三角不等式也是满足的.

命题 2.76 (标准有界度量诱导的拓扑) 设 (X,d) 为度量空间, 那么 d 与 $\bar{d}$ 诱导了相同的拓扑, 这里 $\bar{d}$ 是相应于 d 的标准有界度量.

证明 由于 $\mathcal{T}_d$ 有基 $\{B_d(x,r) \mid x \in X, 0 < r < 1\}$, $\mathcal{T}_{\bar{d}}$ 有基 $\{B_{\bar{d}}(x,r) \mid x \in X, 0 < r < 1\}$, 而当 $0 < r < 1$ 时 $B_{\bar{d}}(x,r) = B_d(x,r)$, 故 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$. □

命题 2.76 说明有界性不是拓扑性质, 因为 (X,d) 中的子集可能无界, 而在标准有界度量 $\bar{d}$ 下 X 的任意子集都是有界的.

现在我们考虑一类最常见的度量空间——$\mathbb{R}^n$.

定义 2.77 ($\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量与方形度量) 设 $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$\|x\|=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{1/2}$$

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d 为

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{1/2}.$$

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的方形度量 ρ 为

$$\rho(x,y)=\max\left\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\right\}.$$

我们将会看到, $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量与方形度量诱导了相同的拓扑, 并且这一拓扑就是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑 (即关于 $\mathbb{R}$ 的乘积拓扑). 在此之前让我们先做一点准备工作.

命题 2.78 (度量拓扑粗细的比较) 设 d,d' 是集合 X 上的两个度量, $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ 分别是相应的度量拓扑, 那么 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 细致当且仅当对任意的 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$.

证明 设开球族 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 分别是 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 的基.

$(\Longrightarrow)$ 任取 $x\in X$ 与 $\varepsilon>0$. 根据命题 2.6, 存在 $B_{d'}(y,r)\in\mathcal{B}'$ 使得 $x\in B_{d'}(y,r)\subset B_d(x,\varepsilon)$. 由中心球性质知存在 $\delta>0$ 使得 $B_{d'}(x,\delta)\subset B_{d'}(y,r)\subset B_d(x,\varepsilon)$.

$(\Longleftarrow)$ 任取 $x\in X$ 以及包含 x 的 $B_d(y,r)\in\mathcal{B}$. 根据中心球性质, 存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B_d(x,\varepsilon)\subset B_d(y,r)$. 由假设知存在 $\delta>0$ 使得 $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$, 从而 $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(y,r)$. 再次利用命题 2.6 即得结论. □

定理 2.79 (欧氏度量与方形度量均诱导乘积拓扑) $\mathbb{R}^n$ 上由欧氏度量 d、方形度量 ρ 所诱导的拓扑均与 $\mathbb{R}^n$ 上的乘积拓扑相同.

证明 容易证明对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{n}\rho(x, y).$$

因此对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 与 $\varepsilon > 0$, 有

$$B_d(x, \varepsilon) \subset B_\rho(x, \varepsilon), \qquad B_\rho(x, \varepsilon) \subset B_d(x, \sqrt{n}\varepsilon).$$

由命题 2.78 知 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$. 下面证明 $\mathcal{T}_\rho$ 等于标准拓扑. 任取 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及标准拓扑中包含 x 的基元素 $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, 那么对每个 i, 存在 $\varepsilon_i > 0$ 使得

$$(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \subset (a_i, b_i).$$

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, 那么 $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subset \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. 这说明 $\mathcal{T}_\rho$ 比标准拓扑细致.

另一方面, 任取 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及包含 x 的 $B_\rho(y, r)$, 那么

$$\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\} < r.$$

取 $B = \prod_{i=1}^n (y_i - r, y_i + r)$, 则有 $x \in B \subset B_\rho(y, r)$. 这说明标准拓扑比 $\mathcal{T}_\rho$ 细致. □

$\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量与方形度量无法直接推广到 $\mathbb{R}^\omega$ 上. 为赋予乘积空间 $\mathbb{R}^\omega$ 一个度量, 我们证明一个更一般的结论.

定理 2.80 (乘积空间的度量) 设 $\{(X_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是一列度量空间, 那么乘积空间 $\prod X_n$ 是可度量化的, 并且

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n} \right\}$$

给出了 $\prod X_n$ 上诱导乘积拓扑的一个度量, 其中 $x = (x_n), y = (y_n)$.

证明 首先证明 d 确实是一个度量. d 的正定性与对称性是显然的. 对于三角不等式, 只需注意到对所有的正整数 n 都有

$$\frac{\overline{d_n}(x_n, z_n)}{n} \leqslant \frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n} + \frac{\overline{d_n}(y_n, z_n)}{n} \leqslant d(x, y) + d(y, z),$$

然后两端关于 n 取上确界即可. 下面证明 d 所诱导的度量拓扑就是乘积拓扑.

先证乘积拓扑比 $\mathcal{T}_d$ 细致. 任取 $x \in \prod X_n$ 与 $\varepsilon > 0$. 选取正整数 N 使得 $1/N < \varepsilon$. 令

$$V = B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B_{d_N}(x_N, \varepsilon) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \cdots$$

为乘积空间 $\prod X_n$ 中的基元素, 我们将证明 $x \in V \subset B_d(x, \varepsilon)$. 对任意的 $y \in V$ 有

$$\frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n} \leqslant \begin{cases} \overline{d_n}(x_n, y_n), & n < N, \\ \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N}, & n \geqslant N. \end{cases}$$

又因为对每个 $i = 1, \ldots, N$ 都有

$$\overline{d_i}(x_i, y_i) = \min\{d_i(x_i, y_i), 1\} \leqslant d_i(x_i, y_i) < \varepsilon,$$

从而

$$d(x, y) \leqslant \max\left\{\overline{d_1}(x_1, y_1), \ldots, \overline{d_N}(x_N, y_N), \frac{1}{N}\right\} < \varepsilon.$$

至此我们证明了乘积拓扑比 $\mathcal{T}_d$ 细致. 反过来, 任取 $x \in \prod X_n$ 以及乘积拓扑中包含 x 的基元素 $U = \prod U_n$, 其中对 $n = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, U_n 是 X_n 中的开集, 其余的 n 满足 $U_n = X_n$. 对每个 $n = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 选取 $\varepsilon_n \in (0, 1]$ 使得 $B_{d_n}(x_n, \varepsilon_n) \subset U_n$. 令

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_n}{n} \,\middle|\, n = \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right\}.$$

我们将证明 $x \in B_d(x, \varepsilon) \subset U$. 任取 $y \in B_d(x, \varepsilon)$, 那么对所有的正整数 n 都有

$$\frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n} \leqslant d(x, y) < \varepsilon.$$

如果 $n = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, 那么

$$\overline{d_n}(x_n, y_n) < n\varepsilon \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1.$$

因此 $d_n(x_n, y_n) < \varepsilon_n$, 从而 $y_n \in U_n$, $y \in U = \prod U_n$. 我们证明了 $\mathcal{T}_d$ 比乘积拓扑细致. □

例 2.81 ($\mathbb{R}^\omega$ 是可度量化的) 对 $\mathbb{R}^\omega$ 中的任意两点 x 与 y 定义度量

$$D(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\{\frac{\bar{d}(x_n, y_n)}{n}\right\},$$

它诱导的度量拓扑是 $\mathbb{R}^\omega$ 上的乘积拓扑. //

2.11 度量拓扑的性质

命题 2.82 (子拓扑) 设 A 是度量空间 (X, d) 的子集, 那么 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 在 $A \times A$ 上的限制诱导了 A 上的子拓扑.

证明 记 d 在 $A \times A$ 上的限制为 d_A, 那么对任意的 $x \in A$ 与 $\varepsilon > 0$ 有

$$B_{d_A}(x, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon) \cap A.$$

因此 $\mathcal{T}_{d_A}$ 就是 A 作为 X 的子空间的拓扑. □

命题 2.83 (豪斯道夫性) 度量空间都是豪斯道夫的.

证明 设 (X, d) 为度量空间, 任取其中互异的两点 x 与 y, 令 $\varepsilon = d(x, y)/3$, 定义 $U = B(x, \varepsilon)$ 与 $V = B(y, \varepsilon)$, 那么 U 与 V 分别是 x 与 y 的邻域且 $U \cap V = \varnothing$. □

定理 2.84 (序列的收敛) 设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的序列, $x \in X$, 那么 (x_n) 收敛于 x 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

证明 ($\Longrightarrow$) 根据拓扑空间中收敛的定义, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in B(x, \varepsilon)$, 于是 $d(x_n, x) < \varepsilon$. 这说明 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

($\Longleftarrow$) 任取 x 的邻域 U, 那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 由于 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, 故对上述 ε 存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $d(x_n, x) < \varepsilon$, 从而 $x_n \in B(x, \varepsilon) \subset U$. 这说明 $x_n \to x$. □

定理 2.85 (映射的连续性) 设 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是两个度量空间之间的映射, 则 f 在 $x_0 \in X$ 处连续当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d_X(x, x_0) < \delta$ 时有

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 由假设, 对任一以 $f(x_0)$ 为心的开球 $V = B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon)$, 存在以 x_0 为

心的开球 $U = B_{d_X}(x_0, \delta)$ 使得 $f(U) \subset V$.

($\Longleftarrow$) 任取 $f(x_0)$ 的邻域 V, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_{d_Y}(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. 根据假设, 对这一 ε 存在 $\delta > 0$ 使得当 $d_X(x, x_0) < \delta$ 时 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. 令 $U = B_{d_X}(x_0, \delta)$, 那么 $f(U) \subset V$. □

定理 2.86 (序列引理) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$. 若 A 中存在一个收敛于 x 的序列, 那么 $x \in \overline{A}$. 若 X 可度量化, 那么反之也对.

证明 ($\Longrightarrow$) 根据收敛的定义, x 的任一邻域都包含 A 中的点, 因此 $x \in \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) 设 X 上的拓扑可由度量 d 诱导. 因 $x \in \overline{A}$, 故对任意的正整数 n 都有

$$B_d(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing.$$

取其中的一个元素 x_n, 那么 $d(x_n, x) \to 0$, 从而序列 (x_n) 收敛于 x. □

定理 2.87 (序列收敛刻画连续性) 设 $f: X \to Y$ 是两个拓扑空间之间的映射. 若 f 连续, 那么对 X 中任一收敛到 $x \in X$ 的序列 (x_n), 都有 Y 中的序列 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x)$. 若 X 可度量化, 那么反之也对.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $f(x)$ 的邻域 V, 由 f 连续知 $f^{-1}(V)$ 是开集, 因而是 x 的邻域, 故存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in f^{-1}(V)$, 于是 $f(x_n) \in V$.

($\Longleftarrow$) 由定理 2.48 只需证明对 X 的任一子集 A, 有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. 任取 $x \in \overline{A}$, 根据序列引理, A 中存在一个收敛于 x 的序列 (x_n). 由假设知 $f(A)$ 中的序列 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x)$. 再次利用序列引理, $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

引理 2.88 (实数四则运算的连续性) 实数的加法、减法和乘法运算都是从 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数, 除法运算是从 $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数.

证明 考虑 $\mathbb{R}$ 上的度量 $d(a, b) = |a - b|$ 与 $\mathbb{R}^2$ 上的度量

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}.$$

只证明加法, 其余情况也是容易的. 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是加法运算, 即 $f(x, y) = x + y$, 下

证 f 连续. 取定 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. 由于对任意的 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 都有

$$d(f(x, y), f(x_0, y_0)) \leqslant 2\rho((x, y), (x_0, y_0)),$$

因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon/2$, 只要 $\rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ 就有 $d(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \varepsilon$. 由定理 2.85 知 f 在 (x_0, y_0) 处连续. 再由 (x_0, y_0) 的任意性知 f 是连续的. □

从拓扑空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射也可以进行四则运算, 相应的结果由逐点定义给出, 例如对两个映射 $f, g : X \to \mathbb{R}$, 二者的和与积分别为

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

定理 2.89 (连续函数的四则运算) 设 X 为拓扑空间, $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 那么 $f + g, f - g, f \cdot g$ 都是连续的. 若对所有的 x 都有 $g(x) \neq 0$, 那么 f/g 也是连续的.

证明 定义 $h : X \to \mathbb{R}^2$ 为 $h(x) = (f(x), g(x))$. 因为 f, g 均连续, 故 h 连续. 注意到 $f + g$ 等于加法 $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 与 h 的复合, 故 $f + g$ 是连续的. 类似可得 $f - g, f \cdot g$ 与 f/g 的连续性. □

最后我们考察函数序列的一致收敛性.

定义 2.90 (一致收敛) 设有从集合 X 到度量空间 (Y, d) 的函数 f 与函数序列 (f_n). 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时, 对任意的 $x \in X$ 均有

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

则称函数列 (f_n) 一致收敛于 f.

下面的结论说明连续函数的一致收敛极限也是连续的.

定理 2.91 (一致收敛定理) 设 (f_n) 是从拓扑空间 X 到度量空间 (Y, d) 的一列连续函数. 若 (f_n) 一致收敛于 f, 那么 f 也是连续的.

证明 任取 Y 中的开集 V 与 $x_0 \in f^{-1}(V)$, 我们将找到 x_0 的邻域 U 使得 $f(U) \subset V$.

因 $f(x_0) \in V$, 于是存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. 由于 (f_n) 一致收敛于 f, 故存在正整数 N 使得当 $n \geqslant N$ 时对任意的 $x \in X$ 都有

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由 f_N 的连续性可知存在 x_0 的邻域 U 使得

$$f_N(U) \subset B\left(f_N(x_0), \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

注意到对任意的 $x \in U$ 有

$$\begin{aligned} d(f(x), f_N(x)) &< \varepsilon/3, \\ d(f_N(x), f_N(x_0)) &< \varepsilon/3, \\ d(f_N(x_0), f(x_0)) &< \varepsilon/3. \end{aligned}$$

利用三角不等式即得 $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, 从而 $f(U) \subset V$. □

3 连通性与紧性

3.1 连通空间

定义 3.1 (连通空间) 设有非空的拓扑空间 X. 若 X 存在两个互不相交的非空开子集 U, V 使得

$$U \cup V = X,$$

则称 U, V 给出了 X 的一个分割. 如果 X 不存在分割, 则称 X 是连通的.

我们不把空集 $\varnothing$ 视为连通空间. 此外, 若 U, V 给出了拓扑空间 X 的一个分割, 那么 U 与 V 既是 X 中的开集也是 X 中的闭集.

命题 3.2 (开闭集刻画连通性) 设 X 为拓扑空间, 那么 X 是连通的当且仅当 $\varnothing$ 与 X 是 X 中仅有的既开又闭的集合.

证明 ($\Longrightarrow$) 假设有 $\varnothing \neq A \subsetneq X$ 使得 A 既开又闭, 那么 A 与 $X - A$ 给出了 X 的一

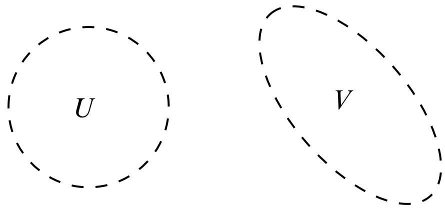


图 3.1: 不连通空间

个分割, 与 X 是连通的相矛盾.

($\Longleftarrow$) 若 X 不是连通的, 那么存在非空不交开集 U, V 使得 $U \cup V = X$, 从而 U 与 V 都是既开又闭的子集, 矛盾. □

定理 3.3 (子空间连通性的判定) 设 Y 是 X 的子空间, A, B 是 X 的非空不交子集且 $Y = A \cup B$, 那么 A, B 给出 Y 的一个分割当且仅当 A 不含 B 的极限点且 B 不含 A 的极限点. 因而若 Y 没有这样的分割, 那么 Y 是连通的.

证明 ($\Longrightarrow$) 由于 $Y = A \cup B$ 且 A 在 Y 中既开又闭, 故

$$A = \mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y,$$

这里 $\overline{A}$ 是 A 在 X 中的闭包. 于是

$$\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap Y \cap B = A \cap B = \varnothing.$$

因为 $\overline{A} = A \cup A'$, 故 $A' \cap B = \varnothing$, 即 B 不含 A 的极限点. 同理 A 不含 B 的极限点.

($\Longleftarrow$) 由 $A' \cap B = \varnothing, A \cap B' = \varnothing$ 以及 $A \cap B = \varnothing$ 可知

$$\overline{A} \cap B = \varnothing, \qquad A \cap \overline{B} = \varnothing.$$

从而

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y \subset Y - B = A,$$
$$\mathrm{Cl}_Y(B) = \overline{B} \cap Y \subset Y - A = B.$$

这说明 A 与 B 都是 Y 中的闭集, 从而给出了 Y 的一个分割. □

例 3.4 (不连通的空间)

(1) 设 $Y = [-1,0) \cup (0,1] \subset \mathbb{R}$, 那么 $[-1,0)$ 与 $(0,1]$ 形成了 Y 的一个分割.

(2) $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 的连通子空间. 事实上, $\mathbb{Q}$ 仅有的连通子空间是单点集. 设 $Y \subset \mathbb{Q}$, 点 $p, q \in Y$ 满足 $p < q$. 取无理数 $a \in (p,q)$, 那么开集

$$Y \cap (-\infty, a) \quad \text{与} \quad Y \cap (a, +\infty)$$

给出了 Y 的一个分割. //

引理 3.5 (连通子空间的归属) 设 C 和 D 形成了拓扑空间 X 的一个分割. 若 A 是 X 的连通子空间, 那么 $A \subset C$ 或者 $A \subset D$.

证明 若 $A \cap C \neq \varnothing$ 且 $A \cap D \neq \varnothing$, 那么 $A \cap C$ 与 $A \cap D$ 给出了 A 的一个分割. □

定理 3.6 (连通子空间的并) 设 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的一族连通子空间. 若

$$\bigcap A_\alpha \neq \varnothing,$$

那么 $\bigcup A_\alpha$ 也是连通的.

证明 设 $p \in \bigcap A_\alpha$. 如果 C 和 D 是 $\bigcup A_\alpha$ 的一个分割, 那么 $p \in C$ 或者 $p \in D$. 假设 $p \in C$, 那么由引理 3.5 知每个 $A_\alpha \subset C$, 从而 $\bigcup A_\alpha \subset C$, 矛盾. □

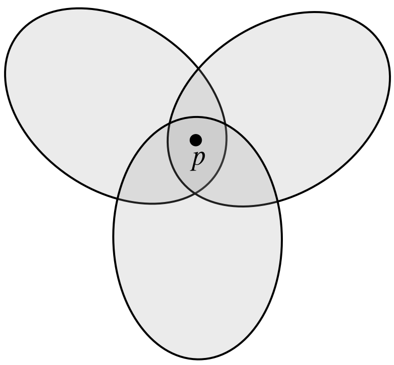


图 3.2: 一族具有公共点的连通子空间之并也是连通的

定理 3.7 (连通子空间的闭包) 设 A 是 X 的连通子空间. 若 $A \subset B \subset \overline{A}$, 那么 B 也是连通的. (特别地, $\overline{A}$ 也是连通的.)

证明 假设 B 有分割 $B = C \cup D$. 因 A 是 B 的连通子空间, 故由引理 3.5 知 $A \subset C$ 或 $A \subset D$. 不妨设 $A \subset C$, 那么 $\overline{A} \subset \overline{C}$, 从而 $B \subset \overline{C}$. 但是根据定理 3.3 有 $\overline{C} \cap D = \varnothing$, 于是 $B \cap D = \varnothing$, 矛盾. □

定理 3.8 (连通空间的连续像仍连通) 连通空间在连续映射下的像也是连通的.

证明 设 $f : X \to Y$ 为连续满射, 其中 X 是连通的. 假如 Y 有分割 $Y = A \cup B$, 那么 X 有分割

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

这与 X 连通矛盾. □

由定理 3.8 可知连通性是拓扑性质. 即是说, 如果拓扑空间 X 是连通的, 那么任何与 X 同胚的拓扑空间也都是连通的.

定理 3.9 (有限个连通空间的乘积) 有限个连通空间的乘积仍是连通空间.

证明 设 X 与 Y 是连通空间, $a \times b \in X \times Y$. 由于 $X \times \{b\}$ 与 $\{a\} \times Y$ 分别同胚于 X 与 Y, 故 $X \times \{b\}$ 与 $\{a\} \times Y$ 也是连通的. 任取 $x \in X$, 令

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y).$$

因 $x \times b \in (X \times \{b\}) \cap (\{x\} \times Y)$, 故 T_x 是连通的. 又

$$a \times b \in \bigcap_{x \in X} T_x,$$

从而

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$$

是连通的. □

定理 3.10 (任意个连通空间的乘积) 一族连通空间的乘积空间仍是连通的.

证明 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族连通空间, $X=\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$. 取定 $b=(b_\alpha)\in X$. 任给 J 的有限子集 K, 令

$$X_K=\{(x_\alpha)\in X\mid 对所有的\ \alpha\in J-K\ 都有\ x_\alpha=b_\alpha\}.$$

因为 X_K 同胚于有限乘积 $\prod_{\alpha\in K}X_\alpha$, 所以 X_K 是连通的. 由于所有的 X_K 有公共点 b, 故全体 X_K 的并集 Y 也是连通的. 最后证明 $\overline{Y}=X$, 于是 X 是连通的. 只需证明 $X\subset\overline{Y}$. 任取 $x=(x_\alpha)\in X$ 以及包含 x 的基元素 $U=\prod U_\alpha$. 设不等于全空间 X_α 的 U_α 所对应的指标为 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. 记 $K_0=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$, 令

$$y_\alpha=\begin{cases}x_\alpha, & \alpha\in K_0,\\ b_\alpha, & \alpha\in J-K_0.\end{cases}$$

那么 $(y_\alpha)\in U\cap X_{K_0}$, 因而 $U\cap Y$ 非空, $x\in\overline{Y}$. □

对一族连通空间 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 由于投影 $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to X_\beta$ 是连续满射, 故每个 X_β 也是连通的, 因此我们得到了

定理 3.11 (乘积与分量的连通性) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 那么乘积 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 连通当且仅当每个 X_α 连通.

3.2 道路连通性

引理 3.12 (实直线的连通性) 实直线 $\mathbb{R}$ 是连通的.

证明 假设 $\mathbb{R}$ 不连通, 那么存在 $\mathbb{R}$ 的两个非空不交开子集 A 与 B 使得 $\mathbb{R}=A\cup B$. 任取 $a\in A$ 与 $b\in B$. 不妨设 $a<b$, 令

$$A_0=A\cap[a,b]\quad 与\quad B_0=B\cap[a,b],$$

那么 A_0,B_0 分别是 $\mathbb{R}$ 中包含 a 与 b 的不交开集, 从而 $A_0\cup B_0$ 给出了闭区间 $[a,b]$ 的一个分割. 因为集合 A_0 有上界 b, 故可设 $c=\sup A_0$. 显然 $a\leqslant c\leqslant b$. 我们将证明

$c \notin A_0 \cup B_0$, 从而与 $[a,b] = A_0 \cup B_0$ 矛盾.

情形 (1) 假设 $c \in B_0$, 那么 $a < c$. 因为 B_0 是 $[a,b]$ 中的开集, 故由基元素的性质知存在 $\mathbb{R}$ 中的开区间 (d,e) 使得 $c \in (d,e) \cap [a,b] \subset B_0$. 由于 $a \notin B_0$, 于是 $d \geqslant a$, 进而 $(d,c] \subset B_0$, 这说明 $(d,c] \cap A_0 = \varnothing$. 由此可得 d 是 A_0 的一个上界, 但 $d < c$, 与 $c = \sup A_0$ 矛盾.

