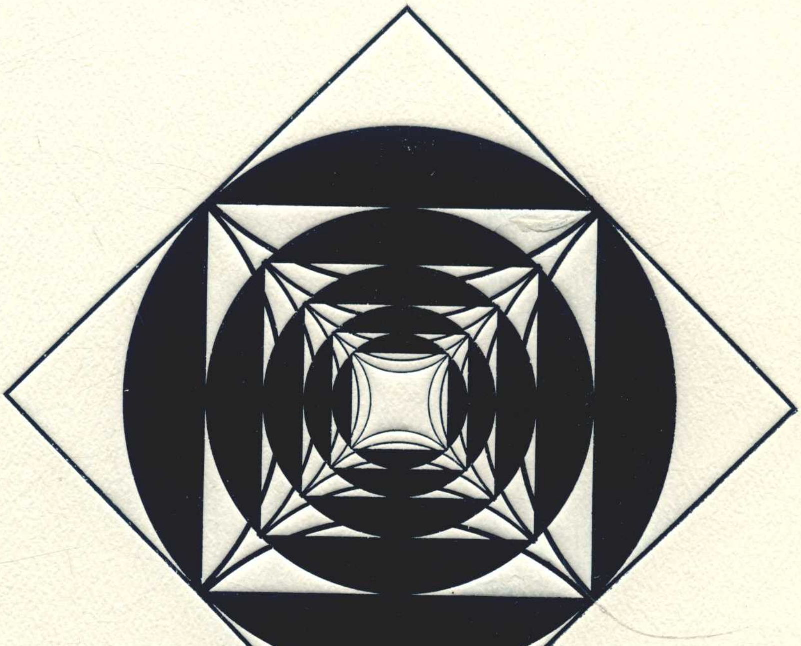
泛函分析讲义

Functional Analysis

许全华　马涛　尹智　编著



3

高等教育出版社

ISBN 978-7-04-047456-5
9 787040 474565 >
定价 31.00元
2017

泛函分析

Functional Analysis

许全华　马涛　尹智　编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书系统讲授泛函分析的基本内容，共分为 11 章。全书内容形成一个有层次感、节奏明快的体系，按章节顺序，分别讲解点集拓扑基础知识、度量空间的完备性和紧性理论、赋范空间理论、Hilbert 空间理论、函数空间理论（主要涉及 Ascoli 定理和 Stone-Weierstrass 定理）、Baire 定理及其应用（包括 Banach-Steinhaus 定理以及开映射和闭图像定理等泛函分析中最基本的定理）、Hahn-Banach 定理（在该部分也介绍弱拓扑和弱 * 拓扑的概念与相应理论）、Banach 空间的对偶理论、正则 Borel 测度和 Riesz 表示定理、紧算子的谱理论。本书内容主题特别明确，各章篇幅简练、理论完备。并且，本书提供的习题从内容到形式也极具特色，部分习题反映了近期理论研究的热点问题。

本书可作为综合性大学数学类专业本科生和研究生“泛函分析”课程的教材和参考书，也可供部分数学及相邻学科研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析讲义 / 许全华，马涛，尹智编著. -- 北京：高等教育出版社，2017. 8

ISBN 978-7-04-047456-5

Ⅰ. ①泛… Ⅱ. ①许… ②马… ③尹… Ⅲ. ①泛函分析－高等学校－教材 Ⅳ. ① O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 027901 号

泛函分析讲义
Fanhan Fenxi Jiangyi

策划编辑 田 玲　　责任编辑 田 玲　　封面设计 张申申　　版式设计 徐艳妮
责任校对 陈 杨　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	山东临沂新华印刷物流集团		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm × 960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	16.5		
字　　数	290 千字	版　　次	2017 年 8 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	31.00 元

物 料 号　47456-00

许全华

1961 年 3 月出生，国家“千人计划”特聘专家，法国弗朗仕—孔泰大学特级教授，法国大学研究院资深研究员，现任职于哈尔滨工业大学。许全华一直活跃于国际数学领域前沿，不断拓广和更新自己的研究方向，已发表学术论文 70 多篇，其中一些是开创性的奠基工作或有重大突破性的工作。他的许多文章发表于国际一流刊物上，如：*Invent. Math.*，*J. Amer. Math. Soc.*，*Duke. Math. J.*，*Adv. Math.*，*J. Reine Angew. Math.* 等。特别是近十多年，他在量子概率、算子空间及调和分析方面等有很多创新性的工作。除本书外，许全华还与吐尔德别克、陈泽乾有一本专著《算子代数与非交换 *Lp* 空间引论》。

前　言

泛函分析是由 Fredholm, Hilbert, Fréchet, Banach, Hahn 和 Wiener 这些伟大的数学家在 20 世纪初奠定的, 随后得到巨大发展并具有广泛应用的一门数学学科。通常, 我们可以直接把泛函分析理解为从对经典的欧氏空间上函数理论的研究过渡到对抽象的无限维向量空间上函数理论的研究, 这和向量空间的拓扑结构形成的各种理论体系紧密相关, 例如具体的 Hilbert 空间、Banach 空间或局部凸拓扑向量空间理论等。迄今为止, 泛函分析已经经历了一个多世纪的蓬勃发展, 形成了诸多方面的主题和极为丰富的研究方向, 现在仍然有许多活跃的研究领域。泛函分析最初的很多问题直接涉及调和分析、复分析以及积分和微分方程中出现的具体问题。正是在这些问题和相应理论的驱动下, 泛函分析建立了现代分析数学的重要理论框架。这个框架已经成为很多数学学科的理论基础, 比如现代调和分析、多元复分析、偏微分方程、算子代数以及量子力学的数学基础等; 并且它还与诸多学科相互交叉联系, 形成了一些新的研究领域, 比如金融数学、量子概率、数值分析和非交换几何, 等等。所以, 泛函分析这门课程成了数学类专业和某些应用数学专业的必修课程, 是学习后续课程必不可少的基础。

泛函分析已经有许多优秀的教材 (如 [1], [2], [7] 和 [11] 等), 这些也正是我们编写教材的重要参考。但本教材从作者自己的教学实践出发, 有很多不同于已有教材的特点。我们编排教材的基本思想, 一是清晰地展现泛函分析的基本理论, 形成一个有层次感、明快的体系, 使学生能够系统地掌握泛函分析的主要理论; 二是体现一定的理论深度, 有利于学生进一步学习; 三是体现理论的价值, 展现问题的来源和应用, 以使抽象理论和具体问题之间的关系得到比较好的诠释。

这些想法是我们进行内容选择和编排的依据。首先, 我们尽快展示所需要的知识。比如在第一章, 我们给出了学习中必需的点集拓扑基础知识, 在本章内容的基础上, 学生即使没有点集拓扑学的预备知识也可以进行本书内容的学习; 第二章补充了度量空间上完备性和紧性的理论。这些知识对学习泛函分析是必需的, 实际上泛函分析与有限维线性代数的主要区别就在于它们所涉及的拓扑。有限维向量空间上的拓扑本质上只有一个, 而无穷维向量空间上的拓扑要复杂得多。比如在考虑对偶空间理论时, 我们将面临多种不同形式的拓扑, 如强拓扑、弱拓扑和弱 * 拓扑等。而度量空间的完备性和紧性是泛函分析中很多重要理论需要的条件。

其次, 在内容结构安排上, 我们充分体现各部分内容之间内在的逻辑联系。比如第一章和第二章分别介绍了拓扑空间和度量空间后, 在第三章和第四章相继讨论了 Banach 空间和 Hilbert 空间这两种极具代表性的空间。从第一章到第四章, 我们所采用的是从一般到特殊的逻辑顺序, 这样可以直接把前面部分的理论应用到后面的内容, 也避免了概念的重复。在第五章, 我们给出了与拓扑空间的紧性及可分性密切相连的两类重要定理, 即 Ascoli 定理和 Stone-Weierstrass 定理。在第六章, 我们给出泛函分析中的几个极具理论价值的完备性定理, 它们是 Baire 定理、Banach-Steinhaus 定理以及开映射和闭图像定理。第七章过渡到一般的拓扑向量空间理论, 这极大地扩展了泛函分析中空间的具体形式, 同时也为对偶理论的研究奠定了必不可少的理论基础。第八章和第九章可以看作同一个主题, 即对偶理论。第八章建立的 Hahn-Banach 定理, 是 Banach 空间理论最重要的定理, 它为我们讨论内容丰富的对偶和共轭理论打下了坚实的基础。第十章讨论正则 Borel 测度和 Riesz 表示定理, 该部分仍然属于对偶空间理论; Riesz 表示定理把线性泛函和测度 (或积分) 的刻画联系起来, 这是泛函分析中关于对偶理论的一个深刻结果。在第十一章, 我们介绍了算子谱集的概念, 并且讨论了 Hilbert 空间上自伴紧算子的谱分解定理, 这实际上是算子共轭理论的重要结果。由此可见, 从第七章到第十一章有一条清晰的研究路线、明确的研究主题。

为了使各部分内容紧凑、简洁明了, 我们要求每章的篇幅都不大, 但内容主题特别明确, 理论也足够完备。不过这将不可避免地要舍弃一些同样有意义的内容。比如我们仅讨论了 Banach 空间情形的开映射和闭图像定理; 在拓扑向量空间理论中, 关于拓扑向量的诸多性质, 如有界性、可度量化和可赋范性等并没有在正文中出现; 在对偶和算子谱理论中, 我们主要具体讨论了 Hilbert 空间上自伴紧算子这一种情形, 更不用说蓬勃发展的现代算子代数 (C^* 代数和 von Neumann 代数等) 理论中的丰富内容。其实, 我们给出算子谱理论这部分内容的主要目的, 一是展示共轭理论的重要应用, 更是为学生以后学习如算子理论、算子代数、现代调和分析和偏微分方程等内容打下基础。而其他一些在正文中舍弃的部分, 我们往往通过习题把它们展现出来, 这就要说到我们所提供的习题的特色。

这些习题的第一个特色是内容丰富新颖、从简到难, 部分习题反映了近期理论研究的热点问题。第二个特点是我们的习题在设计上不是一个简单的命题, 而是从条件到结论分为不同的步骤, 为学生提供一个相对清晰的证明思路。这样即使是一些深刻的结论在我们题目的设计下也可以在掌握基础知识后得到处理。根据我们的教学实践, 这样一来可以让学生自己处理很多有意思的问题, 二来可以激发他们研究问题的兴趣。

最后要说的是, 我们注重理论的来源和应用。特别地, 我们在正文和习题中的多处展示了泛函分析理论和调和分析 (或称 Fourier 分析) 问题的联系, 这是因为 Fourier 分析中的一些基本问题贯穿在泛函分析的理论研究中, 而一些泛函分析的基本结论直接可以应用到解决调和分析的问题中去。书中正文和习题中所涉及的内容, 已经基本展现了 Fourier 分析经典理论的中心内容。

因为泛函分析研究的是具有代数和拓扑结构的无穷维空间上的分析问题, 所以学习这一课程需要有一定的代数、拓扑和分析学的基础, 这要求学生熟悉实变函数论, 特别是 Lebesgue 积分理论。虽然我们在书中注重补充一些必要的知识, 但预先有一定的基础知识对学习定会起到事半功倍的效果。既然泛函分析理论具有高度的抽象性和普适性, 故我们建议数学类专业高年级的学生来学习这门课程。

本书材料的来源是我多年的讲稿, 部分内容基于我在法国弗朗仕 — 孔泰大学为本科生开设的泛函分析法语讲稿, 但因学时原因, 内容远没有本书的内容丰富。而本书所有的内容都源于我对武汉大学基地班 (2011—2012 春季) 和弘毅班 (2013—2015 春季) 开设的泛函分析课程上使用的英文讲稿, 经马涛和尹智两位老师翻译整理而成。值得一提的是, 对每章后的习题, 我们首先让学生自己在习题课上逐题讲解, 然后我们评点他们的解答并和他们展开讨论, 直至所有学生理解每个习题的方方面面。这样的习题课, 虽花费了大量时间, 但根据我们的经验, 效果极佳。

在本书的撰写过程中, 很多师生提出了宝贵的意见。特别是初稿完成后, 陈泽乾研究员、王茂发教授、洪桂祥博士和熊枭博士仔细阅读了初稿, 并给出了具体的修改意见。在此, 一并向他们表示衷心感谢, 并真诚欢迎读者批评指正!

许全华

2017 年春于哈尔滨

目　录

符 号 表

- $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 表示自然数集. $\mathbb{Z}$ 表示整数集. $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 表示除零之外的自然数集, 即正整数集. $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域和复数域, 而 $\mathbb{K}$ 表示数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集. $\mathbb{Q}$ 表示有理数集.
- 用大写字母 $E,F,\cdots$ 表示集合、拓扑空间、度量空间或赋范空间. 子集 (子空间) 用 $A,B,\cdots$ 表示.
- 用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合中的元素.
- $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 表示序列 $(x_1,x_2,\cdots)$, 简记作 (x_n).
- $\mathcal{P}(E)$ 表示集合 E 所有的子集构成的集族, 注意空集 $\varnothing$ 属于 $\mathcal{P}(E)$. $\mathcal{P}(E)$ 中的包含关系是一种偏序关系, $\varnothing$ 和 E 分别是此偏序集中的最小元和最大元.
- 若 $A\subset E$, 则 $A^c=E\setminus A$ 表示 A 的补集.
- 设 $f:E\to F$ 是映射, 且有 $A\subset E$, 则 f 在 A 上的限制记为 $f\big|_A$.
- 对任意映射 $f:E\to F$, 设 $A\in\mathcal{P}(E),B\in\mathcal{P}(F)$, 则 $f(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 分别表示映射 f 关于 A 的像集和映射 f 关于 B 的原像集. 注意对任意集族 $(B_i)_{i\in I}\subset\mathcal{P}(F)$, 有

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i),$$
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I}B_i\Big)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i),$$
$$f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c.$$

- 设 (E,d) 是度量空间, d 是其上的距离. $B(x,r)$ 和 $\overline{B}(x,r)$ 分别表示 E 中的中心在 x、半径为 r 的开球和闭球, 即 $B(x,r)=\{y\in E:d(x,y)<r\}$, $\overline{B}(x,r)=\{y\in E:d(x,y)\leqslant r\}$. 当我们要强调距离为 d 时, 可分别表示为 $B_d(x,r)$ 和 $\overline{B}_d(x,r)$.
- 设 E 和 F 是两个集合, $\mathrm{Hom}(E,F)$ 表示从 E 到 F 的所有映射构成的集合. 如果 E 和 F 都是拓扑空间, 则 $C(E,F)$ 表示 $\mathrm{Hom}(E,F)$ 中所有的连续映射构成的子集.
- 集合 E 上的恒等映射记为 I_E.
- 集合 E 的子集 A 的示性函数记为 $\mathbb{1}_A$.

- 设 E 和 F 都是向量空间, $\mathcal{L}(E,F)$ 表示从 E 到 F 的所有线性映射构成的集合. 若 $u\in\mathcal{L}(E,F)$, $\ker(u)$ 表示 u 的核空间, $\mathrm{Im}(u)$ 表示 u 的值域.
- 设 E 是向量空间以及 $A\subset E$. $\mathrm{span}(A)$ 表示 A 在 E 中的线性扩张, 即所有 A 中元素的有限线性组合的全体.
- 设 $(E,\|\cdot\|)$ 表示赋范空间, $B_E=B_E(0,1)$ 表示 E 中开单位球, 而闭单位球即为 $\overline{B}_E=\overline{B}_E(0,1)$.
- 设 E 和 F 都是赋范空间, $\mathcal{B}(E,F)$ 表示从 E 到 F 的所有连续线性映射构成的集合.
- 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, $E^*=\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ 表示 E 的 (拓扑) 对偶空间, 它也是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间.
- 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

第一章 拓扑空间简介

拓扑空间是泛函分析的重要基础, 为此本章介绍一些拓扑空间理论的基本内容. 这里所说的拓扑指点集拓扑, 它为分析学中所涉及的收敛和连续性等问题建立了一个广泛的基础. 从欧氏 (Euclid) 空间 $\mathbb{R}^n$ 开始, 拓扑空间可以看成是度量空间的进一步扩展 (第二章专门介绍度量空间). 注意度量空间并不能完全表达我们在泛函分析中所遇到的空间拓扑结构, 典型的例子是弱拓扑和弱 * 拓扑等.

§1.1 先介绍拓扑空间的基本概念, 如开集、闭集、邻域、粘着点、内点、闭包和内部等; §1.2 考虑收敛序列和连续映射, 后者是联系不同拓扑空间的重要工具; 在 §1.3, 我们研究集合的分离性和紧性等, 这些概念往往是把我们熟悉的 $\mathbb{R}^n$ 空间理论推广到拓扑空间的重要性质; 最后 §1.4 讨论乘积拓扑. 我们力求读者能尽快地接受拓扑空间的基本框架, 掌握点集拓扑的一些基本概念和理论.

§1.1 基本概念

此节介绍一般拓扑学的基本概念, 我们分为四个小节来讨论.

1.1.1 开集, 闭集和邻域系

定义 1.1.1 设 E 是一个集合, 称 E 的子集族 τ (即 $\tau \subset \mathcal{P}(E)$) 是一个*拓扑*, 如果 τ 满足如下条件:

(O_1) $E \in \tau$ 且 $\varnothing \in \tau$.

(O_2) τ 中任意多个元素的并仍然是 τ 中元素 (即满足**任意并**性质).

(O_3) τ 中有限个元素的交仍然是 τ 中元素 (即满足**有限交**性质).

称 τ 中的元素为*开集*, 并称 (E,τ) (或简单地称 E) 为*拓扑空间*.

例 1.1.2 (1) $\tau = \{\varnothing, E\}$ 是 E 上的拓扑, 称为*平凡拓扑*.

(2) $\tau = \mathcal{P}(E)$ 是 E 上的拓扑, 称为*离散拓扑*.

例 1.1.3 (度量空间) 设 E 是一个非空集合, d 是定义在 $E \times E$ 上的实值函数, 若任取 $x, y, z \in E$, 满足

(1) **非负性**: $d(x,y) \geqslant 0$;

(2) **正定性**: $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(3) **对称性**: $d(x,y)=d(y,x)$;

(4) **三角形不等式**: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则称 d 是集合 E 上的一个度量 (或称距离), 并称 (E,d) 为度量空间.

设 (E,d) 是一个度量空间, E 上子集族 τ 定义为: 设 U 是 E 的子集, $U\in\tau$ 当且仅当任取 $x\in U$, 存在 $r>0$, 使得 $B(x,r)\subset U$ (其中 $B(x,r)$ 表示中心在 x、半径为 r 的开球, 即 $B(x,r)=\{y\in E: d(y,x)<r\}$). 容易证明 τ 是 E 上的一个拓扑, 并称 τ 为由距离 d 诱导的拓扑.

定义 1.1.4 若 E 上的拓扑 τ 可由一个距离 d 诱导, 则称 (E,τ) 是一个可度量化空间.

注 1.1.5 同一个拓扑能被不同的距离诱导 (甚至是无限个). 例如, 设 d 是 E 上的一个距离, 则 $d, \min\{1,d\}$ 和 rd $(r>0)$ 都诱导出 E 上相同的拓扑. 第二章将详细介绍度量空间.

定义 1.1.6 设 (E,τ) 是一个拓扑空间, $A\subset E$. 若 A 的补集 A^c 是关于拓扑 τ 的开集, 则称 A 是关于拓扑 τ 的闭集.

由开集和闭集的互补关系, 我们立即给出闭集的如下基本性质.

定理 1.1.7 设 (E,τ) 是一个拓扑空间, 则有

(F_1) E 和 $\varnothing$ 都是闭集.

(F_2) 任意多个闭集的交仍然是闭集 (即闭集满足**任意交**性质).

(F_3) 有限多个闭集的并仍然是闭集 (即闭集满足**有限并**性质).

注 1.1.8 我们可以用上一定理中的性质 (F_1)—(F_3) 来定义 E 上的拓扑 $\mathcal{F}$, 那么称 $\mathcal{F}$ 中的元素为闭集, 并称它们的补集为开集.

注意: 无限多个开集的交不一定是开集, 无限多个闭集的并不一定是闭集.

定义 1.1.9 设 (E,τ) 是一个拓扑空间, $x\in E$.

(1) 若 E 中子集 V 满足: 存在开集 $U\in\tau$, 使得 $x\in U$ 且 $U\subset V$, 则称集合 V 为 x 的邻域. 并且用 $\mathcal{N}(x)$ 表示 x 点处所有的邻域构成的集族, 称之为 x 的邻域系.

(2) 若 $\mathcal{B}(x)$ 为 $\mathcal{N}(x)$ 的子集族, 并且满足对任意 $V\in\mathcal{N}(x)$, 存在 $U\in\mathcal{B}(x)$, 使得 $U\subset V$, 则称 $\mathcal{B}(x)$ 为 x 的邻域基 (或称基础邻域系).

例 1.1.10 (1) $\mathcal{N}(x)$ 是 x 处的邻域基.

(2) 含有 x 的所有开集族是 x 的一个邻域基. 但是, 由 x 所有的闭邻域构成的集族不一定是 x 的一个邻域基.

(3) 设 (E,d) 是一个度量空间, 其拓扑由 d 诱导. $x \in E$. $\mathcal{B}(x)$ 表示所有中心在 x、半径为 $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ 的开球构成的集族. 容易验证 $\mathcal{B}(x)$ 是 x 的邻域基.

下面的定理自然成立.

定理 1.1.11 设 E 是一个拓扑空间, $x \in E$, 则有下述性质:

(1) $V \in \mathcal{N}(x) \Rightarrow x \in V$.

(2) $V \in \mathcal{N}(x), U \supset V \Rightarrow U \in \mathcal{N}(x)$.

(3) $\mathcal{N}(x)$ 中有限个元素的交仍然属于 $\mathcal{N}(x)$.

(4) 对任意 $V \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $U \in \mathcal{N}(x)$, 满足 $U \subset V$ 且任取 $y \in U$, 有 $U \in \mathcal{N}(y)$.

在上面的性质 (4) 中, 当 $V \in \mathcal{N}(x)$ 时, 存在开集 $U \in \tau$, 满足 $x \in U \subset V$, 而开集是它里面每一个点的邻域, 故结论成立. 实际上它刻画了开集的性质, 见下面的定理.

定理 1.1.12 设 (E,τ) 是一个拓扑空间且对任意的 $x \in E, \mathcal{B}(x)$ 是 x 的邻域基, $U \subset E$. 那么 U 是开集当且仅当任取 $x \in U$, 存在 $V \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $V \subset U$. 因此, U 是开集当且仅当它是其任一点的邻域.

证明 首先假设 U 是开集, 任取 $x \in U$, 因 $U \subset U$, 故 $U \in \mathcal{B}(x)$.

反过来, 若任取 $x \in U$, 存在 $V \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $V \subset U$, 则存在开集 O_x, 满足

$$x \in O_x \subset V \subset U.$$

因此可得

$$U = \bigcup_{x \in U} O_x,$$

这意味着 U 也是开集. ■

实际上, 集合 E 上的拓扑可由其上的邻域基唯一确定, 并且邻域基也可预先由公理约定.

定理 1.1.13 设 E 为非空集合, 若对任意 $x \in E$, $\mathcal{B}(x)$ 表示相应于 x 的由 E 的子集构成的非空集族, 且满足:

(B_1) 任取 $V \in \mathcal{B}(x)$, 有 $x \in V$.

(B_2) 任取 $(U,V) \in \mathcal{B}(x) \times \mathcal{B}(x)$, 存在 $W \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $W \subset U \cap V$.

(B$_3$) 任取 $V \in \mathcal{B}(x)$, 总存在 $U \subset V$ 满足 $x \in U$ 并且对所有的 $y \in U$, 存在 $W \in \mathcal{B}(y)$, 使 $W \subset U$.

那么存在 E 上唯一的拓扑 τ 使得对每一个 $x \in E$, $\mathcal{B}(x)$ 是 x 关于拓扑 τ 的邻域基.

证明 注意到任一拓扑下的邻域基必然满足定理 1.1.13 中的条件 (B$_1$)—(B$_3$), 我们可以定义拓扑 τ 如下:

$$O \in \tau \iff O = \varnothing \text{ 或 } \forall x \in O,\ \exists U \in \mathcal{B}(x),\ \text{使得 } U \subset O. \tag{1.1}$$

容易验证仅由条件 (B$_1$) 和 (B$_2$) 即可保证如此定义的 τ 是 E 上的拓扑. 拓扑定义 1.1.1 中的命题 (O$_1$) 和 (O$_2$) 可由以上定义式 (1.1) 直接得到, 因此仅需证明定义 1.1.1 中的命题 (O$_3$), 即有限交性质也成立.

设 $U, V \in \tau$, 任取 $x \in U \cap V$, 则 $x \in U$ 且 $x \in V$, 那么由定义式 (1.1), 存在 $U', V' \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $U' \subset U$ 且 $V' \subset V$. 再根据条件 (B$_2$) 可知, 存在 $W \in \mathcal{B}(x)$, 使得

$$W \subset U' \cap V' \subset U \cap V.$$

由此可得 $U \cap V \in \tau$, 命题 (O$_3$) 即得证.

若取 $V \in \mathcal{B}(x)$, 则由条件 (B$_3$) 确定的 U 是含有 x 的开集 (关于拓扑 τ), 故 V 是 x 关于拓扑 τ 的邻域, 即 $\mathcal{B}(x)$ 是 x 的邻域构成的集族. 并且由拓扑 τ 的定义, 我们立即可得 $\mathcal{B}(x)$ 是 x 关于拓扑 τ 的邻域基.

最后我们来证明满足条件的拓扑 τ 是唯一的. 假设还有一个拓扑 $\widetilde{\tau}$, 对每一个 $x \in E$, $\mathcal{B}(x)$ 也是 x 关于它的邻域基. 那么任取 $O \in \tau$, 根据邻域基的定义, 对每一个 $x \in O$, 存在 $U_x \in \mathcal{B}(x)$, 使得 $U_x \subset O$, 于是可得

$$O = \bigcup_{x \in O} U_x.$$

因 $\mathcal{B}(x)$ 也是 $\widetilde{\tau}$ 中的邻域基, 故存在一族 $\widetilde{\tau}$ 中的非空开集 $(\widetilde{O}_x)_{x \in O}$, 满足 $\widetilde{O}_x \subset U_x$, 故有

$$O = \bigcup_{x \in O} \widetilde{O}_x.$$

所以 $O \in \widetilde{\tau}$, 这意味着 $\tau \subset \widetilde{\tau}$, 同理可证 $\widetilde{\tau} \subset \tau$. 这说明满足条件 (B$_1$)—(B$_2$) 的拓扑是唯一的. ∎

总结: 我们可以给出三种方法来定义集合 E 上的拓扑:

(1) 集族 $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ 满足性质 (O$_1$)—(O$_3$). 则 τ 中的元素为开集.

(2) 集族 $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ 满足性质 (F$_1$)—(F$_3$). 则 τ 中元素的补集为开集.

(3) 任取 $x \in E$, 相应于 x 的集族 $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{P}(E)$ 满足 (B_1)—(B_3). 则子集 $O \subset E$ 为开集当且仅当对任意 $x \in O$, O 包含 $\mathcal{B}(x)$ 中的元素.

1.1.2 粘着集, 闭包和内部

定义 1.1.14 设 (E, τ) 是拓扑空间, $A \subset E$.

(1) 设 $x \in E$, 若任取 $V \in \mathcal{N}(x)$, 都有

$$(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \varnothing,$$

则称 x 为 A 的凝聚点.

(2) 若 x 是 A 中的元素或者 x 是 A 的凝聚点, 则称 x 是 A 的粘着点. 也就是说, x 是 A 的粘着点, 则

$$V \cap A \neq \varnothing, \ \forall V \in \mathcal{N}(x).$$

(3) 称 A 的所有粘着点构成的集合为 A 的粘着集, 记作 $\overline{A}$.

注 1.1.15 $x \notin \overline{A}$ 当且仅当存在 $V \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $V \cap A = \varnothing$.

定理 1.1.16 设 E 是一个拓扑空间, $A \subset E$.

(1) $\overline{A}$ 是 E 中包含 A 的最小闭集, 或等价地, $\overline{A}$ 为 E 中包含 A 的所有闭集的交.

(2) A 是闭的当且仅当 $\overline{A} = A$, 也可等价于说, A 是闭的当且仅当 A 含有它自己所有的粘着点.

证明 (1) 设 $x \in E \setminus \overline{A}$, 即 x 不是 A 的粘着点, 则有 x 点的开邻域 V, 使得 $V \cap A = \varnothing$. 因 V 是开集, 故 V 是其每一点的开邻域. 由此可知 V 中每一点都不是 A 的粘着点, 即 $V \cap \overline{A} = \varnothing$. 所以 $\overline{A}$ 是闭集. 接下来只需证明任意一个包含 A 的闭集也包含 $\overline{A}$.

于是我们设 F 为闭集且 $A \subset F$, 并设 x 是 A 的一个凝聚点. 那么 x 显然也是 F 的凝聚点. 由于 F 是闭的, 必有 $x \in F$ (这是因为 $E \setminus F$ 是 F 的补集中每一点的开邻域). 所以 $\overline{A} \subset F$.

(2) 由 (1) 的证明立即可得. ■

注 1.1.17 E 中包含 A 的最小闭集称为 A 的闭包. 所以 A 的闭包和粘着集相同.

定义 1.1.18 设 $A \subset E$. 若 $\overline{A} = E$, 则称 A 在 E 中稠密.

下面我们定义子集的内部.

定义 1.1.19 设 E 是一拓扑空间, $x \in E$, $A \subset E$. 若 A 是 x 的一个邻域, 则称 x 为 A 的内点, 并称由 A 的所有内点构成的集合为 A 的内部, 记作 $\mathring{A}$.

定理 1.1.20 设 E 是一拓扑空间, $A \subset E$.

(1) $\mathring{A}$ 是包含于 A 的所有开集的并, 等价地说, $\mathring{A}$ 是包含于 A 的最大开集.

(2) A 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$.

证明 (1) 任取 $x \in \mathring{A}$, 则存在开集 U 包含于 A 中且含有 x. 因 U 是其每一点的邻域以及 $U \subset A$, 故 $U \subset \mathring{A}$, 我们证明了 $\mathring{A}$ 为 E 中开集. 如果我们设 V 是另一个包含于 A 的开集, 那么任取 $x \in V$, 根据内点的定义可得 $V \subset \mathring{A}$.

(2) 由 (1) 立即可得. ■

定义 1.1.21 设 E 是一拓扑空间, $A \subset E$. 令 $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, 称 ∂A 为 A 的边界.

下面的定理展示了拓扑空间中粘着集和内部的一些重要性质 (证明留作练习).

定理 1.1.22 设 E 是一拓扑空间, A 和 B 都是 E 的子集, 则有

(1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ 以及 $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

(2) $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.

(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 且 $\widehat{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\widehat{A \cap B}^{\circ}$ 表示集合 A 和 B 交集的内部.

注 1.1.23 通常 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ 且 $\widehat{A \cup B}^{\circ} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$. 例如, 设 $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ 以及 $B = \mathbb{Q}^c$. 则有 $\overline{A \cap B} = \varnothing$ 而 $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$, $\widehat{A \cup B}^{\circ} = \mathbb{R}$ 而 $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \varnothing$.

1.1.3 拓扑空间的比较和拓扑子空间

在一个集合 E 上通常可以定义多个不同的拓扑, 我们可以在不同的拓扑之间建立如下的偏序关系:

定义 1.1.24 设 τ 和 τ' 是集合 E 上的两个拓扑. 若 $\tau' \subset \tau$, 则称 τ 是 τ' 的强拓扑 (也就是说, 每个 τ' 中的开集也是 τ 中的开集).

集合 E 上的离散拓扑是最强的拓扑, 而平凡拓扑是最弱的拓扑. 相应地, 这两个拓扑分别是 E 上开集最多和最少的两个拓扑.

接下来, 我们来讨论拓扑子空间的概念. 设 (E, τ) 是一个拓扑空间, $F \subset E$, 定义

$$\tau_F = \{U \cap F \colon U \in \tau\}.$$

容易验证 τ_F 是子集 F 上的拓扑, 我们称此拓扑为 F 上由 τ 诱导的拓扑. 相应

地, 我们称 (F,τ_F) 是 (E,τ) 的拓扑子空间 (在不至于混淆的情况下, 我们可以简单地称 F 是 E 的 (拓扑) 子空间).

例 1.1.25 设 (E,d) 是一个度量空间, $F \subset E$, d_F 是距离 d 在 F 上的限制, 那么当 E 和 F 分别赋予距离 d 和 d_F 诱导的拓扑, 则 F 是 E 的拓扑子空间 (留作练习).

定理 1.1.26 设 F 是 E 的拓扑子空间, $A \subset F$. 那么 A 是 F 中的闭集当且仅当存在 E 中闭集 B, 使得 $A = B \cap F$.

证明 根据闭集的定义, A 是 F 中的闭集当且仅当 $F \setminus A$ 是 F 中的开集; 根据拓扑子空间的定义, $F \setminus A$ 是 F 中的开集当且仅当存在 E 中开集 U, 使得 $F \setminus A = U \cap F$, 这等价于 $A = (E \setminus U) \cap F$; 因 $E \setminus U$ 为闭集, 故 A 是 F 中的闭集等价于存在 E 中的闭集 B 使得 $A = B \cap F$. ■

注 1.1.27 若 A 是 E 中闭集且 $A \subset F$, 则 $A = A \cap F$ 是 F 中的闭子集. 逆命题当 F 是 E 中闭集时也成立, 但在一般情况不一定成立; 关于开集有类似的结论 (见习题一, 2).

1.1.4 Hausdorff 空间

定义 1.1.28 设 (E,τ) 是一拓扑空间, 若任取 $x, y \in E$, $x \neq y$, 存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 及 $V \in \mathcal{N}(y)$, 使得 $U \cap V = \varnothing$, 则称拓扑空间 (E,τ) 是 *Hausdorff* 空间 (或称其为分离空间).

显然离散拓扑空间和度量空间总是 Hausdorff 空间; 另一方面, 至少有两个元素的平凡拓扑空间不是 Hausdorff 空间.

定理 1.1.29 设 E 是拓扑空间, 则 E 是 Hausdorff 空间当且仅当对任意一点 $x \in E$, 其所有闭邻域的交为单点集 $\{x\}$.

证明 任取 $x \in E$, 设 F 是 x 的所有闭邻域的交集, 则 F 是闭集. 假设 E 是 Hausdorff 空间, 任取 E 中异于 x 的元素 y. 那么存在开集 $V \in \mathcal{N}(y)$ 及 $U \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $V \cap U = \varnothing$. 则 $U \subset V^c$, 即 V^c 是 x 的闭邻域. 故 $F \subset V^c$, 因此 $y \notin F$, 这意味着 $F = \{x\}$.

反过来, 假设 $F = \{x\}$ 且 y 是 E 中异于 x 的元素, 则总存在着 x 的闭邻域 U, 使得 $y \notin U$, 那么 U^c 为开集且 $y \in U^c$. 所以 E 是 Hausdorff 空间. ■

推论 1.1.30 若拓扑空间 E 是 *Hausdorff* 空间, 则对任意 $x \in E$, 有

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}(x)} V = \{x\}.$$

此推论的逆命题一般不正确 (见习题一, 3). 注意不是 Hausdorff 的拓扑空间在分析学中没有多大的用处. 故我们一般仅考虑 Hausdorff 拓扑空间.

注 1.1.31 显而易见地, 任何 Hausdorff 空间的子空间还是 Hausdorff 空间.

§1.2 收敛序列和连续映射

这一节考虑极限和连续问题. 连续映射是联系不同拓扑空间的重要工具, 通过连续映射的概念可以定义拓扑空间的同胚关系, 这是区分不同拓扑的一个概念.

定义 1.2.1 设 (E, τ) 是拓扑空间, (x_n) 是 E 中的序列, $x \in E$. 若任取 $V \in \mathcal{N}(x)$, 总存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x_n \in V$, 则称 (x_n) 收敛于 x, 并称 x 为序列 (x_n) 的极限, 记作 $\tau - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 在不至于混淆的情形下, 可以忽略掉极限前面的符号 τ.

注 1.2.2 (1) 定义 1.2.1 中的 $\mathcal{N}(x)$ 可以换成任意邻域基 $\mathcal{B}(x)$.

(2) 若 E 是 Hausdorff 空间, 则 E 中任一序列至多只有一个极限 (留作练习). 否则, 一个序列可能有多个不同的极限. 例如在一个平凡拓扑空间里, 任一序列收敛到任意元素.

定义 1.2.3 设 (x_n) 是拓扑空间 E 中的序列, $x \in E$. 若任取 $V \in \mathcal{N}(x)$, 对任意 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n \geqslant n_0$, 使得 $x_n \in V$, 则称 x 为序列 (x_n) 的粘着值.

显然, 若 x 是序列 (x_n) 的极限值, 则 x 是序列 (x_n) 的粘着值 (问: 反之是否成立?). 下面的结论可由定义直接证明, 我们把它留给读者.

定理 1.2.4 设 (x_n) 是拓扑空间 E 上的序列, $x \in E$. 我们令

$$A_n = \{x_m \,:\, m \geqslant n\},$$

则 x 是 (x_n) 的粘着值当且仅当 $x \in \bigcap\limits_n \overline{A}_n$.

注 1.2.5 (1) 设 $A \subset E$. 上一定理意味着 $\overline{A}$ 含有 A 中所有收敛序列的极限值 (也含有 A 中所有序列的粘着值). 当 E 是一个度量空间时, $\overline{A}$ 正是由 A 中

所有收敛序列的极限值构成 (见定理 2.1.2). 然而在一般的拓扑空间下, 该结论不一定成立. 事实上, $\overline{A}$ 中可能含有 A 中收敛序列的极限值以外的其他元素.

(2) 度量空间和一般的拓扑空间根本性的区别在于: 一个度量拓扑可由收敛序列刻画, 但是一般的拓扑却不行 (这种差异将在后面多次出现). 我们可以在一般的拓扑空间下推广序列的概念 (通常的做法是建立 "网" 的概念), 但我们不准备在这里讨论该主题.

下面我们来讨论连续映射.

定义 1.2.6 设 E 和 F 是两个拓扑空间, $f: E \to F$ 是一映射, 并且 $x \in E$. 若任取 $V \in \mathcal{N}(f(x))$, 总存在 $U \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $f(U) \subset V$, 则称 f 在 x 点连续. 换句话说: f 在 x 点连续, 则对任意 $V \in \mathcal{N}(f(x))$, 有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$.

若映射 f 在 E 上每一点都连续, 则称 f 在 E 上连续.

注 1.2.7 容易验证若 f 在 x 点连续并且 (x_n) 收敛到 x, 则 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x)$. 我们知道在度量空间下, 这一命题的逆命题也成立 (和数学分析中的证明类似). 准确地说, 设 E 和 F 是度量空间, 若任取一收敛于 x 的序列 (x_n), 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, 则 f 在 x 点连续. 但是对一般的拓扑空间该命题不成立 (正如注 1.2.5 中的解释, 我们不能像度量空间中那样, 完全用序列的收敛性来刻画映射的连续性).

定理 1.2.8 设 E 和 F 是两个拓扑空间, $f: E \to F$ 是一映射. 那么下面的命题等价:

(1) f 在 E 上连续.

(2) 任取 F 中的开集 O, $f^{-1}(O)$ 是 E 中的开集.

(3) 任取 F 中的闭集 A, $f^{-1}(A)$ 是 E 中的闭集.

证明 因任取 $A \subset F$, 有 $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$, 故命题 (2) 和 (3) 等价. 所以我们只需证明 (1) 和 (2) 的等价性:

(1) $\Rightarrow$ (2). 设 O 是 F 中的开集, 任取 $x \in f^{-1}(O)$, 则 $O \in \mathcal{N}(f(x))$. 由 (1) 可知, $f^{-1}(O)$ 是 x 的邻域, 故 $f^{-1}(O)$ 是它里面每一点的邻域, 即得 $f^{-1}(O)$ 是开集.

(2) $\Rightarrow$ (1). 任取 $x \in E$ 并取 $V \in \mathcal{N}(f(x))$ 为开集, 则 $f^{-1}(V)$ 是含有点 x 的开集. 因此 f 在 E 上连续. ■

由此定理, 我们立即可得如下结论.

推论 1.2.9 两个连续映射的复合映射仍然连续.

注 1.2.10 设 τ 和 τ' 是 E 上的两个拓扑, 那么 τ 是 τ' 的强拓扑当且仅当 E 上的恒等映射 $\mathrm{I}_E:(E,\tau)\to(E,\tau')$ 是连续的.

注意: 开集经连续映射 f 作用得到的像集不一定是开集.

定义 1.2.11 设 E, F 是两个拓扑空间, $f: E\to F$ 是映射.

(1) 若任取开集 $O\subset E$, 有 $f(O)$ 是 F 中的开集, 则称 $f: E\to F$ 是开映射.

(2) 若 f 是双射并且 f 和 f^{-1} 都是连续的 (也就是说 f 是连续的双射且为开映射), 则称 $f: E\to F$ 为同胚映射. 若 E 和 F 之间存在一个同胚映射, 则称 E 和 F 同胚.

例如, $\mathbb{R}$ 上任意的两个开区间同胚 (在自然拓扑下); 但是, 一个开区间和一个闭区间不可能同胚.

§1.3 紧　性

紧空间的概念在很多数学学科中占有基础性的地位, 尤其是分析学中一些基本定理的成立, 本质上是因为拓扑具有紧性. 在泛函分析的理论中, 紧性是一个出现频率非常高的性质.

定义 1.3.1 设 E 是拓扑空间.

(1) 若 E 上的开集族 $(O_i)_{i\in I}$ 满足 $E=\bigcup\limits_{i\in I}O_i$, 则称 $(O_i)_{i\in I}$ 是 E 的开覆盖.

(2) 若 E 的任意一个开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 中都可取出有限个子集覆盖, 则称 E 是紧的 (也就是说, 存在 I 的有限子集 J, 使得 $\bigcup\limits_{i\in J}O_i=E$).

由开集和闭集的互补性, 下面的定理立即可得.

定理 1.3.2 拓扑空间 E 是紧的当且仅当任取 E 的一族闭集 $(F_i)_{i\in I}$, 若对每个有限集 $J\subset I$, 都有 $\bigcap\limits_{i\in J}F_i\neq\varnothing$, 则 $\bigcap\limits_{i\in I}F_i\neq\varnothing$.

注 1.3.3 我们称定理 1.3.2 中展示的闭集族 $(F_i)_{i\in I}$ 的性质为有限交性质, 即

$$\text{任意的有限集 } J\subset I, \bigcap_{i\in J}F_i\neq\varnothing.$$

则拓扑空间 E 是紧的当且仅当任意具有有限交性质的闭集族中所有元素的交集非空. 大部分时候, 我们使用的命题是下面的特殊情形.

推论 1.3.4 设 E 是紧拓扑空间, $(F_n)_{n\geqslant 1}$ 是 E 中单调递减非空的闭集族,

则

$$\bigcap_{n\geqslant 1} F_n \neq \varnothing.$$

在度量空间中，紧性可以用其他等价的方式来刻画，比如无穷序列的收敛性. 我们将在下一章 §2.5 中展示这些内容.

定理 1.3.5 设 E 是拓扑空间，$F \subset E$ 是子空间，则 F 是紧的当且仅当若 E 中的开集族 $(O_i)_{i\in I}$ 满足 $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$，则存在有限集 $J \subset I$，使得 $F \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$ (也就是说，F 的任一在 E 中开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 存在有限的子覆盖).

证明 设 $F \subset E$，$(O_i)_{i\in I}$ 是 E 中的开集族且满足 $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. 令

$$U_i = O_i \cap F, \quad i \in I,$$

则 $(U_i)_{i\in I}$ 是空间 F 上的开覆盖. 反之，F 的任一开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$ 均可表示为以上形式.

于是若设 F 是紧子空间，则存在有限集 $J \subset I$，使得 $F = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$，所以有 $F \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$. 反之，若假设存在有限集 $J \subset I$，使得 $F \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$，则

$$F = F \cap \Big(\bigcup_{i\in J} O_i\Big) = \bigcup_{i\in J} U_i,$$

所以 F 是紧子空间. ■

定理 1.3.6 设 E 是拓扑空间，$F \subset E$ 是子空间.

(1) 若 E 是 Hausdorff 空间且 F 是紧的，则 F 是 E 的闭子集.

(2) 若 E 是紧的 Hausdorff 空间，则 F 是紧的当且仅当 F 是 E 的闭子集.

证明 (1) 设 $x \in F^c$. 由于 E 是 Hausdorff 空间，则对每一个 $y \in F$，存在 E 中的开集 U_y 及 V_y，满足 $x \in U_y$，$y \in V_y$ 且 $U_y \cap V_y = \varnothing$；因此

$$F \subset \bigcup_{y\in F} V_y.$$

因 F 是紧的，故存在有限个点 $y_1, \cdots, y_n$，使得

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

相应地，令 $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$，则 U 是 E 中含有 x 的开集并且

$$U \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\Big) = \varnothing.$$

那么 $U \cap F = \varnothing$. 因此 F^c 是开集, 也就意味着 F 是闭的.

(2) 假设 E 是紧空间, F 是 E 中闭集. 设 $(F_i)_{i\in I}$ 是 F 中的一族闭集且具有有限交性质, 由于 F 是闭集, 则 F_i 也是 E 中闭集. 那么根据定理 1.3.2, 因 E 是紧空间, 故 $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \varnothing$. 从而 F 是紧集. ■

在任一 Hausdorff 空间上, 如果具有 “有限交性质” 的集族是紧集族, 那么紧集族中所有元素的交集非空. 我们可以给出下面的结论.

定理 1.3.7 设 E 是 Hausdorff 空间, $(K_i)_{i\in I}$ 是 E 中的紧集族, 若 $\bigcap\limits_{i\in I} K_i = \varnothing$, 则存在有限个 K_i, 它们的交集是空集.

证明 在集族 $(K_i)_{i\in I}$ 中任取一元素, 记作 K_0. 因 $\bigcap\limits_{i\in I} K_i = \varnothing$, 故 $(K_i^c)_{i\in I}$ 是 K_0 的开覆盖. 由于 K_0 是紧的, 则存在有限集 $J \subset I$, 使得 $K_0 \subset \bigcup\limits_{i\in J} K_i^c$. 那么

$$K_0 \cap \left(\bigcap_{i\in J} K_i\right) = \varnothing.$$

于是定理得证. ■

推论 1.3.8 设 E 是紧 *Hausdorff* 空间, 则 E 中每一点有一个紧邻域基.

证明 设 $x \in E$ 且 V 是 x 的一个开邻域, 则 V^c 是闭集, 从而是紧集. 因此, 根据定理 1.1.29, 设 U 表示 x 的闭邻域, 有

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}(x)} (U \cap V^c) = \left(\bigcap_{U\in\mathcal{N}(x)} U\right) \cap V^c = \{x\} \cap V^c = \varnothing;$$

再根据定理 1.3.2 可知, 存在有限个闭集 $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap V^c) = \varnothing$, 也就有

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n \subset V.$$

左边的有限闭邻域的交仍然是 x 的闭邻域, 也就是紧邻域 (紧 = 闭). 因此我们证明了在 E 上任一点存在着紧的邻域基. ■

对于一个非紧的空间, 上一推论的结论也可能正确, 如实空间 $\mathbb{R}$. 这启发我们给出如下定义.

定义 1.3.9 设 E 是拓扑空间, 若 E 上的每一点有一个紧邻域, 则称 E 为局部紧空间.

在此定义下, 推论 1.3.8 略作修改就对应下面的定理 (证明留作习题).

定理 1.3.10 设 E 是一个局部紧 Hausdorff 空间, 则 E 中每一点都有一个紧邻域基.

紧性在连续映射下保持不变, 见下面的定理.

定理 1.3.11 设 E 是紧空间, F 是拓扑空间且 $f: E \to F$ 是连续映射, 则 $f(E)$ 是 F 的紧子空间.

证明 设 $(U_i)_{i\in I}$ 是 $f(E)$ 的开覆盖, 即 $f(E) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, 则 $E = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(U_i)$. 因 f 连续, 故 $f^{-1}(U_i)$ 是 E 中开集. 由于 E 是紧集, 可知存在有限个元素 $i_1, \cdots, i_n$, 使得

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k}),$$

那么 $f(E) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$, 即 $f(E)$ 是 F 的紧子空间. ■

推论 1.3.12 设 E, F 是两个拓扑空间, $f: E \to F$ 是连续映射, 则对任意的紧集 $K \subset E$, $f(K)$ 也是紧集.

证明 应用上一定理, 取 $f\big|_K : K \to F$ 即可. ■

推论 1.3.13 设 E 是紧空间, F 是 Hausdorff 空间且 $f: E \to F$ 是连续的单射, 则 f 是 E 到 $f(E)$ 上的同胚映射.

证明 只需证明 $f^{-1}: f(E) \to E$ 是连续映射. 设 A 是 E 中闭集, 因 E 是紧空间, 故 A 也是紧的. 又因 f 是连续的, 故 $f(A)$ 是紧的. 那么, $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ 是 $f(E)$ 中的闭集, 故 f^{-1} 是连续映射. ■

推论 1.3.14 设 E 是一个紧空间且 $f: E \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数, 则 f 在 E 上有界且取得上确界和下确界.

证明 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧集, 则 $f(E)$ 是有界的闭集, 故 $f(E)$ 达到上确界和下确界. ■

作为本节的结束, 我们证明一个十分重要的延拓 (或称分离性) 定理, 它具有用连续函数 "逼近" 简单函数的直观意义.

定理 1.3.15 (Urysohn 引理) 设 E 是局部紧 *Hausdorff* 空间. 设 A 和 B 是 E 中的两个不相交的非空闭子集, 并设其中一个是紧集, 那么存在一个连续的函数 $f: E \to [0,1]$ 使得在 A 上 $f = 0$ 而在 B 上 $f = 1$.

注 1.3.16 当 (E,d) 是度量空间时 (不必是紧的), 容易证明结论成立. 事实上, 只要设

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

其中 $d(x,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$. 我们称具有定理 1.3.15 中性质的空间为正规空间. 因此, 局部紧的 Hausdorff 空间和可度量化空间都是正规空间.

定理 1.3.15 的证明需要用到下面的引理.

引理 1.3.17 *设 K 和 O 分别是 E 中的紧集和开集, 且有 $K\subset O$, 则存在开集 U, 使得 $K\subset U\subset\overline{U}\subset O$ 且 $\overline{U}$ 是紧集.*

证明 我们首先给出一个显然的结论: 局部紧 Hausdorff 空间中的任一点存在一个开邻域, 其闭包是紧的. 事实上, 任取 $x\in E$, 由于 E 是局部紧空间, 则存在紧邻域 $G\in\mathcal{N}(x)$, 这意味着存在 x 处的开邻域 V, 使得 $V\subset G$. 因为紧集 G 是 E 中的闭集, 所以 $\overline{V}\subset G$. 同时根据定理 1.1.26, 可知 $\overline{V}$ 也是 G 中的闭集, 故也是紧集.

由以上结论以及 K 是紧的, 立即可知存在有限个开集 $V_1, V_2,\cdots, V_n$ 覆盖 K, 并且它们的闭包都是紧集. 记 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$, 则 V 是开集, 而 $\overline{V}$ 是紧集, 并且 $K\subset V$. 如果 $O=E$, 那么取 $U=V$ 即可.

否则, 我们任取 $y\in O^c$, 由 K 是紧的, 可知存在开集 W_y, 使得 $K\subset W_y$ 且 $y\notin\overline{W}_y$. 那么可得

$$\bigcap_{y\in O^c}(O^c\cap\overline{V}\cap\overline{W}_y)=\varnothing.$$

因 $\overline{V}$ 是紧的, 而 O^c 和每一个 $\overline{W}_y$ 都是闭集, 故每个 $O^c\cap\overline{V}\cap\overline{W}_y$ 都是紧的. 那么根据定理 1.3.7, 存在有限个 $y_1,y_2,\cdots,y_k\in O^c$, 使得

$$\bigcap_{i=1}^{k}(O^c\cap\overline{V}\cap\overline{W}_{y_i})=\varnothing.$$

从而

$$\bigcap_{i=1}^{k}(\overline{V}\cap\overline{W}_{y_i})\subset O,$$

并且 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}(\overline{V}\cap\overline{W}_{y_i})$ 是紧集. 取 $U=V\cap W_{y_1}\cap\cdots\cap W_{y_k}$, 则有

$$\overline{U}\subset\overline{V}\cap\overline{W}_{y_i}\cap\cdots\cap\overline{W}_{y_k}.$$

因而 $\overline{U}$ 为紧集, 且有 $\overline{U}\subset O$. 故结论成立. ■

定理 1.3.15 的证明 不妨设 A 是紧集, 首先令 $A_0=A, A_1=B^c$. 显然有 A_0 是紧集而 A_1 是开集并且 $A_0\subset A_1$. 则由引理 1.3.17, 存在一个开集, 记作 $A_{\frac{1}{2}}$, 并且 $\overline{A_{\frac{1}{2}}}$ 是紧集, 使得

$$A_0\subset A_{\frac{1}{2}}\subset\overline{A_{\frac{1}{2}}}\subset A_1.$$

同样地, 我们可以得到开集 $A_{\frac{1}{4}}$ 及 $A_{\frac{3}{4}}$, 满足

$$A_0\subset A_{\frac{1}{4}}\subset\overline{A_{\frac{1}{4}}}\subset A_{\frac{1}{2}}\subset\overline{A_{\frac{1}{2}}}\subset A_{\frac{3}{4}}\subset\overline{A_{\frac{3}{4}}}\subset A_1.$$

接下来, 我们重复这一构造, 设

$$D=\left\{\frac{k}{2^n}:\ n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant 2^n\right\},$$

对 n 进行归纳, 我们可以构造一族集合 $(A_t)_{t\in D}$, 使得

(1) $A_0=A$ 且 $A_1=B^c$.

(2) 对每一个 $t\in D\setminus\{0,1\}$, A_t 是开集且 $\overline{A_t}$ 是紧集.

(3) 任取 $s,t\in D$ 且 $s<t$, 则 $\overline{A_s}\subset A_t$.

然后对任意 $x\in E$, 定义:

$$\alpha(x)=\begin{cases}\sup\{s\in D:\ x\notin\overline{A_s}\}, & x\notin A,\\ 0, & x\in A,\end{cases}$$

$$\beta(x)=\begin{cases}\inf\{t\in D:\ x\in A_t\}, & x\notin B,\\ 1, & x\in B.\end{cases}$$

因集族 (A_t) 是单调增加的且 $A_t\subset\overline{A_t}$, 故有 $\alpha(x)\leqslant\beta(x)$. 并且, 我们断言 $\alpha(x)=\beta(x)$. 否则的话, 由 D 在 $[0,1]$ 上的稠密性, 存在 $s,t\in D$, 使得

$$\alpha(x)<s<t<\beta(x).$$

这意味着 $x\in\overline{A_s}$ 且 $x\notin A_t$, 由上面集族 $(A_t)_{t\in D}$ 的性质 (3) 知这是不可能的.

最后, 我们定义函数 $f:E\to[0,1]$, 它满足

$$f(x)=\alpha(x)=\beta(x),\quad x\in E.$$

则在 A 上, $f=0$; 在 B 上, $f=1$, 剩下的工作就是证明 f 也是连续的. 因为实数集 $\mathbb{R}$ 上的任一开集是开区间的并, 所以只需证明任一开区间的原像是 E 中开集即可. 因而问题简化为证明对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty,\lambda))$ 和 $f^{-1}((\lambda,+\infty))$ 都是 E 中开集. 由于 f 只在 $[0,1]$ 上取值, 我们只需在第一种情形对 $\lambda\in(0,1]$ 而第二种情形对 $\lambda\in[0,1)$ 考察原像.

设 $\lambda > 0$, $\lambda \in D$. 则有

$$\{x \in E : f(x) < \lambda\} = \{x \in E : \beta(x) < \lambda\}$$
$$= \{x \in E : \exists t < \lambda, \text{ 使得 } x \in A_t\} = \bigcup_{t<\lambda} A_t.$$

因所有的 A_t 是开集, 故 $\{x \in E: f(x) < \lambda\}$ 是开集. 由于 D 在 $[0, 1]$ 中稠密, 则对任意 $\lambda \in (0, 1]$,

$$\{x \in E : f(x) < \lambda\} = \bigcup_{\mu<\lambda, \mu\in D} \{x \in E : f(x) < \mu\}$$

也是开集. 类似地, 任取 $\lambda \in [0, 1)$, 有

$$\{x \in E : f(x) > \lambda\} = \{x \in E : \alpha(x) > \lambda\} = \bigcup_{\mu>\lambda,\ \mu\in D} \bigcup_{t>\mu} (\overline{A_t})^c.$$

从而 $\{x \in E : f(x) > \lambda\}$ 是开的. 由此, 我们证明了 f 是满足条件的连续函数.

■

注 1.3.18 定理 1.3.15 的结论自然对紧 Hausdorff 空间成立.

§1.4 乘积拓扑

本节介绍乘积拓扑空间.

定义 1.4.1 设 $(E_i, \tau_i)_{i\in I}$ 是一族拓扑空间, $E = \prod_{i\in I} E_i$ 为集族 $(E_i)_{i\in I}$ 的笛卡儿乘积, 其任一元素可记成 $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$, 即对每一个 $i \in I$, 有 $x_i \in E_i$ (称 x_i 为 x 的坐标).

(1) 若 J 是 I 的有限子集, U_i $(i \in J)$ 是拓扑空间 (E_i, τ_i) 上的开集, 则称

$$O = \prod_{i\in J} U_i \times \prod_{i\in I\setminus J} E_i$$

为 E 的基础开集.

(2) 称由基础开集的并构成的集合为 E 中的开集. 事实上, 所有的这种开集构成了 E 上的拓扑, 我们称由此构造的拓扑为 $E = \prod_{i\in I} E_i$ 上的乘积拓扑.

注 1.4.2 (1) 所有基础开集的并集事实上构成了 E 的拓扑, 这一点留给读者证明.

(2) 若 I 为有限集, 则 O 是基础开集当且仅当 $O=\prod_{i\in I}U_i$, 这里 U_i 是 E_i 中的开集, $i\in I$. **注意**: 若 I 是无限集, 前面开集的笛卡儿乘积通常不是乘积拓扑空间中的开集.

(3) $\mathbb{R}^n$ 上的自然拓扑与 $\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ 上的乘积拓扑一致 (留作习题).

(4) 若对每一个 $i\in I$, F_i 是 E_i 中闭集, 则 $\prod_{i\in I}F_i$ 是 E 中闭集 (留作习题).

(5) 设 $x=(x_i)_{i\in I}\in E$, 且对每一个 $i\in I$, $\mathcal{N}(x_i)$ 表示 x_i 在 E_i 中的邻域系. 那么 x 在 E 中的一个邻域基可由如下集合构成:

$$\prod_{i\in J}V_i\times\prod_{i\in I\setminus J}E_i,$$

这里 J 是 I 的有限子集且对每一个 $i\in J$, $V_i\in\mathcal{N}(x_i)$ (检验邻域基的定义即可).

(6) 容易验证拓扑空间的乘积满足结合律. 实际上, 我们设 $I=I_1\cup I_2$ 且 $I_1\cap I_2=\varnothing$, 考虑 $E^1=\prod_{i\in I_1}E_i$, $E^2=\prod_{i\in I_2}E_i$, 它们分别赋予有相应的乘积拓扑. 那么 E 上的乘积拓扑与 $E^1\times E^2$ 上的拓扑保持一致. 故我们可以在乘积拓扑空间的乘积运算上添加括号而不改变拓扑.

接下来的定理解释了上面乘积拓扑的定义是自然的, 即它是使得 $\prod_{i\in I}E_i$ 上每一个 "正规投影" 都连续的最弱拓扑.

定理 1.4.3 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一族拓扑空间, $E=\prod_{i\in I}E_i$, 令 τ 表示 E 上的乘积拓扑. 并且对每一个 $i\in I$, p_i 表示 E 到 E_i 上的正规投影, 定义为对每一个 $x=(x_i)_{i\in I}$ 有 $p_i(x)=x_i$.

那么, τ 是 E 上使得每一个 p_i $(i\in I)$ 都连续的最弱的拓扑. 并且每一个 p_i $(i\in I)$ 都是开映射.

证明 对每一个 $i\in I$, 设 U_i 是 E_i 中的开集,则

$$p_i^{-1}(U_i)=U_i\times\prod_{j\neq i}E_j.$$

根据乘积拓扑的定义可知, $p_i^{-1}(U_i)$ 是 E 中开集. 故 p_i 是连续映射.

我们设 σ 是 E 上另一个使每一个 p_i $(i\in I)$ 都连续的拓扑, 则对每一个 E_i $(i\in I)$ 上的开集 U_i, $U_i\times\prod_{j\neq i}E_j$ 也是关于 σ 的开集. 对这样的开集 $U_i\times\prod_{j\neq i}E_j$ 求有限交, 就可以看到拓扑 τ 下的基础开集是拓扑 σ 中的开集, 这意味着 τ 是 E 上使正规投影连续的那个最弱的拓扑.

设 O 是 E 中开集, 并设 $x \in O$. 由于 O 是 E 中基础开集的并, 则 x 属于某个基础开集 $U = \prod_{i\in I} U_i$ (U_i 是 E_i 中开集且除了有限个情形, 都满足 $U_i = E_i$), 并且 $U \subset O$. 因此, $p_i(O)$ 包含 U_i, 即有

$$x_i \in U_i \subset p_i(O).$$

由此可知 $p_i(O)$ 是其每点的邻域, 则 $p_i(O)$ 是 E_i 中的开集. 所以 p_i 是开映射.■

下面的推论刻画了乘积拓扑空间中序列的收敛性, 即序列在乘积拓扑空间中的收敛等价于其 "依坐标" 收敛. 这意味着乘积拓扑正是我们所期望刻画的一种拓扑.

推论 1.4.4 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一族拓扑空间, $E = \prod_{i\in I} E_i$ 是乘积拓扑空间.

(1) 设 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 是 E 中序列 (即对每一个 n, $x^n = (x_i^n)_{i\in I} \in E$), $x = (x_i)_{i\in I} \in E$. 那么 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在乘积拓扑空间 E 中收敛到 x 当且仅当对每一个 $i \in I$, $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 在空间 E_i 中收敛到 x_i.

(2) 设 F 是拓扑空间, $f: F \to E$ 是一映射. 则 f 是 F 到 (E, τ) 的连续映射当且仅当对每一个 $i \in I$, $p_i \circ f$ 是 F 到 E_i 的连续映射.

证明 (1) 首先假设 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 收敛到 x. 由于 p_i 连续, 则对每一个 $i \in I$, $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 收敛到 x_i.

反过来假设对每一个 $i \in I$, $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 收敛到 x_i. 设 O 是 τ 中含有点 x 的任一开集, 则存在基础开集

$$U = \prod_{i\in J} U_i \times \prod_{i\in I\setminus J} E_i$$

(J 是有限集且 U_i 是 E_i 中的开集), 并且满足 $x \in U \subset O$. 因为 J 是有限集, 所以存在 n_0, 使得 $n \geqslant n_0$ 时, 对每一个 $i \in J$, 有 $x_i^n \in U_i$. 也就是说, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x^n \in O$. 由此即证 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 收敛到 x.

(2) 类似于上一命题的证明, 留作习题. ■

注 1.4.5 如果所有的 E_i $(i \in I)$ 都是同一个集合 F, 那么在该情形下

$$\prod_{i\in I} E_i = \prod_{i\in I} F = \{f: I \to F,\ i \mapsto f(i) \in F\}.$$

也就是说, $\prod_{i\in I} F$ 中的元素是指标集 I 到集合 F 的映射, 这种笛卡儿集通常记为 F^I.

若取 $F=\mathbb{R}$, 则 $\prod_{i\in I}\mathbb{R}=\mathbb{R}^I$ 中的元素就是从指标集 I 到实数集 $\mathbb{R}$ 上的函数. 例如, 当我们令 $I=\mathbb{N}^*$, 实际上 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ 中的元素就是实无穷序列 $(x_1,x_2,\cdots)$.

当我们在 $\mathbb{R}^I$ 上赋予乘积拓扑后, 根据推论 1.4.4 立即可知, $\mathbb{R}^I$ 中的序列 (f_n) 依乘积拓扑收敛到 $f\in\mathbb{R}^I$ 等价于 f_n 作为 I 上的函数列逐点收敛到函数 f. 由此说明乘积拓扑是刻画函数逐点收敛拓扑.

定理 1.4.6 如果对每一个 $i\in I$, E_i 都是 Hausdorff 空间, 则乘积拓扑空间 $E=\prod_{i\in I}E_i$ 也是 Hausdorff 空间.

证明 设 $x=(x_i)_{i\in I}$ 和 $y=(y_i)_{i\in I}$ 是 $E=\prod_{i\in I}E_i$ 中的两个不同元素. 那么存在某个 $i_0\in I$, 使得 $x_{i_0}\neq y_{i_0}$. 由于 E_{i_0} 是 Hausdorff 空间, 则存在 E_{i_0} 中的开集 U_{i_0} 及 V_{i_0}, 使得 $x_{i_0}\in U_{i_0}$, $y_{i_0}\in V_{i_0}$ 且 $U_{i_0}\cap V_{i_0}=\varnothing$. 那么

$$x\in U=U_{i_0}\times\prod_{i\neq i_0}E_i \text{ 且 } y\in V=V_{i_0}\times\prod_{i\neq i_0}E_i,$$

这里 U 和 V 是乘积拓扑空间 E 中的两个基础开集且满足 $U\cap V=\varnothing$. 因此 $E=\prod_{i\in I}E_i$ 是 Hausdorff 空间. ■

现在我们来讨论一个反映乘积拓扑空间稳定性的重要性质 —— 紧性. 需要指出的是, 即使只是两个成员的情形其证明都不容易, 关于一般的乘积拓扑紧性的证明需要用到选择公理 (或 Zorn 引理). 我们在此只给出两个成员情形下的证明, 当然结论可以扩展到有限乘积拓扑空间.

定理 1.4.7 设 E_1 和 E_2 是两个紧拓扑空间, 则乘积拓扑空间 $E=E_1\times E_2$ 仍然是紧的.

证明 设 $(U_i)_{i\in I}$ 是 E 上的开覆盖, 则任取一点 $x=(x_1,x_2)\in E$, 必存在某一个 $i_x\in I$, 使得 $x\in U_{i_x}$, 并且根据乘积拓扑的定义, 存在 V_x 和 W_x 分别是 x_1 和 x_2 关于相应拓扑上的开邻域, 使得 $V_x\times W_x\subset U_{i_x}$. 我们先固定 $x_2\in E_2$, 设 $F=E_1\times\{x_2\}$, 则 $(V_x)_{x\in F}$ 是 E_1 上的一个开覆盖. 由于 E_1 是紧的, 故存在 F 中的有限子集 $J(x_2)$, 使得 $(V_x)_{x\in J(x_2)}$ 覆盖 E_1. 接下来, 我们令

$$A_{x_2}=\bigcap_{x\in J(x_2)}W_x,$$

则 A_{x_2} 是含有 x_2 的开集. 当我们让 x_2 在 E_2 中变动时, 可以看到 $(A_{x_2})_{x_2\in E_2}$ 也是 E_2 的开覆盖, 同样由于 E_2 是紧的, 存在一个有限集 $K\subset E_2$, 使得相应的

有限集族 $(A_{x_2})_{x_2\in K}$ 覆盖 E_2. 由此可得

$$E=\bigcup_{x\in J}V_x\times W_x,\quad 这里\ J=\bigcup_{x_2\in K}J(x_2).$$

事实上由以上讨论, 当我们任取一个 $a=(a_1,a_2)\in E$, 必存在某个 $x_2\in K$, 使得 $a_2\in A_{x_2}$, 那么存在 $x\in J(x_2)$, 使得 $a_1\in V_x$; 这里确定的 $x\in J$ 且 $a\in V_x\times W_x$. 由此可见, E 被 $(U_{i_x})_{x\in J}$ 覆盖. 因为 J 是有限集, 所以 E 是紧的. ■

最后我们给出乘积拓扑空间紧性的一般结论.

定理 1.4.8 (Tychonoff) 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一族紧拓扑空间, 则乘积拓扑空间 $\prod\limits_{i\in I}E_i$ 仍然是紧的.

我们略去该定理的证明, 有兴趣的读者可以在 J.L.Kelley 的专著 [4] 中找到该定理的证明.

最后, 我们用下面的定理来结束本章的内容.

定理 1.4.9 设 $(E_n)_{n\geqslant 1}$ 是一族可度量化的拓扑空间, 则乘积拓扑空间 $E=\prod\limits_{n\in\mathbb{N}^*}E_n$ 也可度量化.

证明 对每一个 $n\geqslant 1$, 设 d_n 是拓扑空间 E_n 上相应的距离. 当我们把 d_n 替换成 $\min\{d_n,1\}$ 后, 它和 d_n 诱导相同的拓扑, 故我们不妨假设 $d_n\leqslant 1$. 由此对任意 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in E$, 我们定义

$$d(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}d_n(x_n,y_n).$$

容易验证由此定义的 d 确实是 E 上的距离 (留作练习). 下面设 $x=(x_n)\in E$ 及 $r>0$. 用 $B(x,r)$ 表示中心在 x、半径为 r (以 d 为距离) 的开球, 而 $B_n(x_n,r)$ 表示中心在 x_n、半径为 r (以 d_n 为距离) 的开球, 那么立即可得

$$B\left(x,\frac{1}{k}\right)=\prod_{n<k}B_n\left(x_n,\frac{n}{k}\right)\times\prod_{n\geqslant k}E_n,\quad \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

这意味着 $\left\{B\left(x,\frac{1}{k}\right):k\in\mathbb{N}^*\right\}$ 是 x 在乘积拓扑 E 下的邻域基. 根据定理 1.1.13 可知, 由 d 诱导的拓扑与 E 上的乘积拓扑一致. 故定理得证. ■

习 题 一

1. 证明定理 1.1.22.

2. (a) 设 (E,d) 是一个度量空间, $F \subset E$. 证明 d 在 F 上诱导的拓扑和 d 在 E 上诱导的拓扑空间在 F 上的限制一致.

(b) 设 E 是一个拓扑空间, F 是 E 的拓扑子空间, $A \subset F$. 用实例说明 A 是 F 中闭集但是在 E 中不一定是闭集, 以及 A 在 F 中是开集但在 E 中不一定是开集.

3. 设 E 是 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和另外两个不同的点构成的并集, 如 $E = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$. 并设 τ 是 E 中满足如下条件的子集 U 构成的集族:

(i) 在 $\mathbb{R}^*$ 中的拓扑下, $U \cap \mathbb{R}^*$ 在 $\mathbb{R}^*$ 中是开的.

(ii) 若 $-\infty \in U$ 或 $+\infty \in U$, 则 U 包含一个形如 $\mathbb{R}^* \cap V$ 的集合, 其中 V 是 $\mathbb{R}$ 中零点的一个邻域.

证明:

(a) τ 是 E 上的拓扑.

(b) τ 不是 Hausdorff 空间.

(c) 任一点 $x \in E$ 的所有邻域的交集为 $\{x\}$.

4. 证明紧空间中的任一序列有粘着点.

5. 证明有限维的赋范空间是局部紧的.

6. 设 (E,τ) 是一个局部紧的但不是紧的 Hausdorff 空间. 我们在 E 上增加一个点, 记作 ∞, 然后定义 $\widehat{E} = E \cup \{\infty\}$. 在 $\widehat{E}$ 上定义集族 $\widehat{\tau}$, $U \in \widehat{\tau}$ 当且仅当 $U \in \tau$ 或者存在 E 中的紧集 K, 使得 $U = \widehat{E} \setminus K$. 证明:

(a) $\widehat{\tau}$ 是 $\widehat{E}$ 上的拓扑.

(b) $\widehat{\tau}$ 在 E 上的限制等于 τ, 即 (E,τ) 是 $(\widehat{E},\widehat{\tau})$ 的拓扑子空间.

(c) $(\widehat{E},\widehat{\tau})$ 是一个紧 Hausdorff 空间.

(d) E 在 $\widehat{E}$ 中稠密.

注: 拓扑空间 $(\widehat{E},\widehat{\tau})$ 通常被称为 (E,τ) 的 *Alexandroff* 紧化空间. 例如, 我们可以用极射投影方法证明 $\widehat{\mathbb{R}}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 上的单位圆环同胚.

7. 证明定理 1.3.10.

8. 证明注 1.4.2 中的命题 (1), (3) 和 (4).

9. 把定理 1.4.9 证明中的距离换成下面的距离

$$\delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

证明由 δ 诱导的拓扑也与乘积拓扑相同.

10. 证明一列紧度量空间的乘积空间 (赋予乘积拓扑) 是紧的可度量化空间.

11. 设 $E = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \forall n \geqslant 1, x_n = 0 \text{ 或 } 1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. 对每个 $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in E$,

令

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}.$$

在 $\{0,1\}$ 上赋予离散拓扑 (这实际上对应着自然的距离 $d(0,1)=1$), 则在 E 上有相应的乘积拓扑. 证明 ϕ 是 E 到 $\mathbb{R}$ 的紧子集 $C=\phi(E)$ 上的同胚.

第二章 完备度量空间

对比于拓扑空间从抽象的开集定义出发, 度量空间从几何意义十分明显的概念“距离”出发来定义开球, 进而定义开集, 由此形成拓扑, 这个过程对应于我们熟悉的欧氏空间, 因而是一个比较容易理解的理论体系. 实际上, 我们在分析学里所面对的很多具体的空间都是度量空间. 关于度量空间, 我们特别指出两个重要的性质, 一是度量空间的完备性, 它通过 Cauchy 序列来刻画, 这是一般拓扑理论里没有的概念; 二是度量空间的紧性, 它和序列的某种收敛性存在着等价关系, 这是和一般拓扑最大的不同.

