目录

1 集合论

1.1 基本概念与性质

设 $\mathcal{A}$ 为集族, 那么我们定义它的并与交分别为

$$\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \text{存在某个 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } x \in A\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \text{对任意的 } A \in \mathcal{A}, \text{均有 } x \in A\}.$$

注 1.1 当集族 $\mathcal{A}$ 中没有任何成员时, 由定义知它的并为空集 $\varnothing$. 然而, 此时它的交 $\bigcap \mathcal{A}$ 会出现问题. 因此当集族为空时, 我们不定义它的交.

我们把有限集与可数无限集统称为可数集. 不是可数集的集合称为不可数集. 此外, 我们用

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

表示 A 与 B 的差集. 笛卡尔积 $A \times B$ 中的元素用 $a \times b$ 表示.

命题 1.2 (集合的基本运算性质) 设 A, X 是集合, $\{B_j\}_{j \in J}$ 是一族集合.

(1) (分配律) $A \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j)$; $A \cup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} (A \cup B_j)$.

(2) (德摩根律) $X - \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} (X - B_j)$; $X - \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} (X - B_j)$.

(3) $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (X_i \times Y_j)$; $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{i \in I, j \in J} (X_i \times Y_j)$.

命题 1.3 (集合关于映射的运算性质) 设 $f: A \to B$ 为映射, $\{A_j\}_{j \in J}$ 与 $\{B_j\}_{j \in J}$ 分别是 A, B 的一族子集, 那么

(1) $f\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$, $f\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f(A_j)$.

(2) $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$, $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

(3) $f^{-1}(B - B_j) = A - f^{-1}(B_j)$, 即 $f^{-1}(B_j^c) = \left(f^{-1}(B_j)\right)^c$.

注 1.4 上述命题中标红的部分是唯一的一个非等式关系. 例如定义函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = x^2$, 取 $A = \{-1, 2\}, B = \{1, 2\}$, 那么 $f(A \cap B) = \{4\}$, 而 $f(A) \cap f(B) = \{1, 4\}$.

命题 1.5 (复合映射的原像) 设 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 是映射, 那么对任意的

$A \subset Z$, 有

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

命题 1.6 (像与原像的交互) 设 $f : X \to Y$ 是一个映射, A 是 X 的子集, B 是 Y 的子集, 那么

(1) $A \subset f^{-1}(f(A))$, 且当 f 为单射时等号成立.

(2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, 且当 f 为满射时等号成立.

1.2 序关系

定义 1.7 (关系) 设 A 为集合, 我们把 $A \times A$ 的子集 R 称为 A 上的一个关系, 并把 $(x, y) \in R$ 记为 xRy.

定义 1.8 (线性序) 若集合 A 上的关系 $\leqslant$ 满足对任意的 $x, y, z \in A$, 均有

(1) (可比性) $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$.

(2) (自反性) $x \leqslant x$.

(3) (反对称性) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 那么 $x = y$.

(4) (传递性) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 那么 $x \leqslant z$.

则称 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序集. 若 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$, 则记为 $x < y$.

注 1.9 线性序又叫全序. 此外, 只满足后三条性质的关系称为一个偏序.

定义 1.10 (开区间) 设 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序集, $a < b$, 那么我们把集合

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

称为一个开区间. 若 $(a, b) = \varnothing$, 则称 a 是 b 的直接前继, b 是 a 的直接后继.

定义 1.11 (区间, 射线) 设有线性序集 X 中的元素 $a < b$, 定义

(1) 闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

(2) 半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 与 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

(3) 开射线 $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ 与 $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$.

(4) 闭射线 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$ 与 $(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$.

定义 1.12 (序型) 设 $(A, \leqslant_A), (B, \leqslant_B)$ 是两个线性序集. 若存在双射 $f : A \to B$ 使得

对任意满足 $a_1 \leqslant_A a_2$ 的 a_1, a_2, 有

$$f(a_1) \leqslant_B f(a_2),$$

则称 A 与 B 有相同的序型.

定义 1.13 (字典序) 设 $(A, \leqslant_A)$ 与 $(B, \leqslant_B)$ 是两个线性序集. 在 $A \times B$ 上定义线性序

$$a_1 \times b_1 \leqslant a_2 \times b_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{a_1 <_A a_2} \text{ 或 } \underline{a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 \leqslant_B b_2}.$$

称这样的线性序为 $A \times B$ 上的字典序.

定义 1.14 (最大/最小元, 上/下确界) 设 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序集, A_0 是 A 的子集, $b \in A$.

(1) 若 $b \in A_0$ 且对任意的 $x \in A_0$, 有 $x \leqslant b$, 则称 b 是 A_0 的最大元. (最小元可类似定义.)

(2) 若对任意的 $x \in A_0$, 有 $x \leqslant b$, 则称 A_0 是有上界的, 且称 b 是 A_0 的一个上界. (下界可类似定义.)

(3) 如果 A_0 的全体上界中有一个最小元, 则称该最小元为 A_0 的上确界, 记为 $\sup A_0$. (下确界可类似定义.)

定义 1.15 (最小上界/最大下界性质) 若线性序集 A 的任一非空子集都有上确界, 则称 A 具有最小上界性质; 若线性序集 A 的任一非空子集都有下确界, 则称 A 具有最大下界性质.

命题 1.16 线性序集 A 有最小上界性质当且仅当它有最大下界性质.

1.3 实数的公理化定义

现在我们假定存在一个叫做实数集的集合 $\mathbb{R}$, 它满足:

(1) $\mathbb{R}$ 是一个域.

(2) $\mathbb{R}$ 是一个线性有序域.

(3) $\mathbb{R}$ 有最小上界性质.

1.4 良序集

定义 1.17 (良序集) 若线性序集 X 的任一非空子集都有最小元, 则称 X 是良序的.

定理 1.18 (良序定理) 设 X 为一集合, 那么在 X 上存在一个线性序使得 X 是良序的.

良序定理等价于选择公理.

推论 1.19 存在不可数的良序集.

定义 1.20 设 X 是一个良序集, $a \in X$. 我们把

$$S_a = \{x \in X \mid x < a\}$$

称为 X 在 a 处的截断.

引理 1.21 (截断引理) 存在一个良序集 X 满足:

(1) X 有最大元 Ω.

(2) S_Ω 是不可数的.

(3) X 的其余截断都是可数的.

我们记

$$\overline{S_\Omega} = S_\Omega \cup \{\Omega\}.$$

定理 1.22 若 A 是 S_Ω 的可数子集, 那么 A 在 S_Ω 中有上界.

2 拓扑空间

2.1 拓扑

定义 2.1 (拓扑空间) 设 X 是一个集合, $\mathcal{T}$ 是 X 的子集族. 若 $\mathcal{T}$ 满足

(1) 空集 $\varnothing$ 与全集 X 在 $\mathcal{T}$ 中.

(2) $\mathcal{T}$ 中任意有限多个成员的交仍在 $\mathcal{T}$ 中.

(3) $\mathcal{T}$ 中任意多个成员的并仍在 $\mathcal{T}$ 中.

则称 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{T}$ 称为 X 上的一个拓扑.

如果拓扑 $\mathcal{T}$ 是明确的, 我们常常将 $(X, \mathcal{T})$ 简记为 X. 此外, 我们把 $\mathcal{T}$ 中的成员称为开集, 并将开集的补集称为闭集.

例 2.2 (离散拓扑, 平庸拓扑) 设 X 是任意一个集合.

(1) X 的全体子集所成集合 $\mathcal{P}(X)$ 形成了一个拓扑, 称为 X 上的离散拓扑.

(2) $\{\varnothing, X\}$ 也形成了一个拓扑, 称为 X 上的平庸拓扑.

如果同一集合上的两个拓扑 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 满足 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, 那么我们就说 $\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{T}'$ 更粗糙, 或者 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 更细致. 如果拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 满足 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ 或者 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 是可比的. 不难发现对任意的集合 X 而言, 平庸拓扑、离散拓扑分别是其上的最粗糙拓扑与最细致拓扑.

例 2.3 (有限补拓扑, 可数补拓扑) 设 X 是任意一个集合.

(1) 将在 X 中补集有限的集合和 $\varnothing$ 定义为开集, 由此得到的拓扑称为有限补拓扑.

(2) 将在 X 中补集可数的集合和 $\varnothing$ 定义为开集, 由此得到的拓扑称为可数补拓扑.

2.2 拓扑基

定义 2.4 (拓扑基) 设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的子集族, 如果

(1) 对任意的 $x \in X$, 存在子集 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$.

(2) 对任意的 $A, B \in \mathcal{B}$ 以及 $x \in A \cap B$, 存在 $C \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in C \subset A \cap B$.

则称 $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个拓扑基, $\mathcal{B}$ 中的成员称为基元素. 若 $\mathcal{T}$ 是包含 $\mathcal{B}$ 的最粗糙拓扑, 则称 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{B}$ 生成的, 且称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个基.

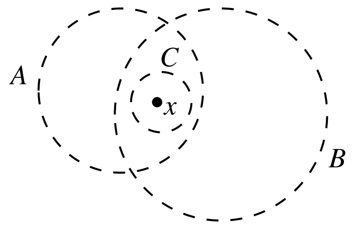

图 2.1: 拓扑基

易知由拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}$ 为

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{B} \text{ 中成员的并集}\} = \{U \subset X : \text{对任意的 } x \in U, \text{存在 } B \in \mathcal{B} \text{ 使得 } x \in B \subset U\}.$$

例 2.5 ($\mathbb{R}^2$ 的基) 设 $\mathcal{B}$ 为全体开圆盘所成的集族, 那么 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基. 另记 $\mathcal{B}'$ 为各边均平行于坐标轴的开矩形全体所成集族, 那么 $\mathcal{B}'$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基. 后面我们将会看到, $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 所生成的拓扑是相同的.

例 2.6 设 X 是任意一个集合, 那么 X 的全体单点子集是离散拓扑的一个基.

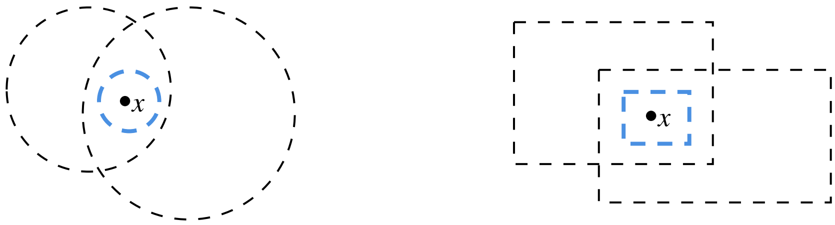

图 2.2: $\mathbb{R}^2$ 的基

命题 2.7 (基的判定) 设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 那么 $\mathcal{B}$ 是拓扑 $\mathcal{T}$ 的一个基当且仅当对 X 中的每个开集 U 以及 U 中的每个元素 x, 都存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$.

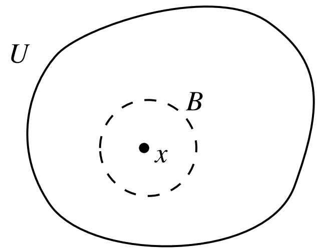

图 2.3: 基的判定

证明 $(\Longrightarrow)$ 因为 U 是开集, 故 U 可以表示为 $\mathcal{B}$ 的一族成员的并 $U = \cup_\alpha B_\alpha$, 从而对任意的 $x \in U$, 存在某 B_α 使得 $x \in B_\alpha \subset U$.

$(\Longleftarrow)$ 任取开集 U, 那么对任意的 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$. 于是 $U = \cup_{x \in U} B_x$ 是 $\mathcal{B}$ 中成员的并. □

命题 2.8 (通过基比较拓扑的粗细) 设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 分别是集合 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 的基, 那么 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 细致当且仅当对任意的 $x \in X$ 以及包含 x 的 $B \in \mathcal{B}$, 都存在 $B' \in \mathcal{B}'$, 使得 $x \in B' \subset B$.

证明 $(\Longrightarrow)$ 任取 $x \in X$ 与包含 x 的 $B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. 因 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, 故 $B \in \mathcal{T}'$. 由于 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{T}'$ 的基, 故 B 可表示为 $\mathcal{B}'$ 中成员的并 $B = \cup_\alpha B'_\alpha$. 因 $x \in B$, 故存在某 B'_α 使得 $x \in B'_\alpha \subset B$.

$(\Longleftarrow)$ 任取开集 $U \in \mathcal{T}$, 下证 $U \in \mathcal{T}'$. 因 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基, 故对任意的 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$. 由假设知存在 $B'_x \in \mathcal{B}'$ 使得 $x \in B'_x \subset B_x$, 从而 $x \in B'_x \subset U$. 这说明 $U = \cup_{x \in U} B'_x$ 是 $\mathcal{B}'$ 中成员的并, 故 $U \in \mathcal{T}'$. □

例 2.9 $\mathbb{R}^2$ 上以全体开圆盘为基生成的拓扑与以全体开矩形 (各边平行于坐标轴) 所

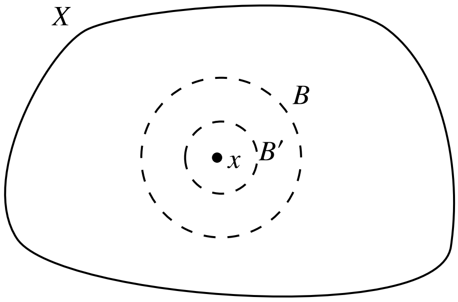

图 2.4: 通过基比较拓扑的粗细

为基生成的拓扑是相同的.

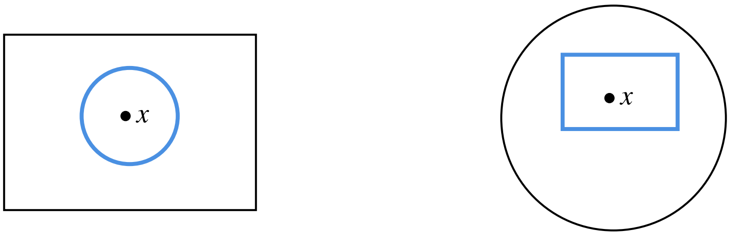

图 2.5: 开圆盘与开矩形生成相同的拓扑

定义 2.10 ($\mathbb{R}$ 上的拓扑) 考虑实直线 $\mathbb{R}$ 上的拓扑.

(1) **(标准拓扑)** 由全体开区间

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑. 除非特别说明, 否则提到 $\mathbb{R}$ 时我们总考虑的是标准拓扑.

(2) **(下限拓扑)** 由全体左闭右开区间

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑. 带有此拓扑的实直线称为 Sorgenfrey 直线, 记为 $\mathbb{R}_\ell$.

(3) **(K-拓扑)** 记 $K=\{1/n\mid n=1,2,\ldots\}$, 那么我们把由全体开区间 (a,b) 以及差集 $(a,b)-K$ 所生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的 K-拓扑. 带有这种拓扑的实直线记为 $\mathbb{R}_K$.

性质 2.11 $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑与 K-拓扑均严格细于标准拓扑, 但二者不可比.

定义 2.12 (子基) 如果 X 的子集族 $\mathcal{S}$ 满足

$$\bigcup \mathcal{S} = X,$$

则称 $\mathcal{S}$ 为 X 的一个拓扑子基. 此外, 我们把

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{S} \text{ 中成员的有限交之并}\}$$

称为由子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑.