情形 (2) 假设 $c \in A_0$, 那么 $c < b$. 因为 A_0 是 $[a,b]$ 中的开集, 所以存在 $\mathbb{R}$ 中的开区间 (f,g) 使得 $c \in (f,g) \cap [a,b] \subset A_0$. 由于 $b \notin A_0$, 于是 $g \leqslant b$, 进而 $[c,g) \subset A_0$. 由于任意两个不同的实数之间必然还存在实数, 因此可取 $z \in (c,g)$, 于是 $z \in A_0$. 但 $z > c$, 这与 $c = \sup A_0$ 矛盾. $\square$

回忆一下, 我们把线性序集中形如 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ 以及 $[a,b]$ 的子集称为区间, 把形如 $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ 以及 $[a,+\infty)$ 的子集称为射线.

定理 3.13 (实直线的连通子空间) 设 A 是实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间, 那么 A 是连通的当且仅当它是以下三种类型之一: $\mathbb{R}$ 自身; $\mathbb{R}$ 中的区间; $\mathbb{R}$ 中的射线.

证明 由于开区间 (a,b) 与开射线 $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ 都同胚于 $\mathbb{R}$, 因此根据引理 3.12 它们都是连通的. 又因为

$$\overline{(a,+\infty)} = [a,+\infty), \quad \overline{(-\infty,a)} = (-\infty,a],$$
$$(a,b) \subset [a,b) \subset [a,b], \quad (a,b) \subset (a,b] \subset [a,b],$$

于是由定理 3.7 可得闭射线、闭区间与半开半闭区间的连通性.

另一方面, 如果 $\mathbb{R}$ 的非空子集 Y 不是区间 (单点集视为端点相同的闭区间) 或者射线, 那么存在 $a,b \in Y$, $a < b$ 使得 $[a,b] \not\subset Y$. 换言之, 存在 $c \in (a,b)$ 使得 $c \notin Y$. 令

$$A = (-\infty,c) \cap Y, \quad B = (c,+\infty) \cap Y,$$

那么 A, B 给出了 Y 的一个分割, Y 不连通. $\square$

下面的结论是微积分中的介值定理的一个推广.

定理 3.14 (介值定理) 设 $f: X \to Y$ 是一个连续映射, 其中 X 是连通空间, Y 是带有序拓扑的线性序集. 若 $a,b \in X$ 且 $r \in Y$ 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 那么存在

$c \in X$ 使得 $f(c) = r$.

证明 假设不存在 $c \in X$ 使得 $f(c) = r$, 那么

$$f(X) \cap (-\infty, r) \quad 与 \quad f(X) \cap (r, +\infty)$$

给出了 $f(X)$ 的一个分割 (注意 "r 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间" 这一条件保证了上面的两个集合都是非空的). 由于 X 是连通的且 f 是连续映射, 故 $f(X)$ 也是连通的, 矛盾. □

有了 $\mathbb{R}$ 上区间的连通性, 我们可以引入一个非常有用的概念.

定义 3.15 (道路连通空间) 设 X 是一个非空的拓扑空间, $x, y \in X$. 若存在连续映射 $f : [0, 1] \to X$ 使得

$$f(0) = x, \qquad f(1) = y,$$

则称 f 是 X 中从 x 到 y 的一条道路. 若对 X 中的任意两点 x, y, 都存在从 x 到 y 的道路, 则称 X 是道路连通的.

注意我们不把空集视为道路连通空间. 上述定义中的闭区间 $[0, 1]$ 可以替换为 $\mathbb{R}$ 中的任一闭区间 $[a, b]$, 因为二者是同胚的.

定理 3.16 (连续映射保持道路连通性) 道路连通空间在连续映射下的像也是道路连通的.

证明 设 $f : X \to Y$ 是一个连续满射, 其中 X 是道路连通空间. 任取 $y_1, y_2 \in Y$, 存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = y_1$ 且 $f(x_2) = y_2$. 由 X 的道路连通性, 存在连续映射 $g : [0, 1] \to X$ 使得 $g(0) = x_1, g(1) = x_2$. 于是令 $h = f \circ g$, 那么 $h : [0, 1] \to Y$ 就是 Y 中从 y_1 到 y_2 的一条道路. □

定理 3.16 说明道路连通性是一个拓扑性质.

定理 3.17 (道路连通 $\Longrightarrow$ 连通) 道路连通空间一定是连通的.

证明 假设 A, B 给出了道路连通空间 X 的一个分割. 任取 X 中的一条道路 $f : [0, 1] \to X$. 由 f 的连续性与 $[0, 1]$ 的连通性知 $f([0, 1])$ 是连通的, 因此 $f([0, 1]) \subset A$ 或

$f([0,1]) \subset B$, 于是从 $x \in A$ 到 $y \in B$ 之间不存在道路, 这与 X 道路连通矛盾. $\square$

定理 3.18 (道路连通子空间的并) 设 $\{A_\alpha\}$ 是拓扑空间 X 的一族道路连通子空间. 如果

$$\bigcap A_\alpha \neq \varnothing,$$

那么 $\bigcup A_\alpha$ 也是道路连通的.

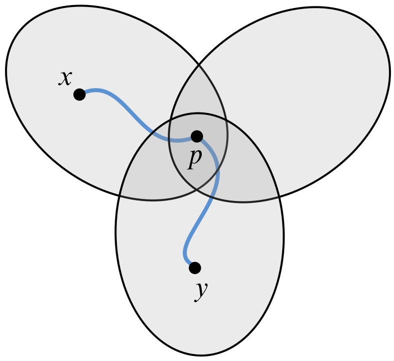


图 3.3: 一族具有公共点的道路连通子空间的并仍是道路连通的

证明 取 $p \in \bigcap A_\alpha$. 对任意的 $x, y \in \bigcup A_\alpha$, 设 $x \in A_\beta$, $y \in A_\gamma$. 由 A_β 与 A_γ 的道路连通性, 存在连续映射 $f : [0,1] \to A_\beta$ 与 $g : [0,1] \to A_\gamma$ 使得

$$\begin{aligned} f(0) &= x, \quad & f(1) &= p, \\ g(0) &= p, \quad & g(1) &= y. \end{aligned}$$

定义映射 $h : [0,1] \to \bigcup A_\alpha$ 为

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ g(2s-1), & 1/2 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

由拼接引理 2.54 知 h 是连续的, 从而 h 是从 x 到 y 的一条道路. $\square$

定理 3.19 (道路连通空间的乘积) 任意多个道路连通空间的乘积也是道路连通的.

证明 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是一族道路连通空间. 任取 $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod X_\alpha$, 那么对每个 $\alpha \in J$, 由 X_α 的道路连通性可知存在连续映射 $f_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$ 使得 $f_\alpha(0) = x_\alpha$ 且 $f_\alpha(1) = y_\alpha$.

定义

$$f:[0,1]\to\prod X_\alpha,\quad f(s)=(f_\alpha(s)),$$

那么 $f(0)=(x_\alpha), f(1)=(y_\alpha)$. 映射 f 的连续性由每个分量函数 f_α 的连续性可得, 从而 f 是从 (x_α) 到 (y_α) 的一条道路. □

例 3.20 (单位球体) 设 $n\geqslant 1$, 那么 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球体 $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$ 是道路连通的, 进而是连通的. 事实上, 任给 B^n 中的两点 x 与 y, 对任意的 $t\in[0,1]$ 都有

$$\|(1-t)x+ty\|\leqslant(1-t)\|x\|+t\|y\|\leqslant 1,$$

因此

$$f:[0,1]\to B^n,\quad f(t)=(1-t)x+ty$$

是一条从 x 到 y 的直线道路. 类似可证 $\mathbb{R}^n$ 中的每个开球与闭球都是道路连通的. //

例 3.21 (穿孔欧氏空间) 当 $n>1$ 时, 穿孔欧氏空间 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 是道路连通的. 事实上, 任意取定 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 中的两点 x 与 y, 如果它们之间的连线不通过原点, 则可用直线道路连接 x 与 y. 否则, 取不在 x 与 y 连线上的一点 z, 考虑从 x 到 z 再从 z 到 y 的折线道路即可. //

例 3.22 (单位球面) 设 $n\geqslant 2$, 那么 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$ 是道路连通的, 因为

$$g:\mathbb{R}^n-\{0\}\to S^{n-1},\quad g(x)=\frac{x}{\|x\|}$$

是一个连续满射, 而 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 是道路连通空间. //

最后我们给出点集拓扑学中一个非常著名的空间, 它说明了连通空间不一定是道路连通的.

例 3.23 (拓扑学家的正弦曲线) 考虑 $\mathbb{R}^2$ 的子空间

$$S=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\;\middle|\; 0<x\leqslant 1\right\},$$

那么 S 作为连续映射

$$f:(0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad f(x)=(x,\sin 1/x)$$

的像是连通的, 进而它的闭包

$$\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

也是连通的. 我们称 $\overline{S}$ 为拓扑学家的正弦曲线, 它不是道路连通的.

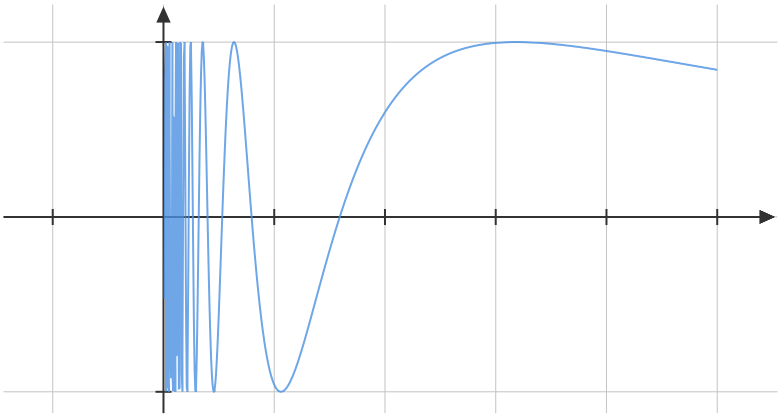


图 3.4: 函数 $y = \sin(1/x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上的图像

证明 假设从 0×0 到 S 中某个点有道路

$$f : [a, c] \to \overline{S}.$$

因为 $f^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$ 是 $[a, c]$ 中的闭集, 故它有最大元 b. 考虑道路

$$g = f|_{[b,c]} : [b, c] \to \overline{S},$$

那么

$$g(b) \in \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{且} \quad g((b, c]) \subset S.$$

为方便起见, 不妨假定 $[b, c]$ 为 $[0, 1]$. 设

$$g(t) = (x(t), y(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

则 $x(0) = 0$, 且当 $t > 0$ 时, 有

$$x(t) > 0, \quad y(t) = \sin \frac{1}{x(t)}.$$

对每个正整数 n, 由于 $x(1/n) > 0$, 故可取到 $u_n \in (0, x(1/n))$ 使得

$$\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n.$$

因为 u_n 是介于 $x(0)$ 与 $x(1/n)$ 之间的, 于是由介值定理知存在 $t_n \in (0, 1/n)$ 使得 $x(t_n) = u_n$. 至此我们找到了开区间 $(0,1)$ 中的序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 使得 $t_n \to 0$ 且 $y(t_n) = (-1)^n$. 注意到序列 $(y(t_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 不收敛, 这与 g 的连续性矛盾. □

回忆一下, 拓扑空间中连通子集的闭包仍然是连通的. 遗憾的是, 道路连通没有类似的性质, 比如例 3.23 中的 S 是道路连通的, 然而它的闭包 $\overline{S}$ 却并不道路连通.

3.3 连通分支与局部连通性

定义 3.24 (连通分支) 在非空拓扑空间 X 上定义等价关系为

$$x \sim y \iff \text{存在 } X \text{ 的一个连通子空间同时包含 } x \text{ 与 } y. \tag{3.1}$$

由此得到的等价类称为 X 的连通分支, 简称 X 的分支.

容易验证式 (3.1) 确实是 X 上的一个等价关系. 根据等价类的性质, 拓扑空间 X 的全体连通分支给出了 X 的一个划分, 即连通分支是两两不相交的, 且并起来等于整个空间 X. 我们马上就会看到, 连通分支的确是连通的.

命题 3.25 (连通分支的性质) 设 X 是一个非空的拓扑空间.

(1) X 的任一非空连通子空间都完全含于 X 的某个连通分支内.

(2) X 的连通分支是 X 的连通子空间.

(3) X 的连通分支是 X 中的闭集.

证明 (1) 假设 X 的非空连通子空间 A 与连通分支 C_1, C_2 均相交, 那么可取

$$x_1 \in A \cap C_1, \qquad x_2 \in A \cap C_2,$$

从而 $x_1, x_2 \in A$. 故 $x_1 \sim x_2$, $C_1 = C_2$. 这说明 A 只能与一个连通分支相交.

(2) 任取 X 的一个连通分支 C. 设 $x_0 \in C$, 那么对任意的 $x \in C$, 有 $x_0 \sim x$, 从而存

在连通子空间 A_x 使得 $x_0, x \in A_x$. 由 (1) 知 $A_x \subset C$, 因此

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

注意到每个 A_x 都是连通的, 而 $x_0 \in \bigcap A_x$, 故 C 作为一族具有公共点的连通子空间之并也是连通的.

(3) 设 C 是 X 的一个连通分支, 那么由 (2) 知 C 是 X 的连通子空间, 从而 $\overline{C}$ 也是 X 的连通子空间. 因为 $\overline{C} \cap C \neq \varnothing$, 故由 (1) 知 $\overline{C} \subset C$. 这说明 $C = \overline{C}$. □

由上述证明可以看出拓扑空间 X 的连通分支其实就是 X 的极大连通子空间. 换言之, 如果点 $x \in X$ 落在连通分支 C 内, 那么 C 就是 X 中包含 x 的最大连通子空间. 此外, 因为有限个闭集的并还是闭的, 故若拓扑空间 X 只有有限个连通分支, 那么这些连通分支作为闭集的补集还都是开的.

定义 3.26 (道路连通分支) 在非空拓扑空间 X 上定义等价关系为

$$x \sim y \iff \text{在 } X \text{ 中存在一条从 } x \text{ 到 } y \text{ 的道路.} \tag{3.2}$$

由此得到的等价类称为 X 的道路连通分支, 简称道路分支.

现在证明式 (3.2) 确实给出了 X 上的一个等价关系. 自反性是容易验证的, 因为任取 $x \in X$, 常值映射 $f : [0,1] \to X$, $f(s) \equiv x$ 给出了从 x 到 x 的一条道路. 其次考察对称性. 设 $f : [0,1] \to X$ 是从 x 到 y 的一条道路, 令 $g : [0,1] \to X$ 为 $g(s) = f(1-s)$, 那么 g 是从 y 到 x 的一条道路. 最后验证传递性. 设 $f : [0,1] \to X$ 是从 x 到 y 的一条道路, $g : [0,1] \to X$ 是从 y 到 z 的一条道路, 定义映射 $h : [0,1] \to X$ 为

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ g(2s-1), & 1/2 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

由拼接引理, h 是连续的, 从而给出了从 x 到 z 的一条道路.

根据等价类的性质, 拓扑空间 X 的全体道路连通分支是两两不相交的, 且并起来等于整个空间 X. 下面的结论说明道路连通分支的确是道路连通的.

命题 3.27 (道路连通分支的性质) 设 X 是一个非空的拓扑空间.

(1) X 的任一非空道路连通子空间都完全含于 X 的某个道路连通分支内.

(2) X 的道路连通分支是 X 的道路连通子空间.

证明 (1) 假设 X 的非空道路连通子空间 A 与道路连通分支 P_1, P_2 均相交, 则可取

$$x_1 \in A \cap P_1, \qquad x_2 \in A \cap P_2.$$

由于 A 道路连通且 x_1, x_2 均在 A 中, 故存在从 x_1 到 x_2 的道路 $f : [0,1] \to A$, 这诱导了 X 中从 x_1 到 x_2 的道路 $g : [0,1] \to X$. 因此 $x_1 \sim x_2$, 进而 $P_1 = P_2$.

(2) 设 P 是 X 的一个道路连通分支. 取定 $x_0 \in P$. 对任意的 $x \in P$ 有 $x_0 \sim x$, 从而存在 X 中从 x_0 到 x 的道路 $f_x : [0,1] \to X$. 令 $A_x = f_x([0,1])$, 那么 A_x 是 X 中包含 x_0 与 x 的道路连通子空间. 由 (1) 知 $A_x \subset P$, 于是

$$P = \bigcup_{x \in P} A_x$$

作为一族具有公共点 x_0 的道路连通子空间之并也是道路连通的. □

根据上述结论, 拓扑空间 X 的道路连通分支其实就是 X 的极大道路连通子空间. 换言之, 若 $x \in X$ 落在道路连通分支 P 内, 那么 P 是包含 x 的最大道路连通子空间.

不同于连通分支, 道路连通分支不一定是闭集, 因为道路连通子空间的闭包不一定仍是道路连通的.

例 3.28 (连通分支与道路连通分支)

(1) $\mathbb{Q}$ 的连通子空间只有单点子集, 因而 $\mathbb{Q}$ 的连通分支就是每个单点子集. 这说明 $\mathbb{Q}$ 的每个连通分支都不是 $\mathbb{Q}$ 中的开集.

(2) 考虑拓扑学家的正弦曲线 $\overline{S} = S \cup V$, 其中

$$S = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \,\middle|\, 0 < x \leqslant 1 \right\}, \qquad V = \{0\} \times [-1,1].$$

因为 $\overline{S}$ 自身是连通的, 故它只有一个连通分支. 又注意到 S 同胚于 $(0,1]$ 且 V 同胚于 $[-1,1]$, 故 S 与 V 都是道路连通的, 于是二者是 $\overline{S}$ 的极大道路连通子空间, 从而 $\overline{S}$ 有两个道路连通分支 S 与 V. //

定义 3.29 (局部连通, 局部道路连通) 设 X 是一个拓扑空间, $x \in X$.

(1) 若对 x 的任意邻域 U, 存在 x 的连通邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在 x 处是局部连通的. 若 X 在每一点处都是局部连通的, 则称 X 是局部连通的.

(2) 若对 x 的任意邻域 U, 存在 x 的道路连通邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在 x 处是局部道路连通的. 若 X 在每一点处都是局部道路连通的, 则称 X 是局部道路连通的.

注意连通空间未必局部连通, 局部连通空间也未必连通. 此外, 由于道路连通空间是连通的, 因此局部道路连通空间一定是局部连通的.

例 3.30 (连通与局部连通)

(1) 实直线 $\mathbb{R}$ 上的每个区间与射线都是连通且局部连通的.

(2) 实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1,0) \cup (0,1]$ 不连通, 但局部连通.

(3) 拓扑学家的正弦曲线 $\overline{S}$ 是连通的, 但不是局部连通的 (考虑坐标原点以及它的小邻域 $U = \{(x,y) \in \overline{S} \mid x^2 + y^2 < 1/4\}$).

(4) $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{Q}$ 既不连通, 也不局部连通. //

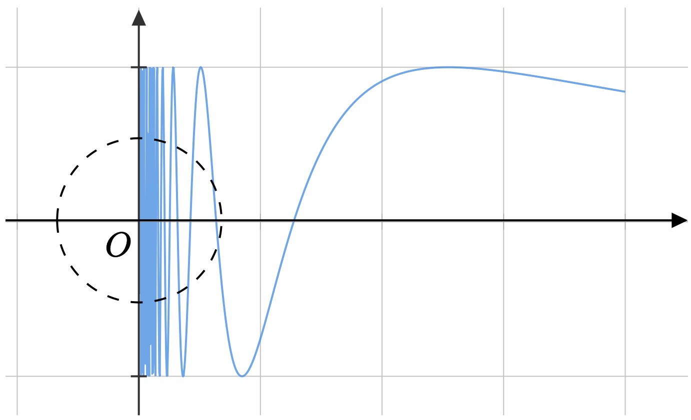


图 3.5: 拓扑学家的正弦曲线在原点处不是局部连通的

道路连通性与局部道路连通性之间同样没有蕴含关系: 局部道路连通空间未必道路连通, 比如 $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1,0) \cup (0,1]$. 反过来, 道路连通空间未必是局部道路连通的, 一个例子是所谓的 “梳子空间”, 这里我们不做过多介绍.

定理 3.31 (连通分支刻画局部连通性) 设有拓扑空间 X, 那么 X 是局部连通的当且仅当对 X 中的每个开集 U, U 的各个连通分支也都是 X 中的开集.

证明 ($\Longrightarrow$) 设 C 是开集 U 的一个连通分支. 任取 $x \in C$, 由 X 的局部连通性知 X 中存在 x 的连通邻域 V_x 使得 $V_x \subset U$. 注意到 V_x 是 U 的连通子空间, 故由命题 3.25 可知 $V_x \subset C$, 从而 $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ 是开集.

($\Longleftarrow$) 任取 $x \in X$, 设 U 是 x 的一个邻域, C 是子空间 U 的包含 x 的连通分支, 那么 C 是 x 的连通邻域且 $C \subset U$, 因此 X 在 x 处是局部连通的. $\square$

采用与定理 3.31 类似的证明可以得到

定理 3.32 (道路连通分支刻画局部道路连通性) 设有拓扑空间 X, 那么 X 是局部道路连通的当且仅当对 X 中的每个开集 U, U 的各个道路连通分支也都是 X 中的开集.

最后我们考察一下两种分支之间的关系.

定理 3.33 (连通分支与道路连通分支的关系) 设 X 是一个拓扑空间, 那么

(1) X 的每个道路连通分支都落在 X 的连通分支中.

(2) 如果 X 是局部道路连通的, 那么 X 的连通分支与道路连通分支是相同的.

证明 设 x 是 X 中的一点, C, P 分别是 X 的包含 x 的连通分支与道路连通分支.

(1) 道路连通空间必是连通空间, 因此 P 是连通的. 注意到 P 与 C 有公共点 x, 从而 $P \subset C$.

(2) 假设 X 还是局部道路连通的, 下证 $P = C$. 如果 $P \subsetneq C$, 记 Q 为 X 的所有不同于 P 且与 C 相交的道路连通分支之并, 那么 $Q \subset C$ 且 $C = P \cup Q$. 由定理 3.32 知 P 与 Q 都是 X 中的开集, 从而

$$C = (P \cap C) \cup (Q \cap C)$$

给出了 C 的一个分割, 这与 C 连通矛盾. $\square$

3.4 紧空间

定义 3.34 (开覆盖) 设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的一个子集族.

(1) 若 $\bigcup \mathscr{A} = X$, 则称 $\mathscr{A}$ 覆盖了 X.

(2) 若 $\mathscr{A}$ 覆盖了 X 并且 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ 也覆盖了 X, 则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子覆盖.

(3) 若 $\mathscr{A}$ 覆盖了 X 并且 $\mathscr{A}$ 中的每个成员都是开集, 则称 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖.

(4) 设 Y 是 X 的子空间. 若 $Y \subset \bigcup \mathscr{A}$, 则称 $\mathscr{A}$ 覆盖了 Y.

定义 3.35 (紧空间) 若拓扑空间 X 的任意一个开覆盖都有有限的子覆盖, 则称 X 是一个紧空间.

例 3.36 实直线 $\mathbb{R}$ 不是紧的, 因为覆盖

$$\mathscr{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

没有有限的子覆盖. 此外, 区间 $(0,1]$ 也不是紧的, 因为覆盖

$$\mathscr{A}' = \{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

没有有限的子覆盖. 不过, $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是紧的, 因为任意一个包含 0 的开区间也包含了序列 $1, 1/2, 1/3, \ldots$ 从某一项开始的无限项. //

下面的结论说明尽管紧性是拓扑空间自身的性质, 但我们仍然可以通过外部空间去进行判定.

命题 3.37 (子空间紧性的判定) 设 Y 是 X 的子空间, 那么 Y 是紧的当且仅当对 X 中任一覆盖了 Y 的开集族, 都有能从中找出有限个开集仍覆盖了 Y.

证明 分别记 X 与 Y 上的拓扑为 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}_Y$.