在 §2.1 我们将给出度量空间的基本性质. §2.2 介绍度量空间上的 Cauchy 序列, 并由此讨论度量空间的完备性. §2.3 讨论映射的一致连续性, 得到了一致连续映射扩展定理. 这节还含有一基本定理, 即完备度量空间上的压缩映射的不动点定理. 在 §2.4 中, 我们详细地给出度量空间的完备化过程. §2.5 专门研究度量空间的紧性问题, 因为在度量空间上, 我们有比一般拓扑空间上丰富得多的紧性刻画.

§2.1 度 量 空 间

这一节给出度量空间的基本概念. 我们已在例 1.1.3 中给出度量空间的定义, 这里再正式给出它的定义.

定义 2.1.1 设 E 是一个非空集合, d 是定义在 $E\times E$ 上的实值函数, 若任取 $x,y,z\in E$, 满足

(1) **非负性**: $d(x,y)\geqslant 0$;

(2) **正定性**: $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(3) **对称性**: $d(x,y)=d(y,x)$;

(4) **三角形不等式**: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则称 d 是集合 E 上的一个度量 (或称距离), 并称 (E,d) 为度量空间.

如例 1.1.3 所述, 有了距离的概念, 我们可以诱导出 E 上的拓扑. 并且我们可以给出 E 上序列的收敛性及 E 上函数连续性等一系列概念在度量空间下的刻画. 比如, 度量空间 E 中的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 收敛于 x 等价于 $d(x_n,x)$ 趋向于 0.

又如, E 上的函数 f 在 $x \in E$ 处连续当且仅当对任意收敛于 x 的序列 (x_n), 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. 另外, 任一度量空间是 Hausdorff 空间.

在度量空间中, 闭集可由其中的收敛序列来刻画.

定理 2.1.2 设 E 是度量空间, 则 $A \subset E$ 是闭的当且仅当 A 包含 A 中所有收敛序列的极限值.

证明 首先, 任一闭集显然包含其中所有收敛序列的极限值. 反过来, 设 $A \subset E$ 包含 A 中所有收敛序列的极限值. 设 x 为 A 的粘着点, 则取一列开球 $\left(B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$, 总存在一列点 $(x_n)_{n\geqslant 1}$, 使得 $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$. 因 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 收敛于 x, 故 $x \in A$. 因此, 根据定理 1.1.16, A 是闭集. 定理得证. ■

由度量空间序列收敛性及函数连续性的刻画, 还容易给出下面的距离连续性质.

定理 2.1.3 设 (E, d) 是度量空间, 当 $E\times E$ 赋予乘积拓扑时, $d: E\times E \to \mathbb{R}$ 是一连续函数.

证明 因 E 是度量空间, 故 $E\times E$ 可度量化 (见定理 1.4.9). 对任意 $(x,y) \in E\times E$, 任取 $E\times E$ 中收敛于 (x,y) 的序列 $((x_n, y_n))$. 根据推论 1.4.4(1), $((x_n, y_n))$ 收敛于 (x,y) 当且仅当 x_n 收敛于 x, 且 y_n 收敛于 y. 因此,

$$\begin{aligned}|d(x_n, y_n) - d(x,y)| &\leqslant |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x,y)| \\ &\leqslant |d(y_n, y)| + |d(x_n, x)| \to 0, \ n \to \infty.\end{aligned}$$

故 $d: E \times E \to \mathbb{R}$ 是一连续函数. ■

设 $A \subset E$, 任取 $x \in E$. 定义 x 到 A 的距离为

$$d(x, A) := \inf\{d(x,y):\ y \in A\}.$$

从上面的定理 2.1.3 可得如下简单推论 (证明留作练习).

推论 2.1.4 设 (E, d) 是度量空间, 对任意 $A \subset E, x \mapsto d(x, A)$ 是连续函数.

§2.2 Cauchy 序列

本节首先介绍 Cauchy 序列的概念, 并用它来定义度量空间的完备性. 完备性是一个重要的性质, 众所周知, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的. 在第六章, 我们将把

度量空间的完备性联系于 Baire 性质, 一个看起来特别不直观但是异常深刻的性质.

定义 2.2.1 设 (E,d) 是度量空间, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 是 E 中的序列. 若任取 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n,\ m>n_0$ 时, 有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$, 则称 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 是 *Cauchy 序列*.

由定义, 容易得到下面的一些结论.

定理 2.2.2 设 (E,d) 是度量空间, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 是 E 中的序列, 那么

(1) 若 (x_n) 是收敛序列, 则 (x_n) 是 Cauchy 序列.

(2) 若 (x_n) 是 Cauchy 序列, 且有收敛的子序列, 则 (x_n) 是收敛序列.

(3) 若 (x_n) 是 Cauchy 序列, 则 (x_n) 是有界序列, 即存在 $x\in E$ 和 $r>0$ 使得对任意 $n\geqslant 1$, 有 $x_n\in B(x,r)$.

注 2.2.3 上面几个命题的证明方法和实数集中相应命题的证明一样, 我们留作练习.

定义 2.2.4 若度量空间 (E,d) 中的任一 Cauchy 序列都收敛, 则称 E 为完备度量空间. 这时也称距离 d 是完备的.

例 2.2.5 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 及它们上面的闭子集都是完备的. 但 $\mathbb{Q}$ 不是完备的; $\mathbb{R}$ 上的非闭区间, 如 $[0,\ 1)$ 也是不完备的.

下面给出完备度量空间的一个重要刻画. 首先设 A 是度量空间 E 中的集合, 定义

$$\operatorname{diam}(A)=\sup_{x,y\in A} d(x,y),$$

称 $\operatorname{diam}(A)$ 为集合 A 的直径.

定理 2.2.6 度量空间 (E,d) 是完备的当且仅当若 (A_n) 是 E 中的单调下降、非空的闭子集列, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A_n)=0$, 则有 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1}A_n$ 是单点集.

证明 必要性. 因为 (A_n) 是非空的集合列, 所以我们可以给出一个序列 (x_n), 满足 $x_n\in A_n,\ n\geqslant 1$.

由于集合列 (A_n) 是单调递减的, 即对任意 $1\leqslant n<m$, 有 $x_m\in A_m\subset A_n$, 并由 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A_n)=0$, 可知

$$\limsup_{n\to\infty,m\to\infty} d(x_n,x_m)\leqslant \lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A_n)=0,$$

故 (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列. 因 $(E,\, d)$ 是完备的度量空间, 故存在 $x \in E$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 那么由 A_n 是闭集, 知 $x \in A_n$, $n \geqslant 1$, 即 $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$. 若有另一个元素 $y \neq x$, 使得 $y \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$, 则 $d(x,y) > 0$, 这与 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ 矛盾, 故 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$ 是单点集.

充分性. 首先我们证明一个事实: 设 A 是度量空间 E 中的子集, 则必有

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A}).$$

由定义, 我们只需证明 $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A)$. 因 $\overline{A}$ 是 A 的闭包, 故任取 $\varepsilon > 0$, 对任意的 $x, y \in \overline{A}$, 存在 $x', y' \in A$, 使得 $d(x', x) < \varepsilon$, $d(y', y) < \varepsilon$, 那么可得

$$d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) < d(x',y') + 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 即得 $d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(A)$, 从而 $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A)$.

下面证明定理中的充分性. 设 (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列, 并令

$$A_n = \{x_m :\ m \geqslant n\}.$$

那么 $\overline{A_n}$ 是非空闭集, 且 $(\overline{A_n})_n$ 单调下降. 由于 (x_n) 是 Cauchy 序列, 可知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 > 0$, 当 $m > n \geqslant n_0$ 时, 有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. 这意味着当 $n \to \infty$ 时, 有 $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. 根据前面证明的事实, 立即可得

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{A_n}) = 0.$$

则 $(\overline{A_n})_{n\geqslant 1}$ 满足定理中全部的条件, 故存在唯一的一点 $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \overline{A_n}$, 使得

$$d(x_n, x) \leqslant \operatorname{diam}(\overline{A_n}) \to 0,\ n \to \infty,$$

即 $x_n \to x$, 所以度量空间是完备的. ■

注 2.2.7 上面定理中的条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ 不能去掉, 比如考虑 $E = \mathbb{R}$ 及集合列 $A_n = [n, \infty)$, 我们有 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n = \varnothing$. 这表明度量空间的完备性仅仅是刻画反映 "小子集" 的性质.

定理 2.2.8 设 (E, d) 是度量空间, $A \subset E$, 那么

(1) 若 (A, d) 是完备的子空间, 则 A 是 (E, d) 中的闭集.

(2) 若 (E, d) 完备且 A 是闭集, 则 (A, d) 是完备的子空间.

证明 (1) 设 A 中序列 (x_n) 收敛到 $x \in E$, 则 (x_n) 是 Cauchy 序列. 因 (A,d) 完备, 故 (x_n) 在 (A,d) 中收敛, 从而 $x \in A$, 因此 A 是 (E,d) 中的闭集.

(2) 设 (x_n) 是 A 中的 Cauchy 序列, 因 (E,d) 完备, 故 $\exists x \in E$, 使得 $x_n \to x$. 则由 A 是闭集, 得 $x \in A$, 故 (A,d) 是完备的. ■

定理 2.2.9 可数个完备度量空间的乘积空间仍然是完备的.

证明 首先证明两个度量空间乘积的情形. 设 (E_1, d_1), (E_2, d_2) 是两个完备的度量空间, $(E,d) = (E_1, d_1) \times (E_2, d_2)$ 是它们的乘积度量空间, 这里

$$d((x_1, x_2),\ (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1),\ d(x_2, y_2)\}.$$

设 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \in E$. 容易验证 $(x^{(n)})_n$ 是 (E,d) 中的 Cauchy 序列等价于 $(x_1^{(n)})_n$ 和 $(x_2^{(n)})_n$ 分别是 E_1 和 E_2 中的 Cauchy 序列. 由于 (E_1, d_1), (E_2, d_2) 都是完备的度量空间, 存在 $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, 使得 $x_1^{(n)} \xrightarrow{d_1} x_1$ 且 $x_2^{(n)} \xrightarrow{d_2} x_2$. 同样, (E,d) 中的序列 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \xrightarrow{d} (x_1, x_2)$ 等价于 $x_1^{(n)} \xrightarrow{d_1} x_1$ 且 $x_2^{(n)} \xrightarrow{d_2} x_2$. 故 (E,d) 是完备的.

一般地, 设 $(E_n, d_n), n \geqslant 1$, 是可数多个完备的度量空间, 并设

$$(E,d) = \prod_{n=1}^{\infty} (E_n, d_n).$$

这里 E 上的距离[1] d 定义为 $\forall x = (x_n),\ y = (y_n) \in E$,

$$d(x,y) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \min\{1, d_n(x_n, y_n)\}.$$

那么 (E,d) 中的序列 $x^{(k)} = (x_n^{(k)}) \xrightarrow{d} (x_n)$ 等价于 $x_n^{(k)} \xrightarrow{d_n} x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, k \to \infty$. 故 (E,d) 是完备的度量空间. ■

§2.3 一致连续映射及不动点定理

定义 2.3.1 设 (E,d) 和 (F,δ) 是两个度量空间, 若映射 $f : E \to F$ 满足: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $d(x,y) < \eta$ 时, 必有 $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$, 则称 f 是一致连续的.

一致连续性显然强于连续性, 反之不一定对. 但当 E 是紧空间时, 则逆命题成立. 下面的定理体现了这两个概念的联系.

[1]把 E_n 看成是由度量 d_n 诱导的拓扑空间, 而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 是乘积拓扑空间, 则 d 是 E 上和乘积拓扑相容的度量, 见定理 1.4.9.

定理 2.3.2 设 (E,d) 是紧度量空间. 若 $f: E \to F$ 连续, 则 f 一致连续.

证明 因 f 连续, 故任取 $\varepsilon > 0$, 对任一 $x \in E$, 存在 $\eta_x > 0$, 使得当 $y \in B(x,\eta_x)$ 时, 有 $\delta(f(x),f(y)) < \varepsilon$. 那么 $\left\{B\left(x,\frac{\eta_x}{2}\right): x \in E\right\}$ 是 E 的一个开覆盖. 则由 (E,d) 的紧性, 可知存在有限个开球 $B\left(x_1,\frac{\eta_{x_1}}{2}\right),\cdots,B\left(x_k,\frac{\eta_{x_k}}{2}\right)$ 覆盖 E. 令 $\eta = \min\left\{\frac{\eta_{x_1}}{2},\cdots,\frac{\eta_{x_k}}{2}\right\}$. 那么当 $d(x,y) < \eta$ 时, $\exists x_j, 1 \leqslant j \leqslant k$, 使得 $x \in B\left(x_j,\frac{\eta_{x_j}}{2}\right)$, 而

$$d(y,x_j) \leqslant d(y,x) + d(x,x_j) < \eta + \frac{\eta_{x_j}}{2} \leqslant \eta_{x_j}.$$

那么

$$\delta(f(x),f(y)) \leqslant \delta(f(x),f(x_j)) + \delta(f(y),f(x_j)) < 2\varepsilon.$$

因此 f 一致连续. ■

注 2.3.3 一致连续映射的一个重要性质是把 Cauchy 序列映射成 Cauchy 序列, 即若 (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列, 则 $(f(x_n))$ 是 F 中的 Cauchy 序列.

定理 2.3.4 (一致连续映射的扩展) 设 (E,d) 和 (F,δ) 是两个度量空间, (F,δ) 是完备的且 E_0 是 E 中的稠密子集, 若映射 $f: E_0 \to F$ 一致连续, 则 f 可以唯一地扩展成 (E,d) 到 (F,δ) 的一致连续映射 $\tilde{f}: E \to F$.

证明 首先我们构造 f 的一个扩展映射. 由 E_0 的稠密性, 可知对 $\forall x \in E$, 存在 E_0 中的序列 (x_n) 收敛于 x. 因 $f: E_0 \to F$ 一致连续, 故 $(f(x_n))$ 是 F 中的 Cauchy 序列, 又因 F 是完备的, 故存在 $y \in F$, 使得 $(f(x_n))$ 收敛于 y. 现定义 $\tilde{f}(x) = y$. 由于 E_0 中收敛于 x 的序列并不唯一, 故需证明这一定义不依赖序列 (x_n) 的选择. 设序列 (x'_n) 也收敛于 x, 相应地, 定义 $y' = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$. 那么由 $f: E_0 \to F$ 的一致连续性, 以及 (x_n) 和 (x'_n) 均收敛于 x, 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(f(x_n),f(x'_n)) = 0$. 故由度量的连续性 (见定理 2.1.3), 可得

$$\delta(y,y') = \lim_{n\to\infty} \delta(f(x_n),f(x'_n)) = 0,$$

因此 $y = y'$. 显然, $\tilde{f}|_{E_0} = f$, 即 $\tilde{f}$ 是 f 的一个扩展.

接下来证明由此定义的 $\tilde{f}: E \to F$ 也是一致连续的. 任取 $\varepsilon > 0$, 由于 $f: E_0 \to F$ 一致连续, 故存在 $\eta > 0$, 当 $a,b \in E_0$ 且 $d(a,b) < \eta$ 时, 有 $\delta(f(a),f(b)) < \varepsilon$. 那么对任意 $a',b' \in E$, 因 E_0 在 E 中稠密, 存在 E_0 中的序列 (a_n), (b_n), 满足 $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b' = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 因此存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $d(a',a_n) < \frac{\eta}{3}$, $d(b',b_n) < \frac{\eta}{3}$. 那么当 $d(a',b') < \frac{\eta}{3}$ 时, 有

$$d(a_n,b_n) \leqslant d(a_n,a') + d(a',b') + d(b_n,b') < \eta,$$

故当 $n > n_0$ 时, $\delta(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$. 根据 $\tilde{f}$ 的定义式, 可知

$$\tilde{f}(a') = \lim_{n\to\infty} f(a_n), \quad \tilde{f}(b') = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

那么由度量的连续性, 可得

$$\delta(\tilde{f}(a'), \tilde{f}(b')) = \lim_{n\to\infty} \delta(f(a_n), f(b_n)) \leqslant \varepsilon.$$

故 $\tilde{f}$ 的一致连续性得证.

最后, 若 $f' : E \to F$ 是由 $f : E_0 \to F$ 扩展而成的另一个一致连续映射, 则由 E_0 的稠密性, 对于任意 $x \in E$, 必有 E_0 中的序列 (x_n), 满足 $x_n \to x$, 使得

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

因此, $f' = \tilde{f}$. 这证明了由 $f : E_0 \to F$ 扩展而成的一致连续映射是唯一的. ■

我们下面给出一致连续映射的例子.

定义 2.3.5 设 (E, d) 和 (F, δ) 是两个度量空间, f 是从 E 到 F 的映射, 并给定 $0 < \alpha \leqslant 1$.

(1) 称 f 是一个阶数为 α 的 *Hölder* 映射, 若存在 $\lambda > 0$, 使得对任意 $x, y \in E$, 总有

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\, d(x, y)^{\alpha}.$$

(2) 称 f 是一个 *Lipschitz* 映射, 若 f 是一个阶数为 1 的 Hölder 映射, 并称满足不等式的最小常数 λ 为 f 的 *Lipschitz* 常数.

(3) 若 f 的 Lipschitz 常数 $\lambda < 1$, 则称 f 为压缩映射.

注 2.3.6 任意 Hölder 映射都是一致连续的.

例 2.3.7 当考察函数时, 以上定义中的 f 称为 Lipschitz 函数, 下面这些简单的例子可以帮助我们理解 Lipschitz 函数与函数的连续性及可微性之间的关系.

(1) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. f 是 Lipschitz 函数, 其常数为 1, 因为它的导函数的绝对值 $|\cos x| \leqslant 1$. 实际上, 可微函数是 Lipschitz 函数当且仅当它的导数有界.

(2) $f(x) = |x|$. f 是 Lipschitz 函数, 其常数为 1, 这是一个典型的不可微 Lipschitz 函数的例子.

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. f 不是 Lipschitz 函数, 因为 $x \to 0$ 时, $f'(x) \to \infty$; 但它是阶数为 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的 Hölder 函数.

下面是完备度量空间上压缩映射的不动点定理, 它是很多数学分支中的基本定理.

定理 2.3.8 设 (E,d) 是完备度量空间, $f:E\to E$ 是压缩映射, 则 f 有唯一的不动点, 即存在唯一的 $x\in E$, 使得 $f(x)=x$.

证明 首先任取 E 中的一点, 记作 x_1, 然后令

$$x_2=f(x_1),\ x_3=f(x_2),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots,$$

由此得到一个序列 (x_n). 由于 $f:E\to E$ 是压缩映射, 可知存在 $0<\lambda<1$, 使得

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n-1})&=d(f(x_{n-1}),f(x_{n-2}))\leqslant\lambda d(x_{n-1},x_{n-2})\\&\leqslant\lambda^2 d(x_{n-2},x_{n-3})\leqslant\cdots\leqslant\lambda^{n-2}d(x_2,x_1).\end{aligned}$$

那么对任意 $p\in\mathbb{N}$, 有

$$d(x_{n+p},x_n)\leqslant\left(\lambda^{n+p-2}+\cdots+\lambda^{n-1}\right)d(x_2,x_1)\to 0,\ n\to\infty,$$

故 (x_n) 是 Cauchy 序列. 由于 E 是完备的, 故 (x_n) 收敛到 E 中的一点 x. 那么

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

由此证明了不动点的存在性.

下证不动点是唯一的. 设 $x,y\in E$ 都是不动点, 则

$$d(x,y)=d(f(x),f(y))\leqslant\lambda d(x,y),$$

注意到 $0<\lambda<1$, 故必有 $x=y$, 定理得证. ■

定理 2.3.9 (参数依赖性) 设 (E,d) 是完备度量空间, 而 F 是拓扑空间, 并设 f 是从乘积拓扑空间 $F\times E$ 到 E 的连续映射且满足: 存在 $\lambda<1$, 使得对任意 $a\in F$ 及任意的 $x,y\in E$, 有

$$d(f(a,x),f(a,y))\leqslant\lambda d(x,y).$$

若对每一个 $a\in F$, 记 $x(a)$ 是由压缩映射 $f(a,\cdot)$ 确定的唯一不动点, 则映射 $g:F\to E,\ a\mapsto x(a)$ 连续.

证明 对任意 $a_0\in F$ 和 $\varepsilon>0$, 往证存在 a_0 的一邻域 $V\in\mathcal{N}(a_0)$, 使得当 $a\in V$ 时, 有 $d(x(a),x(a_0))<\varepsilon$.

由于 $x(a)$ 和 $x(a_0)$ 都是不动点, 而 $f(a,\cdot)$ 是压缩映射, 可得

$$\begin{aligned}
d(x(a),x(a_0)) &= d\left(f(a,x(a)),f(a_0,x(a_0))\right) \\
&\leqslant d\left(f(a,x(a)),f(a,x(a_0))\right)+d\left(f(a,x(a_0)),f(a_0,x(a_0))\right) \\
&\leqslant \lambda d(x(a),x(a_0))+d\left(f(a,x(a_0)),f(a_0,x(a_0))\right).
\end{aligned}$$

因此,

$$d(x(a),x(a_0))\leqslant \frac{1}{1-\lambda}d\left(f(a,x(a_0)),f(a_0,x(a_0))\right).$$

因为 $f(\cdot,x(a_0))$ 连续, 所以存在 a_0 的邻域 $V\in\mathcal{N}(a_0)$, 使得当 $a\in V$ 时, 有

$$d\left(f(a,x(a_0)),f(a_0,x(a_0))\right)<\varepsilon.$$

结合以上不等式, 我们得到

$$d(x(a),x(a_0))\leqslant \frac{\varepsilon}{1-\lambda},\ \ \forall a\in V.$$

因此, g 在 a_0 点连续. 定理得证. ■

§2.4 度量空间的完备化

如同把有理数集 $\mathbb{Q}$ 完备化得到实数集 $\mathbb{R}$ 一样, 对于一般的度量空间, 我们也可以对其完备化得到完备度量空间.

通过建立映射, 比较两个度量空间 (E,d) 和 (F,δ), 我们有如下基本概念.

定义 2.4.1 设 f 是 (E,d) 到 (F,δ) 的映射, 若任取 $x,y\in E$, 总有 $\delta(f(x),f(y))=d(x,y)$, 则称 f 是 (E,d) 到 (F,δ) 的等距映射; 若 f 还是一一映射, 则称 f 是 (E,d) 到 (F,δ) 的等距同构映射, 此时, 称 (E,d) 与 (F,δ) 等距同构.

定理 2.4.2 设 (E,d) 是一度量空间, 则存在等距意义下唯一的完备度量空间 $(\widehat{E},\widehat{d})$, 满足

(1) $E\subset\widehat{E}$.

(2) $\widehat{d}|_E=d$.

(3) E 在 $\widehat{E}$ 中稠密.

我们称 $(\widehat{E},\widehat{d})$ 是 (E,d) 的完备化度量空间.

证明 记 $\tilde{E}$ 为 E 中所有 Cauchy 序列所构成的集合, 在 $\tilde{E}$ 上定义如下的等价关系 "$\sim$":

$$(x_n),\ (y_n)\in\tilde{E},(x_n)\sim(y_n)\ \text{当且仅当}\ \lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0.$$

则由此得到 $\tilde{E}$ 上的所有等价类构成的集合, 记作 $\widehat{E}$ (即商集 $\tilde{E}/\sim$).

对任意 $a \in E$, 常数列 (a) 所代表的等价类由所有收敛于 a 的序列构成. 我们记常数列为 $\dot{a}$, 其对应的等价类为 $\widehat{a}$. 显然映射 $\iota : a \mapsto \widehat{a}$ 是从 E 到 $\widehat{E}$ 的单射, 因此可把 a 和 $\widehat{a}$ 看成同一个元素, 则有 $E \subset \widehat{E}$.

然后定义 $\widehat{E}$ 上的距离 $\widehat{d}$: 任取 $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{E}$, 设 (x_n) 和 (y_n) 分别是等价类 $\widehat{x}$ 和 $\widehat{y}$ 的代表元, 令

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

现证明如此定义的 $\widehat{d}$ 的确是 $\widehat{E}$ 上的距离:

首先证明该定义中的极限是存在的. 设 $n, m \in \mathbb{N}^*$, 因 (x_n) 和 (y_n) 都是 Cauchy 序列, 故当 $n, m \to \infty$ 时, 有

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \to 0,$$

这说明 $(d(x_n, y_n))$ 是实的 Cauchy 序列, 故必收敛.

其次证明该极限不依赖于等价类中代表元的选择. 如果 (x'_n) 和 (y'_n) 分别是等价类 $\widehat{x}$ 和 $\widehat{y}$ 的另一种代表元, 那么由等价类的定义, 可得

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leqslant d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0.$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$.

最后容易验证 $\widehat{d}$ 满足定义 2.1.1 中所有的条件.

由以上讨论立即可得, 任取 $a, b \in E$, 有 $\widehat{d}(\widehat{a}, \widehat{b}) = d(a, b)$, 此即 $\widehat{d}|_E = d$.

接下来证明 E 在 $\widehat{E}$ 中稠密. 任取 $\widehat{x} \in \widehat{E}$, 设 (x_n) 是它的一个代表元, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, $\dot{x}_n$ 表示常序列 (可看成和 $x_n \in E$ 为同一元素), 那么

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{d}(\widehat{x}, \dot{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \to 0,$$

这意味着 E 在 $\widehat{E}$ 中稠密.

下面证明 $(\widehat{E}, \widehat{d})$ 的确是一个完备的度量空间. 取 $(\widehat{x}^{(n)})$ 为 $\widehat{E}$ 中的 Cauchy 序列, 因为 E 在 $\widehat{E}$ 中稠密, 所以对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $x_n \in E$, 使得 $\widehat{d}(\widehat{x}^{(n)}, \dot{x}_n) < \frac{1}{n}$. 于是可得

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = \widehat{d}(\dot{x}_n, \dot{x}_m) &\leqslant \widehat{d}(\dot{x}_n, \widehat{x}^{(n)}) + \widehat{d}(\widehat{x}^{(n)}, \widehat{x}^{(m)}) + \widehat{d}(\dot{x}_m, \widehat{x}^{(m)}) \\ &< \frac{1}{n} + \widehat{d}(\widehat{x}^{(n)}, \widehat{x}^{(m)}) + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

由于 $(\widehat{x}^{(n)})$ 为 $\widehat{E}$ 中的 Cauchy 序列, 故知当 $n,m\to\infty$ 时, $d(x_n,x_m)\to 0$, 即 (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列, 并记其在 $\widehat{E}$ 中所代表的等价类为 $\widehat{x}$, 则有

$$\widehat{d}(\widehat{x}^{(n)},\widehat{x})\leqslant \widehat{d}(\widehat{x}^{(n)},\dot{x}_n)+\widehat{d}(\dot{x}_n,\widehat{x})<\frac{1}{n}+\widehat{d}(\dot{x}_n,\widehat{x})\to 0,\ n\to\infty,$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{x}^{(n)}=\widehat{x}$, 所以 $(\widehat{E},\widehat{d})$ 是一个完备的度量空间.

最后, 我们证明这种完备化的空间在等距意义下是唯一的. $(\widehat{E},\widehat{d})$ 满足的确切条件可以归纳为

(1) $\iota: E\to\widehat{E}$ 是单射, 可记成 $E\overset{\iota}{\hookrightarrow}\widehat{E}$.

(2) $\widehat{d}|_{\iota(E)}=d$: 任取 $a,b\in E$, 有 $d(\iota(a),\iota(b))=d(a,b)$.

(3) $\iota(E)$ 在 $\widehat{E}$ 中稠密.

也就是说 E 与 $\widehat{E}$ 的稠密子集 $\iota(E)$ 等距同构.

设 (E',d') 是另一个满足如上条件 (1), (2), (3) 的度量空间, 并记 E 到 E' 的等距映射为 ι'. 我们可定义映射

$$\begin{aligned} f:\iota(E)&\longrightarrow E'\\ \widehat{a}&\longmapsto \iota'(a). \end{aligned}$$

由 (1), (2) 知 f 是等距的, 则它是一致连续的. 又由 (3) 知 $\iota(E)$ 在 $\widehat{E}$ 中稠密以及 (E',d') 完备, 根据定理 2.3.4, 则 f 可以唯一地扩展成 $\widehat{E}$ 到 E' 的一致连续映射 $\tilde{f}$. 而且当我们任取 $\widehat{x},\widehat{y}\in\widehat{E}$, 可得

$$\begin{aligned} d'(\tilde{f}(\widehat{x}),\ \tilde{f}(\widehat{y}))&=d'(\lim_{n\to\infty}f(\dot{x}_n),\ \lim_{n\to\infty}f(\dot{y}_n))\\ &=\lim_{n\to\infty}d'(f(\dot{x}_n),\ f(\dot{y}_n))\\ &=\lim_{n\to\infty}d(\dot{x}_n,\ \dot{y}_n)=d(\widehat{x},\ \widehat{y}). \end{aligned}$$

故 $\tilde{f}:\widehat{E}\to E'$ 也是等距映射, 因此也是单射. 又因为 $\iota'(E)$ 在 E' 中稠密, 故知 $\tilde{f}$ 也是满射, 即得到 $\tilde{f}$ 是双射. 所以在等距同构意义下, E 的完备化度量空间是唯一的. ■

注 2.4.3 若 E 本身是完备的, 则 $\widehat{E}=E$.

§2.5 度量空间的紧性

在第一章中, 我们给出了紧拓扑空间的定义. 但在度量空间中紧性可以有更丰富的刻画, 特别是用序列的收敛性来刻画紧性. 这里给出的定理 2.5.1 是度量空间的紧性刻画定理, 将在以后多次用到.

定理 2.5.1 设 (E,d) 是度量空间, 则下面的命题等价:

(1) (E,d) 是紧空间.

(2) 任一 E 中的无限子集必有凝聚点 (称这样的 E 是列紧的).

(3) 任一 E 中的序列有收敛的子列 (称这样的 E 是序列紧的).

(4) (E,d) 是完备的且预紧的 (预紧性是指: 对任意 $\varepsilon > 0$, E 可被有限个以 ε 为半径的开球覆盖).

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 用反证法, 假设 E 中的无限集 F 没有凝聚点. 那么任取 $x \in E$, 存在 $\varepsilon_x > 0$, 满足 $B(x,\varepsilon_x) \cap (F \setminus \{x\}) = \varnothing$. 显然有 $E = \bigcup\limits_{x\in E} B(x,\varepsilon_x)$, 即 $(B(x,\varepsilon_x))_{x\in E}$ 是 E 的开覆盖. 由于 E 是紧的, 故存在有限子覆盖, 设为 $(B(x_i,\varepsilon_{x_i}))_{1\leqslant i\leqslant n}$. 注意 $\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} B(x_i,\varepsilon_{x_i})$ 中最多只含 F 中有限个点, 这与 F 是无限集矛盾. 故 F 中必有凝聚点.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 (x_n) 是 E 中的无穷序列, 若 (x_n) 中仅有有限个不同的值, 则显然有收敛子列. 现设 (x_n) 中有无限个不同的值, 则由 (2) 知有凝聚点. 记 x 为其一凝聚点. 容易选择 (x_n) 的子序列, 使其收敛到 x.

(3) $\Rightarrow$ (4). 任取 E 中的 Cauchy 序列 (x_n), 由 (3) 可知 (x_n) 存在收敛子列. 我们知道若一 Cauchy 序列有收敛子列, 则它必收敛, 故 E 完备.

假设 E 不是预紧的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 E 的开覆盖 $(B(x,\varepsilon_0))_{x\in E}$ 不存在有限的子覆盖. 那么任取 $x_1 \in E$, 必定 $E \not\subset B(x_1,\varepsilon_0)$. 任取 $x_2 \in E \setminus B(x_1,\varepsilon_0)$, 则有 $E \not\subset B(x_1,\varepsilon_0) \cup B(x_2,\varepsilon_0)$. 依此下来可以给出一个无穷序列 $\{x_n\}$, 使得对任意 $m,n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $d(x_m,x_n) \geqslant \varepsilon_0$, 显然该序列不存在收敛子列, 与 (3) 矛盾. 故 E 是预紧的.

(4) $\Rightarrow$ (3). 设 E 是完备的预紧空间, 由于完备性, 我们只需证明 E 中的任一序列 (x_n) 有 Cauchy 子序列.

首先取 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, 由于 E 是预紧空间, 故存在有限子集 $F \subset E$, 使得 $E = \bigcup\limits_{x\in F} B(x,\varepsilon_1)$, 则无穷序列 (x_n) 必有一个无穷子序列包含于某个开球 $B(x,\varepsilon_1)$. 我们记该子序列为 $(x_{1_i})_{i\geqslant 1}$; 再令 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, 则又有 $(x_{1_i})_{i\geqslant 1}$ 的无穷子列 $(x_{2_i})_{i\geqslant 1}$ 包含于某个以 ε_2 为半径的开球中; 依此类推, 对任一个整数 $n \in \mathbb{N}^*$, 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, 可以给出一个无穷序列 $(x_{n_i})_{i\geqslant 1}$, 它是 $(x_{(n-1)_i})_{i\geqslant 1}$ 的子序列, 并且满足: 对任意 $i,j \geqslant 1$, 有

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

接下来运用 "对角线选择法", 可以得到 (x_n) 的子列 $(x_{i_i})_{i\geqslant 1}$, 该序列满足: 当 $i,j \geqslant n$ 时, $d(x_{i_i}, x_{j_j}) < \frac{1}{2^{n-1}}$. 故 $(x_{i_i})_{i\geqslant 1}$ 是 (x_n) 的一个 Cauchy 子序列.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $(O_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个开覆盖. 我们首先证明存在一个常数 $\lambda > 0$, 使得当 $0 < r < \lambda$ 时, 对任意一点 $x \in E$, 开球 $B(x,r)$ 必定包含于开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 的某一元素中 (该常数 λ 称为开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 的 Lebesgue 常数).

假设开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 不存在这样的 Lebesgue 常数, 那么任取 $n \in \mathbb{N}^*$, 则存在某一点 $x_n \in E$ 及常数 $0 < r_{x_n} < \frac{1}{n}$, 使得开球 $B(x_n, r_{x_n})$ 不包含于 $(O_i)_{i\in I}$ 的任一元素. 由此我们可以给出一无穷序列 (x_n), 由 (3) 可知, (x_n) 有收敛的子列 (x_{n_k}), 设它的极限点为 x_0. 注意 x_0 属于某个 O_{i_0}, $i_0 \in I$, 而 O_{i_0} 是开集, 故存在 $r_0 > 0$, 使得 $B(x_0, r_0) \subset O_{i_0}$. 因 (x_{n_k}) 收敛到 x_0, 故存在常数 $k_0 \in \mathbb{N}$, 当 $k > k_0$ 时, 有 $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{r_0}{2}$. 取一个整数 $N > k_0$, 并且 $n_N > \frac{2}{r_0}$, 则任取 $y \in B(x_{n_N}, r_{x_{n_N}})$, 有

$$d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x_0) < r_{x_{n_N}} + \frac{r_0}{2} < \frac{1}{n_N} + \frac{r_0}{2} < r_0.$$

因此我们得到开球 $B(x_{n_N}, r_{x_{n_N}}) \subset B(x_0, r_0)$ 以及 $B(x_{n_N}, r_{x_{n_N}}) \subset O_{i_0}$. 这与 $B(x_{n_N}, r_{x_{n_N}})$ 的选择矛盾.

我们已经证明了开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 有 Lebesgue 常数 λ, 则 $(B(x, \frac{\lambda}{2}))_{x\in E}$ 是 E 的一个开覆盖. 根据 (3) $\Rightarrow$ (4) 的证明, 该开覆盖存在有限的子覆盖, 设为 $(B(x_i, \frac{\lambda}{2}))_{1\leqslant i\leqslant n}$. 而由 Lebesgue 常数的定义可知, 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$, $B(x_i, \frac{\lambda}{2})$ 包含于开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 的某一元素中, 于是开覆盖 $(O_i)_{i\in I}$ 中存在有限的子覆盖.

至此, 该定理中四个命题的等价性得证. ■

注 2.5.2 度量空间的这种序列形式的紧性刻画对一般的拓扑空间不成立. 然而容易证明当 E 是紧的, 则 E 中任意序列具有粘着值 (见第一章习题).

注 2.5.3 设 E 是度量空间, $F \subset E$, $\varepsilon > 0$. 我们称 F 是 E 的 ε–网, 若 $(B(x,\varepsilon))_{x\in F}$ 覆盖 E. E 为预紧的等价于说对任意 $\varepsilon > 0$, E 存在有限的 ε–网.

注 2.5.4 定理的证明还说明 E 为预紧的当且仅当 E 的任一序列存在着 Cauchy 子序列.

定义 2.5.5 设 (E,d) 是度量空间, $A \subset E$. 若 $\overline{A}$ 是紧的, 则称 A 是相对紧的.

推论 2.5.6 *设 (E,d) 是度量空间, $A \subset E$ 是相对紧的当且仅当 A 中的无穷序列有子序列收敛到 E 中的元素.*

证明 $A \subset E$ 是相对紧的也就是说 $\overline{A}$ 是 E 中的紧集, 由定理 2.5.1 可知该推论成立. ■

推论 2.5.7 若度量空间 (E,d) 完备, 则 $A \subset E$ 是相对紧的当且仅当 A 是预紧的.

习 题 二

1. 完备性不是一拓扑概念, 我们用两个例子说明这一点.

(a) 设有函数 $\phi(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, 并定义

$$d(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

证明由此定义的 d 是 $\mathbb{R}$ 上的距离并和 $\mathbb{R}$ 上通常意义下的拓扑一致, 但 d 不完备.

(b) 更一般地, 设 O 是完备度量空间 (E,d) 上的开子集, 且 $O \neq E$. 映射 $\phi\colon O \to E \times \mathbb{R}$ 定义为

$$\phi(x) = \left(x, \frac{1}{d(x, O^c)}\right) := (x, \rho(x)), \ \forall x \in O.$$

证明 ϕ 是从 O 到 $E \times \mathbb{R}$ 的一个闭子集上的同胚. 并由此导出 O 上存在一个完备的距离, 由其所诱导的拓扑和 d 在 O 上所诱导的拓扑一致 (注意, $(O, d\big|_O)$ 一般并不完备).

2. 证明度量空间 (E, d) 是完备的充分必要条件是: 对 E 中任意序列 (x_n), 若对任一个 $n \geqslant 1$ 有 $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant 2^{-n}$, 则序列 (x_n) 收敛.

3. 设 (E,d) 是度量空间, (x_n) 是 E 中 Cauchy 序列, 并有 $A \subset E$. 假设 A 的闭包 $\overline{A}$ 在 E 中完备并且 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, A) = 0$. 证明 (x_n) 在 E 中收敛.

4. 设 (E,d) 是度量空间, $\alpha > 0$. 假设 $A \subset E$ 满足对任意 $x, y \in A$ 且 $x \neq y$, 必有 $d(x,y) \geqslant \alpha$. 证明 A 是完备的.

5. 设 (E, d) 是度量空间且 $A \subset E$. 假设 A 中任一 Cauchy 序列在 E 中收敛, 证明 A 的闭包 $\overline{A}$ 是完备的.

6. 设 (E, d) 是度量空间, 而 (x_n) 是 E 中发散的 Cauchy 序列. 证明

(a) 任取 $x \in E$, 序列 $(d(x, x_n))$ 收敛一于个正数, 记为 $g(x)$.

(b) 函数 $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ 是从 E 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数.

(c) 上面的函数无界.

7. 设 (E, d) 和 (F, δ) 都是度量空间, $f\colon (E,d) \to (F,\delta)$ 是一致连续的双射并且逆映射 f^{-1} 也是一致连续的. 证明对任意 $A \subset E$, $f(A)$ 完备当且仅当 A 完备.

8. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一致连续函数. 证明存在两个非负常数 a 和 b, 使得

$$|f(x)|\leqslant a\|x\|+b,$$

这里 $\|x\|$ 是 x 的欧氏范数.

9. 设 $f:\ E\to F$ 是两个度量空间之间的连续映射, 并设 f 在 E 的每个有界子集上一致连续.

(a) 证明若 (x_n) 是 E 中的 Cauchy 序列, 则 $f(x_n)$ 也是 F 中的 Cauchy 序列.

(b) 设 E 在度量空间 E' 中稠密并且 F 是完备的, 证明 f 可以唯一地扩展成从 E' 到 F 的连续映射.

10. 构造一个反例说明: 在不动点定理中, 如果我们把映射 f 满足的条件减弱为

$$d(f(x),f(y))<d(x,y),\quad \forall x,y\in E \text{ 且 } x\neq y,$$

则结论不成立.

提示: 考虑函数 $f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, $x\in[0,+\infty)$.

11. 设 (E,d) 是一个完备的度量空间, f 是其上的映射, 并满足 $f^n=f\circ\cdots\circ f$ (n 次幂) 是压缩映射. 证明 f 有唯一的不动点, 并给出例子说明 f 可以不连续.

12. 记区间 $I=(0,\infty)$ 上通常的拓扑为 τ.

(a) 证明 τ 可由如下完备的距离 d 诱导:

$$d(x,y)=|\log x-\log y|.$$

(b) 设函数 $f\in C^1(I)$ 满足对某个 $\lambda<1$, 任取 $x\in I$, 都有 $x|f'(x)|\leqslant\lambda f(x)$. 证明 f 在 I 上存在唯一的不动点.

13. 设 E 为可数集, 其元素记为 $a_1,a_2,\cdots$. 定义

$$d(a_p,a_p)=0 \text{ 且当 } p\neq q \text{ 时, } d(a_p,a_q)=10+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

(a) 证明 d 是 E 上的距离并且 E 成为一个完备的度量空间.

(b) 设 $f:\ E\to E$ 定义为 $f(a_p)=a_{p+1}$. 证明当 $p\neq q$ 时, 有

$$d(f(a_p),f(a_q))<d(a_p,a_q),$$

但是 f 没有不动点.

14. 本习题的目的是给不动点定理一个新的证明方法. 设 (E,d) 是非空的完备度量空间, $f:E\to E$ 是压缩映射. 任取 $R\geqslant 0$, 设

$$A_R=\{x\in E: d(x,f(x))\leqslant R\}.$$

(a) 证明 $f(A_R) \subset A_{\lambda R}$.

(b) 证明当 $R > 0$ 时, A_R 是 E 中的非空闭子集.

(c) 证明任取 $x, y \in A_R$, 有 $d(x,y) \leqslant 2R + d(f(x), f(y))$. 并由此导出

$$\operatorname{diam}(A_R) \leqslant 2R/(1-\lambda).$$

(d) 证明 A_0 非空.

15. 设 (E,d) 是完备度量空间, f 和 g 是 E 上两个可交换的压缩映射 (即 $f \circ g = g \circ f$). 证明 f 和 g 有唯一的、共同的不动点.

通过反例说明如果去掉可交换的条件, 则结论不成立.

16. 本习题的目的是把上一习题的结论推广到更一般的情形, 在某种意义上说是非交换的压缩映射不动点定理. 设 (E,d) 是完备的度量空间. 定义联系于集合 $A \subset E$ 的距离函数 d_A 如下:

$$d_A(x) := d(x, A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

并设 $\mathcal{C}$ 表示 E 的所有紧子集构成的集族. 对任意的 $A, B \in \mathcal{C}$, 定义

$$h(A,B) = \sup_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)|.$$

(a) 证明 h 是 $\mathcal{C}$ 上的一个距离.

(b) 任取 $F \subset E$, 令 $F_\varepsilon = \{\varepsilon : d_F(x) \leqslant \varepsilon\}$. 证明

$$h(A,B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 : A \subset A_\varepsilon,\ B \subset B_\varepsilon\}.$$

(c) 证明 $(\mathcal{C}, h)$ 完备.

(d) 现在令 $f_1, \cdots, f_n$ 是 E 上的 n 个压缩映射. 定义 $(\mathcal{C}, h)$ 上的映射 T 为

$$T(A) = \bigcup_{k=1}^{n} f_k(A),\ \ A \in \mathcal{C}.$$

证明 T 是压缩映射. 并由此导出存在唯一的一个紧子集 K, 使得 $T(K) = K$.

第三章　赋范空间和连续线性映射

赋范空间是在向量空间上赋予 “范数” 而产生的抽象空间形式, 由范数自然形成一种距离拓扑. 特别地, 我们把完备的赋范空间称为 Banach 空间, 函数空间 L_p 为它提供了具体的无穷维模型. 实际上, 我们所见到的大部分函数空间都是赋范空间, 这类空间是不同学科中重要的基础.

§3.1 介绍赋范空间和 Banach 空间的概念和基本性质, 在这里我们特别指出, 有限维和无穷维的赋范空间存在本质的不同, 核心的结果是 Riesz 定理. §3.2 研究赋范空间之间的连续线性算子, 这些算子构成的集合又是新的赋范空间, 从而形成泛函分析中内容丰富的算子理论. 在 §3.3, 我们主要讨论函数空间 L_p, 由可测函数构成的一类具体的 Banach 空间. 在这里, 泛函分析的一些抽象性质通过具体的不等式反映出来, 比如 Minkowski 不等式是使 L_p 成为一个赋范空间的主要保证, Hölder 不等式为我们将来研究 L_p 空间的对偶提供了重要工具 (见第九章).

§3.1　Banach 空间

我们从赋范空间的定义开始. 这里 $\mathbb{K}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义 3.1.1　设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, $p: E \to [0, \infty)$ 是 E 上的实值函数, 若任取 $x, y \in E$ 及 $\lambda \in \mathbb{K}$, 它满足以下条件

(1) **正定性**: $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) **正齐性**: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;

(3) **三角形不等式**: $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,

则称 p 是 E 上的范数, 通常记为 $\|\cdot\|$, 并称 $(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间.

注 3.1.2　显然, 令 $d(x, y) = \|x - y\|$, 则 (E, d) 是一个度量空间, 并且 d 是一个平移不变的距离, 即任取 x, y, $a \in E$, 有 $d(x-a, y-a) = d(x, y)$. 这一距离 d 诱导 E 上一个拓扑. 今后, 除非特别指出, 赋范空间上的拓扑均指这一拓扑. 依此拓扑的收敛往往称为依范数收敛, 如 E 中的序列 (x_n) 依范数收敛到 x 等价于 $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$.

例 3.1.3　下面是几个典型的例子:

(1) 在欧氏空间 $\mathbb{K}^n$ 上, 其中的元素记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 可定义如下不同的范数:

- $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$;
- $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 称此范数为 $\mathbb{K}^n$ 上的欧氏范数;
- $\|x\|_1 = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

(2) 记 $C([0,1])$ 为 $[0,1]$ 上的实值 (或复值) 的连续函数所组成的向量空间, 对任意 $f\in C([0,1])$ 定义

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|.$$

则 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C([0,1])$ 上的一个范数.

(3) 记 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 为所有系数在 $\mathbb{K}$ 的 n 阶方阵. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一个范数. $\mathbb{K}^n$ 中的向量看成 $n\times 1$ 列矩阵. 对 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 和 $x\in\mathbb{K}^n$, Ax 是 A 和 x 的矩阵乘积, 因此是一 $n\times 1$ 矩阵, 即 $\mathbb{K}^n$ 中的一个向量. 定义

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n,\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|.$$

这样我们得到 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 上的一个范数.

定义 3.1.4 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, 若 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是由范数诱导的距离, 而 (E,d) 是完备的度量空间, 则称 $(E,\|\cdot\|)$ 为 *Banach* 空间.

注 3.1.5 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 E 的完备化空间 $\widehat{E}$ 也是一个赋范空间, 即 $(\widehat{E},\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

赋范空间上约定有线性运算, 自然地, 我们可以给出有限和的推广概念 —— 无穷级数, 即可数多个元素 x_n $(n\geqslant 1)$ 相加的形式 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$, 并约定相关的收敛性概念如下:

定义 3.1.6 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 是此空间中的无穷级数, 我们称

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

为级数的部分和. 并且

(1) 若级数的部分和序列 (S_n) 在 $(E,\|\cdot\|)$ 中依范数收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 在

$(E,\|\cdot\|)$ 中收敛, 并称它的极限值 S 为无穷级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 的和, 记作

$$S=\sum_{n\geqslant 1} x_n.$$

(2) 若 (S_n) 为 Cauchy 序列, 则称 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 为 *Cauchy* 级数.

(3) 若数项级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 绝对收敛.

注 3.1.7 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

由定义可知, 建立在部分和的基础上, 级数的收敛和 Cauchy 级数的关系与序列的收敛和 Cauchy 序列的关系完全对应. 不像数值级数那样, 绝对收敛级数不一定收敛. 其实, 我们有如下结果.

定理 3.1.8 赋范空间 $(E,\|\cdot\|)$ 是完备的充分必要条件是绝对收敛级数必收敛.

证明 必要性. 设 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 是绝对收敛级数, 则任取 $n,p\in\mathbb{N}^*$, 由三角形不等式有

$$\|S_{n+p}-S_n\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|\to 0,\ \ n,p\to\infty.$$

即 (S_n) 是 E 中 Cauchy 序列. 由于 $(E,\|\cdot\|)$ 是完备的, 故知 (S_n) 收敛, 也就是说级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ 收敛.

充分性. 任取 $(E,\|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 序列 (x_n), 我们可选择 (x_n) 的子列 (x_{n_k}), 使得

$$\left\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right\|\leqslant 2^{-k},$$

则由此得到数项级数 $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right\|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{k\geqslant 1}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 绝对收敛. 那么由充分性的假设知道级数 $\sum\limits_{k\geqslant 1}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 收敛, 从而子序列 (x_{n_k}) 收敛. 因 (x_n) 是 Cauchy 序列, 故子序列收敛蕴含着序列 (x_n) 本身收敛, 即证 $(E,\|\cdot\|)$ 是完备的. ■

任一向量空间上可有不同的范数, 下列定义提供了范数之间的一个等价关系.

定义 3.1.9 设 p 和 q 是向量空间 E 上的两个范数, 若存在常数 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, 使得对每一个 $x \in E$, 都有

$$C_1 p(x) \leqslant q(x) \leqslant C_2 p(x),$$

则称范数 p 和 q 是等价的.

注 3.1.10 设 p 和 q 为 E 上的等价范数. 若记 I_E 为 E 上的恒等映射, 则 $\mathrm{I}_E : (E,p) \to (E,q)$ 和其逆映射都是 Lipschitz 映射, 因此一致连续. 所以 (E,p) 是完备的当且仅当 (E,q) 是完备的, 子集 $A \subset E$ 在 (E,p) 中是紧的当且仅当它在 (E,q) 中是紧的.

定理 3.1.11 *设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间, 那么 E 上所有的范数都等价.*

证明 设数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 E 的维数为 n, 即 $\dim E = n$, 并设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 E 的一组基. 那么由向量空间理论, 任意 $x \in E$, 有唯一的线性表示式:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

则 $\varPhi : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto x$ 是从 $\mathbb{K}^n$ 到 E 上的双射. 设 $\|\cdot\|$ 是 E 上的范数, 由范数的三角形不等式立即可得

$$\|x\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\| \right) \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant C \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty, \tag{3.1}$$

这里 $C = \sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\| > 0$. 更一般地, 对任意 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, 有

$$\|x - y\| \leqslant C \|(x_1 - y_1, \cdots, x_n - y_n)\|_\infty.$$

因此我们得到 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 上的连续实值函数:

$$\varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to [0, +\infty), \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|x\| = \|\varPhi(x_1, \cdots, x_n)\|.$$

那么 φ 在 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 的单位球面上取得最小值 (因该球面是紧集), 记该最小值为 C'. 由范数的正定性, 知 φ 在单位球面上永远大于 0, 故 $C' > 0$. 对任意 $x \in E$ 且 $x \neq 0$, 其对应的 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ 满足 $(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$. 那么 $\frac{(x_1, \cdots, x_n)}{\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty}$ 在 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 的单位球面上. 因而

$$\|x\| = \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty \, \varphi\left(\frac{(x_1, \cdots, x_n)}{\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty} \right) \geqslant C' \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty .$$

由上式和 (3.1) 式得出, 存在正数 C, C', 使得对每一个 $x \in E$, 有

$$C' \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant C \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty .$$

由此得出 E 上所有的范数都等价. ■

注 3.1.12 范数等价性是有限维向量空间的重要特征, 其证明是通过建立和 n 维欧氏空间的同构关系得到, 我们还可以得到任何有限维赋范空间都完备, 并且其上的有界闭集必为紧集:

(1) 有限维赋范空间是 Banach 空间. 设 $\|\cdot\|$ 是 E 上的范数, 并给出 E 上的另一范数

$$|||x||| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = \|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty ,$$

由上述证明知 E 上的任一范数都等价于 $|||\cdot|||$, 并且 $\varPhi\colon (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E, |||\cdot|||)$ 是一线性等距映射. 显然, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的, 因此, $(E, |||\cdot|||)$ 也是完备的. 另外, 和完备范数等价的范数也是完备的, 故 E 上的任意范数都完备.

(2) 有限维空间中的有界闭集为紧集. 设 A 是 $(E, \|\cdot\|)$ 中的有界闭集, 则 $\varPhi^{-1}(A)$ 也是 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 中的有界闭集, 故 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 紧, 从而 A 在 $(E, |||\cdot|||)$ 中是紧的, 那么, 由范数等价性, A 在 $(E, \|\cdot\|)$ 中也是紧的.

注 3.1.13 由于任何有限维赋范空间都完备, 而完备的子空间是闭集, 故可得任一赋范空间的有限维子空间是其闭向量子空间.

定理 3.1.14 (Riesz) 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 E 是有限维的充分必要条件是 $(E, \|\cdot\|)$ 上的闭单位球是紧的.

我们先给出一个引理.

引理 3.1.15 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, F 是 E 的闭线性子空间且 $F \neq E$, 那么任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $e \in E$, 使得 $\|e\| = 1$ 且满足 $d(e, F) \geqslant 1 - \varepsilon$.

证明 因 $F \neq E$, 故存在 $x \in E \setminus F$, 记 x 到 F 的距离为 d, 即

$$d = d(x, F) = \inf \{\|x - y\| : \ y \in F\} .$$

因 F 是闭的, 故 $d > 0$. 取一点 $y \in F$, 使得 $d \leqslant \|x - y\| \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon}$, 并设 $e = \frac{x-y}{\|x-y\|}$, 则 e 为 E 中的单位向量且 $e \notin F$. 那么任取一点 $z \in F$, 有

$$\|e - z\| = \left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} - z \right\| = \frac{1}{\|x - y\|} \|x - y - \|x - y\| z\| \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon,$$

即 e 满足 $d(e, F) \geqslant 1 - \varepsilon$. ■

Riesz 定理的证明 必要性可由定理 3.1.11 保证 (见注 3.1.12), 故只需证明充分性.

假设 E 是无穷维的. 首先记 E 中的单位向量 x_1, 并设

$$F_1 = \mathbb{K}x_1 = \{\lambda x_1 :\ \lambda \in \mathbb{K}\},$$

则 F_1 是由 x_1 生成的向量子空间, 并且 $\dim F_1 = 1$. 由于有限维线性赋范空间总是完备的, 那么 F_1 是 E 的完备子空间, 故它一定是 E 中的闭子空间. 又因 E 是无穷维的, 故 $F_1 \neq E$, 则根据上面引理, 存在 $x_2 \in E$ 满足 $\|x_2\| = 1$ 且 $d(x_2, F_1) \geqslant \frac{1}{2}$, 故 $\|x_1 - x_2\| \geqslant \frac{1}{2}$. 记由 x_1, x_2 生成的线性子空间为 F_2, 即 $F_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$, 且 $\dim F_2 \leqslant 2$. 同样地, $F_2 \neq E$, 则仍由以上引理可选择 $x_3 \in E$, 满足 $\|x_3\| = 1$ 且 $d(x_3, F_2) \geqslant \frac{1}{2}$.

继续上述构造, 则由数学归纳法得到一列单位向量 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 满足 $d(x_j, x_k) \geqslant \frac{1}{2}$, $j \neq k$. 由此我们可以得到单位球面上的序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$, 其元素两两之间的距离不小于 $\frac{1}{2}$, 故 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 没有收敛子列. 这与单位球面是紧的矛盾, 故 E 必须是有限维的. ■

§3.2 连续线性映射

定义 3.2.1 设 E, F 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个向量空间, $u:\ E \to F$ 是映射, 若对任意的 $\lambda \in \mathbb{K}$ 及任意的 $x, y \in E$, 有

$$u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y),$$

则称 $u:\ E \to F$ 是线性映射 (也称为线性算子), 并令 $\mathcal{L}(E, F)$ 表示所有从 E 到 F 的线性映射所组成的集合. 当 $E = F$ 时, 简记 $\mathcal{L}(E, E)$ 为 $\mathcal{L}(E)$.

注 3.2.2 (1) $\mathcal{L}(E, F)$ 也是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, 其上的线性运算定义为: 对任意 $\lambda \in \mathbb{K}$ 及任意的 $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\lambda u : E \to F,\quad x \mapsto \lambda u(x);$$

$$u + v : E \to F,\quad x \mapsto u(x) + v(x).$$

(2) 线性映射 $u \in \mathcal{L}(E, F)$ 的核空间记为 $\ker(u)$, 即

$$\ker(u) = \{x \in E :\ u(x) = 0\}.$$

显然, $\ker(u)$ 是 E 的向量子空间, 并且 u 是单射当且仅当 $\ker(u) = \{0\}$.

定理 3.2.3 设 E 和 F 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范空间, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, 那么以下命题等价:

(1) u 在 E 上连续.

(2) u 在某一点连续.

(3) u 在原点连续.

(4) 存在 $C \geqslant 0$, 使得 $\forall x \in E$, 有 $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 u 在一点 $x_0 \in E$ 处连续, 则任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 使得当 $x \in B(x_0, r)$ 时, 有 $\|u(x) - u(x_0)\| < \varepsilon$. 那么对任意 $y \in B(0, r)$, 有

$$\|u(y)\| = \|u(x_0 + y) - u(x_0)\| < \varepsilon,$$

故 u 在原点处连续.

(3) $\Rightarrow$ (4). 若 u 在原点处连续, 则存在 $r_0 > 0$, 使得当 $y \in \overline{B}(0, r_0)$ 时, 有 $\|u(y)\| \leqslant 1$. 我们任取 $x \in E$ 且 $x \neq 0$, 并设 $y = r_0 \frac{x}{\|x\|}$. 则由此得到的 y 满足 $y \in \overline{B}(0, r_0)$, 于是

$$\|u(y)\| = \left\|u\left(r_0 \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant 1,$$

从而有

$$\|u(x)\| \leqslant \frac{\|x\|}{r_0}.$$

取 $C = \frac{1}{r_0}$, (4) 得证.

(4) $\Rightarrow$ (1). 由于 u 是线性的, 则由 (4) 可知对任意 $x, y \in E$, 有

$$\|u(x) - u(y)\| \leqslant C\|x - y\|,$$

即 u 是 Lipschitz 映射, 故 u 在 E 上一致连续, 当然连续. ■

定义 3.2.4 设 E, F 是赋范空间, $u: E \to F$ 为线性映射, 若存在 $C \geqslant 0$, 使得对任意 $x \in E$, 有

$$\|u(x)\| \leqslant C\|x\|,$$

则称 u 是有界的. 令

$$\|u\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|},$$

我们称 $\|u\|$ 为 u 的范数, 并记从 E 到 F 的有界线性映射 (或称有界线性算子) 的全体为 $\mathcal{B}(E,F)$. 当 $E = F$ 时, 简记 $\mathcal{B}(E,E)$ 为 $\mathcal{B}(E)$.

注 3.2.5 (1) 由定理 3.2.3 可知, 线性映射 u 的有界性等价于其连续性.

(2) 由以上定义, 线性映射 u 在 E 上有界实际上是指 $\|u(x)\|$ 在 E 的单位球 (或有界集) 上是有界的. 值得指出的是, 作为一个函数, 除非 u 恒等于 0, $\|u(x)\|$ 不可能在整个 E 上有界. 实际上, 如果存在常数 C, 使得对任意 $x \in E$, 有 $\|u(x)\| \leqslant C$, 那么固定 x, 有

$$m\|u(x)\| = \|u(mx)\| \leqslant C, \quad \forall m > 0.$$

则 $\|u(x)\| \leqslant \frac{C}{m}$, 令 $m \to \infty$, 可得 $u(x) = 0$. 这意味着线性映射有界性的定义虽然和一般函数有界性的定义看起来不同, 但是并不容易混淆.

(3) 范数 $\|u\|$ 可以等价地定义为

$$\|u\| = \sup_{x\in E, \|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|u(x)\|.$$

并且对任意 $x \in E$, 有 $\|u(x)\| \leqslant \|u\|\,\|x\|$, 这里 $\|u\|$ 就是定义 3.2.4 中的最优常数 C (留作练习).

(4) $\mathcal{B}(E,F)$ 是 $\mathcal{L}(E,F)$ 的向量子空间, 且 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 上的范数, 因此 $\mathcal{B}(E,F)$ 在此范数下成为一个赋范空间 (留作练习).

定理 3.2.6 *设 E 是赋范空间, F 是 Banach 空间, 那么 $\mathcal{B}(E,F)$ 也是一个 Banach 空间.*

证明 设 (u_n) 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 中的 Cauchy 序列, 则任取 $x \in E$, 有

$$\|u_n(x) - u_m(x)\| = \|(u_n - u_m)(x)\| \leqslant \|u_n - u_m\|\,\|x\|. \tag{3.2}$$

那么可得 $(u_n(x))$ 是 F 中的 Cauchy 序列. 因 F 是 Banach 空间, 故当 $n \to \infty$ 时, $(u_n(x))$ 收敛于一点, 记其极限为 $u(x)$, 那么我们确定了一个映射 $u : E \to F$. 由定义很容易证明:

(1) $u : E \to F$ 是线性映射.

(2) 线性映射 u 是有界的. 在 (3.2) 式中固定 m, 令 $n \to \infty$, 则有

$$\|u(x) - u_m(x)\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|\,\|x\|. \tag{3.3}$$

由于 (u_n) 是 Cauchy 序列, 可得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_m\| < \infty$, 故 $u - u_m \in \mathcal{B}(E,F)$. 又因 $\mathcal{B}(E,F)$ 是向量空间, 故 $u = (u - u_m) + u_m \in \mathcal{B}(E,F)$.

(3) 又由 (3.3) 式可得 $\|u - u_m\| \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|$, 那么

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0,$$

故在 $\mathcal{B}(E,F)$ 中, 有 $u_m \to u$.

因此, $\mathcal{B}(E,F)$ 是一个 Banach 空间. ■

推论 3.2.7 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, 则 $\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ 是一个 Banach 空间.

定义 3.2.8 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, 称 $\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ 为 E 的对偶空间, 记作 E^*; 并称 E^* 中的元素为 E 上的连续线性泛函.

定理 3.2.9 设 E 是有限维的赋范空间, F 是任一赋范空间, 那么由 E 到 F 的线性映射都是连续的, 即 $\mathcal{L}(E,F)=\mathcal{B}(E,F)$.

证明 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 E 的一组基, 对任意 $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i\in E$, 考虑范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

设 $u\in\mathcal{L}(E,F)$, 注意到有限维空间上任意范数都是等价的, 则存在某个常数 $C>0$, 使得

$$\|u(x)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|\|u(e_i)\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|\right)\|x\|_\infty\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|\right)\|x\|,$$

这表明 u 是 E 到 F 的有界线性映射, 因此连续. ■

注 3.2.10 若 E 是有限维的赋范空间, F 是任一赋范空间, u 是从 E 到 F 的线性映射, 则 $u(E)$ 是 F 的线性子空间. 因 $u(E)$ 也是有限维的, 则它是完备的, 故 $u(E)$ 是 F 的闭线性子空间.

定理 3.2.11 设 E,F,G 都为赋范空间, 且 $u\in\mathcal{B}(E,F)$, $v\in\mathcal{B}(F,G)$, 那么复合映射 $v\circ u\in\mathcal{B}(E,G)$, 并且

$$\|v\circ u\|\leqslant\|v\|\|u\|.$$

证明 首先容易验证 $v\circ u$ 是线性的. 由于 u 和 v 都是有界的, 则任取 $x\in E$, 有

$$\|v\circ u(x)\|\leqslant\|v\|\,\|u(x)\|\leqslant\|v\|\,\|u\|\,\|x\|,$$

即得 $v\circ u\in\mathcal{B}(E,G)$, 并且

$$\|v\circ u\|\leqslant\|v\|\,\|u\|.$$

注 3.2.12 通常我们把 $v \circ u$ 简单地记为 vu, 并看成算子的乘积运算. 那么在 $\mathcal{B}(E)$ 上再附加该乘积运算即成为一个代数. 在代数 $\mathcal{B}(E)$ 中, 极限有类似于函数的线性和乘积运算性质, 如设 $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$, 则 $\lim u_n v_n = uv$.

考虑有界线性映射时, 我们可以先在其稠密子空间上讨论其性质, 然后再扩展到整个空间上, 其理论建立在如下的扩展定理上.

定理 3.2.13 设 E 和 F 为 Banach 空间, G 是 E 中的稠密子空间, 则任意的有界线性映射 $u: G \to F$ 可以唯一地扩展为有界线性映射 $\tilde{u}: E \to F$, 且 $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

证明 取任意 $x \in E$, 由于 G 是 E 中的稠密子空间, 则存在 G 中的序列 (x_n), 满足 $x_n \to x$, $n \to \infty$, 并有

$$\|u(x_n) - u(x_m)\| \leqslant \|u\| \|x_n - x_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

故 $(u(x_n))$ 是 F 中的 Cauchy 序列. 又因 F 是完备的, 故存在向量 $y \in F$, 使得

$$y = \lim_{n \to \infty} u(x_n).$$

我们可定义 E 到 F 的映射 $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x) = y = \lim_{n \to \infty} u(x_n),$$

根据定义, 易证 $\tilde{u}$ 是线性的. 另外, 对任意 $x \in E$, 取 $x_n \in E$ 使得 $x_n \to x$, 则

$$\|\tilde{u}(x)\| = \lim_{n \to \infty} \|u(x_n)\| \leqslant \lim_{n \to \infty} \|u\| \|x_n\| = \|u\| \|x\|.$$

因此, $\tilde{u}$ 有界且 $\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\|$. 另一方面

$$\|u\| = \sup_{x \in G, x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|\tilde{u}(x)\|}{\|x\|} = \|\tilde{u}\|,$$

故有 $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. ■

设 E, F 是向量空间, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. 若 u 是双射, 则其逆映射 u^{-1} 也是线性的.

定义 3.2.14 设 E, F 是赋范空间, 若 $u \in \mathcal{B}(E, F)$ 是双射且其逆映射 u^{-1} 也是连续的, 则称 u 是 E 到 F 的同构映射. 若赋范空间 E 到 F 上存在一个同构映射, 则称 E 与 F 同构.

注 3.2.15 设 E 是赋范空间, $u \in \mathcal{B}(E)$. 我们约定幂运算如下: $u^0 = \mathrm{I}_E$, 且对任意 $n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u^n u$.

定理 3.2.16 设 E 为 Banach 空间. 令 $u \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|u\| < 1$, 那么存在 $v \in \mathcal{B}(E)$, 使得

$$(\mathrm{I}_E - u)v = v(\mathrm{I}_E - u) = \mathrm{I}_E,$$

这意味着 $\mathrm{I}_E - u$ 是一个同构映射, 即在代数 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

证明 我们考虑 $\mathcal{B}(E)$ 中的级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} u^n$. 由复合性质, 可得

$$\|u^n\| = \|u \circ \cdots \circ u\| \leqslant \|u\|^n.$$

由于 $\|u\| < 1$, 因此 $\sum\limits_{n \geqslant 0} u^n$ 绝对收敛. 又因 $\mathcal{B}(E)$ 完备, 故根据定理 3.1.8 可知 $\sum\limits_{n \geqslant 0} u^n$ 收敛, 记其极限为 $v \in \mathcal{B}(E)$, 即

$$v = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

那么

$$(\mathrm{I}_E - u)v = \lim_{n \to \infty} (\mathrm{I}_E - u) \sum_{k=0}^{n} u^k = \lim_{n \to \infty} (\mathrm{I}_E - u^{n+1}) = \mathrm{I}_E,$$

同样可证 $v(\mathrm{I}_E - u) = \mathrm{I}_E$, 因此, v 是 $\mathrm{I}_E - u$ 的逆映射. ■

例 3.2.17 线性代数为泛函分析中的算子理论提供了最基本的例子. 设 E 为 n 维的向量空间, 即 $\dim E = n < \infty$, 且有 $u \in \mathcal{L}(E)$. 我们知道 u 由其在 E 中任一组基 $e_1, \cdots, e_n$ 的作用确定, 从而 u 唯一地对应于矩阵 $[u]$. 事实上, 任取 $x \in E$, 存在唯一的一组数 $x_1, \cdots, x_n$, 使得 $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. 那么

$$u(x) = x_1 u(e_1) + \cdots + x_n u(e_n).$$

我们记 $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{ij} e_i,\ j = 1, 2, \cdots, n$. 则矩阵 $[u]$ 可定义为

$$[u] = (u_{ij}) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

那么映射 $u \mapsto [u]$ 是从 $\mathcal{L}(E)$ 到 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 的双射并且保持乘法运算, 即有 $[u \circ v] = [u][v]$.

§3.3 L_p 空 间

在这一部分, 我们给出几个重要的 Banach 空间的例子, 其中 $L_p\ (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 空间是最具代表性的一类 Banach 空间.

在离散情形, 我们有 ℓ_p 空间, $0 < p \leqslant \infty$. 当 $0 < p < \infty$ 时, 定义

$$\ell_p = \left\{ x = (x_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{K} : \|x\|_p = \left(\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\};$$

当 $p = \infty$ 时, 定义

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{K} : \|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |x_n| < \infty \right\}.$$

令 c_0 表示由所有的极限为 0 的数列构成的集合, 显然有 $c_0 \subset \ell_\infty$.

接下来, 我们研究 L_p 空间. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 表示一个测度空间, 这里 $\mathcal{A}$ 是集合 Ω 上的 σ–代数, μ 是其上的测度.

定义 3.3.1 设 $0 < p < \infty, f : \Omega \to \mathbb{K}$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上的可测函数. 若 $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$, 则称 f 为 *p–方可积函数*. 令 $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为所有 p–方可积函数组成的集合. 对任意 $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, 令

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

定义 3.3.2 设 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上的可测函数, 若存在常数 $M \geqslant 0$, 使得

$$|f| \leqslant M \text{ a.e. } (\text{即 } \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0)$$

则称 f *本性有界*, 并称

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{ M \geqslant 0 : |f| \leqslant M \text{ a.e.} \right\}$$

为 f 的*本性上确界*, 记 $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为由所有 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上的本性有界函数构成的集合.

注 3.3.3 集合 $\left\{ M \geqslant 0 : |f| \leqslant M \text{ a.e.} \right\}$ 中的下确界实际上是可以达到的, 即有 $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ a.e.

下面我们给出 L_p 空间上的几个重要的不等式. 今后把 $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 简记为 $\mathcal{L}_p(\Omega)$.

定理 3.3.4 (Hölder 不等式) 设 $0 < p, q \leqslant \infty$ 且 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. 并设 $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ 及 $g \in \mathcal{L}_q(\Omega)$, 则 $fg \in \mathcal{L}_r(\Omega)$, 并且

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

注 3.3.5 当 $p = q = 2$ 时, 一般称上面的不等式为 Cauchy-Schwarz 不等式. $r = 1$ 是我们常用的基本形式, 此时 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 我们称 p 和 q 是共轭数. 并约定 $\frac{1}{\infty} = 0$, 那么当 $p = \infty$ 时, $q = 1$.

证明的关键是利用下面的 Young 不等式.

引理 3.3.6 (Young 不等式) 任取 $x, y \in [0, \infty)$ 及 $0 < \alpha, \beta < 1$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 则有

$$xy \leqslant \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}}.$$

证明 由指数 (或对数) 函数的凸性容易得到证明. 事实上, 可设 $x, y > 0$, 令 $s = \frac{\ln x}{\alpha}$, $t = \frac{\ln y}{\beta}$, 则 $x = \mathrm{e}^{\alpha s}, y = \mathrm{e}^{\beta t}$. 那么因 e^x 是凸函数, 故有

$$xy = \mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{e}^{\beta t} = \mathrm{e}^{\alpha s + \beta t} \leqslant \alpha \mathrm{e}^s + \beta \mathrm{e}^t \leqslant \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}}.$$

定理 3.3.4 的证明 我们分为几种情形分别证明:

(1) $p = q = \infty$. 此时 $r = \infty$, 故只需证明若 f, g 是本性有界的, 则 fg 也是本性有界的. 因 f 本性有界, 故存在可测集 A 且 $\mu(A) = 0$, 使得在 $\Omega \setminus A$ 上有 $|f| \leqslant \|f\|_\infty$. 同样因 g 本性有界, 故存在可测集 B 且 $\mu(B) = 0$, 使得在 $\Omega \setminus B$ 上有 $|g| \leqslant \|g\|_\infty$. 那么 $\mu(A \cup B) = 0$, 并且在 $\Omega \setminus (A \cup B)$ 上, 有

$$|fg| \leqslant |f||g| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty,$$

所以 $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

(2) p 和 q 中只有一个是无穷大. 不妨设 $p = \infty$ 而 $q < \infty$, 此时 $r = q$. 同上 f 是本性有界的, 则存在可测集 A 且 $\mu(A) = 0$, 使得在 $\Omega \setminus A$ 上有 $|f| \leqslant \|f\|_\infty$. 从而,

$$\int_\Omega |fg|^r \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega \setminus A} |f|^r |g|^r \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_\infty^r \int_{\Omega \setminus A} |g|^r \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^r \|g\|_r^r,$$

这意味着 $fg \in \mathcal{L}_r(\Omega)$ 并且 $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_q$.