我们需要说明如上定义的 $\mathcal{T}$ 确实是一个拓扑, 为此只需验证

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{S} \text{ 中成员的有限交}\}$$

是 X 的一个基. 因为 $\bigcup \mathcal{S} = X$, 故对任意的 $x \in X$, 存在 $S \in \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ 使得 $x \in S$. 又任取 $A, B \in \mathcal{B}$, 设

$$A = S_1 \cap \cdots \cap S_n,$$
$$B = S'_1 \cap \cdots \cap S'_m.$$

那么

$$A \cap B = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap S'_1 \cap \cdots \cap S'_m$$

也是 $\mathcal{S}$ 中成员的有限交, 故 $A \cap B$ 也在 $\mathcal{B}$ 中. 综上, $\mathcal{B}$ 是 X 上的一个基.

2.3 序拓扑

定义 2.13 (序拓扑) 设 X 是线性序集, 其所含元素个数大于 1. 我们把由基

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in X \text{ 且 } a < b\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in X\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \in X\}$$

生成的拓扑称为 X 上的序拓扑.

我们没有仅以 $\{(a, b)\}$ 来生成序拓扑, 因为这样无法包含线性序集的最大元与最小元 (若存在的话). 易知

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a) \mid a \in X\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \in X\}$$

是序拓扑的一个子基.

例 2.14 (1) $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑是由 $\mathbb{R}$ 上通常的序关系生成的拓扑.

(2) 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的字典序, 那么

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{(a \times b, c \times d)}_{\text{开区间}} \mid b < d \in \mathbb{R}\}$$

是字典序拓扑的一个基.

(3) $\mathbb{Z}_+$ 上的序拓扑是离散拓扑.

2.4 乘积拓扑 (两个空间)

定义 2.15 (乘积拓扑) 设 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间, 我们把由基

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

生成的拓扑 $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ 称为 $X \times Y$ 上的乘积拓扑.

我们可以进一步缩小乘积拓扑的基.

命题 2.16 (乘积拓扑的基) 若 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ 分别是拓扑空间 X, Y 的基, 那么

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

是 $X \times Y$ 上乘积拓扑的基.

例 2.17 $\mathbb{R}$ 上标准拓扑的乘积称为 $\mathbb{R}^2$ 上的标准拓扑. 根据命题 2.16, $\mathbb{R}^2$ 中各边平行于坐标轴的开矩形

$$\mathcal{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \mid a < b, c < d\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 上标准拓扑的基. 这说明例 2.5 中生成的拓扑其实就是 $\mathbb{R}^2$ 的标准拓扑.

我们把映射

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\longrightarrow X \\ x \times y &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_2 : X \times Y &\longrightarrow Y \\ x \times y &\longmapsto y \end{aligned}$$

称为投影. 如果 U 是 X 中的开集, V 是 Y 中的开集, 那么

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \qquad 与 \qquad \pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

是 $X \times Y$ 中的开集.

命题 2.18 (乘积拓扑的子基) 子集族

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$$

是 $X \times Y$ 上乘积拓扑的子基.

证明 因为 $X \times Y \in \mathcal{S}$, 故 $\mathcal{S}$ 是 $X \times Y$ 的一个子基. 由于

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V,$$

故由子基 $\mathcal{S}$ 生成的基恰好是乘积拓扑的基, 即 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑是乘积拓扑. □

2.5 子拓扑

定义 2.19 (子拓扑) 设 Y 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集, 那么我们把 Y 上的拓扑

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

称为子拓扑, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 称为 $(X, \mathcal{T})$ 的子空间.

为避免引起混淆, 当 $U \in \mathcal{T}_Y$ 时, 我们称 U 在 Y 中是开的; 当 $U \in \mathcal{T}$ 时, 称 U 在 X 中是开的.

命题 2.20 (子拓扑的基) 若 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的基, $Y \subset X$, 则

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

是子拓扑 $\mathcal{T}_Y$ 的基.

性质 2.21 (开集的继承性) 设 $A \subset Y \subset X$. 若 Y 是 X 中的开集, A 是 Y 中的开集, 那

么 A 是 X 中的开集.

证明 因为 A 是 Y 中的开集, 故存在 X 中的开集 V 使得 $A = V \cap Y$, 从而 A 作为 X 中两个开集的交仍是 X 中的开集. □

命题 2.22 设 A 是 X 的子空间, B 是 Y 的子空间, 那么 $A \times B$ 上的乘积拓扑 $\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B$ 与 $A \times B$ 作为 $X \times Y$ 的子空间拓扑 $\mathcal{T}_{A\times B}$ 是相同的.

证明 设 U 是 X 中的开集, V 是 Y 中的开集. 因为

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B),$$

故 $A \times B$ 上的子拓扑的基与 $A \times B$ 上乘积拓扑的基是相同的, 从而先考虑乘积拓扑再考虑子拓扑与先考虑子拓扑再考虑乘积拓扑所得结果是一样的. □

定义 2.23 (凸集) 设 Y 是线性序集 X 的子集, 若对任意满足 $a < b$ 的 $a, b \in Y$, 均有 $(a, b) \subset Y$, 则称 Y 是 X 中的凸集.

命题 2.24 设 X 是线性序集, 考虑其上的序拓扑. 若 Y 是 X 的凸子集, 那么 Y 上的序拓扑与子拓扑是相同的.

若无特殊说明, 当考虑子集的拓扑时, 我们总考虑子拓扑.

2.6 闭集与极限点

回忆一下, 我们把开集的补集称为闭集.

例 2.25 下面是闭集的一些示例.

(1) $[a, b]$ 与 $[a, +\infty)$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的闭集, 但 $[a, b)$ 既不开也不闭.

(2) 离散拓扑中的每个子集都是既开又闭的.

(3) 考虑 $\mathbb{R}$ 的子空间 $Y = [0, 1] \cup (2, 3)$, 那么 $[0, 1]$ 与 $(2, 3)$ 在 Y 中既开又闭.

设 X 为一拓扑空间. 显然空集 $\varnothing$ 与全集 X 是闭集, 且有限多个闭集的并仍是闭集, 任意多个闭集的交仍是闭集.

回忆一下, A 是子空间 $Y \subset X$ 中的开集当且仅当存在 X 中的开集 U 使得 $A = U \cap Y$. 下面我们将会看到, 子空间中的闭集有着类似的性质.

命题 2.26 (子空间中闭集的刻画) 设 Y 是 X 的子空间, $A \subset Y$, 那么 A 是 Y 中的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 C 使得 $A = C \cap Y$.

推论 2.27 (闭集的继承性) 设 $A \subset Y \subset X$. 若 Y 是 X 中的闭集, A 是 Y 中的闭集, 那么 A 是 X 中的闭集.

证明 存在 X 中的闭集 C 使得 $A = C \cap Y$. 因此 A 作为 X 中两个闭集的交仍是 X 中的闭集. □

定义 2.28 (内部与闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 我们称

$$\mathrm{Int}(A) := \bigcup \{U \mid U \text{ 是 } X \text{ 中含于 } A \text{ 的开集}\}$$

为 A 的内部, 称

$$\overline{A} = \mathrm{Cl}(A) := \bigcap \{C \mid C \text{ 是 } X \text{ 中包含 } A \text{ 的闭集}\}$$

为 A 的闭包.

简言之, A 的内部就是含于 A 的全体开集之并, A 的闭包就是包含 A 的全体闭集之交. 根据定义显然有

$$\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}.$$

此外, 若 A 为开集, 那么 $A = \mathrm{Int}(A)$; 若 A 为闭集, 那么 $A = \overline{A}$. 为了强调所考虑的空间 X, 我们有时也把 A 的内部与闭包记为 $\mathrm{Int}_X(A)$ 与 $\mathrm{Cl}_X(A)$.

命题 2.29 (子空间中的闭包) 若 Y 是 X 的子空间, $A \subset Y$, 那么

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y.$$

证明 一方面, 因为 $\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y$ 是 Y 中包含 A 的闭集, 故

$$\mathrm{Cl}_Y(A) \subset \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y.$$

另一方面, 因 $\mathrm{Cl}_Y(A)$ 在 Y 中是闭的, 故存在 X 中的闭集 C 使得 $\mathrm{Cl}_Y(A) = C \cap Y$. 这说明

$A \subset C$, 故 $\mathrm{Cl}_X(A) \subset C$, 从而

$$\mathrm{Cl}_X(A) \cap Y \subset C \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(A).$$

证毕. $\square$

下面我们采用邻域来刻画集合的闭包.

定义 2.30 (邻域) 我们把包含点 x 的开集称为 x 的一个邻域. x 的全体邻域所成集合记为 $\mathcal{N}(x)$.

当两个集合的交集非空时, 我们称这两个集合相交.

命题 2.31 (用邻域刻画闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 那么 $x \in \overline{A}$ 当且仅当 x 的每个邻域都与 A 相交.

证明 只需证明

$$x \in X - \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{存在 } x \text{ 的邻域 } U \text{ 使得 } U \cap A = \varnothing.$$

($\Longrightarrow$) 由 $\overline{A}$ 的定义, 存在包含 A 的闭集 C 使得 $x \notin C$, 从而 x 属于开集 $X - C$, 这说明 $X - C$ 是 x 的一个邻域. 因为 $A \subset C$, 故 $(X - C) \cap A = \varnothing$.

($\Longleftarrow$) 取 $C = X - U$, 那么 C 是一个包含 A 的闭集, 并且 $x \notin C$, 故由 $\overline{A}$ 的定义知 $x \notin \overline{A}$. $\square$

命题 2.32 (用基刻画闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $\mathcal{B}$ 是 X 的基, 那么 $x \in \overline{A}$ 当且仅当每个包含 x 的基元素 $B \in \mathcal{B}$ 都与 A 相交.

证明 与命题 2.31 的证明类似. $\square$

定义 2.33 (极限点) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$. 若对 x 的任意邻域 U, 均有

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing,$$

则称 x 是 A 的一个极限点 (聚点). A 的全体极限点所成集合称为 A 的导集, 记为 A'.

例 2.34 考虑实直线 $\mathbb{R}$, 那么 $(0,1]' = [0,1]$, $\{1/n \mid n = 1,2,\ldots\}' = \{0\}$. 此外, $(\{0\} \cup (1,2))' = [1,2]$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

命题 2.35 (用导集刻画闭包) 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 那么 $\overline{A} = A \cup A'$.

证明 先证 $\overline{A} \subset A \cup A'$. 任取 $x \in \overline{A}$, 那么对 x 的任一邻域 U, 有 $U \cap A \neq \varnothing$. 假设 $x \notin A$, 那么

$$U \cap (A - \{x\}) = U \cap A \neq \varnothing,$$

因此 $x \in A'$. 反之, 任取 $x \in A \cup A'$. 当 $x \in A$ 时显然有 $x \in \overline{A}$. 假设 $x \in A'$ 且 $x \notin A$. 由极限点的定义知对 x 的任一邻域 U, 有

$$U \cap A = U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing.$$

结论得证. □

推论 2.36 拓扑空间的子集 A 是闭的当且仅当 $A' \subset A$.

2.7 豪斯道夫空间与收敛

定义 2.37 (豪斯道夫空间) 若对拓扑空间 X 中任意不同的两点 x_1, x_2, 均存在 x_1 的邻域 U_1 与 x_2 的邻域 U_2 使得 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, 则称 X 是一个豪斯道夫空间.

命题 2.38 豪斯道夫空间中的单点集都是闭的.

证明 设 x_0 是豪斯道夫空间 X 中的一点, 下证 $\{x_0\}$ 是闭的. 任取异于 x_0 的 $x_1 \in X$, 那么由豪斯道夫空间的定义知存在 x_0 的邻域 U_0 与 x_1 的邻域 U_1 使得 $U_1 \cap U_0 = \varnothing$, 从而 $U_1 \cap \{x_0\} = \varnothing$. 这说明 $x_1 \notin \overline{\{x_0\}}$. 由 x_1 的任意性知 $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$. □

推论 2.39 豪斯道夫空间中的有限集都是闭的.

注意 “有限集是闭的” 比豪斯道夫条件要弱, 例如带有余有限拓扑的实直线 $\mathbb{R}$ 不是豪斯道夫的, 但它的每个单点集都是闭的.

定义 2.40 (T_1 空间) 若拓扑空间 X 中每个有限集都是闭的, 则称 X 是 T_1 的.

命题 2.41 (T_1 空间中极限点的判定) 设 X 是一个 T_1 空间, A 是 X 的子集, 那么 $x \in A'$ 当且仅当 x 的每个邻域都包含了 A 中的无限多个点.

证明 ($\Longrightarrow$) 假设有 x 的某个邻域 U 使得

$$U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, \ldots, x_m\},$$

这里 m 是一个非负整数. 因为 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ 是闭集, 故 $V := U - \{x_1, \ldots, x_m\}$ 是开的, 从而也是 x 的邻域. 由于

$$V \cap (A - \{x\}) = \varnothing,$$

这与 $x \in A'$ 矛盾, 故假设错误.

($\Longleftarrow$) 任取 x 的邻域 U, 则 $U \cap A$ 含有无限多个元素, 从而 $U \cap (A - \{x\})$ 不是空集, 故 $x \in A'$. $\square$

定义 2.42 (序列的收敛) 设 $x_1, x_2, \ldots$ 是拓扑空间 X 中的点列, $x \in X$. 若对 x 的任意邻域 U, 均存在正整数 N 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in U$, 则称点列 $x_1, x_2, \ldots$ 收敛于 x, 且称 x 是该序列的一个极限.

注意序列收敛的极限不具有唯一性. 例如, 考虑集合 $X = \{a, b, c\}$ 与拓扑

$$\{\varnothing, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\},$$

那么常值序列 $x_n = b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 同时收敛于 a, b, c 三点.

定理 2.43 (豪斯道夫空间中极限的唯一性) 若 X 是一个豪斯道夫空间, 那么 X 中任意序列的极限至多只有一个.

证明 设序列 $x_1, x_2, \ldots$ 收敛于 x. 任取异于 x 的 $y \in X$. 由豪斯道夫性知存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 由收敛的定义知存在正整数 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $x_n \in U$. 注意到 $U \cap V = \varnothing$, 故 V 不具有此性质, 因此 y 不是序列 $x_1, x_2, \ldots$ 的极限. $\square$

定理 2.44 (豪斯道夫空间的构造)

(1) 带有序拓扑的线性序集是豪斯道夫空间.

(2) 两个豪斯道夫空间的乘积空间仍是豪斯道夫空间.

(3) 豪斯道夫空间的子空间仍是豪斯道夫空间.

证明 (2) 设 X, Y 是豪斯道夫空间. 任取 $X \times Y$ 中的互异两点 $x_1 \times y_1$ 与 $x_2 \times y_2$. 因 X 是豪斯道夫的, 故存在 x_1, x_2 的邻域 U_1, U_2 使得 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 同理存在 y_1, y_2 的邻域 V_1, V_2 使得 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, 从而

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = \varnothing.$$

注意到 $U_1 \times V_1$ 是 $x_1 \times y_1$ 的邻域, $U_2 \times V_2$ 是 $x_2 \times y_2$ 的邻域, 故 $X \times Y$ 是豪斯道夫的.

(2) 设 Y 是豪斯道夫空间 X 的子空间. 任取互异的 $y_1, y_2 \in Y$, 那么在 X 中存在 y_1, y_2 的邻域 V_1, V_2 使得 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, 从而

$$(V_1 \cap Y) \cap (V_2 \cap Y) = \varnothing.$$

注意到 $V_1 \cap Y$ 与 $V_2 \cap Y$ 分别是 y_1 与 y_2 在 Y 中的邻域, 故结论得证. □

2.8 连续映射与同胚

定义 2.45 (连续映射) 设有拓扑空间 X, Y 与映射 $f : X \to Y$. 若 Y 中任意开集的原像是 X 中的开集, 则称 f 是连续的.

下面的结论说明要验证一个映射的连续性, 我们不必考察全部的开集, 而只需考虑基或子基即可.