($\Longrightarrow$) 任取 X 的覆盖了 Y 的开集族 $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$, 那么

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathscr{A}\}$$

是 Y 中的一族开集且覆盖了 Y. 根据 Y 的紧性, $\mathcal{A}$ 中存在有限个开集 $A_1, \ldots, A_n$ 满足

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap Y).$$

这说明 $A_1, \ldots, A_n$ 覆盖了 Y.

($\Longleftarrow$) 任取 Y 的一个开覆盖 $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_Y$. 由子拓扑的定义, 对每个 $A \in \mathcal{A}$, 存在 X 中的开集 A' 使得 $A = A' \cap Y$, 因此

$$\mathcal{A}' = \{A' \mid A \in \mathcal{A}\}$$

是 X 中的一族开集且覆盖了 Y. 由假设知 $\mathcal{A}'$ 中存在有限个开集 $A'_1, \ldots, A'_n$ 仍然覆盖了 Y, 从而 $A_1, \ldots, A_n$ 给出了 $\mathcal{A}$ 的一个有限子覆盖. □

定理 3.38 (紧空间的闭遗传性) 紧空间的闭子空间仍是紧的.

证明 设 Y 是紧空间 X 的闭子空间. 任取 X 的覆盖了 Y 的一族开集 $\mathcal{A}$, 下证 $\mathcal{A}$ 有有限的子覆盖.

由于 $\mathcal{A}$ 覆盖了 Y, 故

$$\mathcal{A} \cup \{X - Y\}$$

给出了 X 的一个开覆盖. 注意到 X 是紧的, 于是上述开覆盖存在一个有限子覆盖 $\mathcal{A}'$ 覆盖了 X, 从而 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖

$$\mathcal{A}' - \{X - Y\}$$

覆盖了 Y. □

引理 3.39 (豪斯道夫空间可以通过开集分离点与紧子集) 设 Y 是豪斯道夫空间 X 的紧子空间, $x_0 \in X - Y$, 那么在 X 中存在开集 U, V 使得

$$x_0 \in U, \quad Y \subset V \quad \text{且} \quad U \cap V = \varnothing.$$

证明 任取 $y \in Y$. 因 X 是豪斯道夫的, 故存在 x_0 的邻域 U_y 与 y 的邻域 V_y 使得

$$U_y \cap V_y = \varnothing.$$

由于 Y 是紧的, 且

$$\{V_y \mid y \in Y\}$$

是 Y 的一个开覆盖, 故其中存在有限个邻域 $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ 也覆盖了 Y. 令

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}, \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i},$$

那么 $x_0 \in U, Y \subset V$ 且 $U \cap V = \varnothing$. □

定理 3.40 (豪斯道夫空间中, 紧 $\Longrightarrow$ 闭) 豪斯道夫空间的紧子空间都是闭的.

证明 设 Y 是豪斯道夫空间 X 的紧子空间. 任取 $x \in X - Y$, 由引理 3.39 知存在互不相交的开子集 U_x, V_x 使得 $x \in U_x, Y \subset V_x$, 于是

$$U_x \cap Y \subset U_x \cap V_x = \varnothing.$$

这说明 $U_x \subset X - Y$, 从而 $X - Y = \bigcup_{x \in X-Y} U_x$ 是开集, Y 是闭的. □

例 3.41 (开区间与半开半闭区间的紧性) 因为豪斯道夫空间的紧子空间一定是闭的, 故 $\mathbb{R}$ 中的开区间 (a, b) 与半开半闭区间 $(a, b]$ 都不是紧的.

定理 3.42 (紧空间的连续像仍是紧的) 紧空间在连续映射下的像仍是紧的.

证明 设 $f : X \to Y$ 是连续满射, 其中 X 是紧空间. 任取 Y 的开覆盖 $\mathcal{A}$, 那么

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

是 X 的一个开覆盖. 由 X 的紧性知存在有限个开集 $f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$ 也覆盖了 X, 从而

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup f^{-1}(A_i)\right) = \bigcup f f^{-1}(A_i) = \bigcup A_i,$$

这里最后一个等号利用了 f 的满性. 因此 $A_1, \ldots, A_n$ 覆盖了 Y, 这说明 Y 是紧的. □

从定理 3.42 可知紧性是一个拓扑性质, 由此我们可以得到一个很有用的结论.

定理 3.43 (连续双射成为同胚的一个充分条件) 设 $f : X \to Y$ 为连续双射. 若 X 是紧的, Y 是豪斯道夫的, 那么 f 是同胚.

证明 只需证明 f 为闭映射. 设 C 是 X 中的闭集, 那么由 X 是紧空间可知 C 也是紧的. 由 f 的连续性知 $f(C)$ 是紧的. 最后利用 Y 的豪斯道夫性得 $f(C)$ 是闭的. □

接下来讨论紧空间的乘积, 为此先证明一个引理.

引理 3.44 (管形引理) 考虑乘积空间 $X \times Y$, 其中 Y 是紧的. 如果 N 是 $X \times Y$ 中的开集且

$$\{x_0\} \times Y \subset N,$$

那么存在 x_0 的邻域 W 使得

$$\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset N.$$

证明 任取 $y \in Y$, 那么 $x_0 \times y \in N$. 由于 N 是开集, 故存在 x_0 的邻域 U_y 与 y 的邻域 V_y 使得

$$U_y \times V_y \subset N.$$

由于 $\{V_y \mid y \in Y\}$ 是 Y 的开覆盖且 Y 是紧的, 故存在 $y_1, \ldots, y_n \in Y$ 使得 $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ 覆盖了 Y. 令

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i},$$

那么 W 是 x_0 的邻域, 且

$$\{x_0\} \times Y \subset W \times Y = W \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(W \times V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(U_{y_i} \times V_{y_i}) \subset N.$$

结论得证. □

定理 3.45 (有限个紧空间的乘积) 有限个紧空间的乘积仍是紧的.

证明 设 X, Y 均为紧空间, $\mathcal{A}$ 是 $X \times Y$ 的一个开覆盖. 任取 $x \in X$, 那么 $\{x\} \times Y$ 是紧的, 从而存在 $\mathcal{A}$ 的有限子族 $\mathcal{A}_x$ 使得 $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mathcal{A}_x$.

由于 $\bigcup \mathcal{A}_x$ 是 $X \times Y$ 中的开集, 故根据管形引理, 存在 x 的邻域 W_x 使得

$$\{x\} \times Y \subset W_x \times Y \subset \bigcup \mathcal{A}_x.$$

因为 X 是紧的, 故存在 $x_1, \ldots, x_n \in X$ 使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i},$$

从而

$$X \times Y = \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}\right) \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} (W_{x_i} \times Y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup \mathcal{A}_{x_i}.$$

至此我们找到了 $\mathcal{A}$ 的一个有限子覆盖, $X \times Y$ 是紧的. □

事实上任意多个紧空间的乘积仍然是紧空间, 这一结论称为 Tychonoff 定理.

最后给出紧性的另一等价刻画, 为此我们需要下述定义.

定义 3.46 (有限交性质) 设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的一族子集. 若对 $\mathcal{C}$ 中任意有限个成员 $C_1, \ldots, C_n$ 都有

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \varnothing,$$

则称 $\mathcal{C}$ 具有有限交性质.

定理 3.47 (利用闭集刻画紧性) 拓扑空间 X 是紧的当且仅当对 X 中任一具有有限交性质的闭集族 $\mathcal{C}$, 都有

$$\bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 假设 $\bigcap \mathcal{C} = \varnothing$, 那么

$$X = X - \bigcap \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X - C),$$

因此 $\{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧的, 故存在 $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ 使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (X - C_i) = X - \bigcap_{i=1}^{n} C_i.$$

这说明 $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \varnothing$, 与 $\mathcal{C}$ 的有限交性质矛盾.

($\Longleftarrow$) 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖, 那么

$$\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

是 X 的一族闭子集. 假设 $\mathcal{A}$ 没有有限的子覆盖, 那么 $\mathcal{C}$ 具有有限交性质, 从而

$$X - \bigcup \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X - A) = \bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing.$$

这与 $\mathcal{A}$ 覆盖了 X 相矛盾. □

作为上述定理的一种常用特殊情形, 若 X 为紧空间且

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$$

是其中的非空递减闭集列, 那么 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 具有有限交性质, 从而

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing.$$

3.5 实直线的紧子空间

定理 3.48 (闭区间的紧性) 设 X 为具有最小上界性质的线性序集. 考虑其上的序拓扑, 那么 X 中的每一个闭区间都是紧的.

证明 选定 X 中的两个元素 $a < b$. 设 $\mathcal{A}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖. 令

$$C = \{y \in (a, b] \mid [a, y] \text{ 被 } \mathcal{A} \text{ 中有限个成员覆盖}\}.$$

接下来我们分四步证明 $b \in C$.

(1) *对任意的 $x \in [a, b)$, 存在 $y \in (x, b]$ 使得 $[x, y]$ 被 $\mathcal{A}$ 中至多两个成员覆盖.*

若 x 在 X 中有直接后继, 则将 y 取为这个直接后继, 那么 $[x, y] = \{x, y\}$, 于是 $[x, y]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中至多两个成员覆盖. 若 x 在 X 中没有直接后继, 因 $\mathcal{A}$ 覆盖了 $[a, b]$, 故存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$. 由于 A 是开集, 故存在开区间 (d, c) 使得 $x \in (d, c) \subset A$, 从而 $[x, c) \subset A$. 取 $y \in (x, c) \cap [a, b]$, 那么 $[x, y] \subset [x, c) \subset A$. 这说明 $[x, y]$ 被 $\mathcal{A}$ 中的一个

成员覆盖了.

(2) 子集 C 是非空的, 从而由最小上界性质知 C 有上确界 $c \in (a,b]$.

在 (1) 中将 x 取为 a, 那么存在 $y \in (a,b]$ 使得 $[a,y]$ 被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖, 从而 $y \in C$, 因此 C 非空.

(3) C 的上确界 c 在 C 中.

因为 $c \in (a,b]$, 故存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $c \in A$. 注意 A 是开集, 故存在开区间 (g,f) 使得 $c \in (g,f) \subset A$, 从而 $(g,c] \subset A$. 不妨设 $g \geqslant a$. 假设 $c \notin C$, 则 C 中必有元素 z 落在开区间 (g,c) 内, 否则 g 是一个比 c 更小的上界. 由 C 的构造知 $[a,z]$ 被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖. 注意到 $[z,c] \subset (g,c] \subset A$, 故 $[z,c]$ 被 $\mathcal{A}$ 中的一个成员覆盖, 从而

$$[a,c] = [a,z] \cup [z,c]$$

被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖. 这与 $c \notin C$ 矛盾, 故 $c \in C$.

(4) 上确界 c 等于 b.

假设 $c < b$. 在 (1) 中取 $x = c$, 则存在 $y \in (c,b]$ 使得 $[c,y]$ 被 $\mathcal{A}$ 中至多两个成员覆盖. 因为 $c \in C$, 故 $[a,c]$ 被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖, 从而

$$[a,y] = [a,c] \cup [c,y]$$

也被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖, $y \in C$. 注意到 $y > c$, 这与 $c = \sup C$ 矛盾, 故 $c = b$. □

推论 3.49 (实直线上的闭区间) 实直线 $\mathbb{R}$ 中的闭区间都是紧的.

现在我们推广微积分中的最值定理, 它将闭区间 $[a,b]$ 放宽为了一般的紧空间.

定理 3.50 (最值定理) 设 $f: X \to Y$ 为连续映射, 其中 X 是紧空间, Y 是带有序拓扑的线性序集, 那么存在 $c, d \in X$ 使得对任意的 $x \in X$ 都有

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

换言之, f 可以取到最大值与最小值.

证明 因为 f 连续且 X 是紧的, 故 $A = f(X)$ 也是紧的. 假设 A 没有最大元, 那么

开集族

$$\{(-\infty, a) \mid a \in A\}$$

覆盖了 A, 从而存在 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 使得

$$(-\infty, a_1), \ldots, (-\infty, a_n)$$

也覆盖了 A. 取 $a_0 = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$, 那么 a_0 不在任何一个 $(-\infty, a_i)$ 中, 从而 $a_0 \notin A$, 矛盾. 类似可证 $A = f(X)$ 有最小元. $\square$

回忆一下, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d 与方形度量 ρ 分别定义为

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right]^{1/2}, \\ \rho(x, y) &= \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\}. \end{aligned}$$

定理 3.51 (欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 紧集 $\Longleftrightarrow$ 有界闭集) $\mathbb{R}^n$ 中的子集 A 是紧的当且仅当 A 在欧氏度量 d 或方形度量 ρ 下是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集.

证明 将 $\mathbb{R}^n$ 中的原点记为 0. 易知对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{n}\rho(x, y),$$

因此 A 在 d 下有界当且仅当 A 在 ρ 下有界. 这说明我们只需证明方形度量 ρ 的情形.

($\Longrightarrow$) 设 A 是紧的. 由于 A 是豪斯道夫空间 $\mathbb{R}^n$ 的紧子空间, 故 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集. 注意到

$$\{B_\rho(0, m) \mid m = 1, 2, \ldots\}$$

是一族覆盖了 A 的开集, 由 A 的紧性可知存在正整数 M 使得 $A \subset B_\rho(0, M)$, 从而对任意的 $x, y \in A$, 有

$$\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\} \leqslant \max\{|x_i| + |y_i|\} \leqslant \max\{|x_i|\} + \max\{|y_i|\} \leqslant 2M.$$

因此 A 是有界的.

($\Longleftarrow$) 因为 A 在 ρ 下是有界的, 故存在正整数 N 使得对任意的 $x, y \in A$, 都有

$$\rho(x, y) \leqslant N.$$

任意取定 $x_0 \in A$, 记 $b = \rho(x_0, 0)$, 那么对任意的 $x \in A$ 都有

$$\rho(x, 0) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, 0) \leqslant N + b.$$

于是令 $P = N + b$, 则

$$A \subset [-P, P]^n.$$

由于 $[-P, P]$ 是紧空间, 故 $[-P, P]^n$ 作为有限个紧空间的乘积也是紧的. 最后, 记 $Y = [-P, P]^n$, 那么

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n}(A) \cap Y = A \cap [-P, P]^n = A,$$

从而 A 是 $Y = [-P, P]^n$ 中的闭集, 因此 A 作为紧空间的闭子空间也是紧的. $\square$

尽管在 $(\mathbb{R}^n, d)$ 与 $(\mathbb{R}^n, \rho)$ 中紧集与有界闭集是一回事, 但在一般的度量空间中二者并不等价. 幸运的是, 我们有单方向的蕴含关系.

定理 3.52 (一般度量空间中, 紧 $\Longrightarrow$ 有界 + 闭) 度量空间中的紧集必为有界闭集.

证明 与定理 3.51 前半部分的证明是类似的. $\square$

定义 3.53 (点到子集的距离) 设 (X, d) 是一个度量空间, A 是 X 的非空子集, $x \in X$, 则称

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

是点 x 到子集 A 的距离.

命题 3.54 (距离的连续性) 设 A 是度量空间 (X, d) 的非空子集, 那么

$$\begin{aligned} d(-, A) : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

是一个连续函数.

证明 取定 $x_0 \in X$, 对任意的 $x \in X$ 与 $a \in A$ 有

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, a).$$

因而

$$d(x, A) - d(x, x_0) \leqslant \inf_{a \in A} d(x_0, a) = d(x_0, A).$$

于是

$$d(x, A) - d(x_0, A) \leqslant d(x, x_0).$$

类似可得

$$d(x_0, A) - d(x, A) \leqslant d(x, x_0).$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 那么当 $d(x, x_0) < \delta$ 时便有

$$|d(x, A) - d(x_0, A)| \leqslant d(x, x_0) < \varepsilon.$$

这说明 $d(-, A)$ 在 x_0 处是连续的. □

回忆一下, 度量空间 (X, d) 的非空有界子集 A 的直径为

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

引理 3.55 (勒贝格数引理) 设 $\mathcal{U}$ 是紧度量空间 (X, d) 的一个开覆盖, 那么存在 $\delta > 0$ 使得对 X 的任一直径小于 δ 的非空有界子集 A, 都存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $A \subset U$.

上述引理中的 δ 称为开覆盖 $\mathcal{U}$ 的一个勒贝格数.

证明 若 $X \in \mathcal{U}$, 那么任意的 $\delta > 0$ 都是 $\mathcal{U}$ 的勒贝格数. 下设 $X \notin \mathcal{U}$. 因为 X 是紧的, 故存在 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ 也覆盖了 X. 定义函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, X - U_i).$$

下证对任意的 $x \in X$ 都有 $f(x) > 0$. 任取 $x \in X$, 那么存在某个 i 使得 $x \in U_i$. 因为 U_i

是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U_i$, 从而

$$d(x, X - U_i) \geqslant \varepsilon.$$

因此 $f(x) > 0$, 函数 f 在 X 上的取值始终为正. 根据命题 3.54, f 是连续的. 由最值定理, f 在 X 上可以取到最小值 δ. 因为 f 的取值始终为正, 故 $\delta > 0$, 下面证明 δ 就是满足条件的一个勒贝格数. 设 A 是直径小于 δ 的任一非空有界子集, 取定 $x_0 \in A$, 那么 $A \subset B(x_0, \delta)$. 设 $d(x_0, X - U_m)$ 是

$$d(x_0, X - U_1), \ldots, d(x_0, X - U_n)$$

中最大的一项, 那么由 δ 的取法与 f 的构造可知

$$\delta \leqslant f(x_0) \leqslant d(x_0, X - U_m).$$

于是 $A \subset B(x_0, \delta) \subset U_m$, 结论得证. □

显然若 $\delta > 0$ 是开覆盖 $\mathcal{U}$ 的一个勒贝格数, 那么所有比 δ 小的正数也都是 $\mathcal{U}$ 的勒贝格数.

定义 3.56 (一致连续) 设 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是两个度量空间之间的映射. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的两点 $x_1, x_2 \in X$, 只要 $d_X(x_1, x_2) < \delta$, 就有 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, 则称 f 是一致连续的.

现在我们使用勒贝格数引理来证明下面的一致连续定理.

定理 3.57 (一致连续定理) 设 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是两个度量空间之间的连续映射. 若 X 是紧的, 那么 f 是一致连续的.

证明 任取 $\varepsilon > 0$. 设 $\delta > 0$ 是 X 的开覆盖

$$\left\{ f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \,\middle|\, y \in Y \right\}$$

的一个勒贝格数. 根据勒贝格数引理, 对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 只要 $d_X(x_1, x_2) < \delta$, 就存在

$y \in Y$ 使得

$$\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

因此

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这说明 f 是一致连续的. □

3.6 极限点紧性与序列紧性

定义 3.58 (极限点紧空间) 若拓扑空间 X 的每个无限子集都有极限点, 则称 X 是极限点紧的.

定理 3.59 (紧 $\Longrightarrow$ 极限点紧) 紧空间一定是极限点紧空间.

证明 设 A 是紧空间 X 的子集且 A 没有极限点, 下证 A 是有限集. 因 $\overline{A} = A \cup A' = A$, 故 A 是闭的, 从而 A 作为紧空间的闭子空间也是紧的. 由于 A 没有极限点, 故对任意的 $a \in A$, 存在 a 的邻域 U_a 使得 $U_a \cap A = \{a\}$. 注意到 $\{U_a \mid a \in A\}$ 是 A 的一个开覆盖, 根据 A 的紧性可知其有一个有限子覆盖, 这说明 A 是有限集. □

定义 3.60 (序列紧) 设 X 是一个拓扑空间. 若 X 中的每个序列都有收敛子列, 则称 X 是序列紧的.

定理 3.61 (可度量化空间中的紧性) 设 X 是一个可度量化空间, 那么下面三条是等价的:

(1) X 是紧的.

(2) X 是极限点紧的.

(3) X 是序列紧的.

3.7 局部紧性

定义 3.62 (局部紧) 设 X 为拓扑空间, $x \in X$. 若存在 x 的邻域 U 以及 X 的紧子空间 C 使得

$$U \subset C,$$

则称 X 在 x 处是局部紧的. 若 X 在每一点都是局部紧的, 则称 X 是局部紧的.

显然紧空间都是局部紧的. 需要注意的是, 不同的教材可能对局部紧的定义稍有区别, 但在豪斯道夫空间中这些定义都是等价的.

例 3.63 (局部紧空间)

(1) 实直线 $\mathbb{R}$ 是局部紧的, 但它的子空间 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的. 为了说明这一事实, 只需注意到 $\mathbb{Q}$ 的基元素形如 $(a,b) \cap \mathbb{Q}$, 而任一包含 $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ 的子集 $A \subset \mathbb{Q}$ 都不是序列紧的, 因而 $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ 不能含于 $\mathbb{Q}$ 的紧子空间.

(2) 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧的, 因为其中的每一点都含于某个基元素 $(a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$, 而 $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ 是紧的.

(3) $\mathbb{R}^\omega$ 不是局部紧的, 因为任一基元素都不可能含于紧子空间. 例如, 若

$$B = (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

含于一个紧子空间, 那么

$$\overline{B} = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

是紧的, 矛盾. 事实上, 假设 $\overline{B}$ 是紧空间, 那么第 $n+1$ 个投影的像 $\pi_{n+1}(\overline{B}) = \mathbb{R}$ 也是紧的, 这是不对的. //

定理 3.64 (局部紧豪斯道夫的刻画) 拓扑空间 X 是局部紧豪斯道夫的当且仅当存在拓扑空间 Y 满足:

(1) X 是 Y 的子空间.

(2) $Y - X$ 是单点集.

(3) Y 是紧豪斯道夫的.

此外, 若 Y 与 Z 均为满足上述条件的拓扑空间, 那么存在从 Y 到 Z 的同胚使得该同胚限制在 X 上是恒等映射.

证明 ($\Longrightarrow$) 设 ∞ 是任一不在 X 中的元素, 令

$$Y = X \cup \{\infty\}.$$

考虑 Y 的子集族

$$\mathcal{T} = \{U \mid U \text{ 是 } X \text{ 的开子集}\} \cup \{Y - C \mid C \text{ 是 } X \text{ 的紧子空间}\}. \tag{3.3}$$

现在说明子集族 $\mathcal{T}$ 给出了 Y 上的一个拓扑. 首先空集 $\varnothing$ 属于第一类集合, 全集 Y 属于第二类集合. 下面验证有限交封闭. 由于

$$U \cap (Y - C) = U \cap (X - C)$$

属于第一类集合, 因而两类不同集合的交仍在 $\mathcal{T}$ 中. 有限交的其余两种情况容易验证. 最后验证任意并封闭. 显然第一类集合的任意并与第二类集合的任意并仍在 $\mathcal{T}$ 中. 又设 $\{U_\alpha\}$ 与 $\{C_\beta\}$ 分别是 X 的开子集族与紧子集族, 记 $U = \bigcup U_\alpha, C = \bigcap C_\beta$, 那么

$$\left(\bigcup U_\alpha\right) \cup \left(\bigcup (Y - C_\beta)\right) = U \cup (Y - C) = Y - (C - U)$$

属于第二类集合, 因为 $C - U$ 是紧空间 C 的闭子空间.

现在证明 X 是 Y 的子空间. 首先, 因为 $U \cap X = U$ 与 $(Y - C) \cap X = X - C$ 均为 X 中的开集, 故 Y 中开集与 X 的交都是 X 中的开集. 反之, 因 X 中的任一开集 U 都是 Y 中的开集, 从而 $U = U \cap X$ 是 Y 中开集与 X 的交.

接下来证明 Y 是紧豪斯道夫的.

• 设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的一个开覆盖, 那么 $\mathcal{A}$ 中至少有一个开集形如 $Y - C$, 其中 C 是 X 的紧子空间, 因此 $\mathcal{A} - \{Y - C\}$ 覆盖了 C. 注意到 C 是紧的, 故存在 $\mathcal{A}$ 的有限子族 $\mathcal{A}'$ 仍覆盖了 C, 从而 $\mathcal{A}' \cup \{Y - C\}$ 是 Y 的有限子覆盖, Y 是紧空间.