(3) p 和 q 都是有限的. 由 Young 不等式, 可得

$$\int_\Omega |fg|^r \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f(\omega)|^r |g(\omega)|^r \mathrm{d}\mu(\omega)$$

$$\leqslant \int_\Omega \left[\frac{r}{p}|f(\omega)|^{r\frac{p}{r}} + \frac{r}{q}|g(\omega)|^{r\frac{q}{r}}\right]\mathrm{d}\mu(\omega)$$
$$= \frac{r}{p}\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu + \frac{r}{q}\int_\Omega |g|^q \mathrm{d}\mu.$$

如果假设 $\|f\|_p \leqslant 1, \|g\|_q \leqslant 1$, 则有

$$\int_\Omega |fg|^r \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1.$$

于是对一般的 $\|f\|_p > 0$ 及 $\|g\|_q > 0$, 当取 $F = \frac{f}{\|f\|_p}$, $G = \frac{g}{\|g\|_q}$, 则有 $\|F\|_p = 1$ 和 $\|G\|_q = 1$, 由上式可得 $\|FG\|_r \leqslant 1$. 所以 $fg \in \mathcal{L}_r(\Omega)$ 并且 $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$. ■

定理 3.3.7 (Minkowski 不等式) 设 $0 < p \leqslant \infty$, 那么 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 是向量空间, 并且任取 $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, 有

(1) 若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

(2) 若 $0 < p < 1$, 则 $\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.

证明 假设 $p < \infty$ ($p = \infty$ 的情形留作练习). 首先证明 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 是向量空间, 我们只需证明线性运算在 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 中封闭.

- 任取 $\lambda \in \mathbb{K}$ 及 $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, 由积分的性质可得 $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$, 即有
$$\lambda f \in \mathcal{L}_p(\Omega).$$
- 设 $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, 则任取 $\omega \in \Omega$, 有
$$|f(\omega)+g(\omega)|^p \leqslant \begin{cases} |f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p, & 0 < p \leqslant 1, \\ 2^{p-1}[|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p], & 1 \leqslant p \leqslant \infty. \end{cases}$$
由此可得 $f + g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. 故 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 是向量空间.

由上式, 情形 (2) 实际上已得到证明. 现证明情形 (1). 记 q 为 p 的共轭数. 由 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p \mathrm{d}\mu &\leqslant \int_\Omega (|f| + |g|)|f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega |f||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \|f\|_p\||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p\||f+g|^{p-1}\|_q \\ &\leqslant \|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p\|f+g\|_p^{p-1} \\ &\leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1} < +\infty.\end{aligned}$$

由此即得

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

定理得证. ■

注意在 Lebesgue 积分意义下, 几乎处处为 0 的函数积分为 0, 所以可以把几乎处处相等的函数视为同一元, 从而在此意义下重构 $\mathcal{L}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 空间, 使其成为 Banach 空间. 我们现系统地展示这一过程. 首先令 $\mathcal{L}_0(\Omega)$ 表示所有 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的可测函数构成的向量空间, 约定 $\mathcal{L}_0(\Omega)$ 上的等价关系 "$\sim$" 为

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$

并令 $L_0(\Omega)$ 表示由此等价关系确定的 $\mathcal{L}_0(\Omega)$ 中等价类构成的集族. 设 $\widetilde{f} \in L_0(\Omega)$ $(f \in \mathcal{L}_0(\Omega)$ 为 $\widetilde{f}$ 的代表元), 我们定义

- 对任意 $\lambda \in \mathbb{K}$ 及 $\widetilde{f} \in L_0(\Omega)$: $\lambda\widetilde{f} = \widetilde{\lambda f}$.
- 对任意 $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in L_0(\Omega)$: $\widetilde{f} + \widetilde{g} = \widetilde{f+g}$.

容易验证以上定义在等价类上是合理的, 即不依赖于指定的代表元 (留作练习). 如果把几乎处处相等的函数看成同一函数, 那么可以把一个等价类看成一个函数.

注 3.3.8 在以上约定的运算下, $L_0(\Omega)$ 成为一个向量空间, 甚至在增加乘法运算下成为一个代数.

当 $0 < p \leqslant \infty$, $\mathcal{L}_0(\Omega)$ 上约定的等价关系也是 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 上的等价关系, 同样地, $L_p(\Omega)$ 表示由 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 中等价类构成的集族, 当然 $L_p(\Omega)$ 也是一个向量空间. 当取 $\widetilde{f} \in L_p(\Omega)$, 定义 $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$, 这里 f 是 $\widetilde{f}$ 的一个代表元, 显然该定义不依赖于代表元的选择. 事实上由积分性质, 当 $f \sim f'$ 时, 有 $\displaystyle\int_\Omega |f'|^p = \int_\Omega |f|^p$. 正因为如此, 后面我们不再把 $L_p(\Omega)$ 中的元素记成 $\widetilde{f}$, 而是直接记成 f, 即把 $\mathcal{L}_p(\Omega)$ 中的元素看成函数, 而不是等价类; 也不再使用符号 $\mathcal{L}_p(\Omega)$, 而只使用符号 $L_p(\Omega)$. 并且由定理 3.3.7 知:

- 当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ 是一个赋范空间.
- 当 $0 < p < 1$ 时, 在 $L_p(\Omega)$ 引入距离:

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p,$$

则 $L_p(\Omega)$ 成为一个度量空间 (以上结论的证明留作练习).

定理 3.3.9 设 $0 < p \leqslant \infty$, 则 $L_p(\Omega)$ 是完备的.

证明 首先设 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $L_p(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 从中选择一个子列 $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$, 使得 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p<2^{-k}$. 令 $g_k=f_{n_k}-f_{n_{k-1}}$ $(k\geqslant 2)$ 及 $g_1=f_{n_1}$. 接下来我们只需证明 $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ 在 $L_p(\Omega)$ 中收敛, 下面分为几种情形分别讨论:

(1) $0<p\leqslant 1$. 在此情形下, 任取 $K>0$, 有

$$\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^K|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{k=1}^K\int_\Omega|g_k|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{pk}}<\infty.$$

由单调收敛定理可得

$$\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^\infty|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{pk}}<\infty.$$

因此 $\left(\sum\limits_{k=1}^\infty|g_k|\right)^p<\infty$ a.e. 从而也有 $\sum\limits_{k=1}^\infty|g_k|<\infty$ a.e. 即无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^\infty g_k$ 几乎处处绝对收敛. 若设 N 为 Ω 中使 $\sum\limits_{k=1}^\infty|g_k|$ 发散的可测集, 则必有 $\mu(N)=0$.

当 $\omega\in\Omega\setminus N$ 时, 令

$$f(\omega)=\sum_{k=1}^\infty g_k(\omega)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(\omega);$$

而当 $\omega\in N$, 令 $f(\omega)=0$. 如此定义的 f 是可测函数, 且

$$\int_\Omega|f|^p\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega\setminus N}|f|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\Omega\setminus N}\left(\sum_{k=1}^\infty|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu<\infty,$$

这意味着 $f\in L_p(\Omega)$. 并且对每一个 $\omega\in\Omega\setminus N$, 我们有 $|f(\omega)-f_{n_k}(\omega)|=\left|\sum\limits_{j=k+1}^\infty g_j(\omega)\right|$, 那么当 $k\to\infty$, 可得

$$\|f-f_{n_k}\|_p^p=\int_\Omega|f-f_{n_k}|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\int_\Omega\left|\sum_{j\geqslant k+1}g_j\right|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{j=k+1}^\infty\frac{1}{2^{pj}}\to 0.$$

因此, 子列 $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ 在 $L_p(\Omega)$ 中收敛到 f.

(2) $1\leqslant p<\infty$. 此时由 Minkowski 不等式, 可得

$$\left[\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^K|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{k=1}^K\left(\int_\Omega|g_k|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}<\infty.$$

接下来的步骤同情形 (1), 结论也成立.

(3) $p=\infty$. 任取 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 则存在 $A_{m,n}\in\mathcal{A}$, 使得 $\mu(A_{m,n})=0$ 且对每一个 $\omega\in\Omega\setminus A_{m,n}$, $|f_n(\omega)-f_m(\omega)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty$.

设 $A=\bigcup\limits_{m,n}A_{m,n}$, 则也有 $A\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(A)=0$. 那么对任意 $\omega\in\Omega\setminus A$, 有 $|f_n(\omega)-f_m(\omega)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty$. 从而对每个给定的 $\omega\in\Omega$, $(f_n(\omega))_{n\geqslant1}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 中的 Cauchy 序列. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)$ 在 $\Omega\setminus A$ 上存在. 令 $f(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)$, $\omega\in\Omega\setminus A$, 并设在 A 上 $f=0$, 则 f 是可测函数. 并且, 当 $k\to\infty$, 有 $\|f-f_k\|_\infty\to0$. 因此 $(f_n)_{n\geqslant1}$ 在 $L_p(\Omega)$ 中收敛到 f. 故定理得证. ■

接下来, 我们具体讨论 L_p 空间的两个最重要的特殊情形:

离散情形 设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$, $\mathcal{A}$ 是所有的 Ω 的子集构成的 σ-代数, 即 $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$. μ 为其上的测度, 不失一般性, 假设对每一个 $k\geqslant1$, 有 $\mu(\{\omega_k\})>0$, 并记 $w_k=\mu(\omega_k)$. 那么当 $0<p<\infty$ 时,

$$\mathcal{L}_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)=L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)=\left\{x=(x_k)\subset\mathbb{K}:\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\,w_k<\infty\right\},$$

并有 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\,w_k\right)^{\frac{1}{p}}$. 当 $p=\infty$ 时,

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu)=L_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu)=\left\{x=(x_k)\subset\mathbb{K}:\ \sup_{k\geqslant1}|x_k|<\infty\right\},$$

并有 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{k\geqslant1}|x_k|$.

若考虑 $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, 此处的 μ 为计数测度, 即 $\mu(\{k\})=1$, 则有

$$L_p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)=\ell_p=\left\{x=(x_k)\subset\mathbb{K}:\ \|x\|_p<\infty\right\},$$

这里

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 0<p<\infty,\\ \sup\limits_{k\geqslant1}|x_k|, & p=\infty.\end{cases}$$

实际上, 我们可以建立 $L_p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ (也就是 ℓ_p) 到 $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 上的线性等距双射:

$$x=(x_k)\longmapsto\left(\frac{x_k}{\omega_k^{\frac{1}{p}}}\right),$$

这意味着 ℓ_p 和 $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 线性等距同构. 在此意义下, 我们可以把 ℓ_p 和 $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 看成同一个空间.

上述讨论也适用于 Ω 是有限集的情形, 如 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$. 特别地, 当 $\Omega=\{1,\cdots,n\}$ 且 $\mu(\{k\})=1, 1\leqslant k\leqslant n$, 则对应的 $L_p(\Omega)$ 是 n 维的 ℓ_p^n.

连续情形 令 $\Omega=(0,1)$, 取 $\mathcal{A}$ 为 $(0,1)$ 中的 Lebesgue 可测子集构成的 σ-代数, μ 为 Lebesgue 测度, 则 $((0,1),\mathcal{A},\mu)$ 为 Lebesgue 测度空间, 此时记

$$L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)=L_p(0,1).$$

这里开区间 $(0,1)$ 也可为闭区间 $[0,1]$, 因它们只相差两点 (一个零测集), 故 $L_p((0,1))$ 和 $L_p([0,1])$ 是同一空间, 简记为 $L_p(0,1)$. 若 $\Omega=(a,b)\subset\mathbb{R}$, $a<b$. 符号 $((a,b),\mathcal{A},\mu)$ 为相应的 Lebesgue 测度空间, 则 $L_p(0,1)$ 与 $L_p(a,b)$ 等距同构.

注 3.3.10 以上两种空间是最重要的 L_p 空间, 它们是构造其他 L_p 空间的基石. 在某种意义下, 任一 L_p 空间都可分解为如上两种 L_p 空间.

定义 3.3.11 若赋范空间 E 有可数的稠密子集, 则称 E 是可分的.

例 3.3.12 ℓ_p 和 $L_p(a,b)$ 当 $1\leqslant p<\infty$ 时都是可分的; ℓ_∞, $L_\infty(0,1)$ 是不可分的. 证明 ℓ_∞ 不可分, 可取集合

$$A=\big\{(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots):\epsilon_n=1 \text{ 或 } -1,\ n=1,2,\cdots\big\}\subset\ell_\infty,$$

则 A 是不可数集 ($A\cong\mathbb{R}$). A 中任取不同元素 x,y, 有 $\|x-y\|=2$, 则 A 不可能有任何可数稠密子集, 故 ℓ_∞ 不可分 (有关 $L_\infty(0,1)$ 结论的证明留作练习).

我们知道可测函数可以通过简单函数逐点逼近. 考察 L_p 空间的结构, 我们也可以从只取有限值的简单函数入手, 建立简单函数的逼近理论. 从而可以把有关 L_p 空间的部分问题的研究归结到简单函数族上来.

定义 3.3.13 设 $(\Omega,\mathcal{A})$ 是可测空间, 若 $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{A}$ 是有限个可测集, 而 $a_1,\cdots,a_n$ 是一列实 (或复) 数, 则称函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{A_i}$ 为 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的简单函数, 其中 $\mathbb{1}_{A_i}$ 表示 A_i 的示性函数.

特殊地, 若取 $\Omega=\mathbb{R}$, 则当 $A_1,\cdots,A_n$ 是一列区间时, 称 f 为阶梯函数.

定理 3.3.14 设 $0<p<\infty$, 则可积简单函数族在 $L_p(\Omega)$ 中稠密.

证明 注意, 当数域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, $f\in L_p(\Omega)$ 等价于 f 的正部 f_+ 和负部 f_- 都满足 $f_+,f_-\in L_p(\Omega)$; 当数域 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时, $f\in L_p(\Omega)$ 等价于 f 的实部 $\mathrm{Re}f$ 和虚部 $\mathrm{Im}f$ 都满足 $\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f\in L_p(\Omega)$. 那么任取 $f\in L_p(\Omega)$, 我们把 f 写成四个 (当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, 只需表示成两个) 非负 L_p 函数的线性组合. 故我们只用证明任一非负实函数 $f\geqslant 0$ 可由简单函数逼近即可.

下面我们假设 $f \geqslant 0$, 则存在一列单调增加的简单函数 $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset L_0(\Omega)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ a.e.}$$

则每个 f_n 也是 p–方可积的, 因此 f_n 是可积的简单函数. 另外由 Lebesgue 控制收敛定理得知

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} (f - f_n)^p = 0.$$

因此, 在 $L_p(\Omega)$ 中 $f_n \to f$. ■

把定理 3.3.14 应用到 $L_p(a,b)$, 我们有如下推论.

推论 3.3.15 如果设 $\Omega = (a,b)$, $0 < p < \infty$, 那么

(1) (a,b) 上的可积的阶梯函数族在 $L_p(a,b)$ 中稠密.

(2) (a,b) 上的有紧支撑的连续函数族在 $L_p(a,b)$ 中稠密.

证明 (1) 由上一定理 3.3.14, 我们只需证阶梯函数在简单函数构成的集合中依 L_p 范数意义下稠密. 而简单函数是有限多个示性函数的线性组合, 故我们仅需对示性函数 $f = \mathbb{1}_A$ 证明即可, 其中 $A \subset (a,b)$ 是任意有限可测集. 由 Lebesgue 测度的定义, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 U 是有限个有界开区间的并, 使得 U 和 A 的对称差的测度小于 ε, 即 $\mu(U\backslash A) + \mu(A\backslash U) < \varepsilon$. 那么 $\mathbb{1}_U$ 是阶梯函数. 我们有

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_U\|_p^p = \int_a^b |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_U|^p \mathrm{d}\mu = \mu(U\backslash A) + \mu(A\backslash U) < \varepsilon.$$

则 (1) 得证.

(2) 由 (1), 我们仅需证任意阶梯函数依 L_p 意义下能被具有紧支集的连续函数逼近. 设 $f = \mathbb{1}_U$, 其中 $U = [a_1, b_1] \subset (a,b)$ 是有限闭区间. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 设 (a,b) 上的函数 g 如下:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon], \\ \dfrac{x - a_1}{\varepsilon}, & x \in [a_1, a_1 + \varepsilon], \\ \dfrac{b_1 - x}{\varepsilon}, & x \in [b_1 - \varepsilon, b_1], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

显然 g 是一个具有紧支集的连续函数. 那么我们有

$$\|\mathbb{1}_U - g\|_p^p = \int_{a_1}^{a_1+\varepsilon} |\mathbb{1}_U - g|^p \mathrm{d}\mu + \int_{b_1-\varepsilon}^{b_1} |\mathbb{1}_U - g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant 4\varepsilon.$$

(2) 得证. ■

最后, 我们来讨论由连续函数构成的空间 $C(K)$. 设 K 为紧的 Hausdorff 空间, $C(K,\mathbb{K})$ 由所有的连续函数 $f:K\to\mathbb{K}$ 构成. 在不引起混淆的情况下, 将 $C(K,\mathbb{K})$ 简记为 $C(K)$. 易知 $C(K)$ 关于普通加法和乘法运算构成一个代数. 任取 $f\in C(K)$, 令

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\in K}|f(t)|=\max_{t\in K}|f(t)|,$$

则 $\|\cdot\|_\infty$ 为 $C(K)$ 上的范数, 通常称之为 K 上的一致范数. 并且 $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间 (作为练习).

如果把上面函数定义域是紧的要求换成局部紧的, 我们考虑下面的空间.

定义 3.3.16 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, E 是一个赋范空间. 设函数 $f:X\to E$, 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 X 中的紧集 K, 使得 f 在 $X\setminus K$ 上满足 $\|f\|<\varepsilon$, 则称函数 $f:X\to E$ 消失于无穷. 我们用 $C_0(X,E)$ 表示所有从 X 到 E 消失于无穷的连续函数构成的空间.

注 3.3.17 若 K 为紧集, $C(K,E)$ 上任一函数消失于无穷, 则 $C_0(K,E)=C(K,E)$. 对一般的 $C_0(X,E)$, 任取 $f\in C_0(X,E)$, $C_0(X,E)$ 的定义意味着函数 $t\mapsto\|f(t)\|$ 连续并且消失于无穷, 因而有界. 则我们在 $C_0(X,E)$ 上可定义

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|.$$

容易证明这是 $C_0(X,E)$ 上的一个范数, 它使 $C_0(X,E)$ 成为一个 Banach 空间 (留作习题).

习 题 三

1. 设 $C([0,1],\mathbb{R})$ 表示 $[0,1]$ 上所有的连续实函数构成的空间. 定义

$$\|f\|_\infty=\sup_{0\leqslant t\leqslant1}|f(t)|\quad 且\quad \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t.$$

(a) 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数.

(b) 证明 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是完备的 (即成为一个 Banach 空间).

(c) 证明 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不完备.

2. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上所有的实系数多项式构成的向量空间. 对任意 $P\in E$, 定义

$$\|P\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}|P(x)|.$$

(a) 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 是 E 上的范数.

(b) 任取一个 $a \in \mathbb{R}$ 定义线性映射 $L_a : E \to \mathbb{R}$ 满足 $L_a(P) = P(a)$. 证明 L_a 连续当且仅当 $a \in [0, 1]$, 并且给出该连续线性映射的范数.

(c) 设 $a < b$ 并定义 $L_{a,b} : E \to \mathbb{R}$ 满足

$$L_{a,b}(P) = \int_a^b P(x)\mathrm{d}x.$$

给出 a, b 的取值范围, 使其成为 $L_{a,b}$ 连续的充分必要条件, 然后确定 $L_{a,b}$ 的范数.

3. 设 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ 是习题 2 中定义的赋范空间. 设 E_0 是 E 中没有常数项的多项式构成的向量子空间 (即多项式 $P \in E_0$ 等价于 $P(0) = 0$).

(a) 证明 $N(P) = \|P'\|_\infty$ 定义 E_0 上的一个范数, 并且对任意 $P \in E_0$, 有 $\|P\|_\infty \leqslant N(P)$.

(b) 证明 $L(P) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x$ 定义了 E_0 关于 N 的连续线性泛函, 并求它的范数.

(c) 上面定义的 L 是否关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 连续?

(d) 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上是否等价?

4. 设 E 是由 $[0, 1]$ 上所有连续函数构成的向量空间. 定义 E 上的两个范数分别为 $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$ 和 $N(f) = \displaystyle\int_0^1 x|f(x)|\mathrm{d}x$.

(a) 验证 N 的确是 E 上的范数并且 $N \leqslant \|\cdot\|_1$.

(b) 设函数 $f_n(x) = n - n^2x$, 若 $x \leqslant \frac{1}{n}$; $f_n(x) = 0$, 其他. 证明函数列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 在 (E, N) 中收敛到 0. 它在 $(E, \|\cdot\|_1)$ 中是否收敛? 由这两个范数在 E 上诱导的拓扑是否相同?

(c) 设 $a \in (0, 1]$, 并令 $B = \{f \in E : f(x) = 0, \forall\, x \in [0, a]\}$. 证明这两个范数在 B 上诱导相同的拓扑.

5. 设 $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ 是连续函数并且不恒等于 1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的映射 T 为

$$T(f)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

证明 T 是压缩映射.

根据以上结论证明下面的方程存在唯一解:

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)), \quad x \in [0, 1].$$

6. 设 $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0, b > 1$. 考察下面的微分方程

$$(*) \qquad f(0) = \alpha, \quad f'(x) = af(x^b), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(a) 令 $M > 0$. 验证 $E = C([0,1],\mathbb{R})$ 上赋予范数

$$\|f\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|\mathrm{e}^{-Mx}$$

后成为一个 Banach 空间.

(b) 设 $g(x) = \alpha + \int_0^x af(t^b)\mathrm{d}t$, 定义映射 $T: E \to E$ 为 $T(f) = g$. 证明选择合适的 M, 可使 T 为压缩映射.

(c) 证明方程 $(*)$ 有唯一解.

7. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的无限维向量空间. 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 中的一组向量, 若 E 中任一向量可用 $(e_i)_{i\in I}$ 中的有限个向量唯一线性表示, 即对任意 $x \in E$, 存在唯一一组 $(\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K}$, 使得仅有有限多个 α_i 不等于零且 $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i e_i$, 则称 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 中的 Hamel 基.

(a) 由 Zorn 引理证明 E 有一组 Hamel 基.

(b) 假设 E 还是一个赋范空间, 证明 E 上必存在不连续的线性泛函.

(c) 证明在任一无限维赋范空间上, 一定存在一个比原来的范数严格强的范数 (即新范数诱导的拓扑一定比原来的范数诱导的拓扑强且不相同).

由此说明, 如果向量空间 E 上任意两个范数诱导同一个拓扑, E 必为有限维空间.

8. 设 E 为数域 $\mathbb{K}$ 上有限维向量空间, 其维数 $\dim E = n$. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 表示 E 上的一组基, 任取 $u \in \mathcal{L}(E)$, 令 $[u]$ 表示 u 在这组基下对应的矩阵.

(a) 证明映射 $u \mapsto [u]$ 建立了从 $\mathcal{L}(E)$ 到所有 $n \times n$ 矩阵构成的向量空间 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 之间的同构映射.

(b) 假设 $E = \mathbb{K}^n$ 且 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是经典基 (即 $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, 对应于第 k 个向量, 它仅在第 k 个位置取 1, 其他位置取 0). 并约定 $E = \mathbb{K}^n$ 赋予欧氏范数. 证明若 u (或等价地 $[u]$) 可对角化, 则 $\|u\| = \max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|\}$, 这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 u 的特征值.

(c) $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 如上, 试由 $[u]$ 中的元素分别确定在 $p = 1$ 和 $p = \infty$ 时的范数 $\|u : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)\|$.

9. 设 E 是 Banach 空间.

(a) 设 $u \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|u\| < 1$. 证明 $\mathrm{I}_E - u$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

提示: 考虑 $\mathcal{B}(E)$ 中的级数 $\sum\limits_n u^n$.

(b) 设 $GL(E)$ 表示 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆元构成的集合. 证明 $GL(E)$ 关于复合运算构成一个群且是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集.

(c) 证明 $u \mapsto u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 上的同胚映射.

10. 设 $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$, 证明 $fg \in L_1(\mathbb{R})$.
给出例子说明 $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, 但是 $f_1 f_2 \notin L_1(\mathbb{R})$.

11. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为有限测度空间, 即有 $\mu(\Omega) < \infty$.

(a) 证明若 $0 < p < q \leqslant \infty$, 则 $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. 用反例说明当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时, 结论不成立.

(b) 证明若 $f \in L_\infty(\Omega)$, 则 $f \in \bigcap\limits_{p<\infty} L_p(\Omega)$ 且 $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$.

(c) 设 $f \in \bigcap\limits_{p<\infty} L_p(\Omega)$ 且满足 $\limsup\limits_{p\to\infty} \|f\|_p < \infty$, 证明 $f \in L_\infty(\Omega)$.

12. 设 $0 < p < q \leqslant \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 并令

$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

证明若 $f \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, 则

$$f \in L_s(\Omega) \quad \text{且} \quad \|f\|_s \leqslant \|f\|_p^{\theta} \|f\|_q^{1-\theta}.$$

13. (**广义 Minkowski 不等式**) 设 $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ 是两个测度空间, $0 < p < q < \infty$. 证明对任意可测函数 $f \colon (\Omega_1 \times \Omega_2,\, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to \mathbb{K}$, 有

$$\left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^p \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)|^q \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

14. 设 $0 < p < \infty$.

(a) 对任意 $x = (x_n) \in \ell_p$ 定义 $(0, 1)$ 上如下的函数

$$T(x)(t) = \sum_{n \geqslant 1} [n(n+1)]^{\frac{1}{p}} \, x_n \mathbb{1}_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(t).$$

证明 T 是 ℓ_p 到 $L_p(0,1)$ 的线性等距同构映射.

(b) 假设 $p \geqslant 1$ 且 q 是 p 的共轭数. 对任意 $f \in L_p(0,1)$, 定义

$$S(f)_n = [n(n+1)]^{\frac{1}{q}} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t, \ \forall\, n \geqslant 1.$$

证明 S 定义了从 $L_p(0,1)$ 到 ℓ_p 上的线性映射并且 $S \circ T$ 等于 ℓ_p 上的单位映射.

15. (a) 证明: 若 (E, d) 是可分的度量空间, $F \subset E$, 则 (F, d) 也是可分的度量空间.

(b) 证明: $\mathbb{R}^n$, c_0, ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, $C([a,b],\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 和 $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, 都是可分的.

(c) 设 $C = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ 是 ℓ_∞ 的子集, 它由所有的每项是 1 或 −1 的序列构成. 首先验证若 x 和 y 是 C 中两个不同序列, 则 $\|x-y\|_\infty = 2$. 再证明 C 不可数, 由此导出 ℓ_∞ 不可分.

类似证明 $L_\infty(0,1)$ 不可分.

16. (**卷积**) 在实数集 $\mathbb{R}$ 上取 Lebesgue σ–代数及 Lebesgue 测度, 并设 $f, g \in L_1(\mathbb{R})$.

(a) 证明

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(u)g(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \left[\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{d}u\right]\left[\int_{\mathbb{R}} g(v)\mathrm{d}v\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由此导出函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有定义.

(b) 我们定义 f 和 g 的卷积 $f*g$ 为

$$f*g(x) = \begin{cases}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, & \text{当积分存在,}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

证明 $f*g \in L_1(\mathbb{R})$ 且 $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

(c) 取 $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, 计算 $f*f$.

17. 在 $\mathbb{R}$ 上考虑 Borel σ–代数和 Lebesgue 测度. 设 $1 < p < \infty$ 且 $f \in L_p(0,+\infty)$. 定义

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \ \ \forall\, x > 0.$$

本题的目标是证明 Hardy 不等式:

$$(*) \qquad \|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p, \ \ \forall\, f \in L_p(0,+\infty).$$

(a) 首先说明 F 在 $(0,+\infty)$ 上的定义是合理的, 并且

$$|x_1F(x_1) - x_2F(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}}\|f\|_p, \ \ \forall\, x_1, x_2 > 0.$$

这里 q 是 p 的共轭数. 并由此证明 F 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 故可测.

(b) 假设 f 是有紧支撑的连续函数且 $f \geqslant 0$. 证明 F 在 $(0,\infty)$ 上连续可导且有

$$(p-1)\int_0^{+\infty} F(x)^p\mathrm{d}x = p\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)\mathrm{d}x.$$

并由此导出公式 $(*)$.

(c) 证明公式 $(*)$ 对所有的 $f \in L_p(0,+\infty)$ 成立.

(d) 用反例说明当 $p=1$ 时, $(*)$ 不成立, 即不存在任何常数 $C>0$, 使得

$$\|F\|_p \leqslant C\|f\|_p,\ \forall f \in L_p(0,+\infty).$$

(e) 证明 $\frac{p}{p-1}$ 是使得 $(*)$ 式成立的最优常数. 也就是说, 若有 $C>0$ 使得

$$\|F\|_p \leqslant C\|f\|_p,\ \forall f \in L_p(0,+\infty),$$

则 $C \geqslant \frac{p}{p-1}$.

提示: 考虑函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$ 和极限

$$\|F\mathbb{1}_{[1,n]}(x)\|_p/\|f\|_p,\ n\to\infty.$$

18. 令 $2 \leqslant p < \infty$, 在本题中 $L_p(\mathbb{R})$ 简单记作 L_p.

(a) 我们的第一个目标是证明 **Clarkson 不等式**:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right),\ \forall f,g \in L_p.$$

(i) 任取 $s,t\in[0,+\infty)$, 证明 $s^p+t^p \leqslant (s^2+t^2)^{\frac{p}{2}}$.

(ii) 任取 $a,b\in\mathbb{R}$, 证明

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p).$$

(iii) 导出 Clarkson 不等式.

(b) 设 C 是 L_p 空间中的非空闭凸集, 且 $f\in L_p$, 并记 $d=d(f,C)$. 我们的第二个目标是证明: 存在唯一的函数 $g_0\in C$, 使得 $d=\|f-g_0\|_p$.

(i) 解释为什么存在 C 中的序列 $(g_n)_{n\geqslant 1}$, 使得

$$\|f-g_n\|_p^p \leqslant d^p + \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(ii) 运用 Clarkson 不等式证明

$$\left\|\frac{g_n-g_m}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2n}+\frac{1}{2m},\ \forall n,m\in\mathbb{N}^*.$$

(iii) 导出: 存在函数 $g_0\in C$, 使得 $d(f,C)=\|f-g_0\|_p$.

(iv) 证明这样的函数 $g_0\in C$ 是唯一的. 当证明了该命题后, 将 g_0 记为 $P_C(f)$.

(c) 最后我们的目标是证明映射 $P_C : L_p \to C$ 的连续性.

(i) 证明

$$\|g - P_C(g)\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|f - P_C(f)\|_p, \ \forall\, f, g \in L_p.$$

(ii) 运用 Clarkson 不等式, 证明

$$\left\|\frac{P_C(f) - P_C(g)}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f - P_C(g)\|_p^p - \frac{1}{2}\|f - P_C(f)\|_p^p, \ \forall\, f, g \in L_p.$$

(iii) 最后导出 P_C 的连续性.

19. 设 $A = (a_{ij})_{i,j\geqslant 1}$ 是元素在 $\mathbb{K}$ 中的无穷矩阵, 定义对任意有穷序列 $x = (x_j)_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{K}$, 即 x_j 仅有有限多个非零.

$$A(x) = \left(\sum_{j\geqslant 1} a_{ij} x_j\right)_{i\geqslant 1}$$

(a) 证明 A 可以拓展成 c_0 上的有界线性映射当且仅当

$$\|A\|_\infty = \sup_{i\geqslant 1} \sum_{j\geqslant 1} |a_{ij}| < \infty.$$

在此情形下, 我们有

$$\|A\|_{\mathcal{B}(c_0)} = \|A\|_\infty.$$

并且, 当 $\|A\|_\infty < \infty$, A 也定义了在 ℓ_∞ 上的线性映射.

(b) 证明 A 可以拓展成 ℓ_1 上的有界线性映射当且仅当

$$\|A\|_1 = \sup_{j\geqslant 1} \sum_{i\geqslant 1} |a_{ij}| < \infty.$$

在此情形下, 我们有

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\ell_1)} = \|A\|_1.$$

(c) 假设 $\|A\|_\infty$ 和 $\|A\|_1$ 都有限. 证明 A 可以拓展成 ℓ_2 上的有界线性映射且

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\ell_2)} \leqslant \|A\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|A\|_1^{\frac{1}{2}}.$$

提示: 写成如下形式

$$\sum_{i,j\geqslant 1} |a_{ij}|\,|x_i|\,|y_j| = \sum_{i\geqslant 1} |x_i| \sum_{j\geqslant 1} |a_{ij}|^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{ij}|^{\frac{1}{2}} |y_j|.$$

然后对内部的乘积式运用 Cauchy-Schwarz 不等式; 再次运用 Cauchy-Schwarz 获得证明.

(d) 在上面 (c) 的条件下, A 是否能对任意 $1 < p < \infty$ 扩展成 ℓ_p 上的有界线性映射?

第四章　Hilbert 空间

在调和分析、偏微分方程和量子力学中自然出现的许多空间是 Hilbert 空间. 容易看到, Hilbert 空间是欧氏空间从有限维到无限维最直接的抽象和推广. 事实上欧氏空间上大部分的直观概念, 诸如长度、夹角、正交和投影等可以很容易地转化到一般的 Hilbert 空间上. 进而一些直观的理论也可以推广到 Hilbert 空间上, 如 Cauchy-Schwarz 不等式, 平行四边形公式和正交展开理论等. 另外, Hilbert 空间的出现和 Fourier 级数理论的发展密切相连, Fourier 变换为我们在本章将要研究的共轭理论和正交展开理论提供了无限维情形下最直接的例子.

在 §4.1, 我们介绍内积空间和 Hilbert 空间, 并给出一些几何直观很强的等式和不等式. 在 §4.2, 我们将介绍投影算子及其基本定理, 这是研究 Hilbert 空间上正交分解问题的基础. §4.3 讨论 Hilbert 空间的对偶和共轭理论, 核心结果是 Riesz 表示定理. 在 §4.4, 我们给出 Hilbert 空间上正交基的概念, 并证明一般 Hilbert 空间上具有规范正交基.

§4.1　内 积 空 间

定义 4.1.1　设 H 是标量域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间. 若映射

$$\langle\cdot,\,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{K}$$

满足:

(1) **线性性**: 对任意固定的 $y\in H$, 从 H 到 $\mathbb{K}$ 的映射 $x\mapsto\langle x,\,y\rangle$ 是线性的.

(2) **对称性**: 任取 $x,y\in H$, 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 则 $\langle x,\,y\rangle=\langle y,\,x\rangle$; 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, 则 $\langle x,\,y\rangle=\overline{\langle y,\,x\rangle}$.

(3) **非负性**: 任取 $x\in H$, $\langle x,\,x\rangle\geqslant 0$, 并且 $\langle x,\,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$,

则称映射 $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ 为 H 上的内积, 并称赋予内积的向量空间 H 为内积空间.

注 4.1.2　若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 则对任意固定的 $x\in H$, 映射 $y\mapsto\langle x,\,y\rangle$ 也是线性的; 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, 则 $y\mapsto\langle x,\,y\rangle$ 是共轭线性的, 即

$$\langle x,\,\lambda y_1+y_2\rangle=\overline{\lambda}\langle x,\,y_1\rangle+\langle x,\,y_2\rangle,\ \ \forall y_1,y_2\in H,\lambda\in\mathbb{C}.$$

例 4.1.3　以下是一些常见的内积空间:

- $\ell_2^n = \mathbb{K}^n$, 其上的内积为 $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\overline{y}_k$, 这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.
- ℓ_2 空间:

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{K} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\},$$

其上的内积为 $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$.

- $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$: 其上的内积为 $\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} f(\omega)\overline{g(\omega)}\mathrm{d}\mu$.
- $C([0,1]; \mathbb{K})$: 其上也可定义内积 $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$, 则它成为一个内积空间.

定理 4.1.4 (Cauchy-Schwarz 不等式) *设 H 是内积空间, 则对任意 $x, y \in H$, 有*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{4.1}$$

并且上式中等号成立的充分必要条件是 x 与 y 成比例.

证明 设 $x, y \in H$, 任取 $\lambda \in \mathbb{K}$, 由内积的非负性, 可得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle &= \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\langle y, y\rangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 上式即为对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geqslant 0. \tag{4.3}$$

由于以上作为 λ 的二项式总是非负的 (不失一般性, 假设 $y \neq 0$), 故其判别式必非正, 即有

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

这就是需要的 Cauchy-Schwarz 不等式. 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 取 $\lambda = t\,\overline{\mathrm{sgn}\langle x, y\rangle}$, 这里

$$\mathrm{sgn}\, z = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}}{|z|}, & z \in \mathbb{C},\ z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

把 λ 代入 (4.2) 式, 得

$$\langle x, x\rangle + 2t\,|\langle x, y\rangle| + t^2\langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

由此也得到 Cauchy-Schwarz 不等式.

下证定理的另一部分. 如果 x 与 y 成比例, 那么直接计算可得 (4.1) 式中的等号成立. 反过来, 假设等号成立, 则 (4.3) 左边的二项式的判别式等于零, 因此它有一个二重根, 记其为 λ, 则必有

$$\langle x+\lambda y,\, x+\lambda y\rangle = 0.$$

这意味着 $x+\lambda y=0$, 即 $x=-\lambda y$. ■

注 4.1.5 设 H 是一个内积空间, 定义 $\|x\|=\langle x,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $x\in H$, 那么 $\|\cdot\|$ 是 H 上的范数. 实际上由内积的性质, 此处只需检验三角形不等式. 我们有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,\, x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

故 $\|\cdot\|$ 是 H 上的范数.

由此我们给出下面的概念:

定义 4.1.6 设 H 是一内积空间, 令 $\|x\|=\langle x,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $x\in H$, 称 $\|\cdot\|$ 为由内积导出的范数, 由此 H 成为赋范空间. 若这个范数还是完备的, 则称 H 是 *Hilbert* 空间.

例 4.1.7 例 4.1.3 中的 ℓ_2^n, ℓ_2 和 $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$ 都是 Hilbert 空间, 但是 $C([0,1];\,\mathbb{K})$ 不是 Hilbert 空间, 其完备化空间是 $L_2(0,1)$.

注 4.1.8 在内积空间上引入范数后, 由 Cauchy-Schwarz 不等式可知函数 $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ 在 $H\times H$ 上是连续的, 此即内积的连续性.

定理 4.1.9 (极化恒等式) *设 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, 那么*

(1) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 则

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right),\ \ \forall\, x,y\in H.$$

(2) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, 则

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k\|x+\mathrm{i}^k y\|^2,\ \ \forall\, x,y\in H.$$

这里 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$.

证明由内积空间中范数的定义即可给出, 此处留作练习.

注 4.1.10 通过极化恒等式易证: 若 $u: H \to K$ 是两个内积空间中的线性等距映射, 则必有 u 保内积, 即

$$\langle u(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle,\ \forall x, y \in H.$$

定理 4.1.11 (平行四边形公式) 设 H 是内积空间, 则对任意 $x, y \in H$, 有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

同样略去此定理的证明. 反过来, 平行四边形公式的成立也是范数能由内积导出的充分条件, 我们有如下结论.

定理 4.1.12 设 H 是赋范空间. 如果范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式, 那么该范数可由一个内积导出.

证明 这里我们只考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 的情形 ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情形留给读者完成). 首先定义映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ H \times H \to \mathbb{R}$ 为

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

现证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 H 上的内积, 对称性和非负性是显然的, 故只需证明对任意固定的 $y \in H$, 映射 $x \mapsto \langle x,\, y\rangle$ 是线性的. 该证明分为几个步骤:

先证对任意 $x, z \in H$, $\langle x,\, 2z\rangle = 2\langle x, z\rangle$. 事实上, 由以上定义及平行四边形公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle x, 2z\rangle &= \frac{1}{2}\big(\|x+2z\|^2 - \|x\|^2 - \|2z\|^2\big)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\|x+2z\|^2 + \|x\|^2\right) - 2\|x\|^2 - \|2z\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\|2x+2z\|^2 + \|2z\|^2\right) - 2\|x\|^2 - \|2z\|^2\right]\\
&= \|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2\\
&= 2\langle x, z\rangle.
\end{aligned}$$

接下来证可加性, 即对任意 $x, x', y \in H$, 有 $\langle x+x',\, y\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle x',\, y\rangle$. 事实上, 根据上步、定义及平行四边形公式我们有

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle &= 2\left\langle x, \frac{1}{2}y\right\rangle + 2\left\langle x', \frac{1}{2}y\right\rangle\\
&= \left\|x + \frac{1}{2}y\right\|^2 - \|x\|^2 - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x' + \frac{1}{2}y\right\|^2 - \|x'\|^2 - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+x'+y\|^2 + \|x-x'\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|x+x'\|^2 + \|x-x'\|^2\right) - \frac{1}{2}\|y\|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$= \langle x+x', y\rangle.$$

再证数乘性质, 即任取 $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$, 有 $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. 上一步的结论意味着对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$, 那么也可得

$$\frac{1}{n}\langle x, y\rangle = \frac{1}{n}\left\langle n\frac{1}{n}x, y\right\rangle = \left\langle \frac{1}{n}x, y\right\rangle.$$

从而对任意 $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\left\langle \frac{m}{n}x, y\right\rangle = \frac{m}{n}\langle x, y\rangle.$$

并且还有

$$0 = \langle x-x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle,$$

故 $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. 故对任意有理数 r, 有 $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$. 最后由范数的连续性, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lim_{r\in\mathbb{Q}, r\to\lambda} \langle rx, y\rangle = \lim_{r\in\mathbb{Q}, r\to\lambda} r\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle.$$

因此定理得证. ■

§4.2 投影算子

下面是 Hilbert 空间中闭凸集的投影定理, 它是凸分析和逼近理论中的基础定理.

定理 4.2.1 设 H 是 Hilbert 空间, C 是 H 的非空闭凸子集, 那么

(1) 对任意 $x \in H$ 存在唯一的 $y \in C$ 使得

$$\|x-y\| = d(x, C),$$

称该 y 是 x 在 C 上的投影, 记作 $P_C(x)$.

(2) 设 $y \in H$, 则 $y = P_C(x) \iff \mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$, $\forall z \in C$.

(3) 映射 $x \mapsto P_C(x)$ 是常数为 1 的 Lipschitz 映射, 即对任意 $x, x' \in H$, 有

$$\|P_C(x) - P_C(x')\| \leqslant \|x-x'\|.$$

(4) $P_C \circ P_C = P_C$ 且 $P_C(H) = C$, 即投影算子是幂等算子 ($P_C^2 = P_C$).

证明 (1) 设 $d=d(x,C)$. 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 取 $y_n\in C$, 使得

$$d\leqslant \|x-y_n\|\leqslant d+\frac{1}{n}.$$

那么, 由平行四边形公式得

$$\begin{aligned}\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+\left(d+\frac{1}{m}\right)^2 &\geqslant \|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2\\ &=\frac{1}{2}\left(\|2x-y_n-y_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\|y_n-y_m\|^2+4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2\right).\end{aligned}$$

因 C 是凸的, 故 $\frac{y_n+y_m}{2}\in C$, 因而 $\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\|\geqslant d$. 所以

$$\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+\left(d+\frac{1}{m}\right)^2-2d^2\geqslant\frac{1}{2}\|y_n-y_m\|^2.$$

在上式两边取极限, 即得 $\|y_n-y_m\|\to 0$, 故 (y_n) 是 C 中的 Cauchy 序列. 因 H 完备而 C 闭, 故存在 $y\in C$, 使得 $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 因此必有 $\|y-x\|=d$.

现证唯一性. 设另一 $y'\in C$ 使得 $\|y'-x\|=d$. 那么类似于上式的证明, 可得

$$\begin{aligned}2d^2&=\|x-y\|^2+\|x-y'\|^2\\ &=\frac{1}{2}\left(\|y-y'\|^2+\|2x-y-y'\|^2\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\|y-y'\|^2+4\left\|x-\frac{y+y'}{2}\right\|^2\right)\\ &\geqslant\frac{1}{2}\|y-y'\|^2+2d^2.\end{aligned}$$

于是 $\|y-y'\|=0$, 故唯一性成立.

(2) $\Longrightarrow$. 这里 $y=P_C(x)$, z 为 C 中任意一点, 设 $z'=\lambda y+(1-\lambda)z, 0<\lambda<1$. 由 C 的凸性知 $z'\in\mathbb{C}$. 因而

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2&\leqslant\|x-z'\|^2\\ &=\|x-y-(z'-y)\|^2\\ &=\|x-y\|^2+\|y-z'\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle x-y,z'-y\rangle,\end{aligned}$$

故 $2\mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leqslant(1-\lambda)\|z-y\|^2$. 然后令 $\lambda\to 1$, 即得

$$\mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leqslant 0.$$

$\Longleftarrow$. 任取 $z \in C$, 由于 $\operatorname{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|x-y-(z-y)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, z-y\rangle \\ &\geqslant \|x-y\|^2.\end{aligned}$$

由于 z 是任意选取的, 故可得 $y = P_C(x)$.

(3) 任取 $x, x' \in H$, 令 $y = P_C(x)$, $y' = P_C(x')$, 则有

$$\begin{aligned}\|y-y'\|^2 &= \langle y-y', y-y'\rangle \\ &= \langle y-x, y-y'\rangle + \langle x-x', y-y'\rangle + \langle x'-y', y-y'\rangle.\end{aligned}$$

两边取实部, 得到

$$\|y-y'\|^2 = \operatorname{Re}\langle y-x, y-y'\rangle + \operatorname{Re}\langle x-x', y-y'\rangle + \operatorname{Re}\langle x'-y', y-y'\rangle.$$

由以上命题 (2), 可知 $\operatorname{Re}\langle y-x, y-y'\rangle \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\langle x'-y', y-y'\rangle \leqslant 0$. 再根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\|y-y'\|^2 \leqslant \operatorname{Re}\langle x-x', y-y'\rangle \leqslant \|x-x'\|\,\|y-y'\|,$$

即得 $\|y-y'\| \leqslant \|x-x'\|$. 故结论成立.

(4) 由定义直接可得. ■

注 4.2.2 上面的证明只用到 C 的完备性. 因此, 若 H 是任意内积空间且 C 是完备的凸集, 则定理的结论也成立.

定义 4.2.3 设 H 是内积空间, 若 $\langle x, y\rangle = 0$, $x, y \in H$, 则称 x 与 y *正交*, 记作 $x \perp y$. 对任意 $A \subset H$, 令

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp y,\ \forall y \in A\}.$$

称 $A^{\perp}$ 为集合 A 在 H 中的*正交补*.

注 4.2.4 设 H 是内积空间, 则

(1) 勾股定理 (Pythagoras 定理): $x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(2) 我们由内积定义向量间的夹角. 若 $x \neq 0, y \neq 0$, 则可定义

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|},\ \theta \in [0, \pi].$$

若 $x=0$ 或 $y=0$, 则必有 $x\perp y$, 通常约定它们之间的夹角可以取任意值. 由此定义, 显然有

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=\|x\|\,\|y\|\cos\theta,$$

并且

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\cos\theta.$$

(3) 由内积的连续性可知, 对任意 $A\subset H$, $A^\perp$ 是 H 的闭向量子空间, 并有

$$A^\perp=(\overline{A})^\perp=(\mathrm{span}\,A)^\perp=(\overline{\mathrm{span}\,A})^\perp.$$

当定理 4.2.1 的凸集 C 是向量子空间时, 其投影有下面的简单刻画.

定理 4.2.5 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的闭向量子空间. 那么对任意 $x\in H$, 它的投影 $P_E(x)$ 是 E 中满足条件 $x-y\perp E$ 的唯一元素 y. 而且 P_E 是 H 到 E 的线性算子, 并有 $\|P_E\|\leqslant 1$.

证明 对任意 $x,y\in H$, 因 E 是向量子空间, 故 $P_E(x)$ 是唯一的, 由定理 4.2.1 的命题 (2), 可知

$$\begin{aligned}y=P_E(x)&\iff \mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leqslant 0,\ \forall z\in E\\&\iff \mathrm{Re}\langle x-y,(z'+y)-y\rangle\leqslant 0,\ \forall z'\in E\\&\iff \mathrm{Re}\langle x-y,\lambda z''\rangle\leqslant 0,\forall z''\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}\\&\iff \mathrm{Re}\ \overline{\lambda}\langle x-y,z\rangle\leqslant 0,\ \forall z\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}.\end{aligned}$$

对任意固定的 $z\in H$, 设 $\mathrm{Re}\ \overline{\lambda}\langle x-y,\,z\rangle=0,\forall\lambda\in\mathbb{K}$. 取 $\lambda=\pm1$, 则有 $\mathrm{Re}\langle x-y,\,z\rangle=0$. 因此, 当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, $\langle x-y,\,z\rangle=0$. 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, 再取 $\alpha=\pm\mathrm{i}$, 则得 $\mathrm{Im}\langle x-y,\,z\rangle=0$; 故仍有 $\langle x-y,\,z\rangle=0$. 反之, 若 $\langle x-y,\,z\rangle=0$, 则显然 $\mathrm{Re}\ \overline{\lambda}\langle x-y,\,z\rangle=0,\forall\lambda\in\mathbb{K}$. 所以, 结合以上讨论, 我们得到

$$y=P_E(x)\iff x-y\perp E.$$

下证 P_E 是线性的. 任取 $x,\ x'\in H$, 则有

$$x+x'-[P_E(x)+P_E(x')]=[x-P_E(x)]+[x'-P_E(x')]\perp E.$$

这意味着

$$P_E(x+x')=P_E(x)+P_E(x').$$

类似地可证对任意 $\lambda\in\mathbb{K}$, 有 $P_E(\lambda x)=\lambda P_E(x)$.

最后, 由 P_E 是常数为 1 的 Lipschitz 映射及其线性性, 可得

$$\|P_E(x)\| = \|P_E(x) - P_E(0)\| \leqslant \|x\|,$$

故 $\|P_E\| \leqslant 1$. 实际上, 对任意非零子空间 E, 都有 $\|P_E\| = 1$. ■

上述定理给出下面两个重要推论, 它们是构造规范正交基的关键工具.

推论 4.2.6 (正交分解) 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的向量子空间, 则有

$$H = \overline{E} \oplus E^{\perp}.$$

也就是说, 任取 $x \in H$, 存在唯一的分解 $x = y + z$, 这里 $(y, z) \in \overline{E} \times E^{\perp}$, 并有

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

证明 任取 $x \in H$. 令 $y = P_{\overline{E}}(x) \in \overline{E}$, 则由上一定理知 $z = x - y \perp \overline{E}$, 即 $z \in E^{\perp}$. 注意 $E^{\perp} = (\overline{E})^{\perp}$, 故有 $x = y + z$, $(y, z) \in \overline{E} \times E^{\perp}$.

若还有 $(y', z') \in \overline{E} \times E^{\perp}$ 满足 $x = y' + z'$, 则可得 $y - y' = z' - z$. 由于 $\overline{E}$ 和 $E^{\perp}$ 都是向量子空间, 我们有 $y - y' \in \overline{E}$ 及 $z - z' \in E^{\perp}$, 从而 $y - y' \perp z - z'$. 由此可得 $y - y' = z' - z = 0$, 即 $y = y'$, $z = z'$, 故唯一性得证.

最后, $y \perp z$, 可知 $\langle y, z \rangle = 0$, 故 $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. ■

推论 4.2.7 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的向量子空间, 则有

$$(E^{\perp})^{\perp} = \overline{E}.$$

证明 由定义立即可知, $E \subset (E^{\perp})^{\perp}$. 因正交补是闭子空间, 故有 $\overline{E} \subset (E^{\perp})^{\perp}$.

反之, 任取 $x \in (E^{\perp})^{\perp}$, 则 $P_{E^{\perp}}(x) = 0$, 故由推论 4.2.6 有

$$x = P_{\overline{E}}(x) + P_{E^{\perp}}(x) = P_{\overline{E}}(x).$$

因此 $x = P_{\overline{E}}(x) \in \overline{E}$, 即 $(E^{\perp})^{\perp} \subset \overline{E}$. ■

注 4.2.8 设 H 是 Hilbert 空间, A 为 H 的子集, 则有

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span} A},$$

这是因为 $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} A})^{\perp}$.

§4.3 对偶和共轭

一般来说, 我们很难描述一个赋范空间的对偶空间. 下面的 Riesz 表示定理说明 Hilbert 空间的对偶空间是它本身. 我们将在后面的章节明确刻画 L_p 空间和连续函数空间的对偶空间 (见定理 9.5.1 和定理 10.3.3).

定理 4.3.1 (Riesz 表示定理) 设 H 是 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间. 那么 $\varphi : H \to \mathbb{K}$ 是一个连续线性泛函的充分必要条件是存在向量 $y \in H$, 使得

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle, \ \ \forall x \in H.$$

而且如此得来的向量 y 是唯一的且满足 $\|y\| = \|\varphi\|$.

证明 充分性. 设 $y \in H$. 定义 $\varphi_y : H \to \mathbb{K}, \varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$. 显然, φ_y 是线性的. 另外, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$|\varphi_y(x)| \leqslant \|x\| \, \|y\|, \quad \forall x \in H.$$

故 $\varphi \in H^* = \mathcal{B}(H, \mathbb{K})$ 且 $\|\varphi\| \leqslant \|y\|$. 若 $y = 0$, 则 $\varphi_y = 0$, 故 $\|\varphi_y\| = \|y\| = 0$. 否则, 取 $x = \frac{y}{\|y\|}$, 则有

$$|\varphi_y(x)| = \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \right| = \|y\| \, .$$

从而仍有 $\|y\| = \|\varphi\|$.

必要性. 设 $\varphi \in H^*$, 并设 $E = \ker(\varphi)$. 由于 φ 是连续线性泛函, 可知 E 为闭向量子空间, 那么 $H = E \oplus E^{\perp}$. 若 $\varphi = 0$, 则取 $y = 0$ 即可. 故假设 $\varphi \neq 0$, 此时 $E \neq H$. 于是可取 $e \in E^{\perp}$ 且 $e \neq 0$, 则 $\varphi(e) \neq 0$, 不妨设 $\varphi(e) = 1$. 那么任取 $x \in H$, 可令

$$x = [x - \varphi(x)e] + \varphi(x)e.$$

我们记 $x' = x - \varphi(x)e$, 则 $\varphi(x') = 0$, 即 $x' \in E$, 那么

$$\langle x, e \rangle = \langle x' + \varphi(x)e, e \rangle = \varphi(x)\langle e, e \rangle.$$

由此可得

$$\varphi(x) = \left\langle x, \frac{e}{\|e\|^2} \right\rangle.$$

此时取 $y = \frac{e}{\|e\|^2}$, 即得

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle, \ \forall x \in H.$$

因此, $\varphi = \varphi_y$, 且由充分性中已有的结论, 可知 $\|\varphi\| = \|y\|$.

下面证明唯一性. 若还有 $y' \in H$ 使得

$$\varphi(x) = \langle x, y' \rangle, \ \forall x \in H.$$

则有

$$\langle x, y - y' \rangle = 0, \ \forall x \in H.$$

因此 $y - y' = 0$, 唯一性得证. ■

注 4.3.2 Riesz 表示定理的结论表明我们可把 H^* 和 H 在等距意义下看成同一个空间, 即

$$y \in H \Longleftrightarrow \varphi_y \in H^*,$$

且 $\|\varphi_y\| = \|y\|$. 另外容易验证映射 $\Phi : H \to H^*, y \mapsto \varphi_y$ 满足

- $\Phi(y + y') = \varphi_y + \varphi_{y'}$.
- 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 任取 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\Phi(\lambda y) = \lambda \varphi_y$; 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时, 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有 $\Phi(\lambda y) = \overline{\lambda} \varphi_y$.

这意味着映射 Φ 在 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时是线性的, 而在 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时是共轭线性的.

定理 4.3.3 设 H 和 K 是两个 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{B}(H, K)$. 那么存在唯一的 $u^* \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle, \ \forall\, x \in K, \forall y \in H, \tag{4.4}$$

而且 $\|u^*\| = \|u\|$. 我们称 u^* 为 u 的伴随.

证明 任取 $x \in K$, 由于 $u \in \mathcal{B}(H, K)$ 及由内积的连续性, 可知

$$y \mapsto \langle u(y),\, x \rangle$$

是 H 上的连续线性泛函. 则由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $z \in H$, 使得对任意 $y \in H$, 下式成立:

$$\langle y,\, z \rangle = \langle u(y),\, x \rangle.$$

我们令 $u^*(x) = z$, 则有

$$\langle y, u^*(x) \rangle = \langle u(y),\, x \rangle, \quad \forall\, x \in K, \forall y \in H.$$

由内积的对称性, 即知 (4.4) 式也成立. 显然 $u^* : K \to H$ 是线性映射, 并且仍由 Riesz 表示定理, 可得

$$\|u^*\| = \sup_{x \in K, \|x\| \leqslant 1} \|u^*(x)\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x\in K,\|x\|\leqslant 1}\ \sup_{y\in H,\|y\|\leqslant 1} |\langle y,\ u^*(x)\rangle| \\
&= \sup_{y\in H,\|y\|\leqslant 1}\ \sup_{x\in K,\|x\|\leqslant 1} |\langle u(y),\ x\rangle| \\
&= \sup_{y\in H,\|y\|\leqslant 1} \|u(y)\| = \|u\|.
\end{aligned}
$$

容易看出满足 (4.4) 式的 u^* 是唯一的. ■

注 4.3.4 我们还有以下结论:

(1) 设 $u\in\mathcal{B}(H,K)$, 则 $(u^*)^*=u$.

(2) 映射 $u\mapsto u^*$ 是从 $\mathcal{B}(H,K)$ 到 $\mathcal{B}(K,H)$ 的等距双射. 当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 该映射是线性的; 但当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时, 它是共轭线性的, 即任取 $u,v\in\mathcal{B}(H,K)$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有 $(\lambda u+v)^*=\overline{\lambda}u^*+v^*$.

(3) 设 $H,\ K,\ J$ 都是 Hilbert 空间, $u\in\mathcal{B}(H,K)$, $v\in\mathcal{B}(K,J)$, 则

$$(vu)^*=u^*v^*\in\mathcal{B}(J,H).$$

由此可知, 若 $u\in\mathcal{B}(H,K)$ 可逆, 则 $u^*\in\mathcal{B}(K,H)$ 也可逆, 并且

$$(u^*)^{-1}=(u^{-1})^*.$$

定义 4.3.5 映射 $u\in\mathcal{B}(H)$ 被称为酉算子, 若 $u^*u=uu^*=\mathrm{I}_H$.

注 4.3.6 $\mathcal{B}(H)$ 中所有的酉算子关于乘法构成一个群.

例如, 当 H 是有限维的 Hilbert 空间, 即 $\dim H=n<\infty$ 时, 记 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 为它的规范正交基 (见下节规范正交基的定义). 任取 $u\in\mathcal{B}(H)$, 令 $[u]$ 表示 u 在基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 下的矩阵. 那么 $[u^*]=[u]^*$, 这里 $[u]^*$ 就是 $[u]$ 的共轭转置矩阵. u 是酉算子等价于 $[u]$ 是一个酉矩阵.

§4.4 正 交 基

我们将证明任一 Hilbert 空间均有正交基, 这是 Hilbert 空间特有的性质; 正交基是处理 Hilbert 空间的有效工具.

定义 4.4.1 设 I 是指标集, 设 H 是 Hilbert 空间, $(e_i)_{i\in I}$ 是 H 中的一族向量.

(1) 若任取 $i,j\in I$ 且 $i\neq j$, 有 $e_i\perp e_j$, 则称向量族 $(e_i)_{i\in I}$ 是正交的.

(2) 若向量族 $(e_i)_{i\in I}$ 是正交的, 并对每个 $i\in I$, 有 $\|e_i\|=1$, 则称向量族 $(e_i)_{i\in I}$ 是规范正交的.

(3) 若 $(e_i)_{i\in I}$ 的线性扩张 $\operatorname{span}((e_i)_{i\in I})$ 在 H 中稠密, 则称向量族 $(e_i)_{i\in I}$ 是完全的.

(4) 若 $(e_i)_{i\in I}$ 在 H 中是规范正交的且是完全的, 则称 $(e_i)_{i\in I}$ 是 H 的规范正交基.

例 4.4.2 我们给出 $\mathbb{K}^n$, ℓ_2 和 $L_2(\mathbb{T})$ 这些空间中的规范正交基. 注意规范正交基并不是唯一的.

- $\mathbb{K}^n$: $(e_1,\cdots,e_n)$, 即为欧氏空间下的标准基.
- ℓ_2: $(e_n)_{n\geqslant 1}$, 这里 $(e_n)=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, 其中 1 在 e_n 的第 n 个坐标位置.
- $L_2(\mathbb{T})$: 这里 $\mathbb{T}$ 是复平面上的单位圆周, 即 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C},|z|=1\}$. 我们可将 $\mathbb{T}$ 等同于 $[0,2\pi]$, 后者可被赋予规范的 Lebesgue 测度, 即 $\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$. 因此, $L_2(\mathbb{T})\cong L_2(0,2\pi)$. 定义 $e_n(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $n\in\mathbb{Z}$. 则由 Fourier 级数理论知 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L_2(\mathbb{T})$ 的一个规范正交基 (详见 §5.2). $L_2(0,2\pi)$ 上的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\overline{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

定理 4.4.3 设 H 是 Hilbert 空间, $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 H 中的规范正交序列, 令 $E=\operatorname{span}(e_1,\cdots,e_n)$. 那么对任意 $x\in H$, 有

$$P_E(x)=\sum_{i=1}^n\langle x,\, e_i\rangle e_i \quad 且 \quad \|x\|^2=\|x-P_E(x)\|^2+\sum_{i=1}^n|\langle x,\, e_i\rangle|^2.$$

证明 对任意 $x\in H$, 设 $y=\sum\limits_{i=1}^n\langle x,\, e_i\rangle e_i$, 则 $y\in E$, 且对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$\langle x-y,\, e_k\rangle=\langle x,\, e_k\rangle-\langle x,\, e_k\rangle\langle e_k,\, e_k\rangle=0.$$

因此, $x-y\perp E$, 故由定理 4.2.5 知 $P_E(x)=y$. 另外, 因 (e_i) 是规范正交的, $\|P_E(x)\|^2=\sum\limits_{i=1}^n|\langle x,\, e_i\rangle|^2$. 最后,

$$\|x\|^2=\|x-P_E(x)\|^2+\|P_E(x)\|^2=\|x-P_E(x)\|^2+\sum_{i=1}^n|\langle x,\, e_i\rangle|^2.$$

定理得证. ■

定理 4.4.4 设 H 是 Hilbert 空间, $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交序列. 则下面命题等价:

(1) $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是完全的 (即 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交基).

(2) 任取 $x\in H$, 存在唯一的序列 $(x_n)\subset\mathbb{K}$, 使得级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}x_ne_n$ 收敛到 x.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1) 是显然的. 这是因为对任意 $x \in H$, 存在 $(x_n) \subset \mathbb{K}$, 使得级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n e_n$ 收敛到 x, 而级数的部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in \operatorname{span}((e_n)_{n\geqslant 1})$, 这意味着 $E = \operatorname{span}((e_n)_{n\geqslant 1})$ 在 H 中稠密.

(1) $\Rightarrow$ (2). 对任意 $x \in H$, 设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x,\ e_k\rangle e_k.$$

设 $E_n = \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_n)$, 显然有 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 由定理 4.4.3 可知 $P_{E_n}(x) = S_n$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} |\langle x,\ e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x,\ e_k\rangle|^2$ 收敛. 那么对 $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\langle x,\ e_k\rangle|^2 \to 0,\ n \to \infty.$$

故 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的 Cauchy 序列, 则 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 在 H 中收敛. 下面证明 $P_{E_n}(x) = S_n \to x$.

若 $y \in E$, 则存在 $N \geqslant 1$ 以及 $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant N} \subset \mathbb{K}$, 使得

$$y = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k,$$

则 $P_{E_N}(y) = y$. 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $P_{E_N}(y) = y \in E_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{E_n}(y) = y$.

现任取 $x \in H$, 由于 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是完全的, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in E$, 使得 $\|x - y\| < \varepsilon$. 因此,

$$\begin{aligned}\|x - P_{E_n}(x)\| &\leqslant \|x - y\| + \|y - P_{E_n}(y)\| + \|P_{E_n}(y) - P_{E_n}(x)\| \\ &< 2\varepsilon + \|y - P_{E_n}(y)\|.\end{aligned}$$

由以上情形知 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{E_n}(y) = y$, 故 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x - P_{E_n}(x)\| \leqslant 2\varepsilon$. 最后由 ε 的任意性得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x - P_{E_n}(x)\| = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{E_n}(x) = x$, 从而级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} \langle x,\ e_n\rangle e_n$ 在 H 中收敛到 x.

另外, 对任一序列 $(x_n) \subset \mathbb{K}$, 若有 $x = \sum\limits_{n\geqslant 1} x_n e_n$, 则根据内积的连续性可得, 对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$\langle x,\ e_n\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{m} x_i e_i,\ e_n \right\rangle = x_n.$$

故 $\sum\limits_{n\geqslant 1} \langle x,\ e_n\rangle e_n$ 是 x 的唯一级数表示式. ■

由此定理的证明, 我们得到 Bessel 不等式和 Parseval 恒等式.

定理 4.4.5 (Bessel 不等式) 设 H 是 Hilbert 空间, $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交序列. 则对任意 $x\in H$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,\ e_n\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

定理 4.4.6 (Parseval 恒等式) 设 H 是 Hilbert 空间, $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交基. 则对任意 $x\in H$, 有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,\ e_n\rangle|^2.$$

更一般地, 对任意 $x,y\in H$, 有

$$\langle x,\ y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,\ e_n\rangle\langle e_n,\ y\rangle.$$

证明 实际上, 因 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交基, 故对任意 $x\in H$, 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\langle x,\ e_n\rangle e_n$ 依 H 中的范数收敛到 x, 由范数和内积的连续性即知定理中结论成立. ■

由以上讨论可见, 如果我们给出 Hilbert 空间中的规范正交基 $(e_n)_{n\geqslant 1}$, 那么 Hilbert 空间有漂亮的线性结构. 当给出的一组序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 仅是线性无关时, 我们希望得到一组与之等价的规范正交集, 其具体的处理过程即我们在线性代数中已经见过的 Gram-Schmidt 正交化方法. 注意, 我们称无穷向量集 $(f_i)_{i\in I}$ 线性无关, 若其任意有限子集线性无关.

定理 4.4.7 (Gram-Schmidt 正交化) 设 H 是 Hilbert 空间, $(f_k)_{k\geqslant 1}$ 是 H 中线性无关的一族序列 ($(f_k)_{k\geqslant 1}$ 可以是有限的), 那么存在一族规范正交序列 $(e_k)_{k\geqslant 1}$, 使得对任意 $n\in\mathbb{N}^*$: $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 和 $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ 生成 H 中相同的向量子空间.

证明 证明分两个步骤. 第一步, 正交化. 首先令 $g_1=f_1$. 接下来, 令

$$g_2=f_2-\frac{\langle f_2,\ g_1\rangle}{\langle g_1,\ g_1\rangle}g_1,$$

则有

$$\langle g_1,\ g_2\rangle=\langle g_1,\ f_2\rangle-\overline{\langle f_2,\ g_1\rangle}\frac{\langle g_1,\ g_1\rangle}{\langle g_1,\ g_1\rangle}=0,$$

即 $g_1 \perp g_2$. 另外, 由于 (f_1, f_2) 线性无关, $g_2 \neq 0$. 再令

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle f_3,\ g_1\rangle}{\langle g_1,\ g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_3,\ g_2\rangle}{\langle g_2,\ g_2\rangle} g_2,$$

则有 $g_1 \perp g_3$, $g_2 \perp g_3$. 一般地, 令

$$g_n = f_n - \frac{\langle f_n,\ g_1\rangle}{\langle g_1,\ g_1\rangle} g_1 - \cdots - \frac{\langle f_n,\ g_{n-1}\rangle}{\langle g_{n-1},\ g_{n-1}\rangle} g_{n-1},$$

则 $g_1, \cdots, g_n$ 是两两正交的非零向量. 依次继续下去, 由此得到新的序列 $(g_k)_{k\geqslant 1}$, 满足

- $(g_k)_{k\geqslant 1}$ 是由非零向量组成的正交序列.
- 可记 $g_n = \alpha_{n1} f_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1} f_{n-1} + f_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

第二步, 单位化. 令 $e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$, $n \geqslant 1$, 则 $(e_k)_{k\geqslant 1}$ 为一族规范正交序列. 可记

$$e_n = \gamma_{n1} f_1 + \cdots + \gamma_{n,n-1} f_{n-1} + \gamma_{nn} f_n,\ \ n = 1, 2, \cdots,$$

这里 $\gamma_{nn} \neq 0$. 因此

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

由于 $\gamma_{nn} \neq 0$, 故对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 每个下三角形矩阵

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

是可逆的; 由此得出 $\operatorname{span}(e_1, \cdots, e_n) = \operatorname{span}(f_1, \cdots, f_n)$, 故定理得证. ■

下面定理证明任一可分的 Hilbert 空间具有一列 (可为有限) 规范正交基. 这里我们提醒: 一拓扑空间是可分的, 若它有最多可数的稠密子集.

定理 4.4.8 设 H 是可分的非零 Hilbert 空间, 则 H 有规范正交基.

证明 设 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 的可数稠密子集, 且 $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, 我们依次去掉可由前面的元素线性表示的向量, 则可得一列新的向量 $(v_n)_{n\geqslant 1}$, 这里的每一个 v_n 是某一个 a_n. 向量组 $(v_n)_{n\geqslant 1}$ 中任意有限个向量线性无关并且 $\mathrm{span}(v_1, v_2, \cdots)$ 在 H 中稠密.

对 $\mathrm{span}(v_1, v_2, \cdots)$ 施行 Gram-Schmidt 正交化变换, 我们可得一族规范正交序列 $(e_n)_{n\geqslant 1}$, 满足

$$\mathrm{span}(e_1, e_2, \cdots) = \mathrm{span}(v_1, v_2, \cdots).$$

由此可知 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 在 H 中是完全的. 因此, 由定理 4.4.4 知 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交基. ■

如果 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 Hilbert 空间 H 中的规范正交基, 任取 $x \in H$, 则由定理 4.4.4 以及 Parseval 恒等式, 可得

$$x = \sum_{n\geqslant 1} \langle x,\ e_n\rangle e_n$$

以及

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ x_n = \langle x,\ e_n\rangle.$$

由此我们可以建立 x 和 $\tilde{x} = (x_1, x_2, \cdots) \subset \mathbb{K}$ 之间的对等关系, 具体有如下结论.

推论 4.4.9 设 H 是可分的 Hilbert 空间. 则当 $\dim H = n < \infty$ 时, H 与 ℓ_2^n 线性等距同构, 记作 $H \cong \ell_2^n$; 当 $\dim H = \infty$ 时, H 与 ℓ_2 线性等距同构, 记作 $H \cong \ell_2$. 并且对内积运算也保持同构关系, 即

$$\langle x, y\rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle,\ \forall x, y \in H.$$

推论 4.4.9 表明可分 Hilbert 空间必同构于 ℓ_2^n 或 ℓ_2, 由于 ℓ_2^n 和 ℓ_2 都是可分的, 再结合定理 4.4.4 知 Hilbert 空间是可分的当且仅当它具有最多可数的规范正交基. 在实际应用中, 我们见到的大部分 Hilbert 空间都是可分的, 当然也存在着不可分的 Hilbert 空间. 可以证明不可分的 Hilbert 空间也有规范正交基, 证明中需要用到 Zorn 引理, 相应定理如下.

定理 4.4.10 任一非零空间的 Hilbert 空间必有规范正交基.

证明 设 $\mathcal{F}$ 是由 H 中所有的非空规范正交子集构成的集族. 我们知道 $\mathcal{F}$ 上的包含关系"$\subset$"是一种偏序关系, 即 $(\mathcal{F}, \subset)$ 是偏序集. 若 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的全序子集族, 则容易看出 $\bigcup\limits_{G \subset \mathcal{G}} G$ 是该全序子集的上界. 那么根据 Zorn 引理[1], 存在 $\mathcal{F}$ 中的极大元 M. 假设 M 不是规范正交基, 则必有某个元素 $x \in H$, 使得 $x \notin \overline{\operatorname{span} M}$. 因此 $x - P_M(x) \perp M$ 且 $x - P_M(x) \notin M$. 令 $e = \frac{x-P_M(x)}{\|x-P_M(x)\|}$, 则 $M \cup \{e\}$ 也是 H 中的规范正交子集, 这与 M 是 $\mathcal{F}$ 中的极大元相矛盾. 所以 M 必是 H 中的规范正交基. ∎

下面我们给出不可分的 Hilbert 空间 (包括可分的) 中内积的构造实例.

例 4.4.11 设 I 是指标集 (不一定可数). 定义

$$\ell_2(I) = \{x = (x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K} : \|x\| < \infty\},$$

这里

$$\|x\| = \sup_{J \subset I,\ J\,\text{有限}} \left(\sum_{i \in J} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证该空间是 Banach 空间, 并且我们可以由可和族来定义 $\ell_2(I)$ 上的内积.

可和族 设 $\alpha \in \mathbb{K}$ 且 $(\alpha_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K}$. 若任取 $\varepsilon > 0$, 总存在有限集 $J_0 \subset I$, 使得对每一个有限集 $J \subset I$ 且 $J_0 \subset J$, 有 $\left| \alpha - \sum\limits_{i \in J} \alpha_i \right| < \varepsilon$, 则称 $(\alpha_i)_{i \in I}$ 为可和族, 并称 α 为 $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ 的和, 记作

$$\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

可和族有如下性质:

- $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ 可和的充分必要条件是 $\sum\limits_{i \in I} |\alpha_i|$ 可和.
- 设 $\alpha_i \geqslant 0$, 则 $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ 可和等价于 $\sup\limits_{J \subset I,\ J\,\text{有限}} \sum\limits_{i \in J} \alpha_i < \infty$. 并且在此情形下, 有

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sup_{J \subset I,\ J\,\text{有限}} \sum_{i \in J} \alpha_i < \infty.$$

- 若 $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i$ 可和, 则 $(\alpha_i)_{i \in I}$ 中至多有可数多个非 0 元.

[1]**Zorn 引理:** 设 $(\mathcal{F}, \preceq)$ 是一个偏序集, 若它的每个全序子集 $\mathcal{S}$ 都有上界, 则 $(\mathcal{F}, \preceq)$ 有极大元 m, 即若有 $b \in \mathcal{F}$ 且 $m \preceq b$, 必有 $b = m$.