定理 2.46 (用基与子基判定连续性) 设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射, $\mathcal{B}$ 是 Y 的一个基, $\mathcal{S}$ 是 Y 的一个子基, 那么下面三条是等价的:

(1) $f : X \to Y$ 是连续的.

(2) 对任意的 $B \in \mathcal{B}$, 原像 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

(3) 对任意的 $S \in \mathcal{S}$, 原像 $f^{-1}(S)$ 是 X 中的开集.

证明 由 $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} C_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(C_j)$ 与 $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} C_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(C_j)$ 即得. □

例 2.47 注意到 $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑严格细致于标准拓扑, 故集合之间的恒等映射 $i : \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$ 是连续的, 但 $i' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ 不是连续的.

定义 2.48 (在某一点连续) 设 $f: X \to Y$ 为拓扑空间之间的映射, $x_0 \in X$. 若对 $f(x_0)$ 的任一邻域 V, 存在 x_0 的邻域 U 使得 $f(U) \subset V$, 则称 f 在 x_0 处是连续的.

我们马上就能看到, 映射连续性的局部定义与整体定义是相容的.

定理 2.49 (连续映射的等价刻画) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射, 则下列各条是等价的:

(1) $f: X \to Y$ 连续.

(2) Y 中任意闭集的原像是 X 中的闭集.

(3) f 在 X 的每一点处都连续.

(4) 对 X 的每个子集 A, 都有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

证明 (1) 与 (2) 的等价性是显然的.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 任取 $x_0 \in X$. 对 $f(x_0)$ 的任一邻域 V, 其原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中包含了 x_0 的开集. 取 $U = f^{-1}(V)$, 便有 $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 V 是 Y 中的开集, 下证 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 任取 $x \in f^{-1}(V)$, 那么由 f 在 x 处的连续性可知存在 x 的邻域 U_x 使得 $f(U_x) \subset V$, 因而 $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$, 故 $f^{-1}(V) = \cup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$ 作为开集之并也是开的.

(2) $\Longrightarrow$ (4) 因为 $\overline{f(A)}$ 是 Y 中的闭集, 故 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是 X 中的闭集. 由于 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 包含了 A, 因此 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 从而 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(4) $\Longrightarrow$ (2) 设 C 是 Y 中的闭集, 只需证明 $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$. 因为

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C} = C,$$

故结论得证. □

定义 2.50 (同胚) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的双射. 若 f 和它的逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 都是连续的, 则称 f 是一个同胚. 若 X 到 Y 存在一个同胚, 则称 X 同胚于 Y.

易知同胚是全体拓扑空间所成类上的一个等价关系. 我们最关心的是处于同一等价类的拓扑空间所具有的共同性质 (称为拓扑性质). 具体来说, 若 X 与 Y 是同胚的拓扑空间且 X 具有某种拓扑性质 P, 那么 Y 也一定具有性质 P.

定义 2.51 (拓扑嵌入) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续单射. 若限制 f 的陪域

所得到的映射

$$\begin{aligned}\bar{f}: X &\longrightarrow f(X)\\ x &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

是同胚, 则称 f 是一个拓扑嵌入, 简称嵌入.

例 2.52 由 $f(x)=3x+1$ 确定的映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个同胚, 其逆映射为 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto (x-1)/3$.

例 2.53 (连续双射不是同胚) 恒等映射 $i:\mathbb{R}_\ell\to\mathbb{R}$ 是连续双射, 但逆映射不连续. 此外, 由

$$\begin{aligned}f:[0,1) &\longrightarrow S^1\\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\end{aligned}$$

确定的映射是一个连续双射, 但它的逆映射 $f^{-1}: S^1\to[0,1)$ 却不连续. 这是因为, 取 $[0,1)$ 中的开集 $U=[0,1/4)$, 那么 U 在 f 下的像 $f(U)$ 不是 S^1 中的开集 (如图 2.6).

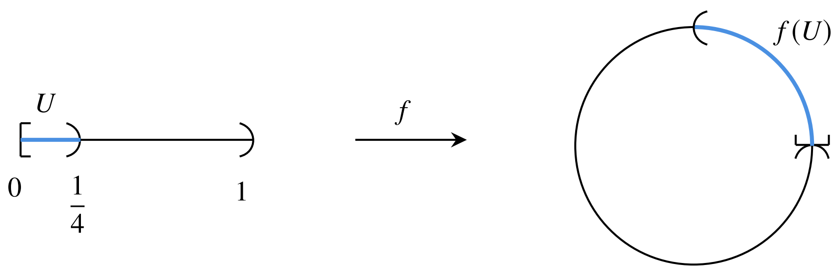

图 2.6: 连续双射不是同胚

定理 2.54 (常见的连续映射) 设 X,Y,Z 为拓扑空间, 那么

(1) 常值映射 $f:X\to Y, x\mapsto y_0$ 是连续的.

(2) 设 A 是 X 的子空间, 那么含入映射 $j:A\to X$ 是连续的.

(3) 若 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 均连续, 那么复合 $g\circ f:X\to Z$ 也是连续的.

(4) **(限制定义域)** 若 $f:X\to Y$ 连续, $A\subset X$, 那么 f 在 A 上的限制 $f|_A: A\to Y$ 也是连续的.

(5) **(改变陪域)** 设 $f:X\to Y$ 是连续的. 若 $f(X)\subset Z\subset Y$, 那么将 f 的陪域限制为 Z 所得的映射 $g:X\to Z$ 是连续的; 若 $Y\subset Z$, 那么扩张 f 的陪域所得的映射 $h:X\to Z$ 是连续的.

(6) (**分块连续**) 设 $f: X \to Y$. 若 X 是一族开集 $\{U_\alpha\}$ 的并, 且每个 $f|_{U_\alpha}$ 是连续的, 那么 f 是连续的.

证明 (1)(2)(3) 易证.

(4) 只需注意到 $f|_A : A \to Y$ 是 $f: X \to Y$ 与含入映射 $j: A \to X$ 的复合即可.

(5) (i) 任取 Z 中开集 $W = V \cap Z$, 其中 V 是 Y 中开集, 那么 $g^{-1}(W) = g^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(Z)$. 由于 $f(X) \subset Z$, 故 $g^{-1}(Z) = X$, 从而 $g^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ 是开的.

(ii) 只需注意到 $h = j \circ f$ 是含入映射 $j: Y \to Z$ 与 $f: X \to Y$ 的复合即可.

(6) 任取 Y 中的开集 V, 那么 $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 U_α 中的开集. 又因为 U_α 是 X 中的开集, 故 $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 从而 $f^{-1}(V) = \cup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. □

定理 2.55 (拼接引理) 设拓扑空间 X, Y 且 $X = A \cup B$, 其中 A, B 是 X 中的闭集. 若 $f: A \to Y$ 与 $g: B \to Y$ 都是连续的, 且在 $A \cap B$ 上有 $f(x) = g(x)$, 那么由

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

定义的映射 $h: X \to Y$ 是连续的.

证明 只需注意到对 Y 中的任意闭集 C, 都有 $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. □

当 A, B 均为开集时, 拼接引理也是成立的, 而这实际上是定理 2.54 中 (6) 的一种特殊情况.

例 2.56 定义为

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{2}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

的函数 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的.

定理 2.57 (乘积连续等价于各个分量连续) 设有映射 $f_1 : A \to X$ 与 $f_2 : A \to Y$. 映射 $f: A \to X \times Y$ 定义为

$$f(a) = \big(f_1(a), f_2(a)\big),$$

那么 f 连续当且仅当 f_1 与 f_2 均连续.

证明 $(\Longrightarrow)$ 考虑投影 $\pi_1 : X\times Y \to X$ 与 $\pi_2 : X\times Y \to Y$. 因为 $f_1 = \pi_1\circ f, f_2 = \pi_2\circ f$ 且 π_1, π_2 与 f 均连续, 故 f_1, f_2 也是连续的.

$(\Longleftarrow)$ 任取 $X\times Y$ 中的基元素 $U\times V$, 其中 U 是 X 中的开集, V 是 Y 中的开集. 因为

$$f^{-1}(U\times V) = f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(V),$$

而 f_1 与 f_2 是连续的, 故 $f^{-1}(U\times V)$ 作为两个开集的交也是连续的. 由定理 2.46 知 f 是连续的. □

例 2.58 定义为 $f(t) = (x(t), y(t))$ 的平面参数曲线 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 连续当且仅当分量函数 $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ 与 $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ 均连续.

2.9 乘积拓扑 (任意多个空间)

定义 2.59 (一族集合的乘积) 任给一族集合 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 定义它的乘积为

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha = \left\{x : J \to \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha \,\middle|\, \text{对每个 } \alpha\in J, \text{有 } x(\alpha)\in X_\alpha\right\}.$$

通常把 $x(\alpha)$ 记为 x_α, 称为 x 的第 α 个坐标. 注意到 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中映射的定义域与陪域是固定的, 因此要确定映射 x, 我们只需要对每个 $\alpha\in J$ 确定 $x_\alpha\in X_\alpha$ 即可. 由此我们可以把 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中的元素表示为 $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$. 如果乘积 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中的每个因子 X_α 都是同一个集合 X, 那么我们通常将 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 简记为 X^J, 其中的元素称为 X 的 J-元组.

当指标集 J 不重要或者是明确的时候, 我们可以将 $\prod\limits_{\alpha\in J}$ 简写为 $\prod$, 将 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 简写为 (x_α).

任给 $\beta\in J$, 我们把映射

$$\begin{aligned} \pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha &\longrightarrow X_\beta \\ (x_\alpha)_{\alpha\in J} &\longmapsto x_\beta \end{aligned}$$

称为第 β 个分量上的投影.

定义 2.60 (盒拓扑) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 我们把由基

$$\mathcal{B}_{\text{box}} = \left\{ \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集}, \alpha \in J \right\} \tag{2.1}$$

生成的拓扑称为 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上的盒拓扑 (box topology).

容易知道 (2.1) 确实是一个基: 显然 $\mathcal{B}_{\text{box}}$ 覆盖了 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$, 且因为

$$(\prod_{\alpha\in J} U_\alpha) \cap (\prod_{\alpha\in J} V_\alpha) = \prod_{\alpha\in J} (U_\alpha \cap V_\alpha),$$

故 $\mathcal{B}_{\text{box}}$ 中任意两个成员的交仍在 $\mathcal{B}_{\text{box}}$ 中.

定义 2.61 (乘积拓扑) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 我们把由子基

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \left\{ \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \,\middle|\, U_\beta \text{ 是 } X_\beta \text{ 中的开集} \right\} \tag{2.2}$$

生成的拓扑称为 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上的乘积拓扑. 带有这种拓扑的 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 称为乘积空间.

将 (2.2) 生成的基记为 $\mathcal{B}_\mathcal{S}$. 因为 $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ 中的成员是 $\mathcal{S}$ 中成员的有限交, 故任意的 $B \in \mathcal{B}$ 可以表示为

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n}),$$

这里 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 是互异的指标. 因此 $(x_\alpha) \in B$ 当且仅当 $x_{\beta_1} \in U_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n} \in U_{\beta_n}$. 注意到其余的分量 x_α 可以任意选取, 故 B 可以表示为

$$B = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha,$$

这里当 $\alpha \neq \beta_1, \ldots, \beta_n$ 时, $U_\alpha = X_\alpha$.

定理 2.62 (盒拓扑与乘积拓扑基的比较) 盒拓扑与乘积拓扑分别有基

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\text{box}} &= \left\{ \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集} \right\}, \\
\mathcal{B}_\mathcal{S} &= \left\{ \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \,\middle|\, \text{对有限个 } \alpha, U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集, 其余的 } \alpha \text{ 满足 } U_\alpha = X_\alpha \right\}.
\end{aligned}$$

至此可以看出: 对于有限个空间的乘积 $\prod_{\alpha=1}^{n} X_\alpha$, 其上的盒拓扑与乘积拓扑是相同的. 然而一般情况下, 盒拓扑要比乘积拓扑细致 (因为由定理 2.62 知 $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}_{\text{box}}$). 以后若无特殊说明, 我们总考虑 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上的乘积拓扑.

下面的结论说明对于盒拓扑与乘积拓扑, 我们有更 "小" 的基.

定理 2.63 (盒拓扑与乘积拓扑的基) 设拓扑空间 X_α 有基 $\mathcal{B}_\alpha$, 那么

$$\left\{\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \,\middle|\, B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha\right\}$$

是 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上盒拓扑的基,

$$\left\{\prod_{\alpha\in J} B_\alpha \,\middle|\, \text{对有限个 } \alpha, \text{有 } B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha; \text{其余的 } \alpha \text{ 满足 } B_\alpha = X_\alpha\right\}$$

是 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上乘积拓扑的基.

例 2.64 ($\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑) 全体开区间构成了 $\mathbb{R}$ 的一个基, 因此形如

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

的立方体全体构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 注意到 $\mathbb{R}^n$ 是有限乘积, 因此其上的盒拓扑与乘积拓扑是一样的, 我们称之为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑. 若无特殊说明, 提到 $\mathbb{R}^n$ 时我们总考虑它的标准拓扑.

下面是一些对盒拓扑与乘积拓扑均成立的结论.

定理 2.65 若 A_α 是 X_α 的子空间, 那么 $\prod A_\alpha$ 是 $\prod X_\alpha$ 的子空间 (均考虑盒拓扑或均考虑乘积拓扑).

定理 2.66 若每个 X_α 都是豪斯道夫空间, 那么 $\prod X_\alpha$ 也是豪斯道夫空间 (盒拓扑与乘积拓扑都成立).

定理 2.67 设 A_α 是 X_α 的子集. 考虑 $\prod X_\alpha$ 上的盒拓扑或乘积拓扑, 那么

$$\prod \overline{A_\alpha} = \overline{\prod A_\alpha}.$$

证明 注意到不论是盒拓扑还是乘积拓扑, 其中的基元素都形如 $\prod U_\alpha$, 这里 U_α 是 X_α 中的开集. 任取 $x = (x_\alpha) \in \prod \overline{A_\alpha}$. 设 $U = \prod U_\alpha$ 是包含 x 的一个基元素, 那么

$$U \cap \left(\prod A_\alpha\right) = \left(\prod U_\alpha\right) \cap \left(\prod A_\alpha\right) = \prod (U_\alpha \cap A_\alpha).$$

因为 $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$, 故 $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing$, 于是取 $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$, 则有 $y = (y_\alpha) \in U \cap \left(\prod A_\alpha\right)$, 因此 $x \in \overline{\prod A_\alpha}$.

反之, 设 $x = (x_\alpha) \in \overline{\prod A_\alpha}$, 下证 $x \in \prod \overline{A_\alpha}$. 任取 x_β 的邻域 U_β, 那么 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ 是 x 的邻域, 从而

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \left(\prod A_\alpha\right) \neq \varnothing.$$

取 $y = (y_\alpha) \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \left(\prod A_\alpha\right)$, 那么 $y_\beta \in U_\beta \cap A_\beta$, 故 $x_\beta \in \overline{A_\beta}$, 于是 $x \in \prod \overline{A_\alpha}$. □

现在我们给出一个只对乘积拓扑成立, 而盒拓扑不成立的结论.

定理 2.68 (乘积的连续性等价于分量的连续性) 考虑 $\prod X_\alpha$ 上的乘积拓扑. 设 $f_\alpha : A \to X_\alpha$, 定义 $f : A \to \prod X_\alpha$ 为 $f(a) = \big(f_\alpha(a)\big)$, 那么 f 连续当且仅当每个 f_α 均连续.

证明 ($\Longrightarrow$) 注意到每个投影 $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ 都是连续的, 故 $f_\beta = \pi_\beta \circ f$ 是连续的.