• 任取互异两点 $x, y \in Y$. 若 x, y 均在 X 中, 则由 X 的豪斯道夫性知存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 若 $x \in X$ 且 $y = \infty$, 那么由 X 的局部紧性知存在 x 的邻域 U 与 X 的紧子空间 C 使得 $U \subset C$. 注意到 U 与 $Y - C$ 分别是 x 与 y 在 Y 中

的邻域且 $U \cap (Y-C)=\varnothing$, 我们证明了 Y 是豪斯道夫的.

($\Longleftarrow$) 因 Y 是豪斯道夫的且 X 是 Y 的子空间, 故 X 是豪斯道夫的, 因此只需证明 X 是局部紧的. 任取 $x \in X$, 由 Y 的豪斯道夫性知存在 x 的邻域 U 与 ∞ 的邻域 V 使得

$$U \cap V = \varnothing.$$

因为 $Y-V$ 是 Y 中的闭集, 而 Y 是紧的, 故 $Y-V$ 也是紧的. 注意到

$$x \in U \subset Y-V \subset X,$$

故 X 在 x 处是局部紧的.

最后证明唯一性. 设 Y 与 Z 均为满足假设的拓扑空间, 记

$$Y-X=\{p\}, \qquad Z-X=\{q\}.$$

定义双射 $h: Y \to Z$ 为

$$h(x)=\begin{cases} x, & x \in X, \\ q, & x=p. \end{cases}$$

我们将证明 h 与 h^{-1} 均把开集映为开集, 从而 h 是一个同胚. 任取 Y 中的开集 U:

• 若 $p \notin U$, 那么 U 是 X 中的开集. 而 X 又是 Z 中的开集, 故 $h(U)=U$ 是 Z 中的开集.

• 若 $p \in U$, 令 $C=Y-U \subset X$. 由于 C 是 Y 中的闭集且 Y 是紧的, 故 C 也是紧的. 又因为 Z 是豪斯道夫的, 故 C 是 Z 中的闭集, 从而 $h(U)=Z-C$ 是 Z 中的开集.

至此我们证明了 h 把开集映为开集. 对称地可证 h^{-1} 把开集映为开集. □

定义 3.65 (孤立点) 设 x 是拓扑空间 X 中的一点. 若单点集 $\{x\}$ 在 X 中是开的, 则称 x 是 X 中的孤立点.

根据 Y 上的拓扑 (3.3), 我们有如下结论:

• 如果 X 自身是紧的, 那么 $\{\infty\}=Y-X$ 是 Y 中的 (第二类) 开集, 从而 ∞ 是 Y 的孤立点, 此时的空间 $Y=X \cup \{\infty\}$ 变得非常无趣.

• 如果 X 不是紧的, 那么 ∞ 的任意邻域 $Y-C$ 都含有 X 中的点, 因此 ∞ 是 X 的

一个极限点, $\overline{X} = Y$.

定义 3.66 (紧化) 设 X 是紧豪斯道夫空间 Y 的真子空间. 若

$$\overline{X} = Y,$$

则称 Y 是 X 的一个紧化. 如果 $Y - X$ 是单点集, 则称 Y 是 X 的单点紧化.

定理 3.64 说明单点紧化在同胚的意义下是唯一的, 并且拓扑空间 X 有单点紧化当且仅当 X 是非紧的局部紧豪斯道夫空间.

例 3.67 (常见的单点紧化)

- 实直线 $\mathbb{R}$ 的单点紧化空间同胚于单位圆周 S^1.
- $\mathbb{R}^2$ 的单点紧化空间同胚于单位球面 S^2. 如果将 $\mathbb{R}^2$ 视为复平面 $\mathbb{C}$, 那么 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 称为扩充复平面或黎曼球面. //

如果拓扑空间 X 的子集 A 在 X 中的闭包 $\overline{A}$ 是紧的, 则称 A 具有紧闭包.

定理 3.68 (豪斯道夫空间中局部紧的刻画) 设 X 是豪斯道夫空间, 那么 X 是局部紧的当且仅当对任意的 $x \in X$ 以及 x 的任意邻域 U, 存在 x 的具有紧闭包的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

证明 从右推左是显然的, 下面从左推右. 任取 $x \in X$ 以及 x 的邻域 U. 设 Y 是 X 的单点紧化. 由于 $Y - U$ 是 Y 中的闭集, 而 Y 是紧的, 故 $Y - U$ 是紧的. 根据引理 3.39, 我们可以通过开集分离点 x 与紧子集 $Y - U$, 即存在 x 的邻域 V 与包含 $Y - U$ 的开集 W 使得 $V \cap W = \varnothing$, 于是 $V \subset Y - W$. 注意到 $Y - W$ 是闭集, 因此 $\overline{V} \subset Y - W$. 又因为 $\overline{V}$ 是紧空间 Y 的闭子空间, 故 $\overline{V}$ 是紧的. 至此我们找到了 x 的具有紧闭包的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset Y - W \subset U.$$

结论得证. □

推论 3.69 (局部紧豪斯道夫空间的继承性) 局部紧豪斯道夫空间的开子空间与闭子空间也是局部紧豪斯道夫的.

证明 设 A 是局部紧豪斯道夫空间 X 的子空间.

(1) 若 A 是闭的. 任取 $x \in A$, 因 X 是局部紧的, 故存在 x 的邻域 U 以及紧子空间 $C \subset X$ 使得 $U \subset C$. 由于 $C \cap A$ 是紧空间 C 中的闭集, 因而 $C \cap A$ 也是紧的. 注意到 $C \cap A$ 包含了 x 在 A 中的邻域 $U \cap A$, 于是 A 是局部紧的.

(2) 若 A 是开的. 任取 $x \in A$, 那么 A 是 x 的邻域, 从而根据定理 3.68, 在 X 中存在具有紧闭包的开集 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset A.$$

注意到 V 也是 A 中的开集, 而 $\overline{V}$ 是紧的, 故 A 是局部紧的. □

推论 3.70 (局部紧豪斯道夫的又一种刻画) 设 X 是拓扑空间, 那么 X 是局部紧豪斯道夫的当且仅当 X 同胚于一个紧豪斯道夫空间的开子空间.

证明 ($\Longrightarrow$) 定理 3.64. ($\Longleftarrow$) 推论 3.69. □

4 可数性与分离性

4.1 可数性

定义 4.1 (第一可数空间) 设 x 是拓扑空间 X 中的一点. 若在 X 中存在 x 的可数个邻域 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 使得对 x 的任意邻域 U 都存在某个正整数 n 使得 $U_n \subset U$, 则称 X 在 x 处有一个可数基. 若 X 在每一点处都有一个可数基, 则称 X 是第一可数的.

可度量化空间一定是第一可数的. 事实上, 设 (X, d) 是一个度量空间且 x 是其中的一点, 那么

$$\{B(x, 1/n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

给出了 X 在 x 处的一个可数基.

回忆一下, 对可度量化空间而言有序列引理 2.86 以及映射连续性的等价刻画定理

2.87, 现在我们将这两个结论推广到第一可数空间上.

引理 4.2 (序列引理) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$. 若 A 中存在一个收敛于 x 的序列, 那么 $x \in \overline{A}$. 若 X 还是第一可数的, 那么反之也对.

证明 ($\Longrightarrow$) 根据收敛的定义, x 的任一邻域都包含 A 中的点, 因此 $x \in \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 在 x 处的一个可数基. 对每个正整数 n, 令

$$B_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

显然 B_n 是 x 的邻域并且 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$. 因为 $x \in \overline{A}$, 故 $B_n \cap A \neq \varnothing$. 取 $B_n \cap A$ 的一个元素 x_n, 那么序列 (x_n) 收敛于 x. □

定理 4.3 (序列收敛刻画连续性) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射. 若 f 连续, 那么对 X 中任一收敛到 $x \in X$ 的序列 (x_n), 都有 Y 中的序列 $\big(f(x_n)\big)$ 收敛到 $f(x)$. 若 X 是还第一可数的, 那么反之也对.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $f(x)$ 的邻域 V, 由 f 连续知 $f^{-1}(V)$ 是开集, 因而是 x 的邻域, 故存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in f^{-1}(V)$, 于是 $f(x_n) \in V$.

($\Longleftarrow$) 由定理 2.48 只需证明对 X 的任一子集 A 有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. 任取 $x \in \overline{A}$, 根据前述序列引理, A 中存在一个收敛于 x 的序列 (x_n). 由假设知 $f(A)$ 中的序列 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x)$. 再次利用序列引理, $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

定义 4.4 (第二可数空间) 若拓扑空间 X 有一个可数基, 则称 X 是第二可数的.

显然第二可数空间一定是第一可数空间. 另外, 尽管每个可度量化空间都是第一可数的, 但并非所有可度量化空间都第二可数.

例 4.5 (欧氏空间) 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d. 若 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 的每个分量 x_i 都是有理数, 则称 x 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点. 若 x 是有理点且 $r > 0$ 为有理数, 则称 $B(x, r)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有理开球. 由于 $\mathbb{R}^n$ 中的全体有理开球

$$\{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ 为有理点}, r > 0 \text{ 为有理数}\}$$

给出了 $\mathbb{R}^n$ 上标准拓扑的一个可数基, 因此 $\mathbb{R}^n$ 是第二可数的. 此外,

$$\left\{\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \,\middle|\, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\right\}$$

也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可数基. //

我们马上就能看到, 两种可数性关于子空间与可数乘积都有很好的表现.

定理 4.6 (第一/第二可数的继承性与可乘性)

(1) 第一可数空间的子空间也是第一可数的. 可数个第一可数空间的乘积也是第一可数的.

(2) 第二可数空间的子空间也是第二可数的. 可数个第二可数空间的乘积也是第二可数的.

证明 只证明第二可数性的情况, 第一可数性的证明是类似的. 设 X 是第二可数空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的一个可数基, Y 是 X 的子空间. 根据定理 2.18 可知 $\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\}$ 是 Y 的一个可数基, 因而 Y 是第二可数的. 又若 $\{X_i\}$ 是可数个第二可数空间且 $\mathscr{B}_i$ 是 X_i 的一个可数基, 那么

$$\left\{\prod B_i \,\middle|\, \text{对有限个 } i \text{ 有 } B_i \in \mathscr{B}_i, \text{其余的 } i \text{ 满足 } B_i = X_i\right\}$$

是乘积空间 $\prod X_i$ 的一个可数基. □

定义 4.7 (稠密子集, 可分空间) 设 X 为拓扑空间. 若子集 $A \subset X$ 满足 $\overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中是稠密的. 若 X 有一个可数的稠密子集, 则称 X 是可分的.

定义 4.8 (Lindelöf 空间) 若拓扑空间 X 的每个开覆盖都有可数子覆盖, 则称 X 是一个 Lindelöf 空间.

定理 4.9 (第二可数 $\Longrightarrow$ 可分 + Lindelöf) 第二可数空间是可分的 Lindelöf 空间.

证明 设 X 是第二可数空间, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是 X 的一个可数基. 先证 X 是 Lindelöf 空

间. 任取 X 的一个开覆盖 $\mathcal{A}$, 令

$$J=\{n\in\mathbb{Z}_+ \mid \text{存在 } A\in\mathcal{A} \text{ 使得 } B_n\subset A\}.$$

由于 $\{B_n\}$ 是基且 $\mathcal{A}$ 中的成员是开集, 故 J 是非空的. 对每个 $n\in J$, 存在 $A_n\in\mathcal{A}$ 使得 $B_n\subset A_n$. 至此我们得到了 $\mathcal{A}$ 的可数子族

$$\{A_n\}_{n\in J}.$$

下证 $\{A_n\}_{n\in J}$ 覆盖了 X. 因为 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 覆盖了 X, 故对任意的 $x\in X$, 存在 B_n 使得 $x\in B_n$, 从而 $x\in A_n$, 这说明 $\{A_n\}_{n\in J}$ 覆盖了 X.

现在证明 X 是可分的. 假设对所有的正整数 n 都有 $B_n\neq\varnothing$. 取 $x_n\in B_n$ $(n=1,2,\ldots)$, 那么

$$D=\{x_n \mid n\in\mathbb{Z}_+\}$$

是 X 的一个可数子集, 下证 $\overline{D}=X$. 任取 $x\in X$ 以及 x 的任一邻域 U. 因为 U 是基元素的并, 故 $U\cap D\neq\varnothing$, 于是 $x\in\overline{D}$. □

4.2 分离性

回忆一下, 如果拓扑空间 X 中的有限集都是闭集, 则称 X 是一个 T_1 空间.

定义 4.10 (正则空间, 正规空间) 设 X 是一个 T_1 空间.

(1) 若对任意的 $x\in X$ 以及不包含 x 的闭集 C, 均存在开集 U,V 使得

$$x\in U,\quad C\subset V\quad \text{且}\quad U\cap V=\varnothing,$$

则称 X 是正则的.

(2) 若对任意不相交的闭集 C,D, 都存在开集 U,V 使得

$$C\subset U,\quad D\subset V\quad \text{且}\quad U\cap V=\varnothing,$$

则称 X 是正规的.

我们在上述定义中要求 X 是 T_1 的, 这保证了正则空间一定是豪斯道夫的且正规空间一定是正则的.

定理 4.11 (正则/正规空间的等价刻画) 设 X 是一个 T_1 空间, 那么

(1) X 是正则的当且仅当对任意的 $x \in X$ 以及 x 的任意邻域 U, 存在 x 的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

(2) X 是正规的当且仅当对任意的闭集 C 与包含 C 的开集 U, 存在开集 V 使得

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

证明 只证明 (1), 因为 (2) 的证明完全类似.

($\Longrightarrow$) 任取 $x \in X$ 以及 x 的邻域 U, 那么 $X - U$ 为 X 中不含 x 的闭集, 从而由 X 的正则性知存在开集 V, W 使得 $x \in V, X - U \subset W$ 且 $V \cap W = \varnothing$. 因 $V \subset X - W$ 且 $X - W$ 是闭集, 故 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

($\Longleftarrow$) 任取 $x \in X$ 以及不含 x 的闭集 C, 那么 $X - C$ 是 x 的邻域, 从而由条件知存在 x 的邻域 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset X - C$. 取开集 $W = X - \overline{V}$, 那么 $C \subset W$ 且 $V \cap W = \varnothing$. □

豪斯道夫空间的子空间与乘积空间都是豪斯道夫的. 下面的结论说明正则空间也具有同样良好的性质.

定理 4.12 (正则空间的继承性与可乘性) 正则空间的子空间是正则的; 一族正则空间的乘积空间也是正则的.

证明 设 Y 是正则空间 X 的子空间. 任取 $x \in Y$ 以及 x 在 Y 中的邻域 $U \cap Y$, 其中 U 是 X 中的开集. 因 X 是正则的, 故由定理 4.11 知存在 x 在 X 中的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

从而

$$x \in V \cap Y \subset \mathrm{Cl}_Y(V \cap Y) = \overline{V \cap Y} \cap Y \subset U \cap Y.$$

再次利用定理 4.11 即得 Y 的正则性.

设 $\{X_\alpha\}$ 是一族正则空间. 任取 $x=(x_\alpha)\in\prod X_\alpha$ 以及 x 的邻域 U, 那么 $\prod X_\alpha$ 中存在基元素 $\prod U_\alpha$ 使得

$$x\in\prod U_\alpha\subset U.$$

对不等于 X_α 的那些 U_α, 由 X_α 的正则性知存在 x_α 的邻域 V_α 使得

$$x_\alpha\in V_\alpha\subset\overline{V_\alpha}\subset U_\alpha.$$

对等于全空间 X_α 的那些 U_α, 令 $V_\alpha=X_\alpha$. 至此我们找到了 $\prod X_\alpha$ 中的开集 $\prod U_\alpha$ 满足

$$x=(x_\alpha)\in\prod V_\alpha\subset\overline{\prod V_\alpha}=\prod\overline{V_\alpha}\subset\prod U_\alpha\subset U.$$

由定理 4.11 即得 $\prod X_\alpha$ 的正则性. □

不同于豪斯道夫空间与正则空间, 正规空间没有与定理 4.12 类似的结论. 事实上, 正规空间的子空间未必是正规的, 正规空间的乘积也未必是正规的.

4.3 正规空间

现在我们给出三类非常重要的正规空间.

定理 4.13 (第二可数 + 正则 $\Longrightarrow$ 正规) 第二可数的正则空间一定是正规的.

证明 设 X 是第二可数空间, $\mathcal{B}$ 是它的一个可数基. 设 A,B 为 X 中不相交的闭集. 任取 $a\in A$, 那么 $X-B$ 是 a 的邻域, 从而存在 a 的邻域 U_a 使得 $a\in U_a\subset\overline{U_a}\subset X-B$. 因此存在基元素 $B_a\in\mathcal{B}$ 使得

$$a\in B_a\subset\overline{B_a}\subset X-B.$$

同理可知对任意的 $b\in B$, 存在基元素 $B_b\in\mathcal{B}$ 使得

$$b\in B_b\subset\overline{B_b}\subset X-A.$$

由于 $\mathcal{B}$ 是可数的, 故可将 $\{B_a \mid a \in A\}$ 与 $\{B_b \mid b \in B\}$ 分别记为 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 与 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. 对每个正整数 n, 作开集 (这是构造不相交开集的常用技巧)

$$G_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \qquad \text{与} \qquad W_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

又定义开集

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \qquad \text{与} \qquad W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

下面证明

$$A \subset G, \quad B \subset W, \quad G \cap W = \varnothing.$$

任取 $a \in A$, 那么存在某正整数 n 使得 $a \in U_n$, 而对每个 i 都有 $a \notin \overline{V_i}$, 故 $a \in G$, 于是 $A \subset G$. 同理 $B \subset W$. 假设 $G \cap W \neq \varnothing$. 任取 $x \in G \cap W$, 那么存在正整数 j 与 k 使得 $x \in G_j$ 且 $x \in W_k$. 不妨设 $j \leqslant k$, 那么由 G_j 与 W_k 的构造知 $x \in U_j$ 且 $x \notin \overline{U_j}$, 矛盾. □

定理 4.14 (可度量化 $\Longrightarrow$ 正规) 可度量化空间一定是正规的.

证明 设 (X, d) 为度量空间, A, B 是其中不相交的闭集. 对任意的 $a \in A$, 因为 $X - B$ 是 a 的一个邻域, 故存在 $\varepsilon_a > 0$ 使得 $B(a, \varepsilon_a) \cap B = \varnothing$. 同理对任意的 $b \in B$, 存在 $\varepsilon_b > 0$ 使得 $B(b, \varepsilon_b) \cap A = \varnothing$. 作开集

$$U = \bigcup_{a\in A} B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \qquad \text{与} \qquad V = \bigcup_{b\in B} B\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right).$$

显然 $A \subset U$ 且 $B \subset V$, 下证 $U \cap V = \varnothing$. 假设有元素 $x \in U \cap V$, 那么存在 $a \in A$ 与 $b \in B$ 使得 $x \in B(a, \varepsilon_a/2)$ 且 $x \in B(b, \varepsilon_b/2)$. 不妨设 $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_b$, 那么

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \leqslant \varepsilon_b.$$

于是 $a \in B(b, \varepsilon_b)$, 矛盾. □

定理 4.15 (紧豪斯道夫 $\Longrightarrow$ 正规) 紧豪斯道夫空间一定是正规的.

证明 设 X 是紧豪斯道夫空间, A, B 是其中的不相交闭集. 由于紧空间的闭子空间也是紧的, 故 A, B 是紧的. 根据引理 3.39, 豪斯道夫空间中的点与紧子集可以通过开集分离, 于是对任意的 $a \in A$, 存在开集 U_a 与 V_a 使得

$$a \in U_a, \quad B \subset V_a, \quad U_a \cap V_a = \varnothing.$$

注意到 $\{U_a\}_{a\in A}$ 是 A 的开覆盖, 由 A 的紧性知存在 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$. 作开集

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \qquad \text{与} \qquad V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i},$$

那么 $A \subset U, B \subset V$ 且

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n V_{a_j}\right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^n (U_{a_i} \cap V_{a_j}) = \varnothing.$$

证明完毕. □

4.4 Urysohn 引理

定理 4.16 (Urysohn 引理) 设 X 是一个正规空间, A, B 是 X 中不相交的闭集. 考虑 $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[a, b]$, 那么存在连续映射

$$f : X \to [a, b]$$

使得 f 在 A 上的每一点取值为 a, 在 B 上的每一点取值为 b.

我们没有在 Urysohn 引理的结论中采用 “$f(A) = \{a\}$” 与 “$f(B) = \{b\}$” 的说法, 因为 A 与 B 可能为空集.

定义 4.17 (连续函数分离子集) 设 A, B 是拓扑空间 X 的子集. 若存在连续函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得 f 在 A 上每一点的取值都为 0, 在 B 上每一点的取值都为 1, 则称子集 A 与 B 可以通过连续函数分离.

采用定义 4.17 的术语, Urysohn 引理说明正规空间中的任意两个不相交闭集不仅

能够用两个开集分离开来, 还可以通过连续函数进行分离. 反之, 若两个不相交的闭集 A, B 可以通过连续函数 $f: X \to [0,1]$ 分离开来, 那么

$$A \subset f^{-1}([0,1/2)), \qquad B \subset f^{-1}((1/2,1]).$$

从而 A 与 B 被开集 $f^{-1}([0,1/2))$ 与 $f^{-1}((1/2,1])$ 分离了. 即是说: 拓扑空间 X 是正规的当且仅当 X 中的任意两个不相交闭集都可用连续函数分离, 因此 Urysohn 引理实际上是一个充要条件.

定义 4.18 (完全正则空间) 设 X 是一个 T_1 空间. 若对任意的 $x_0 \in X$ 以及不包含 x_0 的闭集 $A \subset X$, 都存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使得 $f(x_0) = 1$ 且 f 在 A 上取值为 0, 则称 X 是完全正则的.

简单来说, 完全正则空间就是点与闭集可以通过连续函数分离开来的空间.

完全正则空间一定是正则的, 因为若完全正则空间 X 上的连续函数 $f : X \to [0,1]$ 满足 $f(x_0) = 1$ 且 f 在 A 上取值为 0, 那么 $f^{-1}([0,1/2))$ 是包含 A 的开集, 而 $f^{-1}((1/2,1])$ 是含有 x_0 的开集, 它们互不相交. 此外根据 Urysohn 引理, 正规空间一定是完全正则的. 至此, 我们可以将所学的各种分离性由弱到强排序为

$$T_1 \ \Longleftarrow\ \text{豪斯道夫}\ (T_2) \ \Longleftarrow\ \text{正则}\ (T_3) \ \Longleftarrow\ \text{完全正则}\ (T_{3\frac{1}{2}}) \ \Longleftarrow\ \text{正规}\ (T_4).$$

(这里的字母“T”来自德语“Trennungsaxiom”, 意为“分离公理”.)

不同于正规性, 完全正则性在考虑子空间与乘积空间时具有良好的表现.

定理 4.19 (完全正则空间的继承性与可乘性) 完全正则空间的子空间仍是完全正则的; 一族完全正则空间的乘积空间也是完全正则的.

证明 (1) 设 Y 是完全正则空间 X 的子空间, $x_0 \in Y$ 且 A 是 Y 中不含 x_0 的闭集. 由于

$$A = \mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y,$$

故 $x_0 \notin \overline{A}$. 因为 X 是完全正则的, 所以存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(x_0) = 1$ 且 f 在 $\overline{A}$ 上取值为 0. 令 $g = f|_Y : Y \to [0,1]$, 那么 g 是连续的, $g(x_0) = 1$ 且 g 在 A 上取值为 0, 这说明 Y 是完全正则的.