于是在可和的意义下, 我们可以如下定义 $\ell_2(I)$ 中的内积,

$$\langle x,\ y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i,\ y_i\rangle,\ \ \forall x=(x_i)_{i\in I}, y=(y_i)_{i\in I}.$$

容易验证这确实是 $\ell_2(I)$ 上的内积, 其导出的范数就是 $\ell_2(I)$ 中如上定义的范数. 从而在该内积下, $\ell_2(I)$ 成为 Hilbert 空间. 我们选择一组特殊的元素 $e_j \in \ell_2(I)$, $j\in I$, 这里 e_j 满足在 j 处的取值为 1, 而在其他地方取值为 0. 由此得到的集合 $(e_j)_{j\in I}$ 正是 $\ell_2(I)$ 中的规范正交基. 并且当 I 不可数时, 该组基也不可数.

总结: 我们证明了任何 Hilbert 空间 H 均具有规范正交基. 当 H 可分时, 我们给出了两种证明. 前一种是构造性的; 后一种只是一个存在性证明, 相对简单些, 而且适用于不可分情形. 作为规范正交基存在定理的推论, 在同构意义下, 任一 Hilbert 空间均可表示为 $\ell_2(I)$, 其中 I 为一指标集. 当 H 是有限维时, $I=\{1,\cdots,n\}(n=\dim H)$; 当 H 是无穷维且可分时, $I=\mathbb{N}^*$; 当 H 不可分时, I 不可数.

习 题 四

1. 设 $u: H\to K$ 是两个内积空间之间的映射, 且有

$$\|u(x)-u(y)\| = \|x-y\|,\quad \forall x,y\in H \text{ (也就是说, } u \text{ 是一个等距映射)}.$$

证明 $u-u(0)$ 是线性的.

2. 设 A 是 ℓ_2 的子集, 其元素 $x=(x_n)_{n\geqslant 1}$ 满足 $|x_n|\leqslant \frac{1}{n}, n\geqslant 1$. 证明 A 是紧集.

3. 设 E 和 F 是内积空间 H 的两个向量子空间. 证明存在常数 $\alpha\geqslant 0$ 使得

$$|\langle x,\ y\rangle| = \alpha\|x\|\|y\|,\ \forall\, x\in E, \forall\, y\in F$$

的充分必要条件是或者 $\dim E=\dim F=1$, 或者 $\alpha=0$ (即 E 和 F 正交).

4. 设 E 和 F 是内积空间 H 的两个向量子空间. 假设 E 和 F 都不等于集合 $\{0\}$. 定义 E 和 F 之间的夹角 θ 为

$$\cos\theta = \sup\left\{\frac{|\langle x,\ y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}:\ x\in E,\ y\in F\right\},\ \ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

证明: $\theta>0$ 当且仅当存在一个常数 $c>0$, 使得

$$\|x+y\|^2 \geqslant c\,(\|x\|^2+\|y\|^2),\ \ \forall\, x\in E,\ y\in F.$$

5. 设 H 是 Hilbert 空间, (A_n) 是 H 中递减的闭凸非空子集列. 任取 $x \in H$, 令 $d_n(x) = d(x, A_n)$ 且 $d(x) = \lim_{n\to\infty} d_n(x)$.

(a) 证明: 若对某一个 $x \in H$, 有 $d(x) < \infty$, 则对所有的 $x \in H, d(x) < \infty$.

我们在下面假设该命题成立, 并用 $A(x, \varepsilon, n)$ 表示中心在 x、半径为 $d(x)+\varepsilon$ 的闭球与 A_n 的交集, 即 $A(x, \varepsilon, n) = A_n \cap \overline{B}(x, d(x) + \varepsilon)$.

(b) 证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\, n\to\infty} \operatorname{diam}(A(x, \varepsilon, n)) = 0.$$

(c) 证明所有 A_n 的交集 A 非空并且 $d(x) = d(x, A)$.

6. 设 H 是内积空间, $x_n, x \in H$. 并假设

$$\lim_n \|x_n\| = \|x\| \quad 且 \quad \lim_n \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle,\ \forall\, y \in H.$$

证明 $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

7. 设 (x_n) 是 Hilbert 空间 H 中的有界序列. 证明存在 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}), 使得对任意 $y \in H$, 有 $\lim_k \langle y,\, x_{n_k}\rangle = \langle y,\, x\rangle$.

8. 设 A 和 B 都是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集, 并设它们其中一个有界. 证明存在 $a \in A$ 和 $b \in B$, 使得 $d(a, b) = d(A, B)$, 这里

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \,:\, x \in A,\ y \in B\}.$$

9. 把上一习题中的条件换成 A 和 B 无界, 但假设 $\|x\|$ 和 $\|y\|$ 都趋向 ∞ 时, 必有 $d(x, y)$ 趋向 ∞. 证明结论仍然成立.

在 $\mathbb{R}^2$ 中用反例说明若条件不符合假设时, 结论不成立.

10. (a) 设 H 是 Hilbert 空间, $D_n = \{-1, 1\}^n$. 证明

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k)\in D_n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2, \quad \forall\, x_1, \cdots, x_n \in H.$$

(b) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 并假设有一个 X 上的内积范数 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$. 证明存在正常数 a 和 b, 使得

$$a \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k)\in D_n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\|^2 \leqslant b \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2, \quad \forall\, x_1, \cdots, x_n \in X.$$

(c) 设 $1 \leqslant p \neq 2 \leqslant \infty$, 证明空间 c_0, ℓ_p 和 $L_p(0,1)$ 没有等价的内积范数.

11. 设 (C_n) 是 Hilbert 空间 H 中的一个递增的非空闭凸子集列, C 是所有 C_n 的并集的闭包. 证明

$$P_C(x) = \lim_{n\to\infty} P_{C_n}(x), \quad \forall\, x \in H.$$

12. 设 H 是内积空间. $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 H 中的任一向量组, 称矩阵 $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 的行列式为向量组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Gram 行列式, 记作 $G(x_1, \cdots, x_n)$.

(a) 证明 $G(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0$; 且 $G(x_1, \cdots, x_n) > 0$ 当且仅当向量组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 线性独立.

(b) 假设向量组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 线性独立. 令 $E = \mathrm{span}(x_1, \cdots, x_n)$. 证明

$$d(x, E)^2 = \frac{G(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_n)}, \quad \forall\, x \in H.$$

13. 设 $E = C([0, 1])$ 上装备有如下的内积

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

并设 E_0 表示在 $[0, 1]$ 上积分为 0 的函数组成的 E 的向量子空间. 考虑 E 的向量子空间:

$$H = \{f \in E : f(1) = 0\} \text{ 且 } H_0 = E_0 \cap H.$$

(a) 验证 H_0 是 H 的闭的真向量子空间.

(b) 设 $h(t) = t - \frac{1}{2}, t \in [0, 1]$. 证明

(i) $E = \mathrm{span}(H, h)$ 且有 $E_0 = \mathrm{span}(H_0, h)$;

(ii) h 属于 H_0 在 E 中的闭包.

(c) 证明 $H_0^{\perp} = \{0\}$. 解释所得结果蕴含的意义.

14. 仍设 E 为上一习题中的内积空间, 并令 $0 < c < 1$. 记

$$F = \{f \in E : f\big|_{[0,\, c]} = 0\}.$$

(a) 验证 F 是 E 的闭的真向量子空间.

(b) 证明 $F \oplus F^{\perp} \neq E$. 解释所得结果蕴含的意义.

15. (a) 设 E 和 F 是 Hilbert 空间 H 的两个正交向量子空间. 证明 $E + F$ 是闭的当且仅当 E 和 F 都是闭的.

(b) (e_n) 表示 ℓ_2 中的标准正交基. 设 E 是 $\{e_{2n} : n \geqslant 1\}$ 的线性扩张的闭包, 而 F 是 $\{e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1} : n \geqslant 1\}$ 的线性扩张的闭包. 证明 $E \cap F = \{0\}$ 并且 $E + F$ 在 ℓ_2 中不是闭的.

16. 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的非零的闭向量子空间. 设 P 是 H 到 E 的投影 (投影意味着 P 是 H 上的线性算子且满足 $P^2 = P$). 证明以下命题等价:

(a) $P = P_E$.

(b) $\|P\| = 1$.

(c) $|\langle x, P(x)\rangle| \leqslant \|x\|^2$, $\forall\, x \in H$.

17. 设 H 是 Hilbert 空间, E 是 H 的向量子空间. 设 F 为赋范空间, $u: E \to F$ 是连续线性映射. 证明 u 有连续的线性延拓 $\widehat{u}: H \to F$, 且 $\|\widehat{u}\| = \|u\|$.

18. 设 $[0,1]$ 上赋予 Lebesgue 测度, $H = L_2(0,1)$. 并假设 $K \in L_2([0,1]\times[0,1])$. 我们定义

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \quad f \in H, x \in [0,1].$$

(a) 证明 $T_K(f)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有定义.

(b) 证明 $T_K \in \mathcal{B}(H)$ 且

$$\|T_K\| \leqslant \|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}.$$

(c) 设 $\widetilde{K}(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $x,y \in [0,1]$. 证明 $T_K^* = T_{\widetilde{K}}$.

(d) 定义

$$T(f)(x) = \int_0^x f(1-y)\mathrm{d}y, \quad f \in H, x \in [0,1].$$

证明 $T \in \mathcal{B}(H)$ 且有 $T^* = T$.

最后给出 T 的非零特征值并证明相应的特征子空间两两正交.

19. 和上一习题一样, 令 $H = L_2(0,1)$; 并设 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 中的规范正交集. 证明: $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是 H 上的规范正交基的充分必要条件是

$$\sum_{n\geqslant 1}\left|\int_0^x e_n(t)\mathrm{d}t\right|^2 = x, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

20. 设 Ω 是复数域 $\mathbb{C}$ 中的开集, 约定 $\mathbb{C}$ 上的测度为 $\mathbb{R}^2$ 上的 Lebesgue 测度, 记为 $\mathrm{d}\lambda(z)$. 令

$$H_\Omega = \{f \in L_2(\Omega) : f \text{ 是 } \Omega \text{ 上的全纯函数}\}.$$

对任一点 $z \in \Omega$, δ_z 表示 z 处在 H_Ω 上的演化, 即有 $\delta_z(f) = f(z)$, $f \in H_\Omega$.

(a) 若 $\overline{B}(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| \leqslant r\} \subset \Omega$, 证明

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{B}(z,r)} f(w)\mathrm{d}\lambda(w), \quad \forall\, f \in H_\Omega.$$

(b) 证明

$$f \in H_\Omega,\ z \in \Omega,\ d(z,\Omega^c) > r \implies |f(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\|f\|_2.$$

(c) 证明: 当在 $L_2(\Omega)$ 上赋予内积运算时, H_Ω 是一个可分的 Hilbert 空间.

(d) 证明: 对任意 $z \in \Omega$, δ_z 是 H_Ω 上的连续线性泛函. 由此导出存在 $K_z \in H_\Omega$, 使得

$$f(z) = \int_\Omega f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{d}\lambda(w), \quad \forall f \in H_\Omega.$$

(e) 令 $K_\Omega(w, z) = K_z(w)$, $\forall w, z \in \Omega$.

(i) 证明 $K_\Omega(w, z) = \overline{K_\Omega(z, w)}$.

(ii) 给定一组 H_Ω 中的正交基 $(e_n)_{n\geqslant 1}$. 证明

$$K_z = \sum_{n\geqslant 1} \overline{e_n(z)} e_n$$

在 H_Ω 中收敛.

(f) 下面考虑 Ω 是单位圆盘 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 时的具体情形.

(i) 定义 $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$, $n \geqslant 0$. 证明 $(e_n)_{n\geqslant 0}$ 是 H_D 中的规范正交基.

(ii) 确定 K_D 具体的表达式.

21. 设 H 是一个 Hilbert 空间, 并设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 且 $\|T\| \leqslant 1$. 证明:

(a) $T(x) = x$ 当且仅当 $T^*(x) = x$, $x \in H$.

(b) $\ker(\mathrm{I} - T) = \ker(\mathrm{I} - T^*)$.

(c) $H = \ker(\mathrm{I} - T) \oplus \overline{(\mathrm{I} - T)(H)}$.

22. 设 H 是 Hilbert 空间. 称映射 $A \in \mathcal{B}(H)$ 为 压缩算子, 若 $\|A\| \leqslant 1$; 称 A 是正的, 若对任一 $x \in H$, 有 $\langle A(x), x\rangle \geqslant 0$.

(a) 证明 H 上任意压缩正算子 A 满足

$$\|x - A(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \|A(x)\|^2, \quad \forall x \in H.$$

(b) 设 $T = A_1 \cdots A_r$ 是 H 上 r 个压缩正算子的乘积. 记 $N = \ker(\mathrm{I} - T)$, 并且 P 是 N 上的正交投影. 我们的目的是证明: 在强算子拓扑下, $T^n \to P$, 即有

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \|T^n(x) - P(x)\| = 0, \quad \forall x \in H.$$

(i) 证明

$$\|x - T(x)\|^2 \leqslant r[\|x\|^2 - \|T(x)\|^2], \quad \forall x \in H.$$

由此导出: 对任意有界序列 $(x_n) \subset H$, 有

$$\lim_{n\to\infty} [\|x_n\| - \|T(x_n)\|] = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0.$$

(ii) 证明 $(*)$ 式: 先对 $x \in N$ 证明, 再对 $x \in \overline{(\mathrm{I}-T)(H)}$ 证明.

(iii) 证明

$$N = \bigcap_{j=1}^{r} \ker(\mathrm{I} - A_j).$$

(c) 设 $P_1, \cdots, P_r$ 分别是 H 的 r 个闭向量子空间 $E_1, \cdots, E_r$ 上的投影算子, 并令 $T = P_1 \cdots P_r$. 证明 $(T^n)_{n \geqslant 1}$ 在强算子拓扑下收敛到一个投影算子.

第五章 连续函数空间

本章主要给出两个重要定理, 即 Ascoli 定理和 Stone-Weierstrass 定理, 它们共同的特点都是研究定义在紧 Hausdorff 空间上的连续函数空间的性质. Ascoli 定理有很多不同的版本, 比较具体的形式是考虑紧度量空间上定义的连续函数空间 (如习题五, 7), 而我们这里陈述的是更一般的形式, 即定义在紧 Hausdorff 空间上, 取值于任意度量空间上的函数构成的空间. Ascoli 定理研究的则是刻画这种函数空间的子集 (即函数族) 的相对紧性. 经典的 Weierstrass 逼近定理表述为区间 $[a,b]$ 上的实连续函数可以被多项式函数一致逼近, Stone-Weierstrass 定理则是把经典的 Weierstrass 逼近定理推广到更一般的代数结构上.

本章相应地分为两节, §5.1 考虑等度连续和 Ascoli 定理, 作为应用, 特别地将证明复分析中著名的 Montel 定理. §5.2 讨论 Stone-Weierstrass 定理, 把该定理应用到 Fourier 分析, 立即得到周期连续函数可被三角多项式逼近.

§5.1 等度连续和 Ascoli 定理

设 K 和 E 是拓扑空间, $C(K, E)$ 表示从 K 到 E 的所有连续映射构成的集合. 在本章大部分时候, 我们令 K 是紧的 Hausdorff 空间, 而 (E,d) 是度量空间. 有的时候我们也要求 (K,δ) 为度量空间.

定义 5.1.1 设 K 是拓扑空间, (E, d) 是度量空间, 并且 $\mathcal{H}\subset C(K, E)$.

(1) 设 $x_0\in K$. 若任取 $\varepsilon>0$, 存在 $V\in\mathcal{N}(x_0)$, 使得当 $x\in V$ 时, 总有

$$d(f(x), f(x_0))<\varepsilon,\ \forall f\in\mathcal{H},$$

则称 $\mathcal{H}$ *在点* x_0 *处等度连续*.

(2) 若 $\mathcal{H}$ 在 K 中每点等度连续, 则称 $\mathcal{H}$ *在* K *上等度连续*.

(3) 假设 (K, δ) 是度量空间. 若任取 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 当 $\delta(x,y)<\eta$ 时, 总有

$$d(f(x), f(y))<\varepsilon,\ \forall f\in\mathcal{H},$$

则称 $\mathcal{H}$ *在* K *上一致等度连续*.

注 5.1.2 下面的性质都容易被验证.

(1) 若 $\mathcal{H}=\{f\}$, $\mathcal{H}$ 的等度连续性和一致等度连续性也就是 f 的连续性和一致连续性.

(2) $C(K, E)$ 的每一个有限子集 $\mathcal{H}$ 等度连续; 更一般地, 若 $\mathcal{H}\subset C(K, E)$ 等度连续, 则再增加 $C(K, E)$ 中的有限个元素得到的子集仍然等度连续.

(3) 一致等度连续蕴含等度连续.

(4) 给定常数 $C>0$, 所有从 K 到 E 的常数为 C 的 Lipschitz 函数构成的子集一致等度连续. 更一般地, 令 $\alpha>0$, 所有从 K 到 E 的常数为 C 且阶数为 α 的 Hölder 函数构成的子集一致等度连续.

(5) 设函数列 $(f_n)_{n\geqslant 1}\subset C(K, E)$. 若 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 一致收敛到 $f\in C(K, E)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K} d(f_n(x), f(x))=0,$$

则 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 等度连续.

类似于紧度量空间上连续和一致连续的等价性, 我们有下面关于函数族的一致等度连续和等度连续的等价性定理.

定理 5.1.3 设 (K,δ) 是紧度量空间, (E,d) 是度量空间, $\mathcal{H}\subset C(K, E)$. 那么 $\mathcal{H}$ 在 K 上一致等度连续的充分必要条件是 $\mathcal{H}$ 在 K 上等度连续.

证明 仅需证明充分性. 任取 $\varepsilon>0$, 因 $\mathcal{H}$ 在 K 上等度连续, 则对每一个 $x\in K$, 存在 $\eta(x)>0$, 使得当 $\delta(x,y)<\eta(x)$ 时 (即 $y\in B(x,\eta(x))$ 时), 对所有的 $f\in\mathcal{H}$, 有

$$d(f(x), f(y))<\varepsilon.$$

因为 (K,δ) 是紧的, 故存在有限个元素 $x_1,\cdots,x_n\in K$, 使得

$$K=\bigcup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{\eta(x_k)}{2}\right).$$

取

$$\eta=\min\left\{\frac{\eta(x_1)}{2},\cdots,\frac{\eta(x_n)}{2}\right\}.$$

设 $\delta(x,y)<\eta$. 选取 k 使得 $x\in B(x_k,\frac{\eta(x_k)}{2})$. 另外,

$$\delta(y,x_k)\leqslant\delta(y,x)+\delta(x,x_k)<\eta+\frac{\eta(x_k)}{2}\leqslant\eta(x_k),$$

即 $y\in B(x_k,\eta(x_k))$. 因此, 由 $\eta(x_k)$ 的选取, 有

$$d(f(x),\ f(y))\leqslant d(f(x),\ f(x_k))+d(f(x_k),\ f(y))<2\varepsilon.$$

所以 $\mathcal{H}$ 在 K 上一致等度连续. ■

我们在注 5.1.2 中看到, 一致收敛的序列必等度连续. 下一定理说明若一个序列是等度连续且逐点收敛, 则其必一致收敛.

定理 5.1.4 设 K 是一个紧的 Hausdorff 空间, (E,d) 是度量空间, (f_n) 是 $C(K,E)$ 中等度连续的序列. 那么若 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 逐点收敛到 f, 则 $f\in C(K,E)$ 且 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 一致收敛到 f.

证明 设 $x\in K$. 因 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 等度连续, 故任取 $\varepsilon>0$, 存在 $V_x\in\mathcal{N}(x)$, 使得当 $y\in V_x$ 时, 对每个 f_n 都有

$$d(f_n(y),f_n(x))<\varepsilon.$$

因此,

$$\begin{aligned}d(f(y),f(x))&\leqslant d(f(y),f_n(y))+d(f_n(x),f(x))+d(f_n(y),f_n(x))\\&\leqslant d(f(y),f_n(y))+d(f_n(x),f(x))+\varepsilon.\end{aligned}$$

因 (f_n) 逐点收敛到 f, 故令 $n\to\infty$, 可得

$$d(f(y),f(x))\leqslant\varepsilon.$$

由此推出 f 在 x 处连续; 由于 x 是 K 任意元素, 可得 $f\in C(K,E)$.

因 K 是紧的 Hausdorff 空间, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在有限个元素 $x_1,\cdots,x_n\in E$ 及相应的邻域 $V_{x_1},\cdots,V_{x_n}$, 使得

$$K=\bigcup_{k=1}^{n}V_{x_k}.$$

则任取 $x\in K$, 必有某个 x_k 使得 $x\in V_{x_k}$. 那么当 n 足够大时, 必有

$$d(f_n(x),f(x))\leqslant d(f_n(x),f_n(x_k))+d(f_n(x_k),f(x_k))+d(f(x_k),f(x))\leqslant 3\varepsilon,$$

故 (f_n) 一致收敛到 f. ■

设 K 是紧的 Hausdorff 空间, (E,d) 是度量空间. 我们可以定义 $C(K,E)$ 上的距离 Δ:

$$\Delta(f,g)=\sup_{x\in K}d(f(x),\ g(x)),\quad f,g\in C(K,\ E).$$

依此距离诱导的拓扑下的收敛即为一致收敛. 注意, 如果 E 是完备的, 那么 $C(K,E)$ 也是完备的. 另一方面, 如果 E 上的距离由范数 $\|\cdot\|$ 诱导, 那么 Δ 由如下的范数诱导:

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in K}\|f(x)\|.$$

从而, $C(K,E)$ 是一个赋范空间 (如果 E 是 Banach 空间, 则 $C(K,E)$ 也是 Banach 空间).

注 5.1.5 回到定理 5.1.4 并使用上面的概念, 则该定理意味着满足定理条件的序列 (f_n) 依 $(C(K,E),\Delta)$ 收敛到 f.

定理 5.1.6 (Ascoli) 设 K 是一个紧 Hausdorff 空间, (E,d) 是度量空间, $\mathcal{H}\subset C(K,E)$. 那么 $\mathcal{H}$ 在 $C(K,E)$ 中相对紧当且仅当下面条件满足:

(1) $\mathcal{H}$ 等度连续.

(2) 对任意 $x\in K$, $\mathcal{H}$ 的 "轨道" $\mathcal{H}(x)=\{f(x):\ f\in\mathcal{H}\}$ 在 E 中相对紧.

证明 必要性. 任取 $\varepsilon>0$. 因 $\overline{\mathcal{H}}$ 是紧的, 故存在有限个 $f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{H}$, 使得任取 $f\in\mathcal{H}$, 总存在某个 $1\leqslant k\leqslant n$, 使得 $\Delta(f,f_k)<\varepsilon$. 由于 $f_1,\cdots,f_n$ 是连续的, 故对任一点 $x\in K$, 存在 $V\in\mathcal{N}(x)$, 使得当 $y\in V$ 时, 有

$$d(f_k(x),f_k(y))<\varepsilon,\ \forall 1\leqslant k\leqslant n.$$

那么综合上面的结论, 可得

$$d(f(x),f(y))\leqslant d(f(x),f_k(x))+d(f_k(x),f_k(y))+d(f_k(y),f(y))<3\varepsilon.$$

所以 $\mathcal{H}$ 等度连续.

对任一给定的 $x\in K$, 考虑映射 $\Phi: C(K,\ E)\to E,\ f\mapsto f(x)$, 显然 Φ 连续. 由此可知 $\Phi(\overline{\mathcal{H}})$ 是紧的 (见定理 1.3.11), 这给出 $\mathcal{H}(x)$ 在 E 中的相对紧性.

充分性. 首先证明 $\overline{\mathcal{H}}$ 在 $C(K,E)$ 中完备. 任取 $\overline{\mathcal{H}}$ 中的 Cauchy 序列 $(f_n)_{n\geqslant1}$, 则对任一个 $x\in K$, $(f_n(x))_{n\geqslant1}$ 也是 E 中的 Cauchy 序列. 因 $\mathcal{H}(x)$ 是相对紧的, 故 $(f_n(x))_{n\geqslant1}$ 有收敛子列. 那么由于 $(f_n(x))_{n\geqslant1}$ 是 Cauchy 序列, 则 $(f_n(x))_{n\geqslant1}$ 也收敛. 根据定理 5.1.4, 知 $(f_n)_{n\geqslant1}$ 一致收敛, 故 $\overline{\mathcal{H}}$ 是完备的.

接下来, 我们只需证明 $\mathcal{H}$ 是预紧的 (见推论 2.5.7). 由于 $\mathcal{H}$ 等度连续, 则对任意 $x\in K$ 及任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $O_x\in\mathcal{N}(x)$, 使得当 $y\in O_x$ 时, 有 $d(f(y),f(x))<\varepsilon,\forall f\in\mathcal{H}$. 因为 K 是紧的, 故存在有限个开集 $O_{x_1},\cdots,O_{x_n}$, 使得 $K=\bigcup\limits_{i=1}^{n}O_{x_i}$.

因 $\mathcal{H}(x)$ 是度量空间 E 中的相对紧集, 故是预紧的, 也就是说存在有限的 ε–网覆盖 $\mathcal{H}(x)$. 那么存在有限集 $Z\subset E$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{H}(x_i)\subset\bigcup_{z\in Z}B(z,\varepsilon).$$

接下来, 我们考虑有限集合 Z^n. 对任意 $\underline{z}=(z_1,\cdots,z_n)\in Z^n$. 令

$$B_{\underline{z}}=\left\{f\in C(K,E):\ \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sup_{x\in O_{x_i}}\ d(f(x),z_i)<2\varepsilon\right\}.$$

则我们如此得到 $C(K,E)$ 中的有限多个子集 $(B_{\underline{z}})_{\underline{z}\in Z^n}$. 对任意 $f,g\in B_{\underline{z}}$, 有

$$\Delta(f,g)\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sup_{x\in O_{x_i}}\ (d(f(x),z_i)+d(g(x),z_i))<4\varepsilon.$$

故 $\mathrm{diam}B_{\underline{z}}<4\varepsilon$. 因此, 为证 $\mathcal{H}$ 是预紧的, 只需证所有 $B_{\underline{z}}$ 的并集包含 $\mathcal{H}$.

任取 $f\in\mathcal{H}$. 我们知道, 对任意 $1\leqslant i\leqslant n$, $f(x_i)$ 属于某个 $B(z_i,\varepsilon)$, $z_i\in Z$. 因此当 $x\in O_{x_i}$ 时, 有

$$d(f(x),z_i)\leqslant d(f(x),f(x_i))+d(f(x_i),z_i)<2\varepsilon.$$

令 $\underline{z}=(z_1,\cdots,z_n)$, 则有

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sup_{x\in O_{x_i}}\ d(f(x),z_i)<2\varepsilon,$$

即 $f\in B_{\underline{z}}$. 因此我们证明了 $\mathcal{H}\subset\bigcup\limits_{\underline{z}\in Z^n}B_{\underline{z}}$. 这就是所要证明的, 故定理得证. ■

当 $E=\mathbb{K}^n$ 时, 注意到有限维空间上的相对紧性和有界性是等价的, 则立即可得以下结论.

推论 5.1.7 设 K 是局部紧的 Hausdorff 空间, $\mathcal{H}\subset C(K,\ \mathbb{K}^n)$. 那么 $\mathcal{H}$ 在 $C(K,\ \mathbb{K}^n)$ 中相对紧当且仅当 $\mathcal{H}$ 等度连续并且对任一给定的 $x\in K$, 轨道 $\mathcal{H}(x)$ 有界.

推论 5.1.8 设 Ω 是 $\mathbb{K}^n$ 中的开子集, $(f_k)_{k\geqslant1}\subset C(\Omega,\ \mathbb{K}^n)$. 如果

(1) $(f_k)_{k\geqslant1}$ 在 Ω 的任一紧子集 K 上等度连续;

(2) 对任意 $x\in\Omega$, $\{f_k(x):\ k\geqslant1\}$ 有界,

那么 $(f_k)_{k\geqslant1}$ 有一子列, 它在 Ω 的任意紧子集 K 上一致收敛.

证明 设 $p\in\mathbb{N}^*$, 令

$$K_p=\left\{x\in\Omega:\ d(x,\ \mathbb{K}^n\setminus\Omega)\geqslant\frac{1}{p}\right\}\cap\overline{B}(0,p).$$

易知 K_p 是紧的且所有的 K_p 的并集等于 Ω.

运用 Ascoli 定理, 可得 $(f_k)_{k\geqslant1}$ 在 K_1 上有一致收敛的子列 $(f_{\phi_1(k)})$; 再次运用 Ascoli 定理, 可得 $(f_{\phi_1(k)})$ 在 K_2 上有一致收敛的子列 $(f_{\phi_2(k)})$; 依次继续此过程, 并利用对角线选择法, 我们可得到一个在每一个 K_p 上都一致收敛的子列. 而 Ω 的每一个紧子集必包含于某一个 K_p 中, 故结论成立. ■

Ascoli 定理在解析函数理论中的应用

定理 5.1.9 (Montel) 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的开子集, (f_n) 是一族在 Ω 上定义的全纯函数. 若对 Ω 的每个紧子集 K, (f_n) 在 K 上一致有界, 则 (f_n) 有一个子列在 Ω 的任一紧子集上收敛于一在 Ω 上的全纯函数 f.

证明 设有 $z_0 \in \Omega, r > 0$, 使得

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\} \subset \Omega.$$

由 Cauchy 公式, 有

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_n(u)}{u - z} \mathrm{d}u, \quad z \in D(z_0, r).$$

对 z 求导数, 得

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_n(u)}{(u - z)^2} \mathrm{d}u.$$

因此,

$$|f_n'(z)| \leqslant \sup_{z \in \overline{D}(z_0,r)} |f_n(z)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{|u - z|^2} \mathrm{d}u,$$

于是

$$\sup_n \sup_{z \in \overline{D}(z_0, \frac{r}{2})} |f_n'(z)| \leqslant \frac{4}{r} \sup_n \sup_{z \in \overline{D}(z_0,r)} |f_n(z)| = C_r < \infty.$$

因此, 我们推出 $(f_n|_{\overline{D}(z_0, \frac{r}{2})})_{n \geqslant 1}$ 是常数为 C_r 的 Lipschitz 函数列, 故等度连续.

那么对每个紧子集 $K \subset \Omega$, K 可被有限多个 $D(z_0, \frac{r}{2})$ 覆盖, 因此 $(f_n|_K)$ 等度连续. 由上一推论可知, (f_n) 有一子列 $(f_{n_k})_{k \geqslant 1}$, 它在 Ω 的任一紧子集 K 上一致收敛. 最后, 由解析函数理论可知, 在任意紧集上一致收敛的全纯函数列的极限函数必全纯. 所以定理得证. ■

§5.2 Stone-Weierstrass 定理

在本节中, K 总是表示一个紧的 Hausdorff 空间, 而 $C(K, \mathbb{K})$ 表示所有从 K 到数域 $\mathbb{K}$ 的连续函数构成的 Banach 空间, 其上的范数定义为 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, 注意 $C(K, \mathbb{K})$ 还是一个代数.

定义 5.2.1 设 $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{K})$.

(1) 若 $\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{K})$ 的向量子空间并且关于乘法运算封闭, 则称 $\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{K})$ 的子代数.

(2) 若对任意两个不同的元素 $x, y \in K$, 有函数 $f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x) \neq f(y)$, 则称 $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的.

(3) 设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. 若任取 $f, g \in \mathcal{A}$, $\max\{f, g\} \in \mathcal{A}$ 且 $\min\{f, g\} \in \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是格.

定理 5.2.2 (Stone-Weierstrass, 实的情形) 设 K 是一个紧 Hausdorff 空间, 而 $\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{R})$ 的子代数, 如果

(1) $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的;

(2) 对任意 $x \in K$, 存在 $f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x) \neq 0$,

那么 $\mathcal{A}$ 在 $C(K, \mathbb{R})$ 中稠密.

注 5.2.3 在多数应用中, 以上条件 (2) 等价于条件: $\mathcal{A}$ 包含恒等于 1 的函数.

为证明此定理, 我们先给出两个引理.

引理 5.2.4 设 $\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{R})$ 的闭子代数, 则 $\mathcal{A}$ 是格.

证明 设 $f \in \mathcal{A}$. 由于 $C(K, \mathbb{R})$ 中的函数一定有界, 故不妨令 $\|f\|_\infty \leqslant 1$. 为证 $\mathcal{A}$ 是格, 我们只需证明 $|f| \in \mathcal{A}$. 实际上, 这是因为任取 $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$, 我们有

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|) \text{ 及 } \min\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|),$$

则由 $\mathcal{A}$ 是一个向量空间以及 $|f| \in \mathcal{A}$ 可知 $\max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\} \in \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{A}$ 是一个格.

令 $t \in \mathbb{R}$ 且 $|t| \leqslant 1$. 任取 $\varepsilon > 0$, 令 $u = \frac{1-t^2}{1+\varepsilon^2}$, 则

$$1 - u = \frac{\varepsilon^2 + t^2}{1 + \varepsilon^2} \text{ 且 } 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon^2} = \delta < 1.$$

通过 Taylor 级数, 我们有

$$\sqrt{1-u} = \sum_{n \geqslant 0} a_n u^n.$$

而且上述级数对 $u \in [0, \delta]$ 一致收敛. 因此, 存在一个部分和 P, 使得

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant \delta} |\sqrt{1-u} - P(u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

P 是 u 的一个多项式. 回到变量 t, 我们得到

$$\sup_{|t| \leqslant 1} \left| \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + t^2}{1+\varepsilon^2}} - P\left(\frac{1-t^2}{1+\varepsilon^2}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

故

$$\sup_{|t|\leqslant 1}\left|\sqrt{\varepsilon^2+t^2}-\sqrt{1+\varepsilon^2}P\left(\frac{1-t^2}{1+\varepsilon^2}\right)\right|\leqslant\varepsilon.$$

设 $Q(t)=\sqrt{1+\varepsilon^2}P(\frac{1-t^2}{1+\varepsilon^2})$, 则 Q 仍是一个多项式. 上述不等式成为

$$\sup_{|t|\leqslant 1}|\sqrt{\varepsilon^2+t^2}-Q(t)|\leqslant\varepsilon.$$

特别地, $|Q(0)|\leqslant 2\varepsilon$. 再设 $R(t)=Q(t)-Q(0)$, 则 R 是没有常数项的多项式. 又因 $0\leqslant\sqrt{\varepsilon^2+t^2}-\sqrt{t^2}\leqslant\varepsilon$, 故可得

$$\sup_{|t|\leqslant 1}\big||t|-R(t)\big|\leqslant 4\varepsilon.$$

因此, 令 $t=f(x), x\in K$, 我们推出

$$\sup_{x\in K}\big||f(x)|-R(f(x))\big|\leqslant 4\varepsilon.$$

这意味着 $\||f|-R(f)\|_\infty\leqslant 4\varepsilon$. 因 $\mathcal{A}$ 是子代数且多项式 R 没有常数项, 知 $R(f)\in\mathcal{A}$, 因此, $|f|$ 可由 $\mathcal{A}$ 中的元一致逼近, 即 $|f|\in\overline{\mathcal{A}}$. 但 $\mathcal{A}$ 是闭的, 我们最后得到 $|f|\in\mathcal{A}$. ■

引理 5.2.5 设 $C(K,\mathbb{R})$ 的子代数 $\mathcal{A}$ 满足 Stone-Weierstrass 定理 5.2.2 中的条件. 则

(1) 任取 $x\in K$ 以及 $\alpha\in\mathbb{R}$, 存在 $h\in\mathcal{A}$, 使得 $h(x)=\alpha$.

(2) 任取 $x\neq y\in K$, 以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 存在 $h\in\mathcal{A}$ 使得 $h(x)=\alpha$ 且 $h(y)=\beta$.

证明 (1) 任取 $x\in K$. 由 Stone-Weierstrass 定理的条件 (2), 可知存在 $g\in\mathcal{A}$, 使得 $g(x)\neq 0$, 记 $b=g(x)$. 取 $h=\frac{\alpha g}{b}$, 则有 $h\in\mathcal{A}$ 且 $h(x)=\alpha$.

(2) 任取 $x\neq y\in K$. 由于 $\mathcal{A}$ 是可分点的, 故必有 $f\in\mathcal{A}$, 使得 $f(x)\neq f(y)$. 我们宣称还可选取 f 使得 $f(x)\neq 0$ 且 $f(y)\neq 0$. 事实上, 如果后一结论不成立, 可以假设 $f(x)=0$, 那么 $f(y)\neq 0$; 然后再选择一个函数 g, 使得 $g(x)\neq 0$. 取 $\varepsilon>0$, 设 $\tilde{f}=\varepsilon g+f$, 则

- 由线性性, 可得 $\tilde{f}\in\mathcal{A}$.
- 对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\tilde{f}(x)=\varepsilon g(x)\neq 0$.
- 因 $f(y)\neq 0$, 当 ε 足够小时, 有 $\tilde{f}(y)=\varepsilon g(y)+f(y)\neq 0$.
- 当 ε 足够小时, 有 $\tilde{f}(x)\neq\tilde{f}(y)$.

因此, $\tilde{f}$ 是所要求的函数. 综合以上讨论即知, 存在一个函数 $f\in\mathcal{A}$, 满足 $f(x)\neq 0$, $f(y)\neq 0$ 且 $f(x)\neq f(y)$.

接下来对 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们构造一个新的函数

$$h = \lambda f + \mu f^2.$$

显然 $h \in \mathcal{A}$. 我们要求 λ, μ 的选取使得 $h(x) = \alpha$ 及 $h(y) = \beta$, 这等价于求下面关于 λ 和 μ 的线性方程组

$$\begin{cases} \lambda f(x) + \mu f(x)^2 = \alpha, \\ \lambda f(y) + \mu f(y)^2 = \beta. \end{cases}$$

由于 $f(x) \neq f(y)$, $f(x) \neq 0$ 且 $f(y) \neq 0$, 以上线性方程组的系数行列式不为零, 所以方程组有唯一解, 故引理得证. ■

定理 5.2.2 的证明 如有必要, 用 $\overline{\mathcal{A}}$ 代替 $\mathcal{A}$, 可假设 $\mathcal{A}$ 是闭的. 然后我们需要证明 $\mathcal{A} = C(K, \mathbb{R})$. 设 $f \in C(K, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$.

对任意 $x, y \in K$, 由引理 5.2.5, 存在函数 $h_{x,y} \in \mathcal{A}$, 使得 $h_{x,y}(x) = f(x), h_{x,y}(y) = f(y)$. 令

$$U_{x,y} = \{z \in K : h_{x,y}(z) + \varepsilon > f(z)\}.$$

显然 $U_{x,y}$ 是开集, 并且 $x, y \in U_{x,y}$. 固定 x, 那么集族 $\{U_{x,y}\}_{y \in K}$ 就是 K 的一个开覆盖. 由于 K 是紧的, 可知存在有限个 $y_1, \cdots, y_{n(x)} \in K$, 使得

$$K = U_{x,y_1} \cup \cdots \cup U_{x,y_{n(x)}}.$$

注意这里的 $n(x)$ 指 n 依赖于 x. 相应地, 对应着有限个函数 $h_{x,y_1}, \cdots, h_{x,y_{n(x)}}$. 令 $h_x = \max\{h_{x,y_1}, \cdots, h_{x,y_{n(x)}}\}$. 由引理 5.2.4 可知 $h_x \in \mathcal{A}$. 另外, 由 h_{x,y_i} 的选取还可知在 K 上, $f < h_x + \varepsilon$ 及 $f(x) = h_x(x)$.

其次, 令

$$V_x = \{z \in K : f(z) > h_x(z) - \varepsilon\}.$$

该集合为开集并有 $x \in V_x$. 同样由 K 的紧性, 可知存在有限个 $x_1, \cdots, x_m \in K$, 使得 $K = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$. 令 $h = \min\{h_{x_1}, \cdots, h_{x_m}\}$. 仍由引理 5.2.4 可知 $h \in \mathcal{A}$. 并且在 K 上, $f > h - \varepsilon$ 且 $f < h + \varepsilon$, 即 $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. 由 ε 的任意性, 这意味着 $f \in \overline{\mathcal{A}}$. 因我们已经假设 $\mathcal{A}$ 是闭的, 故得 $f \in \mathcal{A}$. 因 f 是任意的, 因此 $\mathcal{A} = C(K, \mathbb{R})$. ■

推论 5.2.6 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集, 则限制在 K 上关于变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的实系数多项式全体在 $C(K, \mathbb{R})$ 中稠密.

特别地, 若 $a < b$, 任一函数 $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ 可由 $[a, b]$ 上的多项式一致逼近.

证明 设 $\mathcal{A}$ 为限制在 K 上关于变量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的实系数多项式全体. 容易看出 $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{R})$ 的子代数且包含恒等于 1 的函数. 现只需证明 $\mathcal{A}$ 可分点. 设 $y=(y_1,\cdots,y_n), z=(z_1,\cdots,z_n)\in K$ 且 $y\neq z$. 则必存在某个 $1\leqslant i\leqslant n$, 使得 $y_i\neq z_i$. 那么令

$$f(x)=x_i,\quad \forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in K.$$

则 $f\in\mathcal{A}$ 且 $f(y)\neq f(z)$. 因此, 由 Stone-Weierstrass 定理, 推论得证. ■

注 5.2.7 以上结论说明了 $\mathbb{R}^n$ 中紧子集上的多项式逼近的存在性, 我们还可以构造具体的逼近过程. 例如, 设 $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, 我们定义

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k},\ \ \forall x\in[0,1].$$

$B_n(f)$ 即为 n 次的 Bernstein 多项式. 可以证明当 $n\to\infty$, $B_n(f)$ 一致收敛到 f.

下面是复情形的 Stone-Weierstrass 定理, 它可从实的情形得到.

定理 5.2.8 (Stone-Weierstrass, 复的情形) 设 K 是一个紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{C})$ 的子代数, 如果

(1) $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的;

(2) 对任意 $x\in K$, 存在 $f\in\mathcal{A}$, 使得 $f(x)\neq 0$;

(3) $f\in\mathcal{A}\Rightarrow\overline{f}\in\mathcal{A}$ (即 $\mathcal{A}$ 是自伴的),

那么 $\mathcal{A}$ 在 $C(K,\mathbb{C})$ 中稠密.

证明 令 $\mathrm{Re}\mathcal{A}=\{\mathrm{Re}f:f\in\mathcal{A}\}$. 对任意 $f\in\mathcal{A}$, 由于 $\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{C})$ 的子代数并且是自伴的, 故有 $\mathrm{Re}f=\frac{1}{2}(f+\overline{f})\in\mathcal{A}$ 且 $\mathrm{Im}f=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}f)\in\mathrm{Re}\mathcal{A}$. 于是可得 $\mathrm{Re}\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}=\mathrm{Re}\mathcal{A}+\mathrm{i}\mathrm{Re}\mathcal{A}=\{f+\mathrm{i}g:f,g\in\mathrm{Re}\mathcal{A}\}$.

因 $\mathrm{Re}\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$, 故容易看到 $\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 是 $C(K,\mathbb{R})$ 的子代数. 并且 $\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 还满足 Stone-Weierstrass 定理实情形的其他条件:

- $\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的. 任取两个不同的元素 $x,y\in K$, 因 $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的, 故存在 $f\in\mathcal{A}$, 满足 $f(x)\neq f(y)$. 从而 $\mathrm{Re}f(x)\neq\mathrm{Re}f(y)$ 或 $\mathrm{Im}f(x)\neq\mathrm{Im}f(y)$. 注意 $\mathrm{Im}f\in\mathrm{Re}\mathcal{A}$, 故结论成立.
- 对任意 $x\in K$, 存在 $\varphi\in\mathrm{Re}\mathcal{A}$, 使得 $\varphi(x)\neq 0$. 这个结论由本定理中的条件 (2) 立即可得.

所以 $\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 在 $C(K,\mathbb{R})$ 中稠密. 那么 $\mathcal{A}=\mathrm{Re}\mathcal{A}+\mathrm{i}\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 就是 $C(K,\mathbb{C})$ 的稠密子集. ■

应用 Stone-Weierstrass 定理复的情形, 我们可以给出下面具体的多项式逼近定理.

推论 5.2.9 (1) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集, 则限制在 K 上关于变量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的复系数多项式全体在 $C(K,\mathbb{C})$ 中稠密.

(2) 设 K 是 $\mathbb{C}^n$ 中的紧子集, 则限制在 K 上关于变量 $(z_1,\cdots,z_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$ 的复系数多项式全体在 $C(K,\mathbb{C})$ 中稠密.

证明 (1) 设 $\mathcal{A}$ 为限制在 K 上关于变量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的复系数多项式全体. 因复系数多项式全体包含实系数多项式全体, 故由推论 5.2.6 立即可知, $\mathcal{A}$ 是可分点的; 且对任意 $x\in K$, 存在 $f\in\mathcal{A}$ 使 $f(x)\neq 0$. 而且, $\mathcal{A}$ 显然是自伴的. 故命题结论成立.

(2) 设 $\mathcal{A}$ 为限制在 K 上关于变量 $(z_1,\cdots,z_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$ 的复系数多项式全体. 我们只需证明 $\mathcal{A}$ 是自伴的. 事实上, 任取 $f\in\mathcal{A}$, $\overline{f}$ 也是关于变量 $(z_1,\cdots,z_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$ 的多项式. 因此, 命题结论也成立. ■

注 5.2.10 在以上推论的第二部分, 仅关于变量 $(z_1,\cdots,z_n)$ 的多项式全体不在 $C(K,\mathbb{C})$ 中稠密. 比如, 若 $n=1$ 且 K 是闭单位圆 $\overline{D}(0,1)$, 则关于 z 的多项式全体在 $C(\overline{D}(0,1),\mathbb{C})$ 中的闭包等于由在 $\overline{D}(0,1)$ 上连续且在 $D(0,1)$ 中解析的函数所组成的集合.

Stone-Weierstrass 定理在 Fourier 分析中的应用

在一维空间 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier 级数理论中, 我们考虑以 2π 为周期的函数 f, 此种函数可以被看成只限制在 $[0,2\pi]$ 上 (或 $[0,2\pi)$ 上), 并设 $[0,2\pi)$ 上的测度为规范化后的 Lebesgue 测度: $\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. 我们在此先明确几个函数空间的定义.

(1) 记 $L^p_{2\pi}=L^p([0,2\pi),\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}), 0<p\leqslant\infty$, 定义当 $0<p<\infty$ 时, 它的范数是 $L^p([0,2\pi),\mathrm{d}x)$ 范数的倍数, 即

$$\|f\|^p_{L^p_{2\pi}}=\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^p\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},\ \ 0<p<\infty.$$

当 $p=\infty$ 时, $L^\infty_{2\pi}$ 的范数等于 $L^\infty([0,2\pi),\mathrm{d}x)$ 的范数. 注意, $\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ 是 $[0,2\pi)$ 上的概率测度. 对 $0<p<q\leqslant\infty$, 有 $L^q_{2\pi}\subset L^p_{2\pi}$ 且 $\|f\|_{L^p_{2\pi}}\leqslant\|f\|_{L^q_{2\pi}}, f\in L^q_{2\pi}$.

(2) $C_{2\pi}$ 表示所有 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数构成的空间, 其上的范数为

$$\|f\|_\infty=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(\theta)|=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|f(\theta)|.$$

(3) 记 $\mathcal{P}$ 为所有三角多项式构成的向量空间. $\mathcal{P}$ 中的任一元素 f 可表示成

$$f(\theta)=\sum_{k=m}^{n}\alpha_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\ \alpha_k\in\mathbb{C}, m<n, m,n\in\mathbb{Z}.$$

显然, $\mathcal{P}$ 是 $C_{2\pi}$ 和 $L^p_{2\pi}$ 的向量子空间.

引理 5.2.11 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密.

证明 我们先建立 $[0,2\pi)$ 和单位圆环 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 的对等关系:

$$[0,2\pi)\ni\theta\longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=z\in\mathbb{T}.$$

并定义 $J:C(\mathbb{T})\to C_{2\pi}$, $f\mapsto J(f)$, 这里 $J(f)(\theta)=f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. 我们宣称 J 是到上的线性等距映射. 首先有

$$\|J(f)\|_{C_{2\pi}}=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|=\sup_{z\in\mathbb{T}}|f(z)|=\|f\|_{C(\mathbb{T})}.$$

其次, 对任意 $g\in C_{2\pi}$, 令 $f(z)=g(\theta), z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\mathbb{T}$. 则 $J(f)=g$, 故 J 是到上的. 因此 $C_{2\pi}$ 和 $C(\mathbb{T})$ 线性同构, 即

$$C_{2\pi}\cong C(\mathbb{T}).$$

最后, 我们设 $\widetilde{\mathcal{P}}$ 是关于 $(z,\bar{z})$ 的所有多项式构成的函数族. 显然, $\mathcal{P}=J(\widetilde{P})$. 另一方面, 根据 Stone-Weierstrass 定理 (见推论 5.2.9), $\widetilde{\mathcal{P}}$ 在 $C(\mathbb{T})$ 中稠密. 则 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密. ■

定义 5.2.12 设 $f\in L^1_{2\pi}$, 称

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta,\ n\in\mathbb{Z}$$

为函数 f 的 n 阶 *Fourier* 系数. 并记函数 f 所有的 Fourier 系数构成的序列为

$$\mathcal{F}(f)=(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}},$$

我们称 $\mathcal{F}(f)$ 为 f 的 *Fourier* 变换, 有时也记 $\mathcal{F}(f)$ 为 $\widehat{f}$.

定理 5.2.13 (1) 设 $0<p<\infty$, 三角多项式族 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 和 $L^p_{2\pi}$ 中都稠密.

(2) $\mathcal{F}$ 是从 $L^1_{2\pi}$ 到 $c_0(\mathbb{Z})$ 的范数为 1 的单射, 这里

$$c_0(\mathbb{Z})=\left\{\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}:\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{n\to-\infty}\alpha_n=0\right\},$$

其范数为 $\|\alpha\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha_n|$.

(3) 记 $e_n(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, n\in\mathbb{Z}$. 则 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 Hilbert 空间 $L^2_{2\pi}$ 中的规范正交基.

证明 (1) 由引理 5.2.11, 我们已知 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密. 因此只需证明 $\mathcal{P}$ 在 $L^p_{2\pi}$ 中稠密. 设 $f \in L^p_{2\pi}$, $\varepsilon > 0$. 因 $C([0,2\pi],\mathbb{C})$ 在 $L^p([0,2\pi],\mathbb{C})$ 中稠密 (见推论 3.3.15), 故存在连续函数 $g:[0,2\pi] \to \mathbb{C}$, 使得 $\|f-g\|_{L^p_{2\pi}} < \varepsilon$.

取任意 $0 < \delta < 2\pi$, 定义 $\widetilde{g}(\theta) = g(\theta)$, $\theta \in [0,\ 2\pi-\delta)$; 在 $[2\pi-\delta,\ 2\pi]$ 上 $\widetilde{g}$ 是满足

$$\widetilde{g}(2\pi-\delta) = g(2\pi-\delta),\ \widetilde{g}(2\pi) = g(0)$$

的线性函数. 则由此确定的函数 $\widetilde{g}$ 满足:

- $\widetilde{g}:[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ 是连续的.
- $\widetilde{g}(0) = \widetilde{g}(2\pi)$, 故 $\widetilde{g}$ 能扩展成 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数, 即 $\widetilde{g} \in C_{2\pi}$.
- 我们有

$$\|\widetilde{g}-g\|^p_{L^p_{2\pi}} = \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |\widetilde{g}(\theta)-g(\theta)|^p \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2\pi} 2^p \|g\|^p_\infty \delta.$$

因此, 可取 δ 足够小使得

$$\|f-\widetilde{g}\|_{L^p_{2\pi}} < 2\varepsilon.$$

因 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密, 且 $\widetilde{g} \in C_{2\pi}$, 故存在 $h \in \mathcal{P}$, 使得 $\|h-\widetilde{g}\|_\infty < \varepsilon$. 那么对 $1 \leqslant p < \infty$, 有

$$\|f-h\|_{L^p_{2\pi}} < 3\varepsilon.$$

而对 $0 < p \leqslant 1$, 有

$$\|f-h\|^p_{L^p_{2\pi}} < (2\varepsilon)^p + \varepsilon^p.$$

所以对任意 $0 < p < \infty$, 都有 $\mathcal{P}$ 在 $L^p_{2\pi}$ 中稠密.

(2) 首先假设 $f \in \mathcal{P}$, 则存在 $m, n \in \mathbb{Z}$ 以及 $\alpha_k \in \mathbb{C}$, 使得 $f = \sum\limits_{k=m}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$, 并且

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \alpha_k, & m \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

这时当然有 $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$.

然后对任意 $f \in L^1_{2\pi}$, 我们分几个步骤来证明 $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$ 且为单射:

(a) 显然 $\mathcal{F}$ 是线性的. 设 $f \in L^1_{2\pi}$. 我们有

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(\theta)| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \|f\|_{L^1_{2\pi}}.$$

(b) 对任意 $f \in L^1_{2\pi}$ 及 $\varepsilon > 0$, 由于 $\mathcal{P}$ 在 $L^1_{2\pi}$ 中稠密, 可知存在 $g \in \mathcal{P}$, 使得 $\|f-g\|_{L^1_{2\pi}} < \varepsilon$, 那么总存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $|n| > N$ 时, 有 $\widehat{g}(n) = 0$. 因此,

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| = |\widehat{f-g}(n)| \leqslant \|f-g\|_{L^1_{2\pi}} < \varepsilon.$$

于是可得 $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$, 并且

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1_{2\pi}},$$

因此, $\|\mathcal{F}\| \leqslant 1$. 另外, 显然有 $1 = \|\mathcal{F}(e_n)\|_\infty = \|e_n\|_{L^1_{2\pi}}$. 故 $\|\mathcal{F}\| = 1$.

(c) 因 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}(L^1_{2\pi}, c_0(\mathbb{Z}))$, 故证明 $\mathcal{F}$ 为单射, 只需证明: 若 $\widehat{f} = 0$, 则 $f = 0$. $\widehat{f} = 0$ 意味着

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta = 0, \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

从而

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta = 0, \ \ \forall g \in \mathcal{P}.$$

由于 $\mathcal{P}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密, 可得对任意 $g \in C_{2\pi}$, 也有 $\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$. 再任取 $g \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$, 类似于对命题 (1) 的处理方法, 建立关系 $g \mapsto \widetilde{g} \in C_{2\pi}$, 则同样可证 $\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$.

接下来取 $[0, 2\pi]$ 上任意阶梯函数 g. 容易构造 $[0, 2\pi]$ 上连续函数列 $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$, 使其满足 $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ 且 $\varphi_n \to g$, a.e. 则由 Lebesgue 控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} f(\theta)[g(\theta) - \varphi_n(\theta)]\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} f(\theta)\varphi_n(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta)[g(\theta) - \varphi_n(\theta)]\mathrm{d}\theta \to 0.\end{aligned}$$

故也有 $\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$. 那么对任意 $g \in L^\infty(0, 2\pi)$, 有 $|g(\theta)| \leqslant \|g\|_\infty$, a.e. 我们知道存在简单函数列 (g_n), 使得 g_n 几乎处处收敛到 g, 并且 $|g_n(\theta)| \leqslant \|g\|_\infty$, a.e. 因此由 Lebesgue 控制收敛定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \geqslant 1$ 时, 有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(g - g_n)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \varepsilon.$$

不妨设 $g_n = \sum\limits_{i=1}^m c_i^n \mathbb{1}_{E_i^n}$, 其中可测集 E_i^n 具有有限的正测度并且 $\sup\limits_i |c_i^n| \leqslant \|g\|_\infty$. 正如在推论 3.3.15 的证明中指出的事实, 存在阶梯函数 $g'_n = \sum\limits_{i=1}^m c_i^n \mathbb{1}_{U_i^n}$, 其中 U_i^n 是有限个开区间的并, 并且 U_i^n 与 E_i^n 的对称差的测度小于任意小的数 $\delta > 0$. 故可选择合适的 g'_n, 使得

$$\left|\int_0^{2\pi} f(g_n - g'_n)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \|g\|_\infty \sum_{i=1}^m \int_0^{2\pi} |f|\mathbb{1}_{(E_i^n \setminus U_i^n)\cup(U_i^n \setminus E_i^n)}\mathrm{d}\theta \leqslant \varepsilon.$$

因此, 我们有

$$\left|\int_0^{2\pi} fg\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \left|\int_0^{2\pi} f(g-g_n)\mathrm{d}\theta\right| + \left|\int_0^{2\pi} f(g_n-g_n')\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 可得对任意给定的 $g\in L^\infty(0,2\pi)$, $\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta=0$ 依然成立. 取 $g=\mathrm{sgn}(f)$, 可得

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}|f(\theta)|\mathrm{d}\theta=0.$$

故 $f=0$ a.e., 也就是说在 $L^1(0,2\pi)$ 中, $f=0$.

(3) 由 $L^2_{2\pi}$ 上的内积定义立即可得, 若 $n\neq m, \langle e_n,e_m\rangle=0$ 及 $\|e_n\|_2=1$. 因 $\mathrm{span}(e_n)=\mathcal{P}$ 在 $L^2_{2\pi}$ 中稠密, 故 (e_n) 在 $L^2_{2\pi}$ 中是完全的. 所以 (e_n) 是 $L^2_{2\pi}$ 中的规范正交基. ■

注 5.2.14 (1) 结论 $\lim\limits_{|n|\to+\infty}\widehat{f}(n)=0$ 即著名的 Riemann-Lebesgue 引理.

(2) 由 Parseval 等式, 任取 $f\in L^2_{2\pi}$, 有

$$\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(n)|^2.$$

习 题 五

1. 对任意 $x\in[0,1]$, 设 $f_n(x)=x^n$. 在 $[0,1]$ 上的哪些点处, $(f_n)_{n\geqslant1}$ 等度连续?

2. 设 K 是度量空间, E 是赋范空间, $(f_n)_{n\geqslant1}$ 是一列从 K 到 E 的连续函数. 证明若 $(f_n)_{n\geqslant1}$ 在一个点 x 处等度连续, 则对任一收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n\geqslant1}$, 都有 $(f_n(x)-f_n(x_n))_{n\geqslant1}$ 收敛到 0. 进而证明如果 $(f_n(x))_{n\geqslant1}$ 在 E 中收敛到 y, 那么对任一收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n\geqslant1}$, $(f_n(x_n))_{n\geqslant1}$ 也收敛到 y.
取 $f_n(x)=\sin(nx)$. 证明 $(f_n)_{n\geqslant1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上每一点都不等度连续.

3. 设 K 是拓扑空间, (E,d) 是度量空间. 证明: 若 (f_n) 在 $C(K,E)$ 中依一致范数收敛, 则 (f_n) 等度连续.

4. 设 K 是拓扑空间, (E,d) 是度量空间, (f_n) 是 $C(K,E)$ 上等度连续序列. 证明所有使得 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 序列的点 x 构成的集合是 K 中的闭子集.

5. 考虑函数序列 (f_n), 这里 $f_n(t)=\sin\left(\sqrt{t+4(n\pi)^2}\right)$, $t\in[0,\infty)$.
(a) 证明 (f_n) 等度连续并且逐点收敛到 0 函数.
(b) $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ 表示 $[0,\infty)$ 上所有有界连续实函数构成的空间, 并赋予范

数

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\geqslant 0} |f(t)|.$$

(f_n) 在 $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ 中是否相对紧?

6. 本习题和下一习题都是为了给出 Ascoli 定理的另一个证明.

设 K 是一个紧 Hausdorff 空间, (E,d) 是度量空间. 任意映射 $f: K\to E$ 和笛卡儿乘积 E^K 中的元素 $(f(x))_{x\in K}$ 对应, 反之亦然. 我们在 E^K 上考虑乘积拓扑.

(a) 证明一列映射 (f_n) 逐点收敛到 $f: K\to E$ 当且仅当 (f_n) 在 E^K 中收敛到 f. 也就是说, 乘积拓扑 E^K 刻画了逐点收敛性.

(b) 设 $\mathcal{H}\subset C(K,E)$ 等度连续. 证明在 $\mathcal{H}$ 上由 $C(K,E)$ 诱导的拓扑和由 E^K 诱导的拓扑一致.

(c) 设 $\mathcal{H}\subset C(K,E)$ 等度连续, 并且每一个轨道 $\mathcal{H}(x)$ 在 E 中是相对紧的. 考虑 E^K 的子空间:

$$A = \prod_{x\in K} \overline{\mathcal{H}(x)}.$$

证明 $\mathcal{H}$ 在 $C(K,E)$ 中的闭包 $\overline{\mathcal{H}}$ 包含在 A 中; 进而根据 Tychonoff 定理, 证明 $\overline{\mathcal{H}}$ 是紧的.

7. 本习题的目的是在 Ascoli 定理中的空间 (K,δ) 是紧度量空间时, 给充分性部分一个简单的证明.

设 (K,δ) 是紧度量空间, $(f_n)\subset C(K,E)$ 是等度连续的函数列, 并且对每个点 $x\in K$, $\{f_n(x): n\geqslant 1\}$ 相对紧.

(a) 证明 K 是可分的, 即存在一个可数子集 D 在 K 中稠密.

(b) 使用对角线法, 证明 (f_n) 有一个子列 $(f_{n_k})_k$, 使得对任意 $x\in D$, $(f_{n_k}(x))_k$ 收敛.

(c) 证明对任意 $x\in K$, $(f_{n_k}(x))_k$ 是 Cauchy 序列; 并由此导出 $(f_{n_k})_k$ 在 $C(K,E)$ 中收敛.

8. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 给定一个紧子集 $K\subset\Omega$, 对任意 $f\in C(\Omega,\mathbb{C})$, 令

$$\|f\|_{\infty,K} = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

定义 τ_c 为 $C(\Omega,\mathbb{C})$ 上的集族, τ_c 中的元素可表示为如下形式集合的并集:

$$B_K(f,r) = \{g\in C(\Omega,\mathbb{C}) \,:\, \|g-f\|_{\infty,K} < r\},$$

这里 $f\in C(\Omega,\mathbb{C})$, $K\subset\Omega$ 是紧的且 $r>0$.

(a) 证明 τ_c 是 $C(\Omega,\mathbb{C})$ 上的 Hausdorff 拓扑, 称其为在 Ω 的任一紧子集上一致收敛的拓扑.

(b) 令 $(f_n)\subset C(\Omega,\mathbb{C})$. 证明 f_n 在 Ω 的任一紧子集上一致收敛到 f 当且仅当 f_n 依拓扑 τ_c 收敛到 f.

9. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中开集, $\mathcal{H}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有全纯函数构成的集合.

(a) 证明对每一个紧子集 $K\subset\Omega$,

$$\left\{f\in H(\Omega)\ :\ \sup_{z\in K}|f(z)|=\|f\|_{\infty,K}<1\right\}$$

是 $(\mathcal{H}(\Omega),\tau_c)$ 中的开集.

(b) 假设拓扑 τ_c 可以被一个范数 $\|\,\|$ 诱导, 令 $\mathcal{B}=\{f\in\mathcal{H}(\Omega)\ :\ \|f\|<1\}$. 证明对每一个紧子集 $K\subset\Omega$, 有常数 $t>0$, 使得 $t\mathcal{B}\subset\left\{f\in\mathcal{H}(\Omega)\ :\ \sup\limits_{z\in K}|f(z)|<1\right\}$. 并证明 $\mathcal{B}$ 关于 τ_c 拓扑是相对紧的.

(c) 证明 τ_c 不能被 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上任何范数诱导.

10. 设 (K,d) 是紧度量空间. 证明所有从 K 到 $\mathbb{R}$ 的 Lipschitz 函数构成的集合在 $(C(K,\mathbb{R}),\|\,\|_\infty)$ 中稠密.

11. 设 K_1 和 K_2 都是紧 Hausdorff 空间. 对 $f\in C(K_1,\mathbb{C}), g\in C(K_2,\mathbb{C})$ 定义

$$f\otimes g(x_1,x_2)=f(x_1)g(x_2),\ \ \forall(x_1,x_2)\in K_1\times K_2.$$

并定义集合

$$\mathcal{A}=\left\{\sum_{\text{有限和}}a_if_i\otimes g_i : a_i\in\mathbb{C},\ f_i\in C(K_1,\mathbb{C}),\ g_i\in C(K_2,\mathbb{C})\right\}.$$

证明 $\mathcal{A}$ 在 $C(K_1\times K_2,\mathbb{C})$ 中稠密.

12. $[0,1]$ 上所有的偶多项式构成的集合 $\mathcal{Q}$ 是否在 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上稠密?

$[-1,1]$ 上所有的偶多项式构成的集合 $\mathcal{R}$ 是否在 $C([-1,1],\mathbb{R})$ 上稠密?

13. 设 (E,τ) 是一个局部紧的但不是紧的 Hausdorff空间, $\widehat{E}$ 表示 E 的 Alexandroff 紧化空间 (见习题一, 6). 考虑 $C(E,\mathbb{C})$ 的子空间 $C_0(E,\mathbb{C})$, 其上的元素 f 满足: 任取 $\varepsilon>0$, 存在一个紧集 $K\subset E$, 使得当 $E\setminus K$ 时, 有 $|f|<\varepsilon$. 并对 $f\in C_0(E,\mathbb{C})$, 定义

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

(a) 证明 $(C_0(E,\mathbb{C}),\|\,\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间, 并且它和 $C(\widehat{E},\mathbb{C})$ 中在 ∞ 处收敛到 0 的函数构成的子空间线性同构.

(b) 设 $\mathcal{A}$ 是 $C_0(E,\mathbb{C})$ 的自共轭子代数, 且在 E 上是可分点的, 并使得对任意 $x \in E$, 有 $f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x) \neq 0$. 令 $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \Delta$, 这里 Δ 是 $\widehat{E}$ 上的常函数集. 证明 $\widehat{\mathcal{A}}$ 在 $C(\widehat{E},\mathbb{C})$ 中稠密, 然后证明 $\mathcal{A}$ 在 $C_0(E,\mathbb{C})$ 中稠密.

14. 本习题的目的是证明 **Bernstein 定理**: 令 $f \in C([0,\,1],\mathbb{K})$, 并设

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

则 B_n 在 $[0,\,1]$ 上一致收敛到 f.

(a) 首先导出对任一正整数 n, 有公式

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k k x^k(1-x)^{n-k} = nx \quad \text{和} \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k k^2 x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x.$$

并由此证明

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (k-nx)^2 x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

(b) 对任意 $\varepsilon > 0$, 选择适当的 $\delta > 0$, 使得

$$x, y \in [0,\,1],\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

对任一固定 $x \in [0,\,1]$, 令 $I = \{k\ :\ |x - \frac{k}{n}| < \delta\}$ 及 $J = \{k\ :\ |x - \frac{k}{n}| \geqslant \delta\}$. 证明

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon \sum_{k\in I} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$
$$+ \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k\in J} \mathrm{C}_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k}.$$

从而导出

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\, \frac{x(1-x)}{n}.$$

(c) 得出结论

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.$$

15. 设 $f \in L^1_{2\pi}$, 其 *Fourier* 级数定义为

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

并定义相应的 n 次部分和为

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

在本习题中, 假设 f 属于分段的 C^1 函数类, 也就是说, $f \in C_{2\pi}$ 且存在 $[0, 2\pi]$ 上的划分 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 2\pi$, 使得 f 在每个子区间 (a_j, a_{j+1}) 属于 C^1 函数类, 并且 f' 在点 a_j 的右极限和点 a_{j+1} 的左极限都存在. 证明: f 的 Fourier 级数依无穷范数收敛到 f, 而且

$$\|f - S_N(f)\|_\infty \leqslant \sqrt{\frac{2}{N}}\,\|f'\|_2, \quad \forall N \geqslant 1.$$

注意这里的导数 f' 在 f 的不可导点取左右导数.

16. 本习题给出了一个不是 Fourier 级数的三角级数. 考虑三角级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \sin(nx)$, $a_n \geqslant 0$.

(a) 假设该三角级数是某函数 $f \in L^1_{2\pi}$ 的 Fourier 级数, 也就是有

$$\widehat{f}(0) = 0, \quad \widehat{f}(n) = \frac{a_n}{2\mathrm{i}}, \quad \widehat{f}(-n) = -\frac{a_n}{2\mathrm{i}}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

令

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明: $F \in C_{2\pi}$ 并且

$$\widehat{F}(n) = -\frac{a_{|n|}}{2|n|}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

由此导出级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

(b) 证明: 三角级数 $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{\sin(nx)}{\log n}$ (该级数在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛) 不是 Fourier 级数.

17. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 相应的平移变换 $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$. 证明对任意 $f \in L^p_{2\pi}$, $0 < p < \infty$, 有

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0.$$

18. 令 $N \geqslant 1$, N 阶的 Fejér 核定义为

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n,$$

其中

$$D_n(x) = \sum_{|k|\leqslant n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) 证明:

(i) $F_N(t) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$;

(ii) $\|F_N\|_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} F_N(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1$;

(iii) 任取 $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} F_N(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 0$.

(b) 令

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)F_N(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

证明:

(i) 若 $f \in L_{2\pi}^p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $\|\sigma_N(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$;

(ii) 若 $f \in C_{2\pi}$, 则 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$;

(iii) 若 $f \in L_{2\pi}^p, 1 \leqslant p < \infty$, 则 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$ 对任意 $f \in L_{2\pi}^p$.

19. 设 $f \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, f 的 *Fourier* 变换定义为

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-itx}\mathrm{d}x, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(a) 证明: 任取 $f \in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 都有 $\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) 证明: $\mathcal{F}$ 的像集在 $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 中稠密.

第六章　Baire 定理及其应用

在第二章我们提到, 度量空间的完备性与 Baire 空间的性质密切相关. 本章首先给出度量空间下的 Baire 定理, 即完备度量空间是 Baire 空间. 将 Baire 定理应用到 Banach 空间, 将导出三个重要定理, 它们是一致有界性原理、开映射定理和闭图像定理. 而这些定理直接涉及调和分析和偏微分方程中的基本问题, 如一致有界性原理联系于 Fourier 级数的收敛性问题, 开映射定理对应着偏微分方程解的稳定性问题, 闭图像定理反映了线性算子的正规性问题等.

在 §6.1 中, 我们将介绍 Baire 定理和 Baire 空间, Baire 空间的定义看起来很不直观, 但它具有的性质十分重要. §6.2 讨论一致有界性原理, 也就是 Banach-Steinhaus 定理. §6.3 给出开映射定理和闭图像定理, 在这一部分我们还特别考虑了它们在 Fourier 分析和补空间问题中的应用.

§6.1　Baire 空间

下面是有关完备度量空间的 Baire 定理, 它在分析中有广泛的应用.

定理 6.1.1 (Baire)　*设 (E,d) 是完备度量空间, $(O_n)_{n\geqslant 1}$ 是一列在 E 中稠密的开子集, 则 $O=\bigcap\limits_{n\geqslant 1} O_n$ 在 E 中稠密.*

证明　任取 E 中的非空开子集 U. 首先由 O_1 在 E 中稠密, 可得 $O_1\cap U$ 是非空开集. 那么我们可以取一个闭球 F_1, 使得 $F_1\subset U\cap O_1$, 记 F_1 的直径 $\operatorname{diam} F_1$ 为 r_1.

同样因 O_2 在 E 中稠密, 可得 $O_2\cap \mathring{F}_1\neq\varnothing$ 并且仍然是开集, 那么存在一个闭球 F_2, 使得 $F_2\subset \mathring{F}_1\cap O_2$, 而且 $r_2=\operatorname{diam}F_2\leqslant \frac{r_1}{2}$.

依次下来, 我们得到一个非空的闭球序列 $(F_n)_{n\geqslant 1}$, 满足

$$F_{n+1}\subset \mathring{F}_n\cap O_{n+1} \text{ 和 } \operatorname{diam}F_{n+1}\leqslant \frac{r_1}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

因为 E 是完备的, 所以由定理 2.2.6, 存在唯一的一点 $x\in E$, 使得 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} F_n=\{x\}$. 那么 $x\in O=\bigcap\limits_{n\geqslant 1} O_n$, 并且 $x\in F_1\subset U$. 因此 $x\in O\cap U$, 即得 O 在 E 中稠密.■

定理中要求 $O_n, n\geqslant 1$, 是开集的条件是必要的. 比如在实数集 $\mathbb{R}$ 上, 有理

数集和无理数集都是稠密的, 但是它们的交集是空集.

定义 6.1.2 称拓扑空间 E 是一个 *Baire* 空间, 若 E 中任意可数多个稠密开集的交仍然在 E 中稠密.

上述定理说明完备度量空间是 Baire 空间. 其实, 说一个完备度量空间是 Baire 空间并不是非常严格的说法, 因为 Baire 空间是一个纯粹拓扑概念, 但度量空间的完备性却不是拓扑概念. 我们知道完备性由 Cauchy 序列的收敛性来定义, 但 Cauchy 序列却是一个度量概念. 两个不同的距离可以诱导相同的拓扑, 但一个可以是完备的而另一个不是 (参见习题二). 所以更准确的说法应是: 若一个拓扑空间的拓扑可以由一个完备距离诱导, 则它是 Baire 空间.

注: 拓扑空间 E 是 Baire 空间等价于 E 中可数多个无内点的闭子集的并集仍然无内点.

定理 6.1.1 的证明也适用于局部紧空间. 因此我们也有下面的定理, 其证明留作习题.

定理 6.1.3 *局部紧的 Hausdorff 空间是 Baire 空间.*

定理 6.1.4 *设 E 是 Baire 空间, 则*

(1) E 的任意开子集也是一个 Baire 空间.

(2) 设 $(F_n)_{n\geqslant 1}$ 是 E 的一列闭子集, 并且 $E=\bigcup\limits_{n\geqslant 1} F_n$, 那么 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathring{F}_n$ 在 E 中稠密.