($\Longleftarrow$) 任取 $\prod X_\alpha$ 子基中的成员 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, 其中 U_β 是 X_β 中的开集. 因 f_β 连续, 故 $f_\beta^{-1}(U_\beta)$ 是开集, 从而 $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta)$ 也是开集. □

现在我们可以给出一个反例来说明定理 2.68 对于盒拓扑确实是不成立的, 其中的 $\mathbb{R}^\omega$ 在我们后面的学习中会多次出现.

例 2.69 考虑 $\mathbb{R}^\omega = \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{R}$. 定义函数 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ 为

$$f(t) = (t, t, \ldots),$$

它的第 n 个坐标函数为

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(t) = t, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

根据定理 2.68, 如果 $\mathbb{R}^\omega$ 被赋予乘积拓扑的话, f 是连续的. 然而, 如果 $\mathbb{R}^\omega$ 被赋予盒拓扑, 那么 f 就不连续, 因为对于 $\mathcal{B}_{\text{box}}$ 中的基元素

$$B = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \cdots$$

而言, 其原像 $f^{-1}(B) = \{0\}$ 不是开的.

2.10 度量拓扑

定义 2.70 (度量空间) 设 X 是一个集合. 若函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足对任意的 $x, y, z \in X$, 均有

(1) (正定性) $d(x, y) \geqslant 0$, 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(2) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) (三角不等式) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

则称 d 是 X 上的度量或距离函数, (X, d) 称为一个度量空间.

对度量空间 (X, d) 中任意的点 $x \in X$ 与实数 $r > 0$, 我们定义以 x 为心, $r > 0$ 为半径的开球为

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

如果度量 d 是明确的, 我们常常将 $B_d(x, r)$ 简写为 $B(x, r)$.

下面我们将会看到“开球”这一名词术语是合理的, 因为在相应的度量拓扑中它是开集.

定义 2.71 (度量拓扑) 设 (X, d) 为度量空间, 那么以全体开球

$$\{B(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$$

为基生成的拓扑 $\mathcal{T}_d$ 称为 X 上由 d 诱导的度量拓扑.

我们需要验证全体开球确实是一个基: 显然全体开球覆盖了整个空间. 任取两个开

球 $B(x,r), B(y,\delta)$ 以及点 $z \in B(x,r) \cap B(y,\delta)$, 取

$$\varepsilon = \min\{r - d(x,z), \delta - d(y,z)\},$$

那么 $B(z,\varepsilon) \subset B(x,r) \cap B(y,\delta)$. 至此我们证明了全体开球满足基的两个条件.

命题 2.72 (中心球性质) 设 (X,d) 为度量空间, $B(x,r)$ 是其中的开球. 若 $y \in B(x,r)$, 那么存在 $\delta > 0$ 使得 $B(y,\delta) \subset B(x,r)$.

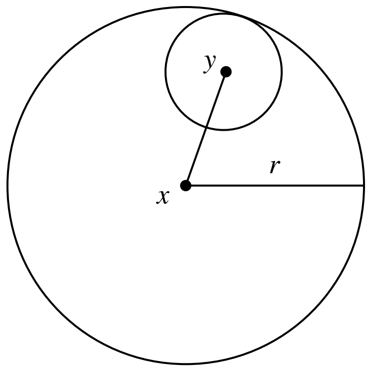

图 2.7: 中心球性质

命题 2.73 (度量空间中开集的刻画) 设 (X,d) 为度量空间, 那么 $U \subset X$ 是相应度量拓扑中的开集当且仅当对任意的 $x \in U$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset U$. 换言之,

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X \mid \text{对任意的 } x \in U, \text{存在 } r > 0 \text{ 使得 } B(x,r) \subset U\}.$$

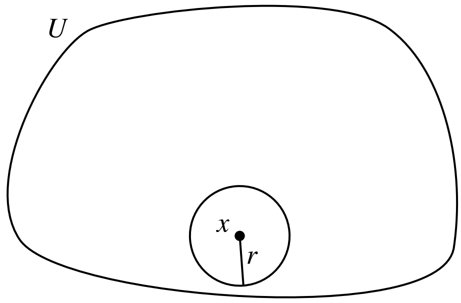

图 2.8: 度量空间中的开集

由命题 2.73 易知度量空间 (X,d) 中半径小于 1 的全体开球

$$\{B(x,r) \mid x \in X, 0 < r < 1\}$$

也是相应度量拓扑 $\mathcal{T}_d$ 的一个基.

例 2.74 (离散度量) 设 X 是一个集合, 定义 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 为

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

那么 d 是一个度量, 称为 X 上的离散度量, 由其诱导的拓扑恰好是离散拓扑.

例 2.75 ($\mathbb{R}$ 上的标准度量) 定义 $\mathbb{R}$ 上的标准度量为

$$d(x,y) = |x - y|,$$

那么由其诱导的拓扑就是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑.

定义 2.76 (可度量化空间) 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间. 若存在 X 上的度量 d 使得由 d 诱导的拓扑恰好为 $\mathcal{T}$, 则称 $(X,\mathcal{T})$ 是可度量化的.

并非所有的拓扑都是可度量化的. 数学家们非常关心拓扑要满足哪些条件才可度量化, 对此我们将在后面的章节作进一步的讨论.

定义 2.77 (有界集) 设 (X,d) 是度量空间, $A \subset X$. 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x, y \in A$ 均有

$$d(x,y) \leqslant M,$$

则称子集 A 是有界的. 如果 A 是非空的有界子集, 那么我们把

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

称为 A 的直径.

定义 2.78 (标准有界度量) 设 (X,d) 为度量空间, 定义 $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ 为

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\},$$

我们称 $\bar{d}$ 为相应于 d 的标准有界度量.

我们需要说明 $\bar{d}$ 确实是一个度量. $\bar{d}$ 的正定性与对称性是容易得到的. 对于三角不等式

$$\bar{d}(x,y)+\bar{d}(y,z)\geqslant \bar{d}(x,z),$$

当 $d(x,y)\geqslant 1$ 或 $d(y,z)\geqslant 1$ 时是显然成立的. 如果 $d(x,y)<1$ 且 $d(y,z)<1$, 那么

$$\bar{d}(x,z)\leqslant d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)=\bar{d}(x,y)+\bar{d}(y,z).$$

因此三角不等式也是满足的.

命题 2.79 (标准有界度量诱导的拓扑) 设 (X,d) 为度量空间, 那么 d 与 $\bar{d}$ 诱导了相同的拓扑.

证明 由于 $\mathcal{T}_d$ 有基 $\{B_d(x,r)\mid x\in X, 0<r<1\}$, $\mathcal{T}_{\bar{d}}$ 有基 $\{B_{\bar{d}}(x,r)\mid x\in X, 0<r<1\}$, 而当 $0<r<1$ 时 $B_{\bar{d}}(x,r)=B_d(x,r)$, 故 $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_{\bar{d}}$. □

现在我们考虑一类最常见的度量空间——$\mathbb{R}^n$.

定义 2.80 ($\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量与方形度量) 设 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. 定义 $\mathbf{x}$ 的范数为

$$\|\mathbf{x}\|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}.$$

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d 为

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}.$$

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的方形度量 ρ 为

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}.$$

在 $\mathbb{R}$ 上, 欧氏度量 d, 方形度量 ρ 所诱导的拓扑与标准拓扑是一致的. 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 欧氏度量 d 所诱导的拓扑恰好以开圆盘为基, 方形度量 ρ 所诱导的拓扑恰好以全体平行于坐标轴的开矩形为基, 因而两个拓扑仍然是相同的. 我们马上就会看到, 对 $\mathbb{R}^n$ 而言这其实是一个普遍成立的结论.

命题 2.81 (度量拓扑粗细的比较) 设 d, d' 是集合 X 上的两个度量, $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 分别是相应的度量拓扑, 那么 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 细致当且仅当对任意的 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $x \in X$ 与 $\varepsilon > 0$. 根据命题 2.8, 存在 $B_{d'}(y, r) \in \mathcal{B}'$ 使得 $x \in B_{d'}(y, r) \subset B_d(x, \varepsilon)$. 由命题 2.72 知存在 $\delta > 0$ 使得 $B_{d'}(x, \delta) \subset B_{d'}(y, r) \subset B_d(x, \varepsilon)$.

($\Longleftarrow$) 任取 $x \in X$ 以及含 x 的 $B_d(y, r) \in \mathcal{B}$. 根据命题 2.72, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_d(x, \varepsilon) \subset B_d(y, r)$. 由条件知存在 $\delta > 0$ 使得 $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$, 从而 $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(y, r)$. 再次利用命题 2.8 即得结论. □

定理 2.82 (欧氏度量与方形度量均诱导乘积拓扑) $\mathbb{R}^n$ 上由欧氏度量 d、方形度量 ρ 所诱导的拓扑均与 $\mathbb{R}^n$ 上的乘积拓扑相同.

证明 容易证明对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \sqrt{n}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

因此对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 与 $\varepsilon > 0$, 有

$$B_d(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon), \qquad B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset B_d(\mathbf{x}, \sqrt{n}\varepsilon).$$

由命题 2.81 知 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$. 下面证明 $\mathcal{T}_\rho$ 等于标准拓扑. 任取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 以及含 $\mathbf{x}$ 的 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$, 那么对每个 i, 存在 $\varepsilon_i > 0$ 使得

$$(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \subset (a_i, b_i).$$

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, 那么 $\mathbf{x} \in B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$. 这说明 $\mathcal{T}_\rho$ 比标准拓扑细致.

另一方面, 任取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 以及含 $\mathbf{x}$ 的 $B_\rho(\mathbf{y}, r)$, 那么

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|\} < r.$$

取 $B = \prod\limits_{i=1}^{n}(y_i - r, y_i + r)$, 则有 $x \in B \subset B_\rho(\mathbf{y}, r)$. 这说明标准拓扑比 $\mathcal{T}_\rho$ 细致. □

注 2.83 实际上对给定的 $p \geqslant 1$, 度量

$$d'(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

都诱导了 $\mathbb{R}^n$ 上的标准拓扑.

例 2.84 (有理开球构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个基) 若 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 的每个分量 x_i 都是有理数, 则称 x 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点. 若 x 是有理点且 $r > 0$ 为有理数, 则称 $B(x,r)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有理开球. 试证明全体有理开球

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{B(x,r) \mid x \text{ 为有理点}, r > 0 \text{ 为有理数}\}$$

形成了 $\mathbb{R}^n$ 上标准拓扑的一个基.

证明 任取开集 U 与 $x \in U$, 下证存在有理开球 $B(y,r)$ 使得 $x \in B(y,r) \subset U$.

根据命题 2.73, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset U$. 取有理点 $y \in B(x,\varepsilon/3)$, 则 $B(y, 2\varepsilon/3) \subset U$. 再取有理数 r 满足

$$\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{2\varepsilon}{3},$$

那么 $x \in B(y,r) \subset U$. □

$\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量与方形度量无法直接推广到 $\mathbb{R}^\omega$ 上. 为了赋予 $\mathbb{R}^\omega$ 度量, 我们引入下面的定义.

定义 2.85 (一致度量, 一致拓扑) 设 J 为一指标集. 对 $\mathbf{x} = (x_\alpha), \mathbf{y} = (y_\alpha) \in \mathbb{R}^J$, 定义

$$\bar{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_{\alpha \in J}\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha)\},$$

其中 $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) = \min\{|x_\alpha - y_\alpha|, 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的标准有界度量. 我们把由此得到的度量 $\bar{\rho}$ 称为 $\mathbb{R}^J$ 上的一致度量, 由它诱导的拓扑称为一致拓扑.

定理 2.86 (一致拓扑的粗细) 在 $\mathbb{R}^J$ 上

$$\text{乘积拓扑} \subset \text{一致拓扑} \subset \text{盒拓扑}.$$

当指标集 J 无限时, 相应的包含关系均为真包含.

证明 先证一致拓扑比乘积拓扑细致. 任取 $\mathbf{x} = (x_\alpha) \in \mathbb{R}^J$ 以及含 $\mathbf{x}$ 的乘积拓扑基元素 $\prod U_\alpha$. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是使得 $U_\alpha \neq \mathbb{R}$ 的指标. 对每个 i, 存在 $0 < \varepsilon_i < 1$ 使得

$$(x_{\alpha_i} - \varepsilon_i, x_{\alpha_i} + \varepsilon_i) \subset U_{\alpha_i}.$$

令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, 那么 $\mathbf{x} \in B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \prod U_\alpha$.

再证一致拓扑比盒拓扑粗糙. 任取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^J$ 以及 $0 < \varepsilon < 1$, 那么

$$\mathbf{x} \in \prod \left(x_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, x_\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \subset B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

最后的一个结论证明留作练习. □

目前我们还没有说明当指标集 J 无限时, 带有乘积拓扑或者盒拓扑的 $\mathbb{R}^J$ 是否可度量化. 事实上可以证明, 对于无限的 J, 只有当 J 可数且考虑乘积拓扑时 $\mathbb{R}^J$ 才是可度量化的 (其余情形的不可能性我们放到下一节进行说明).

定理 2.87 (带有乘积拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 是可度量化的) 设 $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的标准有界度量. 对 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\omega$, 定义

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \right\},$$

那么 D 是一个度量, 且诱导的度量拓扑是 $\mathbb{R}^\omega$ 上的乘积拓扑.

2.11 度量拓扑 (续)

下面是关于度量拓扑的一些简单的结论:

(1) 设 A 是度量空间 (X, d) 的子集, 那么 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 在 $A \times A$ 上的限制诱导了 A 上的子拓扑.

(2) 度量空间都是豪斯道夫空间.

(3) 可度量化空间的可数乘积仍是可度量化的 (证明与 $\mathbb{R}^\omega$ 类似).

定理 2.88 (度量空间中连续映射的刻画) 度量空间之间的映射 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是连续的当且仅当对任意的 $x \in X$ 与 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d_X(x, y) < \delta$ 时有 $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

引理 2.89 (序列引理) 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 若 A 中存在一个收敛于 x 的序列, 那么 $x \in \overline{A}$. 此外, 若 X 可度量化, 那么逆命题也成立.

证明 ($\Longrightarrow$) 根据收敛的定义, x 的任一邻域 U 都包含 A 中的点, 因此 $x \in \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) 设 X 上的拓扑可由度量 d 诱导. 因 $x \in \overline{A}$, 故对任意的正整数 n 都有 $B_d(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. 取其中的一个元素 x_n, 那么 $x_n \to x$. □

定理 2.90 (序列收敛刻画连续性) 设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射. 若 f 连续, 那么对 X 中任一收敛到 x 的序列 $\{x_n\}$, Y 中的序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$. 此外, 若 X 可度量化, 那么逆命题也成立.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $f(x)$ 的邻域 V, 由 f 连续知 $f^{-1}(V)$ 是开集, 因而是 x 的邻域, 故存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n \in f^{-1}(V)$, 于是 $f(x_n) \in V$.

($\Longleftarrow$) 由定理 2.49 只需证明对 X 的任一子集 A, 有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. 任取 $x \in \overline{A}$, 由序列引理知 A 中存在一个收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$. 由条件知 $f(A)$ 中的序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$. 再次利用序列引理, $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

定义 2.91 (可数基, 第一可数空间) 设 x 是拓扑空间 X 中的一点. 若存在 x 的可数个邻域 $\{U_n\}$ 使得对 x 的任意邻域 U, 都存在某个 n 使得 $U_n \subset U$, 则称 X 在 x 处有一个可数基. 若 X 在每一点处都有一个可数基, 则称 X 是第一可数的.

事实上, 如果拓扑空间 X 满足第一可数性公理, 那么引理 2.89 以及定理 2.90 仍然成立. (在引理 2.89 的证明中把 $B_d(x, 1/n)$ 换为 $B_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ 即可; 定理 2.90 的证明不需要改动.)