(2) 设 $\{X_\alpha\}$ 是一族完全正则空间, $X = \prod X_\alpha$. 任取 $b = (b_\alpha) \in X$ 以及 X 中不含 b 的闭集 A. 不妨假定 A 是非空的. 因 $X - A$ 是包含 b 的开集, 故存在基元素 $\prod U_\alpha$ 使得

$$b = (b_\alpha) \in \prod U_\alpha \subset X - A.$$

设不等于 X_α 的 U_α 所对应的指标为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. 因为 X_{α_i} 是完全正则的, 故存在连续函数 $f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ 使得

$$f_i(b_{\alpha_i}) = 1 \quad \text{且} \quad f_i(X_{\alpha_i} - U_{\alpha_i}) = \{0\}.$$

令 $\phi_i = f_i \circ \pi_{\alpha_i} : X \to [0,1]$. 由于

$$\pi_{\alpha_i}(X - \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) = X_{\alpha_i} - \pi_{\alpha_i}(\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) = X_{\alpha_i} - U_{\alpha_i},$$

故 $\phi_i(X - \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) = \{0\}$. 定义函数 $f : X \to [0,1]$ 为

$$f(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_n(x).$$

那么 f 是连续的且 $f(b) = 1$. 又因为

$$\bigcup_{i=1}^{n}(X - \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) = X - \bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = X - \prod U_\alpha,$$

从而

$$f\left(X - \prod U_\alpha\right) = \{0\}.$$

注意到 $A \subset X - \prod U_\alpha$, 故 f 在 A 上取值为 0. □

4.5 Urysohn 度量化定理

定理 4.20 (Urysohn 度量化定理) 第二可数的正则空间是可度量化的.

证明 设 X 是第二可数的正则空间, 我们将证明 X 能够嵌入到一个可度量化空间 Y 中 (即 X 同胚于 Y 的子空间).

(1) 首先证明如下结论: 存在可数个连续函数 $f_n : X \to [0,1], n = 1, 2, \ldots$ 使得对任

意的 $x_0 \in X$ 与 x_0 的邻域 U, 存在正整数 n 使得 $f_n(x_0) > 0$ 且 f_n 在 U 之外取值为 0.

设 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 的一个可数基. 对任意的 $x_0 \in X$ 以及 x_0 的邻域 U, 存在基元素 B_m 使得 $x_0 \in B_m \subset U$. 由 X 的正则性知存在 x_0 的邻域 V 使得 $x_0 \in V \subset \overline{V} \subset B_m$. 又因为存在基元素 B_n 使得 $x_0 \in B_n \subset V$, 故对任意的 $x_0 \in X$ 以及 x_0 的邻域 U 我们都可以找到基元素 B_n 满足

$$x_0 \in B_n \subset \overline{B_n} \subset U.$$

根据定理 4.13, X 是正规的. 由 Urysohn 引理知存在连续函数 $f_n : X \to [0,1]$ 使得 f_n 在 $\overline{B_n}$ 上取值为 1 且在 $X - U$ 上取值为 0.

(2) 再证明: 考虑带有乘积拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$. 定义映射 $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ 为

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots),$$

那么 F 是一个嵌入.

因为每个 f_n 都是连续的, 故由 F 是连续的. 其次任取 $x \neq y$, 那么存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 根据函数序列 (f_n) 的构造, 对 x 及其邻域 U, 存在一个正整数 n 满足 $f_n(x) > 0$ 且 $f_n(X - U) = \{0\}$. 由于 $y \in X - U$, 故 $f_n(y) = 0$, 从而 $F(x) \neq F(y)$.

现在证明 $F : X \to F(X) \subset \mathbb{R}^\omega$ 是一个同胚. 由于 $F : X \to F(X)$ 是一个连续双射, 因此只需证明 F 的逆映射也连续即可. 任取 X 中的开集 U, 下证 $F(U)$ 是 $F(X)$ 中的开集. 为此, 对于每个 $x_0 \in U$, 我们将找到 $\mathbb{R}^\omega$ 中的一个开集 V 使得

$$F(x_0) \in V \cap F(X) \subset F(U).$$

注意到根据函数列 (f_n) 的构造, 存在 $N > 0$ 使得 $f_N(x_0) > 0$ 且 f_N 在 $X - U$ 上取值为 0. 令

$$V = \pi_N^{-1}((0, +\infty)),$$

那么 V 是 $\mathbb{R}^\omega$ 中的开集. 因 $\pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$, 故 $F(x_0) \in V$, 于是 $F(x_0) \in V \cap F(X)$. 又任取 $y \in V \cap F(X)$, 那么 $\pi_N(y) > 0$ 且存在 $x \in X$ 使得 $y = F(x)$, 于是 $\pi_N(y) = \pi_N(F(x)) = f_N(x) > 0$. 由于 f_N 在 $X - U$ 上取值为 0, 故 $x \in U$, 从而 $y = F(x) \in F(U)$. $\square$

4.6 Tietze 延拓定理

本节我们将利用 Urysohn 引理得到另一个非常有用的结论, 它告诉我们定义在正规空间的闭子空间上的连续函数必然可以延拓为整个空间上的连续函数.

定理 4.21 (Tietze 延拓定理) 设 X 是一个正规空间, A 是 X 的闭子空间, 那么

(1) 每个连续映射 $A \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ 都可以延拓为连续映射 $X \to [a,b]$.

(2) 每个连续映射 $A \to \mathbb{R}$ 都可以延拓为连续映射 $X \to \mathbb{R}$.

证明 不妨假定 A 是非空的. 我们证明的主要思想是: 构造一列连续函数 $s_n : X \to [a,b]$ $(n = 1,2,\ldots)$ 使得 (s_n) 一致收敛, 且当 n 越来越大时 $s_n|_A : A \to [a,b]$ 越来越靠近 $f : A \to [a,b]$, 最终 (s_n) 的极限函数就是所求的延拓.

第 1 步 设 $r > 0$ 且 $f : A \to [-r,r]$ 为连续函数. 下面证明存在连续函数

$$g : X \to \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right]$$

使得对任意的 $a \in A$ 都有

$$|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r.$$

令

$$I_1 = \left[-r, -\frac{r}{3}\right], \quad I_2 = \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right], \quad I_3 = \left[\frac{r}{3}, r\right].$$

又设

$$B = f^{-1}(I_1), \quad C = f^{-1}(I_3),$$

那么 B 与 C 都是 A 中的闭集. 注意到 A 是 X 中的闭集, 故 B 与 C 也是 X 中的闭集. 因为 B 与 C 互不相交, 故由 Urysohn 引理可知存在连续函数 $g : X \to [-r/3, r/3]$ 使得 g 在 B 上取值为 $-r/3$, 在 C 上取值为 $r/3$. 注意到

- 对任意的 $a \in B$ 有 $f(a) \in I_1, g(a) = -r/3 \in I_1$;
- 对任意的 $a \in C$ 有 $f(a) \in I_3, g(a) = r/3 \in I_3$;
- 对任意的 $a \in A - (B \cup C)$ 有 $f(a) \in I_2, g(a) \in I_2$,

于是对任意的 $a \in A$ 都有

$$|f(a) - g(a)| \leqslant \frac{2}{3}r.$$

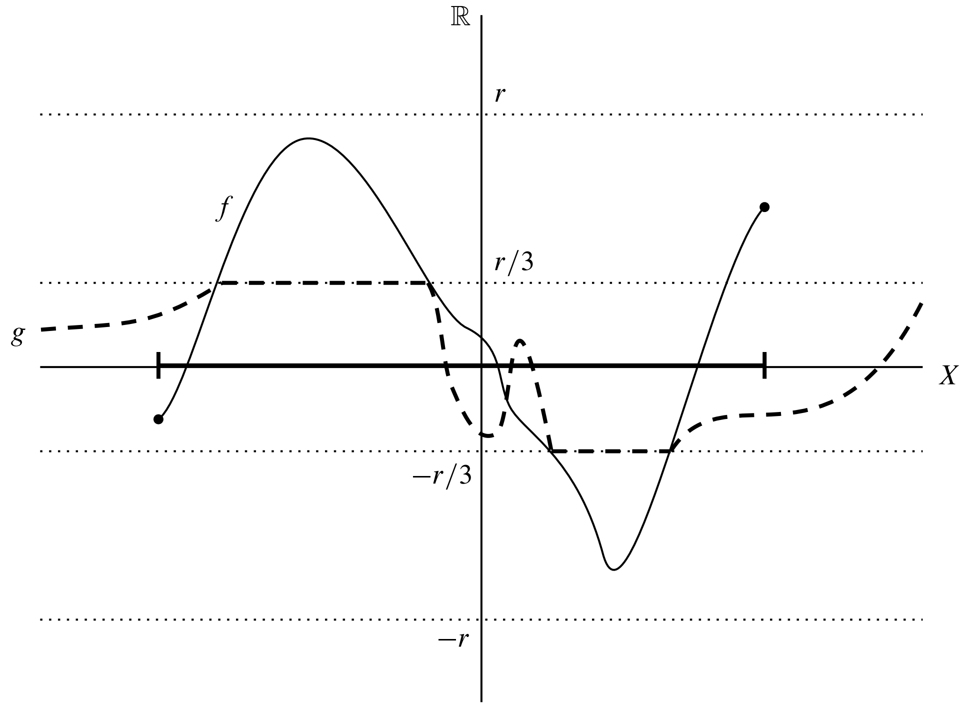


图 4.1: Tietze 延拓定理的证明

第 2 步 现在证明定理的结论 (1). 不失一般性, 我们可以用 $[-1,1]$ 代替 $[a,b]$. 设 $f: A \to [-1,1]$ 是一个连续函数. 由第 1 步, 存在连续函数

$$g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

使得对任意的 $a \in A$ 都有

$$|f(a) - g_1(a)| \leqslant \frac{2}{3}.$$

对函数 $f - g_1 : A \to [-2/3, 2/3]$ 应用第 1 步, 存在连续函数

$$g_2 : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

使得对任意的 $a \in A$ 都有

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

对函数 $f - g_1 - g_2 : A \to [-(2/3)^2, (2/3)^2]$ 应用第 1 步, 存在连续函数

$$g_3 : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

使得对任意的 $a \in A$ 有

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a) - g_3(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

不断重复下去, 对每个正整数 n 我们都得到了一个连续函数

$$g_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$$

使得对任意的 $a \in A$ 都有

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

定义函数 $g : X \to [-1, 1]$ 为

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

注意到对每个 $x \in X$ 以及正整数 n 都有

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

而上式右端是收敛正项级数的通项, 故由魏尔斯特拉斯判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ 在 X 上一致收敛于 g. 因为每个 g_n 都是连续的, 故 g 也是连续的. 此外, 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1,$$

故 g 把 X 映到 $[-1, 1]$ 中.

最后证明 $g|_A = f$. 任取 $a \in A$, 则对每个正整数 n 都有

$$\left|f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

于是

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_i(a) = f(a).$$

第 3 步　最后证明定理的结论 (2). 因为 $\mathbb{R}$ 同胚于 $(-1, 1)$, 故我们可以用 $(-1, 1)$ 代

替 $\mathbb{R}$ 进行证明. 设

$$f : A \to (-1, 1)$$

是一个连续映射. 由结论 (1), 我们可以将 $f : A \to (-1,1) \subset [-1,1]$ 延拓为连续映射

$$g : X \to [-1, 1].$$

定义

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}),$$

那么由 g 的连续性知 D 是 X 中的闭集. 注意到 D 与 A 是不相交的, 故由 Urysohn 引理知存在连续函数

$$\phi : X \to [0, 1]$$

使得 ϕ 在 D 上取值为 0 且 ϕ 在 A 上取值为 1. 定义 X 上的函数 h 为

$$h(x) = \phi(x)g(x).$$

下面证明 h 就是所需的 f 的扩张. 显然 h 是连续的. 又因为对任意的 $a \in A$ 有

$$h(a) = \phi(a)g(a) = 1 \cdot g(a) = f(a),$$

故 $h|_A = f$. 接下来证明 h 把 X 映到 $(-1, 1)$ 内. 任取 $x \in X$. 若 $x \in D$, 那么

$$h(x) = 0 \cdot g(x) = 0.$$

若 $x \notin D$, 那么由 D 的构造知 $|g(x)| < 1$, 从而

$$|h(x)| \leqslant 1 \cdot |g(x)| < 1.$$

结论得证. $\square$

5 仿紧性与完备度量空间

5.1 局部有限性

定义 5.1 (局部有限子集族) 设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的一个子集族. 若对任意的 $x \in X$ 均存在 x 的邻域 U 使得 $\mathscr{A}$ 中只有有限个成员与 U 相交, 则称 $\mathscr{A}$ 在 X 中是局部有限的.

例 5.2 实直线 $\mathbb{R}$ 的子集族

$$\{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 中是局部有限的. 另外, 子集族

$$\{(0, 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

在开区间 $(0,1)$ 中是局部有限的, 但在 $\mathbb{R}$ 中不是局部有限的, 因为在 0 这一点不存在邻域只与上述子集族中的有限个成员相交. 这说明局部有限性与所考虑的全空间有关. //

性质 5.3 (局部有限的继承性与闭包性) 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个局部有限子集族, 则

(1) $\mathscr{A}$ 的任何子族也都是局部有限的.

(2) 子集族 $\{\overline{A}\}_{A \in \mathscr{A}}$ 也是局部有限的.

(3) $\overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A}$.

证明 (1) 显然.

(2) 注意到如果 U 为开集, 那么利用 $U \cap A = \varnothing$ 可推出 $U \cap \overline{A} = \varnothing$. 于是对开集 U 而言

$$U \cap \overline{A} \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U \cap A \neq \varnothing. \tag{5.1}$$

因此由 $\mathscr{A}$ 的局部有限性即得 $\{\overline{A}\}_{A \in \mathscr{A}}$ 也是局部有限的.

(3) 其中一个方向的包含关系

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}\subset\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A}$$

是显然的, 因此只需证明

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A}\subset\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}.$$

任取 $x\in\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A}$, 则存在 x 的邻域 U 使得 U 只与 $\mathcal{A}$ 中有限个成员 $A_1,\ldots,A_k$ 相交. 下证 $x\in\bigcup_{i=1}^k\overline{A_i}$, 从而 $x\in\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\overline{A}$. 假设 $x\notin\bigcup_{i=1}^k\overline{A_i}$, 那么

$$V=U-\bigcup_{i=1}^k\overline{A_i}$$

是 x 的一个邻域. 根据 U 的构造可知 V 与 $\mathcal{A}$ 中任意成员都不相交, 从而

$$V\cap\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\right)=\varnothing.$$

这与 $x\in\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A}$ 矛盾. □

定义 5.4 (可数局部有限) 设 $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的一个子集族. 若 $\mathcal{A}$ 能够写成可数个局部有限的子集族 $\mathcal{A}_n$ 之并:

$$\mathcal{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n,$$

则称 $\mathcal{A}$ 是可数局部有限或 σ-局部有限的.

定义 5.4 中的 “σ” 来自测度论, 意为 “可数并”. 注意可数的子集族与局部有限的子集族都自动是可数局部有限的.

定义 5.5 (加细) 设 $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的子集族. 若子集族 $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$ 满足对任意的 $B\in\mathcal{B}$, 存在 $A\in\mathcal{A}$ 使得

$$B\subset A,$$

则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个加细. 若 $\mathscr{B}$ 中的成员都是 X 中的开集, 则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个开加细; 若 $\mathscr{B}$ 中的成员都是 X 中的闭集, 则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个闭加细.

任意子集族都有平凡的加细, 但这样的加细没有什么意思. 我们最关心的是那些保持覆盖性的加细.

命题 5.6 (可度量化空间中的开加细) 设 $\mathscr{A}$ 是可度量化空间 X 的开覆盖, 那么 $\mathscr{A}$ 有一个可数局部有限的开加细仍覆盖了 X.

证明 我们将使用良序定理进行证明. 回忆一下, 若线性序集的每个非空子集都有最小元, 则称该线性序集是良序的. 良序定理说的是每个集合上都存在一个线性序使得该集合成为良序集.

设 $\leqslant$ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个良序, d 是可诱导 X 上拓扑的一个度量. 对每个正整数 n 与 $\mathscr{A}$ 中的成员 U, 定义集合

$$S_n(U) = \left\{ x \in X \,\middle|\, B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U \right\}, \qquad T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V < U} V.$$

下证对 $\mathscr{A}$ 中任意两个不同的成员 V 与 W 都有

$$\forall x \in T_n(V),\ \forall y \in T_n(W), \quad d(x, y) \geqslant \frac{1}{n}. \tag{5.2}$$

不妨设 $V < W$, 则 $x \in T_n(V) \subset S_n(V)$, 从而 $B(x, 1/n) \subset V$. 又因为

$$y \in T_n(W) = S_n(W) - \bigcup_{U < W} U,$$

而 $V < W$, 故 $y \notin V$, 于是 $d(x, y) \geqslant 1/n$.

又对 $\mathscr{A}$ 中的每个成员 U 定义

$$E_n(U) = \bigcup_{x \in T_n(U)} B\left(x, \frac{1}{3n}\right).$$

那么

$$T_n(U) \subset E_n(U) \subset U.$$

下面证明对 $\mathscr{A}$ 中任意不同的两个成员 V 与 W 都有

$$\forall x \in E_n(V),\ \forall y \in E_n(W), \quad d(x,y) \geqslant \frac{1}{3n}. \tag{5.3}$$

因 $x \in E_n(V)$, 故由 $E_n(V)$ 的定义可知存在 $x_0 \in T_n(V)$ 使得 $d(x,x_0) < 1/3n$. 同理存在 $y_0 \in T_n(W)$ 使得 $d(y,y_0) < 1/3n$. 于是由 (5.2) 式可知

$$d(x,y) \geqslant d(x_0,y_0) - d(x_0,x) - d(y,y_0) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{3n}.$$

定义子集族

$$\mathscr{E}_n = \left\{E_n(U) \mid U \in \mathscr{A}\right\}.$$

下面证明 $\mathscr{E}_n$ 是 $\mathscr{A}$ 的局部有限开加细.

显然 $\mathscr{E}_n$ 中的成员都是开集. 又因为 $E_n(U) \subset U$, 故 $\mathscr{E}_n$ 是 $\mathscr{A}$ 的开加细. 下证 $\mathscr{E}_n$ 是局部有限的. 任取 $x \in X$, 我们将证明 $B(x,1/6n)$ 只与 $\mathscr{E}_n$ 中至多一个成员相交. 假设 $\mathscr{E}_n$ 中有两个成员 $E_n(V), E_n(W)$ 均与 $B(x,1/6n)$ 相交, 那么可取 $y \in B(x,1/6n) \cap E_n(V)$ 与 $z \in B(x,1/6n) \cap E_n(W)$, 从而

$$d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z) < \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{3n}.$$

这与 (5.3) 式矛盾.

最后令

$$\mathscr{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n,$$

那么 $\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{A}$ 的可数局部有限开加细. 下面证明 $\mathscr{E}$ 覆盖了 X. 任取 $x \in X$, 由良序性可设 U 是 $\mathscr{A}$ 中含有 x 的最小元. 因 U 是开集, 故存在某正整数 n 使得 $B(x,1/n) \subset U$, 从而 $x \in S_n(U)$. 又因为 U 是 $\mathscr{A}$ 中含有 x 的最小元, 故 $T_n(U) = S_n(U)$, 从而

$$x \in T_n(U) \subset E_n(U) \in \mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}.$$

证明完毕. □

利用上述结论我们能够得到拓扑空间可度量化的一个充要条件.

定理 5.7 (Nagata-Smirnov 度量化定理) 设 X 是一个拓扑空间, 那么 X 可度量化当且仅当 X 是正则的且有一个基是可数局部有限的.

5.2 仿紧性

回忆一下, 若拓扑空间 X 的任一开覆盖都存在有限子覆盖, 则称 X 是紧的. 为了推广紧性的概念, 我们将紧空间的定义改写为

$$\text{拓扑空间 } X \text{ 是紧的} \iff X \text{ 的任一开覆盖都存在有限开加细仍覆盖了 } X.$$

事实上, 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的开覆盖 $\mathcal{A}$ 的有限开加细且仍然覆盖了 X, 那么对任意的 $B \in \mathcal{B}$, 存在 $A_B \in \mathcal{A}$ 使得 $B \subset A_B$, 于是 $\{A_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ 便是 $\mathcal{A}$ 的一个有限子覆盖. 另一方向的蕴含关系是显然的, 至此我们便用开加细刻画了紧性.

定义 5.8 (仿紧空间) 设 X 是一个拓扑空间. 若 X 的任一开覆盖都有局部有限开加细仍覆盖了 X, 则称 X 是仿紧的.

显然紧空间都是仿紧的. 容易证明仿紧性是一个拓扑性质. (但仿紧空间的连续像不一定是仿紧的!)

例 5.9 (欧氏空间) 考虑 $\mathbb{R}^n$ 以及其上的欧氏度量 d. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖. 任给正整数 m, 因 $\overline{B(\mathbf{0},m)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 故 $\overline{B(\mathbf{0},m)}$ 是紧的, 从而 $\mathcal{A}$ 中存在有限个成员 $A_{m,1},\dots,A_{m,k_m}$ 也覆盖了 $\overline{B(\mathbf{0},m)}$. 令

$$\mathcal{C}_m = \{A_{m,i} \cap (X - \overline{B(\mathbf{0},m-1)}) \mid i = 1,\dots,k_m\}.$$

试证明

$$\mathcal{C} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}_m$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个局部有限开加细且仍然覆盖了 $\mathbb{R}^n$, 从而欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是仿紧的.

证明 显然 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的开加细. 下面证明 $\mathcal{C}$ 覆盖了 $\mathbb{R}^n$. 任取 $x \in \mathbb{R}^n$, 设 m 是满足 $x \in \overline{B(\mathbf{0},m)}$ 的最小正整数. 因 $A_{m,1},\dots,A_{m,k_m}$ 覆盖了 $\overline{B(\mathbf{0},m)}$, 故存在 $j \in \{1,\dots,k_m\}$ 使得 $x \in A_{m,j}$. 又因为 $x \notin \overline{B(\mathbf{0},m-1)}$, 故 $x \in A_{m,j} \cap (X - \overline{B(\mathbf{0},m-1)}) \in \mathcal{C}_m$.

最后证明 $\mathcal{C}$ 是局部有限的. 为此我们将说明开集 $B(\mathbf{0},m)$ 只与 $\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_m$ 中的成员相交. 假设存在大于 m 的正整数 M 与 $j\in\{1,\ldots,k_M\}$ 使得

$$B(\mathbf{0},m)\cap\left(A_{M,j}\cap(X-\overline{B(\mathbf{0},M-1)})\right)\neq\varnothing,$$

那么任取其中的一个元素 x, 有 $d(\mathbf{0},x)<m$ 且 $d(\mathbf{0},x)>M-1$, 矛盾. □

前面我们已经知道紧豪斯道夫空间都是正规的 (定理 4.15), 下面的结论说明仿紧空间有类似的性质.

定理 5.10 (仿紧 + 豪斯道夫 $\Longrightarrow$ 正规) 仿紧豪斯道夫空间都是正规的.

证明 我们分两步进行证明.

第 1 步 先证 X 是正则的.

任取 X 中的闭集 B 与 $a\in X-B$. 因 X 是豪斯道夫的, 故对任意的 $b\in B$, 存在 b 的邻域 U_b 使得 $a\notin\overline{U_b}$. 因

$$\mathcal{A}=\{U_b\}_{b\in B}\cup\{X-B\}$$

是 X 的一个开覆盖, 故由 X 的仿紧性知 $\mathcal{A}$ 有一个局部有限开加细 $\mathcal{C}$ 仍然覆盖了 X. 又令

$$\mathcal{D}=\{C\in\mathcal{C}\mid C\cap B\neq\varnothing\},$$

那么由 $\mathcal{C}$ 覆盖了 X 可知 $\mathcal{D}$ 覆盖了 B.