证明 (1) 设 Ω 是 E 中开集, $(O_n)_{n\geqslant 1}$ 是一列在 Ω 中稠密的开子集. 由于 Ω 是开集, 可知 (O_n) 也是 E 中开集列. 令

$$U_n = O_n \cup \overline{\Omega}^c,$$

则 U_n 显然是 E 中开集, 且有 $\overline{U_n}=E$. 因此 $(U_n)_{n\geqslant 1}$ 是 E 的一列稠密开子集. 因 E 是 Baire 空间, $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} U_n$ 依然在 E 中稠密. 而

$$\bigcap_{n\geqslant 1} U_n = \left(\bigcap_{n\geqslant 1} O_n\right) \cup \overline{\Omega}^c,$$

由此推出 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} O_n$ 在 Ω 中稠密.

(2) 任取 E 中非空开集 Ω, 则

$$\Omega = \Omega \cap E = \bigcup_{n\geqslant 1} (\Omega \cap F_n).$$

由于 F_n 是闭集, 则 $\Omega \cap F_n$ 也是 Ω 中闭集. 由 (1) 可知开集 Ω 也是 Baire 空间, 那么必存在某个 n, 使得 $(\Omega \cap F_n)^\circ \neq \varnothing$. 注意此处的内部是关于 Ω 上的拓扑取的. 但由于 Ω 是 E 中开集, 则 $\Omega \cap F_n$ 在 Ω 中的内部也是其在 E 中的内部. 那么 $\Omega \cap F_n$ 在 E 中的内部也非空, 即有 $\Omega \cap \mathring{F}_n \neq \varnothing$. 故 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathring{F}_n$ 在 E 中稠密. ■

定义 6.1.5 设 E 是拓扑空间.

(1) 称 E 中可数多个开子集的交集为 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 称 E 中可数多个闭子集的并集为 $\mathcal{F}_\sigma$ 集.

(2) 称 $A \subset E$ 为贫集 (或第一纲集), 若 A 为某个无内点的 $\mathcal{F}_\sigma$ 集的子集; 称 $A \subset E$ 为剩余集, 若 A 包含一个稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

注 6.1.6 (1) A 是 $\mathcal{G}_\delta$ 集等价于 A^c 是 $\mathcal{F}_\sigma$ 集.

(2) A 是贫集等价于 A^c 是剩余集, 这是因为集合 A 是稠密的当且仅当 A^c 无内点, 从而 A 是稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集当且仅当 A^c 是无内点的 $\mathcal{F}_\sigma$ 集.

(3) 设 E 是 Baire 空间, 则 E 中可数多个贫集的并集仍然是贫集; 可数多个剩余集的交仍然是剩余集.

(4) 贫集和剩余集的概念描述了子集的大小. 如果和测度论中的概念相比较, 我们可以把贫集对应着零测度集, 剩余集对应于与全集几乎处处相等的集合, 它们的性质极为类似.

上述性质 (3) 可如下简单证明:

设 $A_n \subset \bigcup\limits_{k\geqslant 1} F_{n,k}$, $n \geqslant 1$, 这里 $F_{n,k}$ 是闭集并且 $(\bigcup\limits_{k\geqslant 1} F_{n,k})^\circ = \varnothing$. 那么每个 $\mathring{F}_{n,k} = \varnothing$. 由于 E 是 Baire 空间, 可得

$$\left(\bigcup_{n,k} F_{n,k}\right)^\circ = \varnothing.$$

故 $\bigcup\limits_n A_n \subset \bigcup\limits_{n,k} F_{n,k}$ 是贫集.

我们知道逐点收敛的连续函数列的极限函数不一定连续. 但应用 Baire 定理, 可证该极限函数有很多连续点, 我们有如下"漂亮"的定理.

定理 6.1.7 设 E 是 Baire 空间, (F, δ) 是度量空间. 并设映射序列 $(f_n)_n \subset C(E, F)$ 逐点收敛到函数 f. 那么 f 的所有连续点构成的集合 $\mathrm{Cont}(f)$ 是 E 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

证明 对任意给定的 $N, k \in \mathbb{N}^*$, 设

$$F_{N,k} = \left\{ x \in E : \delta(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \frac{1}{k},\ \forall m, n \geqslant N \right\}$$

$$= \bigcap_{m,n \geqslant N} \left\{ x \in E : \delta(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

因每个 f_n 连续, $F_{N,k}$ 是 E 中的闭集. 对任意 $k \geqslant 1$, 因 f_n 是逐点收敛的, 故有

$$E = \bigcup_{N \geqslant 1} F_{N,k}.$$

由于 E 是 Baire 空间, 可知

$$O_k = \bigcup_{N \geqslant 1} \mathring{F}_{N,k}$$

在 E 中稠密 (见定理 6.1.4). 仍然由于 E 是 Baire 空间, 可得

$$O = \bigcap_{k \geqslant 1} O_k$$

在 E 中稠密. 若任取 $x \in O$, 则对每一个 $k \geqslant 1$, 有 $x \in O_k$. 于是再由 O_k 的定义, 存在 $N \geqslant 1$, 使得 $x \in \mathring{F}_{N,k}$. 那么对任意 $m, n \geqslant N$ 及任意 $y \in \mathring{F}_{N,k}$, 有

$$\delta(f_n(y), f_m(y)) \leqslant \frac{1}{k}.$$

在上式中令 $n \to \infty$, 即得 $\delta(f(y), f_m(y)) \leqslant \frac{1}{k}$. 另外, $f_N \in C(E, F)$, 则存在 $V \in \mathcal{N}(x)$, 使得当 $y \in V$ 时, 有

$$\delta(f_N(y), f_N(x)) \leqslant \frac{1}{k}.$$

令 $U = V \cap \mathring{F}_{N,k}$. 则 $U \in \mathcal{N}(x)$ 且当 $y \in U$ 时

$$\delta(f(y), f(x)) \leqslant \delta(f(y), f_N(y)) + \delta(f_N(y), f_N(x)) + \delta(f_N(x), f(x)) \leqslant \frac{3}{k}.$$

这证明了 f 在 x 点连续, 故 $O \subset \mathrm{Cont}(f)$. 最后, 因任一映射的连续点集都是 $\mathcal{G}_\delta$ 集 (见下引理), 故定理得证. ■

引理 6.1.8 设 E 是 Hausdorff 拓扑空间, (F, δ) 是度量空间, 则对一个映射 $f : E \to F$, 其连续点集 $\mathrm{Cont}(f)$ 是一个 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

证明 我们定义 f 在 $x \in E$ 处的振幅为

$$\omega(f)(x) = \inf_{V \in \mathcal{N}(x)} \sup_{y,z \in V} \delta(f(y), f(z)).$$

显然,

$$\omega(f)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Cont}(f).$$

因此,

$$\mathrm{Cont}(f)=\bigcap_{n\geqslant 1}\left\{x\in E:\ \omega(f)(x)<\frac{1}{n}\right\}.$$

另外, 容易证明对任意 $\varepsilon>0$, $\{x\in E:\omega(f)(x)<\varepsilon\}$ 是开集. 故 $\mathrm{Cont}(f)$ 是 $\mathcal{G}_\delta$ 集. ■

注 6.1.9 (1) 若一个映射是一列连续映射的极限, 则称此映射是第一纲的.

(2) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 的示性函数在 $\mathbb{R}$ 上每一点都不连续, 但是它是一列第一纲函数的极限, 这说明一列第一纲函数的逐点收敛的极限函数不一定是一列连续函数的极限 (参见习题六, 1).

§6.2 Banach-Steinhaus 定理

在这一节和下一节中, 我们将给出 Baire 定理的三个重要应用. 这一节介绍第一个应用, 即 Banach-Steinhaus 定理; 下一节介绍开映射定理和闭图像定理. 在这两节中, E 和 F 总表示数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间.

定理 6.2.1 (Banach-Steinhaus) *设 E 是 Banach 空间, F 是赋范空间, $(u_i)_{i\in I}$ 是一族从 E 到 F 的有界线性算子, 即 $(u_i)_{i\in I}\subset\mathcal{B}(E,F)$. 若对每一点 $x\in E$, 有 $\sup\limits_{i\in I}\|u_i(x)\|<\infty$, 则*

$$\sup_{i\in I}\|u_i\|<\infty,$$

即算子族 $(u_i)_{i\in I}$ 在 $\mathcal{B}(E,F)$ 中有界.

证明 令

$$M(x)=\sup_{i\in I}\|u_i(x)\|$$

及

$$F_n=\{x\in E:M(x)\leqslant n\}.$$

由 u_i 的连续性知 $\{x\in E:\|u_i(x)\|\leqslant n\}$ 是 E 中闭集. 那么

$$F_n=\bigcap_{i\in I}\{x\in E:\|u_i(x)\|\leqslant n\}$$

也是 E 中闭集.

由定理假设, 对每一点 $x\in E$, 有 $M(x)<\infty$. 因此,

$$E=\bigcup_{n\geqslant 1}F_n.$$

根据 Baire 定理 6.1.1, 因 E 是 Banach 空间, 故 E 是 Baire 空间. 又由定理 6.1.4 可知, $\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\mathring{F}_n$ 在 E 中稠密, 故存在某个 $n\geqslant 1$, 使得 $\mathring{F}_n\neq\varnothing$. 因此存在开球 $B(x_0,r)\subset\mathring{F}_n$, 即对所有 $x\in B(x_0,r)$, 有

$$M(x)\leqslant n\ (\text{也就是 } \|u_i(x)\|\leqslant n,\ \forall i\in I).$$

等价地, 若令 $x\in B(0,r)$, 则有 $\|u_i(x+x_0)\|\leqslant n$. 那么由 u_i 的线性性, 可得

$$\|u_i(x)\|\leqslant\|u_i(x+x_0)\|+\|u_i(x_0)\|\leqslant n+M(x_0).$$

同样由 u_i 的线性性, 对任意 $x\in B(0,1)$, 有

$$\|u_i(x)\|\leqslant\frac{n+M(x_0)}{r}=C,$$

故 $\sup\limits_{i\in I}\|u_i\|<\infty$. ∎

注 6.2.2 在每一点 $x\in E$, $\sup\limits_{i\in I}\|u_i(x)\|<\infty$, 意味着算子族 (u_i) 是逐点有界的; 而 $\sup\limits_{i\in I}\|u_i\|<\infty$ 意味着 (u_i) 是 E 上一致有界的线性算子族. 所以我们通常也把 Banach-Steinhaus 定理称为一致有界原理.

注 6.2.3 若 (u_i) 是 E 上一致有界的线性算子族, 则 (u_i) 是一致的 Lipschitz 算子族, 相应的 Lipschitz 常数为 $C=\sup\limits_{i\in I}\|u_i\|$. 具体地表述为

$$\|u_i(x)-u_i(y)\|\leqslant C\|x-y\|,\ \forall x,y\in E,\forall i\in I.$$

因此 (u_i) 是一致等度连续的.

Banach-Steinhaus 定理被它的发现者称为 "奇性聚集原理" (Principle of concentration of singularity). 它使我们可以从反方向更好地来理解该定理: 若线性算子族 $(u_i)_{i\in I}$ 在 $\mathcal{B}(E,F)$ 中无界, 则应存在某点 $x\in E$, 使得 $(u_i(x))_{i\in I}$ 在 F 上无界. 在该意义下, 我们可以把 Banach-Steinhaus 定理表述为如下改进形式.

定理 6.2.4 设 E 是 Banach 空间, F 是赋范空间, 且 $(u_i)_{i\in I}\subset\mathcal{B}(E,F)$ 满足

$$\sup_{i\in I}\|u_i\|=\infty,$$

则 $G=\{x\in E:\ M(x)=+\infty\}$ 是 E 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

证明 我们有

$$G=\bigcap_{n\geqslant 1}\{x\in E: M(x)>n\}=\bigcap_{n\geqslant 1}\Omega_n,$$

这里 $\Omega_n = \{x \in E : M(x) > n\}$. 设 F_n 是定理 6.2.1 的证明中引入的子集. 则 $\Omega_n = E \setminus F_n$, 故 Ω_n 是开集, 因而 G 是一个 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

假设某个 Ω_n 在 E 中不稠密, 则相应的 $\mathring{F}_n \neq \varnothing$. 那么根据定理 6.2.1 的证明过程, (u_i) 一致有界, 这与本定理的条件矛盾. 由此可知, 对所有 $n \geqslant 1$, Ω_n 必定在 E 中稠密. 最后再由 Baire 定理, 即得 G 在 E 中稠密. ■

推论 6.2.5 设 E 是 Banach 空间, F 是赋范空间, $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{B}(E,F)$. 若 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ 逐点收敛到 u, 则 $u \in \mathcal{B}(E,F)$ 并且

$$\|u\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

证明 对任意 $x \in E$, 因 $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ 在 F 中收敛, 故 $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ 在 F 中有界. 从而由 Banach-Steinhaus 定理, 可知 $\sup\limits_n \|u_n\| < \infty$. 记

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \ x \in E.$$

因 u_n 都是线性的, 故 u 也是线性的; 对任意给定的 $x \in E$, 由范数的连续性可得

$$\|u(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \|x\|.$$

故 $u \in \mathcal{B}(E,F)$ 并且

$$\|u\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

推论 6.2.6 设 E, F 都是 Banach 空间, G 是赋范空间, $B : E \times F \to G$ 是一个双线性映射. 若 B 对两个变量分别是连续的, 也就是说: 对任意给定的 $x \in E$, $y \mapsto B(x,y)$ 连续; 对任意给定的 $y \in F$, $x \mapsto B(x,y)$ 连续, 则 B 在 $E \times F$ 上连续[1].

证明 任取 $(x_0, y_0) \in E \times F$, 并设序列 $(x_n) \subset E$ 和 $(y_n) \subset F$ 分别收敛于 x_0 和 y_0. 首先由 B 的线性性, 可得

$$\begin{aligned}\|B(x_n,y_n) - B(x_0,y_0)\| &\leqslant \|B(x_n,y_n) - B(x_n,y_0)\| + \|B(x_n,y_0) - B(x_0,y_0)\| \\ &= \|B(x_n, y_n - y_0)\| + \|B(x_n - x_0, y_0)\|.\end{aligned}$$

由推论假设, $\lim\limits_n \|B(x_n - x_0, y_0)\| = 0$. 故我们仅需证明 $\lim\limits_n \|B(x_n, y_n - y_0)\| = 0$.

对任意 $y \in F$, 定义

$$B_n(y) = B(x_n, y), \quad n \geqslant 1.$$

[1]乘积空间中的范数 $E \times F$ 定义为 $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

由 B 满足的条件, 可知 $(B_n)\subset\mathcal{B}(F,G)$; 并且当 $n\to\infty$ 时, 我们有 $B_n(y)\to B(x_0,y)$. 根据 Banach-Steinhaus 定理, 可得 $\sup\limits_n\|B_n\|<\infty$. 因此, 当 $n\to\infty$, 我们有

$$\|B(x_n,y_n-y_0)\|=\|B_n(y_n-y_0)\|\leqslant\sup_n\|B_n\|\|y_n-y_0\|\to 0.$$

推论得证. ■

注 6.2.7 设 E,F 都是 Banach 空间, G 是赋范空间, $B:E\times F\to G$ 是双线性映射. 容易证明下面的命题等价:

(1) B 在 $E\times F$ 上连续.

(2) B 在 $E\times F$ 上一点连续.

(3) B 在 $E\times F$ 的原点处连续.

(4) 存在一个常数 $C\geqslant 0$, 使得对所有的 $(x,y)\in E\times F$, 有

$$\|B(x,y)\|\leqslant C\|x\|\|y\|.$$

Banach-Steinhaus 定理在 Fourier 分析中的应用

设 $f\in C_{2\pi}$, 其 Fourier 级数为

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

相应的 n 次部分和为

$$S_n(f)(t)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}=\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-x)}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

若记

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}},\quad n\in\mathbb{N},$$

则有

$$S_n(f)(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(t-x)\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

我们称 D_n 为 *Dirichlet* 核.

对任意 $f\in C_{2\pi}$ 和 $t\in\mathbb{R}$, $(S_n(f)(t))_{n\geqslant 1}$ 不一定收敛到 $f(t)$. 下面定理告诉我们: 其实对给定的 $t\in\mathbb{R}$, 有 "很多" $f\in C_{2\pi}$, 使得 $(S_n(f)(t))_{n\geqslant 1}$ 发散.

定理 6.2.8 设集合 $G=\left\{f\in C_{2\pi}:\sup\limits_n|S_n(f)(0)|=\infty\right\}$. 则 G 是 $C_{2\pi}$ 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

证明 首先对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$u_n : C_{2\pi} \to \mathbb{C},\ f \mapsto S_n(f)(0).$$

容易验证 u_n 是 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函, 并且

$$|u_n(f)| \leqslant \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \|f\|_\infty \|D\|_{L^1_{2\pi}}.$$

因此 $u_n \in \mathcal{B}(C_{2\pi}, \mathbb{C}) = C^*_{2\pi}$ 且 $\|u_n\| \leqslant \|D_n\|_{L^1_{2\pi}}$. 实际上, 我们进一步可以证明 $\|u_n\| = \|D_n\|_{L^1_{2\pi}}$. 事实上, 设 $\varepsilon > 0$, 类似推论 3.3.15(2) 中的证明, 我们可以构造连续仿射函数 $g \in C_{2\pi}$ 使得 $g(x) = 1$, 如果 $D_n(x) > 0$; $g(x) = -1$, 如果 $D_n(x) < 0$. 并且 g 在包含 D_n 零点的小区间内取值于 $[-1, 1]$. 因为 $D_n(x)$ 的零点为可数个, 所以我们记 I 为这些包含零点的小区间的并, 并且可假设 $|I| < \frac{\varepsilon}{2n+1}$. 那么我们有

$$\begin{aligned}
|u_n(g)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) g(x) \mathrm{d}x \right| \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} |D_n(x)| \mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi} \int_I |D_n(x)| \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} |D_n(x)| \mathrm{d}x - \frac{2}{2\pi} \int_I |D_n(x)| \mathrm{d}x \\
&\geqslant \|D_n\|_{L^1_{2\pi}} - \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{2n+1} (2n+1) = \|D_n\|_{L^1_{2\pi}} - \frac{\varepsilon}{\pi}.
\end{aligned}$$

因为 $\|g\|_\infty = 1$, 所以 $\|u_n\| \geqslant \|D_n\|_{L^1_{2\pi}}$.

因此, 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right|}{\sin \frac{x}{2}} \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \frac{|\sin \pi t|}{t+k} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^1 |\sin \pi t| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k} \mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_0^1 |\sin \pi t| \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

于是当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} \to \infty$. 故根据定理 6.2.4, G 是 $C_{2\pi}$ 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集. ■

§6.3 开映射和闭图像定理

我们首先回顾开映射的定义 (见定义 1.2.11). 设 E, F 是两个拓扑空间, 若映射 $u: E \to F$ 总是把 E 中开集仍然映射为 F 中开集, 则称 u 为开映射.

定理 6.3.1 (开映射定理) 设 E 和 F 都是 Banach 空间, $u \in \mathcal{B}(E, F)$. 若像集 $u(E)$ 不是 F 中的贫集, 则

(1) 存在 $r > 0$, 使得 $rB_F \subset u(B_E)$, 这里 B_E 和 B_F 分别是 E 和 F 中的开单位球. 并由此可得 u 是满射, 即 $u(E) = F$.

(2) u 是开映射.

证明 (1) 因 B_E 是赋范空间 E 中的单位球, 故有

$$E = \bigcup_{n \geqslant 1} nB_E.$$

那么

$$u(E) = \bigcup_{n \geqslant 1} u(nB_E) \subset \bigcup_{n \geqslant 1} \overline{u(nB_E)}.$$

因为 $u(E)$ 不是 F 中的贫集, 所以

$$\left(\bigcup_{n \geqslant 1} \overline{u(nB_E)} \right)^\circ \neq \varnothing.$$

由于 F 是 Baire 空间, 则存在某个 $n \geqslant 1$, 使得 $\left(\overline{u(nB_E)} \right)^\circ \neq \varnothing$. 于是有某个 $y_0 \in F$ 及 $\eta > 0$, 使得

$$y_0 + \eta B_F \subset \overline{u(nB_E)}.$$

而且由于 $y_0 \in \overline{u(nB_E)}$ 以及 u 是线性的, 我们有

$$\eta B_F \subset \overline{u(nB_E)} - y_0 \subset \overline{u(nB_E)} - \overline{u(nB_E)} \subset \overline{u(2nB_E)}.$$

仍然由 u 的线性性, 可得 $B_F \subset \overline{u(cB_E)}$, 这里 $c = \frac{2n}{\eta}$. 由此可知, 当我们任取 $y \in B_F$, 必存在 $x_0 \in cB_E$, 使得

$$\|y - u(x_0)\| < \frac{1}{2}.$$

若设 $y_1 = 2[y - u(x_0)]$, 则 $\|y_1\| < 1$, 即 $y_1 \in B_F$. 于是又存在 $x_1 \in cB_E$, 同样使得

$$\|y_1 - u(x_1)\| < \frac{1}{2}.$$

我们再令 $y_2 = 2[y_1 - u(x_1)]$, 如上讨论, 可得一列 $(y_n)_n \subset B_F$ 及相应的 $(x_n)_n \subset cB_E$, 使得

$$\|y_n - u(x_n)\| < \frac{1}{2}, \ \ n \geqslant 1.$$

由以上构造过程, 可得

$$\begin{aligned}
y &= u(x_0) + \frac{1}{2}y_1 = u(x_0) + \frac{1}{2}\left[u(x_1) + \frac{1}{2}y_2\right] = \cdots \\
&= u(x_0) + \frac{1}{2}u(x_1) + \cdots + \frac{1}{2^n}u(x_n) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1} \\
&= u\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

注意到级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n}x_n$ 绝对收敛并且 E 完备, 可知该级数收敛于某一点 $x \in E$, 并且

$$\|x\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}\|x_n\| < 2c,$$

即有 $x \in 2cB_E$. 对 (6.1) 式当 $n \to \infty$ 时求极限, 由于 u 是连续的以及 $y_n \in B_F$, 可得 $y = u(x)$. 故 $B_F \subset u(2cB_E)$, 即有 $rB_F \subset u(B_E)$, 这里 $r = \frac{1}{2c}$.

由以上结论, 可得

$$F = \bigcup_{n\geqslant 1} nB_F = \bigcup_{n\geqslant 1}\frac{n}{r}rB_F \subset \bigcup_{n\geqslant 1}\frac{n}{r}u(B_E) = u\left(\bigcup_{n\geqslant 1}\frac{n}{r}B_E\right) = u(E),$$

故 $u\colon E \to F$ 是满射.

(2) 设 O 是 E 中的开子集, 我们需要证明 $u(O)$ 也是 F 中的开子集. 任取 $y_0 \in u(O)$, 则有 $x_0 \in O$, 使 $y_0 = u(x_0)$. 由向量空间的平移性质及 u 的线性性, 我们不妨假设 $x_0 = 0$, 相应地, $y_0 = 0$. 因 O 是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\varepsilon B_E \subset O$, 从而 $u(\varepsilon B_E) \subset u(O)$. 由 (1) 中结论, 可知存在 $r > 0$, 使得 $\varepsilon r B_F \subset u(\varepsilon B_E) \subset u(O)$, 故 $u(O)$ 是开集. ■

推论 6.3.2 (开映射定理) 设 E 和 F 都是 Banach 空间, $u \in \mathcal{B}(E,F)$ 是满射, 则 u 是开映射并且存在 $r > 0$, 使得 $rB_F \subset u(B_E)$.

证明 因为 $u(E) = F$ 而 F 是 Banach 空间, 所以由 Baire 定理知 $u(E)$ 是 Baire 空间, 当然不是贫集, 由上一定理即得证. ■

建立在开映射定理上, 我们立即有如下结论:

推论 6.3.3 设 E 和 F 都是 Banach 空间, $u: E \to F$ 是连续的线性双射, 则 u^{-1} 也是连续的, 即 u 是同构映射.

下面我们给出图像的定义.

定义 6.3.4 设 E, F 是两个拓扑空间, $u: E \to F$ 为映射, 我们称集合

$$G(u) = \{(x,y): \ x \in E, \ y = u(x)\} = \{(x,u(x)): \ x \in E\}$$

为 u 的图像.

定理 6.3.5 (闭图像定理) 设 E 和 F 都是 Banach 空间, $u: E \to F$ 是线性映射, 则 u 连续当且仅当图像 $G(u)$ 是闭的.

证明 充分性. 由于 E 和 F 都是 Banach 空间, 则 $E \times F$ 也是 Banach 空间. 容易验证 $G(u)$ 是 $E \times F$ 的向量子空间, $G(u)$ 是闭的意味着它是 $E \times F$ 的闭向量子空间, 故 $G(u)$ 也是 Banach 空间. 我们考虑线性映射:

$$\Phi: G(u) \longrightarrow E,$$
$$(x,u(x)) \mapsto x.$$

则 Φ 是 $G(u)$ 到 E 的连续线性映射而且 $\|\Phi\| \leqslant 1$, 并且 Φ 是双射. 根据开映射定理可知, Φ 是开映射, 也就是说 Φ^{-1} 是连续的线性映射. 那么对任意 $x \in E$, 有

$$\|u(x)\| \leqslant \|\Phi^{-1}(x)\| \leqslant \|\Phi^{-1}\|\|x\|.$$

故 u 连续.

必要性. 假设 $G(u)$ 中的一列元素 $(x_n, u(x_n))$ 收敛到 $(x,y) \in E \times F$, 则 $x_n \to x$ 且 $u(x_n) \to y$. 因 u 连续, 故也有 $u(x_n) \to u(x)$, 因而 $y = u(x)$. 所以 $G(u)$ 是闭集. ■

开映射定理在 Fourier 级数理论中的应用

由定理 5.2.13, 知 Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 是从 $L^1_{2\pi}$ 到 $c_0(\mathbb{Z})$ 的单射. 我们现证明它不是满射.

定理 6.3.6 Fourier 变换 $\mathcal{F}: L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ 不是满射.

证明 假设 $\mathcal{F}$ 是满射. 因 $c_0(\mathbb{Z})$ 是 Banach 空间, 故由推论 6.3.3 知 $\mathcal{F}$ 是同构映射. 那么存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|f\|_{L^1_{2\pi}} \leqslant c\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = c\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|, \quad \forall f \in L^1_{2\pi}.$$

特别地, 当 f 是 Dirichlet 核 D_n 时, 有

$$\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} \leqslant c, \quad \forall n \geqslant 1.$$

然而在定理 5.2.13 的证明中我们已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\|_{L^1_{2\pi}} = +\infty$, 故得到矛盾, 从而假设不成立, 则定理结论得证. ■

在补空间问题中的应用

定义 6.3.7 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, X 和 Y 是 E 的两个向量子空间. 若 $X + Y = E$ 且 $X \cap Y = \{0\}$, 则称 X 和 Y 在 E 中是代数互补的.

注 6.3.8 (1) 若 X 和 Y 在 E 中代数互补, 则任取 $e \in E$, 存在 $(x, y) \in X \times Y$, 使得 $e = x + y$. 并且由 $X \cap Y = \{0\}$, 可得此二元组 (x, y) 唯一. 事实上, 假设还有 $e = x' + y'$, 则 $x - x' = y' - y$, 而 $x - x' \in X$, $y - y' \in Y$. 那么可得 $x - x' = y' - y = 0$, 即 $x = x'$ 且 $y = y'$.

(2) 定义投影 $P_X : E \to X, e \mapsto x$ 及 $P_Y : E \to Y, e \mapsto y$, $e = x + y$ 如上. 则 P_X 和 P_Y 有如下性质:

- P_X 和 P_Y 都是线性的.
- $P_X^2 = P_X$, $P_Y^2 = P_Y$.
- $P_X + P_Y = \mathrm{I}_E$.

定义 6.3.9 设 E 是赋范空间, X 和 Y 是 E 中代数互补子空间. 若 P_X 是连续的, 则称 X 和 Y 在 E 中*拓扑互补* (由 $P_Y = \mathrm{I}_E - P_X$, 可知这时 P_Y 也连续).

定理 6.3.10 *设 E 是赋范空间, X 和 Y 是 E 中的代数互补子空间. 则下面的两个命题等价:*

(1) X 和 Y 拓扑互补.

(2) 映射 $\Phi : X \times Y \to E, (x, y) \mapsto x + y$, 是同构映射[1].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 因 X 和 Y 在 E 中代数互补, 故 Φ 是 $X \times Y$ 到 E 的线性双射. 并且

$$\|\Phi((x, y))\| = \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

这意味着 Φ 是 $X \times Y$ 到 E 的连续线性映射. 由 X 和 Y 拓扑互补, 可知

$$\|x\| = \|P_X(x + y)\| \leqslant \|P_X\| \|x + y\| \text{ 且 } \|y\| \leqslant \|P_Y\| \|x + y\|.$$

[1]乘积空间 $X \times Y$ 上的范数定义为 $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

那么可得

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \leqslant (\|P_X\| + \|P_Y\|)\|x+y\|,$$

故 $\varPhi$ 是同构映射.

(2) $\Rightarrow$ (1). 任取 $e = x + y \in E$. 因 $\varPhi$ 是同构映射, 故有

$$\|(x,y)\| = \left\|\varPhi^{-1}(e)\right\| \leqslant \|\varPhi^{-1}\|\|x+y\|.$$

注意到 $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$, 则由上式可得

$$\|P_X(e)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|\varPhi^{-1}\|\|(x,y)\|.$$

故 P_X 连续, 从而 P_Y 也连续. ■

注 6.3.11 以上定理的结论意味着: 若 X 和 Y 在 E 中拓扑互补, 则在同构意义下

$$E \cong X \times Y \cong X \oplus Y.$$

这里 $\oplus$ 表示 E 的赋范子空间 X 与 Y 的直和运算, 即对任意 $e \in E$, 存在唯一的 $(x,y) \in X \times Y$, 使得 $e = x + y$; 而且存在常数 $c > 0$ 和 $C > 0$ 使得

$$c(\|x+y\|) \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant C(\|x+y\|),\ \ (x,y) \in X \times Y.$$

推论 6.3.12 *设 E 是 Banach 空间, X 和 Y 在 E 中代数互补. 则 X 和 Y 在 E 中拓扑互补的充分必要条件是 X 和 Y 都是 E 中的闭集.*

证明 必要性. 只需注意到 $X = \mathrm{ker}P_Y$ 且 $Y = \mathrm{ker}P_X$ 即证.

充分性. 首先因 X 和 Y 是 Banach 空间 E 的闭向量子空间, 故 $X \times Y$ 也是 Banach 空间. 因 X 和 Y 代数互补, 映射

$$\varPhi : X \times Y \to E, (x,y) \mapsto x + y$$

是线性双射; 另外, 由 $X \times Y$ 的范数的定义, $\varPhi$ 显然有界 ($\|\varPhi\| \leqslant 1$). 故根据开映射定理, $\varPhi^{-1}$ 也连续, 因此 $\varPhi$ 是同构映射. 从而 X 和 Y 在 E 中拓扑互补. ■

定义 6.3.13 设 E 是赋范空间. 称 $X \subset E$ 为 E 的可余子空间, 若存在向量子空间 $Y \subset E$, 使得 X 与 Y 在 E 中拓扑互补.

上面的讨论说明 E 的闭向量子空间 X 是可余的当且仅当存在一个从 E 到 X 上的连续线性投影算子.

注 6.3.14 判断 X 是不是 E 的可余子空间并不是一件容易的事情. 下面是一些关于可余子空间的结论:

(1) 每一个 Hilbert 空间的闭向量子空间是可余子空间 (见定理 4.2.5).

(2) 若赋范空间 E 的每个闭向量子空间是可余子空间, 则 E 同构于一个 Hilbert 空间 (Lindenstrauss-Tzafriri 定理).

(3) 设 E 是 Banach 空间. E 的每个有限维或有限余维的向量子空间 X 是可余子空间 (见习题八, 14). 称 X 为有限余维的, 若商空间 E/X 是有限维的.

习 题 六

1. (a) 证明: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathcal{G}_\delta$ 集. 并导出 $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 且不存在函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{Cont}(f) = \mathbb{Q}$.

(b) 定义函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: 当 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 时, 令 $f(x) = 0$; $f(0) = 1$; 若 x 是非 0 的有理数 $\frac{p}{q}$, 这里 $\frac{p}{q}$ 是 x 的不可约形式, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, 令 $f(x) = \frac{1}{q}$. 证明: $\mathrm{Cont}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) 设 $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. 证明: f 不是第一纲的 (即 f 不是任一连续函数列的极限函数), 但是存在一列第一纲的函数逐点收敛到 f.

2. 证明: 局部紧的 Hausdorff 空间是 Baire 空间.

3. (a) 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是可微函数. 证明: $\mathrm{Cont}\,(f')$ 是 $\mathbb{R}$ 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

(b) 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 连续且在 $\mathbb{R}^2$ 上存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 证明: f 的可微点包含 $\mathbb{R}^2$ 中一个稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

4. 证明: 完备度量空间中的任何一个可数子集至少含有一个孤立点.

5. 考虑空间 $E = C([0,1], \mathbb{R})$, 其上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$. 设 A 是 E 中无处可导的函数构成的子集, 并记 $B = E \setminus A$. 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 令

$$F_n = \big\{ f \in E : \exists x \in [0,1] \text{ 使得 } \forall y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leqslant n|x - y| \big\}.$$

(a) 证明: $B \subset \bigcup\limits_{n \geqslant 1} F_n$.

(b) 证明: F_n 是闭集.

(c) 设 $f \in F_n$, $r > 0$.

(i) 解释为什么存在一个多项式 P, 使得

$$\|f - P\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

(ii) 设 $M = \|P'\|_\infty$, 并选择整数 N 使得 $rN \geqslant 2(M + n + 1)$. 定义周期

为 $\frac{1}{N}$ 的函数 g 如下: g 在 $[0,\frac{1}{2N}]$ 和 $[\frac{1}{2N},\frac{1}{N}]$ 上是线性函数, 且

$$g(0)=g\left(\frac{1}{N}\right)=0,\quad g\left(\frac{1}{2N}\right)=\frac{r}{4}.$$

令 $h=P+g$. 证明:

$$h\in B(f,r) \text{ 但 } h\notin F_n.$$

(iii) 由此导出 F_n 内部为空.

(d) 最终导出 A 包含一个稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

6. 设 E 和 F 都是 Banach 空间, (u_n) 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 的序列. 证明下列命题等价:

(a) $(u_n(x))$ 在每个 $x\in E$ 处收敛.

(b) $A\subset E$ 且 $\mathrm{span}(A)$ 在 E 中稠密, $(u_n(a))$ 在每个 $a\in A$ 处收敛, 且 (u_n) 有界.

7. 考虑空间 $E=(C([0,1]),\mathbb{R})$, 其上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$. 定义 $(C([0,1]))^*$ 中的连续泛函序列 (u_n) 如下

$$u_n(f)=n\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(a) 证明: 如果 f 是 Lipschitz 函数, 则

$$\frac{u_n(f)}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ 当 } n\to\infty.$$

(b) 证明: $\|u_n\|=2n$.

(c) 由此导出集合

$$\left\{f\in E:\frac{u_n(f)}{n}\neq O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

是 $C([0,1])$ 中稠密的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

8. 设 E 是 $(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ 的闭向量子空间, 并假设 E 中的元素都是 Lipschitz 函数.

(a) 设 $x,y\in[0,1]$ 且 $x\neq y$, 定义泛函 $\Phi_{x,y}:E\to\mathbb{R}$ 为

$$\Phi_{x,y}(f)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

证明: $\{\Phi_{x,y}\ :\ x,y\in[0,1],x\neq y\}$ 是 E^* 中的有界集.

(b) 导出 E 中闭单位球在 $[0,1]$ 上等度连续, 且 $\dim E<\infty$.

9. 设 E 是 Banach 空间, $u, v \in \mathcal{B}(E)$. 证明: 如果 $u(E) \subset v(E)$, 那么存在常数 $k \geqslant 0$, 使得对任意 $x \in E$, 存在 $y \in E$, 使得 $\|y\| \leqslant k\|x\|$ 且 $u(x) = v(y)$.

10. 设 E, F 都是 Banach 空间, $u \in \mathcal{B}(E, F)$ 并满足 $u(B_E)$ 在 B_F 中稠密.

(a) 计算 $\|u\|$.

(b) 证明: $u(B_E) = B_F$. 因此 u 是满射.

(c) 设 $v \in B(E/\ker u, F)$ 并满足 $v \circ q = u$, 这里 $q : E \to E/\ker u$ 是商映射. 证明: v 是从 $E/\ker u$ 到 F 上的等距映射.

11. 设 X 是度量空间, Y 是 X 的闭子空间. 本习题将证明 Y 上的每个连续实函数 f 可以被延拓成 X 上的连续实函数, 也就是说: 当定义限制映射 $q : C(X, \mathbb{R}) \to C(Y, \mathbb{R})$ 为

$$q(g) = g\big|_Y, \ g \in C(X, \mathbb{R}),$$

则 q 是满射. 以下记 $E = C_b(X, \mathbb{R})$, 它表示 X 上所有有界连续实函数构成的 Banach 空间, 其上装备一致范数 $\|\cdot\|_\infty$, 并记 $F = C_b(Y, \mathbb{R})$.

(a) 设 $f \in F$ 且 $\|f\|_\infty = 1$, 并记 $A = \{y \in Y : f(y) \geqslant \frac{1}{3}\}$ 及 $B = \{y \in Y : f(y) \leqslant -\frac{1}{3}\}$. 我们定义 (约定 $d(x, \varnothing) = 1$)

$$g(x) = \frac{d(x, B) - d(x, A)}{3\,[d(x, B) + d(x, A)]}, \quad x \in X.$$

证明: $\|q(g) - f\|_\infty \leqslant \frac{2}{3}$.

(b) 证明: 任取 $f \in F$, 存在 $g \in E$, 使得

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}\,\|f\|_\infty \text{ 且 } \|q(g) - f\|_\infty \leqslant \frac{2}{3}\,\|f\|_\infty.$$

(c) 证明: 任取 $f \in F$, 存在 $g \in E$, 使得 $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ 且 $q(g) = f$.

(d) 设 $f \in F$ 满足对任意 $y \in Y$, 有 $|f(y)| < 1$. 证明: 存在 $g \in E$, 使得 $q(g) = f$ 且对任意 $x \in X$, 有 $|g(x)| < 1$.

(e) 证明: q 是满射.

12. 证明: Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 作用在 $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 上的像集不等于 $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

13. (a) 设 E 是赋范空间, F 是 E 的向量子空间. 证明: 若 $F \neq E$, 则 F 在 E 中的内部是空集.

(b) 由此证明所有的多项式构成的空间不能赋予完备范数.

14. 设 E 是 Banach 空间, F 和 G 都是 E 的闭向量子空间, 并且 $F + G$ 也是闭向量子空间. 证明: 存在一个常数 $C \geqslant 0$, 使得 $\forall x \in F + G$, $\exists (f, g) \in F \times G$, 满足

$$x = f + g, \|f\| \leqslant C\|x\|, \|g\| \leqslant C\|x\|.$$

15. 设 H 是 Hilbert 空间, 且线性映射 $u: H \to H$ 满足

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle, \forall x, y \in H.$$

证明: u 连续.

16. 设 $X = C^1([0,1], \mathbb{R})$, 即由 $[0,1]$ 上有连续可导的函数构成的集合, 其上赋予连续一致范数 $\|\cdot\|_\infty$, 并设 $Y = C([0,1], \mathbb{R})$, 其上也赋予一致范数. 考虑映射 $u: X \to Y$, $u(f) = f'$.

证明: u 的图像是闭的, 但 u 不连续. 解释该结论的意义.

17. 设 E, F 是 Banach 空间, $u: E \to F$ 是线性映射.

(a) 设 G 是一个 Hausdorff 空间, $v: F \to G$ 是连续单射. 证明: u 连续当且仅当 $v \circ u$ 连续.

(b) 由此导出: u 连续等价于当 F 上的拓扑换成更弱的 Hausdorff 拓扑时, u 连续.

18. 设 E 是可分 Banach 空间且 $E \neq \{0\}$, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 是单位球 B_E 中的稠密序列.

(a) 证明: 存在 $u \in \mathcal{B}(\ell_1, E)$, 使得

$$u((a_n)_{n\geqslant 1}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n.$$

(b) 证明: u 作用在 ℓ_1 的开单位球上的像集为 B_E. 试问: u 作用在 ℓ_1 的闭单位球上的像集是什么?

(c) 令 $1 < p < \infty$.

(i) 证明: 存在一个连续线性满射 $u: \ell_1 \to \ell_p$.

(ii) 证明: 不存在任何连续线性映射 $v: \ell_p \to \ell_1$ 使得 $u \circ v$ 等于 ℓ_p 上的恒等映射.

(iii) 证明: ℓ_1 中不存在任何闭向量子空间 F 使得 $F \oplus \ker u = \ell_1$.

19. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ–有限的测度空间.

(a) 假设当 $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ 时, 有 $L_q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$. 证明: 存在常数 $C \geqslant 0$, 使得对任意 $f \in L_q(X, \mathcal{A}, \mu)$, 有 $\|f\|_p \leqslant C\|f\|_q$.

(b) 导出以下命题的等价性:

(i) 存在 $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, 使得 $L_q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(ii) $\mu(X) < \infty$.

(iii) 任取 $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, 有 $L_q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

20. 设 E 是 Banach 空间. 称 p 是 E 上的半范数, 若 p 满足除了正定性以外其他所有的范数公理 (即由 $p(x) = 0$ 不一定能得到 $x = 0$). 假设 p 还是 σ–次可

加的:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 在 } E \text{ 中收敛 } \Longrightarrow p\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \leqslant \infty.$$

证明: p 是连续的, 也就是说, 存在常数 $M \geqslant 0$, 使得 $p(x) \leqslant M\|x\|$, $\forall x \in E$. 从上面这个结论导出 Banach-Steinhaus 定理、开映射定理和闭图像定理:

(a) Banach-Steinhaus 定理: 令 $p(x) = \sup\limits_{i \in I} \|u_i(x)\|$.

(b) 开映射定理: 设 $u: E \to F$ 是连续线性映射, 取

$$p(y) = \inf\{\|x\| : u(x) = y\},\ y \in F.$$

(c) 闭图像定理: 令 $p(x) = \|u(x)\|$.

21. 本习题是为了构造一个具体的函数 $f \in C_{2\pi}$, 使其满足 $S_N(f)(0)$ 发散.

(a) 令

$$G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

证明: 存在常数 $C > 0$ 使得对所有的 $N \geqslant 1$, 有 $\|G_N\|_\infty \leqslant C$.

(b) 设 $(n_k)_{k\geqslant 1}$ 是一列正整数, $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ 是一列正实数, 使得

$$\inf_{k\geqslant 1} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 3, \quad \sum_{k\geqslant 1} \alpha_k < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k \log n_k = \infty.$$

试给出满足以上条件的序列 $(n_k)_{k\geqslant 1}$ 和 $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ 的例子. 令

$$P_k(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n_k x} \sum_{n=1}^{n_k} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(i) 证明: 级数 $\sum\limits_{k\geqslant 1} \alpha_k P_k(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 其和记为 f.

(ii) 证明:

$$S_{2n_k}(f)(0) = -\frac{\alpha_k}{2\mathrm{i}} \sum_{n=1}^{n_k} \frac{1}{n}.$$

(iii) 由此导出: 当 $k \to \infty$ 时, 有 $S_{2n_k}(f)(0) \to \infty$.

22. 设 $X = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有有界连续函数构成的空间, 其上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$. 对任意 $f \in X$ 和 $t, x \in \mathbb{R}$, 定义 $f_t(x) = f(x+t)$. 并设 $O(f) = \{f_t : t \in \mathbb{R}\}$. 注意 $O(f)$ 是 X 的子集, 其上的拓扑由范数 $\|\cdot\|_\infty$ 诱导.

本习题的目标是证明下面三个等价性命题:

$$O(f) \text{ 是可分的当且仅当 } f \text{ 一致连续;}$$

$O(f)$ 是紧的当且仅当 f 是周期函数;

$O(f)$ 是预紧的当且仅当 f 是概周期函数.

依此, 我们要完成三个部分的内容.

第一部分

(a) 设 $f \in X$, 定义映射 $\Phi : \mathbb{R} \to X$ 为 $\Phi(t) = f_t$. 证明下面的命题等价:

(i) f 一致连续.

(ii) Φ 一致连续.

(iii) Φ 在 0 处连续.

(b) 假设 f 一致连续. 证明 $\Phi(\mathbb{Q})$ 在 $O(f) = \Phi(\mathbb{R})$ 中稠密. 由此导出 $O(f)$ 可分.

(c) 现在假设 $O(f)$ 是可分的. 设实数列 $(t_n)_{n\geqslant 1}$ 使得 $(f_{t_n})_{n\geqslant 1}$ 在 $O(f)$ 中稠密. 固定 $\varepsilon > 0$, 并设

$$F_n = \{t \in \mathbb{R} : \|f_t - f_{t_n}\|_\infty \leqslant \varepsilon\}.$$

证明 F_n 是 $\mathbb{R}$ 中的闭子集, 且 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} F_n = \mathbb{R}$.

由此导出存在 $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ 以及 $h > 0$, 使得 $[a, a+h] \subset F_n$.

证明 f 一致连续.

(d) 给一个 X 中的例子 f, 使得 $O(f)$ 不可分.

第二部分

(a) 假设 f 是周期函数. 证明 $O(f)$ 是紧的.

在这一部分接下来的命题中, 我们假设 $O(f)$ 是紧的但 f 不是周期函数.

(b) 证明 f 一致连续并且 Φ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $O(f)$ 上的连续双射.

(c) 证明存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\Phi([-n, n])$ 是 $O(f)$ 的内部非空的闭子集. 并由此导出对任意 $s \in \mathbb{R}$, f_s 属于 $\Phi([s-2n, s+2n])$ 的内部.

(d) 由 $O(f)$ 的紧性得到矛盾.

第三部分

称 t 是 f 的 ε–周期, 若有 $\|f - f_t\|_\infty < \varepsilon$. 称 f 是概周期函数, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\ell > 0$, 使得 $\mathbb{R}$ 中每个长度为 ℓ 的区间包含 f 的一个 ε–周期.

(a) 证明若 $O(f)$ 是预紧的, 则 f 是概周期的.

(b) 假设 f 是概周期的. 证明 f 一致连续, 进而 $O(f)$ 是预紧的.

第七章 拓扑向量空间

顾名思义, 拓扑向量空间 (或称向量拓扑空间) 上有两个基本的结构, 一个是拓扑结构, 另一个是 (实或复) 线性的代数结构; 并且我们需要这两种结构是相容的, 也就是加法和数乘这两种线性运算关于该空间上的拓扑是连续的. Hilbert 空间和 Banach 空间上自然产生相应的距离拓扑, 显然它们是拓扑向量空间, 故可以说拓扑向量空间是这些空间的推广. 但是分析学中产生的许多空间并不能纳入赋范空间这个框架, 典型的例子如无穷可微函数空间, Schwartz 函数空间以及复分析里定义在开子集上所有的全纯函数构成的空间等. 在一个向量空间上定义一个相容的拓扑, 最常用的方式是由一族半范数来诱导, 这个拓扑是局部凸的. 在 Banach 空间和它的对偶空间上, 我们正是由其上的连续线性泛函产生相应的半范数族, 进而诱导出弱拓扑和弱 * 拓扑这些概念, 这些内容将放在接下来的两章中讨论.

本章的内容实际上是两大部分, 第一部分 (包括 §7.1) 是关于拓扑向量空间的基本定义和一般性质, 充分体现了拓扑性质和代数性质的有机结合; 第二部分 (包括 §7.2—§7.4) 主要考虑局部凸拓扑向量空间, 这可以说是拓扑向量空间中最重要的类型. 在 §7.2, 我们用一族半范数诱导一个局部凸拓扑. 在 §7.3, 我们反过来从凸性出发, 证明了这种局部凸拓扑必由一族半范数诱导, 因此局部凸拓扑向量空间和对应的半范数向量空间等价. §7.4 我们将给出一些分析学中常见的局部凸拓扑向量空间的例子.

§7.1 定义和基本性质

定义 7.1.1 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, τ 是 E 上的拓扑. 若映射

$$\varPhi:\begin{cases} E\times E \longrightarrow E \\ (x,\,y) \longmapsto x+y \end{cases} \quad \text{和} \quad \varPsi:\begin{cases} \mathbb{K}\times E \longrightarrow E \\ (\lambda,\,x) \longmapsto \lambda x \end{cases}$$

连续 (即 E 上的拓扑结构与向量空间的代数结构相容), 则称 E 为拓扑向量空间. 这里, $E\times E$ 和 $\mathbb{K}\times E$ 均赋予乘积拓扑.

例 7.1.2 赋范空间是拓扑向量空间, 比如 $L_p(\varOmega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. 当 $0<p<1$ 时, $L_p(\varOmega)$ 不是赋范空间, 但它是拓扑向量空间.

定理 7.1.3 设 E 是拓扑向量空间. 令 $a \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. 那么 "伸缩平移" 算子 (当 $\lambda = 1$ 时, 即为 "平移" 算子)

$$\tau_{a,\lambda} : E \to E, \ \ x \mapsto \lambda x + a$$

是 E 上的同胚.

证明 我们有 $\tau_{a,\lambda} = \Psi(\lambda, \cdot) \circ \Phi\left(\cdot, \frac{a}{\lambda}\right)$, 因 Φ 和 Ψ 都连续, 故 $\tau_{a,\lambda}$ 是 E 上的连续映射. 又显然 $\tau_{a,\lambda}$ 是可逆的, 其逆映射为 $\tau_{a,\lambda}^{-1} = \tau_{-\lambda^{-1}a, \lambda^{-1}}$, 因此 $\tau_{a,\lambda}^{-1}$ 也是 E 上的连续映射, 故定理得证. ■

定义 7.1.4 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, $A \subset E$.

(1) 若任取 $|\lambda| \leqslant 1$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), 对任意 $x \in A$, 有 $\lambda x \in A$, 那么称 A 是平衡的.

(2) 若对任意 $x \in E$, 存在常数 $\alpha > 0$, 当取 $|\lambda| \leqslant \alpha$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) 时, 有 $\lambda x \in A$, 那么称 A 是吸收的.

注 7.1.5 若 A 是平衡的, 则 A 是对称的, 即 $-A = A$ (若 $x \in A$, 则 $-x \in A$), 并且 $0 \in A$.

定理 7.1.6 设 E 是拓扑向量空间, $A \subset E$. 则

(1) 若 A 是向量子空间 (凸集或平衡集), 则 $\overline{A}$ 也是向量子空间 (凸集或平衡集).

(2) 若 A 是凸集, 则 $\mathring{A}$ 也是凸集.

(3) 若 A 是平衡集且 $0 \in \mathring{A}$, 则 $\mathring{A}$ 也是平衡集.

证明 (1) 令 A 是 E 的向量子空间. 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, 由拓扑向量空间的定义, 可知映射

$$\varphi : E \times E \to E, \ (x, y) \mapsto \lambda x + \mu y \tag{7.1}$$

连续. 因此

$$\varphi(\overline{A} \times \overline{A}) = \varphi(\overline{A \times A}) \subset \overline{\varphi(A \times A)}.$$

同时注意, A 是 E 的向量子空间意味着 $\varphi(A \times A) \subset A$. 由此可得 $\varphi(\overline{A} \times \overline{A}) \subset \overline{A}$, 即 $\overline{A}$ 也是向量子空间.

令 A 是 E 中的凸集. 任取 $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1$, 且满足 $\lambda + \mu = 1$. 我们仍然考虑 (7.1) 中的映射 φ. A 的凸性意味着 $\varphi(A \times A) \subset A$. 运用和上一问题相同的讨论方法可得 $\overline{A}$ 也是凸的.

令 A 是 E 中的平衡集. 设 $|\lambda| \leqslant 1$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), 此时考虑连续映射

$$\Psi : E \to E, \ x \mapsto \lambda x.$$

因 A 是平衡的, $\Psi(A) \subset A$, 如上知结论也成立.

(2) 设 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x, y \in \mathring{A}$, 需证 $(1-t)x + ty \in \mathring{A}$. 首先我们给出一个结论: 若 U 和 V 是 E 中的子集且其一是开的, 则 $U + V$ 也是开集. 事实上我们可以假设 V 是开集, 则

$$U + V = \{x + y : x \in V, y \in U\} = \bigcup_{y \in U} (V + y).$$

因对任一给定的 $y \in E$, $V + y$ 是开集, 故 $U + V$ 也是开集.

由以上结论可知 $(1-t)\mathring{A} + t\mathring{A}$ 是开集. 再由 A 是凸集, 可得

$$(1-t)\mathring{A} + t\mathring{A} \subset (1-t)A + tA \subset A.$$

因此 $(1-t)\mathring{A} + t\mathring{A} \subset \mathring{A}$, 即 $\mathring{A}$ 是凸集.

(3) 设 $|\lambda| \leqslant 1$ ($\lambda \in \mathbb{K}$). 因 A 是平衡集, 故有

$$\lambda\mathring{A} \subset \lambda A \subset A.$$

若 $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda\mathring{A}$ 仍为开集, 故 $\lambda\mathring{A} \subset \mathring{A}$; 若 $\lambda = 0$, 则由 $0 \in \mathring{A}$, 也有 $\lambda\mathring{A} \subset \mathring{A}$. 因此 $\mathring{A}$ 是平衡的. ■

下面定理陈述了拓扑向量空间的一些基本性质. $\mathcal{N}(x)$ 表示 x 点的邻域系.

定理 7.1.7 *设 E 是拓扑向量空间. 则*

(1) 任取 $x \in E$, 则 $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(0) + x$ (即 $V \in \mathcal{N}(x) \Leftrightarrow V - x \in \mathcal{N}(0)$).

(2) 任取 $V \in \mathcal{N}(0)$, 存在 $U \subset \mathcal{N}(0)$, 使得 $U + U \subset V$.

(3) 设 $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $\lambda \neq 0$. 则 $V \in \mathcal{N}(0) \Leftrightarrow \lambda V \in \mathcal{N}(0)$.

(4) 任意 $V \in \mathcal{N}(0)$ 是吸收的.

(5) 原点 0 有平衡的开 (或闭) 邻域基.

证明 (1) 只需利用前面定义的伸缩平移算子 $\tau_{x,1}$, 注意 $\tau_{x,1}$ 是 E 上的同胚映射, 则结论成立.

(2) 因映射 $\Phi : E \times E \to E$ 连续且 $\Phi((0,0)) = 0$, 故对任意 $V \in \mathcal{N}(0)$, 存在 $W \in \mathcal{N}((0,0))$, 使得 $\Phi(W) \subset V$. 由乘积拓扑的构造, 存在 $U_1 \in \mathcal{N}(0)$ 及 $U_2 \in \mathcal{N}(0)$, 使得 $U_1 \times U_2 \subset W$. 令 $U = U_1 \bigcap U_2$, 则也有 $U \in \mathcal{N}(0)$ 且 $U \times U \subset W$. 故得

$$U + U = \Phi(U \times U) \subset \Phi(W) \subset V.$$

(3) 利用同胚映射 $\tau_{0,\lambda}$ 的性质即可.

(4) 任取 $x \in E$, 设映射

$$\Psi_x : \mathbb{K} \to E,\ \lambda \mapsto \lambda x.$$

则 Ψ_x 连续且有 $\Psi(0) = 0$. 那么对任意 $V \in \mathcal{N}(0)$, 存在 $\alpha > 0$, 使得 $\Psi(B_{\mathbb{K}}(0,\alpha)) \subset V$, 也就是当 $|\lambda| < \alpha$ 时, 有 $\lambda x \in V$, 故 $V \in \mathcal{N}(0)$ 是吸收的.

(5) 先证明对任意 $V \in \mathcal{N}(0)$, 存在一个平衡开邻域 $U \in \mathcal{N}(0)$, 使得 $U \subset V$. 因为映射

$$\Psi : \mathbb{K} \times E \to E,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

连续且 $\Psi((0,0)) = 0$, 所以对任意 $V \in \mathcal{N}(0)$, 存在 $B_{\mathbb{K}}(0,\delta)$ 以及开邻域 $V' \in \mathcal{N}(0)$, 使得

$$\Psi(B_{\mathbb{K}}(0,\delta) \times V') \subset V.$$

此即 $\lambda V' \subset V,\ \forall \lambda \in B_{\mathbb{K}}(0,\delta)$. 令

$$U = \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda V' = \bigcup_{|\lambda|<\delta, \lambda\neq 0} \lambda V'.$$

则 $U \subset V$. 由于 $\lambda V'$ $(\lambda \neq 0)$ 是开集, 则 U 也是开集. 若取 $|\mu| \leqslant 1$, 则

$$\mu U = \bigcup_{|\lambda|<\delta} \mu\lambda V' \subset \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda V' = U.$$

故 U 是平衡的. 因此, U 是原点的一个平衡开邻域且 $U \subset V$, 故原点有一个平衡开邻域基.

其次证明对任意 $V \in \mathcal{N}(0)$, 也存在一个平衡闭邻域 $W \in \mathcal{N}(0)$, 使得 $W \subset V$. 因 $V \in \mathcal{N}(0)$, 故由命题 (2) 以及刚才的讨论, 存在一个平衡的开邻域 $U \in \mathcal{N}(0)$, 使得 $U + U \subset V$. 再根据定理 7.1.6 中的命题 (1), 可知 $\overline{U}$ 是原点 0 处的平衡闭邻域. 任取 $x \in \overline{U}$, 则 $x + U \in \mathcal{N}(x)$, 这意味着存在 $y \in U$, 使得 $y \in x + U$. 于是可取 $z \in U$, 使得 $y = x + z$, 即有 $x = y - z$. 由于 U 是平衡的, 也有 $-z \in U$. 那么

$$x = y - z \in U + U \subset V,$$

即有平衡的闭邻域 $W = \overline{U} \subset V$, 故原点有一个平衡闭邻域基. ■

下面定理把赋范空间之间的线性映射的连续性刻画推广到一般的拓扑向量空间情形.

定理 7.1.8 *设 E 和 F 是两个拓扑向量空间, $u : E \to F$ 是线性映射. 则以下命题等价:*

(1) u 是连续映射.

(2) u 在原点连续.

若 F 还是赋范空间, 则以上命题与如下命题等价:

(3) u 在原点的某邻域内有界.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 命题自然成立.

(2) $\Rightarrow$ (1). 由定理 7.1.7 的命题 (1) 和 u 的线性性即可证明. 由此可得命题 (1) 和 (2) 是等价的.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由连续的定义, 结论显然.

(3) $\Rightarrow$ (2). 设 u 在邻域 $V \in \mathcal{N}(0)$ 上有界, 即存在常数 $c > 0$, 使得

$$\sup_{x \in V} \|u(x)\| \leqslant c.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 我们取 $U = \frac{\varepsilon}{c} V$, 则也有 $U \in \mathcal{N}(0)$. 当 $x \in U$ 时, $\|u(x)\| \leqslant \varepsilon$ 成立. 故 u 在原点连续. ■

注 7.1.9 定理 7.1.8 意味着连续线性映射 $u : E \to F$ 是一致连续的, 即对 F 中原点的每个邻域 V, 存在 E 中原点的邻域 W, 使得当 $x - y \in W$ 时, $u(x) - u(y) \in V$.

定义 7.1.10 设 E 和 F 是拓扑向量空间. $\mathcal{B}(E, F)$ 表示所有从 E 到 F 的连续线性映射构成的集合. 当 $E = F$ 时, $\mathcal{B}(E, E)$ 简记为 $\mathcal{B}(E)$.

特别地, 称 $E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ 为 E 的 (拓扑)对偶空间, 其上的元素称为 E 上的连续线性泛函.

推论 7.1.11 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑向量空间, $u : E \to \mathbb{K}$ 是线性泛函. 则以下命题等价:

(1) u 连续.

(2) u 在原点连续.

(3) u 在原点的某邻域内有界.

§7.2 半赋范空间

本节讨论一类特殊的拓扑向量空间, 即半赋范空间. 它们是赋范空间的直接推广.

定义 7.2.1 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, 若 E 上的泛函 $p : E \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) **非负性**: 对每个 $x \in E$, 有 $p(x) \geqslant 0$;

(2) **正齐性**: 对任意 $\lambda \in \mathbb{K}$ 及 $x \in E$, 有 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;

(3) **三角形不等式**: 对任意 $x, y \in E$, 有 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,

则称 p 为 E 上的半范数.

注 7.2.2 设 p 是 E 上的半范数. 我们可以定义相应的 "半距离" 为

$$d_p(x,y) = p(x-y),\ \forall x, y \in E.$$

它显然满足:

(1) $d_p(x,y) \geqslant 0$, 且 $d_p(x,x) = 0$.

(2) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$.

(3) $d_p(x,y) \leqslant d_p(x,z) + d_p(z,y)$.

我们定义相应于半范数 p 的开球:

$$B_p(a,r) = \{x \in E \ :\ p(x-a) < r\},\ \ a \in E, r > 0.$$

称 $B_p(a,r)$ 为一个开 p–球, 其中心为 a, 半径为 r.

有了开球的概念, 我们定义 E 上由半范数 p 诱导的拓扑 τ_p: 若子集 $A \subset E$ 可以表示成 E 中开 p–球的并, 则 A 为 E 中开集. 容易验证所有这样的开集构成的集族的确是 E 上的拓扑, 我们称该拓扑为 E 上的半范数 p 诱导的拓扑或 p–拓扑.

注意, p–拓扑是 Hausdorff 拓扑当且仅当 p 是一个范数. 正是因为单个的半范数诱导的拓扑不一定是 Hausdorff 拓扑, 我们往往从一族半范数出发, 希望诱导出的拓扑是 Hausdorff 拓扑.

设 $(p_i)_{i \in I}$ 是 E 上的一族半范数, I 是指标集. 对任意有限子集 $J \subset I$, 令

$$q_{_J} = \max_{i \in J} p_i.$$

容易验证 q_J 也是 E 上的半范数. 由此, 我们定义如下半范数族诱导的拓扑.

定义 7.2.3 设 $(p_i)_{i \in I}$ 是 E 上的一族半范数. 令 τ 是由 E 中如下的子集组成的子集族: $O \in \tau$ 当且仅当

$$O = \bigcup_{\alpha \in \varLambda} B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha, r_\alpha),$$

其中 $\varLambda$ 为某个指标集, 每个 $J_\alpha \subset I$ 是有限集, 并且 $x_\alpha \in E$, $r_\alpha > 0$. 我们将验证 τ 是 E 上的拓扑, 称为由 $(p_i)_{i \in I}$ 诱导的拓扑.

我们需要说明, 由定义 7.2.3 定义的集族 τ 的确是 E 上的拓扑. 根据拓扑的定义, 我们要验证 τ 关于并运算和有限交运算的封闭性. 并运算的封闭性由定义显而易见, 故只需证明有限交运算的封闭性. 在此, 我们设

$$A=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha,r_\alpha),\quad B=\bigcup_{\beta\in\Lambda'}B_{q_{J_\beta}}(x_\beta,r_\beta).$$

我们证明 $A\cap B$ 也是开集. 首先有

$$A\cap B=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\bigcup_{\beta\in\Lambda'}\Big(B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha,r_\alpha)\bigcap B_{q_{J_\beta}}(x_\beta,r_\beta)\Big).$$

由此可见, 我们仅需证明任意两个开 q_J–球的交是开集即可. 不妨设两个开球分别为

$$B_{q_{J_1}}(x_1,r_1)\quad 和 \quad B_{q_{J_2}}(x_2,r_2).$$

任取一点 $x\in B_{q_{J_1}}(x_1,r_1)\bigcap B_{q_{J_2}}(x_2,r_2)$ (若交集为空集, 则自然是开集). 令

$$r=\min\{r_1-q_{J_1}(x-x_1),r_2-q_{J_2}(x-x_2)\},$$

则 $r>0$. 其次令 $J=J_1\bigcup J_2$, 则 J 是 I 的有限集且 $q_{J_1}\leqslant q_J,q_{J_2}\leqslant q_J$. 现在考虑开球 $B_{q_J}(x,r)$. 设 $y\in B_{q_J}(x,r)$, 则

$$\begin{aligned}q_{J_1}(y-x_1)&\leqslant q_{J_1}(y-x)+q_{J_1}(x-x_1)\leqslant q_J(y-x)+q_{J_1}(x-x_1)\\&<r_1-q_{J_1}(x-x_1)+q_{J_1}(x-x_1)=r_1,\end{aligned}$$

故有 $y\in B_{q_{J_1}}(x_1,r_1)$; 同理 $y\in B_{q_{J_2}}(x_2,r_2)$. 因此,

$$B_{q_J}(x,r)\subset B_{q_{J_1}}(x_1,r_1)\cap B_{q_{J_2}}(x_2,r_2).$$

这证明了交集 $B_{q_{J_1}}(x_1,r_1)\cap B_{q_{J_2}}(x_2,r_2)$ 含有其中任意点的某个开球. 因此, 它属于 τ, 故 τ 是 E 上的拓扑.

注 7.2.4 如果 $(p_i)_{i\in I}$ 本身满足性质: 任取 $i,j\in I$, 存在 $k\in I$, 使得

$$p_k\geqslant\max\{p_i,p_j\},$$

则我们不必定义新的 $(q_J)_{J\subset I}$. 此时, 我们称半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 是定向的. 实际上, 我们之所以由半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 来构造新的半范数族 $(q_J)_{J\subset I}$ (J 为有限集), 正是为了使新的半范数族成为一个定向集. 若 $(p_i)_{i\in I}$ 是定向的, 则用 p_i–球定义的拓扑和用 q_J–球定义的拓扑一致.

注 7.2.5 由半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导的拓扑是 Hausdorff 拓扑当且仅当 $(p_i)_{i\in I}$ 在 E 上是可分点的, 即对任意 $x\in E$ 且 $x\neq 0$, 存在某个 $i\in I$, 使得 $p_i(x)\neq 0$ (等价地, 若 $\sup\limits_{i\in I} p_i(x)=0$, 则 $x=0$).

定理 7.2.6 设 $(p_i)_{i\in I}$ 是向量空间 E 上的半范数族. 那么由 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导的拓扑 τ 与 E 的线性结构相容. 因此, E 成为一个拓扑向量空间, 并且该拓扑是使每个 p_i $(i\in I)$ 都连续并与线性结构相容的拓扑中最弱的拓扑.

证明 首先由拓扑 τ 的构造以及半范数满足三角形不等式和正齐性, 容易验证该拓扑与 E 的线性结构相容. 再来证明每一个 $p_i:(E,\tau)\to\mathbb{R}$ 连续. 事实上, 任取一点 $x_0\in E$ 及 $\varepsilon>0$, 若 $x\in B_{p_i}(x_0,\varepsilon)$, 则有

$$|p_i(x)-p_i(x_0)|\leqslant p_i(x-x_0)<\varepsilon.$$

故 p_i 在 x_0 点连续.

假设 τ' 是 E 上的另一个向量拓扑且对所有的 $i\in I$, 有 $p_i:(E,\tau')\to\mathbb{R}$ 连续. 我们需证明 $\tau\subset\tau'$. 因 τ 和 τ' 均同 E 的线性结构相容, 只需证明 $\mathcal{N}_\tau(0)\subset\mathcal{N}_{\tau'}(0)$.

设 $V\in\mathcal{N}_\tau(0)$, 即 V 是原点关于 τ 的邻域. 则存在某个有限集 $J\subset I$, 使得

$$\bigcap_{i\in J} B_{p_i}(0,\varepsilon)=B_{p_J}(0,\varepsilon)\subset V.$$

而 $B_{p_i}(0,\varepsilon)=p_i^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$. 由于 p_i $(i\in I)$ 也关于拓扑 τ' 连续, 可知 $B_{p_i}(0,\varepsilon)$ 是 τ' 中的开集, 故 $\bigcap\limits_{i\in J} B_{p_i}(0,\varepsilon)$ 也是 τ' 中的开集, 从而得 $V\in\mathcal{N}_{\tau'}(0)$. ■

定义 7.2.7 设 E 是向量空间, $(p_i)_{i\in I}$ 是 E 上的一族半范数, 则称 E 为半赋范空间, 记成 $(E,\ (p_i)_{i\in I})$. 半赋范空间是拓扑向量空间.

若拓扑向量空间 E 的拓扑可由一族半范数诱导, 则称 E 为可半赋范的.

定理 7.2.8 半赋范空间 E 的原点有一组由凸集组成的邻域基.

证明 由半范数拓扑的构造可知所有中心在原点的开球是原点的邻域基, 而所有的开球都是凸的, 定理得证. ■

定理 7.2.9 设 $(E,(p_i)_{i\in I})$ 和 $(F,(q_j)_{j\in J})$ 是两个半赋范空间, $u:E\to F$ 是线性映射. 那么 u 是连续的当且仅当对 J 的任意有限子集 J', 存在 I 的有限子集 I' 及常数 $C>0$, 使得

$$\max_{j\in J'} q_j(u(x))\leqslant C\max_{i\in I'} p_i(x),\quad \forall x\in E.$$

特别地, 如果 F 是赋范空间, 则 u 是连续线性映射当且仅当存在 I 的有限子集 I' 及常数 $C>0$, 使得

$$\|u(x)\| \leqslant C \max_{i\in I'} p_i(x), \quad \forall x \in E.$$

证明 必要性. 由半范数拓扑的构造可知, 若 $J' \subset J$ 是有限子集, 则 $B_{\max\limits_{j\in J'} q_j}(0,1)$ 是 F 中的开球. 那么由 u 的连续性, 可知 $u^{-1}(B_{\max\limits_{j\in J'} q_j}(0,1))$ 是 E 中的开集. 故存在 I 的有限子集 I' 以及 $r>0$, 使得

$$B_{\max\limits_{i\in I'} p_i}(0,r) \subset u^{-1}(B_{\max\limits_{j\in J'} q_j}(0,1)).$$

那么当 $x \in B_{\max\limits_{i\in I'} p_i}(0,r)$, 即 $\max\limits_{i\in I'} p_i(x) < r$ 时, 有 $\max\limits_{j\in J'} q_j(u(x)) < 1$.

接下来, 我们取任意 $x\in E$ 以及 $\delta>0$, 则有

$$\max_{j\in J'} q_j\left(u\left(\frac{r}{\max\limits_{i\in I'} p_i(x)+\delta} x\right)\right) < 1.$$

再由 u 的线性性, 即得

$$\max_{j\in J'} q_j(u(x)) < \frac{\max\limits_{i\in I'} p_i(x)+\delta}{r},$$

令 $\delta \to 0$, 取 $C=\frac{1}{r}$, 则得

$$\max_{j\in J'} q_j(u(x)) \leqslant C \max_{i\in I'} p_i(x).$$

充分性. 我们在 F 中任取 $V\in\mathcal{N}(0)$, 则存在有限集 $J'\subset J$ 及某个常数 $\varepsilon>0$, 使得

$$B_{\max\limits_{j\in J'} q_j}(0,\varepsilon) \subset V.$$

由定理假设, 存在有限集 $I'\subset I$ 及常数 $C>0$, 当取 $r=\frac{\varepsilon}{C}$ 时, 有

$$B_{\max\limits_{i\in I'} p_i}(0,r) \subset u^{-1}(B_{\max\limits_{j\in J'} q_j}(0,\varepsilon)).$$

由此可知在 E 中, $u^{-1}(B_{\max\limits_{j\in J'} q_j}(0,\varepsilon)) \in \mathcal{N}(0)$, 则同样也有 $u^{-1}(V)\in\mathcal{N}(0)$. 故定理得证. ■

半赋范空间的乘积空间 设 $(E,(p_i)_{i\in I})$ 和 $(F,(q_j)_{j\in J})$ 是两个半赋范空间. 令 $K=I\times J$, 并且对任意 $k=(i,j)\in K$, 定义

$$r_k(x,y)=\max\{p_i(x),\ q_j(y)\}, \quad \forall\ (x,y)\in E\times F.$$

那么 $(r_k)_{k\in K}$ 是 $E\times F$ 上的一族半范数. 可以证明, $(r_k)_{k\in K}$ 是可分点的当且仅当 $(p_i)_{i\in I}$ 和 $(q_j)_{j\in J}$ 都是可分点的. 并且 $E\times F$ 上由半范数族 $(r_k)_{k\in K}$ 诱导的拓扑与其上的乘积拓扑一致. 我们把这一部分内容留作练习.

§7.3 局部凸空间

我们在上节中看到可半赋范的拓扑向量空间的原点具有凸邻域基. 这节的主要结果证明其逆命题也成立.

定义 7.3.1 一个拓扑向量空间 E 称为*局部凸空间*, 若它的原点有一组由凸集组成的邻域基.

我们将证明任何局部凸空间都是可半赋范的.

定理 7.3.2 *设 E 是一个局部凸空间, 则其在原点有凸的平衡开 (或闭) 邻域基.*

证明 因 E 是一个局部凸空间, 对任意 $V\in\mathcal{N}(0)$, 存在一个凸邻域 $A\in\mathcal{N}(0)$, 使得 $A\subset V$. 并且根据定理 7.1.7 中的命题 (5), 我们知道有一个平衡邻域 $B\in\mathcal{N}(0)$, 使得 $B\subset A$.

接下来定义集合 B 的凸包 $\operatorname{conv}(B)$ 为 B 中向量的凸组合构成的集合, 即

$$\operatorname{conv}(B)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i : 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1, b_i\in B, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\right\}.$$

B 的凸包也可等价地定义为包含 B 的所有凸集中最小的集合. 记 $U=\operatorname{conv}(B)$. 容易验证, 在 B 为平衡集的前提下, 凸包 U 仍为平衡的. 因 $B\subset A$ 且 A 为凸集, 故

$$U\subset A\subset V.$$

由定理 7.1.6 可得, $\mathring{U}$ 为凸的平衡开邻域, 并且

$$\mathring{U}\subset\operatorname{conv}(B)\subset V.$$

因此, 原点有凸的平衡开邻域基.

另一方面, 我们证原点也有凸的平衡闭邻域基. 我们利用上一部分的证明. 为此, 只需注意到原点有平衡的闭邻域基 (参见定理 7.1.7, 命题 (5)), 故不妨假设上面的 V 为原点的闭邻域. 那么 $\overline{U}\subset V$ 且为原点处凸的平衡闭邻域. 定理得证. ■

为了证明一个局部凸空间可以由一族半范数诱导, 构造下面著名的 Minkowski 泛函是最关键步骤.