引理 2.92 加法、减法和乘法运算都是从 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数, 除法运算是从 $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数.

定理 2.93 (连续函数的四则运算) 设 X 为拓扑空间, $f, g : X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 那么 $f + g, f - g, f \cdot g$ 都是连续的. 若对所有的 x 都有 $g(x) \neq 0$, 那么 f/g 也是连续的.

证明 定义 $h : X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 为 $h(x) = f(x)\times g(x)$. 因为 f, g 均连续, 故 h 连续. 注意到 $f + g$ 等于加法与 h 的复合, 故 $f + g$ 是连续的. 类似可得 $f - g, f \cdot g$ 与 f/g 的连续性. □

定义 2.94 (一致收敛) 设 $f_n : X \to Y$ 是从集合 X 到度量空间 (Y, d) 的一列函数. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 对任意的 $x \in X$ 均有 $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, 则称 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

定理 2.95 (一致收敛定理) 设 $f_n : X \to Y$ 是从拓扑空间 X 到度量空间 Y 的一列连续映射. 若序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 那么 f 也是连续的.

事实上, 一致收敛与一致度量的概念是相关的. 记所有形如 $f : X \to \mathbb{R}$ 的映射全体所成集合为 $\mathbb{R}^X$, 考虑 $\mathbb{R}^X$ 上的一致度量 $\bar{\rho}$, 那么序列 $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ 一致收敛于 f 当且仅当 $\{f_n\}$ 作为 $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$ 中的点列收敛到 f.

例 2.96 带有盒拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 不可度量化.

证明 我们将证明序列引理对带有盒拓扑的 $\mathbb{R}^\omega$ 不成立. □

例 2.97 $\mathbb{R}$ 自身的不可数乘积 (考虑乘积拓扑) 不可度量化.

证明 我们将证明序列引理对带有盒拓扑的 $\mathbb{R}^J$ 不成立. □

2.12 商拓扑

定义 2.98 (商映射) 设 $p : X \to Y$ 是拓扑空间之间的满射. 若对 Y 的任意子集 U, 有

$$U \text{ 是 } Y \text{ 中的开集} \iff p^{-1}(U) \text{ 是 } X \text{ 中的开集},$$

则称 p 是一个商映射.

显然商映射可以等价地描述为 B 是 Y 中的闭集当且仅当 $p^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集.

定义 2.99 (饱和子集) 设 $p : X \to Y$ 为满射, A 是 X 的子集. 若

$$p^{-1}p(A) = A,$$

则称子集 A 是饱和的.

注意根据命题 1.6, 当 p 为满射时, 对 Y 的任一子集 B 都有 $pp^{-1}(B) = B$ 成立.

命题 2.100 (商映射的判定) 设 $p : X \to Y$ 为满射, 则 p 是商映射当且仅当 p 连续并且 p 将饱和开集映为开集.

证明 $(\Longrightarrow)$ 由商映射的定义即得.

($\Longleftarrow$) 由 p 的连续性只需证明对 Y 中的任一 U, 若 $p^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 则 U 是 Y 中的开集. 令 $A = p^{-1}(U)$, 那么

$$p^{-1}p(A) = p^{-1}pp^{-1}(U) = p^{-1}(U) = A,$$

于是 $A = p^{-1}(U)$ 是 X 的饱和子集, 从而 $U = p(A) = pp^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集. □

定义 2.101 (开映射, 闭映射) 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射. 若 f 将开集映为开集, 则称 f 是开映射; 若 f 将闭集映为闭集, 则称 f 是闭映射.

由定义易知若 $p: X \to Y$ 是一个开 (或闭) 的连续满射, 那么 p 是一个商映射. 然而, 商映射可能既不是开映射也不是闭映射.

定义 2.102 (商拓扑) 设 X 是一个拓扑空间, Y 是一个集合, $p: X \to Y$ 是一个满射. 定义 Y 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 为

$$U \in \mathcal{T} \quad \Longleftrightarrow \quad p^{-1}(U) \text{ 是 } X \text{ 中的开集.}$$

我们称这样的 $\mathcal{T}$ 为由满射 p 诱导的商拓扑.

容易看出如果为集合 Y 赋予商拓扑, 那么满射 $p: X \to Y$ 就成为了一个商映射.

定义 2.103 (商空间) 设 X 是拓扑空间, X^* 是 X 的一个划分. 若满射

$$p: X \to X^*$$

将每个 $x \in X$ 映为 X^* 中包含它的成员, 那么我们把 X^* 连同由 p 诱导的商拓扑称为 X 的一个商空间.

例 2.104 设

$$X = \{x \times y \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$X^* = \{x \times y \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{S^1\},$$

其中 $S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 是单位圆周, 那么商空间 X^* 同胚于二维单位球面

$$S^2 = \{x \times y \times z \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

如果 $p : X \to Y$ 是商映射, $A \subset X$, 那么映射

$$q = p|_A : A \to p(A)$$

不一定是商映射. 幸运的是, 我们有下面的结论.

定理 2.105 (商映射的限制) 设 $p : X \to Y$ 是一个商映射, A 是 X 关于 p 的饱和子集, 映射

$$q = p|_A : A \to p(A)$$

是 p 的限制, 那么

(1) 如果 A 是开集或闭集, 那么 q 是商映射.

(2) 如果 p 是开映射或闭映射, 那么 q 是商映射.

定理 2.106 (商映射的复合) 商映射的复合仍是商映射.

定理 2.107 (商映射的泛性质) 设 X, Y, Z 为拓扑空间, $p : X \to Y$ 是商映射. 若函数 $f : X \to Z$ 在每个 $p^{-1}(\{y\})$ 上取常值, 那么存在映射 $\overline{f} : Y \to Z$ 使得

$$\overline{f} \circ p = f.$$

此外, $\overline{f}$ 是连续的当且仅当 f 是连续的; $\overline{f}$ 是商映射当且仅当 f 是商映射.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

推论 2.108 设 $g : X \to Z$ 是一个连续满射. 考虑带有商拓扑的

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\},$$

那么

(1) g 诱导了一个连续双射 $\overline{g} : X^* \to Z$.

(2) $\overline{g}$ 是同胚当且仅当 g 是商映射.

(3) 若 Z 是豪斯道夫的, 则 X^* 也是豪斯道夫的.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, "\overline{g}"'] & Z \end{tikzcd}$$

3 连通性与紧性

3.1 连通空间

定义 3.1 (连通空间) 若拓扑空间 X 存在两个互不相交的非空开子集 U, V 使得

$$U \cup V = X,$$

则称 U, V 给出了 X 的一个分割. 如果 X 不存在分割, 则称 X 是连通的.

容易知道上述定义中的 U 与 V 既是开集又是闭集.

命题 3.2 (连通性的等价刻画) 设 X 为拓扑空间, 那么 X 是连通的当且仅当 $\varnothing$ 与 X 是 X 中仅有的既开又闭的集合.

证明 ($\Longrightarrow$) 假设有 $\varnothing \neq A \subsetneq X$ 使得 A 既开又闭, 那么 A 与 $X - A$ 给出了 X 的一个分割, 与 X 是连通的相矛盾.

($\Longleftarrow$) 若 X 不是连通的, 那么存在非空不交开集 U, V 使得 $U \cup V = X$, 从而 U 与 V 都是既开又闭的子集, 矛盾. □

定理 3.3 (子空间分割的判定) 设 Y 是 X 的子空间, A, B 是 X 的非空不交子集且 $Y = A \cup B$, 那么 A, B 给出 Y 的一个分割当且仅当 A 不含 B 的极限点且 B 不含 A 的极限点. (因而若 Y 没有这样的分割, 那么 Y 是连通的.)

证明 ($\Longrightarrow$) 由于 $Y = A \cup B$ 且 A 在 Y 中既开又闭, 故

$$A = \mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y,$$

这里 $\overline{A}$ 是 A 在 X 中的闭包. 于是

$$\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap Y \cap B = A \cap B = \varnothing.$$

因为 $\overline{A} = A \cup A'$, 故 $A' \cap B = \varnothing$, 即 B 不含 A 的极限点. 同理 A 不含 B 的极限点.

($\Longleftarrow$) 由 $A' \cap B = \varnothing, A \cap B' = \varnothing$ 以及 $A \cap B = \varnothing$ 可知

$$\overline{A} \cap B = \varnothing, \qquad A \cap \overline{B} = \varnothing.$$

从而

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y \subset Y - B = A, \qquad \mathrm{Cl}_Y(B) = \overline{B} \cap Y \subset Y - A = B,$$

这说明 A 与 B 都是 Y 中的闭集, 从而是给出了 Y 的一个分割. □

例 3.4 (1) 设 $Y = [-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbb{R}$, 那么 $[-1, 0)$ 与 $(0, 1]$ 形成了 Y 的一个分割.

(2) $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 的连通子空间. 事实上, $\mathbb{Q}$ 仅有的连通子空间是单点集. 设 $Y \subset \mathbb{Q}$, 点 $p, q \in Y$ 满足 $p < q$. 取无理数 $a \in (p, q)$, 那么开集

$$Y \cap (-\infty, a) \quad 与 \quad Y \cap (a, +\infty)$$

给出了 Y 的一个分割.

引理 3.5 (连通子空间的归属) 设 C 和 D 形成了拓扑空间 X 的一个分割. 若 Y 是 X 的连通子空间, 那么 $Y \subset C$ 或者 $Y \subset D$.

证明 若 $Y \cap C \neq \varnothing$ 且 $Y \cap D \neq \varnothing$, 那么 $Y \cap C$ 与 $Y \cap D$ 给出了 Y 的一个分割. □

定理 3.6 (连通子空间的并) 设 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的一族连通子空间. 若

$$\bigcap A_\alpha \neq \varnothing,$$

那么 $\bigcup A_\alpha$ 也是连通的.

证明 设 $p \in \bigcap A_\alpha$. 如果 C 和 D 是 $\bigcup A_\alpha$ 的一个分割, 那么 $p \in C$ 或者 $p \in D$. 假设 $p \in C$, 那么由引理 3.5 知每个 $A_\alpha \subset C$, 从而 $\bigcup A_\alpha \subset C$, 矛盾. □

定理 3.7 (连通子空间的闭包) 设 A 是 X 的连通子空间. 若 $A \subset B \subset \overline{A}$, 那么 B 也是连通的. (特别地, $\overline{A}$ 也是连通的.)

证明 假设 B 有分割 $B = C \cup D$. 因 A 是 B 的连通子空间, 故由 3.5 知 $A \subset C$ 或 $A \subset D$. 设 $A \subset C$, 那么 $\overline{A} \subset \overline{C}$. 根据定理 3.3, $\overline{C} \cap D$. 注意到 $B \subset \overline{A} \subset \overline{C}$, 于是 $B \cap D = \varnothing$, 矛盾. □

定理 3.8 (连通空间的连续像仍连通) 连通空间在连续映射下的像也是连通的.

证明 设 $f : X \to Y$ 为连续满射, 其中 X 是连通的. 假如 Y 有分割 $Y = A \cup B$, 那么 X 有分割

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

这与 X 连通矛盾. □

由定理 3.8 可知连通性是拓扑性质.

定理 3.9 有限个连通空间的乘积仍是连通空间.

3.2 实直线的连通子空间

定义 3.10 (线性连续统) 设 L 是至少含有两个元素的线性序集. 若

(1) L 具有最小上界性质.

(2) 如果 $x < y$, 那么存在 z 使得 $x < z < y$.

则称 L 是一个线性连续统 (linear continuum).

定理 3.11 (线性连续统的连通性) 若 L 是带有序拓扑的线性连续统, 那么 L 是连通的, 并且 L 中的区间与射线也都是连通的.

证明 我们将证明若 Y 是 L 的凸子空间, 那么 Y 是连通的. □

推论 3.12 (实直线 $\mathbb{R}$ 的连通性) 实直线 $\mathbb{R}$ 是连通的, 并且 $\mathbb{R}$ 中的区间与射线也都是连通的.

定理 3.13 (介值定理) 设 $f : X \to Y$ 是连续映射, 其中 X 是连通空间, Y 是带有序拓扑的线性序集. 若 $a, b \in X$ 且 $r \in Y$ 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 那么存在 $c \in X$ 使得 $f(c) = r$.

证明 假设不存在 $c \in X$ 使得 $f(c) = r$, 那么

$$f(X) \cap (-\infty, r) \quad \text{与} \quad f(X) \cap (r, +\infty)$$

给出了 $f(X)$ 的一个分割 (注意 "c 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间" 这一条件保证了上面的两个集合都是非空的). 由于 X 是连通的, 且 f 是连续映射, 故 $f(X)$ 也是连通的, 矛盾. □

有了 $\mathbb{R}$ 上的区间的连通性, 我们可以引入一个非常有用的概念.

定义 3.14 (路径, 道路连通空间) 设 X 为拓扑空间 $x, y \in X$. 若存在一个连续映射 $f : [a, b] \to X$ (这里 $a, b \in \mathbb{R}$), 使得

$$f(a) = x, \qquad f(b) = y,$$

则称 f 是 X 中一条从 x 到 y 的路径. 若对 X 中的任意两点 x, y, 都存在从 x 到 y 的路径, 则称 X 是道路连通的.

命题 3.15 (道路连通 $\Longrightarrow$ 连通) 道路连通空间一定是连通的.

证明 设 A, B 给出了道路连通空间 X 的一个分割. 任取 X 中的一条路径

$$f : [a, b] \to X.$$

由 f 的连续性与 $[a, b]$ 的连通性知 $f([a, b])$ 是连通的, 因此 $f([a, b]) \subset A$ 或 $f([a, b]) \subset B$, 于是从 $x \in A$ 到 $y \in B$ 之间不存在路径, 这与 X 道路连通矛盾. □

例 3.16 (拓扑学家的正弦曲线, 连通不一定道路连通) 设

$$S = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, 0 < x \leqslant 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

那么 S 作为连续映射 $f : (0, 1] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sin 1/x)$ 的像是连通的, 进而它的闭包

$$\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

也是连通的 (称为拓扑学家的正弦曲线). 然而 $\overline{S}$ 却不是道路连通的.

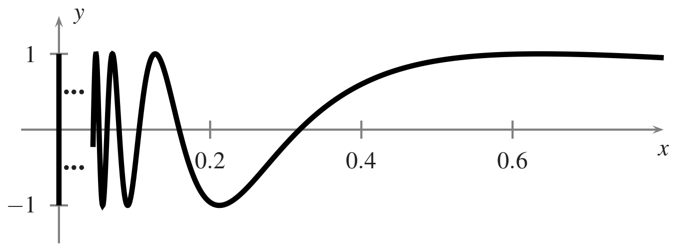

图 3.1: 拓扑学家的正弦曲线

证明 假设从 0×0 到 S 中某个点有路径

$$f:[a,c]\to \overline{S}.$$

因为 $f^{-1}(\{0\}\times[-1,1])$ 是 $[a,c]$ 中的闭集, 故它有最大元 b. 考虑路径

$$g=f|_{[b,c]}:[b,c]\to \overline{S}.$$

那么

$$g(b)\in\{0\}\times[-1,1] \quad 且 \quad g((b,c])\subset S.$$

为方便起见, 我们不妨将 $[b,c]$ 考虑为 $[0,1]$. 设 $g(t)=(x(t),y(t)),0\leqslant t\leqslant 1$, 那么 $x(0)=0$, 且当 $t>0$ 时, 有

$$x(t)>0 \quad 且 \quad y(t)=\sin\frac{1}{x(t)}.$$

故存在 $(0,1)$ 中的序列 $t_1,t_2,\ldots$ 使得 $t_n\to 0$ 且 $y(t_n)=(-1)^n$. 注意到序列 $y(t_1),y(t_2),\ldots$ 不收敛, 这与 f 的连续性矛盾. □

注 3.17 上述证明最后的序列 $t_1,t_2,\ldots$ 可通过如下方式找到: 对任意的正整数 n, 由于 $x(1/n)>0$, 故可取到 $u_n\in(0,x(1/n))$ 使得

$$\sin\frac{1}{u_n}=(-1)^n.$$

注意到 u_n 是介于 $x(0)$ 与 $x(1/n)$ 之间的, 从而由中间值定理可知存在 $t_n\in(0,1/n)$ 使得 $x(t_n)=u_n$.