下面证明对任意的 $D\in\mathcal{D}$ 有 $a\notin\overline{D}$. 任取 $D\in\mathcal{D}$, 那么 $D\cap B\neq\varnothing$. 注意到 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的加细, 故存在 $b\in B$ 使得 $D\subset U_b$. 由于 $a\notin\overline{U_b}$, 因此 $a\notin\overline{D}$.

令

$$V=\bigcup_{D\in\mathcal{D}}D,$$

那么 V 是开集且由 $\mathcal{D}$ 覆盖了 B 可知 $B\subset V$. 由 $\mathcal{D}$ 的局部有限性知

$$\overline{V}=\bigcup_{D\in\mathcal{D}}\overline{D}.$$

因此 $a \notin \overline{V}$. 由于

$$a \in X - \overline{V}, \quad B \subset V, \quad (X - \overline{V}) \cap V = \varnothing,$$

故 X 的正则性得证.

第 2 步 再证 X 是正规的.

设 A 与 B 是 X 中不相交的两个闭集. 因为 X 是正则的, 故对任意的 $b \in B$, 存在 b 的邻域 U_b 使得 $A \cap \overline{U_b} = \varnothing$. 因

$$\mathscr{A} = \{U_b\}_{b \in B} \cup \{X - B\}$$

是 X 的一个开覆盖, 故由 X 的仿紧性知 $\mathscr{A}$ 有一个局部有限开加细 $\mathscr{C}$ 仍然覆盖了 X. 又令

$$\mathscr{D} = \{C \in \mathscr{C} \mid C \cap B \neq \varnothing\},$$

那么由 $\mathscr{C}$ 覆盖了 X 可知 $\mathscr{D}$ 覆盖了 B.

下面证明对任意的 $D \in \mathscr{D}$ 有 $A \cap \overline{D} = \varnothing$. 任取 $D \in \mathscr{D}$, 那么 $D \cap B \neq \varnothing$. 注意到 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细, 故存在 $b \in B$ 使得 $D \subset U_b$. 由于 $A \cap \overline{U_b} = \varnothing$, 因此 $A \cap \overline{D} = \varnothing$.

令

$$V = \bigcup_{D \in \mathscr{D}} D,$$

那么 V 是开集且由 $\mathscr{D}$ 覆盖了 B 可知 $B \subset V$. 由 $\mathscr{D}$ 的局部有限性知

$$\overline{V} = \bigcup_{D \in \mathscr{D}} \overline{D}.$$

因对任意的 $D \in \mathscr{D}$ 有 $A \cap \overline{D} = \varnothing$, 故 $A \cap \overline{V} = \varnothing$. 注意到

$$A \subset X - \overline{V}, \quad B \subset V, \quad (X - \overline{V}) \cap V = \varnothing.$$

这说明 X 是正规的. □

下面是仿紧空间与紧空间类似的又一性质.

定理 5.11 (仿紧空间的闭继承性) 仿紧空间的闭子空间也是仿紧的.

证明 设 Y 是仿紧空间 X 的闭子空间, $\mathscr{A}$ 是 Y 中的一族开集且覆盖了 Y. 对每个

$A \in \mathcal{A}$, 存在 X 中的开集 A' 使得

$$A = A' \cap Y.$$

于是

$$\mathcal{A}' = \{A'\}_{A\in\mathcal{A}} \cup \{X - Y\}$$

是 X 的一个开覆盖. 由 X 的仿紧性知 $\mathcal{A}'$ 有一个局部有限的开加细 $\mathcal{B}$ 仍覆盖了 X. 定义

$$\mathcal{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\},$$

那么 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个局部有限开加细且覆盖了 Y. □

尽管仿紧空间与紧空间有一些相似的结论, 但它们在另一些方面却又有着不小的差异. 例如, 豪斯道夫空间的仿紧子空间不一定是闭的 (考虑开区间 $(0,1)$, 它同胚于 $\mathbb{R}$, 因此也是仿紧的, 但它作为豪斯道夫空间 $\mathbb{R}$ 的仿紧子空间却不是闭的).

为了证明每个可度量化空间都是仿紧的, 我们需要下面这个有用的引理:

引理 5.12 (正则空间开覆盖的加细) 设 X 是正则空间, 那么下列各条是等价的:

(1) X 的每个开覆盖都存在可数局部有限开加细仍覆盖了 X.

(2) X 的每个开覆盖都存在局部有限加细仍覆盖了 X.

(3) X 的每个开覆盖都存在局部有限闭加细仍覆盖了 X.

(4) X 的每个开覆盖都存在局部有限开加细仍覆盖了 X.

证明 (4) $\Longrightarrow$ (1) 是平凡的. 下面证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4).

(1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个可数局部有限开加细且仍覆盖了 X, 其中每个 $\mathcal{B}_n$ 都是局部有限的. 给定正整数 i, 令

$$V_i = \bigcup \mathcal{B}_i = \bigcup_{U\in\mathcal{B}_i} U.$$

对每个正整数 n 与 $U \in \mathcal{B}_n$ 定义

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i<n} V_i.$$

又令

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) \mid U \in \mathcal{B}_n\}.$$

因为对每个 $U \in \mathcal{B}_n$ 都有 $S_n(U) \subset U$, 所以 $\mathcal{C}_n$ 是 $\mathcal{B}_n$ 的一个加细. 令

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

我们将证明 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个局部有限加细且仍然覆盖了 X.

设 $x \in X$. 因为 $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ 覆盖了 X, 我们可以定义

$$N = \min\left\{n \in \mathbb{Z}_+ \;\middle|\; x \in V_n = \bigcup \mathcal{B}_n\right\}.$$

选定包含 x 的 $U \in \mathcal{B}_N$.

• 因为对所有的 $i < N$ 都有 $x \notin V_i$, 故

$$x \in U - \bigcup_{i<N} V_i = S_N(U).$$

由于 $S_N(U) \in \mathcal{C}_N \subset \mathcal{C}$, 故 $\mathcal{C}$ 覆盖了 X.

• 因为每个 $\mathcal{B}_n$ 都是局部有限的, 故对 $n = 1, \ldots, N$ 我们可以选取 x 的邻域 W_n 只与 $\mathcal{B}_n$ 中的有限个成员相交, 进而 W_n 只与 $\mathcal{C}_n$ 中的有限多个成员相交. 由于 $U \in \mathcal{B}_N$, 因此对每个正整数 $n > N$ 而言 U 与 $\mathcal{C}_n$ 中的成员都是不相交的. 至此我们找到了 x 的一个邻域

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$$

只与 $\mathcal{C}$ 中的有限个成员相交.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 令

$$\mathcal{B} = \{U \subset X \mid U \text{ 是 } X \text{ 中的开集并且存在 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } \overline{U} \subset A\}.$$

由 X 的正则性知 $\mathscr{B}$ 覆盖了 X. 设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个覆盖了 X 的局部有限加细, 那么

$$\mathscr{D} = \{\overline{C} \mid C \in \mathscr{C}\}$$

也覆盖了 X. 由 $\mathscr{B}$ 的构造知 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个加细. 由 $\mathscr{C}$ 的局部有限性知 $\mathscr{D}$ 也是局部有限的. 至此我们找到了 $\mathscr{A}$ 的一个局部有限闭加细.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 由条件可设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个局部有限加细且仍然覆盖了 X. 对每个 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U_x 只与 $\mathscr{B}$ 中有限多个成员相交. 因 $\{U_x \mid x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 故存在它的局部有限闭加细 $\mathscr{C}$ 仍然覆盖了 X. 显然 $\mathscr{C}$ 中的每个成员也只与 $\mathscr{B}$ 中的有限多个成员相交. 对每个 $B \in \mathscr{B}$, 令

$$\mathscr{C}(B) = \{C \in \mathscr{C} \mid C \subset X - B\}.$$

又定义

$$E(B) = X - \bigcup \mathscr{C}(B).$$

注意到 $\mathscr{C}(B)$ 作为 $\mathscr{C}$ 的子族也是局部有限的, 因此

$$\overline{\bigcup \mathscr{C}(B)} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}(B)} \overline{C} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}(B)} C = \bigcup \mathscr{C}(B).$$

这说明 $\bigcup \mathscr{C}(B)$ 是 X 中的闭集, 从而 $E(B)$ 是 X 中的开集. 由 $E(B)$ 的构造知 $B \subset E(B)$. 因为 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细, 故对每个 $B \in \mathscr{B}$, 存在 $F(B) \in \mathscr{A}$ 使得 $B \subset F(B)$. 令

$$\mathscr{D} = \{E(B) \cap F(B) \mid B \in \mathscr{B}\},$$

那么 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{A}$ 的开加细. 又因为

$$B \subset \big(E(B) \cap F(B)\big)$$

且 $\mathscr{B}$ 覆盖了 X, 于是 $\mathscr{D}$ 也覆盖了 X.

最后证明 $\mathscr{D}$ 是局部有限的. 任给 $x \in X$, 存在 x 的邻域 W 只与 $\mathscr{C}$ 中的有限多个成员 $C_1, \ldots, C_k$ 相交, 我们将证明 W 只与 $\mathscr{D}$ 中的有限有限多个成员相交. 由于 $\mathscr{C}$ 覆盖了 X, 故 $W \subset \bigcup_{i=1}^k C_i$. 因此只需证明每个 $C \in \mathscr{C}$ 都只与 $\mathscr{D}$ 中有限多个成员相交. 注意到

对每个 $B \in \mathcal{B}$,

$$C \cap B = \varnothing \Longrightarrow C \subset X - B \Longrightarrow C \cap E(B) = \varnothing \Longrightarrow C \cap (E(B) \cap F(B)) = \varnothing,$$

而 C 只与 $\mathcal{B}$ 中的有限多个成员相交, 于是 C 只与 $\mathcal{D}$ 中至多有限个成员相交. □

定理 5.13 (可度量化 $\Longrightarrow$ 仿紧) 可度量化空间一定是仿紧的.

证明 设 X 是可度量化空间. 根据命题 5.6, X 的每个开覆盖都有可数局部有限的开加细仍覆盖了 X. 注意到可度量化空间是正规空间, 因而也是正则空间, 故由引理 5.12 即得 X 的每个开覆盖都有局部有限开加细仍覆盖了 X. □

下面我们用仿紧性给出拓扑空间可度量化的又一充要条件 (它实际上是 Nagata-Smirnov 度量化定理的一个推论), 为此给出局部可度量化的概念.

定义 5.14 (局部可度量化空间) 设 X 是一个拓扑空间. 若 X 中的每点 x 都存在一个邻域 U 是可度量化的, 则称 X 是局部可度量化的.

显然可度量化空间一定是局部可度量化的.

定理 5.15 (Smirnov 度量化定理) 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是局部可度量化的仿紧豪斯道夫空间.

证明 ($\Longrightarrow$) 可度量化空间一定是豪斯道夫且局部可度量化的. 根据定理 5.13可知 X 是仿紧的.

($\Longleftarrow$) 根据定理 5.10, 仿紧的豪斯道夫空间一定是正规的, 因而是正则的. 我们将证明 X 有一个可数局部有限的基. 如此一来, 由 X 的正则性与 Nagata-Smirnov 度量化定理即得 X 的可度量性.

对每个 $x \in X$, 存在 x 的一个邻域 U_x 是可度量化的. 由 X 的仿紧性知开覆盖

$$\{U_x \mid x \in X\}$$

有一个局部有限的开加细 $\mathcal{C}$ 仍然覆盖了 X. 注意到 $\mathcal{C}$ 中的每个成员 C 都是可度量化的,

于是可设

$$d_C : C \times C \to \mathbb{R}$$

是 C 上诱导了相应拓扑的一个度量.

对给定的 $x \in C$ 与 $\varepsilon > 0$, 设

$$B_C(x, \varepsilon) = \{y \in C \mid d_C(x, y) < \varepsilon\},$$

那么 $B_C(x, \varepsilon)$ 在 C 中是开的. 因 C 在 X 中是开的, 故 $B_C(x, \varepsilon)$ 在 X 中也是开的. 给定正整数 m, 令

$$\mathcal{A}_m = \left\{ B_C\left(x, \frac{1}{m}\right) \middle| C \in \mathcal{C} \text{ 且 } x \in C \right\},$$

那么 $\mathcal{A}_m$ 覆盖了 X. 由 X 的仿紧性知 $\mathcal{A}_m$ 有一个局部有限的开加细 $\mathcal{D}_m$ 也覆盖了 X. 设

$$\mathcal{D} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_m,$$

那么 $\mathcal{D}$ 是可数局部有限的, 下面证明 $\mathcal{D}$ 是 X 的一个基.

任取 $x \in X$ 以及 x 的邻域 U. 因为 x 只属于 $\mathcal{C}$ 中的有限个成员 $C_1, \ldots, C_k$. 对每个 C_i, 由于 $U \cap C_i$ 在 C_i 中是开的, 故存在 $\varepsilon_i > 0$ 使得

$$B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subset U \cap C_i.$$

选择一个正整数 m 使得

$$\frac{2}{m} < \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}.$$

因为 $\mathcal{D}_m$ 覆盖了 X, 故存在 $D \in \mathcal{D}_m$ 使得 $x \in D$. 又因为 $\mathcal{D}_m$ 是 $\mathcal{A}_m$ 的加细, 故存在 $C \in \mathcal{C}$ 以及 $y \in C$ 使得

$$D \subset B_C\left(y, \frac{1}{m}\right).$$

于是

$$x \in D \subset B_C\left(y, \frac{1}{m}\right) \subset C.$$

这说明

$$C \in \{C_1, \ldots, C_k\}.$$

假设 $C = C_j$, 那么由

$$x \in B_{C_j}\left(y, \frac{1}{m}\right) \quad 与 \quad \frac{2}{m} < \varepsilon_j$$

可得

$$x \in D \subset B_{C_j}\left(y, \frac{1}{m}\right) \subset B_{C_j}(x, \varepsilon_j) \subset U.$$

至此, 对任意的 $x \in X$ 与 x 的邻域 U, 我们找到了 $D \in \mathscr{D}$ 使得 $x \in D \subset U$, 这说明 $\mathscr{D}$ 是 X 的一个基. □

5.3 完备度量空间

定义 5.16 (柯西列, 完备度量空间) 设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的一个序列. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

则称 (x_n) 是一个柯西列. 若 (X, d) 中的每个柯西列都是收敛的, 则称 (X, d) 是一个完备度量空间.

例 5.17 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在通常度量 $d(x, y) = |x - y|$ 下不是完备的. 为了说明这一点, 只需考虑由 $\sqrt{2}$ 的不足近似值构成的序列

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots .$$

显然此序列在 $\mathbb{R}$ 中收敛于 $\sqrt{2}$, 然而 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. //

性质 5.18 (柯西列是有界的) 设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的柯西列, 那么集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是有界的.

证明 取 $\varepsilon = 1$, 那么存在正整数 N 使得当 $n, m \geqslant N$ 时有 $d(x_n, x_m) < 1$. 令

$$M = \max\{d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N), 1\}.$$

那么对任意的正整数 n, m 都有

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_N) + d(x_N, d_m) \leqslant M + M = 2M.$$

这说明集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是有界的. □

定理 5.19 (完备度量空间的闭继承性) 完备度量空间的闭子空间也是完备的.

证明 设 A 是完备度量空间 (X, d) 的闭子空间. 任取 A 中的柯西列 (x_n), 那么 (x_n) 也是 X 中的柯西列. 利用 X 的完备性知存在 $x \in X$ 使得 $x_n \to x$. 由序列引理即得 $x \in \overline{A} = A$. □

定理 5.20 (标准有界度量的完备性) 设 (X, d) 是一个度量空间,

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

是相应于 d 的标准有界度量, 那么 (X, d) 是完备的当且仅当 $(X, \bar{d})$ 是完备的.

证明 只需注意到两个事实: (1) 序列 (x_n) 是 $\bar{d}$ 下的柯西列当且仅当 (x_n) 是 d 下的柯西列; (2) 序列 (x_n) 在 $\bar{d}$ 下收敛当且仅当 (x_n) 在 d 下收敛. □

命题 5.21 (柯西列必有收敛子列 $\Longrightarrow$ 完备) 若度量空间 (X, d) 中的每个柯西列都有收敛子列, 那么 (X, d) 是完备的.

证明 任取 X 中的柯西列 (x_n). 设 (x_n) 有收敛于 $x \in X$ 的收敛子列 (x_{n_i}), 下面证明 $x_n \to x$. 因 (x_n) 是柯西列, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 有

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\lim_{n_i \to \infty} d(x_{n_i}, x) = 0$, 故存在某个 $n_j \geqslant N$ 使得

$$d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这说明当 $n \geqslant N$ 时有

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此 $x_n \to x$. □

定理 5.22 ($\mathbb{R}^k$ 的完备性) 欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 在欧氏度量 d 或方形度量 ρ 下是完备的.

证明 先考察 $(\mathbb{R}^k, \rho)$ 的完备性. 设 (x_n) 是 $(\mathbb{R}^k, \rho)$ 中的柯西列, 那么集合 $\{x_n\}$ 是有界的, 从而存在 $M > 0$ 使得 $\{x_n\} \subset [-M, M]^k$. 注意到 $[-M, M]^k$ 是紧的, 故由定理 3.61 知 (x_n) 有收敛子列. 最后利用命题 5.21 即得结论.

再考察 $(\mathbb{R}^k, d)$ 的完备性. 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^k$ 有

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{k}\rho(x, y).$$

于是

- 序列 (x_n) 关于 d 是柯西列当且仅当 (x_n) 关于 ρ 是柯西列.
- 序列 (x_n) 关于 d 收敛当且仅当 (x_n) 关于 ρ 收敛.

因此 $(\mathbb{R}^k, d)$ 的完备性可由 $(\mathbb{R}^k, \rho)$ 的完备性得到. □

例 5.23 (完备性不是拓扑性质) 考虑欧氏度量, 那么实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $(-1, 1)$ 不是完备的, 例如定义为

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

的序列 (x_n) 是 $(-1, 1)$ 中的柯西列, 但 (x_n) 在 $(-1, 1)$ 中不收敛. 注意到 $(-1, 1)$ 同胚于 $\mathbb{R}$, 这说明完备性不是拓扑性质. //

设 $\{(X_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是一列度量空间. 定理 2.81 说明度量

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n} \right\},$$

诱导了 $\prod X_n$ 上的乘积拓扑. 下面的结论说明只要每个 (X_n, d_n) 完备, 那么乘积度量空间 $(\prod X_n, d)$ 就是完备的.

定理 5.24 (乘积度量空间的完备性) 设 $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是一列完备度量空间. 考虑乘积空间 $\prod X_n$ 上的度量

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\{ \frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n} \right\},$$

那么 $(\prod X_n, d)$ 也是完备的.

证明 记 $X = \prod X_n$. 显然对任意的 $x, y \in X$ 与正整数 i 都有

$$\overline{d_i}(\pi_i(x), \pi_i(y)) \leqslant i \cdot d(x,y).$$

任取 (X,d) 中的柯西列 (x_n), 那么对每个正整数 i, 序列 $(\pi_i(x_n))$ 都是 X_i 中的柯西列. 由 X_i 的完备性知存在 $a_i \in X_i$ 使得 $(\pi_i(x_n))$ 收敛于 a_i, 从而序列 (x_n) 在 X 中收敛于 $a = (a_1, a_2, \ldots)$. □

回忆一下, 度量空间中的紧性、极限点紧性、序列紧性三者是等价的 (定理 3.61). 现在我们想问, 度量空间的紧性与完备性之间有什么关系呢? 命题 5.21 告诉我们紧度量空间一定是完备的, 然而一个完备度量空间却不一定是紧的 (比如 $\mathbb{R}$). 为了能从完备性得到紧性, 我们还需要额外的条件.

定义 5.25 (完全有界) 设 (X,d) 是一个度量空间. 若对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在有限个 ε-开球覆盖了 X, 则称 X 是完全有界的.

完全有界性蕴含有界性. 事实上, 设

$$B\left(x_1, \frac{1}{2}\right), \ldots, B\left(x_n, \frac{1}{2}\right)$$

是覆盖了完全有界度量空间 (X,d) 的有限个开球. 又令

$$M = \max\{d(x_i, x_j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.$$

任取 $x, y \in X$, 那么存在 k 与 ℓ 使得 $x \in B(x_k, 1/2)$, $y \in B(x_\ell, 1/2)$, 从而

$$d(x,y) \leqslant d(x, x_k) + d(x_k, x_\ell) + d(x_\ell, y) < \frac{1}{2} + M + \frac{1}{2} = 1 + M.$$

因此 X 是有界的. 然而, 有界不能得到完全有界. 例如实直线 $\mathbb{R}$ 关于标准有界度量

$$\bar{d}(a,b)=\min\{|a-b|,1\}$$

是有界的, 但不是完全有界的. 这是因为对其中任意有限个开球 $B(a_1,1),\ldots,B(a_n,1)$, 取 $a=1+\max\{a_i\}$, 那么实数 a 满足

$$|a-a_i|\geqslant 1,\quad i=1,\ldots,n,$$

从而 $\bar{d}(a,a_i)=1$. 这说明 a 不在任何一个 $B(a_i,1)$ 中, 即开球 $B(a_1,1),\ldots,B(a_n,1)$ 没有覆盖 $\mathbb{R}$.

例 5.26 考虑度量 $d(a,b)=|a-b|$, 那么

- 实直线 $\mathbb{R}$ 是完备的但不是完全有界的.
- 开区间 $(-1,1)$ 是完全有界的但不是完备的.
- 闭区间 $[-1,1]$ 既是完备的也是完全有界的. //

定理 5.27 (对度量空间而言, 紧 $\Longleftrightarrow$ 完备 + 完全有界) 度量空间 (X,d) 是紧的当且仅当它是完备且完全有界的.

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 X 是紧度量空间, 那么 X 是序列紧的, 即任意序列都有收敛子列. 特别地, X 中的任一柯西列都有收敛子列, 从而由命题 5.21 知 X 是完备的. 任取 $\varepsilon>0$, 那么 $\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X\}$ 是 X 的一个开覆盖, 它存在有限子覆盖, 于是 X 是完全有界的.

$(\Longleftarrow)$ 根据定理 3.61, 只需证明 X 是序列紧的. 任取 X 中的序列 (x_n), 我们将找到它的一个子列是柯西列, 再由完备性知该柯西列是收敛的.

首先用有限多个 1-开球覆盖 X, 那么其中必有一个开球包含了序列 (x_n) 中的无限多项. 将该开球记为 B_1, 定义

$$J_1=\{n\in\mathbb{Z}_+\mid x_n\in B_1\}.$$

现在用有限多个 $(1/2)$-开球覆盖 X. 因 J_1 是无限的, 故这些 $(1/2)$-开球中必有一个含有下标属于 J_1 的无限多个 x_n. 将该 $(1/2)$-开球记为 B_2, 定义

$$J_2=\{n\in J_1\mid x_n\in B_2\}.$$

一般地, 若已得到 $\mathbb{Z}_+$ 的无限子集 J_k, 那么必有一个 $(1/(k+1))$-开球 B_{k+1} 包含了下标属于 J_k 的无限多个 x_n. 定义

$$J_{k+1} = \{n \in J_k \mid x_n \in B_{k+1}\}.$$

选择一个 $n_1 \in J_1$. 给出 $n_k \in J_k$ 之后, 因为 J_{k+1} 是无限集, 故总可以取到 $n_{k+1} \in J_{k+1}$ 使得 $n_{k+1} > n_k$, 由此便得到了 (x_n) 的一个子列 (x_{n_k}). 注意到

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots$$

是一列递降的集合, 因此对任一给定的 k, 当 $i, j \geqslant k$ 时有 $n_i, n_j \in J_k$, 从而 $x_{n_i}, x_{n_j} \in B_k$. 注意到 B_k 是 $(1/k)$-开球, 这说明 (x_{n_k}) 是一个柯西列. □

5.4 函数空间

回忆一下, 集合 Y 关于指标集 J 的笛卡尔积 Y^J 定义为从 J 到 Y 的全体映射所成集合.