Minkowski 泛函 设 E 是拓扑向量空间, Ω 是 E 中原点处的凸平衡开邻域. 我们称泛函 $p_\Omega: E \to \mathbb{R}$,

$$p_\Omega(x) = \inf\left\{\lambda > 0:\ \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$$

为相应于 Ω 的 *Minkowski 泛函*.

注 7.3.3 我们给出几个 Minkowski 泛函的性质:

(1) 设

$$I(x) = \left\{\lambda > 0:\ \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}.$$

若 $\lambda \in I(x)$ 且 $\mu > \lambda$, 则 $\mu \in I(x)$. 事实上, 由于 Ω 是平衡的, 则

$$\frac{x}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{x}{\lambda} \in \Omega.$$

故 $I(x)$ 是以 $p_\Omega(x)$ 为左端点的半直线.

(2) 任取 $\lambda_0 \in I(x)$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$(\lambda_0 - \varepsilon,\ \lambda_0 + \varepsilon) \subset I(x).$$

实际上, 由于映射 $\lambda \mapsto \frac{x}{\lambda}$ 连续, 而 $\frac{x}{\lambda_0} \in \Omega$ 且 Ω 为开集, 故结论成立. 这意味着 $I(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的开区间, 即

$$I(x) = (p_\Omega(x),\ +\infty).$$

由此可知, $p_\Omega(x) < 1$ 等价于 $1 \in I(x)$. 因此 $p_\Omega(x) < 1$ 当且仅当 $x \in \Omega$.

定理 7.3.4 设 E 是一个拓扑向量空间, 设 Ω, Ω_1, Ω_2 都是 E 中原点的凸平衡开邻域. 则有

(1) Minkowski 泛函 $p_\Omega:\ E \to \mathbb{R}$ 是 E 上的半范数, 并有

$$\Omega = \{x \in E:\ p_\Omega(x) < 1\}.$$

(2) 若 $\Omega_1 \subset \Omega_2$, 则 $I_{\Omega_1}(x) \subset I_{\Omega_2}(x)$, 从而 $p_{\Omega_2} \leqslant p_{\Omega_1}$.

(3) 存在 $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, 使得 $p_{\Omega_3} \geqslant \max\{p_{\Omega_1}, p_{\Omega_2}\}$.

证明 (1) 由上面讨论知, $p(x) < 1$ 当且仅当 $x \in \Omega$. 也就是

$$\Omega = \{x \in E:\ p_\Omega(x) < 1\}.$$

故只需证明 $p_\Omega:\ E \to \mathbb{R}$ 是 E 上的半范数.

- 由定义可得非负性 $p_\Omega \geqslant 0$.
- 证明正齐性. 取 $\alpha \in \mathbb{K}$ 且 $\alpha \neq 0$ 以及 $x \in E$. 则

$$I(\alpha x) = \left\{\lambda > 0 :\ \frac{\alpha x}{\lambda} \in \Omega\right\} = \left\{\lambda > 0 :\ \frac{\frac{\alpha}{|\alpha|}x}{\frac{\lambda}{|\alpha|}} \in \Omega\right\}.$$

因 Ω 是平衡的, 故 $\frac{\alpha}{|\alpha|}(\frac{x}{\lambda/|\alpha|}) \in \Omega$ 等价于 $\frac{x}{\lambda/|\alpha|} \in \Omega$, 而后者意味着 $\frac{\lambda}{|\alpha|} \in I(x)$, 也就有 $\lambda \in I(\alpha x)$ 等价于 $\frac{\lambda}{|\alpha|} \in I(x)$. 因此可得

$$p_\Omega(\alpha x) = |\alpha| p_\Omega(x).$$

如果取 $\alpha = 0$, 那么此结论显然成立.

- 任取 $x, y \in E$, 最后证三角形不等式 $p_\Omega(x+y) \leqslant p_\Omega(x) + p_\Omega(y)$.

设 $\lambda \in I(x)$ 且 $\mu \in I(y)$, 即有 $\frac{x}{\lambda} \in \Omega$ 及 $\frac{y}{\mu} \in \Omega$. 因 Ω 是凸的, 那么有

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} \in \Omega.$$

于是有 $p_\Omega(x+y) \leqslant \lambda + \mu$, 再对 λ 和 μ 取下确界, 即得

$$p_\Omega(x+y) \leqslant p_\Omega(x) + p_\Omega(y).$$

(2) 和 (3) 由 $I(x)$ 的定义和基本性质立即可得. ■

注 7.3.5 设 E 是拓扑向量空间. 根据上面定理 7.3.4, 当 Ω 取遍原点的所有凸平衡开邻域, 可得一定向的半范数族 $\{p_\Omega\}_\Omega$. 并且每个 p_Ω 都是连续的, 这是因为对任意 $\varepsilon > 0$, 由定理 7.3.4 中的命题 (1), 可得

$$p_\Omega^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) = \varepsilon p_\Omega^{-1}((-1,1)) = \varepsilon\Omega,$$

这表明 p_Ω 在原点连续. 那么对任意一点 $x_0 \in E$, 当 $x \in x_0 + \varepsilon\Omega$ 时, 有

$$|p_\Omega(x) - p_\Omega(x_0)| \leqslant p_\Omega(x - x_0) < \varepsilon.$$

因此 p_Ω 连续.

定理 7.3.6 设 E 是一个局部凸空间, $(p_\Omega)_\Omega$ 是半范数族, 这里 Ω 取遍 E 中原点的凸平衡开邻域基中所有的元素. 那么由半范数族 $(p_\Omega)_\Omega$ 诱导的拓扑与 E 上原拓扑一致.

因此, 拓扑向量空间 E 是局部凸空间的充分必要条件是 E 为可半赋范的空间.

证明 记 E 上原拓扑为 τ, 而由半范数族 $(p_\Omega)_\Omega$ 诱导的拓扑为 τ'. 因 p_Ω 关于拓扑 τ 连续, 由定理 7.2.6 可知 $\tau' \subset \tau$.

反过来, 任取 $V \in \mathcal{N}_\tau(0)$, 则有凸平衡开邻域 $\Omega \in \mathcal{N}_\tau(0)$, 使得 $\Omega \subset V$. 那么

$$\Omega = \{x \in E : \, p_\Omega(x) < 1\}$$

为拓扑 τ' 下开单位球 $B_{p_\Omega}(0,1)$, 即

$$\Omega = B_{p_\Omega}(0,1) \in \mathcal{N}_{\tau'}(0),$$

故 $V \in \mathcal{N}_{\tau'}(0)$. 由此推出 $\tau \subset \tau'$. 因此我们有 $\tau = \tau'$. ■

§7.4 局部凸空间的例子

在这一节我们给出一些局部凸空间的典型例子, 它们的性质的证明留作练习. 通过这些例子, 可以体会到局部凸空间在分析学中的重要意义.

例 7.4.1 设 $C^\infty([0,\,1])$ 表示由 $[0,\,1]$ 上所有无穷次可微 (实值或复值) 函数构成的空间, 定义其上的半范数为

$$p_i(f) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(i)}(t)|, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

则此半范数族 $(p_i)_{i \geqslant 1}$ 是可分点的, 且由其诱导的拓扑可度量化 (相应的距离可以是完备的). 此拓扑也由一族递增的半范数 $(q_k)_{k \geqslant 1}$ 来定义:

$$q_k = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k, \; 0 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(i)}(t)|.$$

在该拓扑下, 函数列 (f_n) 收敛到 f 当且仅当对每个 $i \geqslant 1$, $f_n^{(i)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f^{(i)}$. 但是, 这个拓扑并不能只由 $C^\infty([0,\,1])$ 上的一个半范数来定义.

类似地, $C^\infty([0,1]^d)$ 表示方体 $[0,\,1]^d$ 上所有无穷次可微函数构成的空间. 在 $C^\infty([0,1]^d)$ 上约定如下形式的半范数: 设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ 表示由非负整数构成的多重指标, 令

$$p_\alpha(f) = \sup_{t \in [0,\,1]^d} |D^\alpha f(t)|, \quad f \in C^\infty([0,1]^d),$$

其中 D^α 表示 α 阶的微分单项式

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

从而, $C^\infty([0,\,1]^d)$ 也成为一个半赋范空间.

例 7.4.2 设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间 (例如, $X=\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集), 并令 $C(X)=C(X,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$). 设 $K\subset X$ 是紧集, 定义

$$p_K(f)=\sup_{x\in K}|f(x)|.$$

由此得到的 $(p_K)_{K\subset X}$ 定义了 $C(X)$ 上的一族可分点的半范数, 相应的拓扑意味着在 X 的任一紧子集上一致收敛. 若有 X 上递增的紧子集序列 $(K_i)_{i\geqslant 1}$, 使得每一个紧子集 $K\subset X$ 总是包含于某个 K_i ($X=\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集即满足这种条件), 则该拓扑也可由半范数序列 $(p_{K_i})_{i\geqslant 1}$ 来定义, 此时诱导的拓扑可度量化 (相应的距离可以是完备的), 但通常不可赋范.

例 7.4.3 设 Ω 为复数域 $\mathbb{C}$ 中的开子集, 且 $H(\Omega)$ 表示 Ω 上所有全纯函数构成的空间. 若我们也在 $H(\Omega)$ 上定义上例中一样的拓扑, 则它成为一个局部凸空间. 该拓扑能由完备的距离诱导.

例 7.4.4 设 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示 Schwartz 函数类, 即 $\mathbb{R}^n$ 上快速衰减函数构成的集合

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,:\,\|f\|_{\alpha,\beta}<\infty,\,\forall\,\alpha,\,\beta\right\},$$

其中 α,β 是非负整数构成的多重指标. 且

$$\|f\|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|.$$

其中 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 则 $(\|\cdot\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的半范数族. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在此半范数族诱导的拓扑下成为一局部凸空间, 且此拓扑可度量化, 但不可赋范. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是分析中一类重要的空间.

例 7.4.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集, m 为非负整数或 $m=\infty$. 令 $C^m(\Omega)$ 表示由 Ω 上所有 m 次连续可微函数构成的空间. 对任一紧集 $K\subset\Omega$ 和次数 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_d\leqslant m$ 的多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$, 定义

$$p_{K,\alpha}(f)=\sup_{t\in K}|D^\alpha f(t)|.$$

当我们让 K 取遍 Ω 中所有紧子集并让 α 取遍所有次数不大于 m 的多重指标, $(p_{K,\alpha})$ 成为 $C^m(\Omega)$ 上的一族可分的半范数, 从而 $C^m(\Omega)$ 成为一个半赋范空间, 该空间也可完备度量化.

例 7.4.6 接上例, $\mathcal{D}^m(\Omega)$ 表示 $C^m(\Omega)$ 中有紧支撑的函数构成的子空间. 任取 $\varphi\in C(\Omega)$. 定义

$$p_{\varphi,\alpha}(f)=\sup_{t\in\Omega}|\varphi(t)f^{(\alpha)}(t)|,\quad |\alpha|\leqslant m,\quad f\in\mathcal{D}^m(\Omega),$$

这些泛函 $p_{\varphi,\alpha}$ 形成了 $\mathcal{D}^m(\Omega)$ 上的可分点的半范数族, 并使 $\mathcal{D}^m(\Omega)$ 成为一个局部凸空间. 然而, 和前面的例子不同, 这里的拓扑无法度量化.

例 7.4.7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集, $0 < p < \infty$. 称 Ω 上的可测函数 f *局部 p–方可积*, 若对任意紧集 $K \subset \Omega$, 有

$$N_{p,K}(f) = \left(\int_K |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

令 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 表示由 Ω 上所有局部 p–方可积函数构成的空间. 则当 $p \geqslant 1$ 时, $\{N_{p,K}: \text{紧集 } K \subset \Omega\}$ 是 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 上的半范数族, 并使 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 成为一个局部凸空间. 另一方面, 当 $p < 1$ 时, $N_{p,K}$ 诱导一族平移不变的 "半距离" $d_{p,K}(f,g) = N_{p,K}(f-g)$, 并使 $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 成为一个拓扑向量空间, 但该空间不是局部凸的.

习 题 七

1. 任取 $f, g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 定义

$$d(f,g) = \min\left\{1, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\right\}.$$

(a) 证明: d 是 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上的完备距离.

(b) 通过考虑距离 $d(0,\lambda f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 以及 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 上的无界函数 f 来说明 $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}), d)$ 不是拓扑向量空间.

2. 设 E 是拓扑向量空间, $A, B \subset E$.

(a) 证明: 若 A 是开集, 则 $A + B$ 也是开集.

(b) 证明: 若 A 和 B 是紧的且 E 是一个 Hausdorff 空间, 则 $A+B$ 也是紧的.

(c) 构造 $\mathbb{R}^2$ 上的例子, 说明 A 和 B 是闭集, 但 $A+B$ 不是闭集.

3. 设 E 是拓扑向量空间, f 是 E 到 F 的线性泛函 (f 不恒为 0). 并假设 $H = f^{-1}(0)$ 是闭集. 本题的目的是证明在该假设下 f 是连续的.

(a) 证明: 存在元素 $a \in E$, 使得 $f(a) = 1$.

(b) 证明: $E \setminus f^{-1}(1)$ 是不含有原点的开集.

(c) 设 V 是包含于 $E \setminus f^{-1}(1)$ 的原点处的平衡邻域. 证明: $|f|$ 在 V 上被 1 严格控制, 进而导出 f 连续.

4. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, $A \subset E$. 称包含 A 的所有凸集 (或平衡集) 的交集为 A 的凸包 (或平衡包), 记作 $\mathrm{conv}(A)$ (或 $\mathrm{ba}(A)$).

(a) 证明:

$$\operatorname{conv}(A)=\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k \;:\; a_k \in A,\; t_k \geqslant 0,\; \sum_{k=1}^{n} t_k = 1,\; n \geqslant 1\right\}$$

以及

$$\operatorname{ba}(A)=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},\ |\lambda|\leqslant 1} \lambda A.$$

(b) 证明: 平衡集的凸包还是平衡的.

(c) 由 $\mathbb{R}^2$ 上的反例说明一个凸集的平衡包不一定还是凸的.

5. 设 Ω 表示开圆盘 $\{z\in\mathbb{C} : |z|<3\}$, K 表示闭单位圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$. 对 $f\in H(\Omega)$ 定义

$$p(f)=\sup_{z\in K}|f(z)|.$$

(a) 证明: p 是 $H(\Omega)$ 上的范数.

(b) 证明: 由 p 诱导的拓扑不同于在 Ω 的紧子集上一致收敛的拓扑. (提示: 可以考虑函数 $f_n(z)=\mathrm{e}^{n(z-2)}$.)

6. 设 A 是 $[0,1]$ 的可数子集, 且映射 $\alpha : A\to(0,+\infty)$ 满足 $\sum\limits_{t\in A}\alpha(t)<+\infty$. 对 $f\in C([0,1],\mathbb{R})$ 定义

$$\|f\|_{A,\alpha}=\sum_{t\in A}\alpha(t)|f(t)|.$$

(a) 证明: $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的半范数. 什么时候它是一个范数? 什么时候它等价于一致范数 $\|\cdot\|_\infty$?

(b) 证明: 两个半范数 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 和 $\|\cdot\|_{A',\alpha'}$ 诱导相同的拓扑当且仅当 $A=A'$ 且

$$0<\inf_{t\in A}\alpha'(t)/\alpha(t)\leqslant\sup_{t\in A}\alpha'(t)/\alpha(t)<\infty.$$

7. 设 E 为拓扑向量空间, B 是原点的一个凸邻域. 假设 B 是有界的, 即若任取原点的一个邻域 V, 存在常数 $\alpha>0$, 使得对所有的 $t\geqslant\alpha$, 有 $B\subset tV$.

(a) 证明: $(rB)_{r>0}$ 是原点的邻域基.

(b) 证明: B 包含原点的一个凸平衡开邻域 C.

(c) 证明: C 的 Minkowski 泛函是 E 上的一个范数, 并且由其诱导的拓扑和 E 上原来的拓扑一致 (故 E 为可赋范的).

8. 设 E 为 Hausdorff 局部凸空间, 其上的拓扑由半范数族 $\mathcal{P}$ 诱导. 证明以下命题等价:

(a) E 可度量化.

(b) E 中任一点有可数的邻域基.

(c) E 上的拓扑可由 $\mathcal{P}$ 的可数的可分点的半范数子族 $\mathcal{D}$ 诱导.

(d) E 上的拓扑可由 $\mathcal{P}$ 的可数的可分点的并且是定向的半范数子族 $\mathcal{D}$ 诱导.

(e) E 上的拓扑可由平移不变的距离诱导.

9. 本习题的目标是把 Banach-Steinhaus 定理扩展到拓扑向量空间的情形. 设 E 和 F 是两个拓扑向量空间, $(u_i)_{i\in I}$ 是 E 到 F 的线性映射族. 假设 E 的拓扑可以被一个完备的平移不变的距离诱导 (即 E 是一个 F–空间), 并且对每一个 $x\in E$, 轨道 $(u_i(x))_{i\in I}$ 是 F 中的有界子集.

(a) 在 F 的原点处任取一邻域 W, 选择原点的凸平衡邻域 U, 使其满足 $U+U\subset W$. 证明:

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} nA,$$

其中

$$A=\bigcap_{i\in I} u_i^{-1}(U).$$

(b) 证明: A 的内部非空.

(c) 证明: 存在 E 中原点的邻域 V, 使得

$$u_i(V)\subset W,\ \ \forall i\in I.$$

该结论意味着算子族 $(u_i)_{i\in I}$ 等度连续.

(d) 在 E 和 F 都是局部凸空间时, 用相应的半范数表示以上结果.

10. 类似于上一习题, 把开映射和闭图像定理扩展到 F–空间:

(a) 设 $u: E\to F$ 是两个 F–空间之间的连续线性映射. 若 $u(E)$ 不是贫集, 则 u 是满射且是开映射.

(b) 设 $u: E\to F$ 是两个 F–空间之间的线性映射. 若 u 的图像是闭的, 则 u 连续.

11. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上 Hausdorff 局部凸空间.

(a) 证明: 对 E 的任一有限维向量子空间 F, 存在 E 上连续半范数 p, 当 p 限制在 F 上时是范数.

(b) 现在假设 E 本身是有限维的, 即 $\dim E=n$. 设 $T:\mathbb{K}^n\to E$ 是线性双射.

(i) 证明: T 是连续的 ($\mathbb{K}^n$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_\infty$).

(ii) 设 S 是 $\mathbb{K}^n$ 的单位球面. 证明: E 上存在连续范数 p, 使得

$$\inf_{x\in S} p(T(x))=\delta>0.$$

(iii) 由此导出

$$\|T^{-1}(y)\|_\infty \leqslant \frac{1}{\delta} p(y), \ \forall y \in E.$$

(iv) 导出 T^{-1} 是连续的.

(c) 得出结论: 任一有限维 Hausdorff 局部凸空间与 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 同构.

12. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间. 本习题的目的是证明: E 上只存在唯一的 Hausdorff 拓扑使 E 成为一个拓扑向量空间 (由此把上一习题的结论从局部凸空间推广到拓扑向量空间). 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 E 的一组基, 则任意 $x \in E$ 可以表示成

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

设 E 上的拓扑 τ_0 由范数诱导, 其范数可取 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$. 另假设 τ 是 E 上的和 E 的线性结构相容的 Hausdorff 拓扑 (即 (E, τ) 是一个 Hausdorff 拓扑向量空间). 记 $\mathcal{N}_\tau(0)$ 是原点处关于拓扑 τ 的邻域系, $\mathcal{N}_{\tau_0}(0)$ 有类似的意义.

(a) 证明: $\forall\, V \in \mathcal{N}_\tau(0)$, $\exists\, W \in \mathcal{N}_\tau(0)$, 使得

$$W + \cdots + W \subset V \,(n \text{ 个 } W \text{ 求和}).$$

(b) 证明: 存在 $r > 0$, 使得关于拓扑 τ_0 的开球 $B_{\tau_0}(0, r) = \{x \in E : \|x\|_\infty < r\}$ 包含于 V (提示: 利用 W 的吸收性). 导出 $\tau \subset \tau_0$.

(c) 令 B (或 $\overline{B}$) 表示关于拓扑 τ_0 的开 (或闭) 单位球. 证明: 单位映射 $\mathrm{Id} : (\overline{B}, \tau_0) \to (\overline{B}, \tau)$ 是同构映射.

(d) 导出存在 $V \in \mathcal{N}_\tau(0)$, 使得 $B = V \cap \overline{B}$.

(e) 设 $U \in \mathcal{N}_\tau(0)$ 是平衡集, 使得 $U \subset V$. 易见 $U \cap (\overline{B} \setminus B) = \varnothing$, 由此证明 $U \subset B$.

(f) 导出结论: $\tau_0 \subset \tau$.

13. 设 E 是由半范数族 $\mathcal{P}$ 生成的半赋范空间, F 是 E 的向量子空间.

(a) 证明: 每一个半范数 $p \in \mathcal{P}$ 在商空间 E/F 上自然诱导一个半范数. 因而 E/F 成为一个半赋范空间. 证明: 商映射 $\pi : E \to E/F$ 是连续的.

(b) 证明下面的命题等价:

(i) E/F 是 Hausdorff 空间.

(ii) F 是闭集.

(iii) 对任何非零的 $x \in E \setminus F$, 存在 E 上的连续半范数 p, 使得

$$\inf_{y \in F} p(x - y) > 0.$$

14. 设 E 为 Hausdorff 局部凸空间, F 是 E 的有限维向量子空间.

(a) 令 $x \in E \setminus F$. 证明: E 上存在一个连续半范数 p, 满足 $p(x) = 1$ 且 $p\big|_F$ 是一个范数.

(b) 证明:

$$\inf_{y \in F} p(x - y) > 0.$$

(c) 导出 F 是闭集.

(d) 证明: 对任意 E 的闭向量子空间 H, $F + H$ 也是闭集.

15. 设 E 是一个 Hausdorff 局部凸空间. 本习题的目标是给出如下意义的 Riesz 定理: E 是局部紧的当且仅当 $\dim E < \infty$.

(a) 证明: 若 $\dim E < \infty$, 则 E 是局部紧的.

(b) 现在我们假设 E 是局部紧的. 证明: E 上存在连续的半范数 p, 使得相应的闭单位球 $\overline{B}_p$ 是紧的.

(c) 导出存在 $y_1, \cdots, y_n \in \overline{B}_p$, 使得

$$\overline{B}_p \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(y_k + B_p\left(0, \frac{1}{2}\right)\right),$$

其中 $B_p(0, r)$ 是相应于 p 的中心在原点 0、半径为 r 的开球.

(d) 设 $F = \operatorname{span}(y_1, \cdots, y_n)$. 证明: E/F 是一个 Hausdorff 局部凸空间.

(e) 设 $\pi : E \to E/F$ 表示商映射, 而 $\widehat{p}$ 表示 E/F 上由 p 自然诱导的半范数. 证明:

$$\pi(\overline{B}) \subset \frac{1}{2^k}\,\pi(\overline{B}) \quad 且 \quad 2^k B_{\widehat{p}}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \pi(\overline{B}).$$

(f) 导出 $E/F = \pi(\overline{B})$, 故 E/F 是紧的.

(g) 导出结论: E 是有限维的.

(h) 把该结论推广到拓扑向量空间: 一个 Hausdorff 拓扑向量空间是局部紧的当且仅当它是有限维的.

16. 令 $0 < p < 1$, 考虑空间 $L_p = L_p(0, 1)$, 并在 L_p 上赋予距离 $d_p(f, g) = \|f - g\|_p^p$. 本习题的目标是证明 L_p 不是局部凸的且没有非零线性泛函.

(a) 证明: L_p 是拓扑向量空间.

接下来, 我们先考虑 $p = \frac{1}{2}$ 的情形, 用 $B(r)$ 表示中心在原点、半径为 r 的 $L_{\frac{1}{2}}$ 中的闭单位球: $B(r) = \left\{ f \in L_{\frac{1}{2}} \ : \ \|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \leqslant r \right\}$.

(b) 取 $f \in B(\sqrt{2}\, r)$. 证明: 存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

(c) 定义

$$g(t)=\begin{cases}2f(t), & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 0, & t_0<t\leqslant 1,\end{cases}\quad \text{且}\quad h(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 2f(t), & t_0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

证明:

$$g,h\in B(r)\quad \text{且}\quad f=\frac{g}{2}+\frac{h}{2}.$$

(d) 由此导出 $B(\sqrt{2}\,r)\subset \operatorname{conv}(B(r))$, 并有 $\operatorname{conv}(B(r))=L_{\frac{1}{2}}$.

(e) 得出 $L_{\frac{1}{2}}$ 是非局部凸的.

(f) 把以上结论推广到 $0<p<1$ 的情形.

(g) 证明: L_p 上只有零线性泛函是连续的.

第八章 Hahn-Banach 定理, 弱拓扑和弱 * 拓扑

Hahn-Banach 定理是泛函分析中最重要的定理, 它有许多不同的形式. 我们将主要讨论它的分析形式和几何形式. 正是由 Hahn-Banach 定理, 产生了丰富的 Banach 空间的对偶理论, 它是 Banach 空间的基石.

§8.1 给出分析形式的 Hahn-Banach 定理, 通常也称它们为 Hahn-Banach 延拓定理. §8.2 介绍 Hahn-Banach 定理的几何形式, 它们通常被直观地称作凸集的隔离定理. §8.3 介绍弱拓扑和弱 * 拓扑的概念, 正是 Hahn-Banach 定理保证了这些拓扑的存在及重要性.

§8.1 Hahn-Banach 定理: 分析形式

下面的定义推广了半范数和范数的概念.

定义 8.1.1 设 E 是数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 若泛函 $p: E \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) **正齐性**: 对任意 $t \geqslant 0$ 及 $x \in E$, 有 $p(tx) = tp(x)$;

(2) **次可加性**: 任取 $x, y \in E$, 有 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,

则称该泛函 p 为 E 上的*次线性泛函*.

我们先证一个不涉及拓扑的简单延拓引理.

引理 8.1.2 *设 E 是实向量空间, F 是 E 的余维为 1 的向量子空间, 并设 $p: E \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函, $f: F \to \mathbb{R}$ 是线性泛函. 若在 F 上有 $f \leqslant p$, 则存在线性泛函 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{R}$, 使得*

$$\widetilde{f}|_F = f \quad \text{且} \quad \widetilde{f}(x) \leqslant p(x), \forall x \in E.$$

证明 记 F 关于 E 的余维为 $\operatorname{codim} F$. 因 $\operatorname{codim} F = 1$, 故存在 $x_0 \in E \backslash F$, 使得

$$E = \operatorname{span}(F,\ x_0) = \{x + tx_0 :\ x \in F,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

假设 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{R}$ 是线性的且满足 $\widetilde{f}|_F = f$, 即 $\widetilde{f}$ 是 f 的线性延拓. 则

$$\widetilde{f}(x + tx_0) = \widetilde{f}(x) + t\widetilde{f}(x_0) = f(x) + t\widetilde{f}(x_0), \quad x \in F, t \in \mathbb{R}.$$

由此可知, 线性延拓 $\widetilde{f}$ 由其在 x_0 处的值唯一确定. 我们记 $\widetilde{f}(x_0)=a$. 接下来要做的是确定常数 $a\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(x)+ta\leqslant p(x+tx_0),\ \forall x\in F,\ \forall t\in\mathbb{R}. \tag{8.1}$$

不失一般性, 我们假设 $t\neq 0$. 则上式分可为 $t>0$ 和 $t<0$ 两种情况讨论. 因而 (8.1) 等价于如下不等式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{t}f(x)+a\leqslant\dfrac{1}{t}p(x+tx_0), & \text{当 } t>0,\\ -\dfrac{1}{t}f(x)-a\leqslant-\dfrac{1}{t}p(x+tx_0), & \text{当 } t<0.\end{cases}$$

稍做整理, 可得 a 应满足下面的不等式

$$\begin{cases}a\leqslant p\left(\dfrac{1}{t}x+x_0\right)-f\left(\dfrac{1}{t}x\right), & \text{当 } t>0,\\ a\geqslant f\left(-\dfrac{1}{t}x\right)-p\left(-\dfrac{1}{t}x-x_0\right), & \text{当 } t<0.\end{cases}$$

由于 F 是向量子空间, 上式等价于下式

$$f(y)-p(y-x_0)\leqslant a\leqslant p(x+x_0)-f(x),\ \ \forall x,y\in F.$$

由此可知, a 的存在性等价于

$$f(y)-p(y-x_0)\leqslant p(x+x_0)-f(x),\ \ \forall x,y\in F;$$

也即

$$f(x)+f(y)\leqslant p(x+x_0)+p(y-x_0),\ \ \forall x,y\in F.$$

注意到 $x,y\in F$, 而在 F 上 $f\leqslant p$. 则

$$f(y)+f(x)=f(x+y)\leqslant p(x+y)\leqslant p(x+x_0)+p(y-x_0).$$

这表明满足条件 (8.1) 的 a 的确存在, 即相应地, 满足定理条件的线性延拓 $\widetilde{f}$ 存在. ■

注 8.1.3 当 E 为有限维向量空间, 或者 F 关于 E 的余维是有限维时, 若 $p:E\to\mathbb{R}$ 是次线性泛函, $f:F\to\mathbb{R}$ 是线性泛函且在 F 上满足 $f\leqslant p$, 则根据上一定理可以得到线性泛函 $\widetilde{f}:E\to\mathbb{R}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F=f\quad\text{且}\quad\widetilde{f}(x)\leqslant p(x),\ \forall x\in E.$$

实际上, 当 E 为可数维向量空间, 或者 F 关于 E 的余维可数时, 我们运用数学归纳法也可得相应的延拓定理. 但是不可数维的情形, 我们需要运用 Zorn 引理.

下面是实数域情形的 Hahn-Banach 延拓定理, 它是所有 Hahn-Banach 型定理的出发点. 本节和下节所有定理及其推论均被习惯地称为 Hahn-Banach 定理.

定理 8.1.4 (Hahn-Banach 延拓定理: 实情形) 设 E 是实向量空间, $F \subset E$ 是向量子空间, 并设 $p: E \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函, $f: F \to \mathbb{R}$ 是线性泛函且在 F 上满足 $f \leqslant p$. 那么总存在 f 的线性延拓 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{R}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F = f \quad \text{且} \quad \widetilde{f}(x) \leqslant p(x), \ \forall x \in E.$$

证明 首先设 $\mathcal{F}$ 是由所有的二元组 (G, g) 构成的集合, 这里 (G, g) 满足如下两个条件:

- G 是 E 的向量子空间并且 $F \subset G$.
- $g: G \to \mathbb{R}$ 是线性泛函并满足 $g|_F = f$, 且在 G 上有 $g \leqslant p$.

由此构造的集合 $\mathcal{F}$ 非空, 这是因为 $(F,\ f) \in \mathcal{F}$. 接下来, 我们在集合 $\mathcal{F}$ 上定义一个偏序关系 $\preceq$:

$$(G, g) \preceq (H, h) \Longleftrightarrow G \subset H,\ h|_G = g.$$

此偏序集 $(\mathcal{F}, \preceq)$ 是良序的, 即每一个全序的子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 在 $\mathcal{F}$ 中有一个极大元. 事实上, 若令 $H = \bigcup\limits_{(G,g) \in \mathcal{G}} G$, 由于 $\mathcal{G}$ 是全序的, 则 H 是 E 的向量子空间. 然后我们定义 H 上的线性泛函:

$$h: H \to \mathbb{R},\ \text{若 } x \in G, \text{ 则令 } h(x) = g(x), \quad (G, g) \in \mathcal{G}.$$

这里的 G 虽然不是唯一的, 但是由此定义的函数 h 却是确定的. 这是因为若还有 $x \in G', (G', g') \in \mathcal{G}$. 由于 $\mathcal{G}$ 是全序的, 可知 (G, g) 和 (G', g') 一定是可比较的, 不妨设 $(G, g) \preceq (G', g')$, 则有 $G \subset G'$ 且 $g'|_G = g$, 那么 $h(x) = g(x) = g'(x)$.

并且由 h 的构造容易看出, 在 H 上, 有 $h \leqslant p$. 所以 $(H, h) \in \mathcal{F}$, 且任取 $(G, g) \in \mathcal{G}$, 有 $(G, g) \preceq (H, h)$.

最后, 我们应用 Zorn 引理, 可得偏序集 $(\mathcal{F}, \preceq)$ 有一个极大元, 记它为 (M, m), 并且我们可以判断 $E = M$. 否则的话, 则存在一个元素 $x_0 \in E \setminus M$, 可设 $G = M + \mathbb{R}x_0$, 则 $M \subsetneq G$ 且 M 是 G 的余维为 1 的子空间. 因此由引理 8.1.2 可知, 存在 $g: G \to \mathbb{R}$, 使得 $g|_M = m, g \leqslant p$. 这意味着 (M, m) 不是 $(\mathcal{F}, \preceq)$ 中的极大元, 这与 (M, m) 的选取产生矛盾, 因此 E 必须等于 M, 故定理得证. ■

在上面的引理 8.1.2 和定理 8.1.4 中, 我们都是讨论的实向量空间. 如果定理中的次线性泛函换成半范数, 把对 f 的控制改成对 $|f|$ 的控制, 则有下面实情形和复情形统一的延拓定理. 在这里注意一个明显的事实, 一个复向量空间也是实向量空间.

定理 8.1.5 (Hahn-Banach 延拓定理) 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的向量空间, $F \subset E$ 是向量子空间, 并设 p 是 E 上的半范数, $f: F \to \mathbb{K}$ 是线性映射且在 F 上满足 $|f| \leqslant p$. 那么总存在线性泛函 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{K}$, 使得

$$\widetilde{f}|_F = f \quad \text{且} \quad |\widetilde{f}(x)| \leqslant p(x), \ \forall x \in E.$$

证明 我们分实的和复的两种情形分别来讨论.

先考虑实情形: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. 因在 F 上有 $|f| \leqslant p$, 故在 F 上也有 $f \leqslant p$. 那么由上一定理知, 存在线性泛函 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{R}$, 使得 $\widetilde{f}|_F = f$ 且对任意 $x \in E$, 有 $\widetilde{f}(x) \leqslant p(x)$. 而由于 p 是半范数, 可得

$$-\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-x) \leqslant p(-x) = p(x).$$

由此可得

$$-p(x) \leqslant \widetilde{f}(x) \leqslant p(x),$$

此即 $|\widetilde{f}(x)| \leqslant p(x)$.

其次考虑复情形: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. 此时 $f(x) = \mathrm{Re} f(x) + \mathrm{i}\mathrm{Im} f(x)$. 我们令 $\varphi = \mathrm{Re} f$. 则 $\varphi: F \to \mathbb{R}$ 是实线性泛函. 由 f 的线性性, 可得

$$f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}[\mathrm{Re} f(x) + \mathrm{i}\mathrm{Im} f(x)] = \mathrm{i}\mathrm{Re} f(x) - \mathrm{Im} f(x),$$

故 $-\mathrm{Im} f(x) = \varphi(\mathrm{i}x)$. 那么线性泛函 f 由其实部 φ 唯一确定, 即

$$f(x) = \varphi(x) - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x),$$

并且在子空间 F 上有 $|\varphi| \leqslant |f| \leqslant p$. 由实情形结论 (此处 E 和 F 可看成实向量空间), 存在实线性泛函 $\widetilde{\varphi}: E \to \mathbb{R}$, 满足 $|\widetilde{\varphi}| \leqslant p$ 且 $\widetilde{\varphi}|_F = \varphi$. 我们定义泛函 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{C}$ 如下

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{\varphi}(x) - \mathrm{i}\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}x), \quad x \in E.$$

由于 $\widetilde{\varphi}$ 是实线性的, 容易验证 $\widetilde{f}$ 是空间 E 上的复线性泛函, 并且当 $x \in F$ 时, $\mathrm{i}x \in F$, 故

$$\widetilde{f}(x) = \varphi(x) - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x) = f(x),$$

此即 $\widetilde{f}|_F = f$.

另一方面, 对任意 $x \in E$, 令 $\lambda = \mathrm{sgn}\widetilde{f}(x)$, 则 $|\lambda| = 1$, 那么由 $\widetilde{\varphi}$ 是实线性泛函以及 p 是半范数, 可得

$$|\widetilde{f}(x)| = \lambda \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(\lambda x) = \widetilde{\varphi}(\lambda x) - \mathrm{i}\widetilde{\varphi}(\mathrm{i}\lambda x) = \widetilde{\varphi}(\lambda x) \leqslant p(\lambda x) = p(x).$$

定理得证. ■

注 8.1.6 设 E 是复向量空间, 对任意复线性泛函 $f: E \to \mathbb{C}$, 定义 $\Phi(f) = \mathrm{Re} f$. 由于线性泛函 f 的虚部可由其实部确定, 则映射 Φ 建立了 E 上所有复线性泛函构成的集合到 E 上所有实线性泛函构成的集合上的双射, 并且

$$f(x) = \Phi(f)(x) - \mathrm{i}\Phi(f)(\mathrm{i}x), \quad \forall x \in E.$$

下面我们过渡到拓扑向量空间, 此时涉及泛函的连续性. 由定理 8.1.5, 容易给出连续线性泛函的延拓定理.

推论 8.1.7 *设 E 是拓扑向量空间, F 是 E 的向量子空间. 并设 $p: E \to \mathbb{K}$ 是连续的半范数, $f: F \to \mathbb{K}$ 是线性泛函且在 F 上满足 $|f| \leqslant p$. 那么存在 f 的连续线性延拓 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{K}$, 使得 $\widetilde{f}|_F = f$ 且在 E 上 $|\widetilde{f}| \leqslant p$.*

证明 根据 Hahn-Banach 延拓定理 8.1.5, 剩下的只是证明 $\widetilde{f}$ 是连续的. 因 $\widetilde{f}$ 是线性的, 故我们只需说明 $\widetilde{f}$ 在原点处连续, 这由 $|\widetilde{f}| \leqslant p$ 立即可得. ■

注 8.1.8 在上一结论的证明中, 我们注意到如下事实: 如果 p, q 都是拓扑向量空间 E 上的半范数且满足 $q \leqslant p$, 那么当 p 连续时, q 也是连续的. 特别地, 若 p 是 E 上的连续半范数, f 是 E 上的线性泛函且满足 $|f| \leqslant p$, 则 f 连续.

推论 8.1.9 *设 E 是局部凸空间, $F \subset E$ 是向量子空间而 $f: F \to \mathbb{K}$ 是连续线性泛函. 那么存在 f 的连续线性延拓 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{K}$.*

证明 因 E 是局部凸的向量空间, 故 E 是半赋范空间, 即 E 上的拓扑可以被一族连续的半范数 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导. 那么子空间 F 上的拓扑也可被此半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导. 由于 $f: F \to \mathbb{C}$ 是连续线性泛函, 由定理 7.2.9 知存在有限集 $J \subset I$ 及常数 $C \geqslant 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant C \max_{i\in J} p_i(x),\ \forall x \in F.$$

令 $p = C \max\limits_{i\in J} p_i$. 则 p 也是 E 上的连续半范数. 由推论 8.1.7 可知结论成立. ■

推论 8.1.10 *设 E 是拓扑向量空间, p 是 E 上的连续半范数, 并设 $x_0 \in E$. 那么存在 $f \in E^*$, 使得 $f(x_0) = p(x_0)$ 且在 E 上有 $|f| \leqslant p$.*

证明 令 $F = \mathbb{K}x_0$ 且定义泛函

$$g: F \to \mathbb{K},\ tx_0 \mapsto tp(x_0).$$

那么 $g(x_0) = p(x_0)$ 且在 F 上有 $|g| = p$, 则由推论 8.1.7, 把 g 延拓到整个空间 E 上, 可知结论成立. ■

推论 8.1.11 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, 则 E^* 是可分点的, 即对于任一非零向量 $x_0 \in E$, 存在 $f \in E^*$, 使得 $f(x_0) \neq 0$.

证明 因 E 是 Hausdorff 局部凸空间, 故存在 E 上连续的半范数 p, 使得 $p(x_0) \neq 0$, 则由推论 8.1.10 可知, 存在 $f \in E^*$, 满足 $f(x_0) = p(x_0) \neq 0$. ■

注 8.1.12 推论 8.1.11 告诉我们, Hausdorff 局部凸空间上的非平凡线性泛函不仅存在, 而且足够多, 甚至是可分点的.

当我们在赋范空间上讨论时, 则可得到如下重要定理, 即一个赋范空间 E 的向量子空间 F 上的连续线性泛函可以保范地延拓到整个空间 E 上 (不一定唯一). 该定理将是我们讨论赋范空间及其对偶空间的关系和结构的重要理论依据 (下一章将详细讨论 Banach 空间的对偶理论).

推论 8.1.13 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, $F \subset E$ 是向量子空间且 $f: F \to \mathbb{K}$ 是连续线性泛函. 那么存在连续的线性延拓 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{K}$, 使得 $\widetilde{f}|_F = f$ 且 $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. 这样的 $\widetilde{f}$ 称为 f 的保范延拓.

证明 因 $f \in F^*$, 故在 F 上, 有 $|f(x)| \leqslant \|f\|_{F^*}\|x\|$. 因此由推论 8.1.7, 存在连续线性延拓 $\widetilde{f}: E \to \mathbb{K}$, 使得

$$|\widetilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_{F^*}\|x\|, \ \forall x \in E,$$

即有 $\|\widetilde{f}\| \leqslant \|f\|$. 另外, 由 $F \subset E$ 可知必有 $\|f\| \leqslant \|\widetilde{f}\|$, 所以 $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. ■

推论 8.1.14 设 E 是赋范空间, $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, 则存在 $f \in E^*$, 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f\| \leqslant 1$.

推论 8.1.15 设 E 是赋范空间, 则任取 $x \in E$, 有

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|: \ f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\},$$

并且上确界是可以达到的.

证明 记

$$\alpha = \sup\{|f(x)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}.$$

首先, 对任意 $f \in E^*$, 有 $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|$, 故 $\alpha \leqslant \|x\|$.

反过来, 由上一推论知, 对任意 $x \in E$, 存在 $f_0 \in E^*$, 使得 $f_0(x) = \|x\|$ 以及 $\|f_0\| \leqslant 1$. 因此 $\|x\| \leqslant \alpha$, 这也意味着结论中的上确界可以达到. ■

推论 8.1.15 直接意味着任一赋范空间上向量的范数可以通过其对偶空间上的元素来表达, 因而赋范空间和它的对偶空间之间存在着密切的联系. 并且在对

偶空间上我们可以再考虑它的对偶, 即二次对偶空间, 它又联系于原来的赋范空间, 这将是泛函分析中关于对偶理论的重要内容.

设 E 是赋范空间, E^* 是其对偶空间. 对任意 $f \in E^*$, 根据定义

$$\|f\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

如果我们考虑双线性泛函

$$B : E \times E^* \to \mathbb{K}, \quad (x, f) \mapsto f(x),$$

那么对任意 $(x, f) \in E \times E^*$, 有 $|B(x, f)| \leqslant \|x\|\|f\|$, 这意味着 B 是连续的. 从而对任意给定的 $x \in E$, $B(x, \cdot) : E^* \to \mathbb{K}$ 也是连续的, 这意味着

$$B(x, \cdot) \in (E^*)^* = E^{**} \text{ (称 } E^{**} \text{为 } E \text{ 的二次对偶)},$$

并且 $\|B(x, \cdot)\|_{E^{**}} \leqslant \|x\|_E$. 另一方面, 推论 8.1.15 表明此不等式的反向情形也成立, 故有

$$\|B(x, \cdot)\|_{E^{**}} = \|x\|_E.$$

由此可知, 线性映射 $x \mapsto B(x, \cdot)$ 是 E 到 E^{**} 的等距同构映射. 在此意义下, 我们可以将 E 等距嵌入到 E^{**}, 记作 $E \hookrightarrow E^{**}$. 这是泛函分析中非常关键的一个结论.

推论 8.1.16 设 E 是赋范空间, 而 F 是 E 的闭向量子空间, 并设 $x \in E \backslash F$. 那么存在 $f \in E^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f\big|_F = 0$ 且有 $f(x) = d(x, F)$.

证明 因 $x \in E \setminus F$ 且 F 是 E 的闭向量子空间, 故 $d(x, F) > 0$. 建立 E 的向量子空间 $\mathbb{K}x + F$ 上的线性泛函如下

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}x + F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ tx + y &\longmapsto td(x, F). \end{aligned}$$

显然 φ 满足 $\varphi\big|_F = 0$ 且 $\varphi(x) = d(x, F)$. 由于 $y \in F$, 可得 $d(x, F) \leqslant \left\|x + \frac{y}{t}\right\|$, 则

$$|\varphi(tx + y)| = |td(x, F)| \leqslant \|tx + y\|.$$

因此在子空间 $\mathbb{K}x + F$ 上, 线性泛函 φ 连续且 $\|\varphi\| \leqslant 1$. 另一方面, 任取 $n \geqslant 1$, 存在 $y_n \in F$, 使得 $\|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n}$. 那么

$$\frac{|\varphi(x - y_n)|}{\|x - y_n\|} > \frac{d(x, F)}{d(x, F) + \frac{1}{n}}.$$

因此

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\varphi(x-y_n)|}{\|x-y_n\|}\geqslant 1.$$

综合上面的讨论即得, 在子空间 $\mathbb{K}x+F$ 上, 线性泛函 $\|\varphi\|=1$.

最后, 再运用 Hahn-Banach 延拓定理导出结论. ■

注 8.1.17 应用推论 8.1.16, 我们往往去获得其命题中条件的反面, 也就是说, 当我们想证明某向量 x 属于闭子空间 F 时, 只需证明: 对任意 $f\in E^*$, 若 $f\big|_F=0$, 必有 $f(x)=0$ (见定理 8.2.3).

§8.2 Hahn-Banach 定理: 几何形式

Hahn-Banach 定理的几何形式通常也被称为凸集隔离定理. 若 $\varphi: E\to\mathbb{R}$ 且 $\alpha\in\mathbb{R}$, 我们记 $\{\varphi<\alpha\}$ 为子集 $\{x\in E,\varphi(x)<\alpha\}$. 子集 $\{\varphi\geqslant\alpha\}$ 有类似的定义.

定理 8.2.1 (Hahn-Banach 隔离定理) 设 E 是拓扑向量空间, A, B 都是 E 中的非空凸子集且 $A\cap B=\varnothing$. 若 A 是开集, 则存在 $f\in E^*$ 及常数 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使得

$$A\subset\{\mathrm{Re}f<\alpha\}\quad 且\quad B\subset\{\mathrm{Re}f\geqslant\alpha\}.$$

或等价地表述为

$$\mathrm{Re}f(a)<\alpha\leqslant\mathrm{Re}f(b),\ \forall a\in A, b\in B.$$

证明 我们先考虑实向量空间, 即 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 的情形. 设 $a\in A$, $b\in B$ 以及 $x_0=b-a$. 并构造集合 $C=A-B+x_0$. 那么

(1) 因 A 和 B 都是凸集, C 也是凸集.

(2) C 是开集. 这是因为 C 可以看成开集 A 经平移后的集合的并, 即

$$C=\bigcup_{y\in B}(A+x_0-y).$$

(3) $0\in C$.

(4) 由 $A\cap B=\varnothing$, 可得 $x_0\notin C$.

设 p 是由 C 确定的 Minkowski 泛函, 即

$$p(x)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{x}{\lambda}\in C\right\},\quad x\in E.$$

则由 §7.3 的讨论知:

(i) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$.

(ii) $p(tx) = tp(x)$, $\forall t \geqslant 0$.

(iii) $\forall x \in E, p(x) < 1 \Leftrightarrow x \in C$.

(iv) $p(x_0) \geqslant 1$.

因此 p 在 E 上连续. 根据推论 8.1.10, 存在连续线性泛函 $f : E \to \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = p(x_0)$ 且在 E 上有 $f \leqslant p$. 由此立即可得

$$f(a) - f(b) + f(x_0) < 1.$$

因 $p(x_0) \geqslant 1$ 及 $f(x_0) = p(x_0)$, 我们导出 $f(a) < f(b)$. 因此, 由 a, b 选择的任意性, 我们得到

$$\sup f(A) \leqslant \inf f(B).$$

由于 A, B 都是凸集而 f 是线性的, 则 $f(A)$, $f(B)$ 都是 $\mathbb{R}$ 中凸集, 从而是 $\mathbb{R}$ 中的区间. 另一方面, 由 A 是开集可得 $f(A)$ 是开集, 即为一个开区间. 事实上, 当我们取 $x \in A$, 由于 A 是开集, 则存在足够小的 $\delta > 0$, 使得当 $|t| < \delta$ 时, 有 $x + tx_0 \in A$. 那么

$$f(x+tx_0) = f(x) + tf(x_0) \in f(A).$$

注意到 $f(x_0) = p(x_0) > 0$, 则可知 $(f(x) - \delta f(x_0), f(x) + \delta f(x_0))$ 是一个非空区间, 并且

$$(f(x) - \delta f(x_0), f(x) + \delta f(x_0)) \subset f(A).$$

所以 $f(A)$ 是开集. 不妨设 $f(A) = (\beta, \alpha)$, 这里 β 为实数或 $-\infty$, 而

$$\alpha = \sup f(A) \leqslant \inf f(B).$$

因此可得 $A \subset \{f < \alpha\}$ 且 $B \subset \{f \geqslant \alpha\}$, 故定理在实数域情形得证.

现考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情形. 我们先把 E 看成一个实的向量空间, 由以上已经得到的结论可知, 存在一个连续的实线性泛函 $\varphi : E \to \mathbb{R}$ 以及常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得

$$A \subset \{\varphi < \alpha\} \text{ 且 } B \subset \{\varphi \geqslant \alpha\}.$$

那么 $f = \varphi - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}\cdot)$ 即为所求的复连续线性泛函 (见注 8.1.8). ■

注 8.2.2 在定理 8.2.1 的证明中蕴含着一个事实: 设 E 是一个拓扑向量空间, f 是其上非零的线性泛函, 则 f 一定是开映射.

定理 8.2.3 (Hahn-Banach 严格隔离定理) 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, A 和 B 是 E 中不相交的凸子集. 若 A 是紧集而 B 是闭集, 则存在 $f\in E^*$ 及常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 使得

$$\sup \mathrm{Re} f(A) < \alpha < \beta < \inf \mathrm{Re} f(B).$$

证明 设 $x\in A$, 则 $x\notin B$. 由于 E 是 Hausdorff 局部凸空间且 B 是闭集, 可知存在开凸集 $U_x\in\mathcal{N}(0)$, 使得

$$(x+U_x+U_x)\cap B=\varnothing. \tag{8.2}$$

由于 A 是 E 中紧集, 则存在有限个元素 $x_1,\cdots,x_n\in A$, 使得

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}(x_k+U_{x_k}). \tag{8.3}$$

若记 $U=\bigcap\limits_{k=1}^{n}U_{x_k}$, 则 U 也是含有原点的开凸集. 令 $\widetilde{A}=A+U$. 则

(1) $\widetilde{A}$ 是开凸集.

(2) $\widetilde{A}\cap B=\varnothing$: 任取 $\widetilde{a}\in\widetilde{A}$, 则可把 $\widetilde{a}$ 表达成 $\widetilde{a}=a+u$, 这里 $a\in A$, $u\in U$. 并由关系式 (8.3), 可得存在某个 $1\leqslant k\leqslant n$, 使得 $a\in x_k+U_{x_k}$; 于是有

$$\widetilde{a}\in x_k+U_{x_k}+U\subset x_k+U_{x_k}+U_{x_k}.$$

故由关系式 (8.2) 可知 $\widetilde{a}\notin B$.

因此由定理 8.2.1, 存在 $f\in E^*$ 以及常数 $r\in\mathbb{R}$, 使得当 $a\in A$, $b\in B$ 时, 有

$$\mathrm{Re} f(a)<r \quad \text{且} \quad \mathrm{Re} f(b)\geqslant r.$$

因 A 是紧凸集并且 f 是连续线性泛函, 故 $\mathrm{Re} f(A)$ 也是紧凸集. 那么 $\mathrm{Re} f(A)$ 是闭区间, 记作 $[r_1,r_2]$, 这里 $r_1\leqslant r_2<r$. 此时可取 α, $\beta\in\mathbb{R}$, 使其满足 $r_2<\alpha<\beta<r$, 从而定理结论成立. ■

注 8.2.4 上述两个定理的几何解释如下 (设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$): 线性泛函 f 和实数 α 决定 E 中的超平面 $\{f=\alpha\}$, 即 $\{x\in E, f(x)=\alpha\}$. 该超平面将空间 E 分成两个半空间. 上述定理的结论表明不相交凸集 A 和 B 分别属于这两个半空间, 换句话说, A 和 B 可被超平面隔离. 在定理 8.2.3 的假设下, A 和 B 可被严格隔离.

推论 8.2.5 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, B 是一个平衡的闭凸集, 而 $x_0\in E\setminus B$. 那么存在 $f\in E^*$, 使得 $f(x_0)>1$ 且 $\sup\limits_{x\in B}|f(x)|\leqslant 1$.

证明 设 $A=\{x_0\}$, 则 A 是紧集, 由定理 8.2.3 可得, $f\in E^*$ 及常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 使得

$$\sup \mathrm{Re} f(B)<\alpha<\beta<\mathrm{Re} f(x_0).$$

因 $0\in B$, 故有 $\alpha>0$. 我们设 $g=\frac{1}{\alpha}f$, 则也有 $g\in E^*$. 并由上式可得

$$\sup \mathrm{Re}\, g(B)<1<\mathrm{Re}\, g(x_0)\leqslant |g(x_0)|=\lambda g(x_0),\quad \lambda=\mathrm{sgn}\, g(x_0).$$

再令 $h=\lambda g$, 则 $h(x_0)=|g(x_0)|>1$. 再注意到 B 是平衡的, 可得

$$\sup |h|(B)=\sup |g|(B)=\sup \mathrm{Re}\, g(B).$$

故 h 为满足要求的泛函. ■

推论 8.2.6 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, F 是 E 的向量子空间且 $x_0\in E$. 则 $x_0\in\overline{F}$ 当且仅当对任意 $f\in E^*$, 若其满足 $f|_F=0$, 则必有 $f(x_0)=0$.

证明 必要性显而易见, 只需证明充分性. 假设 $x_0\notin\overline{F}$, 则由推论 8.2.5 可知, 存在 $f\in E^*$, 使得 $f(x_0)>1$ 而 $\sup|f|(\overline{F})\leqslant 1$. 故对任意 $x\in\overline{F}$, 有 $|f(x)|\leqslant 1$. 另外, 因 F 是向量空间, 我们导出 $f|_F=0$. 推论得证. ■

由此推论, 我们立即得到一个利用连续线性泛函来刻画子空间稠密性的结论:

推论 8.2.7 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, F 是 E 的向量子空间. 则 F 在 E 中稠密当且仅当对任意 $f\in E^*$, 若其满足 $f|_F=0$, 则必有 $f=0$.

推论 8.2.8 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间. 则其对偶空间 E^* 是可分点的, 即任取 $x,y\in E$, $x\neq y$, 则存在 $f\in E^*$, 使得 $f(x)\neq f(y)$.

注 8.2.9 推论 8.2.8 意味着 Hausdorff 局部凸空间 E 的对偶空间 E^* 的元素足够多.

下面重要定理说明向量空间上具有相同连续线性泛函的 Hausdorff 局部凸拓扑具有相同的凸闭集.

推论 8.2.10 (Mazur 定理) 设 E 是向量空间, τ_1 和 τ_2 都是 E 上的 Hausdorff 拓扑, 并使得 (E,τ_1) 和 (E,τ_2) 都成为局部凸空间. 如果对任意线性泛函 $f:E\to\mathbb{K}$, 它的 τ_1–连续等价于 τ_2–连续, 即

$$(E,\tau_1)^*=(E,\tau_2)^*,$$

那么 E 中任意凸集 A 是 τ_1–闭的当且仅当 A 是 τ_2–闭的. 因此, 若 A 为 E 中的凸集, 则有 $\overline{A}^{\tau_1}=\overline{A}^{\tau_2}$.

证明 假设 A 为 E 中的凸集且是 τ_1–闭的, 但不是 τ_2–闭的. 那么存在一点 $x_0 \in \overline{A}^{\tau_2}$ 而 $x_0 \notin A$. 那么由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f \in (E, \tau_1)^*$ 及常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得

$$\sup \mathrm{Re} f(A) < \alpha < \mathrm{Re} f(x_0).$$

另一方面, 由定理条件可知 f 也是 τ_2–连续的. 但是 $x_0 \in \overline{A}^{\tau_2}$, 故由 $\sup \mathrm{Re} f(A) < \alpha$ 可得 $\mathrm{Re} f(x_0) \leqslant \alpha$. 这与上式矛盾, 结论得证. ■

注 8.2.11 定理中集合 A 为凸集的条件是必要的. 特别要注意的是, 凸的 τ_1–开集不一定是 τ_2–开集.

§8.3 弱拓扑和弱 * 拓扑

设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, F 是由 E 上的某些线性泛函构成的向量空间. 在本节中, 我们总是假设 F 关于 E 是可分点的: 对每一个 $x \neq 0$, 总存在 $f \in F$, 使得 $f(x) \neq 0$.

自然地, $\{|f| : f \in F\}$ 是 E 上可分点的半范数族, E 在此半范数族下成为半赋范空间. 我们记由此半范数族诱导的拓扑为 $\sigma(E,F)$, 则 $(E, \sigma(E,F))$ 是一个 Hausdorff 局部凸空间. 当我们考虑 E 相应于拓扑 $\sigma(E,F)$ 的某个性质时, 约定在此性质上加前缀 "$\sigma(E,F)$–". 比如集合 A 关于拓扑 $\sigma(E,F)$ 是闭集时, 则称 A 为 "$\sigma(E,F)$–闭".

正如在 §7.2 的结论, $\sigma(E,F)$ 是与向量空间 E 相容的并且使 $f \in F$ 都连续的最弱的向量拓扑 (参见定理 7.2.6). 实际上, 反向的结论也成立, 即 $(E, \sigma(E,F))$ 上的任一连续线性泛函一定属于 F. 为证明该结论, 我们先给出如下引理.

引理 8.3.1 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, $f, f_1, \cdots, f_n$ 是 E 上的有限个线性泛函. 那么下面的命题等价:

(1) f 是 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

(2) 存在常数 $C \geqslant 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant C \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |f_k(x)|, \quad \forall\, x \in E.$$

(3) $\bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \ker f_k \subset \ker f$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 显然成立, 故只需证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 首先构造集合

$$G = \{(f_1(x), \cdots, f_n(x)) : x \in E\} \subset \mathbb{K}^n.$$

则由 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性性可知 G 是 $\mathbb{K}^n$ 的向量子空间. 定义映射 $\varphi: G \to \mathbb{K}$:

$$(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \mapsto f(x).$$

假设有 $(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = (f_1(x'), \cdots, f_n(x'))$, $x, x' \in E$,也就是

$$(f_1(x - x'), \cdots, f_n(x - x')) = 0.$$

则由命题 (3) 的条件可知

$$x - x' \in \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} \ker f_k \subset \ker f,$$

即得 $f(x) = f(x')$, 这意味着以上 φ 的定义是合理的. 容易验证 φ 是线性的. 因此, 根据 Hahn-Banach 延拓定理 (其实只需延拓引理 8.1.2), φ 可以延拓成线性泛函 $\widetilde{\varphi}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. 那么存在 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, 使得

$$\widetilde{\varphi}((y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k.$$

因此再把 $\widetilde{\varphi}$ 限制在 G 上即意味着

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x), \quad \forall x \in E.$$

结论得证. ■

定理 8.3.2 *$(E, \sigma(E, F))^* = F$. 也就是说, E 上的线性泛函 f 是 $\sigma(E, F)$–连续的充分必要条件为 $f \in F$.*

证明 由定理 7.2.6 立即可得 $F \subset (E, \sigma(E, F))^*$. 以下证明反向的包含关系. 设 $f : E \to \mathbb{K}$ 是 $\sigma(E, F)$–连续的. 则根据定理 7.2.9 知存在常数 $C \geqslant 0$ 及 $f_1, \cdots, f_n \in F$, 使得

$$|f| \leqslant C \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |f_k|.$$

我们把 f_k 换成 Cf_k, 则上式中可假设 $C = 1$. 根据上面的引理 8.3.1, 存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ 使得 $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$. 由于 F 是一个向量空间, 可得 $f \in F$. ■

8.3.1 弱拓扑

设 E 为 Hausdorff 局部凸空间, E^* 是 E 的对偶空间. 那么根据 Hahn-Banach 定理可知, E^* 在 E 上是可分点的. 定义 $\sigma(E,E^*)$ 为 E 上的*弱拓扑*. 则 $(E,\sigma(E,E^*))$ 是一个 Hausdorff 局部凸空间. 当我们考虑 E 上相应于弱拓扑的某个性质时, 约定在此性质上加上前缀 "w–". 比如称集合 $A\subset E$ 是 "w–闭" 或 "w–紧" 等.

弱拓扑 $(E,\sigma(E,E^*))$ 有如下显而易见的性质:

(1) 由定理 8.3.2, 线性泛函 $f:E\to\mathbb{K}$ w–连续等价于关于 E 上原来的拓扑连续, 即

$$(E,\sigma(E,E^*))^*=E^*.$$

(2) 假设 A 是 E 中的凸子集. 根据 Mazur 定理以及上面的等式, 可知 A 是闭的当且仅当 A 是 w–闭的, 即 $\overline{A}=\overline{A}^w$.

8.3.2 弱 * 拓扑

设 E 为 Hausdorff 局部凸空间, E^* 是 E 的对偶空间. 对任意 $x\in E$, 定义泛函

$$\widehat{x}:\ E^*\to\mathbb{K},\quad f\mapsto f(x).$$

显然 $\widehat{x}$ 是线性的. 我们记 $\widehat{E}=\{\widehat{x}:x\in E\}$, 则 $\widehat{E}$ 是由 E^* 上的如上的线性泛函 $\widehat{x}$ 构成的向量空间. 显然 $\widehat{E}$ 在 E^* 上是可分点的. 定义 $\sigma(E^*,\widehat{E})$ 为 E^* 上的*弱 * 拓扑*, 则 $(E^*,\ \sigma(E^*,\widehat{E}))$ 成为一个 Hausdorff 局部凸空间. 当我们考虑 E^* 上相应于弱 * 拓扑的某个性质时, 约定在该性质上加前缀 "w^*–".

特别注意, $x\mapsto\widehat{x}$ 是 $E\to\widehat{E}$ 的线性双射, 并由此可知 E 和 $\widehat{E}$ 线性同构. 在此意义下, 可记 $\widehat{E}=E$. 进而也可记

$$\sigma(E^*,\ \widehat{E})=\sigma(E^*,\ E).$$

由定理 8.3.2, $(E^*,\sigma(E^*,E))$ 有如下的基本性质: $\varphi:\ E^*\to\mathbb{K}$ 是 $(E^*,\sigma(E^*,E))$ 上的连续线性泛函等价于 $\varphi\in\widehat{E}$, 即 φ 对应某一 $x\in E$. 也就是说

$$(E^*,\sigma(E^*,E))^*=E.$$

注 8.3.3 设 E 为 Hausdorff 局部凸空间, 以上定义赋予了 E^* 上的 w^*–拓扑. 若 E 还为赋范空间, 我们知道 E^* 本身是 Banach 空间, 因此 E^* 上自然地有一个范数拓扑 $\|\cdot\|$; 相对于 w^*–拓扑, 我们称该拓扑为 E^* 上的强拓扑. 实际上, 任取 $\widehat{x}\in(E^*,\sigma(E^*,\widehat{E}))^*$, 对任意 $x^*\in E^*$, 有 $|\widehat{x}(x^*)|=|x^*(x)|\leqslant\|x^*\|\|x\|$, 故 $\widehat{x}\in(E^*,\|\cdot\|)^*$. 我们将在下一章给出进一步的讨论.

例 8.3.4 (缓增广义函数) 在第七章中, 我们介绍了 Schwartz 函数类 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其上的半范数族 $(\|\cdot\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ 定义为

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

其中 α, β 是非负整数构成的 n 重指标. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在此半范数族诱导的拓扑下成为一局部凸空间. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间表示为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^*$, 则在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上可以赋予弱 * 拓扑. 我们称 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素为缓增广义函数. 缓增广义函数是广义函数理论中一种非常有意义和有代表性的特殊形式. 我们给出两个典型的例子.

- **Dirac 函数** δ_a , $a \in \mathbb{R}^n$: 任取 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\delta_a(f) = f(a)$. 显然对任何 $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- 设 g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 令

$$L_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

  通过对应关系 $g \mapsto L_g$, 我们可以把某些 g 看成 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的泛函. 容易验证对任意 $g \in L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p \leqslant \infty, L_g$ 都是缓增广义函数.

我们可以在广义函数上定义诸如微分运算、Fourier 变换等, 从而使广义函数的理论在偏微分方程和调和分析理论中得到极大应用, 大大推广了其理论的发展. 关于广义函数更一般的理论和理论细节可以参考文献 Yosida [11].

本章的最后讨论极集并证明双极定理.

8.3.3 极性

定义 8.3.5 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, E^* 为 E 的对偶空间. 对于 $A \subset E$, 称 E^* 中子集

$$A^\circ = \{x^* \in E^* : |x^*(x)| \leqslant 1, \forall x \in A\}$$

为 A 的极 (或极集).

极集有如下性质:

(1) A° 是凸的、平衡的并且是 w^*–闭的. 实际上, 任取 $x^*, y^* \in A^\circ$, $t \in [0,1]$, 对每一个 $x \in A$, 我们有

$$|(tx^* + (1-t)y^*)(x)| = |tx^*(x) + (1-t)y^*(x)| \leqslant t + 1 - t = 1.$$

故 A° 是凸的. 类似地, 由定义可直接验证 A° 是平衡的.

另外, 对于任意给定的 $a \in A$, 因 $\widehat{a}$ 在 E^* 上是 w^*–连续的, 故 $\widehat{a}^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{K}})$ 是 w^*–闭集. 那么

$$A^\circ = \bigcap_{a \in A} \widehat{a}^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{K}})$$

是 w^*–闭的.

(2) $A \subset B \subseteq E \Longrightarrow B^\circ \subset A^\circ$.

(3) 假设 $\operatorname{convba} A$ 是 A 的凸平衡包 (包含 A 的最小的凸平衡集), 则 $A^\circ = (\operatorname{ccb} A)^\circ$. 其中 $\operatorname{ccb} A$ 表示 A 的闭凸平衡包, 即 $\operatorname{ccb}A = \overline{\operatorname{convba}A}$.

首先我们给出 $\operatorname{convba} A$ 的构造 (构造的合理性留作练习, 见习题八, 6):

$$\operatorname{convba} A = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : \ x_k \in A, \ n \in \mathbb{N}, \ \lambda_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}.$$

显然有 $(\operatorname{ccb} A)^\circ \subset A^\circ$. 我们证明反向包含关系也成立, 设 $x^* \in A^\circ$, 由极的定义可得 $\sup |x^*(A)| \leqslant 1$. 设 $x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}$ 并满足 $\sum\limits_{k=1}^n |\lambda_k| \leqslant 1$. 则

$$\left| x^* \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k| |x^*(x_k)| \leqslant 1.$$

并且由于 x^* 在 E 上连续, 可得 $\sup |x^*((\operatorname{ccb} A)^\circ)| \leqslant 1$. 因此 $x^* \in (\operatorname{ccb} A)^\circ$, 即 $A^\circ \subset (\operatorname{ccb} A)^\circ$.

(4) 对任意 $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $\lambda \neq 0$, 有 $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$.

(5) $\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i \right)^\circ = \bigcap\limits_{i \in I} A_i^\circ$.

(6) 设 $F \subset E$ 是向量子空间, 则 $F^\circ = \{x^* \in E^* : x^*|_F = 0\}$. 而集合 $\{x^* \in E^* : x^*|_F = 0\}$ 也称为 F 的零化子, 记作 $F^\perp$. 并且, $F^\perp = F^\circ$ 是 E^* 的 w^*–闭向量子空间.

定义 8.3.6 设 E 是一个 Hausdorff 局部凸空间, E^* 为 E 的对偶空间, $B \subset E^*$. 则称

$$B^\circ = \{x \in E : |\langle x^*, x \rangle| \leqslant 1, \forall x^* \in B\}$$

为 B 的极 (或极集).[1]

---

[1]有的文献中把 $B \subset E^*$ 的极集记成 $B_\circ$ (参见 Rudin [6]), 以此来区分这里的概念和定义 8.3.5 中的概念. 实际上, 当我们在 E^* 上考虑 w^*–拓扑时, 因 $(E^*, \sigma(E^*, E))^* = E$, 故极集 B° 也就是定义 8.3.5 中的极集.

注 8.3.7 这里的极集和定义 8.3.5 中定义的极集有完全类似的性质. 例如, B° 是凸的、平衡的和 w–闭的 (等价于闭的), 并且 B° 等于 B 的凸平衡 w^*–闭包的极集.

设 $A \subset E$, 定义 A 的极集的极集为 A 的**双极集**, 记作 $A^{\circ\circ}$, 即有

$$A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ \subset E.$$

类似地, 对 $B \subset E^*$, 我们也可定义 B 的双极集 $B^{\circ\circ} \subset E^*$.

定理 8.3.8 (双极定理) 假设 E 是一个 Hausdorff 局部凸空间. 设 $A \subset E$, $B \subset E^*$.

(1) $A^{\circ\circ} = A$ 当且仅当 A 是凸的、平衡的和闭的 (等价于 w–闭的).
一般地, $A^{\circ\circ}$ 与 A 的凸平衡闭包相同.

(2) $B^{\circ\circ} = B$ 当且仅当 B 是凸的、平衡的和 w^*–闭的.
一般地, $B^{\circ\circ}$ 与 B 的凸平衡 w^*–闭包相同.

证明 我们只证明命题 (1), 命题 (2) 类似可证.

必要性由极的定义和性质立即可得. 下面证明充分性. 首先由定义显然有 $A \subset A^{\circ\circ}$. 反过来, 取 $x \in E \setminus A$, 根据 Hahn-Banach 定理, 因为 A 为凸平衡的闭集 (蕴含 $0 \in A$), 故存在 $x^* \in E$, 使得 $x^*(x) > 1$ 且 $\sup|x^*(A)| \leqslant 1$ (见推论 8.2.5). 由此可知 $x^* \in A^\circ$, 但 $x^*(x) > 1$, 故 $x \notin A^{\circ\circ}$, 即有 $A^{\circ\circ} \subset A$. ■

习 题 八

1. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的 p 范数:

$$\|(x_1,x_2)\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \ p<\infty;\quad \|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}.$$

设 $F = \mathbb{R} \times \{0\}$, 即由 $e_1 = (1,0)$ 生成的向量子空间, 并设 $f : F \to \mathbb{R}$ 是线性泛函, 满足 $f(e_1) = 1$.

(a) 当 $\mathbb{R}^2$ 上赋予 $\|\cdot\|_1$ 范数时, 确定 f 从 F 到 $\mathbb{R}^2$ 的所有保范延拓.

(b) 当 $\mathbb{R}^2$ 上赋予 $\|\cdot\|_p$ 范数时, 考虑同样的问题.

2. 通过 $\mathbb{R}^2$ 上的反例说明在几何形式的 Hahn-Banach 定理中, 一个凸子集是开集的条件是必要的.

3. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, $A \subset E$, 并设映射 $f : A \to \mathbb{K}$ 以及常数 $\lambda \geqslant 0$. 证明: 存在 $\widehat{f} \in E^*$, 使得

$$\widehat{f}\big|_A = f \quad 且 \quad \|\widehat{f}\| \leqslant \lambda$$

的充分必要条件是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(a_k)\right|\leqslant\lambda\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k\right\|,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\forall(a_1,\cdots,a_n)\in A^n,\forall(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n.$$

4. 设 E 是 Hausdorff 拓扑向量空间, A 是 E 中包含原点的开凸集以及 $x_0\in E\backslash A$.

(a) 证明: 存在 $f\in E^*$, 使得

$$\mathrm{Re}f(x_0)=1,\ \text{且在 } A \text{ 上 } \mathrm{Re}f<1.$$

(b) 假设 A 还是平衡的. 证明: 可以选择 $f\in E^*$, 使其满足

$$f(x_0)=1,\ \text{且在 } A \text{ 上 } |f|<1.$$

5. 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, A 是 E 中包含原点的闭凸集以及 $x_0\in E\setminus A$.

(a) 证明: 存在 $f\in E^*$, 使得

$$\mathrm{Re}f(x_0)>1\quad\text{且}\quad\sup_{x\in A}\mathrm{Re}f(x)\leqslant 1.$$

(b) 假设 A 还是平衡的. 证明: 可以选择 f, 使其满足

$$f(x_0)=1\quad\text{且}\quad\sup_{x\in A}|f(x)|\leqslant 1.$$

6. 设 E 是实的 Hausdorff 局部凸空间, $A\subset E$. 定义 E 的子集 $\widehat{A}$ 由满足如下条件的元素 x 构成: 若取 $f\in E^*$ 满足对任意的 $a\in A$, 有 $f(a)\leqslant 1$, 则 $f(x)\leqslant 1$.

(a) 证明: $\overline{\mathrm{conv}(A)}\subset\widehat{A}$.

(b) 证明: $\overline{\mathrm{conv}(A)}=\widehat{A}$ 等价于 $0\in\overline{\mathrm{conv}(A)}$.

7. 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间, $A\subset E$. 定义 E 的子集 $\widehat{A}$ 由满足如下性质的元素 x 构成: 若取 $f\in E^*$ 满足对任意 $a\in A$, 有 $|f(a)|\leqslant 1$, 则 $|f(x)|\leqslant 1$. 设 $\mathrm{ccb}\,A$ 表示 A 的闭凸平衡包, 即包含 A 的所有闭凸平衡集的交集.

(a) 证明: $\mathrm{ccb}\,A\subset\widehat{A}$.

(b) 证明: $\mathrm{ccb}\,A=\widehat{A}$ 等价于 $0\in\mathrm{ccb}\,A$.