3.3 连通分支与局部连通性

定义 3.18 (连通分支) 在拓扑空间 X 上定义等价关系为

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{存在 } X \text{ 的一个连通子空间同时包含 } x \text{ 与 } y.$$

由此得到的等价类称为 X 的连通分支, 简称 X 的分支.

定理 3.19 (连通分支的刻画) 拓扑空间 X 的连通分支是满足如下条件的一些连通子空间:

(1) 它们是不相交的, 且并起来等于全空间 X.

(2) X 的每个非空连通子空间都只和其中一个相交.

证明 ($\Longleftarrow$) 显然.

($\Longrightarrow$) 由于等价关系给出了 X 的一个划分, 故 (1) 是显然的. 下证 (2). 假设非空连通子空间 A 与连通分支 C_1, C_2 均相交, 那么可取

$$x_1 \in A \cap C_1, \qquad x_2 \in A \cap C_2,$$

从而 $x_1, x_2 \in A$. 故 $x_1 \sim x_2$, 从而 $C_1 = C_2$. 这说明 A 只能与一个连通分支相交.

现在证明连通分支确实是连通的. 任取一个连通分支 C. 设 $x_0 \in C$, 那么对任意的 $x \in C$, 有 $x_0 \sim x$, 从而存在连通子空间 A_x 使得 $x_0, x \in A_x$. 根据前述讨论有 $A_x \subset C$, 因此

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x,$$

而 $\bigcap A_x$ 至少有公共点 x_0, 故 C 是连通的. □

定义 3.20 (道路连通分支) 在拓扑空间 X 上定义等价关系为

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{在 } X \text{ 中存在一条从 } x \text{ 到 } y \text{ 的路径.}$$

由此得到的等价类称为 X 的道路连通分支.

证明 与定理 3.19 类似. □

定理 3.21 (道路连通分支的刻画) 拓扑空间 X 的道路连通分支是满足如下条件的一些道路连通子空间:

(1) 它们是不相交的, 且并起来等于全空间 X.

(2) X 的每个非空道路连通子空间都只和其中一个相交.

由于连通分支是具有“极大性”的连通子空间, 而连通子空间的闭包也是连通的, 因而 连通分支一定是闭集. 对于只有有限个连通分支的空间而言, 它们的连通分支还一定是开的, 因为每个连通分支的补集是有限个闭集的并 (然而一般来说连通分支不一定是开的). 另外, 道路连通分支可能既不是开的, 也不是闭的.

例 3.22 拓扑学家的正弦曲线 $\overline{S}$ 只有一个连通分支, 但有两个道路连通分支 S 与 $\{0\} \times [-1, 1]$.

定义 3.23 (局部连通, 局部道路连通) 设 X 是一个拓扑空间.

- 若对 $x \in X$ 的任意邻域 U, 存在 x 的连通邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在 x 处是局部连通的.
- 若 X 在每一点处都是局部连通的, 则称 X 是局部连通的.
- 若对 $x \in X$ 的任意邻域 U, 存在 x 的道路连通邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在 x 处是局部道路连通的.
- 若 X 在每一点处都是局部道路连通的, 则称 X 是局部道路连通的.

例 3.24 实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 不连通, 但局部连通.

注意 连通无法推出局部连通, 局部连通也得不到连通, 二者没有必然联系.

定理 3.25 (局部连通性的刻画) 设 X 为拓扑空间, 那么 X 是局部连通的当且仅当对 X 的每个开集 U, U 的各个连通分支也都是 X 中的开集.

证明 ($\Longrightarrow$) 设 C 是开集 U 的一个连通分支. 任取 $x \in C$, 由 X 的局部连通性知存在 x 的连通邻域 V_x 使得 $V_x \subset U$. 由 V_x 的连通性与定理 3.19 可知 $V_x \subset C$, 从而 $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ 是开集.

($\Longleftarrow$) 设 $x \in X$, U 是 x 的一个邻域, C 是 U 的包含 x 的连通分支, 那么 C 是 x 的连通邻域且 $C \subset U$, 因此 X 在 x 处是局部连通的. □

定理 3.26 (局部道路连通性的刻画) 设 X 为拓扑空间, 那么 X 是局部道路连通的当且仅当对 X 的每个开集 U, U 的各个道路连通分支也都是 X 中的开集.

证明 与定理 3.25 的证明类似. □

定理 3.27 (连通分支与道路连通分支的关系) 设 X 为拓扑空间, 那么

(1) X 的每个道路连通分支都落在 X 的连通分支中.

(2) 如果 X 是局部道路连通的, 那么 X 的连通分支与道路连通分支是相同的.

证明 设 C 是 X 的一个连通分支, $x \in C$, P 是包含 x 的道路连通分支.

(1) 道路连通空间必是连通空间, 因此 P 是连通的. 注意到 P 与 C 有公共点 x, 从而 $P \subset C$.

(2) 假设 X 还是局部道路连通的, 下证 $P = C$. 如果 $P \subsetneq C$, 记 Q 为所有不同于 P 且与 C 相交的道路连通分支之并, 那么

$$C = P \cup Q.$$

由定理 3.26 知 P 与 Q 都是 X 中的开集, 从而上式给出了 C 的一个分割, 这与 C 的连通性矛盾. □

3.4 紧空间

定义 3.28 (开覆盖) 若拓扑空间 X 的子集族 $\mathcal{A}$ 满足 $\bigcup \mathcal{A} = X$, 则称 $\mathcal{A}$ 覆盖了 X. 若 $\mathcal{A}$ 中的每个成员都是开集, 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 若 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 也覆盖了 X, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子覆盖.

定义 3.29 (紧空间) 若拓扑空间 X 的任意一个开覆盖都有有限的子覆盖, 则称 X 是紧的.

例 3.30 $\mathbb{R}$ 不是紧的, 因为覆盖

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

没有有限的子覆盖. 此外, 区间 $(0,1]$ 也不是紧的, 因为覆盖

$$\mathcal{A}' = \{(1/n, 1] \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

没有有限的子覆盖. 不过, $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是紧的, 因为任意一个包含 0 的开区间也包含了序列 $1, 1/2, 1/3, \dots$ 从某一项开始的无限项.

设 Y 是 X 的子空间, $\mathcal{A}$ 是 X 的子集族. 若

$$Y \subset \bigcup \mathcal{A},$$

则称 $\mathcal{A}$ 覆盖了 Y.

命题 3.31 (子空间紧性的判定) 设 Y 是 X 的子空间, 那么 Y 是紧的当且仅当对 X 中任一覆盖了 Y 的开集族, 都有能从中找出有限个开集仍覆盖了 Y.

证明 ($\Longrightarrow$) 易得.

($\Longleftarrow$) 注意到 Y 中的开集可以表示为 X 中的开集与 Y 之交, 由此易得结论. □

定理 3.32 (紧空间的闭遗传性) 紧空间的闭子空间仍是紧的.

证明 设 Y 是紧空间 X 的闭子空间. 任取 X 的覆盖了 Y 的一族开集 $\mathcal{A}$, 下证 $\mathcal{A}$ 有有限的子覆盖.

由于 $\mathcal{A}$ 覆盖了 Y, 故

$$\mathcal{A} \cup \{X - Y\}$$

给出了 X 的一个开覆盖. 注意到 X 是紧的, 故上述开覆盖存在一个子覆盖 $\mathcal{A}'$ 覆盖了 X, 从而 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖

$$\mathcal{A}' - \{X - Y\}$$

覆盖了 Y. □

引理 3.33 (豪斯道夫空间可以通过开集分离点与紧子集) 设 Y 是豪斯道夫空间 X 的紧子空间, $x_0 \in X - Y$, 那么在 X 中存在开集 U, V 使得

$$x_0 \in U, \quad Y \subset V \quad \text{且} \quad U \cap V = \varnothing.$$

证明 任取 $y \in Y$. 因 X 是豪斯道夫的, 故存在 x_0 的邻域 U_y 与 y 的邻域 V_y 使得

$$U_y \cap V_y = \varnothing.$$

由于 Y 是紧的, 且

$$\{V_y \mid y \in Y\}$$

是 Y 的一个开覆盖, 故其中存在有限个邻域 $V_1, \ldots, V_n$ 也覆盖了 Y. 令

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i,$$

那么 $x_0 \in U, Y \subset V$ 且 $U \cap V = \varnothing$. □

定理 3.34 (豪斯道夫空间中, 紧 $\Longrightarrow$ 闭) 豪斯道夫空间的紧子空间是闭的.

证明 设 Y 是豪斯道夫空间 X 的紧子空间. 任取 $x \in X - Y$, 由引理 3.33 知存在互不相交的开子集 U_x, V_x 使得 $x \in U_x, Y \subset V_x$, 从而

$$U_x \cap Y \subset U_x \cap V_x = \varnothing.$$

这说明 $U_x \subset X - Y$, 从而 $X - Y = \bigcup\limits_{x \in X - Y} U_x$ 是开集, 故 Y 是闭的. □

例 3.35 因为豪斯道夫空间中的紧子空间一定是闭的, 故

$$(a, b] \quad 与 \quad (a, b)$$

都不是紧的.

定理 3.36 (紧空间的连续像仍是紧的) 紧空间的在连续映射下的像仍是紧的.

证明 设 $f : X \to Y$ 是连续满射, 其中 X 是紧空间. 任取 Y 的开覆盖 $\{V_\alpha\}$, 那么 $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧性知存在有限个开集 $f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_n)$ 也覆盖了 X, 从而

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup f^{-1}(V_i)\right) = \bigcup f f^{-1}(V_i) = \bigcup V_i,$$

这里最后一个等号利用了 f 的满性. 因此 $V_1, \ldots, V_n$ 覆盖了 Y, 这说明 Y 是紧的. □

由定理 3.36 可知紧性是拓扑性质.

定理 3.37 (连续双射成为同胚的一个充分条件) 设 $f : X \to Y$ 为连续双射. 若 X 是紧的, Y 是豪斯道夫的, 那么 f 是同胚.

证明 只需证明 f 为闭映射. 设 C 是 X 中的闭集, 那么由 X 是紧空间可知 C 也是紧的. 由 f 的连续性知 $f(C)$ 是紧的. 最后利用 Y 的豪斯道夫性得 $f(C)$ 是闭的. □

引理 3.38 (管形引理) 考虑乘积空间 $X \times Y$, 其中 Y 是紧的. 如果 N 是 $X \times Y$ 中的开集且

$$\{x_0\} \times Y \subset N,$$

那么存在 x_0 的邻域 W 使得

$$\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset N.$$

证明 任取 $y \in Y$, 那么 $x_0 \times y \in N$. 由于 N 是开集, 故存在 x_0 的邻域 U_y 与 y 的邻域 V_y 使得

$$U_y \times V_y \subset N.$$

由于 $\{V_y \mid y \in Y\}$ 是 Y 的开覆盖且 Y 是紧的, 故存在有限个 $V_1, \ldots, V_n$ 也覆盖了 Y. 令

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} U_i,$$

那么 W 是 x_0 的邻域, 且

$$\{x_0\} \times Y \subset W \times Y = W \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (W \times V_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times V_i) \subset N.$$

结论得证. □

形象来说, 管形引理告诉我们: 如果 Y 是紧的且 $X \times Y$ 中的开集包含了“一条线”, 那么该开集也必然包含一根“管子”.

定理 3.39 (有限个紧空间的乘积) 有限个紧空间的乘积仍是紧的.

证明 设 X,Y 均为紧空间, $\mathcal{A}$ 是 $X\times Y$ 的一个开覆盖. 任取 $x\in X$, 那么 $\{x\}\times Y$ 是紧的, 从而存在 $\mathcal{A}$ 的有限子收集 $\mathcal{A}_x$ 使得 $\{x\}\times Y\subset\bigcup\mathcal{A}_x$.

由于 $\bigcup\mathcal{A}_x$ 是 $X\times Y$ 中的开集, 故根据管形引理, 存在 x 的邻域 W_x 使得

$$\{x\}\times Y\subset W_x\times Y\subset\bigcup\mathcal{A}_x.$$

因为 X 是紧的, 故存在 $x_1,\ldots,x_n\in X$ 使得

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}W_{x_i},$$

从而

$$X\times Y=\left(\bigcup_{i=1}^{n}W_{x_i}\right)\times Y=\bigcup_{i=1}^{n}(W_{x_i}\times Y)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup\mathcal{A}_{x_i}.$$

至此我们找到了 $\mathcal{A}$ 的一个有限子覆盖, $X\times Y$ 是紧的. □

现在我们想问无限个紧空间的乘积还是紧的吗? 这一问题的答案是肯定的, 相应的结论称为 Tychonoff 定理, 但它的证明比较困难, 我们后面完成. 事实上, Tychonoff 定理与选择公理是等价的.

最后我们利用闭集给出紧性的另一等价刻画, 为此我们需要下述定义.

定义 3.40 (有限交性质) 设 $\mathcal{C}$ 是 X 的一族子集. 若对 $\mathcal{C}$ 中任意有限个成员 $C_1,\ldots,C_n$ 都有

$$\bigcap_{i=1}^{n}C_i\neq\varnothing,$$

则称 $\mathcal{C}$ 具有有限交性质.

定理 3.41 (利用闭集刻画紧性) 拓扑空间 X 是紧的当且仅当对 X 中任一具有有限交性质的闭集族 $\mathcal{C}$, 都有

$$\bigcap\mathcal{C}\neq\varnothing.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 假设 $\bigcap\mathcal{C}=\varnothing$, 那么

$$X=X-\bigcap\mathcal{C}=\bigcup_{C\in\mathcal{C}}(X-C),$$

因此 $\{X - C\}_{C\in\mathcal{C}}$ 是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是紧的, 故存在 $X - C_1, \ldots, X - C_n$ 使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{n}(X - C_i) = X - \bigcap_{i=1}^{n} C_i.$$

这说明 $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \varnothing$, 与有限交性质矛盾.

($\Longleftarrow$) 设 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖, 那么 $\{X - A_\alpha\}$ 是 X 的一族闭集. 假设 $\{A_\alpha\}$ 没有有限的子覆盖, 那么 $\{X - A_\alpha\}$ 具有有限交性质, 从而

$$X - \bigcup A_\alpha = \bigcap (X - A_\alpha) \neq \varnothing.$$

这与 $\{A_\alpha\}$ 覆盖了 X 相矛盾. □

注 3.42 根据上述定理, 若 X 为紧空间且非空闭集列 $C_1, C_2, \ldots$ 是递减的, 即

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots C_n \supset \cdots,$$

那么 $\{C_n\}$ 具有有限交性质, 从而

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing.$$

利用闭集族的有限交性质刻画紧性是一个非常重要的结论, 后面我们会多次用到 (例如证明实数集的不可数性, 证明 Tychonoff 定理, 证明 Baire 纲定理等).

3.5 实直线的紧子空间

定理 3.43 (闭区间的紧性) 设 X 为具有最小上界性质的线性序集, 且带有序拓扑, 那么 X 的每一个闭区间都是紧的.