定义 5.28 (一致度量) 设 (Y, d) 是一个度量空间, J 是一指标集, $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha) \in Y^J$. 定义 x 与 y 之间的距离为

$$\bar{\rho}(x, y) = \sup_{\alpha \in J}\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha)\},$$

其中 $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) = \min\{d(x_\alpha, y_\alpha), 1\}$ 是相应于 d 的标准有界度量. 由此得到的度量 $\bar{\rho}$ 称为 Y^J 上相应于 d 的一致度量.

因为 Y^J 里面的成员是从 J 到 Y 的函数, 故我们可以使用函数的记号来表示一致度量 $\bar{\rho}$: 对任意两个函数 $f, g : J \to Y$, 二者之间的距离为

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup_{\alpha \in J}\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha))\}.$$

定理 5.29 (一致度量的完备性) 若 (Y, d) 是一个完备度量空间, 那么 $(Y^J, \bar{\rho})$ 也是完备度量空间, 这里 $\bar{\rho}$ 是相应于 d 的一致度量.

证明 由定理 5.20 知 $(Y, \bar{d})$ 是完备的. 设 (f_n) 是 $(Y^J, \bar{\rho})$ 中的柯西列, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时有

$$\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

因此对任意的 $\alpha \in J$ 都有

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \varepsilon.$$

这说明 $(f_n(\alpha))$ 是 $(Y, \bar{d})$ 中的柯西列. 由 $(Y, \bar{d})$ 的完备性知存在 $y_\alpha \in Y$ 使得序列 $(f_n(\alpha))$ 收敛到 y_α. 定义 $f : J \to Y$ 为

$$f(\alpha) = y_\alpha.$$

下面证明 (f_n) 在 $(Y^J, \bar{\rho})$ 中收敛于 f.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时有

$$\bar{\rho}(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对任意的 $\alpha \in J$ 都有

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定 n 与 α, 令 $m \to \infty$, 则有

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

这说明当 $n \geqslant N$ 时,

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

因此 (f_n) 在 $(Y^J, \bar{\rho})$ 中收敛到 f. □

将指标集的记号 J 用 X 来代替, 那么乘积空间 Y^X 表示从集合 X 到集合 Y 的映射全体.

定义 5.30 (连续函数空间, 有界函数空间)

(1) 设 X 与 Y 均为拓扑空间, 那么我们用

$$\mathcal{C}(X, Y)$$

表示从 X 到 Y 的全体连续映射所成集合, 它是 Y^X 的子集.

(2) 设 X 是一个拓扑空间, (Y,d) 是一度量空间. 若映射 $f:X\to(Y,d)$ 的像集 $f(X)$ 是 Y 中的有界集, 则称 f 是有界的. 我们用

$$\mathcal{B}(X,Y)$$

表示从 X 到 (Y,d) 的全体有界映射所成的集合, 它也是 Y^X 的子集.

下面考察 $\mathcal{C}(X,Y)$ 与 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的完备性.

定理 5.31 (连续函数空间与有界函数空间的完备性) 设 X 为拓扑空间, (Y,d) 为度量空间. 考虑带有一致度量的函数空间 $(Y^X,\bar{\rho})$, 那么 $\mathcal{C}(X,Y)$ 与 $\mathcal{B}(X,Y)$ 都是 Y^X 中的闭集. 因此若 (Y,d) 是完备的, 那么 $\mathcal{C}(X,Y)$ 与 $\mathcal{B}(X,Y)$ 也都是完备的.

证明 由序列引理 2.86 只需证明 $\mathcal{C}(X,Y)$ 与 $\mathcal{B}(X,Y)$ 在 $(Y^X,\bar{\rho})$ 中关于序列极限是封闭的.

首先考虑连续函数空间 $\mathcal{C}(X,Y)$. 设 (f_n) 是 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的一个序列且在 $(Y^X,\bar{\rho})$ 中收敛于函数 f. 任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N 使得当 $n\geqslant N$ 时有 $\bar{\rho}(f,f_n)<\varepsilon$. 于是对所有的 $x\in X$ 以及 $n\geqslant N$ 均有

$$\bar{d}(f_n(x),f(x))\leqslant\bar{\rho}(f_n,f)<\varepsilon,$$

其中 $\bar{d}$ 是相应于 d 的标准有界度量. 这说明函数列 (f_n) 一致收敛于 f. 根据一致收敛定理 2.91 可知函数 f 是连续的, 即 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$.

其次考虑有界函数空间 $\mathcal{B}(X,Y)$. 假设 (f_n) 是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的一个序列且在 $(Y^X,\bar{\rho})$ 中收敛于函数 f. 选择一个正整数 N 使得 $\bar{\rho}(f_N,f)<1/2$, 那么对所有的 $x\in X$ 都有

$$\bar{d}(f_N(x),f(x))<\frac{1}{2}.$$

从而每个 $x\in X$ 均满足

$$d(f_N(x),f(x))<\frac{1}{2}.$$

因此如果 diam $f_N(X) = M$, 那么

$$\operatorname{diam} f(X) \leqslant M + 1.$$

这说明 $f \in \mathcal{B}(X, Y)$. $\square$

定义 5.32 (上确界度量) 设 X 为拓扑空间, (Y, d) 为度量空间, 在有界函数空间 $\mathcal{B}(X, Y)$ 上定义度量

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}.$$

我们称度量 ρ 为上确界度量.

上确界度量 ρ 是定义良好的, 因为若取定 $y_1 \in f(X)$ 与 $y_2 \in g(X)$, 那么对每个 $x \in X$ 都有

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leqslant d(f(x), y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, g(x)) \\ &\leqslant \operatorname{diam} f(X) + d(y_1, y_2) + \operatorname{diam} g(X). \end{aligned}$$

这说明 $\rho(f, g) < \infty$. 下面的结论解释了我们为何采用记号 ρ 来表示上确界度量.

命题 5.33 (上确界度量与一致度量的关系) 在 $\mathcal{B}(X, Y)$ 上, 一致度量 $\bar{\rho}$ 是上确界度量 ρ 的标准有界度量, 即

$$\bar{\rho} = \min\{\rho, 1\}.$$

证明 任取 $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$, 下证

$$\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}.$$

- 若 $\rho(f, g) > 1$, 那么存在 $x_0 \in X$ 使得 $d(f(x_0), g(x_0)) > 1$, 从而 $\bar{d}(f(x_0), g(x_0)) = 1$, 于是 $\bar{\rho}(f, g) = 1$.
- 若 $\rho(f, g) \leqslant 1$, 那么对任意的 $x \in X$ 都有 $\bar{d}(f(x), g(x)) = d(f(x), g(x)) \leqslant 1$, 于是 $\bar{\rho}(f, g) = \rho(f, g)$. $\square$

设 X 是一个拓扑空间, (Y, d) 是一个度量空间. 如果 X 是紧的, 那么每一个连续映射 $f : X \to Y$ 都是有界的 (因为紧空间的连续像也是紧的, 而度量空间中的紧集是有

界闭集), 从而上确界度量 ρ 也能够定义在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上. 此外, 若 (Y,d) 还是完备的, 那么 $\mathcal{C}(X,Y)$ 在一致度量 $\bar{\rho}$ 下也是完备的, 于是由定理 5.20 知 $\mathcal{C}(X,Y)$ 在上确界度量 ρ 下也是完备的. 在这种情况下此时我们更喜欢在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上考虑上确界度量 ρ, 而不是一致度量 $\bar{\rho}$.

最后利用函数空间的理论考察度量空间的完备化.

定义 5.34 (等距嵌入) 设 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是度量空间之间的映射. 若对任意的 $x_1,x_2\in X$ 都有

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))=d_X(x_1,x_2),$$

则称 f 是一个等距嵌入. 若 f 还是一个双射, 则称 f 为一个等距同构.

下面的命题解释了我们在术语中采用“嵌入”二字的原因.

命题 5.35 (等距嵌入是拓扑嵌入) 等距嵌入是拓扑空间之间的嵌入.

证明 设 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个等距嵌入. 任取 $x_0\in X$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $d_X(x_1,x_2)<\delta$ 就有 $d_Y(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$, 这说明 f 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 f 连续. 又因为

$$f(x_1)=f(x_2)\implies d_Y(f(x_1),f(x_2))=0\implies d_X(x_1,x_2)=0\implies x_1=x_2,$$

故 f 是单射. 最后证明 $f:X\to f(X)$ 是同胚, 为此只需证明 f^{-1} 也是等距嵌入. 任取 $y_1,y_2\in f(X)$, 那么存在 $x_1,x_2\in X$ 使得 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$. 因此

$$d_X(f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2))=d_X(x_1,x_2)=d_Y(f(x_1),f(x_2))=d_Y(y_1,y_2).$$

结论得证. □

定理 5.36 (度量空间的完备化) 任一度量空间都可以等距嵌入到完备度量空间中.

证明 设 (X,d) 是一度量空间. 因为 $\mathbb{R}$ 是完备的, 故有界函数空间 $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ 是完备

的. 我们将把 X 等距嵌入到 $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ 中. 任意取定 $x_0, a \in X$, 定义 $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ 为

$$\phi_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0).$$

因为

$$|\phi_a(x)| = |d(x,a) - d(x,x_0)| \leqslant d(x_0,a), \tag{5.4}$$

故 ϕ_a 是有界的, 即 $\phi_a \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. 又定义 $\Phi : X \to \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ 为

$$\Phi(a) = \phi_a.$$

下面证明对任意的 $a, b \in X$ 都有

$$\rho(\phi_a,\phi_b) = d(a,b),$$

从而 Φ 是一个等距嵌入. 一方面, 由 (5.4) 式知

$$\begin{aligned}
\rho(\phi_a,\phi_b) &= \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)|\} \\
&\leqslant \sup\{|\phi_a(x)|\} + \sup\{|\phi_b(x)|\} \\
&\leqslant d(x_0,a) + d(x_0,b) \\
&\leqslant d(a,b).
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\rho(\phi_a,\phi_b) &= \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)|\} \\
&= \sup\{|d(x,a) - d(x,b)|\} \\
&\geqslant |d(a,a) - d(a,b)| \\
&= d(a,b).
\end{aligned}$$

结论得证. □

定义 5.37 (度量空间的完备化) 设 X 为度量空间, Y 是一个完备度量空间. 若 $h : X \to Y$ 是一个等距嵌入, 则把 Y 的闭子空间 $\overline{h(X)}$ 称为 X 的一个完备化.

可以证明度量空间的完备化在等距同构的意义下是唯一的, 这里不再赘述.

6 其他内容

6.1 Baire 空间

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 如果 A 在 X 中的内部 $\mathrm{Int}(A)$ 是空集, 则称 A 在 X 中是内部为空的.

引理 6.1 (内部为空 $\Longleftrightarrow$ 补集稠密) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 则 A 在 X 中内部为空当且仅当 $X-A$ 在 X 中稠密, 即

$$\mathrm{Int}(A)=\varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{X-A}=X.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 假设 $\overline{X-A}\subsetneq X$, 那么存在 $x\in X$ 使得 $x\notin\overline{X-A}$, 于是存在 x 的邻域 U 使得

$$U\cap(X-A)=\varnothing,$$

也即 $U-A=\varnothing$, 这说明 $U\subset A$. 至此我们找到了一个含于 A 的非空开集, 这与 $\mathrm{Int}(A)=\varnothing$ 矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设存在 $x\in\mathrm{Int}(A)$. 注意到

$$\overline{X-A}\subset\overline{X-\mathrm{Int}(A)}=X-\mathrm{Int}(A),$$

因而 $x\notin\overline{X-A}$, 这与 $\overline{X-A}=X$ 矛盾. □

定义 6.2 (Baire 空间) 设 X 是一个拓扑空间. 若 X 中任意可数个内部为空的闭集 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 之并 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}A_n$ 也在 X 中内部为空, 则称 X 是一个 Baire 空间.

例 6.3 考虑实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间, 那么

- 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 Baire 空间, 因为 $\mathbb{Q}$ 中的每个单点集 $\{q\}$ 都是闭的, 而

$$\mathbb{Q}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$$

的内部是 $\mathbb{Q}$.

• 正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 是 Baire 空间. 事实上, 由于 $\mathbb{Z}_+$ 的每个子集都是开的, 因而 $\mathbb{Z}_+$ 中内部为空的闭集只有 $\varnothing$. //

定理 6.4 (Baire 空间的等价刻画) 拓扑空间 X 是 Baire 空间当且仅当 X 中任意可数个稠密开集的交也在 X 中稠密.

证明 由引理 6.1 即得. □

定理 6.5 (Baire 空间的开继承性) Baire 空间的开子空间也是 Baire 空间.

证明 设 Y 是 Baire 空间 X 的开子空间. 任取 Y 中一列内部为空的闭集 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 下证

$$\mathrm{Int}_Y\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \varnothing.$$

设 A_n 在 X 中的闭包为 $\overline{A_n}$, 那么 $\overline{A_n} \cap Y = A_n$. 现在证明 $\mathrm{Int}_X(\overline{A_n}) = \varnothing$. 假设 X 中存在非空开集 U 使得 $U \subset \overline{A_n}$, 那么由 (5.1) 可知

$$U \cap Y \supset U \cap A_n \neq \varnothing.$$

又因为

$$U \cap Y \subset \overline{A_n} \cap Y = A_n,$$

故我们在 Y 中找到了含于 A_n 的非空开集 $U \cap Y$, 这与 $\mathrm{Int}_Y(A_n) = \varnothing$ 矛盾.

最后证明

$$\mathrm{Int}_Y\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \varnothing.$$

假定 Y 中存在一个含于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的非空开集 W. 因为 Y 是 X 中的开集, 故 W 也是 X 中的开集. 由于

$$W \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n},$$

于是

$$\mathrm{Int}_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) \neq \varnothing.$$

但 $\{\overline{A_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中一列内部为空的闭集, 这与 X 是 Baire 空间矛盾. $\square$

定理 6.6 (Baire 纲定理) 局部紧 Hausdorff 空间与完备度量空间都是 Baire 空间.

证明 因为非紧的局部紧 Hausdorff 空间是它的单点紧化的开子空间, 故由 Baire 空间的开继承性, 我们只需证明紧 Hausdorff 空间和完备度量空间都是 Baire 空间.

任取 X 中一列内部为空的闭集 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. 为了证明 X 中不存在含于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的非空开集, 只需证明对 X 中的任意非空开集 U, 都存在 $x\in U$ 使得

$$x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

任取 X 中的非空开集 U_0. 因为 A_1 的内部为空, 故 $U_0\not\subset A_1$, 存在 $y_1\in U_0-A_1$. 因为紧 Hausdorff 空间与完备度量空间都是正则的, 故存在 y_1 的邻域 U_1 使得

$$y_1\in U_1\subset\overline{U_1}\subset U_0-A_1.$$

若 X 是度量空间, 我们要求 $\operatorname{diam} U_1<1$. 一般地, 给出开集 U_{n-1} 之后, 因为 $U_{n-1}\not\subset A_n$, 故存在 $y_n\in U_{n-1}-A_n$, 从而由正则性知存在 y_n 的邻域 U_n 使得

$$y_n\in U_n\subset\overline{U_n}\subset U_{n-1}-A_n.$$

若 X 是度量空间, 我们要求 $\operatorname{diam} U_n<1/n$. 接下来只需证明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n}\neq\varnothing. \tag{6.1}$$

这是因为若 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n}$, 那么 (a) $x\in\overline{U_1}$, 于是 $x\in U_0$; (b) 对每个正整数 n 都有 $x\notin A_n$, 从而 $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 如此一来我们便在任意的非空开集 U_0 中找到了一个点 x 不在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 中.

为了得到 (6.1), 我们分两种情况进行讨论:

- 若 X 是紧 Hausdorff 的, 注意到非空递减闭集列

$$\overline{U_1}\supset\overline{U_2}\supset\cdots$$

具有有限交性质, 故根据定理 3.47可知 (6.1) 成立.

- 若 X 是完备度量空间, 相应结论由下面的命题 6.7 即得. □

命题 6.7 (完备度量空间中的非空递减闭集列) 设 X 是完备度量空间,

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots$$

是 X 中的非空递减闭集列. 若

$$\operatorname{diam} C_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

那么

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing.$$

证明 取 $x_n \in C_n$. 任给 $\varepsilon > 0$, 由 $\operatorname{diam} C_n \to 0$ 可知存在正整数 N 使得 $\operatorname{diam} C_N < \varepsilon$. 于是当 $n, m \geqslant N$ 时, 由 $x_n, x_m \in C_N$ 可得

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

这说明 (x_n) 是 X 中的柯西列. 由 X 的完备性知存在 $x \in X$ 使得 $x_n \to x$. 注意到对每个正整数 k, 子列

$$x_k, x_{k+1}, \ldots$$

是 C_k 中收敛于 x 的序列, 因此由 C_k 的闭性以及序列引理知 $x \in C_k$, 从而

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

结论得证. □

Baire 纲定理告诉我们完备度量空间一定是 Baire 空间. 其实, “完备度量空间是 Baire 空间” 这一说法并不是那么好, 因为 Baire 空间是一个纯粹的拓扑概念, 但度量空间的完备性却并不是一个拓扑概念: 两个不同的距离可以诱导相同的拓扑, 但二者的完备性却可以不同. 所以更准确的说法应该是: 若一个拓扑空间的拓扑可以由一个完备的度量诱导, 则该空间是 Baire 空间.

最后我们给出一个有趣的结论——全体无理数构成一个 Baire 空间.

例 6.8 无理数集 $\mathbb{P} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 是 Baire 空间.

证明 任取 $\mathbb{P}$ 中的一列内部为空的闭集 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 下证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 在 $\mathbb{P}$ 中的内部也为空.

首先证明 A_n 在 $\mathbb{R}$ 中的闭包 $\overline{A_n}$ 满足 $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\overline{A_n}) = \varnothing$. 假设存在非空开区间 $(a,b) \subset \overline{A_n}$, 那么

$$A_n = \overline{A_n} \cap \mathbb{P} \supset (a,b) \cap \mathbb{P} \neq \varnothing.$$

注意到 $(a,b) \cap \mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}$ 中的开集, 这与 A_n 在 $\mathbb{P}$ 中内部为空矛盾. 因此 $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\overline{A_n}) = \varnothing$.

现在证明

$$\mathrm{Int}_{\mathbb{P}}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \varnothing.$$

假设 $\mathbb{P}$ 中有非空开集 $(a,b) \cap \mathbb{P}$ 含于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 那么

$$(a,b) - \mathbb{Q} = (a,b) \cap \mathbb{P} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

从而

$$(a,b) \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

注意到上式右端是 $\mathbb{R}$ 中可数个内部为空的闭集之并, 因而不能含有 $\mathbb{R}$ 中的开集, 矛盾. □

6.2 拓扑维数

首先介绍拓扑空间子集族的阶.

定义 6.9 (子集族的阶) 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的一个子集族. 若 X 中存在某点属于 $\mathcal{A}$ 中的 m 个成员, 但没有点属于 $\mathcal{A}$ 中多于 m 个成员, 则称子集族 $\mathcal{A}$ 是 m 阶的.

利用子集族的阶我们引入拓扑维数这一概念. 回忆一下, 若拓扑空间 X 的两个子集族 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 满足对任意的 $B \in \mathcal{B}$ 均存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $B \subset A$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个加细.

定义 6.10 (拓扑维数) 设 X 是一个拓扑空间. 若存在整数 m 使得对 X 的任一开覆盖 $\mathcal{A}$, 均存在阶至多为 $m+1$ 的开加细 $\mathcal{B}$ 仍覆盖了 X, 则称 X 是有限维的. 满足上述要求的 m 的最小值称为 X 的拓扑维数, 记为 $\dim X$.

例 6.11 实直线 $\mathbb{R}$ 的紧子空间的拓扑维数至多为 1.

证明 令

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \mathcal{A}_1 = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

那么

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$$

是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖, 且 $\mathcal{A}$ 中的每个成员都是直径为 1 的. 注意到 $\mathcal{A}_0$ 中的每个成员都是互不相交的, $\mathcal{A}_1$ 中的每个成员也都是互不相交的, 故 $\mathcal{A}$ 的阶为 2.

设 X 是 $\mathbb{R}$ 的紧子空间, 下面证明 X 的任一开覆盖都有阶至多为 2 的开加细仍覆盖了 X. 任给 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 设 $\delta > 0$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个勒贝格数, 那么 X 中任意一族直径小于 δ 的子集都是 $\mathcal{U}$ 的加细. 考虑同胚

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\delta}{2}x,$$

那么

$$\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

是 $\mathbb{R}$ 的一个开覆盖. 易知此开覆盖的阶为 2. 因为 $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ 中每个成员的直径都是 $\delta/2$, 故

$$\{f(A) \cap X \mid A \in \mathcal{A}\}$$

是 X 的一族直径小于 δ 的子集, 从而是 $\mathcal{U}$ 的加细. 显然 $\{f(A) \cap X \mid A \in \mathcal{A}\}$ 的阶至多为 2, 因此它就是我们所需的开加细. □

例 6.12 单位闭区间 $X = [0, 1]$ 的拓扑维数为 1.

证明 根据例 6.11, 只需证明 $\dim X \geqslant 1$. 取 $[0, 1]$ 的开覆盖

$$\mathcal{A} = \{[0, 1), (0, 1]\},$$

下面证明 $\mathcal{A}$ 的任一覆盖了 X 的开加细的阶至少为 2.

设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的开加细且仍覆盖了 X, 那么 $\mathcal{B}$ 至少含有 2 个成员. 取 $U \in \mathcal{B}$, 又令

$$V = \bigcup\{B \in \mathcal{B} \mid B \neq U\}.$$

若 $\mathcal{B}$ 的阶为 1, 那么

$$U \cap V = \varnothing.$$

于是 U, V 给出了 X 的一个分割, 这与 X 是连通的矛盾. □

定理 6.13 (闭子空间的维数不超过原空间的维数) 设 X 是有限维拓扑空间, Y 是 X 的闭子空间, 那么 Y 也是有限维的, 且

$$\dim Y \leqslant \dim X.$$

证明 设 $\dim X = m$, 又设 $\mathcal{A}$ 是 Y 中的一族开集且覆盖了 Y. 对每个 $A \in \mathcal{A}$, 取 X 中的开集 A' 使得 $A' \cap Y = A$. 考虑 X 的开覆盖

$$\mathcal{A}' = \{A' \mid A \in \mathcal{A}\} \cup \{X - Y\},$$

其有一个阶至多为 $m + 1$ 的开加细 $\mathcal{B}$ 覆盖了 X. 令

$$\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\},$$

那么 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个开加细且覆盖了 X, 阶至多为 $m + 1$. □

定理 6.14 (通过闭子空间确定拓扑维数) 设有拓扑空间 $X = Y \cup Z$, 其中 Y 和 Z 是 X 的闭子空且是有限维的, 那么 X 是有限维的且

$$\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}.$$

证明 设 $m = \max\{\dim Y, \dim Z\}$. 我们将证明 X 是有限维的, 并且它的拓扑维数至多为 m, 从而由定理 6.13 即得 X 的维数为 m.

第 1 步 首先给出一个新的说法: 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖, 若子空间 Y 中的点至

多属于 $\mathcal{A}$ 的 $m+1$ 个成员, 则称 $\mathcal{A}$ 在 Y 中的阶数至多为 $m+1$. 下面证明若 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖, 那么存在 $\mathcal{A}$ 的开加细仍然覆盖了 X 并且此加细在 Y 中的阶数至多为 $m+1$.