8. 设 E 是拓扑向量空间, C 是 E 中非空的紧凸子集. 令 $f_1,\cdots,f_m$ 是一组 E 上的实值凸函数. 考虑

$$G=\{y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^m:\exists x\in C\ \text{使得}\ f_i(x)\leqslant y_i,\ \forall 1\leqslant i\leqslant m\}$$

和

$$S=\{x\in C:f_i(x)\leqslant 0,\ \forall 1\leqslant i\leqslant m\}.$$

并假设 $S\neq\varnothing$.

(a) 证明 G 是闭凸集; 把假设 $S\neq\varnothing$ 用集合 G 表示出来.

(b) 证明: 存在 $\varepsilon>0$ 以及一组不全为 0 的非负实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$, 满足

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\geqslant\varepsilon,\ \forall x\in C.$$

9. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑向量空间. 称 E 的向量子空间 H 是超平面, 若有某个 $x_0\in E\setminus H$, 使得 $E=H+\mathbb{K}x_0$.

(a) 证明: 若 H 是超平面, 则对任意 $x_0\in E\setminus H$, $E=H+\mathbb{K}x_0$ 成立.

(b) 证明: 一个超平面或者是 E 中的稠密集, 或者是闭集.

(c) 证明: H 是超平面当且仅当存在 E 上的一个非零线性泛函 f, 使得 $H=\ker f$. 因而 H 是闭的等价于 f 是连续的.

称 H 是一个仿射超平面, 若 H 是某个超平面 H_0 的平移, 也就是说, 存在某个 $a\in E$, 使得 $H=H_0+a$. 因此, H 是仿射超平面意味着存在一个线性泛函 f, 以及某个常数 $\alpha\in\mathbb{K}$, 使得 H 能被表示为 $H=\{x\in E: f(x)=\alpha\}$. 在术语的使用上, 我们通常把仿射超平面也简单地称为超平面.

10. 设 E 是实的拓扑向量空间, $A\subset E$ 非空. 称超平面

$$H=\{f=\alpha\},\ f\in E^*,\alpha\in\mathbb{R}$$

是 A 的支撑超平面, 若 $A\cap H\neq\varnothing$ 并且 $A\subset\{f\leqslant\alpha\}$ 或 $A\subset\{f\geqslant\alpha\}$.

(a) 设 $f\in E^*$, $f\neq 0$, 并假设 A 是紧集. 证明: 存在 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使得 $\{f=\alpha\}$ 是 A 的支撑超平面.

(b) 假设 A 是内部非空的闭凸集. 证明: 任取 $x\in\partial A$, 存在 A 的支撑超平面 H, 使得 $x\in H$.

11. 设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是实赋范空间, $\overline{B}_X$ 表示该空间中的闭单位球. 假设 $K\geqslant 1$, C 是 X 中闭凸对称子集 (C 对称是指 $x\in C\implies -x\in C$), 且满足

$$B_X\subset C\subset K\overline{B}_X.$$

定义

$$p(x)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{x}{\lambda}\in C\right\},\ \forall x\in X.$$

(a) 证明: p 是 X 上和 $\|\cdot\|_X$ 等价的范数. 更精确地说, 证明:

$$\frac{1}{K}\|x\|\leqslant p(x)\leqslant\|x\|,\ \forall x\in X.$$

(b) 设 $x\in X$. 证明:

(i) $x\in X\setminus C\iff p(x)>1$.

(ii) $x \in \mathring{C} \iff p(x) < 1$.

(iii) $x \in \partial C \iff p(x) = 1$.

(c) 任取 $x \in \partial C$. 证明: 存在 X 上的连续线性泛函 f, 使得 $f(x) = 1$ 且在集合 C 上, $|f| \leqslant 1$.

12. 令 $1 < p < \infty$ 且 $0 < |a| < 1, a \in \mathbb{R}$. 对任意正整数 k, 定义序列 $x_k = (a^{kn})_{n\geqslant 1}$. 证明: $x_k \in \ell_p$ 且 $\operatorname{span}(x_k)_{k\geqslant 1}$ 在 ℓ_p 中稠密.

13. 考虑空间 ℓ_1 中的如下子集:

$$A_0 = \{x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_1 : x_{2n} = 0, \forall n \geqslant 1\},$$

$$B = \{x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_1 : x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1}, \forall n \geqslant 1\}.$$

(a) 证明: A_0 和 B 是 ℓ_1 的闭向量子空间且 $A_0 + B$ 在 ℓ_1 中稠密.

(b) 设 $c \in \ell_1$ 满足 $c_{2n-1} = 0$ 及 $c_{2n} = 2^{-n}$, 并设 $A = A_0 - c$. 证明: $c \notin A_0 + B$ 且 $A \cap B = \varnothing$. 并证明: 不存在 $f \in \ell_1^*$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $A \subset \{f \leqslant \alpha\}$ 以及 $B \subset \{f \geqslant \alpha\}$.

14. 设 E 是赋范空间, 而 X 是 E 的有限维向量子空间. 我们的目标是证明: X 是 E 的余子空间.

(a) 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 X 中的一组基. 证明: 存在 X 上一组连续线性泛函 $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$, 使得 $\langle e_i, e_j^* \rangle = 0, \forall i \neq j$ 以及 $\langle e_i, e_i^* \rangle = 1$.

(b) 定义 $P : E \to E$ 为

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i, \ \forall x \in E.$$

证明: P 是像集为 X 的连续线性映射, 且有 $P \circ P = P$.

(c) 导出 $\ker P$ 是 X 在 E 中的拓扑补子空间, 即 $E = X \oplus \ker P$.

(d) 该结论在 E 是 Hausdorff 局部凸空间时是否仍然正确?

15. 本习题的目的是刻画连续线性泛函的 Hahn-Banach 延拓的唯一性问题. 我们称一个赋范空间 E 是严格凸的, 若其单位球面 S_E 上的每个点是其闭单位球 $\overline{B}_E$ 上的端点, 即是说: 任取 $x \in S_E$, 不存在 $\overline{B}_E$ 中相异的两点 x_1 和 x_2, 使得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

设 E 是一个维数至少为 2 的赋范空间. 我们将证明:

$(*)$ E 的向量子空间 F 上的每个连续线性泛函有唯一的保范延拓当且仅当 E^* 是严格凸的.

(a) 证明命题 $(*)$ 的充分性.

(b) 反过来, 设 f_1 和 f_2 是 E 上两个不同的线性泛函, 满足

$$\|f_1\| = \|f_2\| = \left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\| = 1.$$

设 $F = \ker(f_1 - f_2)$ 且 φ 是 f_1 在 F 上的限制.

(i) 设 (x_n) 是 S_E 上的序列, 满足

$$\lim_n \frac{f_1(x_n)+f_2(x_n)}{2} = 1.$$

证明:

$$\lim_n f_1(x_n) = \lim_n f_2(x_n) = 1.$$

(ii) 选择适当的向量 $e \in E$ 使得 $f_1(e) - f_2(e) = 1$. 记 $x_n = y_n + a_n e$, 其中 $a_n = f_1(x_n) - f_2(x_n)$. 证明: $y_n \in F$ 且 $\lim_n \|y_n\| = 1$.

(iii) 最后导出 $\|\varphi\| = 1$, 因此 φ 有两个不同的 Hahn-Banach 线性延拓 f_1 和 f_2.

16. 考虑空间 ℓ_∞ 和它的向量子空间 F:

$$F = \left\{x \in \ell_\infty \ :\ \lim_{n\to\infty} m_n(x)\ \text{存在}\right\},\ \text{其中}\ m_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(a) 定义 $f: F \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = \lim_{n\to\infty} m_n(x)$. 证明: $f \in F^*$.

(b) 证明: 存在 ℓ_∞ 上连续线性泛函 m 满足下面的性质:

(i) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant m(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n,\ \forall\, x \in \ell_\infty$.

(ii) $m \circ \tau = m$, 这里 $\tau: \ell_\infty \to \ell_\infty$ 是右移算子, 即 $\tau(x)_n = x_{n+1}$.

(m 被称为 Banach 平均或 ℓ_∞–极限.)

17. 保持上一习题中的概念, 并用 $\mathbb{1}$ 表示每项为 1 的序列, Y 表示映射 $\mathrm{I}_{\ell_\infty} - \tau$ 的像集.

(a) 证明: $d(\mathbb{1}, Y) \geqslant 1$.

(b) 定义函数 $f: \mathrm{span}(Y \cup \{y\}) \to \mathbb{R}$ 如下

$$f(t\mathbb{1} + y) = t, \quad t \in \mathbb{R},\ y \in Y.$$

证明: f 是范数为 1 的线性泛函.

(c) 证明: 存在 ℓ_∞ 上的一个范数为 1 的线性泛函 m, 使得 $m \circ \tau = m$.

18. 设 E 是无限维赋范空间.

(a) 证明: E 中原点处的任一弱邻域包含一个一维向量子空间.

(b) 导出下面的结论:

(i) E 中的开单位球 B 不是弱开集, 甚至它的内部在弱拓扑下是空集.

(ii) E 中的单位球面 S 的弱闭包是闭单位球 $\overline{B}$.

(iii) 弱拓扑不能度量化.

19. 设 E 是赋范空间. 并假设 E 中的序列 (x_n) 弱收敛到 x. 证明: 存在 (x_n) 的一个凸组合序列 (y_n) 依范数收敛到 x. 具体地说, 就是存在一列数 $t_{k,n} \geqslant 0$, 使得

- 对每个 n, 仅有有限个 $t_{k,n}$ 不为零.
- $\sum\limits_{k\geqslant 1} t_{k,n} = 1$;
- $y_n = \sum\limits_{k\geqslant 1} t_{k,n} x_k$ 依范数收敛到 x.

提示: 考虑 $\{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ 的凸包 K 并应用关系 $\overline{K}^w = \overline{K}^{\|\cdot\|}$.

20. 设 E 和 F 都是赋范空间, $u : E \to F$ 是线性映射. 证明下面的命题等价:

(a) $u : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|)$ 连续.

(b) $u : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ 连续.

(c) $u : (E, \|\cdot\|) \to (F, \sigma(F, F^*))$ 连续.

21. 设 $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) 证明: 对每个 $1 \leqslant p < \infty$, e_n 在 $L_p(0, 2\pi)$ 中弱收敛到 0 但不依范数收敛到 0.

(b) 设 $f_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n^2} e_k$. 证明: f_n 在 $L_2(0, 2\pi)$ 中弱收敛到 0 但不依范数收敛到 0.

22. 考虑实 Banach 空间 ℓ_1. 回顾基本结论: ℓ_1 是 c_0 的对偶空间, ℓ_∞ 是 ℓ_1 的对偶空间.

(a) 设 $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_1$, 且对每个 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x^k = (x^k_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_1$ (注意这里的上标 k 不是幂, 故 $(x^k)_{k\geqslant 1}$ 表示 ℓ_1 中的序列).

证明: $x^k \xrightarrow{w^*} x$ 当且仅当 (x^k) 在 ℓ_1 中有界, 且对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $x^k_n \to x_n$.

举一个 (x^k) 的具体例子, 使得 $x^k \xrightarrow{w^*} 0$ 但 $\|x^k\|$ 不趋向于 0.

(b) 设 $C = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. 我们在 $\{-1, 1\}$ 上赋予离散拓扑, 则 C 上有相应的乘积拓扑. 令 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \in C$ 及 $p \in \mathbb{N}$, 令

$$V_{\varepsilon,p} = \{\eta = (\eta_n)_{n\geqslant 1} : \eta_n = \varepsilon_n, \forall\, n \leqslant p\}.$$

证明: $(V_{\varepsilon,p})_{p\in\mathbb{N}}$ 是拓扑空间 C 在 ε 处的邻域基.

解释 C 为什么是 Baire 空间.

我们现在假设: 存在 ℓ_1 中的序列 (x^k) 及常数 $a > 0$, 使得

$$x^k \xrightarrow{w} 0 \quad 且 \quad \|x^k\|_1 > 3a, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

(c) 设 $k \in \mathbb{N}$, 定义 $\phi_k : C \to \mathbb{R}$ 为

$$\phi_k(\varepsilon) = \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x_n^k, \forall\, \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \in C.$$

证明: ϕ_k 连续. 进而导出: 任取 $N \in \mathbb{N}$,

$$F_N = \bigcap_{k\geqslant N} \{\varepsilon \in C \,:\, |\phi_k(\varepsilon)| \leqslant a\}$$

是 C 的闭子集.

(d) 设 $p, N \in \mathbb{N}$ 且 $\varepsilon \in F_N$. 证明: 存在 $k \geqslant N$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{p} |x_n^k| < a$.

由此推出: 存在 $k \geqslant N$ 及 $\eta \in V_{\varepsilon,p}$, 使得 $\phi_k(\eta) > a$.

证明: 每个 F_N 的内部是空集, 因而有

$$C \setminus \bigcup_{N\in\mathbb{N}} F_N \neq \varnothing.$$

(e) 设 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \in C \setminus \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} F_p$. 证明: 存在一个递增的序列 (p_k), 使得

$$\left|\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x_n^{p_k}\right| > a, \forall k \in \mathbb{N}.$$

解释为什么这个结论和 $x^k \xrightarrow{w} 0$ 矛盾.

(f) 由命题 (c), (d) 和 (e) 导出: $x^k \xrightarrow{w} x$ 当且仅当 $\|x^k - x\|_1 \to 0$.

讨论本习题结论的意义是什么.

第九章 Banach 空间的对偶理论

本章专门讨论 Banach 空间的对偶理论. 第八章建立的 Hahn-Banach 定理为讨论内容丰富的对偶和共轭理论打下了坚实的理论基础, 所以说 Hahn-Banach 定理是泛函分析中最重要的定理.

我们在 §9.1 引入共轭算子. 在有限维的欧氏空间上, 共轭算子的原型就是共轭矩阵. 共轭算子这一概念在泛函分析理论中有丰富的内容. §9.2 我们将刻画赋范空间的子空间以及商空间的对偶空间. §9.3 讨论赋范空间的自反性, 若一个空间是自反的, 则意味着该空间和它的二次对偶空间在自然嵌入意义下相等. §9.4 专门研究弱 * 拓扑下的紧性问题, 其核心结果是 Banach-Alaoglu 定理. §9.5 刻画 $L_p(\Omega,\mu)$ 空间 $(1\leqslant p<\infty)$ 的对偶空间.

在本章中, E 总是表示一个赋范空间, 而 E^* 是 E 关于范数拓扑的对偶空间. 首先我们回顾一些基本内容, 并约定一些新的符号. 我们已经知道 E^* 是一个 Banach 空间 (见第三章, 定理 3.2.6), 其上的范数为

$$\|x^*\| = \sup_{x\in E,\|x\|\leqslant 1} |x^*(x)|.$$

对比 Hilbert 空间的内积运算符号, 我们在此引入一个新的符号 —— "括号" 来表示 $x^*(x)$, 即记

$$\langle x^*, x\rangle = x^*(x),\ x\in E,\ x^*\in E^*.$$

$(E^*,\|\cdot\|)$ 的对偶空间 $(E^*)^*$ 称为 E 的二次对偶, 记作 E^{**}, 即 $E^{**}=(E^*)^*$. 并称

$$\iota:\ E\to\ E^{**},\ x\mapsto \widehat{x}$$

为 E 到 E^{**} 的自然嵌入映射. 根据 Hahn-Banach 延拓定理 (见推论 8.1.15 和其后的讨论), 可知嵌入映射 ι 是线性等距的 (不一定是满的). 从而 E 与 $\widehat{E}$ 线性等距同构. 在此意义下, 我们可以把 E 和 $\widehat{E}$ 看成同一个赋范空间. 并且在等距同构意义下, E 可以看成 E^{**} 的向量子空间, 记作 $E\hookrightarrow E^{**}$, 我们称该关系为自然嵌入.

§9.1 共 轭 算 子

下面的结果推广了 Hilbert 空间之间的共轭算子的概念.

定理 9.1.1 设 E 和 F 是赋范空间, $u \in \mathcal{B}(E,F)$. 则存在唯一的 $u^* \in \mathcal{B}(F^*,E^*)$, 使得对任意 $x \in E$ 和 $f^* \in F^*$, 有 $\langle u^*(f^*),x\rangle = \langle f^*,u(x)\rangle$. 并且 $\|u^*\| = \|u\|$. 我们称 u^* 是 u 的共轭 (算子).

下图描述了上面定理中的关系.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u^*(f^*)"'] & & F \arrow[dl, "f^*"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

证明 首先我们说明定理中定义的 $u^*: F^* \to E^*$ 的存在性. 对任意 $f^* \in F^*$, 定义 $u^*(f^*) = f^* \circ u$, 则对每一个 $x \in E$, 有

$$\langle u^*(f^*),x\rangle = f^* \circ u(x) = f^*(u(x)) = \langle f^*,u(x)\rangle.$$

由于 u 和 f^* 都是线性连续的, 可得 $u^*(f^*) \in E^*$; 而且

$$\|u^*(f^*)\|_{E^*} = \|f^* \circ u\|_{E^*} \leqslant \|f^*\|_{F^*}\|u\|_{\mathcal{B}(E,F)}.$$

因此, u^* 是 F^* 到 E^* 的连续线性算子, 即有 $u^* \in \mathcal{B}(F^*,E^*)$, 且 $\|u^*\| \leqslant \|u\|$.

由 u^* 满足的关系式 $\langle u^*(f^*),x\rangle = \langle f^*,u(x)\rangle$, 容易看出它的唯一性. 实际上, 当另取 $v^* \in \mathcal{B}(F^*,E^*)$, 使得对任意 $x \in E$ 及 $f^* \in F^*$, 也有

$$\langle v^*(f^*),x\rangle = \langle f^*,u(x)\rangle,$$

则可得

$$\langle v^*(f^*),x\rangle = \langle u^*(f^*),x\rangle.$$

于是

$$v^*(f^*) = u^*(f^*),$$

该式意味着 $v^* = u^*$, 唯一性得证.

另一方面, 由范数的定义以及 Hahn-Banach 定理的推论 8.1.15, 我们有

$$\begin{aligned}
\|u^*\| &= \sup_{f^*\in F^*,\ \|f^*\|\leqslant 1} \|u^*(f^*)\| \\
&= \sup_{f^*\in F^*,\ \|f^*\|\leqslant 1}\ \sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant 1} |u^*(f^*)(x)| \\
&= \sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant 1}\ \sup_{f^*\in F^*,\ \|f^*\|\leqslant 1} |f^*(u(x))| \\
&= \sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| = \|u\|.
\end{aligned}$$

故定理得证. ■

注 9.1.2 (1) 上面定理意味着映射 $u \mapsto u^*$ 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 到 $\mathcal{B}(F^*,E^*)$ 的线性等距映射, 但可能不是满射. 例如假设 F 不完备, 这种情形下 $u \mapsto u^*$ 不是满射.

(2) 设 E,F,G 都是赋范空间且 $u \in \mathcal{B}(E,F)$, $v \in \mathcal{B}(F,G)$, 则 $(vu)^* = u^*v^*$.

注 9.1.3 若 E, F 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间, 我们要注意第四章在 Hilbert 空间意义下定义的共轭和这里 Banach 空间下定义的共轭存在细微的差别. 当数域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, 两者所定义的共轭是一致的; 但当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时, 映射 $u \mapsto u^*$ 在 Hilbert 空间下定义是共轭线性的, 而在 Banach 空间定义下是线性的.

例 9.1.4 设 $u \in \mathcal{B}(\ell_2^n)$, 这里 ℓ_2^n 是复的欧氏空间, 则

$$u(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)_{i=1}^{n}, \quad \forall\, x=(x_j)_j \in \ell_2^n.$$

这里 $(a_{1j},\cdots,a_{nj}) = u(e_j)$, $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 ℓ_2^n 的标准基. 记 $[u]=(a_{ij})$ 为线性变换对应的矩阵. 明显 $[u]$ 由 u 唯一确定; 反之, 给定任意矩阵 (a_{ij}), 可定义 $u \in \mathcal{B}(\ell_2^n)$ 使得 $[u]=(a_{ij})$. 因此我们可以等同 u 和 $[u]: u \simeq [u]$. 那么在 Hilbert 空间和 Banach 空间意义下 u^* 对应的矩阵分别为 $[u]$ 的共轭转置矩阵 $\overline{[u]}^{\mathrm{T}}$ 和转置矩阵 $[u]^{\mathrm{T}}$ (证明留作练习).

例 9.1.5 设 E 是赋范空间, F 是 E 的向量子空间. $\iota: F \to E$, $x \mapsto x$ 表示恒等映射, 显然有 $\|\iota\|=1$. 设 $\iota^*: E^* \to F^*$ 是 ι 的共轭, 则对任意 $x \in F$ 及 $e^* \in E^*$, 有

$$\langle \iota^*(e^*), x\rangle = \langle e^*, \iota(x)\rangle = \langle e^*, x\rangle.$$

由此可得 $\iota^*(e^*) = e^*|_F$, 即 $\iota^*(e^*)$ 也就是 e^* 在 F 上的限制. 若取 $E=F$, 则 $\iota = \mathrm{I}_E$. 那么 $\mathrm{I}_E^* = \mathrm{I}_{E^*}$.

下一定理很好地反映了算子和它的共轭之间的关系.

定理 9.1.6 设 E 和 F 是赋范空间, $u \in \mathcal{B}(E,F)$.

(1) 当 u 是同构映射时, u^* 也是同构映射, 且有 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

(2) 若还假设 E 是完备的, 则当 u^* 是同构映射时, u 也是同构映射.

证明 (1) 因为 u 是 E 到 F 的同构映射, 所以存在逆映射 $u^{-1} \in \mathcal{B}(F,E)$, 使得 $u^{-1}u = \mathrm{I}_E$ 且 $uu^{-1} = \mathrm{I}_F$. 那么 $u^*(u^{-1})^* = \mathrm{I}_{E^*}$ 且 $(u^{-1})^*u^* = \mathrm{I}_{F^*}$. 故 u^* 是 F^* 到 E^* 的连续双射, 并且 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$. 所以 u^* 是同构映射.

(2) 设 u^* 是同构映射, 则根据 (1) 的结论, 可知 $u^{**}:\ E^{**} \to F^{**}$ 也是同构

映射. 那么存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得对任意 $x^{**} \in E^{**}$, 有

$$C_1\|x^{**}\|_{E^{**}} \leqslant \|u^{**}(x^{**})\|_{F^{**}} \leqslant C_2\|x^{**}\|_{E^{**}}. \tag{9.1}$$

另外, E 自然嵌入到 E^{**}, 即 $E \hookrightarrow E^{**}$. 此时对任意 $x \in E$, 有 $\|\widehat{x}\| = \|x\|$. 故当我们把 u^{**} 限制在 E 上时, 若取 $x \in E$, 则有 $u^{**}(x) = u^{**}(\widehat{x}) \in F^{**} = (F^*)^*$. 根据共轭算子和二次对偶的定义, 对任意 $f^* \in F^*$, 有

$$\langle u^{**}(\widehat{x}), f^*\rangle = \langle \widehat{x}, u^*(f^*)\rangle = \langle u^*(f^*), x\rangle = \langle f^*, u(x)\rangle = \langle \widehat{u(x)}, f^*\rangle.$$

由此即得 $u^{**}(\widehat{x}) = \widehat{u(x)}$, 从而对任意 $x \in E$, 有 $u^{**}(x) = u(x)$, 也就是说 u^{**} 在 E 上的限制即为 u. 那么由不等式 (9.1), 立即可得

$$C_1\|x\|_E \leqslant \|u(x)\|_F \leqslant C_2\|x\|_E.$$

因此 u 是 E 到 $u(E)$ 的等距同构映射; 而且因 E 是完备的, $u(E)$ 也是完备的. 故 $u(E)$ 是 F 的闭向量子空间, 剩下只需证明 $u(E) = F$.

任取 $f^* \in F^*$ 且满足 $f^*|_{u(E)} = 0$. 则对任意 $x \in E$, 有 $f^*(u(x)) = 0$. 于是

$$\langle u^*(f^*), x\rangle = \langle f^*, u(x)\rangle = f^*(u(x)) = 0.$$

因此 $u^*(f^*) = 0$. 但 u^* 是单射, 故 $f^* = 0$. 那么根据 Hahn-Banach 定理的推论 8.2.7, 可知 $u(E) = F$. ■

§9.2 子空间和商空间的对偶

根据 Hahn-Banach 延拓定理, 赋范空间 E 的向量子空间 F 上的连续线性泛函可以保范延拓到整个空间 E 上. 反过来, E 上的连续泛函限制在 F 上仍然是 F 上的连续线性泛函. 由此产生一个自然的问题: F 的对偶 F^* 和 E 的对偶 E^* 到底是什么关系? 这正是本节要回答的, 也就是子空间对偶的刻画问题. 本节我们还将刻画商空间的对偶, 首先我们给出关于商空间的一些基本概念.

设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, F 是 E 的闭向量子空间. 定义 E 中的一个等价关系: $x \sim y \iff x - y \in F$. 用 E/F 表示相应的等价类组成的集合. E 上的线性结构可自然地移植到 E/F 上, 具体地说, 若 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in E/F$ 且 $\lambda \in \mathbb{K}$, 定义 $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x+y}$ 和 $\lambda\widetilde{x} = \widetilde{\lambda x}$. 容易验证如此的定义是合理的, 即不依赖于特定代表元的选取. 这样 E/F 成为一个向量空间, 称为 E 关于 F 的商空间.

现在我们在商空间上定义如下范数:

$$\|\widetilde{x}\|_{E/F} = \inf\{\|y\| : y \sim x\} = \inf\{\|x+y\| : y \in F\}, \quad \widetilde{x} \in E/F.$$

F 是闭的保证了上面的 $\|\cdot\|_{E/F}$ 的确是一个范数. 实际上, 若 $\|\widetilde{x}\|_{E/F}=0$, 则存在 $y_n\in F$, 使得 $x+y_n\to 0$, $n\to\infty$, 因此 $-y_n\to x$. 因 F 是闭的, 故 $x\in F$, 即 $\widetilde{x}=0$.

本节的目标是用 E 的对偶空间 E^* 来刻画 E 的子空间 F 以及商空间 E/F 的对偶空间 F^* 和 $(E/F)^*$, 为此我们给出如下定义.

定义 9.2.1 设 E 是赋范空间, F 是 E 的向量子空间, 而 G 是 E^* 的向量子空间. 令

$$\begin{aligned}F^{\perp}&=\{x^*\in E^*:\langle x^*,x\rangle=0,\ \forall x\in F\},\\ G_{\perp}&=\{x\in E:\langle x^*,x\rangle=0,\ \forall x^*\in G\}.\end{aligned}$$

我们称 $F^{\perp}$ 是 F 的零化子空间, 而 $G_{\perp}$ 是 G 的预零化子空间.

注 9.2.2 因 F 和 G 都是向量子空间, 则 $F^{\perp}$ 和 $G_{\perp}$ 分别是 F 和 G 的极集, 即

$$F^{\perp}=F^{\circ},\quad G_{\perp}=G^{\circ}.$$

且 $F^{\perp}$ 是 E^* 中 w^*–闭的向量子空间, 而 $G_{\perp}$ 是 E 中 w–闭的 (等价于范数闭的) 向量子空间. 那么双极定理 8.3.8 在此对应着下面的结论:

(1) $(F^{\perp})_{\perp}=\overline{F}^{w}=\overline{F}^{\|\cdot\|}$.

(2) $(G_{\perp})^{\perp}=\overline{G}^{w^*}$.

我们称

$$\pi:E\longrightarrow E/F,\quad x\longmapsto\widetilde{x}$$

是商映射. 根据商空间范数的定义, 显然 π 是满射, $\|\pi\|\leqslant 1$ 且 $\ker\pi=F$. 并且对任意 $\varepsilon>0,\widetilde{x}\in E/F$, 有代表元 $x\in E$, 使得 $\|x\|\leqslant(1+\varepsilon)\|\widetilde{x}\|$.

任取 $\varphi\in(E/F)^*$, 则 $\varphi(\pi(F))=0$, 即 $\varphi\circ\pi\in F^{\perp}$. 于是我们定义线性映射

$$\begin{aligned}\nu:(E/F)^*&\longrightarrow F^{\perp}\subset E^*,\\ \varphi&\longmapsto\varphi\circ\pi.\end{aligned}$$

ν 实际上是 π 的共轭算子, 其构造关系见下图:

$$\begin{tikzcd}E \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\nu(\varphi)=\varphi\circ\pi"] & \\ E/F \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{K}\end{tikzcd}$$

实际上, 我们还有如下更强的结论.

定理 9.2.3 映射 $\nu : (E/F)^* \to F^\perp$ 是一个等距同构, 即有如下同构关系

$$(E/F)^* \cong F^\perp.$$

也就是说, 商空间 E/F 的对偶空间是 E 的对偶空间的子空间.

证明 由于 ν 是 π 的共轭, 则 $\|\nu\| = \|\pi\| \leqslant 1$, 故 $\|\nu(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|$. 另一方面, 对任意 $\widetilde{x} \in E/F$, 我们有

$$|\varphi(\widetilde{x})| = |\varphi(\pi(x))| = |\langle \varphi, \pi(x) \rangle| = |\langle \nu(\varphi), x \rangle| \leqslant \|\nu(\varphi)\| \|x\|,$$

这里 x 是 $\widetilde{x}$ 的代表. 对 $\widetilde{x}$ 的所有代表取下确界, 则得

$$|\varphi(\widetilde{x})| \leqslant \|\nu(\varphi)\| \|\widetilde{x}\|,$$

即有 $\|\varphi\| \leqslant \|\nu(\varphi)\|$. 因此我们得到 $\|\nu(\varphi)\| = \|\varphi\|$, 那么 ν 是 $(E/F)^*$ 到 E^* 的线性等距映射. 自然地, $\nu : (E/F)^* \to F^\perp$ 是单射.

下面证明 $\nu : (E/F)^* \to F^\perp$ 还是满的. 任取 $f \in F^\perp$. 对任意 $\widetilde{x} \in E/F$, 定义 E/F 上的泛函 φ 满足 $\varphi(\widetilde{x}) = f(x)$, 这里 x 是 $\widetilde{x}$ 的一个代表. 若假设 x' 是 $\widetilde{x}$ 的另一个代表, 则 $x - x' \in F$. 由于 $f \in F^\perp$,可得 $f(x - x') = 0$, 即 $f(x) = f(x')$. 这意味着 φ 的定义是合理的. 并且容易验证 φ 是线性的, 而且

$$|\varphi(\widetilde{x})| = |f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|.$$

对 $\widetilde{x}$ 的所有代表取下确界, 则得 $|\varphi(\widetilde{x})| \leqslant \|f\| \|\widetilde{x}\|$. 因此 $\varphi \in (E/F)^*$, 且

$$\varphi \circ \pi(x) = \varphi(\tilde{x}) = f(x), \ \forall x \in E.$$

根据映射 ν 的定义可知 $\nu(\varphi) = f$. 故 $\nu : (E/F)^* \to F^\perp$ 是到上的线性映射, 并且对任意 $\varphi \in (E/F)^*$, 有 $\|\nu(\varphi)\| = \|\varphi\|$. 由此定理得证. ■

接下来的工作是刻画 E 的子空间 F 的对偶空间 F^*. 首先我们定义从商空间 $E^*/F^\perp$ 到 F^* 的映射 σ. 对任意 $\widetilde{\varphi} \in E^*/F^\perp$, 令

$$\sigma(\widetilde{\varphi}) : F \longrightarrow \mathbb{K}, \ \ x \longmapsto \varphi(x),$$

这里 φ 是 $\widetilde{\varphi}$ 的代表. 实际上我们定义的 $\sigma(\widetilde{\varphi})$ 就是 φ 在 F 上的限制 $\varphi|_F$. 若假设 φ' 是 $\widetilde{\varphi}$ 的另一个代表, 则 $\varphi' - \varphi \in F^\perp$. 那么任取 $x \in F$, 有 $(\varphi' - \varphi)(x) = 0$, 即 $\varphi'(x) = \varphi(x)$. 故 $\sigma(\widetilde{\varphi})$ 的定义是合理的, 还容易验证它是线性的. 而且我们有

$$|\sigma(\widetilde{\varphi})(x)| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \|x\|.$$

对等价类 $\widetilde{\varphi}$ 中所有的代表取下确界, 可得

$$|\sigma(\widetilde{\varphi})(x)| \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp}\|x\|.$$

因此 $\sigma(\widetilde{\varphi})$ 是 F 上的连续线性泛函, 即 $\sigma(\widetilde{\varphi}) \in F^*$, 并且

$$\|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*} \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp}.$$

由此我们建立了连续线性映射

$$\begin{aligned} \sigma\colon E^*/F^\perp &\longrightarrow F^*, \\ \widetilde{\varphi} &\longmapsto f = \varphi|_F. \end{aligned}$$

我们有如下更强的结论.

定理 9.2.4 映射 $\sigma : E^*/F^\perp \to F^*$ 是等距同构. 所以有如下同构关系

$$F^* \cong E^*/F^\perp.$$

也就是说, E 的子空间 F 的对偶空间是 E^* 关于 $F^\perp$ 的商空间.

证明 通过上面的讨论, 我们已经知道 σ 是 $E^*/F^\perp$ 到 F^* 的连续线性映射. 另一方面, 根据 Hahn-Banach 延拓定理, 对任意 $\widetilde{\varphi} \in E^*/F^\perp$, $f = \sigma(\widetilde{\varphi}) \in F^*$ 可以延拓成 $f' \in E^*$, 并满足 $f'|_F = f$ 以及 $\|f'\|_{E^*} = \|f\|_{F^*}$. $f'|_F = f = \varphi|_F$ 意味着 $f' - \varphi \in F^\perp$, 也就是说, f' 和 φ 在同一个等价类 $\widetilde{\varphi}$ 中. 于是由商空间范数的定义, 可得

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp} \leqslant \|f'\|_{E^*} \leqslant \|f\|_{F^*} = \|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*}.$$

因此我们证明了

$$\|\sigma(\widetilde{\varphi})\|_{F^*} = \|\widetilde{\varphi}\|_{E^*/F^\perp}, \quad \forall \widetilde{\varphi} \in E^*/F^\perp.$$

故 σ 是从 $E^*/F^\perp$ 到 F^* 的线性等距映射.

类似于上一定理的证明, 只需再证明 σ 也是到上的. 任取 $f \in F^*$, 根据 Hahn-Banach 延拓定理, $f \in F^*$ 可以保范延拓成 $\psi \in E^*$. 令 $\widetilde{\psi} = \psi + F^\perp$, 则 $\widetilde{\psi}$ 是商空间 $E^*/F^\perp$ 中的等价类, 并且

$$\sigma(\widetilde{\psi}) = \psi|_F = f.$$

所以 σ 是到上的线性等距映射, 即等距同构映射. ■

定理 9.2.5 设 E 和 F 都是赋范空间, 并有 $u \in \mathcal{B}(E,F)$. 则

(1) $\ker u^* = u(E)^\perp$.

(2) $\ker u = u^*(F^*)_\perp$.

(3) $(\ker u^*)_\perp = \overline{u(E)}^{w} = \overline{u(E)}^{\|\cdot\|}$.

(4) $(\ker u)^\perp = \overline{u^*(F^*)}^{w^*}$.

证明 首先设 $f \in F^*$. 则有

$$\begin{aligned} f \in \ker u^* &\iff u^*(f) = 0 \\ &\iff \langle u^*(f), x\rangle = 0,\ \forall x \in E \\ &\iff \langle f, u(x)\rangle = 0,\ \forall x \in E \\ &\iff f \in u(E)^\perp. \end{aligned}$$

这证明了 (1). 为证 (2), 设 $x \in E$, 则有

$$\begin{aligned} x \in \ker u &\iff u(x) = 0 \\ &\iff \langle f, u(x)\rangle = 0,\ \forall f \in F^* \\ &\iff \langle u^*(f), x\rangle = 0,\ \forall f \in F^* \\ &\iff x \in u^*(F^*)_\perp. \end{aligned}$$

对于 (3) 和 (4), 由双极定理 8.3.8 可得

$$(\ker u^*)_\perp = (u(E)^\perp)_\perp = \overline{u(E)}^{w} = \overline{u(E)}^{\|\cdot\|};$$

而

$$(\ker u)^\perp = (u^*(F^*)_\perp)^\perp = \overline{u^*(F^*)}^{w^*}.$$

故定理得证. ■

由以上关系, 我们导出如下非常有用的结论.

推论 9.2.6 设 E 和 F 都是赋范空间, 并有 $u \in \mathcal{B}(E,F)$. 则

(1) u^* 是单射的充分必要条件是 $u(E)$ 在 F 中稠密.

(2) u 是单射的充分必要条件是 $u^*(F^*)$ 在 E^* 中 w^*-稠密.

§9.3 自 反 性

我们先回顾自然嵌入的概念. 设 E 是赋范空间, E^* 是 E 的对偶空间, $E^{**} =$

$(E^*)^*$ 是 E 的二次对偶空间. 我们称映射

$$\iota_E : E \longrightarrow E^{**},$$
$$x \longmapsto \widehat{x}$$

为自然嵌入算子. 这里 $\widehat{x} \in E^{**}$ 定义为: 对任意 $x^* \in E^*$, 有 $\langle \widehat{x}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$. 由该定义立即可得

$$\|\widehat{x}\|_{E^{**}} \leqslant \|x\|.$$

另一方面, 根据 Hahn-Banach 定理, 可得

$$\|\widehat{x}\|_{E^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{E^*} \leqslant 1} |\langle x^*,\ x \rangle| = \|x\|_E.$$

故 ι_E 是 E 与 E^{**} 的子空间等距同构映射. 在此意义下, 我们可以把 x 和 $\widehat{x}$ 看成同一元, 而把 E 看成 E^{**} 的子空间, 记作 $E \hookrightarrow E^{**}$, 称 E 为 E^{**} 的自然嵌入.

定义 9.3.1 若在自然嵌入意义下有 $E = E^{**}$, 则称 E 为自反空间.

注 9.3.2 若 E 是自反的, 则 E 是完备的, 即 Banach 空间.

例 9.3.3 我们给出一些自反空间的例子.

(1) 若 $\dim E < +\infty$, 则 E 是自反的.

(2) 所有 Hilbert 空间是自反的. 我们分别考虑实和复的情形.

H 是实的 Hilbert 空间. 根据 Riesz 表示定理 4.3.1, 线性泛函 $\varphi \in H^*$ 当且仅当存在唯一的 $y \in H$, 使得对任意 $x \in H$, 有 $\varphi_y(x) = \langle x,\ y \rangle$; 并且 $\|\varphi_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. 故我们可以建立映射

$$\Phi : H \longrightarrow H^*,$$
$$y \longmapsto \Phi(y) = \varphi_y.$$

显然 Φ 是 H 到 H^* 上的线性等距同构映射. 故 H^* 与 H 等距同构, 即 $H^* \cong H$. 类似地也有 $H^{**} \cong H^*$, 那么

$$H^{**} \cong H^* \cong H.$$

具体地, 我们运用算子的共轭理论, 则 Φ^* 也是 H^{**} 到 H^* 的等距同构. 那么 $(\Phi^*)^{-1} : H^* \longrightarrow H^{**}$ 存在, 且有 $(\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*$. 于是我们可以建立从 H 到 H^{**} 的等距映射 $(\Phi^*)^{-1} \circ \Phi$, 其关系可见下图:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "(\Phi^*)^{-1}\circ\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & H^{**} \\
& H^* \arrow[ur, "(\Phi^*)^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

要得到 H 的自反性, 只需证明映射 $(\Phi^*)^{-1}\circ\Phi$ 是自然嵌入 ι_H. 任取 $x\in H$, 对任意 $\varphi\in H^*$, 注意到 $\varphi(x)=\langle x,\Phi^{-1}(\varphi)\rangle$, 则有

$$\begin{aligned}\langle(\Phi^*)^{-1}\circ\Phi(x),\varphi\rangle&=\langle(\Phi^{-1})^*\circ\Phi(x),\varphi\rangle\\&=\langle\Phi(x),\Phi^{-1}(\varphi)\rangle\\&=\langle x,\Phi^{-1}(\varphi)\rangle\\&=\varphi(x)=\langle x,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

由此证明了 $(\Phi^*)^{-1}\circ\Phi=\iota_H$.

H 是复的 Hilbert 空间. 注意, 和实情形一样, 我们可以建立从 H 到 H^* 的等距映射 Φ, 但现在 Φ 是共轭线性的. 不过, 从 H^* 到 H^{**} 的等距映射也是共轭线性的. 因此最终我们可以给出从 H 到 H^{**} 的线性等距同构映射, 并且是自然嵌入, 故 H 也是自反的 (证明的细节留给读者).

(3) 设 (Ω,μ) 是 σ–有限的测度空间, 则当 $1<p<\infty$, $L_p(\Omega,\mu)$ 是自反的. 这一结果将在本章的最后一节证明.

例 9.3.4 空间 $c_0,\ell_\infty,L_\infty(0,1)$ 和 $C([0,1])$ 都是非自反的 (见习题九, 10, 11).

因为对偶空间总是完备的, 所以一个自反空间一定是 Banach 空间. 我们有如下结论.

定理 9.3.5 Banach 空间是自反的当且仅当它的对偶也是自反的.

证明 必要性. 设 E 是一个自反的 Banach 空间, 则 $E=E^{**}$. 于是可得 $E^*=(E^{**})^*=(E^*)^{**}$. 因此 E^* 也是自反的.

充分性. 设 E^* 是自反的. 则

$$E^*=(E^*)^{**}=E^{***}=(E^{**})^*.$$

故若取 $\varphi\in(E^{**})^*$ 且满足 $\varphi|_E=0$, 则在 E^{**} 上 $\varphi=0$. 根据 Hahn-Banach 延拓定理的推论 8.2.7, E 在 E^{**} 中稠密. 而 E 本身是完备的, 故 E 在 E^{**} 中是闭集. 因此可得 $E=E^{**}$. ■

定理 9.3.6 设赋范空间 E 和 F 同构, 则 F 自反等价于 E 自反.

证明 假设 F 是自反的, 并设 $u:E\to F$ 是一个同构映射. 则 $u^*:F^*\to E^*$ 和 $u^{**}:E^{**}\to F^{**}$ 都是同构映射 (见定理 9.1.6). 我们知道 u^{**} 限制在 E 上就是 u, 因此

$$u^{**}|_E=u:E\to F$$

是双射, 由于 F 是自反的, 即 $F=F^{**}$. 由此可得 $E=E^{**}$. ■

定理 9.3.7 设 E 是自反空间, F 是 E 的闭子空间, 则 F 和 E/F 都是自反的.

证明 先证明 E/F 是自反的. 由定理 9.2.3 可知 $(E/F)^* \cong F^\perp$, 则

$$(E/F)^{**} \cong (F^\perp)^*.$$

而 $F^\perp \subset E^*$, 故由定理 9.2.4, 可得

$$(F^\perp)^* \cong E^{**}/(F^\perp)^\perp.$$

由于 E 是自反的, 则 $E^{**}/(F^\perp)^\perp \cong E/(F^\perp)_\perp$. 根据双极定理, 可得 $(F^\perp)_\perp = F$; 从而

$$E/(F^\perp)_\perp \cong E/F.$$

综上所述, 我们有 $(E/F)^{**} = E/F$. 因此 E/F 是自反的.

子空间 F 的自反性类似于上面可证. ■

严格地说, 以上证明不够完善, 因我们最后只得到 E/F 和 $(E/F)^{**}$ 等距同构. 我们还应进一步证明该同构等于自然嵌入 $\iota_{E/F}$. 利用定理 9.2.3 中的等距映射 $\nu:(E/F)^* \to F^\perp$, 上面证明过程可由如下的关系图来表明:

$$\begin{tikzcd}
(F^\perp)^* \arrow[r, "\nu^*"] & (E/F)^{**} \\
E^{**}/(F^\perp)^\perp \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, equal] & E/F \arrow[u, "\nu^*\circ\sigma"']
\end{tikzcd}$$

因此, 还需验证 $\nu^* \circ \sigma = \iota_{E/F} : E/F \hookrightarrow (E/F)^{**}$. 我们把这最后一步留给读者.

§9.4 w^*–紧性

弱 * 拓扑是对偶空间理论中一种重要的拓扑, 我们先来描述一下此种拓扑的具体构造. 设 E 是赋范空间, E^* 上的弱 * 拓扑记为 $\sigma(E^*, E)$, 它是由 $\{\hat{x} : x \in E\}$ 诱导的拓扑. 任取有限个元素 $x_1, \cdots, x_n \in E$ 及 $\varepsilon > 0$, 令

$$V(x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) = \left\{ x^* \in E^* : \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x^*(x_i)| < \varepsilon \right\}$$

表示原点处的开球, 而在 $x^* \in E^*$ 处的开球定义为

$$V(x^*; x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) = \left\{ y^* \in E^* : \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |(y^* - x^*)(x_i)| < \varepsilon \right\}.$$

则 E^* 中关于弱 * 拓扑的任一开集等于某些开球的并集.

所有的开球 $V(x_1,\cdots,x_n,\varepsilon)$, $n\in\mathbb{N}^*, x_1,\cdots,x_n\in E, \varepsilon>0$ 构成了原点的一个邻域基. 由此立即可以证明: 在此拓扑空间中, 若 (x_i^*) 是 E^* 中的序列而 $x^*\in E^*$, 则 $x_i^*\xrightarrow{w^*}x^*$ 的充分必要条件是任取 $x\in E$, 有 $x_i^*(x)\to x^*(x)$. 也就是说, x_i^* 在 E^* 中 w^*–收敛于 x^* 等价于 x_i^* 在 E 上逐点收敛于 x^*. 我们知道逐点收敛等价于关于乘积拓扑收敛 (见第一章推论 1.4.4), 并注意到 $E^*\subset\mathbb{K}^E$, 故 E^* 上的 w^*–拓扑由 $\mathbb{K}^E$ 上的乘积拓扑诱导.

如果我们把讨论限制在 $\overline{B}_{E^*}$ 上, 那么 $\sigma(E^*,E)|_{\overline{B}_{E^*}}$ 也就是乘积拓扑 $\mathbb{K}^E$ 在 $\overline{B}_{E^*}$ 上诱导的拓扑. $V(x^*;x_1,\cdots,x_n,\varepsilon)\cap\overline{B}_{E^*}$ 是 x^* 在 $\overline{B}_{E^*}$ 中的一个 w^*–邻域.

利用以上所描述的 w^*–拓扑和乘积拓扑的一致性, 我们证明如下对偶空间理论的一个核心结果.

定理 9.4.1 (Banach-Alaoglu) 设 E 是赋范空间. 则 $(\overline{B}_{E^*},\sigma(E^*,E))$ 是紧的, 也就是说, E^* 的闭单位球 $\overline{B}_{E^*}$ 是 w^*–紧的.

证明 注意 E^* 中的元素由它们在 E 的闭单位球 $\overline{B}_E$ 上的作用唯一确定. 因此, 我们可把 E^* 的元素看成 $\overline{B}_E$ 上的函数. 那么

$$\overline{B}_{E^*}=\left\{x^*\in E^*:|x^*(x)|\leqslant 1,\forall x\in\overline{B}_E\right\}.$$

作为 $\overline{B}_E$ 上的函数, $\overline{B}_{E^*}$ 中的元素取值于 $\mathbb{K}$ 的闭单位球 $\overline{B}_{\mathbb{K}}$ 中. 记该单位球为 $K:K=\overline{B}_{\mathbb{K}}$. 这就是说, 任取 $x^*\in\overline{B}_{E^*}$ 对应于函数 $x^*|_{\overline{B}_E}:\overline{B}_E\to K$. 这样, $\overline{B}_{E^*}$ 成为 $K^{\overline{B}_E}$ 的子集.

综合以上讨论, 我们可以看出 $(\overline{B}_{E^*},\sigma(E^*,E))$ 上的拓扑由 $K^{\overline{B}_E}$ 上的乘积拓扑诱导.

由于 K 是紧集, 根据 Tychonoff 定理 1.4.8 可知 $K^{\overline{B}_E}$ 也是紧的. 由于紧空间的闭子集是紧的, 于是我们只需再证明 $\overline{B}_{E^*}$ 是 $K^{\overline{B}_E}$ 中的闭集. 为此, 我们先给出如下事实:

如果 $\varphi\in\overline{B}_{E^*}$, 那么 φ 是 $\overline{B}_E$ 上的线性映射, 即对任意 $x,y\in\overline{B}_E$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 使得 $\alpha x+\beta y\in\overline{B}_E$, 则有

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y).$$

反过来, 如果 $\psi:\overline{B}_E\to K$ 满足上面的线性性, 则 ψ 可拓展为 E 上的连续线性泛函. 实际上, 对任意 $x\in E$, 可选择 $\lambda\in\mathbb{K},\lambda\neq 0$, 使得 $\frac{x}{\lambda}\in\overline{B}_E$; 然后令

$$\varphi(x)=\lambda\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

容易验证 φ 的定义不依赖于 λ 的具体选择, 而且 $\varphi|_{\overline{B}_E} = \psi$. 另外, 也易证 φ 是线性的. 因 $\varphi|_{\overline{B}_E} = \psi$, 故 $\varphi \in \overline{B}_{E^*}$.

根据以上事实, 如果我们设 $\psi \in K^{\overline{B}_E} \backslash \overline{B}_{E^*}$, 则意味存在 $x_1, x_2 \in \overline{B}_E$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 满足 $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \overline{B}_E$, 使得

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2) \neq \alpha\psi(x_1) + \beta\psi(x_2).$$

记 $x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2$. 设 $K^{\overline{B}_E}$ 中 ψ 的一个开邻域为

$$V = V(\psi; x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = \{f \in K^{\overline{B}_E} : |(f - \psi)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, 3\}.$$

如果 ε 充分小, 则对任意 $f \in V$, 有

$$\begin{aligned}|f(x_3) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2)| \geqslant\ & |\psi(x_3) - \alpha\psi(x_1) - \beta\psi(x_2)| - \\ & |\alpha||(f - \psi)(x_1)| - |\beta||(f - \psi)(x_2)| - \\ & |(f - \psi)(x_3)| \\ >\ & 0.\end{aligned}$$

因此, f 不能拓展为线性泛函, 即 $f \in K^{\overline{B}_E} \backslash \overline{B}_{E^*}$. 因此 $V \subset K^{\overline{B}_E} \backslash \overline{B}_{E^*}$, 这证明了 $K^{\overline{B}_E} \backslash \overline{B}_{E^*}$ 是开集. 因而 $\overline{B}_{E^*}$ 是 $K^{\overline{B}_E}$ 中的闭集. ■

注 9.4.2 由 Riesz 定理 3.1.14 知道, 无限维赋范空间 E 上的单位球 $\overline{B}_{E^*}$ 在范数拓扑下不可能是紧的, 但 Banach-Alaoglu 定理告诉我们单位球 $\overline{B}_{E^*}$ 是 w^*-紧的.

下面是对偶理论的另一个基本定理.

定理 9.4.3 (Goldstine) *设 E 为赋范空间, 则 B_E 在 $\overline{B}_{E^{**}}$ 中弱 * 稠密, 即*

$$\overline{B_E}^{w^*} = \overline{B}_{E^{**}}.$$

证明 我们有 $B_E \subset \overline{B}_{E^{**}}$, 易证 $\overline{B}_{E^{**}}$ 在 E^{**} 中是 w^*-闭的. 那么 $\overline{B_E}^{w^*} \subset \overline{B}_{E^{**}}$.

假设有 $x^{**} \in \overline{B}_{E^{**}} \backslash \overline{B_E}^{w^*}$, 则根据 Hahn-Banach 定理 8.2.3, 存在 $\varphi \in E^*$, 使得 $\sup |\varphi(\overline{B_E}^{w^*})| \leqslant 1$ 及 $\langle \varphi, x^{**} \rangle > 1$. 由此可得

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle \varphi, x \rangle| \leqslant \sup |\varphi(\overline{B_E}^{w^*})| \leqslant 1.$$

于是我们有

$$\|x^{**}\| \geqslant \|\varphi\| \|x^{**}\| \geqslant |\varphi(x^{**})| > 1.$$

这意味着 $x^{**} \notin \overline{B}_{E^{**}}$, 与假设矛盾. 故 $\overline{B}_{E^{**}} \subset \overline{B_E}^{w^*}$. 定理得证. ■

下面的推论给出了自反性一个重要的拓扑刻画.

推论 9.4.4 (Banach) 设 E 为赋范空间. 则 E 是自反的当且仅当 $\overline{B}_E$ 是 w–紧的.

证明 必要性. 因 $E = E^{**}$, 则 $\overline{B}_E = \overline{B}_{E^{**}}$. 根据 Banach-Alaoglu 定理, $\overline{B}_{E^{**}}$ 是 w^*–紧的, 故 $\overline{B}_E$ 是 w–紧的.

充分性. 首先看到, 由于 $E \subset E^{**}$, 则 $\sigma(E, E^*) = \sigma(E^{**}, E^*)|_E$. 又由条件 $\overline{B}_E$ 在 $(E, \sigma(E, E^*))$ 中是紧的, 可知 $\overline{B}_E$ 在 $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ 中也是紧的. 故 $\overline{B}_E$ 在 $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ 中是闭集, 也就是说, $\overline{B}_E$ 是 w^*–闭的, 即有 $\overline{B}_E = \overline{\overline{B}_E}^{w^*}$. 再根据 Goldstine 定理 9.4.3, 立即可得

$$\overline{B}_E = \overline{\overline{B}_E}^{w^*} = \overline{B}_{E^{**}}.$$

因此 $E = E^{**}$, 即 E 是自反的. ■

注 9.4.5 设 E 是 Banach 空间, 则 $\overline{B}_{E^*}$ 可以赋予三种拓扑:

(1) 范数拓扑 $(\overline{B}_{E^*}, \|\cdot\|)$. 根据 Riesz 定理, $\overline{B}_{E^*}$ 在范数拓扑下是紧的当且仅当 $\dim E^* < \infty$, 从而也当且仅当 $\dim E < \infty$.

(2) 弱拓扑 $(\overline{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E^{**}))$. 根据推论 9.4.4, $\overline{B}_{E^*}$ 在弱拓扑下是紧的, 当且仅当 E^* 是自反的, 从而也当且仅当 E 是自反的.

(3) 弱 * 拓扑 $(\overline{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E))$. 根据定理 9.4.1, $\overline{B}_{E^*}$ 总是 w^*–紧的.

§9.5 L_p 空间的对偶

设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间, 这里 μ 是 σ–有限的测度. 在本节中, 简记 $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, q 是 p 的共轭数, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

定理 9.5.1 设 $1 \leqslant p < \infty$, 对任意 $g \in L_q$ 定义

$$J(g): L_p \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_\Omega fg\mathrm{d}\mu.$$

那么 J 是从 L_q 到 L_p^* 的到上的线性等距. 故 L_p^* 同构于 L_q, 即有

$$L_p^* \cong L_q.$$

证明 仅考虑实情形: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. 在下面的证明中, 我们简记 $\int_\Omega$ 为 $\int$, 即

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int f, \ \forall f \in L_1.$$

当 $p=2$ 时, L_2 是一个 Hilbert 空间, 我们知道 $L_2^*=L_2$, 得证.

首先证明 J 是一个等距映射. 根据 Hölder 不等式, 任取 $f\in L_p$ 及 $g\in L_q$, 有

$$|J(g)(f)|=\left|\int fg\right|\leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

由此可得 $J(g)\in L_p^*$ 且 $\|J(g)\|_{L_p^*}\leqslant \|g\|_q$. 接下来我们分两种情形来讨论反向的不等式:

- $p>1$, 此时 $q<\infty$. 我们取 $f=\frac{\operatorname{sgn}(g)|g|^{q-1}}{\|g\|_q^{q-1}}$. 容易验证 $\|f\|_p=1$ 且

$$J(g)(f)=\int fg=\int \frac{\operatorname{sgn}(g)|g|^{q-1}}{\|g\|_q^{q-1}}g=\frac{1}{\|g\|_q^{q-1}}\int |g|^q=\|g\|_q.$$

  这意味着 $\|J(g)\|_{L_p^*}\geqslant \|g\|_q$.

- $p=1$, 此时 $q=\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$, 考虑集合 $A\subset\{|g|\geqslant \|g\|_\infty-\varepsilon\}$. 由本性上确界的定义可取 $\mu(A)>0$. 我们也设 $\mu(A)<\infty$. 令 $f=\frac{1}{\mu(A)}\operatorname{sgn}(g)\mathbb{1}_A$. 则 $\|f\|_1=1$ 且

$$J(g)(f)=\frac{1}{\mu(A)}\int_A \operatorname{sgn}(g)g\geqslant \frac{1}{\mu(A)}(\|g\|_\infty-\varepsilon)\mu(A)=\|g\|_\infty-\varepsilon.$$

  于是有 $\|J(g)\|_{L_p^*}\geqslant \|g\|_\infty-\varepsilon$. 两边再对 $\varepsilon\to 0^+$ 取极限, 即得 $\|J(g)\|_{L_p^*}\geqslant \|g\|_\infty$.

由此我们证明了 J 是一个从 L_q 到 L_p^* 的线性等距映射 (这对 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 的情形都是成立的). 下面证明当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 它还是满射. 通常这个证明是基于 Radon-Nikodým 定理. 我们下面的证明不同于通常的证明.

固定 $\varphi\in L_p^*$. 我们需证明存在 $g\in L_q$, 使得 $J(g)=\varphi$. 我们分几种情形逐步加以证明:

情形一 设 $1\leqslant p<2$ 且 $\mu(\Omega)<\infty$. 由于该情形下 $L_2(\Omega)$ 连续嵌入到 $L_p(\Omega)$, 故 φ 也是 L_2 上的连续线性泛函, 如图

$$\begin{tikzcd} L_2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & L_p \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

即有 $\varphi\in L_2^*$. 因此根据 Riesz 表示定理, 存在一个函数 $g\in L_2$ 使得

$$\varphi(f)=\langle f,\, g\rangle=\int fg,\ f\in L_2;$$

并且 $\left|\int fg\right| = |\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_{L_p^*}\|f\|_p$.

若 $p>1$, 对任意 $n\geqslant 1$, 设 $A_n=\{|g|\leqslant n\}$, 并定义 $f_n=\operatorname{sgn}(g)|g|^{q-1}\mathbb{1}_{A_n}$. 则显然 $f_n\subset L_2\subset L_p$ 且 $\|f_n\|_p^p=\int_{A_n}|g|^q$. 把 f_n 代入到上面的泛函, 则有

$$\int_{A_n}|g|^q=|\varphi(f_n)|\leqslant\|\varphi\|_{L_p^*}\|f_n\|_p=\|\varphi\|_{L_p^*}\left(\int_{A_n}|g|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

于是有

$$\left(\int_{A_n}|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|\varphi\|_{L_p^*}.$$

然后两边关于 $n\to\infty$ 取极限, 则可得

$$\left(\int_{\Omega}|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|\varphi\|_{L_p^*},$$

因此 $g\in L_q$. 注意 $L_2(\Omega)$ 在 $L_p(\Omega)$ 中稠密, 可知对任意 $f\in L_p$, 都有

$$\varphi(f)=\int fg.$$

若 $p=1$, 此时 $q=\infty$. 我们任取 $A\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(A)>0$, 并设 $f=\frac{1}{\mu(A)}\operatorname{sgn}(g)\mathbb{1}_A$. 类似于前面的证明, 可得 $\sup\limits_A|g|\leqslant\|\varphi\|_{L_1^*}$. 因而 $g\in L_\infty$ 且 $\|g\|_\infty\leqslant\|\varphi\|_{L_1^*}$.

情形二 设 $1\leqslant p<2$ 且 $\mu(\Omega)=\infty$. 由于 μ 是 σ–有限测度, 则 Ω 中存在两两不相交的可测子集列 $(\Omega_n)_{n\geqslant1}$, 使得 $\mu(\Omega_n)<\infty$ 和 $\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n$.

则由情形一给出的结论, 存在 $g_n\in L_q(\Omega_n)$, 使得对任意 $f\in L_p(\Omega_n)$, 有

$$\varphi(fg_n)=\int_{\Omega_n}fg_n.$$

我们记 $g=\sum\limits_n g_n\mathbb{1}_{\Omega_n}$, 这里 g_n 看成 Ω 上的函数, 它在 $\Omega\backslash\Omega_n$ 上为零. 那么对 $L_p(\Omega)$ 中支撑在有限多个 Ω_n 上的函数 f 有

$$\varphi(f)=\int_{\Omega}fg.$$

若 $1<p$, 则 $q<\infty$. 任取 $n\geqslant1$, 令 $B_n=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$, 定义

$$f_n=\operatorname{sgn}(g)|g|^{q-1}\mathbb{1}_{B_n}.$$

接下来类似于情形一的讨论, 可得 $\|g\|_q\leqslant\|\varphi\|_{L_p^*}$. $p=1$ 时也类似可证.

情形三 $2 < p < \infty$. 这一部分的证明主要建立在 $L_p\ (2 < p < \infty)$ 是自反空间的基础上, 为此我们先证明这一结论, 它建立于下面的 Clarkson 不等式 (见习题三, 18). ■

引理 9.5.2 (Clarkson 不等式) 设 $2 \leqslant p < \infty$. 则对任意 $f, g \in L_p$, 有

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

推论 9.5.3 设 $2 \leqslant p < \infty$, 则 L_p 是自反的.

证明 设 $x^{**} \in \overline{B}_{L_p^{**}}$, $\|x^{**}\| = 1$. 根据 Goldstine 定理 9.4.3, $\overline{B}_{L_p}$ 的 w^*-闭包等于 $\overline{B}_{L_p^{**}}$, 因此, x^{**} 是 B_{L_p} 的粘着点. 因此, 不失一般性, 不妨假设存在 $(x_n) \subset \overline{B}_{L_p}$, 使得 $x_n \xrightarrow{w^*} x^{**}$. 我们宣称 (x_n) 在 L_p 范数下收敛. 否则, 存在某个常数 $\varepsilon > 0$ 及 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}), 使得

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \geqslant \varepsilon.$$

由于 $x_n \xrightarrow{w^*} x^{**}$, 则有

$$1 = \|x^{**}\| \leqslant \liminf_n \|x_n\| \leqslant \limsup_n \|x_n\| \leqslant 1.$$

故 $\lim\limits_n \|x_n\| = 1$. 同理由 $\frac{x_{n_{k+1}} + x_{n_k}}{2} \xrightarrow{w^*} x^{**}$, 可得 $\lim\limits_k \left\|\frac{x_{n_{k+1}} + x_{n_k}}{2}\right\| = 1$. 根据 Clarkson 不等式, 有

$$\left\|\frac{x_{n_{k+1}} + x_{n_k}}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|x_{n_{k+1}}\|_p^p + \|x_{n_k}\|_p^p) \leqslant 1.$$

由此我们导出矛盾 $1 + \frac{\varepsilon^p}{2^p} \leqslant 1$. 因此 (x_n) 在 L_p 范数下必收敛, 那么 $x^{**} \in \overline{B}_{L_p}$, 这也就是说 L_p 是自反的[1]. ■

现在我们可完成**定理 9.5.1 情形三的证明**:

因为 L_q 是完备的并且 $J : L_q \to L_p^*$ 是线性等距映射, 所以 $J(L_q)$ 也完备, 因而是 L_p^* 中的闭子集. 令 $\ell \in (L_p^*)^*$ 且满足 $\ell|_{J(L_q)} = 0$. 由于 L_p 自反, 即 $(L_p^*)^* = L_p$, 则存在 $f \in L_p$ 使得 $\ell \cong f \in L_p$. 对任意 $g \in L_q$, 有 $\displaystyle\int fg = 0$, 故 $f = 0$, 因而 $\ell = 0$. 因此可得 $J(L_q) = L_p^*$. ■

[1]因为 $\overline{B}_{L_p^{**}}$ 上的弱 * 拓扑不一定可度量化, 其中的点不一定是 $\overline{B}_{L_p}$ 中序列的极限点. 因此, 上述推论的证明不很严格. 习题中给出了一个严格的证明.

习 题 九

1. 设 E 是赋范空间, 并设 E^* 是可分的.

(a) 令 (f_n) 是 E^* 中的稠密子集. 选出 E 中的序列 (x_n) 使得 $f_n(x_n) \geqslant \frac{\|f_n\|}{2}$.

(b) 任取 $f \in E^*$. 证明: 若对每个 x_n 有 $f(x_n) = 0$, 则 $f = 0$.

(c) 由此导出 $\mathrm{span}(x_1, x_2, \cdots)$ 在 E 中稠密且 E 是可分的.

(d) 证明: 一个 Banach 空间是可分的且自反的当且仅当它的对偶空间是可分的且自反的.

(e) 举一个可分赋范空间但其对偶空间不可分的例子.

2. 设 E 是 Banach 空间, $B \subset E^*$.

(a) 证明: B 是相对 w^*–紧的当且仅当 B 是有界的.

(b) 假设 B 是有界的且 E 是可分的. 证明: $(B, \sigma(E^*, E))$ 可度量化.

(提示: 设 (x_n) 是 E 的闭单位球中的稠密序列, 并考虑如下距离

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} |\langle x^* - y^*, x_n \rangle|, \ \forall\, x^*, y^* \in B.\Big)$$

3. 设 E 是赋范空间, $A \subset E$.

(a) 假设 A 是弱紧的. 证明: 若对任意 $x^* \in E^*$, $\{x^*(x) \ : \ x \in A\}$ 是有界的, 则 A 有界.

(b) 假设 A 有界且 E^* 可分. 证明: $(A, \sigma(E, E^*))$ 可度量化.

4. 设 E 是自反空间. 证明: E 中的每个有界序列 (x_n) 有弱收敛子序列.

5. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间. 对任意 $f^* \in E^* = \mathcal{B}(\mathbb{K}, E^*)$, 确定 f^* 的像集.

6. 令 E 和 F 是两个 Banach 空间, 且 $u \in \mathcal{B}(E, F)$.

(a) 证明: u 是从 E 到 F 的到上的等距映射当且仅当 u^* 也是从 F^* 到 E^* 的到上的等距映射.

(b) 由此导出 E 和 F 是线性等距的, 则它们的对偶空间 E^* 和 F^* 也是线性等距的. (逆命题一般不对.)

7. 设 E 和 F 是两个 Banach 空间, $u : E^* \to F^*$ 是线性映射. 证明: 映射

$$u : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to (F^*, \sigma(F^*, F))$$

连续的充分必要条件是存在 $v \in \mathcal{B}(F, E)$, 使得 $u = v^*$.

8. 设 P 是 Banach 空间 X 上的线性映射并满足 $P \circ P = P$. 记 $R = P(X)$, $N = \ker P$.

(a) 证明: P 连续的充分必要条件是 R 和 N 都是闭集. 并且, 若 P 连续, 则 $X = R \oplus N$.

(b) 假设 P 是连续的. 证明: $R^{\perp}$ 和 $N^{\perp}$ 在 X^* 中互补, 且有 $X^* = R^{\perp} \oplus N^{\perp}$.

9. 构造空间 ℓ_∞^* 的单位球面上的一个序列, 使其没有 w^*-收敛的子序列. 这是否与 Banach-Alaoglu 定理矛盾? 如果在 ℓ_∞ 上有什么结论?

10. 刻画 ℓ_p 的对偶空间比刻画 L_p 的对偶要容易. 试不用课程中的结论, 直接导出

$$\ell_p^* \cong \ell_q,\ 1 \leqslant p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

并且证明

$$c_0^* \cong \ell_1.$$

由此导出 c_0, ℓ_1 和 ℓ_∞ 都不是自反的.

11. 设空间 $C([0,\ 1])$ 上赋予一致范数. $E \subset C([0,1])$ 定义为: $\forall f \in E$, f 在每一个区间 $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$ 上是仿射函数, 且 $f(0) = 0$.

(a) 证明: E 是 $C([0,1])$ 的闭向量子空间.

(b) 定义 $u: E \to c_0$ 为 $u(f) = (f(\frac{1}{n+1}))_{n \geqslant 0}$. 证明: u 是从 E 到 c_0 的等距映射.

(c) 导出 $C([0,1])$ 不是自反的.

(d) 类似地证明 $L_1(0,1)$ 和 $L_\infty(0,1)$ 不是自反的.

12. (a) 设 E 是自反 Banach 空间. 证明: 每个 $\varphi \in E^*$ 可以达到范数, 即存在 $x_0 \in E$, 使得 $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$.

(b) 由此导出已知的事实: ℓ_1, $L_1(0,1)$ 和 $C([0,1])$ 都不是自反的.

(提示: 对空间 $C([0,\ 1])$ 考察泛函 $\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^1$.)

(c) 证明: $C^1([0,\ 1])$ 不是自反的, 这里 $C^1([0,\ 1])$ 上赋予的范数是 $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(提示: 可以考虑 $C^1([0,\ 1])$ 中由在原点处取零值的函数构成的子空间.)

13. 令 E 是自反 Banach 空间, C 是 E 的闭凸子集. 设 $f: C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是下半连续函数且不恒为 $+\infty$. 假设 C 或者有界或者当 $\|x\| \to +\infty$ 时, 有 $f(x) \to +\infty$.

(a) 证明: f 关于弱拓扑下半连续.

(b) 证明: f 在 C 上可以取到它的下确界.

(c) 证明: 对任意 $x_0 \in E$, 存在 $c \in C$, 使得 $\|x_0 - c\| = d(x_0, C)$. 并用 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ 中的反例说明, 这样的 c 不唯一.

(d) 考虑 ℓ_1 上的超平面

$$H=\left\{x\in\ell_1:\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(n)\,x_n=1\right\}.$$

证明: H 是闭凸集但是没有在原点处的最优逼近, 也就是说, 不存在 $h\in H$, 使得 $\|h\|_1=d(0,H)$.

14. 本习题将讨论实 Banach 空间 ℓ_∞ 和它的子空间 c_0 和 c 的联系. 这里 c 是由 ℓ_∞ 中的收敛序列构成的闭子空间, 而 c_0 是极限为 0 的序列构成的闭子空间. 显然有 $c_0\subsetneqq c\subsetneqq\ell_\infty$. 所有这些空间都赋予上确界范数, 也就是 ℓ_∞ 上的范数.

(a) 证明: c 和 c_0 同构. 提示: 考虑算子 $u:c\to c_0$:

$$u(x)=(\ell,x_1-\ell,x_2-\ell,\cdots,x_n-\ell,\cdots),\quad 其中\ \ell=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

由此导出 c_0 上有一个等价范数, 在此意义下 c_0 和 c 等距同构.

(b) 证明: ℓ_∞ 既不等距同构于 c_0 也不等距同构于 c.

设 A 是向量空间 E 的非空凸子集. 我们称 $x\in A$ 是 A 的*端点*, 若任取 A 中的点 y 和 z, 使得 $x=\frac{y+z}{2}$, 则必有 $x=y=z$. 令 $\mathrm{Ext}(A)$ 表示 A 的所有端点构成的集合.

(c) 令 $\overline{B}_c$ 和 $\overline{B}_{c_0}$ 分别表示空间 c 和 c_0 中的闭单位球. 证明 $\mathrm{Ext}(\overline{B}_{c_0})$ 是空集, 并确定 $\mathrm{Ext}(\overline{B}_c)$.

由此导出 c 和 c_0 不是等距同构的.

(d) 我们在这一步骤的目的是证明 c^* 和 c_0^* 等距同构. 为此, 只需证明 c^* 和 ℓ_1 等距同构. 提示: ℓ_1 中元素 $y=(y_n)_{n\geqslant1}$ 以如下的方式作用在 c 中的元素 $x=(x_n)_{n\geqslant1}$ 上:

$$\langle y,\,x\rangle=y_1\ell+\sum_{n=2}^{\infty}y_nx_{n-1},\ 其中\ \ell=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

(e) 证明: 存在 $\varphi\in\ell_\infty^*$ 使得 $\|\varphi\|_{\ell_\infty^*}=1$, 且当 $x\in\ell_\infty$ 满足 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}x_n$ 存在时, 有

$$\varphi(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n.$$

刻画 $\varphi\big|_{c_0}$ 和 $\varphi\big|_c$. 证明: $\varphi\notin\ell_1$, 也就是说, φ 不能由 ℓ_1 中的元素来定义 (我们顺便得到 ℓ_1 不是自反的).

15. 设 $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一个复数列. 令

$$S_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\quad \text{且}\quad K_n=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}S_m.$$

令 $1<p\leqslant\infty$, 假设 (K_n) 在 $L^p_{2\pi}$ 上有界.

(a) 证明: (K_n) 有弱收敛的子序列.

(b) 证明: 存在函数 $f\in L^p_{2\pi}$, 使得对所有 $k\in\mathbb{Z}$, 有 $\widehat{f}(k)=c_k$.

16. 称 Banach 空间 E 为一致凸的, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$x,y\in\overline{B}_E,\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon\Longrightarrow\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqslant 1-\delta.$$

设 (x_n) 是一致凸空间 E 中弱收敛到 x 的序列, 并有 $\lim\limits_n\|x_n\|=\|x\|$. 证明: (x_n) 依范数收敛到 x. 用例子说明条件 $\lim\limits_n\|x_n\|=\|x\|$ 是必需的.

17. (a) 证明: Hilbert 空间是一致凸的.

(b) 用 Clarkson 不等式证明: 若 $2\leqslant p<\infty$, 则 L_p 空间是一致凸的.

18. 本题的目标是证明一致凸空间是自反的. 设 E 一致凸, $x^{**}\in E^{**}$ 满足 $\|x^{**}\|=1$. 我们只需证明: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $x\in\overline{B}_E$ 使得 $\|x^{**}-x\|\leqslant\varepsilon$. 下面固定 x^{**} 和 $\varepsilon>0$.

(a) 根据一致凸的定义, 确定 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 使得

$$x,y\in\overline{B}_E,\quad \|x-y\|\geqslant\varepsilon\Longrightarrow\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqslant 1-\delta.$$

(b) 取 $x^*\in E^*$ 使得 $\|x^*\|=1$ 和 $\langle x^{**},x^*\rangle>1-\frac{\delta}{2}$. 证明: 存在 $x\in\overline{B}_E$ 使得

$$|\langle x^{**},x^*\rangle-\langle x,x^*\rangle|<\frac{\delta}{2}.$$

(c) 我们用反证法证明 $\|x^{**}-x\|\leqslant\varepsilon$. 假设 $x^{**}\in E^{**}\backslash\overline{B}_{E^{**}}(x,\varepsilon)$.