证明 选定 X 中的两个元素 $a < b$. 设 $\mathcal{A}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖. 令

$$C = \{y \in (a, b] \mid [a, y] \text{ 可被 } \mathcal{A} \text{ 中有限个成员覆盖}\}.$$

接下来我们逐步证明以下四个结论.

(1) 对任意的 $x \in [a, b)$, 存在 $y \in (x, b]$ 使得 $[x, y]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中至多两个成员覆盖.

若 x 有直接后继, 则将 y 取为这个直接后继, 那么 $[x, y] = \{x, y\}$, 于是 $[x, y]$ 可被 $\mathcal{A}$

中至多两个成员覆盖. 若 x 没有直接后继, 因 $\mathcal{A}$ 覆盖了 $[a,b]$, 故存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$. 由于 A 是开集, 故存在开区间 (d,c) 使得 $x \in (d,c) \subset A$, 从而 $[x,c) \subset \mathcal{A}$. 取 $y \in [x,c)$, 那么 $[x,y] \subset [x,c) \subset A$. 这说明 $[x,y]$ 被 $\mathcal{A}$ 中的一个成员覆盖了.

(2) 子集 C 是非空的, 又因为 C 有上界, 故由最小上界性质知 C 有上确界 $c \in (a,b]$.

在 (1) 中将 x 取为 a, 那么存在 $y \in (a,b]$ 使得 $[a,y]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖, 从而 $y \in C$, 因此 C 非空.

(3) C 的上确界 c 在 C 中.

因为 $c \in (a,b]$, 故存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $c \in A$. 注意 A 是开集, 故存在开区间 (d,f) 使得 $c \in (d,f) \subset A$, 从而 $(d,c] \subset A$. 假设 $c \notin C$, 则 C 中必有元素 z 落在开区间 (d,c) 内, 否则 d 是一个比 c 更小的上界. 由 C 的构造知 $[a,z]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖. 注意到 $[z,c] \subset (d,c] \subset A$, 故 $[z,c]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中的一个成员覆盖, 从而

$$[a,c] = [a,z] \cup [z,c]$$

可以被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖. 这与 $c \notin C$ 矛盾, 故 $c \in C$.

(4) 上确界 c 等于 b.

假设 $c < b$. 在 (1) 中取 $x = c$, 则存在 $y \in (c,b]$ 使得 $[c,y]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中有限多个成员覆盖. 又因为 $c \in C$, 故 $[a,c]$ 可被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖, 从而

$$[a,y] = [a,c] \cup [c,y]$$

也可被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员覆盖, 因此 $y \in C$. 注意到 $y > c$, 这与 c 是 C 的上确界矛盾, 故 $c = b$. □

推论 3.44 实直线 $\mathbb{R}$ 中的闭区间都是紧的.

定理 3.45 (欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 紧集 $\Longleftrightarrow$ 有界闭集) $\mathbb{R}^n$ 中的子集 A 是紧的当且仅当 A 在欧氏度量 d 或方形度量 ρ 下是有界闭集.

证明 注意到

$$\rho(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant \sqrt{n}\rho(x,y),$$

因此 A 在 d 下有界当且仅当 A 在 ρ 下有界. 这说明我们只需证明方形度量 ρ 的情形.

($\Longrightarrow$) 设 A 是紧的. 由于 A 是豪斯道夫的, 故 A 是闭的. 注意到

$$\{B_\rho(0,m) \mid m=1,2,\ldots\}$$

是一族覆盖了 A 的开集, 由 A 的紧性可知存在正整数 M 使得 $A \subset B_\rho(0,M)$, 从而对任意的 $x,y \in A$, 有

$$\rho(x,y)=\max\{|x_i-y_i|\} \leqslant \max\{|x_i|+|y_i|\} \leqslant \max\{|x_i|\}+\max\{|y_i|\} \leqslant 2M.$$

这说明 A 是有界的.

($\Longleftarrow$) 因为 A 在 ρ 下是有界的, 故存在正整数 N 使得对任意的 $x,y \in A$, 都有

$$\rho(x,y) \leqslant N.$$

任意取定 $x_0 \in A$, 记 $b=\rho(x_0,0)$, 那么

$$\rho(x,0) \leqslant \rho(x,x_0)+\rho(x_0,0) \leqslant N+b.$$

于是令 $P=N+b$, 则

$$A \subset [-P,P]^n.$$

因为 $[-P,P]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 故 $[-P,P]^n$ 作为有限个紧空间的乘积也是紧的, 从而 A 作为紧空间的闭子空间也是紧的. $\square$

定理 3.46 (最值定理) 设 $f: X \to Y$ 为连续映射, 其中 X 是紧空间, Y 是带有序拓扑的线性序集, 那么存在 $c,d \in X$ 使得对任意的 $x \in X$ 都有

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

即 f 可以取到最大值与最小值.

证明 因 f 连续且 X 是紧的, 故 $A=f(X)$ 也是紧的. 假设 A 没有最大元, 那么开集族

$$\{(-\infty,a) \mid a \in A\}$$

覆盖了 A, 从而存在 $a_1, \dots, a_n \in A$ 使得

$$(-\infty, a_1), \dots, (-\infty, a_n)$$

也覆盖了 A. 取 $a_0 = \max\{a_1, \dots, a_n\}$, 那么 a_0 不在任何一个 $(-\infty, a_i)$ 中, 从而 $a \notin A$, 矛盾. 类似可证 $A = f(X)$ 有最小元. □

定义 3.47 (点到子集的距离) 设 (X, d) 为度量空间, A 是 X 的非空子集, $x \in X$, 那么我们称

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

是点 x 到子集 A 的距离.

命题 3.48 设 A 是度量空间 (X, d) 的非空子集, 那么

$$\begin{aligned} d(-, A) : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

是一个连续函数.

回忆一下, 度量空间 (X, d) 的子集 A 的直径为

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

引理 3.49 (勒贝格数引理) 设 $\mathcal{U}$ 是紧度量空间 (X, d) 的一个开覆盖, 那么存在 $\delta > 0$ 使得对 X 的任一直径小于 δ 的子集 A, 都存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得

$$A \subset U.$$

上述引理中的 δ 称为开覆盖 $\mathcal{U}$ 的一个勒贝格数.

证明 若 $X \in \mathcal{U}$, 那么任意的 $\delta > 0$ 都是 $\mathcal{U}$ 的勒贝格数. 下设 $X \notin \mathcal{U}$. 因为 X 是紧的, 故存在 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ 也覆盖了 X. 定义函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, X - U_i).$$

下证对任意的 $x \in X$ 都有 $f(x) > 0$. 任取 $x \in X$, 那么存在某个 i 使得 $x \in U_i$. 因为 U_i 是

开集, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset U_i$, 从而 (利用反证法)

$$d(x, X - U_i) \geqslant \varepsilon.$$

由于 f 是连续的, 故在 X 上 f 可以取到最小值 δ, 下面证明 δ 就是满足条件的一个勒贝格数. 设 A 是直径小于 δ 的任一子集, 取定 $x_0 \in A$, 那么

$$A \subset B(x_0, \delta).$$

设 $d(x_0, X - U_m)$ 是 $d(x_0, X - U_1), \ldots, d(x_0, X - U_n)$ 中最大的一个数, 那么

$$\delta \leqslant f(x_0) \leqslant d(x_0, X - U_m).$$

于是

$$A \subset B(x_0, \delta) \subset U_m.$$

结论得证. □

我们将使用勒贝格数引理来证明一致连续定理.

定义 3.50 (一致连续) 设 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是度量空间之间的映射. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x_0, x_1 \in X$, 只要 $d_X(x_0, x_1) < \delta$, 就有 $d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$, 则称 f 是一致连续的.

定理 3.51 (一致连续定理) 设 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是度量空间之间的连续映射. 若 X 是紧的, 那么 f 是一致连续的.

证明 任取 $\varepsilon > 0$. 设 $\delta > 0$ 是 X 的开覆盖

$$\left\{ f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \middle| y \in Y \right\}$$

的一个勒贝格数. 根据勒贝格数引理, 对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 只要 $d_X(x_1, x_2) < \delta$, 就存在 $y \in Y$ 使得

$$\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

因此

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这说明 f 是一致连续的. □

定义 3.52 (孤立点) 设 x 是拓扑空间 X 中的一点. 若单点集 $\{x\}$ 是开的, 则称 x 是 X 中的孤立点.

定理 3.53 (孤立点与不可数性) 设 X 是非空的紧豪斯道夫空间. 若 X 没有孤立点, 那么 X 是不可数的.

推论 3.54 $\mathbb{R}$ 中的闭区间是不可数的.

3.6 极限点紧性与序列紧性

定义 3.55 (极限点紧空间) 若拓扑空间 X 的每个无限子集都有极限点, 则称 X 是极限点紧的.

定理 3.56 (紧 $\Longrightarrow$ 极限点紧) 紧空间一定是极限点紧空间.

证明 设 A 是紧空间 X 的子集且 A 没有极限点, 下证 A 是有限集.

因 $\overline{A} = A \cup A' = A$, 故 A 是闭的, 从而 A 作为紧空间的闭子空间也是紧的. 由于 A 没有极限点, 故对任意的 $a \in A$, 存在 a 的邻域 U_a 使得 $U_a \cap A = \{a\}$. 注意到 $\{U_a\}_{a \in A}$ 是 A 的一个开覆盖, 于是利用 A 的紧性可知其有一个有限子覆盖, 这说明 A 是有限的. □

定义 3.57 (序列紧) 若拓扑空间 X 中的每个序列都有收敛子列, 则称 X 是序列紧的.

定理 3.58 (三种紧性在可度量化空间中是等价的) 设 X 是可度量化空间, 那么下面各条是等价的:

(1) X 是紧的.

(2) X 是极限点紧的.

(3) X 是序列紧的.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由定理 3.56 即得.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 $x_1, x_2, \ldots$ 是 X 中的序列. 考虑集合

$$A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

若 A 是有限集, 则存在 $x \in X$ 使得对无限多个正整数 n 都有 $x_n = x$, 于是我们找到了一个常值子列, 它显然是收敛的. 若 A 是无限集, 由 X 的极限点紧性知 A 有极限点. 设 x 是 A 的一个极限点, 那么我们可以选取正整数 n_1 使得

$$x_{n_1} \in B(x, 1).$$

假定 $x_{n_{i-1}}$ 已经选好了. 注意到 X 是豪斯道夫空间, 因而也是 T_1 的, 故根据命题 2.41,

$$B\left(x, \frac{1}{i}\right)$$

含有 A 中的无限多个点. 于是可以选取正整数 $n_i > n_{i-1}$ 使得 $x_{n_i} \in B(x, 1/i)$. 至此我们得到了子列 $x_{n_i} \to x$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 我们分三步证明.

(i) 勒贝格数引理对序列紧度量空间也成立.

(ii) 若 X 是序列紧的, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, X 存在一个由 ε-开球组成的开覆盖.

(iii) 如果 X 是序列紧的, 那么 X 是紧的. □

3.7 局部紧性

定义 3.59 (局部紧) 设 X 为拓扑空间, $x \in X$. 若存在 x 的邻域 U 以及 X 的紧子空间 C 使得

$$U \subset C,$$

则称 X 在 x 处是局部紧的. 若 X 在每一点都是局部紧的, 则称 X 是局部紧的.

显然紧空间都是局部紧的. 需要注意的是, 不同的教材可能对局部紧的定义稍有区别, 但在豪斯道夫空间中这些定义都是等价的.

例 3.60 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧的.

定理 3.61 (局部紧豪斯道夫的刻画) 拓扑空间 X 是局部紧豪斯道夫的当且仅当存在拓扑空间 Y 满足:

(1) X 是 Y 的子空间.

(2) $Y - X$ 是单点集.

(3) Y 是紧豪斯道夫的.

此外, 若 Y 与 Y' 均为满足上述条件的空间, 那么存在从 Y 到 Y' 的同胚使得该同胚限制在 X 上是恒等映射.

证明 (1) 先证唯一性. 设

$$Y - X = \{p\}, \qquad Y' - X = \{q\}.$$

定义双射 $h : Y \to Y'$ 为

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in X, \\ q, & x = p. \end{cases}$$

• 若 $p \notin U$, 那么 U 是 X 中的开集. 而 X 又是 Y' 中的开集, 故 $h(U) = U$ 是 Y' 中的开集.

• 若 $p \in U$, 则 $C = Y - U \subset X$. 由于 C 是 Y 中的闭集且 Y 是紧的, 故 C 也是紧的. 由于 Y' 是豪斯道夫的, 故 C 是 Y' 中的闭集, 从而

$$h(U) = Y' - C$$

是 Y' 中的开集.

至此我们证明了 h 是开映射. 对称地我们可以得到 $h^{-1} : Y' \to Y$ 也是开映射, 从而 h 是同胚.

(2) $(\Longrightarrow)$ 设 ∞ 是任一不在 X 中的元素. 定义

$$Y = X \cup \{\infty\}.$$

为 Y 赋予拓扑

$$\{U \mid U \text{ 是 } X \text{ 中的开集}\} \cup \{Y - C \mid C \text{ 是 } X \text{ 中的紧集}\}. \tag{3.1}$$

需要说明如上定义确实给出了一个拓扑. 首先空集 $\varnothing$ 属于第一类集合, 全集 Y 属于第二类集合. 下面验证有限交封闭. 由于

$$U \cap (Y - C) = U \cap (X - C)$$

属于第一类集合, 因而是开的. 有限交的其余两种情况容易验证. 最后验证任意并封闭. 记 $U = \bigcup U_\alpha, C = \bigcap C_\beta$, 那么

$$\left(\bigcup U_\alpha\right) \cup \left(\bigcup (Y - C_\beta)\right) = U \cup (Y - C) = Y - (C - U)$$

属于第二类集合.

现在证明 X 是 Y 的子空间. 首先, 因为 $U \cap X = U$ 且 $(Y - C) \cap X = X - C$ 均为 X 中的开集, 故 Y 中开集与 X 的交都是 X 中的开集. 反之, 对 X 中的任意开集 U 而言, 因 $U = U \cap X$, 故 U 是 Y 中开集与 X 的交.

接下来证明 Y 是紧豪斯道夫的.

• 设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的一个开覆盖, 那么 $\mathcal{A}$ 中至少有一个开集形如 $Y - C$, 其中 C 是 X 中的紧集. 因此 $\mathcal{A} - \{Y - C\}$ 覆盖了 C. 注意到 C 是紧的, 故存在 $\mathcal{A}$ 的有限子收集仍覆盖了 C, 从而 $\mathcal{A}' \cup \{Y - C\}$ 是 Y 的有限子覆盖.

• 任取互异两点 $x, y \in Y$. 若 x, y 均在 X 中, 则由 X 的豪斯道夫性知存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 若 $x \in X, y = \infty$, 那么由 X 的局部紧性知存在 x 的邻域 U 与 X 中的紧集 C 使得 $U \subset C$. 注意到 U 与 $Y - C$ 分别是 x 与 y 的邻域且 $U \cap (Y - C) = \varnothing$, 因此我们证明了 Y 是豪斯道夫的.

($\Longleftarrow$) 因 Y 是豪斯道夫的且 X 是 Y 的子空间, 故 X 是豪斯道夫的, 因此我们只需证明 X 是局部紧的. 设 $Y - X = \{\infty\}$. 任取 $x \in X$, 由 Y 的豪斯道夫性知存在 x 的邻域 U 与 ∞ 的邻域 V 使得

$$U \cap V = \varnothing.$$

因为 $Y - V$ 是 Y 中的闭集, 而 Y 是紧的, 故 $Y - V$ 也是紧的. 注意到

$$x \in U \subset Y - V \subset X,$$

故 X 在 x 处是局部紧的. □

根据 Y 上的拓扑 (3.1), 我们有如下结论:

• 如果 X 自身是紧的, 那么 $\{\infty\} = Y - X$ 是 Y 中的 (第二类) 开集, 从而 ∞ 是 Y 的孤立点, 此时的空间 $Y = X \cup \{\infty\}$ 变得非常无趣.