考虑 Y 的开覆盖

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

由于 $\dim Y \leqslant m$, 因此上述开覆盖有一个开加细 $\mathcal{B}$ 仍然覆盖了 Y 且阶至多为 $m+1$. 因为 $\mathcal{B}$ 是 Y 的开子集族, 故对任意的 $B \in \mathcal{B}$, 存在 X 中的开集 U_B 使得 $U_B \cap Y = B$. 又因为 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的加细, 故对任意的 $B \in \mathcal{B}$, 存在 $A_B \in \mathcal{A}$ 使得 $B \subset A_B$. 令

$$\mathcal{C} = \{U_B \cap A_B \mid B \in \mathcal{B}\} \cup \{A - Y \mid A \in \mathcal{A}\},$$

那么 $\mathcal{C}$ 便是所求的 $\mathcal{A}$ 的一个开加细.

第 2 步 现在设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖, 我们将构造 $\mathcal{A}$ 的开加细 $\mathcal{D}$ 仍然覆盖了 X 阶至多为 $m+1$.

根据第 1 步可设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个覆盖了 X 的开加细且在 Y 中的阶数至多为 $m+1$. 易知第 1 步的结论对子空间 Z 也成立, 于是可设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个覆盖了 X 的开加细且在 Z 中的阶数至多为 $m+1$. 我们按照如下方式构造所需的开加细 $\mathcal{D}$:

(1) 由于 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 的加细, 因此存在映射 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 满足对每个 $C \in \mathcal{C}$ 都有 $C \subset f(C)$.

(2) 对每个 $B \in \mathcal{B}$ 定义

$$D(B) = \bigcup \{C \in \mathcal{C} \mid f(C) = B\}.$$

(3) 令

$$\mathcal{D} = \{D(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

因为对每个 $B \in \mathcal{B}$ 都有 $D(B) \subset B$, 于是 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B}$ 的加细, 从而 $\mathcal{D}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的加细. 又因为 $\mathcal{C}$ 覆盖了 X 且对每个 $C \in \mathcal{C}$ 都有 $C \subset D(f(C))$, 故 $\mathcal{D}$ 覆盖了 X. 下面证明 $\mathcal{D}$ 的阶至多为 $m+1$. 假设

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} D(B_i),$$

其中每个 $D(B_i)$ 都是互异的. 我们将要证明 $k \leqslant m+1$. 因为每个 $D(B_i)$ 互异, 从而

每个 B_i 也是互异的. 由于对每个 i 都有 $x \in D(B_i)$, 因此存在 $C_i \in \mathcal{C}$ 使得 $x \in C_i$ 且 $f(C_i) = B_i$. 由 B_i 的互异性可知 C_i 也都是互异的. 注意到

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} C_i \subset \bigcap_{i=1}^{k} D(B_i) \subset \bigcap_{i=1}^{k} B_i,$$

因此: 若 $x \in Y$, 那么由 $\mathcal{B}$ 在 Y 中的阶数至多为 $m+1$ 可知 $k \leqslant m+1$; 若 $x \in Z$, 那么由 $\mathcal{C}$ 在 Z 中的阶数至多为 $m+1$ 可知 $k \leqslant m+1$. □

推论 6.15 (通过闭子空间确定拓扑维数) 设有拓扑空间 $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$, 其中每个 Y_i 均为 X 的有限维闭子空间, 那么 X 是有限维的, 并且

$$\dim X = \max\{\dim Y_1, \ldots, \dim Y_k\}.$$

6.3 商拓扑

除了利用子拓扑与乘积拓扑之外, 从已知拓扑空间得到新空间还有一种重要的工具——商拓扑.

定义 6.16 (商拓扑) 设 X 是一个拓扑空间, Y 是一个集合, $q: X \to Y$ 是一个满射. 按如下方式定义 Y 中的开集:

$$U \text{ 是 } Y \text{ 的开子集} \iff q^{-1}(U) \text{ 是 } X \text{ 的开子集}. \tag{6.2}$$

Y 上由此得到的拓扑称为由 q 诱导的商拓扑.

(6.2) 确实给出了 Y 上的一个拓扑. 事实上, 空集显然是 Y 中的开集, 而 "q 是满射" 这一条件说明全集 Y 是开的. 此外, 由

$$q^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha} q^{-1}(U_\alpha) \quad \text{与} \quad q^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha} U_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha} q^{-1}(U_\alpha)$$

可知相应的子集族关于有限交与任意并是封闭的.

定义 6.17 (商映射) 设有拓扑空间 X, Y 与映射 $q : X \to Y$. 若 q 是满射并且 Y 上的拓扑是由 q 所诱导的商拓扑, 则称 q 是一个商映射.

根据上述定义, 如果已知拓扑空间之间的映射 $q : X \to Y$ 是满的, 那么 q 是商映射等价于以下叙述成立:

$$U \text{ 是 } Y \text{ 的开子集} \quad \Longleftrightarrow \quad q^{-1}(U) \text{ 是 } X \text{ 的开子集.}$$

由此立马可得商映射都是连续的.

定理 6.18 (商拓扑与映射的连续性) 设有拓扑空间 X, Y 以及商映射 $q : X \to Y$, 那么对任意的拓扑空间 Z, 映射 $f : Y \to Z$ 连续当且仅当复合 $f \circ q$ 连续.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f \circ q"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

证明 由商映射的连续性可知从左推右是显然的, 下面从右推左. 任取 Z 中的开集 V, 由 $f \circ q$ 的连续性可得 $(f \circ q)^{-1}(V) = q^{-1}(f^{-1}(V))$ 是 X 中的开集. 根据商拓扑的定义, $f^{-1}(V)$ 是 Y 中的开集, 这说明 f 是连续的. □

商拓扑最广泛的应用是如下的构造.

定义 6.19 (商空间) 设 $\sim$ 是拓扑空间 X 上的一个等价关系, $[x]$ 是 $x \in X$ 所在的等价类, $X/\sim$ 是全体等价类所成的集合,

$$\pi : X \to X/\sim, \qquad \pi(x) = [x]$$

是相应的自然投影, 则称 $X/\sim$ 连同其上由 π 诱导的商拓扑为 X 关于等价关系 $\sim$ 所得的商空间.

等价地, 我们可以利用拓扑空间 X 的划分来定义商空间. 直观来说, 商空间就是将原来拓扑空间中的某些点 (具体来说, 属于同一等价类的那些点) 粘合起来所形成的空间.

给定拓扑空间 X 的子集 A, 定义 X 上的等价关系为 $x \sim y$ 当且仅当 $x = y$ 或者 $x, y \in A$ (简言之, 这一等价关系是将子集 A 中的元素捏成一点), 那么此时我们也常常把商空间 $X/\sim$ 记为 X/A.

由定理 6.18 我们能够得到下面这一常用的结果, 它告诉我们要验证定义在商空间上的映射的连续性, 只需考察将其拉到原空间上的提升映射的连续性.

推论 6.20 (商空间上映射的连续性) 设 $\sim$ 是拓扑空间 X 上的一个等价关系, $X/\sim$ 是相应的商空间, 那么映射 $f : X/\sim \to Z$ 连续当且仅当 $f \circ \pi : X \to Z$ 连续.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\
X/\sim \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

最后我们通过几个例子来直观感受一下商拓扑的 “粘合” 作用.

例 6.21 (闭区间粘合端点同胚于圆周) 记 I 为单位闭区间 $[0, 1]$, 规定 I 的一个划分如下: 端点 0 与 1 属于同一类, 其余点各自成一类. 将由此得到的商空间记为 $I/\sim$. 考虑 I 到单位圆周 S^1 的映射 $f : I \to S^1, f(x) = e^{2\pi i x}$. 又定义

$$\overline{f} : I/\sim \to S^1, \qquad \overline{f}([x]) = f(x),$$

那么 $f = \overline{f} \circ \pi$. 我们将证明 $\overline{f}$ 是一个同胚.

因为 f 连续, 从而根据前述推论可知 $\overline{f}$ 是连续的. 显然 $\overline{f}$ 是双射. 考虑从 I 到 $I/\sim$ 的投影, 那么 $I/\sim$ 作为紧空间的连续像也是紧的. 注意到 S^1 是豪斯道夫空间, 于是利用定理 3.43, 连续双射 $\overline{f}$ 是一个同胚. //

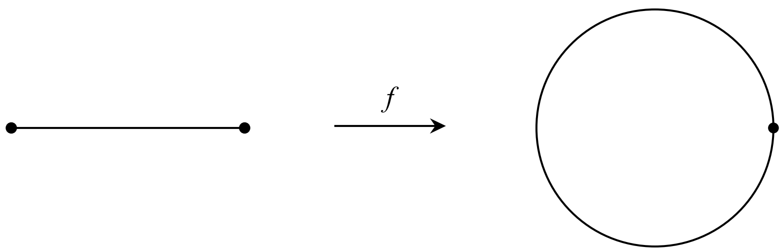


图 6.1: 闭区间粘合端点同胚于圆周

例 6.22 (正方形粘合对边) 仍然记 I 为单位闭区间 $[0, 1]$. 在单位正方形 $I \times I$ 上定

义等价关系为: 对所有的 $x \in I$ 有 $(x,0) \sim (x,1)$; 对所有的 $y \in I$ 有 $(0,y) \sim (1,y)$. 直观上看, 这一操作就是将正方形纸片的两组对边分别进行同向粘合. 可以证明, 商空间 $(I \times I)/\sim$ 同胚于我们所熟知的环面. //

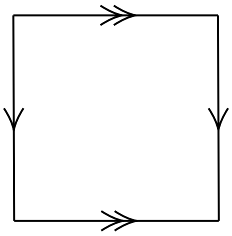


图 6.2: 环面的构造

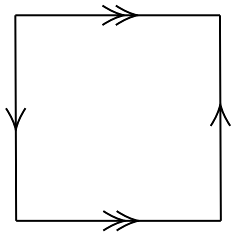


图 6.3: 克莱因瓶的构造

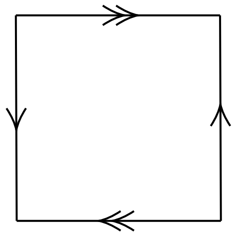


图 6.4: 实射影平面的构造

事实上, 对正方形 $I \times I$ 还可以进行多种有趣的操作. 例如, 将正方形的一组对边同向粘合, 另一组对边反向粘合, 所得的空间称为克莱因瓶; 将正方形的两组对边都反向粘合, 所得的空间称为实射影平面. 当然, 我们也可以只对一组对边进行操作: 将正方形的一组对边同向粘合, 得到的空间是平环; 将正方形的一组对边反向粘合, 所得的空间是莫比乌斯带.

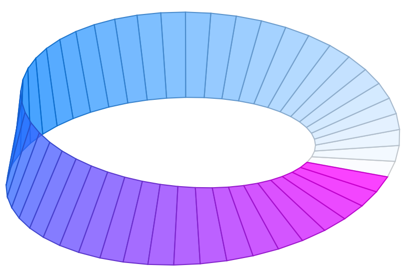


图 6.5: 莫比乌斯带

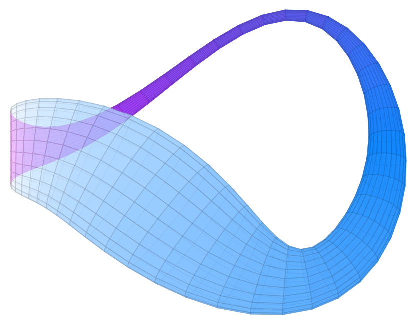


图 6.6: 克莱因瓶

6.4 范数拓扑

本节我们总是用 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义 6.23 (赋范线性空间) 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间. 若映射 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 满足对所有的 $x, y \in X$ 与 $\alpha \in \mathbb{K}$ 均有

(1) (正定性) $\|x\| \geqslant 0$, 并且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

(2) (齐次性) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(3) (三角不等式) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, $(X,\|\cdot\|)$ 称为一个赋范线性空间.

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一赋范线性空间, 那么显然有

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leqslant \|x-y\|,$$

其中 x, y 是 X 中的任意元素. 又定义映射 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$d(x, y)=\|x-y\|,$$

那么 d 是 X 上的一个度量, 称为由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量. 进一步, 我们把 d 给出的度量拓扑称为 X 上由 $\|\cdot\|$ 诱导的范数拓扑. 以后若无特殊说明, 对于赋范线性空间而言我们总考虑其上的范数拓扑.

例 6.24 (欧氏空间) 在实线性空间 $\mathbb{R}^n$ 上定义

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},$$

那么 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ 成为一个赋范线性空间, 相应的度量是欧氏度量

$$d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

相应的拓扑是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑. //

设有赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$. 采用范数的记号, 以 $x \in X$ 为中心, $r>0$ 为半径的开球表示为

$$B(x, r)=\{y \in X:\|y-x\|<r\},$$

而序列 (x_n) 收敛于 x 则等价于 $\|x_n-x\| \rightarrow 0$.

接下来讨论赋范线性空间中开球与闭球之间的联系, 为此首先介绍一般度量空间中的闭球.

定义 6.25 (闭球) 设 (X,d) 是一个度量空间, x 是 X 中的一点, $r>0$, 则称

$$B[x,r]=\{y\in X: d(x,y)\leqslant r\}$$

是以 x 为中心, $r>0$ 为半径的闭球.

根据命题 3.54 可知 $B[x,r]$ 作为闭集 $(-\infty,r]$ 在距离函数 $d(-,\{x\})$ 下的原像是 X 中的闭集. 现在我们想问, 闭球 $B[x,r]$ 与开球 $B(x,r)$ 的闭包 $\overline{B(x,r)}$ 有何关系? 首先, 闭球 $B[x,r]$ 是包含 $B(x,r)$ 的闭集, 因此显然有 $\overline{B(x,r)}\subset B[x,r]$. 下面的例子说明一般情况下二者并不相等.

例 6.26 设 X 是一个元素个数至少为 2 的集合, 为其赋予离散度量

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

相应的拓扑是离散拓扑 (即所有的子集都是既开又闭的). 取一点 $x_0\in X$, 那么 $\overline{B(x_0,1)}=\{x_0\}$ 而 $B[x_0,1]=X$, 因此 $\overline{B(x_0,1)}\neq B[x_0,1]$. //

尽管闭球并不一定是开球的闭包. 但在赋范线性空间中二者有很好的表现.

定理 6.27 (赋范线性空间中闭球是开球的闭包) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间, 那么对任意的 $x\in X$ 以及 $r>0$ 都有

$$\overline{B(x,r)}=B[x,r].$$

证明 只需证明 $B[x,r]\subset\overline{B(x,r)}$. 任取 $x_0\in B[x,r]$, 我们将证明 $B(x,r)$ 中存在一个收敛于 x_0 的序列. 对每个正整数 n 定义

$$x_n=\frac{n}{n+1}(x_0-x)+x,$$

那么

$$\|x_n-x\|=\frac{n}{n+1}\|x_0-x\|\leqslant\frac{n}{n+1}r<r,$$

于是 $x_n \in B(x,r)$. 由于

$$\|x_n - x_0\| = \frac{1}{n+1}\|x - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此 (x_n) 是 $B(x,r)$ 中收敛于 x_0 的序列. 根据序列引理 2.86 有 $x_0 \in \overline{B(x,r)}$. □

定义 6.28 (范数的等价) 设 X 是域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数. 如果 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 所诱导的范数拓扑是相同的, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

容易知道范数的等价是一种等价关系, 即满足自反性、对称性与传递性. 下面给出一个判定范数是否等价的有用方法.

定理 6.29 (等价范数的判定) 设 X 是域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数, 那么 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价当且仅当存在正的实常数 c 与 C 使得对所有的 $x \in X$ 都有

$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 因为 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 所诱导的范数拓扑相同, 故恒等映射 $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ 是连续的. 特别地, 开集

$$B = \{y \in X : \|y\|_2 < 1\}$$

的原像 $I^{-1}(B)$ 是 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中的开集. 显然 $0 \in I^{-1}(B)$, 因此存在常数 $C_0 > 0$ 使得集合

$$\{y \in X : \|y\|_1 < 1/C_0\}$$

含于 $I^{-1}(B)$. 取常数 $C > C_0$, 那么

$$\{y \in X : \|y\|_1 \leqslant 1/C\} \subset \{y \in X : \|y\|_1 < 1/C_0\} \subset I^{-1}(B).$$

这说明 $\|y\|_1 \leqslant 1/C$ 蕴含 $\|y\|_2 \leqslant 1$. 任取非零向量 $x \in X$, 令

$$z = \frac{1}{C\|x\|_1}x,$$

那么 $\|z\|_1 = 1/C$, 从而 $\|z\|_2 \leqslant 1$, 即 $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$. 同理可得另一边的不等式.

($\Longleftarrow$) 分别记 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 所诱导的范数拓扑为 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$. 假设 $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ 对任意的 $x \in X$ 都成立. 取定 $x \in X$, 那么

$$\{y \in X : \|y - x\|_1 < r/C\} \subset \{y \in X : \|y - x\|_2 < r\}.$$

这说明每个以 x 为中心的 $\|\cdot\|_2$-开球都包含一个以 x 为中心的 $\|\cdot\|_1$-开球. 根据命题 2.78 可知 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 细致. 类似可得 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 细致, 从而 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

定理 6.30 (赋范线性空间上运算的连续性) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, 那么其上的三种运算

$$\begin{aligned}
&\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, && x \mapsto \|x\|,\\
&\mu : X \times X \to X, && (x, y) \mapsto x + y,\\
&\eta : \mathbb{K} \times X \to X, && (\alpha, x) \mapsto \alpha x
\end{aligned}$$

都是连续的.

证明 (1) 先证范数 $\|\cdot\|$ 的连续性. 取定 X 中的一点 x_0. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 那么当 $\|x - x_0\| < \delta$ 时便有

$$\big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leqslant \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

因此 $\|\cdot\|$ 在 x_0 处是连续的.

(2) 再考察加法运算 μ 的连续性. 设 $(x_0, y_0) \in X \times X$. 对任一包含 $x_0 + y_0$ 的开球

$$W = \{z \in X : \|z - (x_0 + y_0)\| < r\},$$

分别取 x_0 的邻域 U 与 y_0 的邻域 V 为

$$U = \{x \in X : \|x - x_0\| < r/2\}, \qquad V = \{y \in X : \|y - y_0\| < r/2\},$$

那么 $U \times V$ 是 (x_0, y_0) 的邻域, 并且对所有的 $(x, y) \in U \times V$ 都有

$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < r.$$

这说明 $\mu(U \times V) \subset W$, 即 μ 在 (x_0, y_0) 处是连续的.

(3) 最后证明标量乘法 η 是连续的. 任意取定 $(\alpha_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$. 令

$$M = \max\{|\alpha_0|, \|x_0\|\} + 1.$$

对包含 $\alpha_0 x_0$ 的任一开球

$$W = \{y \in X : \|y - \alpha_0 x_0\| < r\},$$

分别取 α_0 的邻域 U 与 x_0 的邻域 V 为

$$U = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha - \alpha_0| < r/(2M)\}, \qquad V = \{x \in X : \|x - x_0\| < r/(2M)\},$$

那么 $U \times V$ 是 (α_0, x_0) 的邻域, 并且对任意的 $(\alpha, x) \in U \times V$ 都有

$$\begin{aligned}
\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| &= \|\alpha x - \alpha_0 x + \alpha_0 x - \alpha_0 x_0\| \\
&= \|(\alpha - \alpha_0)x + \alpha_0(x - x_0)\| \\
&\leqslant |\alpha - \alpha_0|\|x_0\| + |\alpha_0|\|x - x_0\| \\
&< M(|\alpha - \alpha_0| + \|x - x_0\|) < r.
\end{aligned}$$

这说明 $\eta(U \times V) \subset W$, 因此 η 在 (α_0, x_0) 处连续. □

定义 6.31 (拓扑向量空间) 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑. 若 X 上的加法与标量乘法

$$\begin{aligned}
X \times X &\longrightarrow X \qquad & \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\
(x, y) &\longmapsto x + y & (\alpha, x) &\longmapsto \alpha x
\end{aligned}$$

都是连续的 (即 X 上的拓扑结构与线性空间的代数结构相容), 则称 $(X, \mathbb{K}, \mathcal{T})$ 是一个拓扑向量空间, 这里 $X \times X$ 与 $\mathbb{K} \times X$ 均考虑乘积拓扑.

当不至于引起混淆时, 我们常常略去 $\mathbb{K}$ 与 $\mathcal{T}$, 直接称 X 是一个拓扑向量空间. 由定理 6.30 可知赋范线性空间都是拓扑向量空间.

相比于无限维的情形, 有限维赋范线性空间的结构要简单得多. 例如我们马上就会

看到, 有限维赋范线性空间上自然的拓扑结构在某种意义上是唯一的!

定理 6.32 (有限维线性空间上的范数) 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间, 那么 X 上所有的范数都是等价的.

证明 因为 n 维复线性空间总可以视为 $2n$ 维实线性空间, 故不妨假定 X 是 n 维的实线性空间. 取定 X 的一个基 $e_1, \ldots, e_n$. 对 X 中的元素 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, 定义其欧氏范数为

$$\|x\|_E = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

设 $\|\cdot\|$ 是 X 上的任一范数, 我们将证明 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_E$ 是等价的, 从而由范数等价的传递性完成论证. 根据柯西不等式,

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} = C\|x\|_E,$$

其中常数 $C = (\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2)^{1/2} > 0$. 因此对任意的 $x, y \in X$ 都有

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant C\|x - y\|_E.$$

这说明 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 是 $(X, \|\cdot\|_E)$ 上的连续函数. 现在证明 $(X, \|\cdot\|_E)$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$. 定义映射 $\phi : (X, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{R}^n$ 为

$$\phi(x) = (x_1, \ldots, x_n), \quad \text{其中 } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

考虑 $(X, \|\cdot\|_E)$ 上由范数 $\|\cdot\|_E$ 的度量 d_E 与 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d, 那么对任意的 $x, y \in X$ 都有

$$d(\phi(x), \phi(y)) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} = d_E(x, y).$$

这说明 ϕ 是度量空间之间的等距嵌入. 因为 ϕ 是双射, 故根据命题 5.35 可知 ϕ 是同胚. 由此可知 $(X, \|\cdot\|_E)$ 中的单位球面

$$S = \{x \in X : \|x\|_E = 1\}$$

与 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面同胚, 因而是紧的. 由于 $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{R}$ 是连续的, 因此它在 S

上的限制也是连续的. 根据最值定理 3.50, 函数 $\|\cdot\|$ 在 S 上可以取到最大值 M 与最小值 m. 根据范数的正定性, $\|\cdot\|$ 仅在 0 处取值为 0, 而 $0 \notin S$, 故 $m > 0$. 任取 $x \in X$, 显然 $x/\|x\|_E$ 在 S 中, 于是

$$m\|x\|_E \leqslant \|x\| \leqslant M\|x\|_E.$$

至此我们证明了 X 上的任一范数都与欧氏范数等价. □

在上面的证明过程中我们顺便得到了

命题 6.33 (有限维赋范线性空间中, 紧 $\iff$ 有界 + 闭) 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维赋范线性空间, 那么其中的有界闭集与紧集是一回事.

回忆一下, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中紧集与有界闭集是等价的, 命题 6.33 将这一性质推广到了一般的有限维赋范线性空间.

6.5 选择公理

最后我们对选择公理做一个简单的介绍.

在前面的学习中我们始终都默认了一个结论: 一族非空集合 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的笛卡尔积 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 也是非空的. 容易知道, 对于有限个集合的情形这是显然的. 然而, 当集合的数量变成无限时, 相应的结论就不再那么明显了. 事实上, 我们无法证明这一命题! 为了使用这一看似合理但却无法验证的结论, 我们所采取的做法是: 把它当做一条公理, 只管承认, 无需证明.

选择公理有多种不同的表述方法, 这里只给出了最便于我们理解的一种. 另外, 尽管绝大多数时候选择公理都是被承认的, 但也有数学家在不承认选择公理的情况下推导数学结论.