• 如果 X 不是紧的, 那么 ∞ 的任意邻域 $Y - C$ 都含有 X 中的点, 因此 ∞ 是 X 的一个极限点, 从而 $\overline{X} = Y$.

定义 3.62 (紧化) 设 X 是紧豪斯道夫空间 Y 的真子空间. 若

$$\overline{X} = Y,$$

则称 Y 是 X 的紧化. 如果 $Y - X$ 是单点集, 则称 Y 是 X 的单点紧化.

定理 3.61 说明拓扑空间 X 有单点紧化当且仅当 X 是非紧的局部紧豪斯道夫空间.

例 3.63 (常见的单点紧化)

• 实直线 $\mathbb{R}$ 的单点紧化空间同胚于单位圆周 S^1.

• $\mathbb{R}^2$ 的单点紧化空间同胚于单位球面 S^2. 如果将 $\mathbb{R}^2$ 视为复平面 $\mathbb{C}$, 那么 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 称为扩充复平面或黎曼球面.

定理 3.64 (豪斯道夫空间中局部紧的刻画) 设 X 是豪斯道夫空间, 那么 X 是局部紧的当且仅当对任意的 $x \in X$ 以及 x 的任意邻域 U, 存在 x 的具有紧闭包的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $x \in X$ 以及 x 的邻域 U. 设 Y 是 X 的单点紧化. 由于 $Y - U$ 是 Y 中的闭集, 而 Y 是紧的, 故 $Y - U$ 是紧的. 根据引理 3.33, 我们可以通过开集分离点 x 与紧子集 $Y - U$, 即存在 x 的邻域 V 与包含 $Y - U$ 的开集 W 使得 $V \cap W = \varnothing$, 于是 $V \subset Y - W$. 注意到 $Y - W$ 是闭集, 因此 $\overline{V} \subset Y - W$. 又因为 $\overline{V}$ 是紧空间 Y 的闭子空间, 故 $\overline{V}$ 是紧的. 至此我们找到了 x 的具有紧闭包的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset Y - W \subset U.$$

($\Longleftarrow$) 显然. □

利用定理 3.64 我们可以得到局部紧豪斯道夫空间中的一些有用结论.

推论 3.65 (紧闭包开集的存在性) 设 X 是一个局部紧豪斯道夫空间, U 是其中的开集, K 是含于 U 的紧集, 那么存在一个具有紧闭包的开集 V 使得

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

证明 任取 $x \in K \subset U$, 那么 U 是 x 的邻域. 根据定理 3.64, 存在 x 的具有紧闭包的邻域 V_x 使得

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U.$$

因为 $\{V_x\}_{x\in K}$ 是 K 的开覆盖, 故存在 $x_1, \ldots, x_n \in K$ 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$ 也覆盖了 K. 从而

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}} \subset U.$$

由于紧集的有限并仍是紧的, 故取 $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$ 即可. □

推论 3.66 (局部紧豪斯道夫空间的继承性) 局部紧豪斯道夫空间的开子空间与闭子空间也是局部紧豪斯道夫的.

证明 设 A 是局部紧豪斯道夫空间 X 的子空间.

(1) 若 A 是闭的. 任取 $x \in A$, 因 X 是局部紧的, 故由定义 3.59 知存在 x 的邻域 U 以及紧集 $C \subset X$ 使得 $U \subset C$. 因为 C 是闭的, 故根据命题 2.26, $C \cap A$ 是紧空间 C 中的闭集, 因而也是紧的. 注意到 $C \cap A$ 包含了 x 在 A 中的邻域 $U \cap A$, 于是根据定义 3.59 知 A 是局部紧的.

(2) 若 A 是开的. 任取 $x \in A$, 那么 A 是 x 的邻域, 从而根据定理 3.64, 在 X 中存在具有紧闭包的开集 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset A.$$

注意到 V 也是 A 中的开集, 而 $\overline{V}$ 是紧的, 故由定义 3.59 可知 A 是局部紧的. □

推论 3.67 (局部紧豪斯道夫的又一种刻画) 设 X 是拓扑空间, 那么 X 是局部紧豪斯道夫的当且仅当 X 同胚于一个紧豪斯道夫空间的开子空间.

证明 ($\Longrightarrow$) 定理 3.61. ($\Longleftarrow$) 推论 3.66. □

4 可数性与分离性

4.1 可数性

回忆一下, 在 2.11 节我们已经给出了第一可数空间的定义, 并给出了相应的序列引理以及序列收敛刻画连续性的结论. 相关内容复述如下:

定义 4.1 (第一可数空间) 设 x 是拓扑空间 X 中的一点. 若存在 x 的可数个邻域 $\{U_n\}$ 使得对 x 的任意邻域 U, 都存在某个 n 使得 $U_n \subset U$, 则称 X 在 x 处有一个可数基. 若 X 在每一点处都有一个可数基, 则称 X 是第一可数的.

引理 4.2 (序列引理) 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 若 A 中存在一个收敛于 x 的序列, 那么 $x \in \overline{A}$. 此外, 若 X 是第一可数的, 那么逆命题也成立.

定理 4.3 (序列收敛刻画连续性) 设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射. 若 f 连续, 那么对 X 中任一收敛到 x 的序列 $\{x_n\}$, Y 中的序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$. 此外, 若 X 是第一可数的, 那么逆命题也成立.

现在我们给出第二可数性的概念.

定义 4.4 (第二可数空间) 若拓扑空间 X 有一个可数基, 则称 X 是第二可数的.

显然第二可数性蕴含第一可数性. 另外, 每个度量空间都是第一可数的, 但并非所有度量空间都第二可数.

例 4.5 实直线 $\mathbb{R}$ 有可数基

$$\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

类似地, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 有可数基

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \,\middle|\, a_i, b_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

(注意例 2.84 给出了欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的另一种可数基.) $\mathbb{R}^\omega$ 有可数基

$$\left\{\prod_{i=1}^{\infty} U_i \,\middle|\, \text{对有限个 } i \text{ 有 } U_i = (a_i, b_i), a_i, b_i \in \mathbb{Q}, \text{其余的 } i \text{ 满足 } U_i = \mathbb{R}\right\}.$$

我们马上就能看到, 两种可数性关于子空间与可数乘积都有很好的表现.

定理 4.6 (第一/第二可数的继承性与可乘性)

(1) 第一可数空间的子空间也是第一可数的. 可数个第一可数空间的乘积也是第一可数的.

(2) 第二可数空间的子空间也是第二可数的. 可数个第二可数空间的乘积也是第二可数的.

定义 4.7 (稠密子集, 可分空间) 设 X 为拓扑空间.

- 若子集 $A \subset X$ 满足 $\overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中是稠密的.
- 若 X 有一个可数的稠密子集, 则称 X 是可分的.

定义 4.8 (林德洛夫空间) 若拓扑空间 X 的每个开覆盖都有可数子覆盖, 则称 X 是一个林德洛夫空间.

定理 4.9 (第二可数 $\Longrightarrow$ 可分 + 林德洛夫) 第二可数空间必为可分的林德洛夫空间.

4.2 分离性

前面我们已经学习了一种分离性——豪斯道夫性. 接下来我们将介绍几种更强的分离性.

回忆一下, 我们把有限集都是闭集的拓扑空间称为 T_1 空间.

定义 4.10 (正则空间, 正规空间) 设 X 是一个 T_1 空间.

- 若对任意的 $x \in X$ 以及不包含 x 的闭集 C, 均存在开集 U, V 使得 $x \in U, C \subset V$ 且

$$U \cap V = \varnothing,$$

则称 X 是正则的.

• 若对任意不相交的闭集 C, D, 都存在开集 U, V 使得 $C \subset U, D \subset V$ 且

$$U \cap V = \varnothing,$$

则称 X 是正规的.

我们在上述定义中要求 X 是 T_1 的, 这保证了正则空间一定是豪斯道夫的且正规空间一定是正则的.

定理 4.11 (正则/正规空间的等价刻画) 设 X 是一个 T_1 空间, 那么

(1) X 是正则的当且仅当对任意的 $x \in X$ 与 x 的任意邻域 U, 存在 x 的邻域 V 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

(2) X 是正规的当且仅当对任意的闭集 C 与包含 C 的开集 U, 存在开集 V 使得

$$C \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

定理 4.12 (豪斯道夫空间与正则空间的继承性与可乘性)

(1) 豪斯道夫空间的子空间仍是豪斯道夫的; 豪斯道夫空间的任意乘积仍是豪斯道夫的.

(2) 正则空间的子空间仍是正则的; 正则空间的任意乘积仍是正则的.

正规空间没有与定理 4.12 类似的结论. 事实上后面我们将会看到, 正规空间的子空间未必是正规的, 正规空间的乘积也未必是正规的.

4.3 正规空间

现在我们给出三种非常重要的正规空间.

定理 4.13 (第二可数 + 正则 $\Longrightarrow$ 正规) 第二可数的正则空间一定是正规的.

定理 4.14 (可度量化 $\Longrightarrow$ 正规) 可度量化空间一定是正规的.

定理 4.15 (紧豪斯道夫 $\Longrightarrow$ 正规) 紧豪斯道夫空间一定是正规的.

关于正规性我们还有一个有用的结果.

定理 4.16 带有序拓扑的良序集都是正规的.

事实上, 带有序拓扑的线性序集都是正规的, 但我们用不到这么广泛的结论.

例 4.17 若指标集 J 不可数, 那么 $\mathbb{R}^J$ 不是正规的. 此例说明

- 正则空间不一定正规.
- 正规空间的子空间不一定正规. (因为 $\mathbb{R}^J$ 同胚于 $[0,1]^J$ 的子空间 $(0,1)^J$, 而由 Tychonoff 定理知 $[0,1]^J$ 是紧豪斯道夫的, 故 $[0,1]^J$ 是正规的.)
- 正规空间的不可数乘积不一定正规.

例 4.18 $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ 不是正规的. 此例说明两个正规空间的乘积不一定正规.

4.4 乌雷松引理

定理 4.19 (乌雷松引理) 设 X 是一个正规空间, A, B 是 X 中的不相交闭集. 考虑 $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[a,b]$, 那么存在连续映射

$$f : X \to [a,b]$$

使得

$$f(A) = \{a\} \quad \text{且} \quad f(B) = \{b\}.$$

定义 4.20 设 A, B 是拓扑空间 X 的子集. 若存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得

$$f(A) = \{0\} \quad \text{且} \quad f(B) = \{1\},$$

则称子集 A 与 B 可以通过连续函数分离.

采用定义 4.20 的术语, 乌雷松引理说明正规空间中的任意两个不相交闭集不仅能够用两个开集分离开来, 还可以通过连续函数进行分离. 反之, 若两个不相交的闭集 A, B

可以通过连续函数 $f : X \to [0,1]$ 分离开来, 那么

$$A \subset f^{-1}([0,1/2)), \qquad B \subset f^{-1}((1/2,1]).$$

从而 A 与 B 被开集 $f^{-1}([0,1/2))$ 与 $f^{-1}((1/2,1])$ 分离了. 即是说: 拓扑空间 X 是正规的当且仅当 X 中的任意两个不相交闭集都可用连续函数分离 (因此乌雷松引理实际上是一个充要条件).

定义 4.21 (完全正则空间) 设 X 为 T_1 空间. 若对任意的 $x_0 \in X$ 以及不包含 x_0 的闭集 $A \subset X$, 都存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得

$$f(x_0) = 1 \quad \text{且} \quad f(A) = \{0\},$$

则称 X 是完全正则的.

简单来说, 完全正则空间就是点与闭集可以通过连续函数分离开来的空间.

完全正则空间一定是正则的, 因为 $f^{-1}([0,1/2))$ 是包含 A 的开集, 而 $f^{-1}((1/2,1])$ 是含有 x_0 的开集, 它们互不相交. 此外根据乌雷松引理, 正规空间一定是完全正则的. 至此, 我们可以将所学的各种分离性由弱到强排序为

$$T_1 \Longleftarrow \text{豪斯道夫 } (T_2) \Longleftarrow \text{正则 } (T_3) \Longleftarrow \text{完全正则 } (T_{3\frac{1}{2}}) \Longleftarrow \text{正规 } (T_4).$$

(这里的字母“T”来自德语“Trennungsaxiom”, 意为“分离公理”.)

不同于正规性, 完全正则性在考虑子空间与乘积空间时具有良好的表现.

定理 4.22 (完全正则空间的继承性与可乘性) 完全正则空间的子空间仍是完全正则的; 完全正则空间的任意乘积也是完全正则的.

4.5 乌雷松度量化定理

定理 4.23 (乌雷松度量化定理) 第二可数的正则空间是可度量化的.

定理 4.24 (嵌入定理) 设 X 为 T_1 空间, $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in J}$ 是一族连续映射. 若对任

意的 $x_0 \in X$ 以及 x_0 的邻域 U, 存在 $\alpha \in J$ 使得

$$f_\alpha(x_0) > 0 \quad 且 \quad f_\alpha(X - U) = \{0\},$$

那么映射

$$F : X \to \mathbb{R}^J, \qquad F(x) = \big(f_\alpha(x)\big)_{\alpha \in J}$$

是一个嵌入. 若对每个 $\alpha \in J$, 映射 f_α 均把 X 映到 $[0,1]$ 中, 那么 F 把 X 嵌入到了 $[0,1]^J$ 内.

4.6 Tietze 延拓定理

定理 4.25 (Tietze 延拓定理) 设 X 为正规空间, A 是 X 的闭子空间, 那么

(1) 每个连续映射 $A \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ 都可以延拓为连续映射 $X \to [a,b]$.

(2) 每个连续映射 $A \to \mathbb{R}$ 都可以延拓为连续映射 $X \to \mathbb{R}$.

4.7 流形的嵌入

定义 4.26 (流形) 设 X 是一个第二可数的豪斯道夫空间. 若 X 的每一点都存在邻域同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 则称 X 是一个 m 维流形.

1 维流形常称为曲线, 2 维流形常称为曲面.

定义 4.27 (支撑集) 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是拓扑空间 X 上的函数, 则称

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

为 f 的支撑集.

根据支撑集的定义不难看出若 $x \notin \operatorname{supp}(f)$, 那么存在 x 的邻域 U 使得

$$f(U) = \{0\}.$$

我们将证明每一个紧流形都可以嵌入到有限维欧氏空间中 (实际上非紧的流形也能做到, 但相关的证明更加复杂), 为此需要做一些准备工作.

定义 4.28 (单位分解) 设 $\{U_i\}_{i=1}^n$ 是拓扑空间 X 的一个有限开覆盖, $\phi_i : X \to [0,1]$ $(n = 1, \ldots, n)$ 是 X 上的 n 个函数. 若

(1) $\operatorname{supp}(\phi_i) \subset U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ $(\forall x \in X)$.

则称函数族 $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ 是从属于开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^n$ 的一个单位分解.

定理 4.29 (单位分解的存在性) 正规空间的有限开覆盖必存在相应的单位分解.

定理 4.30 (紧流形可嵌入有限维欧氏空间) 设 X 是紧 m 维流形, 那么存在某个正整数 N 使得 X 可以嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中.

5 Tychonoff 定理

5.1 Tychonoff 定理

定理 5.1 (Tychonoff 定理) 任意多个紧空间的乘积仍是紧空间.

5.2 Stone-Čech 紧化