(i) 证明 $\overline{B}_{E^{**}}(x,\varepsilon)$ 是 $\sigma(E^{**},E^*)$-闭的.

(ii) 证明存在 $y\in\overline{B}_E$, 使得

$$\|y-x\|>\varepsilon \text{ 和 } |\langle x^{**},x^*\rangle-\langle y,x^*\rangle|<\frac{\delta}{2}.$$

(iii) 导出如下与 x^* 的选取矛盾的不等式:

$$\langle x^{**},x^*\rangle\leqslant\frac{1}{2}\langle x+y,x^*\rangle\leqslant\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}.$$

(iv) 结束证明.

19. 本习题的目标是证明 Hanner 不等式: 设 $1 < p < 2$, 则

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geqslant \big|\|f\|_p + \|g\|_p\big|^p + \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|^p, \ \forall f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

(a) 证明: 对任意 $z, w \in \mathbb{C}$, 有

$$(|z|+|w|)^p + (|z|-|w|)^p \leqslant |z+w|^p + |z-w|^p.$$

(b) 定义函数 $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为

$$F(x,y) = \big(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\big)^p + \big|x^{\frac{1}{p}} - y^{\frac{1}{p}}\big|^p.$$

证明: F 是次数为 1 的齐次凸函数.

(c) 证明: 任取 $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, 有

$$F\left(\int_\Omega |f|^p, \int_\Omega |g|^p\right) \leqslant \int_\Omega F\big(|f|^p, |g|^p\big).$$

(d) 最后导出 Hanner 不等式.

20. 本习题的目标是证明空间 $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 在 $1 < p < 2$ 时是一致凸的.

(a) 令 $a > b > 0$. 定义 $[0,1]$ 上的函数 φ 和 ψ:

$$\psi(t) = \frac{(a+tb)^p + (a-tb)^p}{2}, \quad \varphi = \psi^{\frac{2}{p}}.$$

先证

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(t) \geqslant \frac{2}{p}\,\psi^{\frac{2}{p}-1}\psi''(t) \geqslant 2(p-1)b^2.$$

进而导出

$$\left[\frac{(a+b)^p + (a-b)^p}{2}\right]^{1/p} \geqslant \big[a^2 + (p-1)b^2\big]^{1/2}.$$

证明: 上式中的常数 $p-1$ 是最优的, 即它不可能被更小的常数取代.

(b) 证明:

$$\left(\frac{|z+w|^p + |z-w|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \big[|z|^2 + (p-1)|w|^2\big]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

(c) 导出如下的 Ball-Pisier 不等式:

$$\left(\frac{\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \big[\|f\|_p^2 + (p-1)\|g\|_p^2\big]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

(d) 进而证明: $L_p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 是一致凸的.

21. 本习题和下一习题的目的是刻画 L_1 空间的相对弱紧子集. 设 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 是 σ–有限的测度空间, F 是 $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 空间的子集. 我们称 F 是等度可积的(或称为一致可积的), 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $A\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(A)<\delta$ 时, 有

$$\int_A |f|\mathrm{d}\mu<\varepsilon, \quad \forall f\in F.$$

(a) 证明: $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 的任一有限子集是等度可积的.

(b) 证明: 有界集 F 是等度可积的当且仅当

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{f\in F}\int_{\{|f|>M\}}|f|\mathrm{d}\mu=0.$$

(c) 设 (f_n) 是 $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中的函数列, (A_n) 是 $\mathcal{A}$ 中一列两两不相交元素, 并且满足

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0 \quad 且 \quad \inf_{n\geqslant 1}\int_{A_n}|f_n|\mathrm{d}\mu>0.$$

证明: (f_n) 不是等度可积的.

给一个 $L_1(0,1)$ 的闭单位球中的不等度可积的函数列.

(d) 假设 $(f_n)\subset L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 不是等度可积的. 证明: 存在 $\varepsilon_0>0$, (f_n) 的子序列 (f_{n_k}) 和 $\mathcal{A}$ 中的一列元素 (B_k), 使得对任意 $k\geqslant 1$, 有

$$\mu(B_k)<2^{-k}, \quad \int_{B_k}|f_{n_k}|\geqslant\varepsilon_0, \quad \sup_{1\leqslant j\leqslant k-1}\int_{B_k}|f_{n_j}|\leqslant\varepsilon_0 2^{-k}.$$

(e) 令

$$A_k=\Big(\bigcup_{j\geqslant k}B_j\Big)\Big\backslash\Big(\bigcup_{j\geqslant k+1}B_j\Big).$$

证明: A_k 两两不相交且对任意 $k\geqslant 1$, 有

$$\mu(A_k)<2^{-k+1}, \quad \int_{A_k}|f_{n_k}|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

(f) 证明: 若 F 不是等度连续的, 则 F 不是相对弱紧的.

22. 假设 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 是有限测度空间.

(a) 设 (f_n) 是 $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中等度可积的非负函数列. 对任一给定的正整数 k, 令

$$f_n^k=\mathbb{1}_{\{f_n\leqslant k\}}f_n \quad 及 \quad \delta_k=\sup_{n\geqslant 1}\|f_n-f_n^k\|_1.$$

证明:

$$\lim_{k\to\infty}\delta_k=0.$$

(b) 证明: 对每个固定的 k, 函数列 $(f_n^k)_{n\geqslant 1}$ 有一个收敛的子序列, 当然该子序列也是弱收敛的.

(c) 证明: 存在一个递增的正整数序列 (n_j), 使得对每个 k, $(f_{n_j}^k)_{j\geqslant 1}$ 弱收敛到一个 $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中的函数 f^k.

(d) 证明: $f^{k+1}\geqslant f^k\geqslant 0$, 由此导出 $(f^k)_{k\geqslant 1}$ 收敛到一个 $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中的函数 f.

(e) 证明: $(f_{n_j})_{j\geqslant 1}$ 弱收敛到 f.

(f) 证明: $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中的每个等度可积的子集是相对弱紧的.

(g) 导出结论: $L_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 中的子集是相对弱紧的等价于它是有界的且等度可积的.

第十章 正则 Borel 测度和 Riesz 表示定理

我们已经描述了两类空间的对偶空间, 即 Hilbert 空间和 L_p 空间. 本章将刻画紧空间上所有连续函数构成的空间的对偶空间. 在本章中, 总是设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间. Riesz 表示定理刻画了 $C_0(X)$ 的对偶空间, 即 $C_0(X)$ 上的任意连续线性泛函可用 X 上的一个有界 Borel 测度的积分表示. 这是分析学中的一个非常深刻的结论.

§10.1 利用 Urysohn 引理, 给出了单位函数的连续划分. 在 §10.2 中我们讨论 $C_c(X)$ 上正线性泛函的积分表示, 即 Riesz 表示定理. §10.3 讨论 Riesz 表示定理所产生的 Radon 测度的正则性, 这里关键是在原来局部紧 Hausdorff 空间上加了一个 σ–紧的条件. 在 §10.4 中我们将给出赋范空间 $C_0(X)$ ($C_c(X)$ 是它的稠密子空间) 上的 Riesz 表示定理, 即 $C_0(X)$ 的对偶空间与 X 上所有复正则 Borel 测度构成的赋范空间等距同构.

§10.1 连 续 划 分

对于 $f : X \to \mathbb{C}$, 称集合 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 的闭包为 f 的*支撑*, 记作 $\operatorname{supp} f$. 令 $C_c(X)$ 表示 X 上所有具有紧支撑的连续函数组成的向量空间. 显然, $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密.

我们在集合和函数之间约定如下的关系符号: 设 $A \subset X$, $f \in C_c(X)$. 若 $\mathbb{1}_A \leqslant f \leqslant 1$, 则记 $A \prec f$; 若 $0 \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_A$ 且 $\operatorname{supp} f \subset A$, 则记 $f \prec A$. 注意, 在使用该关系符号时, 前者只是在 A 为紧集时而后者在 A 为开集时使用.

利用 Urysohn 引理 (定理 1.3.15), 我们可以给出下面的命题.

引理 10.1.1 *设 K 和 O 分别是紧集和开集, 且有 $K \subset O$, 则存在 $f \in C_c(X)$, 使得 $K \prec f \prec O$.*

证明 实际上, 当我们取集合 K 和 O^c, 则对应于 Urysohn 引理, 存在一个连续的函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得在 O^c 上 $f = 0$, 而在 K 上 $f = 1$. 另外, 我们还可取 f 使得 $\operatorname{supp} f$ 是紧的. 则该引理得证. ■

引理 10.1.2 设 K 是紧集, $O_1, \cdots, O_n$ 都是开集, 且满足 $K \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$. 则存在 $f_1, \cdots, f_n \in C_c(X)$, 使得 $f_k \prec O_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, 且在 K 上有 $f_1 + \cdots + f_n = 1$.

证明 任取 $x \in K$, 则 x 属于某个 O_k. 由于 X 是局部紧的, 则存在开邻域 $U_x \in \mathcal{N}(x)$, 使得 $\overline{U}_x$ 是紧的且 $\overline{U}_x \subset O_k$. 又因为 K 是紧的, 故存在有限个 $x_1, \cdots, x_m \in K$, 满足 $K \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$.

对每一个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 令 $K_k = \bigcup\limits_{j: \overline{U}_{x_j} \subset O_k} \overline{U}_{x_j}$. 那么由上一引理可知, 存在连续函数 g_k, 使得 $K_k \prec g_k \prec O_k$. 接下来, 我们定义

$$f_1 = g_1, f_2 = (1 - g_1) g_2, \cdots, f_n = (1 - g_1) \cdots (1 - g_{n-1}) g_n.$$

由此得到的函数列 $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ 满足 $f_k \prec O_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, 且在 K 上有 $f_1 + \cdots + f_n = 1$. 则该引理得证. ■

§10.2 正线性泛函的表示定理

在本节中, 除非明确指出, K 和 O 总是分别表示 X 中的紧子集和开子集. 另外, 我们约定 $\mathfrak{B}$ 表示局部紧的 Hausdorff 空间 X 上的 Borel σ–代数 (由 X 上所有开集 (或闭集) 生成的 σ–代数), 则 $(X, \mathfrak{B})$ 是一个测度空间.

定义 10.2.1 我们称 $(X, \mathfrak{B})$ 上的正测度 μ 为 *Borel* 测度; 称 μ 是局部有限的, 若对任何紧集 K, 都有 $\mu(K) < \infty$, 这等价于任何点均具有一个测度有限的邻域.

注 10.2.2 本章所涉及的测度理论详见 Rudin [7].

定义 10.2.3 称线性泛函 $\varphi: C_c(X) \to \mathbb{C}$ 为正的, 如果对任意 $f \geqslant 0$, 都有 $\varphi(f) \geqslant 0$.

注意, 若线性泛函 $\varphi: C_c(X) \to \mathbb{C}$ 是正的, 则对 $C_c(X)$ 中任意的实函数 $f \leqslant g$, 都有 $\varphi(f) \leqslant \varphi(g)$.

注 10.2.4 设 μ 是 $(X, \mathfrak{B})$ 上局部有限的正测度, 则任意 $f \in C_c(X)$ 关于测度 μ 可积. 于是, 我们可以定义

$$\varphi_\mu(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(X).$$

显而易见 φ_μ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 而反过来, 下面的 Riesz 表示定理断言, $C_c(X)$ 上任意正线性泛函可用此类积分形式表示出来.

定理 10.2.5 (Riesz) 设 φ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函, 则存在 X 上的 σ-代数 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathfrak{B} \subset \mathcal{A}$, 并有 $\mathcal{A}$ 上唯一的正测度 μ, 使得

(1) μ 是局部有限的.

(2) 对任意函数 $f \in C_c(X)$, 有

$$\varphi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

(3) 对任意 $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O,\ O \text{ 为开集}\}.$$

(4) 对任意开集以及任意测度有限的集合 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ 为紧集}\}.$$

(5) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是完备测度空间.

上面定理中的测度 μ 称为相应于泛函 φ 的 *Radon* 测度.

证明 如果满足条件 (1)—(5) 的 μ 存在, 易证其唯一性. 实际上, 设 $\varphi = \varphi_{\mu_1} = \varphi_{\mu_2}$, 等价于说任取 $f \in C_c(X)$, 有 $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu_1 = \int_X f \mathrm{d}\mu_2$. 根据命题 (4), 我们只需证明对任取一紧集 K, 有 $\mu_1(K) = \mu_2(K)$.

由命题 (3) 可知, 存在开集 O, 使得 $K \subset O$ 且 $\mu_i(O) \leqslant \mu_i(K) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. 那么根据引理 10.1.1, 存在连续函数 $f \in C_c(X)$, 使得 $K \prec f \prec O$. 再由命题 (2), 可得

$$\varphi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu_1 = \int_X f \mathrm{d}\mu_2.$$

因此

$$\mu_1(K) = \int_K \mathrm{d}\mu_1 \leqslant \int_X f \mathrm{d}\mu_1 = \varphi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu_2 \leqslant \int_X \mathbb{1}_O \mathrm{d}\mu_2 \leqslant \mu_2(K) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 即得 $\mu_1(K) \leqslant \mu_2(K)$. 交换 μ_1 和 μ_2 的位置得到反向不等式, 故 $\mu_1(K) = \mu_2(K)$.

下证测度 μ 的存在性, 这要经过以下多个步骤.

Ⅰ) 在开集族上定义 μ. 对任意开集 O, 令

$$\mu(O) = \sup\{\varphi(f) : f \prec O,\ f \in C_c(X)\}. \tag{10.1}$$

那么

- μ 在开集族上递增: 若有开集 $O_1 \subset O_2$, 则 $\mu(O_1) \subset \mu(O_2)$. 该结论显然成立.
- μ 是 σ–次可加的: 对任一列开集 $(O_n)_{n\geqslant 1}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n).$$

实际上, 我们先记 $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n$, 再任取 $f \in C_c(X)$ 使其满足 $f \prec O$. 然后记 $K = \text{supp } f$, 则 $K \subset O$. 由于 K 是紧集, 则存在 N, 使得 $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} O_n$. 那么根据引理 10.1.2, 存在 $f_1, \cdots, f_N \in C_c(X)$, 使得在紧集 K 上有 $f_1 + \cdots + f_N = 1$, 并且 $f_i \prec O_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$. 于是 $f = ff_1 + \cdots + ff_N$, 由此可知

$$\varphi(f) = \varphi(ff_1) + \cdots + \varphi(ff_N) \leqslant \mu(O_1) + \cdots + \mu(O_N) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n).$$

由 f 的任意性可导出 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(O_n)$.
- μ 是 σ–可加的: 对任一列两两不相交的开集 (O_n), 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n).$$

根据上一步的结论, 我们有 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(O_n)$, 故只需证明反向不等式. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}\varepsilon$, 则由 μ 在开集上的定义可知, 存在 $f_n \in C_c(X)$, 使得 $f_n \prec O_n$ 且 $\mu(O_n) \leqslant \varphi(f_n) + \varepsilon_n$. 那么对任意 N, 有

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(O_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \varphi(f_n) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \leqslant \varphi\Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big) + \varepsilon.$$

由于 (O_n) 两两不相交, 则 $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n \prec \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n$. 故

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(O_n) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\Big) + \varepsilon.$$

对上式取 $N \to \infty$ 时的极限, 并注意 ε 是任意的, 则得到结论.

Ⅱ) 在紧集上定义 μ. 对任意紧集 K, 令

$$\mu(K) = \inf\{\mu(O) : K \subset O\}. \tag{10.2}$$

那么

- μ 在紧集族上递增.
- μ 在紧集族上是次可加的: 对任意紧集 K_1 和 K_2, 都有

$$\mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

以上两个结论均显然成立.

- μ 在紧集族上是可加的: 对任意两个不相交的紧集 K_1 和 K_2, 都有

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

由上一命题, 我们仅需证明不等式 $\mu(K_1) + \mu(K_2) \leqslant \mu(K_1 \cup K_2)$. 任取开集 O, 使其满足 $K_1 \cup K_2 \subset O$. 由于 X 是 Hausdorff 空间且 K_1 和 K_2 是不相交的紧集, O 可写成不相交开集 O_1 和 O_2 的并集, 且满足 $K_1 \subset O_1$ 及 $K_2 \subset O_2$. 因 μ 在开集族上是可加的, 故可得

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leqslant \mu(O_1) + \mu(O_2) = \mu(O).$$

在上式中对所有的 O 取下确界, 即得结论.

Ⅲ) 证明 μ 在开集和紧集上的定义的一致性. 也就是说, 以下结论成立:

$$\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \subset O\} \tag{10.3}$$

和

$$\mu(K) = \inf\{\varphi(f) : K \prec f,\ f \in C_c(X)\}. \tag{10.4}$$

首先证明 (10.3) 式. 任取 $K \subset O$, 则直接由 $\mu(K)$ 的定义可知 $\mu(K) \leqslant \mu(O)$, 故

$$\sup\{\mu(K) : K \subset O\} \leqslant \mu(O).$$

反过来, 若设 $f \prec O$, 并记 $K = \operatorname{supp} f$, 则 K 为紧集且 $K \subset O$. 那么对任一包含 K 的开集 U, 都有 $f \prec U$; 从而 $\varphi(f) \leqslant \mu(U)$. 仍由 $\mu(K)$ 的定义可得 $\varphi(f) \leqslant \mu(K)$. 由于 $f \prec O$ 是任意的, 根据 $\mu(O)$ 的定义可得

$$\mu(O) \leqslant \sup\{\mu(K) : K \subset O\}.$$

故 (10.3) 式得证.

接下来证明 (10.4) 式. 设开集 O 满足 $K \subset O$, 则根据引理 10.1.1, 存在函数 $f \in C_c(X)$, 使得 $K \prec f \prec O$. 那么 $\varphi(f) \leqslant \mu(O)$, 故

$$\inf\{\varphi(f) : K \prec f,\ f \in C_c(X)\} \leqslant \mu(K).$$

反过来, 若取 $f \in C_c(X)$, 使得 $K \prec f$, 则对任意 $\varepsilon \in (0,1)$, $K \subset \{x \in X : f(x) > \varepsilon\}$. 记 $O_\varepsilon = \{x \in X : f(x) > \varepsilon\}$. 则对任意 $g \prec O_\varepsilon$, 有 $\varepsilon g < fg \leqslant f$, 即 $g < \frac{1}{\varepsilon} f$. 于是可得 $\mu(O_\varepsilon) \leqslant \varphi(\frac{1}{\varepsilon} f)$, 进而有 $\mu(K) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\varphi(f)$. 然后令 $\varepsilon \to 1$, 得 $\mu(K) \leqslant \varphi(f)$, 也就是说

$$\mu(K) \leqslant \inf\{\varphi(f) : K \prec f,\ f \in C_c(X)\}.$$

特别地, 该结果也意味着对任何紧集 K 有 $\mu(K) < \infty$, 即 μ 是局部有限的.

以上 μ 的一致性意味着我们从 (10.3) 式和 (10.4) 式出发, 类似于上面的证明过程, 可以得到 (10.1) 式和 (10.2) 式.

Ⅳ) 在 X 的子集族上引入新的集函数. 对任意 $A \subset X$, 令

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O\} \tag{10.5}$$

和

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A\}. \tag{10.6}$$

我们称 μ^* 和 μ_* 分别为 X 上的外测度和内测度. 那么根据 Ⅰ)–Ⅲ) 部分给出的定义和性质, 容易得到下面的命题.

- μ^* 和 μ_* 都是递增的, 并且 $\mu_* \leqslant \mu^*$.
- 若 A 为开集或紧集, 则有 $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.
- μ^* 是 σ–次可加的: 对任一列集合 $(A_n)_{n\geqslant 1}$, 有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

- μ_* 是 σ–上可加的: 对任一列两两不相交的集合 $(A_n)_{n\geqslant 1}$, 有

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n).$$

Ⅴ) 由外测度和内测度定义集族 —— 环. 首先我们定义集族

$$\mathcal{A}_F = \{A \subset X : \mu^*(A) = \mu_*(A) < \infty\}$$

那么

- 任何紧集 $K \in \mathcal{A}_F$; 若开集 O 满足 $\mu(O) < \infty$, 则 $O \in \mathcal{A}_F$.
- 对 $\mathcal{A}_F$ 中任一列两两不相交的集合 $(A_n)_{n\geqslant 1}$, 有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n} A_n\right) = \sum_{n} \mu^*(A_n).$$

事实上,由内测度和外测度的性质,可得

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) = \sum_n \mu_*(A_n) \leqslant \mu_*\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right).$$

因此,如果还有 $\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) < \infty$,则 $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}_F$.

- Lusin 定理成立,即 $A \in \mathcal{A}_F$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$,存在紧集 K 和开集 O,使得 $K \subset A \subset O$ 且 $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$.

  Lusin 定理证明如下:首先设 $A \in \mathcal{A}_F$. 对任意 $\varepsilon > 0$,存在开集 O,使得 $\mu(O) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$;同时也存在着紧集 K,使得 $\mu(K) > \mu_*(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. 因 $A \in \mathcal{A}_F$,故

$$\mu(O) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu_*(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(K) + \varepsilon.$$

  由于 O 是开集而 K 是紧集,则 $O \setminus K$ 是开集. 那么

$$\begin{aligned}\mu(K) + \mu(O \setminus K) &= \mu_*(K) + \mu_*(O \setminus K) \leqslant \mu_*\big(K \cup (O \setminus K)\big) \\ &= \mu_*(O) = \mu(O) < \mu(K) + \varepsilon.\end{aligned}$$

  故 $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$.

  再证明反向结论. 对任意 $\varepsilon > 0$,设紧集 K 和开集 O 满足 $K \subset A \subset O$ 及 $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$. 则

$$\begin{aligned}\mu(O) &= \mu^*(O) = \mu^*\left(K \cup (O \setminus K)\right) \\ &\leqslant \mu^*(K) + \mu^*(O \setminus K) = \mu(K) + \mu(O \setminus K) < \mu(K) + \varepsilon.\end{aligned}$$

  那么

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(O) \leqslant \mu(K) + \varepsilon \leqslant \mu_*(A) + \varepsilon.$$

  所以有 $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

- $\mathcal{A}_F$ 为一个环,即若 $A, B \in \mathcal{A}_F$,则 $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{A}_F$. 由此也有 $A \cap B \in \mathcal{A}_F$.

  设 $A, B \in \mathcal{A}_F$. 则由 Lusin 定理可得:对任意 $\varepsilon > 0$. 存在开集 O_1, O_2 和紧集 K_1, K_2,使得 $K_1 \subset A \subset O_1, K_2 \subset B \subset O_2$ 且 $\mu(O_i \setminus K_i) < \varepsilon, i = 1, 2$. 因而 $K_1 \setminus O_2 \subset A \setminus B \subset O_1 \setminus K_2$,并且

$$\begin{aligned}\mu\big((O_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus O_2)\big) &= \mu\big((O_1 \setminus K_1) \cup (O_2 \setminus K_2)\big) \\ &\leqslant \mu(O_1 \setminus K_1) + \mu(O_2 \setminus K_2) < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

  另外,$K_1 \cup K_2 \subset A \cup B \subset O_1 \cup O_2$,并且

$$\mu\big((O_1 \cup O_2) \setminus (K_1 \cup K_2)\big) = \mu\big((O_1 \setminus K_1) \cup (O_2 \setminus K_2)\big)$$

$$\leqslant \mu(O_1 \setminus K_1) + \mu(O_2 \setminus K_2) < 2\varepsilon.$$

由以上不等式导出 $A \setminus B, A \cup B \in \mathcal{A}_F$, 因此, $\mathcal{A}_F$ 是环. 另外,

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \setminus (B \setminus A)),$$

故也有 $A \cap B \in \mathcal{A}_F$.

VI) 定义可测集族和其上的测度. 令

$$\mathcal{A} = \{A \subset X: \text{ 对任意紧集 } K, \ A \cap K \in \mathcal{A}_F\}.$$

并且对任意 $A \in \mathcal{A}$, 令 $\mu(A) = \mu^*(A)$. 那么

- $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ–代数, 且 Borel σ–代数 $\mathfrak{B} \subset \mathcal{A}$.

  根据 σ–代数的定义, 证明如下:

  (a) 对任意紧集 $K \in \mathcal{A}_F$, 有 $X \cap K \in \mathcal{A}_F$, 故 $X \in \mathcal{A}$.

  (b) 设 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A \cap K \in \mathcal{A}_F$. 根据 **V)** 中结论, $\mathcal{A}_F$ 是一个环, 可得 $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K) \in \mathcal{A}_F$, 故 $A^c \in \mathcal{A}$.

  (c) 设 $(A_k)_{k\geqslant 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的集合列, 则 $A_k \cap K \in \mathcal{A}_F$, $k = 1, 2, \cdots$. 我们由 $(A_k \cap K)_{k\geqslant 1}$ 构造新的集合列 $(B_k)_{k\geqslant 1}$, 满足

$$B_k = (A_k \cap K) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (A_i \cap K), \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

  则 $B_k \in \mathcal{A}_F$ 且两两不相交. 因而

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \bigcap K = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \bigcap K\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

  再由 μ_* 和 μ^* 的性质, 可得

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(B_k) \leqslant \mu_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right).$$

  于是得到

$$\mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \bigcap K\right) = \mu_*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \bigcap K\right),$$

  即 $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap K \in \mathcal{A}_F$. 故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

综上所述, 我们证明了 $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ–代数. 并且任取 X 中的闭集 C 和紧集 K, 因 $C\cap K$ 是紧集, 故 $C\in\mathcal{A}$. 所以 $\mathfrak{B}\subset\mathcal{A}$.

- $A\in\mathcal{A}_F$ 当且仅当 $A\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(A)=\mu^*(A)<\infty$.

实际上, 由定义立即可知若 $A\in\mathcal{A}_F$, 则 $A\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(A)=\mu^*(A)<\infty$, 故我们只需证明其反向结论成立.

因 $\mu(A)=\mu^*(A)<\infty$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在测度有限的开集 O, 使得 $A\subset O$ 且 $\mu(O)<\mu^*(A)+\varepsilon$. 另外, 存在紧集 $K\subset O$, 使得 $\mu(O)<\mu(K)+\varepsilon$. 由 $A\in\mathcal{A}$ 可知 $A\cap K\in\mathcal{A}_F$, 进而存在紧集 $K_1\subset A\cap K$, 使得

$$\mu^*(A\cap K)=\mu_*(A\cap K)<\mu(K_1)+\varepsilon.$$

那么

$$\begin{aligned}\mu^*(A)&=\mu^*(A\setminus K)+\mu^*(A\cap K)\leqslant\mu^*(O\setminus K)+\mu_*(A\cap K)\\&<\mu(K_1)+2\varepsilon\leqslant\mu_*(A)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

故由 ε 的任意性, 可得 $\mu^*(A)=\mu_*(A)$, 即 $A\in\mathcal{A}_F$.

- μ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的测度.

我们仅需证明 μ 在 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ–可加性, 即证: 若 $(A_k)_{k\geqslant 1}$ 是 $\mathcal{A}$ 两两不相交的集合列, 则

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k).$$

记 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, 若 $\mu^*(A)=\infty$, 上式自然成立; 若 $\mu^*(A)<\infty$, 则也有 $\mu^*(A_k)<\infty$, 于是有 $A_k\in\mathcal{A}_F$. 那么根据 **V)** 中结论, 上式成立.

- $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是完备测度空间.

实际上, 若取 $A\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(A)=0$, 则对任意集合 $B\subset A$, 都有

$$0\leqslant\mu_*(B)\leqslant\mu^*(B)\leqslant\mu^*(A)=0.$$

故 $\mu(B)=\mu^*(B)=0$, 因此 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是完备的.

最后证明:

Ⅶ) 对任意 $f\in C_c(X)$, 有 $\varphi(f)=\displaystyle\int_X f\mathrm{d}\mu$.

因 φ 是线性的, 故我们可假设 f 是实值的. 进一步, 我们也只需证明不等式

$$\varphi(f)\leqslant\int_X f\mathrm{d}\mu.$$

因为一旦证明了该不等式, 再取函数为 $-f$ 就得到了它的反向不等式.

由于有紧支撑的连续函数是有界的, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $|f| < n\varepsilon$. 设 $K = \operatorname{supp} f$, 并令

$$A_k = K \cap f^{-1}((k\varepsilon,\ (k+1)\varepsilon]), \quad k = -n, \cdots, n-1.$$

由于 $f^{-1}\big((k\varepsilon,\ (k+1)\varepsilon]\big) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, 则 (A_k) 是 $\mathcal{A}_F$ 中两两不相交的集合列. 然后对每个 k 选择相应的开集 O_k, 使其满足:

(i) $A_k \subset O_k$.

(ii) $\mu(O_k) \leqslant \mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2n}$.

(iii) 在 O_k 上, $f \leqslant k\varepsilon + 2\varepsilon$.

则显然有

$$K \subset \bigcup_{k=-n}^{n-1} A_k \subset \bigcup_{k=-n}^{n-1} O_k.$$

那么根据引理 10.1.2, 存在一列函数 $h_k \in C_c(X)$, 使得 $h_k \prec O_k$ 且在 K 上有 $\sum h_k = 1$. 由此可得 $f = \sum f h_k$; 因此

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \sum_{k=-n}^{n-1} \varphi(f h_k) \leqslant \sum_{k=-n}^{n-1} (k\varepsilon + 2\varepsilon)\varphi(h_k) \\
&\leqslant \sum_{k=-n}^{n-1} (k\varepsilon + 2\varepsilon)\mu(O_k) \leqslant \sum_{k=-n}^{n-1} (k\varepsilon + 2\varepsilon)\left[\mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2n}\right] \\
&\leqslant 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{2n}\sum_{k=-n}^{n-1} (k\varepsilon + 2\varepsilon) + \sum_{k=-n}^{n-1} k\varepsilon\mu(A_k) \\
&\leqslant 2\varepsilon\mu(K) + \varepsilon(n\varepsilon + 2\varepsilon) + \int_X f \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

因 ε 是任意的, 故有 $\varphi(f) \leqslant \int_X f \mathrm{d}\mu$.

定理完全得证. ■

§10.3 测度的正则性

本节研究 Borel 测度的正则性.

定义 10.3.1 设 μ 是 $\mathfrak{B}$ 上的正测度. 若对任意 $A \in \mathfrak{B}$ 有

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O,\ O \text{ 是开集}\},$$

则称 μ 是外正则的; 若对任意 $A\in\mathfrak{B}$ 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K): K\subset A,\ K \text{ 是紧集}\},$$

则称 μ 是内正则的. 若 μ 既是外正则的又是内正则的, 则称 μ 是正则的.

在上节 Riesz 表示定理中相当于正线性泛函 φ 的 Radon 测度是外正则的; 若该测度有限, 则也是内正则的. 特别地, 当 X 是紧空间时, 该测度有限, 从而是正则的. 当 X 的紧性减弱为 σ–紧时, 正则性结论仍然成立.

定义 10.3.2 称拓扑空间 X 为 σ–紧的, 如果 X 是其可数多个紧子集的并.

定理 10.3.3 设 X 是 σ–紧的局部紧 Hausdorff 空间, φ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函, $\mathcal{A}$ 和 μ 分别是 Riesz 表示定理中确定的相应于 φ 的 σ–代数和测度. 则以下命题成立:

(1) 对任意 $A\in\mathcal{A}$ 及 $\varepsilon>0$, 存在开集 O 和闭集 C, 满足

$$C\subset A\subset O \quad \text{且} \quad \mu(O\setminus C)<\varepsilon.$$

(2) μ 是正则的.

(3) 对任意 $A\in\mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{G}_\delta$ 集 G 和 $\mathcal{F}_\sigma$ 集 F, 满足

$$F\subset A\subset G \quad \text{且} \quad \mu(G\setminus F)=0.$$

证明 (1) 在 X 是 σ–紧的条件下, 存在一列紧集 $(K_n)_{n\geqslant1}$, 使得 $X=\bigcup\limits_{n\geqslant1}K_n$; 而且可以选取 $(K_n)_{n\geqslant1}$ 使得

$$K_1\subset \mathring{K}_2\subset K_2\subset \mathring{K}_3\subset K_3\subset\cdots.$$

那么任取 $A\in\mathcal{A}$, 有 $A\cap K_n\in\mathcal{A}_F$, $n=1,2,\cdots$. 对任意 $\varepsilon>0$, 根据 Riesz 表示定理中测度的构造, 存在相应的开集 O_n, 使得 $A\cap K_n\subset O_n$ 并且 $\mu(O_n\setminus(A\cap K_n))<2^{-n}\varepsilon$. 我们记 $O=\bigcup\limits_{n\geqslant1}O_n$. 于是有 $A\subset O$ 且

$$\mu(O\setminus A)\leqslant\sum_{n\geqslant1}\mu(O_n\setminus(A\cap K_n))<\sum_{n\geqslant1}2^{-n}\varepsilon=\varepsilon.$$

再在上面的讨论中考虑 A^c, 则存在开集 O', 使得 $A^c\subset O'$, 并且 $\mu(O'\setminus A^c)<\varepsilon$, 等价地有 $\mu(A\setminus(O')^c)<\varepsilon$. 注意 $(O')^c$ 是闭集. 若记 $C=(O')^c$, 则有 $C\subset A\subset O$, 且

$$\mu(O\setminus C)=\mu\big((O\setminus A)\cup(A\setminus C)\big)\leqslant\mu(O\setminus A)+\mu(A\setminus C)<2\varepsilon.$$

(2) 因闭集 $C = \bigcup_{n\geqslant 1}(C\cap K_n)$, 故 $\mu(C) = \lim_{n\to\infty}\mu(C\cap K_n)$. 而 $C\cap K_n$ 是紧集, 故 μ 是内正则的, 从而也是正则的.

(3) 在 (1) 中取一列 ε_n, 使得当 $n\to\infty$ 时, 有 $\varepsilon_n\to 0$. 相应地, 我们可以给出开集列 (O_n) 和闭集列 (C_n), 使得 $\mu(O_n\setminus C_n) < \varepsilon_n$. 记 $G = \bigcap_{n\geqslant 1} O_n$ 和 $F = \bigcup_{n\geqslant 1} C_n$, 则可得 $F\subset A\subset G$, 并且

$$\mu(G\setminus F) \leqslant \mu(O_n\setminus C_n) < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n\to\infty$, 结论得证. ■

推论 10.3.4 在上面定理的条件下, 测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 正是 $(X, \mathfrak{B}, \mu\big|_{\mathfrak{B}})$ 的完备化空间. 所以, Riesz 表示定理中的 σ–代数 $\mathcal{A}$ 由线性泛函 φ 唯一确定.

定理 10.3.5 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, 并且每一个开集都是 σ–紧的. 对 X 上任一局部有限的 Borel 正测度 μ, 定义

$$\varphi_\mu(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu, \quad f\in C_c(X).$$

那么

(1) 映射 $\mu\mapsto\varphi_\mu$ 是从 X 上局部有限 Borel 正测度构成的集合到 $C_c(X)$ 上的正线性泛函构成的集合上的双射.

(2) X 上任何局部有限的 Borel 正测度是正则的.

证明 显然由 μ 定义的 φ_μ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 根据定理 10.3.3, 线性泛函 φ_μ 产生 X 上唯一的局部有限的正则测度, 记该测度为 λ. 故我们仅需证明 $\mu = \lambda$.

首先任取开集 $O\subset X$. 由于 O 是 σ–紧的, 则存在单调上升紧集列 $(K_n)_{n\geqslant 1}$, 使得 $O = \bigcup_{n\geqslant 1} K_n$. 则有 $\mu(O) = \lim_{n\to\infty}\mu(K_n)$. 并且根据引理 10.1.1, 对每个 $n\geqslant 1$, 存在 $f_n\in C_c(X)$, 使得 $K_n\prec f_n\prec O$. 那么

$$\begin{aligned}\mu(O) &= \lim_{n\to\infty}\mu(K_n) = \lim_{n\to\infty}\int_X \mathbb{1}_{K_n}\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\lambda\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_X \mathbb{1}_O\mathrm{d}\lambda = \lambda(O).\end{aligned}$$

反向不等式同理可证, 故 $\mu(O) = \lambda(O)$.

再任取 $A\in\mathcal{B}$. 因 λ 是正则的, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 O 和紧集 K, 使得 $K\subset A\subset O$, 而且 $\lambda(O\setminus K)<\varepsilon$. 于是可得

$$\mu(A)\leqslant\mu(O)=\lambda(O)\leqslant\lambda(K)+\lambda(O\setminus K)<\lambda(A)+\varepsilon.$$

由此可得 $\mu(A)\leqslant\lambda(A)$. 因 $O\setminus K$ 是开集, 则 $\mu(O\setminus K)=\lambda(O\setminus K)<\varepsilon$, 于是同理可得 $\lambda(A)\leqslant\mu(A)$. 因此 $\mu(A)=\lambda(A)$. 定理得证. ■

定理 10.3.6 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, μ 是 X 上局部有限的正则 Borel 正测度. 则对任意 $0<p<\infty$, $C_c(X)$ 在 $L_p(X,\mathfrak{B},\mu)$ 中稠密. 若 μ 还是 σ–有限的, 则 $C_c(X)$ 在 $L_\infty(X,\mathfrak{B},\mu)$ 中 w^*–稠密.

证明 因为 $(X,\mathfrak{B},\mu)$ 上的简单函数构成的集合在 $L_p(X,\mathfrak{B},\mu)$ 中稠密, 故我们只需证明: 任取 $A\in\mathfrak{B}$ 且 $\mu(A)<\infty$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $f\in C_c(X)$, 使得

$$\int_X|\mathbb{1}_A-f|^p\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

由于 μ 是 X 上正则 Borel 测度, 则存在开集 O 和紧集 K, 使得 $K\subset A\subset O$, 而且 $\mu(O\setminus K)<\varepsilon$. 根据引理 10.1.1, 有 $f\in C_c(X)$, 使得 $K\prec f\prec O$. 因此推出

$$\int_X|\mathbb{1}_A-f|^p\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X\mathbb{1}_{O\setminus K}\mathrm{d}\mu=\mu(O\setminus K)<\varepsilon.$$

这证明了 $C_c(X)$ 在 $L_p(X,\mathfrak{B},\mu)$ 中的稠密性.

现证 $C_c(X)$ 在 $L_\infty(X,\mathfrak{B},\mu)$ 中是 w^*–稠密的. 因 μ 是 σ–有限的, 故根据定理 9.5.1, 这等价于证明: 对任意 $f\in L_\infty(X,\mathfrak{B},\mu)$, $g\in L_1(X,\mathfrak{B},\mu)$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $h\in C_c(X)$, 使得

$$\left|\int_X(f-h)g\mathrm{d}\mu\right|<\varepsilon.$$

对任意 $g\in L_1(X,\mathfrak{B},\mu)$, 定义 $(X,\mathfrak{B},\mu)$ 上新的正测度 ν: $\nu(E)=\int_E|g|\mathrm{d}\mu$, $E\in\mathfrak{B}$. 易见 $\nu(X)<\infty$ 且 ν 关于 μ 绝对连续, 即 $\mu(E)=0$ 蕴含 $\nu(E)=0$. 那么 $f\in L_\infty(X,\mathfrak{B},\nu)$, 由于 $\nu(X)<\infty$, 也有 $f\in L_1(X,\mathfrak{B},\nu)$. 因此, 根据本定理已经得到的结论, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $h\in C_c(X)$, 使得 $\|f-h\|_{L_1(X,\mathfrak{B},\nu)}<\varepsilon$. 于是可得

$$\left|\int_X(f-h)g\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_X|f-h|\,|g|\mathrm{d}\mu=\int_X|f-h|\,\mathrm{d}\nu<\varepsilon.$$

定理得证. ■

注 10.3.7 定理中 μ 的内正则性条件可以略作弱化: 对任意 $A \in \mathfrak{B}$ 且 $\mu(A) < \infty$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ 是紧集}\}.$$

这正是相应于 $C_c(X)$ 上正线性泛函的 Radon 测度的情形.

§10.4 复测度和 Riesz 表示定理

前两节将 $C_c(X)$ 上的正线性泛函对应于 X 上的正测度, 本节讨论其上的任意有界线性泛函, 我们将看到它们对应于 X 上的复测度. 注意, 在 $C_c(X)$ 上取一致范数时, 它不是完备的, 而是 $C_0(X)$ 的稠密子空间. $C_0(X)$ 的定义可以参见定义 3.3.16, 不过那里的函数取值在更一般的赋范空间, 在这里我们略微重复, 还是具体给出 "函数版" 的空间 $C_0(X)$ 的定义, 并且它是一个 Banach 空间.

定义 10.4.1 设 f 是拓扑空间 X 上的函数. 若对任意 $\varepsilon > 0$; 存在 X 中的紧集 K, 使得 f 在 $X \setminus K$ 上满足 $|f| < \varepsilon$, 则称函数 f 在 X 上*消失于无穷*. 我们用 $C_0(X)$ 表示所有 X 上消失于无穷的连续函数构成的 Banach 空间, 其上赋予如下一致有界的范数:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

在本节中, μ 表示相关测度空间上的*复测度*. $|\mu|$ 称为 μ 的*全变差*或*绝对值*. $|\mu|$ 定义为, 对任意的可测集 A,

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)|,$$

这里上确界取遍 A 所有的可测划分 $(A_i)_{i \geqslant 1}$. 可以证明 $|\mu|$ 是相应测度空间上的正测度, 并且 $|\mu|$ 必定是有限的.

定义 10.4.2 称 Borel σ–代数 $\mathfrak{B}$ 上的复测度 μ 为*复 Borel 测度*. 如果 $|\mu|$ 是正则的, 则称复测度 μ 是正则的.

令 $M(X)$ 表示拓扑空间 X 上所有正则复 Borel 测度构成的集合. 则 $M(X)$ 在通常的复测度运算下成为一个向量空间. 若在 $M(X)$ 上赋予范数

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

则它成为一个 Banach 空间. 实际上, 本节的 Riesz 定理 10.4.3 表明 $M(X)$ 可被看成 $C_0(X)$ 的对偶空间, 因而 $M(X)$ 自然是 Banach 空间.

对任意 $\mu \in M(X)$ 和 X 上的有界 Borel 函数 f, 可以用通常的方式定义积分

$$\int_X f \mathrm{d}\mu.$$

该积分也可转变成对正测度的积分. 实际上, 根据 Radon-Nikodým 定理, 存在一个可测函数 h, 在 X 上关于 $|\mu|$ 几乎处处有 $|h|=1$, 使得 $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}|\mu|$. 则上述积分可定义为

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X fh \mathrm{d}|\mu|.$$

我们称这里的 h 是 μ 关于 $|\mu|$ 的 *Radon-Nikodým* 导数, 也称公式 $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}|\mu|$ 为 μ 的极分解.

定义

$$\varphi_\mu(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(X).$$

容易验证 φ_μ 是 $C_0(X)$ 上的连续线性泛函, 并且 $\|\varphi_\mu\| \leqslant \|\mu\|$; 而 φ_μ 是正的当且仅当 μ 是正的.

定理 10.4.3 (Riesz) 对 $C_0(X)$ 上每一个连续线性泛函 φ, 都存在 X 上唯一正则复 Borel 测度 μ, 使得 $\varphi = \varphi_\mu$; 而且有 $\|\varphi\| = \|\mu\|$. 因此, $\mu \mapsto \varphi_\mu$ 是从 $M(X)$ 到 $C_0(X)$ 的对偶空间的等距同构映射. 从而

$$C_0(X)^* \cong M(X) \quad (\text{等距同构意义下}).$$

证明 设 $\varphi \in C_0(X)^*$. 我们先证存在 $\mu \in M(X)$, 使得 $\varphi = \varphi_\mu$. 首先, 我们构造一个相应于 φ 的正线性泛函.

设 $C_0(X)^+$ 表示由 $C_0(X)$ 中的正函数构成的集合. 则对任意 $f \in C_0(X)^+$, 定义

$$\psi(f) = \sup\left\{|\varphi(g)| : g \in C_0(X) \text{ 且 } |g| \leqslant f\right\}. \tag{10.7}$$

那么 $\psi(f) \geqslant 0$ 并且是 $C_0(X)^+$ 上的正齐性的线性泛函, 即满足:

- 对任意 $\lambda \geqslant 0$ 以及 $f \in C_0(X)^+$, 有 $\psi(\lambda f) = \lambda\psi(f)$.
- 对任意 $f_1, f_2 \in C_0(X)^+$, 有 $\psi(f_1 + f_2) = \psi(f_1) + \psi(f_2)$.

我们只需证明上面的第二个性质. 取 $g \in C_0(X)$, 使得 $|g| \leqslant f_1 + f_2$. 令

$$g_1 = \frac{f_1}{f_1 + f_2} g, \quad g_2 = \frac{f_2}{f_1 + f_2} g.$$

注意, 若在某些点 $x \in X$ 处, 有 $f_1(x) + f_2(x) = 0$, 则令 $g_1(x) = g_2(x) = 0$. 那么由此得到的 g_1 和 g_2 分别满足 $|g_1| \leqslant f_1$, $|g_2| \leqslant f_2$ 且 $g = g_1 + g_2$. 于是可得

$$|\varphi(g)| \leqslant |\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| \leqslant \psi(f_1) + \psi(f_2).$$

再由 g 的任意性, 即证 $\psi(f_1+f_2)\leqslant\psi(f_1)+\psi(f_2)$.

接下来证明反向不等式. 取 $|g_1|\leqslant f_1, |g_2|\leqslant f_2$, 再设 $a_i=\operatorname{sgn}\varphi(g_i), i=1,2$. 则有

$$|\varphi(g_i)|=a_i\varphi(g_i)=\varphi(a_ig_i),\quad i=1,2.$$

由于 $|a_1g_1+a_2g_2|\leqslant|g_1|+|g_2|\leqslant f_1+f_2$, 则

$$|\varphi(g_1)|+|\varphi(g_2)|=a_1\varphi(g_1)+a_2\varphi(g_2)=\varphi(a_1g_1+a_2g_2)\leqslant\psi(f_1+f_2).$$

同样由 g_1,g_2 选择的任意性, 即得 $\psi(f_1)+\psi(f_2)\leqslant\psi(f_1+f_2)$.

然后, 我们把 ψ 扩展到 $C_0(X)$ 中的实函数上. $C_0(X)$ 中任意实函数 f 可以分解为 $f=f_1-f_2$, $f_1,f_2\in C_0(X)^+$, 那么定义 $\psi(f)=\psi(f_1)-\psi(f_2)$. 实际上, $\psi(f)$ 的结果并不依赖于实函数 f 的具体分解, 这是因为若 $f=f_1'-f_2'$ 是另一个分解, 则 $f_1+f_2'=f_1'+f_2$. 进而由 ψ 在 $C_0(X)^+$ 上的可加性得

$$\psi(f_1)+\psi(f_2')=\psi(f_1+f_2')=\psi(f_1'+f_2)=\psi(f_1')+\psi(f_2).$$

因此, $\psi(f_1)-\psi(f_2)=\psi(f_1')-\psi(f_2')$.

我们再把 ψ 扩展到整个 $C_0(X)$ 上. 对每个 $f\in C_0(X)$, 令 $f=f_1+\mathrm{i}f_2$, 这里的 f_1 和 f_2 分别是 f 的实部和虚部. 定义 $\psi(f)=\psi(f_1)+\mathrm{i}\psi(f_2)$, 容易验证如此定义的 ψ 在 $C_0(X)$ 上是线性的. 并且

- 任取 $f\in C_0(X)$, 有

$$|\varphi(f)|\leqslant\psi(|f|)\leqslant\|\varphi\|\,\|f\|_\infty. \tag{10.8}$$

这是因为 $|f|\in C_0(X)^+$, 由 ψ 在 $C_0(X)^+$ 上的定义式 (10.7) 可得

$$|\varphi(f)|\leqslant\psi(|f|)\leqslant\sup_{|g|\leqslant|f|}|\varphi(g)|\leqslant\sup_{|g|\leqslant|f|}\|\varphi\|\,\|g\|_\infty\leqslant\|\varphi\|\,\|f\|_\infty.$$

- ψ 是连续的且 $\|\psi\|=\|\varphi\|$. 因为由 (10.8) 式, 可得

$$\begin{aligned}\|\psi\|&=\sup\{|\psi(f)|:f\in C_0(X),\|f\|_\infty\leqslant1\}\\&=\sup\left\{\psi(f):f\in C_0(X)^+,\|f\|_\infty\leqslant1\right\}\leqslant\|\varphi\|.\end{aligned}$$

仍然建立在 (10.8) 式的基础上, 可得

$$\|\varphi\|=\sup_{\|f\|_\infty\leqslant1}|\varphi(f)|\leqslant\sup_{\|f\|_\infty\leqslant1}\psi(|f|)=\sup_{\|f\|_\infty\leqslant1,f\in C_0(X)}|\psi(f)|\leqslant\|\psi\|.$$

所以结论成立.

至此, 我们得到了一个相应于 φ 的正线性泛函 $\psi: C_c(X) \to \mathbb{C}$. 那么根据 Riesz 定理 10.2.5, 存在 X 上的一个正 Borel 测度 ν, 使得 $\psi(f) = \int_X f\mathrm{d}\nu$. 而且

$$\nu(X) = \sup\{\psi(f) : f \prec X, f \in C_c(X)\} \leqslant \|\psi\|. \tag{10.9}$$

则 $\nu(X) < \infty$, 因此 ν 是正则的, 即 $\nu \in M(X)$. 于是

$$|\varphi(f)| \leqslant \psi(|f|) = \int_X |f| \,\mathrm{d}\nu = \|f\|_{L_1(X,\mathfrak{B},\nu)},$$

这意味着 φ 是 $C_c(X)$ 上关于 $L_1(X,\mathfrak{B},\nu)$ 范数而言的连续线性泛函. 因 $C_c(X)$ 在 $L_1(X,\mathfrak{B},\nu)$ 中稠密 (见定理 10.3.6), φ 可以保范延拓到整个 $L_1(X,\mathfrak{B},\nu)$ 上. 那么根据上一章证明的 L_p 空间的对偶定理, 存在函数 $g \in L_\infty(X,\mathfrak{B},\nu)$ 且 $|g| \leqslant 1$, a.e., 使得

$$\varphi(f) = \int_X fg\mathrm{d}\nu, \quad f \in C_c(X).$$

而 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密, 故上式对所有 $f \in C_0(X)$ 也成立. 我们取 $\mathrm{d}\mu = g\mathrm{d}\nu$. 则 $\mu \in M(X)$, 使得

$$\varphi(f) = \varphi_\mu(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(X).$$

下面证明 $\|\varphi\| = \|\mu\|$. 我们有

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \sup\{|\varphi(f)| : f \in C_0(X),\ \|f\|_\infty \leqslant 1\} \\
&\leqslant \sup\left\{\int_X |f|\mathrm{d}\nu : f \in C_0(X), \|f\|_\infty \leqslant 1\right\} \\
&\leqslant \int_X |g|\mathrm{d}\nu \leqslant \nu(X).
\end{aligned}$$

由 (10.9) 式, 我们可得

$$|g| = 1, \nu\text{–a.e. 且 } \|\varphi\| = \nu(X).$$

剩下的只需说明 $|\mu|$ 即为 ν. 根据 Radon-Nikodým 定理, 存在可测函数 h, $|h| = 1$, $|\mu|$–a.e. 并使得 $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}|\mu|$. 而 $\mathrm{d}\mu = g\mathrm{d}\nu$, 则可得 $\mathrm{d}|\mu| = \overline{h}g\mathrm{d}\nu$. 因为 $|\mu|$ 和 ν 都是正测度, 必定有 $\overline{h}g \geqslant 0$, μ–a.e., 则 $|g| = \overline{h}g$, μ–a.e. 那么对任意 Borel 可测集 $A \subset X$, 有

$$|\mu|(A) = \int_A \overline{h}g\mathrm{d}\nu = \int_A |g|\mathrm{d}\nu = \nu(A),$$

即得 $|\mu| = \nu$. 因此, 我们证明了存在 $\mu \in M(X)$, 使得

$$\|\varphi\| = \|\varphi_\mu\| = |\mu|(X) = \|\mu\|.$$

最后, 证明唯一性. 这等价于证明: 若有 $\mu \in M(X)$, 使得对任意 $f \in C_0(X)$ 有 $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$, 则 $\mu = 0$. 这里已假设两个正则测度的和仍是正则的 (见习题).

因为 $C_c(X)$ 在 $L_1(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 中稠密, 则存在 $C_c(X)$ 的函数列 (f_n), 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|f_n - \overline{h}\|_{L_1(X,\mathfrak{B},\mathrm{d}|\mu|)} \to 0$. 那么

$$\begin{aligned} |\mu|(X) &= \int_X \overline{h} h \mathrm{d}|\mu| = \int_X \overline{h} h \mathrm{d}|\mu| - \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X \overline{h} h \mathrm{d}|\mu| - \int_X f_n h \mathrm{d}|\mu| \\ &\leqslant \int_X \left| f_n - \overline{h} \right| \mathrm{d}|\mu| \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

因此 $|\mu|(X) = 0$, 从而 $\mu = 0$. ■

注 10.4.4 Riesz 表示定理使得我们可以把复测度和符号测度的极分解和 Jordan 分解移植到 $C_0(X)$ 上的连续线性泛函上. 设 φ 是 $C_0(X)$ 上的连续线性泛函, μ 是相应的 Radon 测度, 而 $\mathrm{d}\mu = h\mathrm{d}|\mu|$ 表示 μ 的极分解. 并令 $|\varphi|$ 是由 $|\mu|$ 所表示的正线性泛函. 那么 $|\varphi|$ 是 $C_0(X)$ 上唯一的满足如下条件的正泛函:

$$|\varphi(f)| \leqslant |\varphi|(|f|) \quad 且 \quad \||\varphi|\| = \|\varphi\|, \quad \forall\, f \in C_c(X).$$

我们称 $|\varphi|$ 为 线性泛函 φ 的绝对值.

泛函 φ 称为实的, 如果对任意实函数 $f \in C_c(X)$, 有 $\varphi(f) \in \mathbb{R}$. 显然, φ 是实的当且仅当与之相关的 Radon 测度是实的 (即为符号测度). 任意实线性泛函 φ 能被唯一地分解成两个正泛函的差,

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \quad 且 \quad \|\varphi\| = \|\varphi^+\| + \|\varphi^-\|.$$

该分解称为 φ 的 *Jordan* 分解, 其中 φ^+ 和 φ^- 分别称为 φ 的正部和负部, 并且 $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$.

对任意 $\varphi \in C_0(X)^*$, 定义 φ^* 满足 $\varphi^*(f) = \overline{\varphi(\overline{f})}$. 容易证明 $\varphi^* \in C_0(X)^*$ 且 $\|\varphi^*\| = \|\varphi\|$. 再令

$$\operatorname{Re}\varphi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} \quad 且 \quad \operatorname{Im}\varphi = \frac{\varphi - \varphi^*}{2\mathrm{i}}.$$

则 $\operatorname{Re}\varphi$ 和 $\operatorname{Im}\varphi$ 都是 $C_0(X)^*$ 中的实线性泛函, 并且

$$\varphi = \operatorname{Re}\varphi + \mathrm{i}\operatorname{Im}\varphi.$$

因此, 任意 $\varphi \in C_0(X)^*$ 都有如下分解式

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{i}(\varphi_3 - \varphi_4),$$

这里 $\varphi_k \in C_0(X)^* (k = 1, 2, 3, 4)$ 都是正泛函.

习 题 十

本章习题中的 X 都是局部紧的 Hausdorff 空间, 必要时也假设 X 是 σ–紧的.

1. 设 μ 是 X 上正则的正测度.

(a) 证明: 存在一个最大的开集 O, 使得 $\mu(O) = 0$. O 的补集称为 μ 的支撑, 记为 $\operatorname{supp}\mu$.

(b) 证明开集 O 也可以用如下定义等价刻画:

$$f \in C_c(X), \ \operatorname{supp} f \subset O \Rightarrow \int_X f \mathrm{d}\mu = 0.$$

(c) 证明: 若 $f \in C_c(X)$ 且在 $\operatorname{supp}\mu$ 上 $f = 0$, 则 $\displaystyle\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$.

(d) 设 $A = \{a_n\}_{n \leqslant N}$ 是 X 的有限子集. 证明: $\operatorname{supp}\mu = A$ 当且仅当 μ 是 Dirac 测度组 (δ_{a_n}) 的一个正系数线性组合.

(e) 设 $A = \{a_n\}_{n \geqslant 1} \subset X$. 定义一个正线性泛函 $\varphi : C_c(X) \to \mathbb{C}$ 如下,

$$\varphi(f) = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} f(a_n).$$

确定对应于 φ 的 Radon 测度 μ 及其支撑 $\operatorname{supp}\mu$.

2. 设 $\mu \in M(X)$.

(a) 证明: 存在最大的开集 O, 使得

$$f \in C_c(X), \ \operatorname{supp} f \subset O \Rightarrow \int_X f \mathrm{d}\mu = 0.$$

O 的补集称为 μ 的支撑, 记为 $\operatorname{supp}\mu$.

(b) 证明: $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}|\mu|$.

(c) 证明:

(i) 如 μ 是实测度, 则 $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\mu^+ \cup \operatorname{supp}\mu^-$;

(ii) 如 μ 是复测度, 则 $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}(\operatorname{Re}\mu) \cup \operatorname{supp}(\operatorname{Im}\mu)$.

3. 设 $C(X)$ 为 X 上所有连续复函数构成的向量空间, 并且设 X 还是 σ–紧的.

(a) 设 φ 是 $C(X)$ 上的正线性泛函. 证明: 存在紧集 K, 使得

$$f \in C(X),\ f(x)=0,\ \forall x \in K \Rightarrow \varphi(f)=0.$$

(b) 设 $M_c^+(X)$ 是 X 上正则的、有紧支撑的正 Borel 测度构成的集合. 对每个 $\mu \in M_c^+(X)$, 定义 $C(X)$ 上泛函 φ_μ 如下:

$$\varphi_\mu(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu, \quad f \in C(X).$$

证明: $\mu \mapsto \varphi_\mu$ 是从 $M_c^+(X)$ 到 $C(X)$ 上所有正线性泛函构成集合的双射.

(c) 对任意紧集 $K \subset X$, 定义 $C(X)$ 上的半范数 p_K 为

$$p_K(f)=\sup_{x \in K}|f(x)|.$$

证明: $\{p_K : K \subset X,\ K \text{ 是紧的}\}$ 是 $C(X)$ 上的一个可分点的半范数族, 从而 $C(X)$ 成为一个局部凸空间.

证明: $C(X)$ 的对偶空间和 $M(X)$ 的子空间 $M_c(X)$ 等价. 这里 $M_c(X)$ 表示 X 上有紧支撑的正则 Borel 测度构成的集合.

4. 设 $\varphi \in C_0(X)^*$. 假设 (f_n) 是 $C_0(X)$ 上的有界函数列, 并且逐点收敛到 $f \in C_0(X)$. 证明: $\varphi(f_n)$ 收敛到 $\varphi(f)$.

5. 不使用空间对偶关系 $M(X) \cong C_0(X)^*$, 直接证明 $M(X)$ 是一个 Banach 空间, 其上的范数定义为 $\|\mu\|=|\mu|(X)$.

6. 称 $M(X)$ 中的序列 (μ_n) 是弱收敛到 $\mu \in M(X)$, 若

$$\lim_n \int_X f\mathrm{d}\mu_n=\int_X f\mathrm{d}\mu, \quad \forall\ f \in C_0(X).$$

称 (μ_n) 是淡收敛到 $\mu \in M(X)$, 若上面的极限对每一个 $f \in C_c(X)$ 成立. 注意, 当在对偶关系 $M(X) \cong C_0(X)^*$ 下, 把 $M(X)$ 和 $C_0(X)^*$ 看成同一个空间, 则弱收敛与弱 * 收敛一致.

(a) 证明: (μ_n) 弱收敛当且仅当 (μ_n) 有界并且淡收敛.

(b) 若假设 X 是 σ–紧且可分的, 证明: $M(X)$ 中的任一有界序列 (μ_n) 有一个弱收敛的子列.

7. 设 X 是紧 Hausdorff 空间, B 是 $M(X)$ 的闭单位球.

(a) 证明: μ 是 B 中的端点当且仅当 $|\mu|$ 也是 B 中的端点.

(b) 设 $\mu \in M(X)$ 是正的. 证明: μ 是 B 中的端点当且仅当存在某点 $t \in X$, 使得 $\mu=\delta_t$, 这里 δ_t 表示 t 处的 Dirac 测度.

(c) 证明: B 的端点集为 $\{z\delta_t : t \in X,\ z \in \mathbb{C},\ |z|=1\}$.

8. 设 $\mathcal{M}(X)$ 表示满足如下条件的, $C_c(X)$ 上所有线性泛函 φ 构成的集合: 对任意紧集 $K \subset X$, 有常数 $C_K \geqslant 0$, 使得

$$f \in C_c(X) \text{ 且 } \operatorname{supp} f \subset K \Rightarrow |\varphi(f)| \leqslant C_K \|f\|_\infty.$$

(a) 证明: 任意正线性泛函属于 $\mathcal{M}(X)$. 设 $\mathcal{M}^+(X)$ 为 $\mathcal{M}(X)$ 中所有正线性泛函构成的集合.

(b) 设 $\varphi \in \mathcal{M}(X)$. 假设 φ 是实的, 也就是说对任意实函数 f, $\varphi(f) \in \mathbb{R}$, 设 $f \in C_c(X)$ 且 $f \geqslant 0$, 定义

$$\varphi^+(f) = \sup\{\varphi(g) : g \in C_c(X), 0 \leqslant g \leqslant f\},$$
$$\varphi^-(f) = \sup\{-\varphi(g) : g \in C_c(X), 0 \leqslant g \leqslant f\}.$$

将 φ^+ 和 φ^- 扩展成 $C_c(X)$ 上的正线性泛函并证明 $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$.

(c) 证明二元组 (φ^+, φ^-) 在如下意义下是最小的: 若 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}^+(X)$ 并且 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, 则存在 $\psi \in \mathcal{M}^+(X)$ 使得 $\varphi_1 = \varphi^+ + \psi$ 且 $\varphi_2 = \varphi^- + \psi$.

(d) 将 $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ 表示成四个正线性泛函的线性组合, 即存在 $\varphi_k \in \mathcal{M}(X)$, $k = 1, 2, 3, 4$, 使得

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathrm{i}(\varphi_3 - \varphi_4).$$

9. 称 $\mathcal{M}(X)$ 中的序列 (φ_n) 淡收敛到 $\varphi \in \mathcal{M}(X)$, 若

$$\lim_n \varphi_n(f) = \varphi(f), \quad \forall\, f \in C_c(X).$$

在本题中, X 是 σ–紧的.

(a) 设 $\mathcal{M}(X)$ 中序列 (φ_n) 满足对任意 $f \in C_c(X)$, $\big(\varphi_n(f)\big)_n$ 收敛. 证明: (φ_n) 淡收敛.

(b) 假设 X 可度量化且是可分的. 令 $\mathcal{M}(X)$ 中序列 (φ_n) 满足

$$\sup_n |\varphi_n(f)| < \infty, \quad \forall\, f \in C_c(X).$$

证明: (φ_n) 有一个淡收敛的子序列.

10. 设 μ 和 (μ_k) 都是 $\mathbb{R}^d$ 上的局部有限的 Borel 正测度.

(a) 证明以下的命题等价:

(i) (μ_k) 淡收敛到 μ.

(ii) 在每一个紧子集 K 上,

$$\limsup_k \mu_k(K) \leqslant \mu(K);$$

在每一个开集 O 上,

$$\liminf_k \mu_k(O) \geqslant \mu(O).$$

(iii) 在每一个有界 Borel 集 B 上, 若 $\mu(\partial B)=0$, 则 $\lim\limits_k \mu_k(B)=\mu(B)$.

(b) 假设在每一个紧子集上 K 上, $\sup\limits_k \mu_k(K)<\infty$. 证明: (μ_k) 有一个淡收敛的子序列.

11. 设 $\{f_i\}_{i\in I}\subset C_0(X)$ 且 $\{c_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{C}$. 并设对任意有限集 $J\subset I$, 存在 $\mu\in M(X)$, 使得

$$\|\mu\|\leqslant 1 \quad 且 \quad \int f_i\mathrm{d}\mu=c_i, \forall i\in J.$$

证明: 存在 $\mu\in M(X)$, 使得

$$\|\mu\|\leqslant 1 \quad 且 \quad \int f_i\mathrm{d}\mu=c_i, \forall i\in I.$$

12. 设 $f_1,\cdots,f_n,g$ 都是 $C_0(X)$ 中的实函数, $c_1,\cdots,c_n$ 都是实数. 假设存在实测度 $\mu\in M(X)$, 使得 $\|\mu\|\leqslant 1$ 且对每一个 i, 有 $\displaystyle\int_X f_i\mathrm{d}\mu=c_i$.

(a) 证明: 存在一个实测度 $\mu\in M(X)$, 满足 $\|\mu\|\leqslant 1$ 且对每一个 i, 有 $\displaystyle\int f_i\mathrm{d}\mu=c_i$, 并且对任意的满足 $\forall i$, $\displaystyle\int_X f_i\mathrm{d}\lambda=c_i$ 且 $\|\lambda\|\leqslant 1$ 的实测度 $\lambda\in M(X)$, 有

$$\int_X g\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X g\mathrm{d}\lambda.$$

实际上就是说, 存在一个满足条件的实测度 $\mu\in M(X)$ 使得积分 $\displaystyle\int_X g$ 最小.

(b) 假设存在正测度 $\mu\in M(X)$, 使得 $\mu(X)=1$ 且对每一个 i, 有 $\displaystyle\int_X f_i\mathrm{d}\mu=c_i$. 证明: 存在一个满足假设的正测度 $\mu\in M(X)$ 使得积分 $\displaystyle\int_X g$ 最小.

(c) 设 $\varPhi_1,\cdots,\varPhi_m,\varPsi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一组实连续函数. 证明: 若假设有正测度 $\mu\in M(X)$, 满足 $\mu(X)=1$ 且

$$\varPhi_j\left(\int f_1\mathrm{d}\mu,\cdots,\int f_n\mathrm{d}\mu\right)=c_j,\quad j=1,\cdots,m,$$

则存在满足以上条件的正测度 $\mu\in M(X)$, 使得积分

$$\varPsi\left(\int f_1\mathrm{d}\mu,\cdots,\int f_n\mathrm{d}\mu\right)$$

最小.

第十一章 紧 算 子

本章的研究中心是紧算子及其谱理论. 紧算子是在积分方程中自然出现的一类算子, 一些积分算子提供了紧算子的实例 (参见习题十一, 12—14). 在积分方程理论中, 关于紧算子的一个关键性质是 Fredholm 选择定理 (参见习题十一, 19). 算子谱理论是矩阵特征值理论的推广, 而紧算子的谱分解, 特别是 Hilbert 空间上自伴紧算子的谱分解很好地继承了有限维空间上对称矩阵谱分解的性质.

§11.1 介绍有限秩算子和紧算子, 一个核心的问题是紧算子能不能被有限秩算子逼近, 即所谓的逼近性质. §11.2 介绍有界算子谱理论的一般概念和一些基本性质. §11.3 专门讨论 Hilbert 空间上自伴算子的谱理论, 给出了自伴紧算子的谱分解定理. 当然相比于算子谱理论丰富的内容, 这里所给出的仅仅是很少的一部分. 比如正规算子和一般的自伴算子也有相应的分解理论; 再比如建立在谱分解理论的基础上, 还可以定义泛函演算, 这是 C^* 代数和 von Neumann 代数的重要内容. 通过对本章的学习, 我们特别希望为学生进一步学习后续的课程提供一定的理论基础, 这些课程既包括基础数学也包括应用数学.

在本章中, E, F 等均表示数域 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间, 而 E 到 F 的算子均指线性算子.

§11.1 有限秩算子和紧算子

定义 11.1.1 设 E 和 F 都是 Banach 空间, T 是 E 到 F 的算子.

(1) 若 $T : E \to F$ 是连续的且 $\dim T(E) < \infty$, 则称 T 是有限秩的, 并记所有从 E 到 F 的有限秩算子构成的集合为 $\mathcal{F}_r(E, F)$.

(2) 若 $T(B_E)$ 是相对紧的, 则称 T 是紧算子, 并记所有从 E 到 F 的紧算子构成的集合为 $\mathcal{K}(E, F)$.

特别地, 当 $E = F$, 记

$$\mathcal{K}(E, E) = \mathcal{K}(E), \mathcal{F}_r(E, E) = \mathcal{F}_r(E).$$

注 11.1.2 根据以上定义, 立即可得以下性质:

(1) 若 $T \in \mathcal{F}_r(E, F)$, 则 $T \in \mathcal{K}(E, F)$. 实际上, 由 T 是连续的可知 $T(B_E)$ 在 $T(E)$ 中有界; 而 $T(E)$ 是有限维的, 故 $T(B_E)$ 相对紧.

(2) 若 $T \in \mathcal{K}(E,F)$, 则 $T \in \mathcal{B}(E,F)$. 由于相对紧集是有界的, 则 T 在单位球 B_E 上有界, 故 $T \in \mathcal{B}(E,F)$. 这意味着我们无须在紧算子的定义中加上连续的条件, 它自动就是连续算子. 综上可得

$$\mathcal{F}_r(E,F) \subset \mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{B}(E,F).$$

(3) 若 $T \in \mathcal{K}(E,F)$, 则对 E 中任意有界集 A, $T(A)$ 是 F 中的相对紧集.

定理 11.1.3 *$\mathcal{F}_r(E,F)$ 和 $\mathcal{K}(E,F)$ 都是 $\mathcal{B}(E,F)$ 的向量子空间. 而且 $\mathcal{F}_r(E)$ 和 $\mathcal{K}(E)$ 都是 $\mathcal{B}(E)$ 的理想.*

证明 根据有限秩算子和紧算子的定义, 容易验证 $\mathcal{F}_r(E,F)$ 和 $\mathcal{K}(E,F)$ 是 $\mathcal{B}(E,F)$ 的向量子空间. 现仅证明 $\mathcal{F}_r(E)$ 和 $\mathcal{K}(E)$ 都是 $\mathcal{B}(E)$ 的理想.

设 $T \in \mathcal{F}_r(E), S \in \mathcal{B}(E)$, 显然有 $\dim(T\circ S(E)) < \infty$. 另一方面, 因 $\dim(T(E)) < \infty$, 故可设 $(e_1, \cdots, e_k)$ 是 $T(E)$ 的一组基. 那么对任意 $x \in E$, $S \circ T(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i S(e_i)$. 所以 $\dim(S \circ T(E)) < \infty$.

现设 $T \in \mathcal{K}(E), S \in \mathcal{B}(E)$. 设 (y_n) 是 $S \circ T(B_E)$ 中的任意序列. 则存在 $(x_n) \subset B_E$, 使得 $y_n = S \circ T(x_n)$. 因 T 是紧算子, 故存在子序列 (x_{n_k}) 使得 $(T(x_{n_k}))$ 收敛. 又因 S 是有界算子, 故子序列 $(S \circ T(x_{n_k}))$ 收敛. 所以 $S \circ T(B_E)$ 相对紧. 于是可得, $S \circ T$ 是紧算子. 另一方面, 因为 $S(B_E)$ 是 E 中的有界集, 由注 11.1.2 (3), $T \circ S(B_E)$ 是相对紧的. 因此, $T \circ S$ 是紧算子. ■

算子和它的共轭算子的紧性之间存在着等价关系.

定理 11.1.4 *设 $T \in \mathcal{B}(E,F)$. 则 T 是紧算子当且仅当 T^* 是紧算子.*

证明 首先假设 T 是紧算子. 任取 $(x_n^*) \subset T^*(B_{F^*})$, 则有 $(y_n^*) \subset B_{F^*}$, 使得 $T^*(y_n^*) = x_n^*$. 注意 y_n^* 可以看成是 $\overline{T(B_E)}$ 上的函数, 当任取 $y, y' \in \overline{T(B_E)}$ 时, 有

$$|\langle y_n^*,\, y - y'\rangle| \leqslant \|y_n^*\| \|\, y - y'\| \leqslant \|\, y - y'\|.$$

这意味着 (y_n^*) 在 $\overline{T(B_E)}$ 上等度连续. 同时对任意 $y \in \overline{T(B_E)}$ 也有 $|\langle y_n^*,\, y\rangle| \leqslant \|y\|$. 由于 $\overline{T(B_E)}$ 是紧空间, 则根据 Ascoli 定理 5.1.6, (y_n^*) 具有在 $\overline{T(B_E)}$ 上一致收敛的子列 $(y_{n_k}^*)$. 那么对任意 k, j, 有

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k}^* - x_{n_j}^*\| &= \sup_{x \in B_E} |x_{n_k}^*(x) - x_{n_j}^*(x)| \\
&= \sup_{x \in B_E} |\langle T^*(y_{n_k}^*),\, x\rangle - \langle T^*(y_{n_j}^*),\, x\rangle| \\
&\leqslant \sup_{T(x) \in \overline{T(B_E)}} |\langle y_{n_k}^*,\, T(x)\rangle - \langle y_{n_j}^*,\, T(x)\rangle|.
\end{aligned}$$

于是可得 $(x^*_{n_k})$ 是 E^* 中的 Cauchy 序列, 因 E^* 是 Banach 空间, 故 $(x^*_{n_k})$ 在 E^* 中收敛, 从而 $T^*(B_{F^*})$ 是相对紧的.

反过来假设 T^* 是紧算子. 由上面的结论可得 T^{**} 是从 E^{**} 到 F^{**} 的紧算子, 也就是说 $T^{**}(B_{E^{**}})$ 是相对紧的. 从而 $T^{**}(B_E)$ 也是相对紧的. 利用二次共轭关系可得 $T(B_E)$ 是相对紧的. 定理得证. ■

利用 Reisz 定理 3.1.14 容易证明 $\overline{\mathcal{F}_r(E)} = \mathcal{B}(E)$ 等价于 $\dim E < \infty$. 这里的闭包是在 $\mathcal{B}(E)$ 中取的. 另一方面, 如果 $\overline{\mathcal{F}_r(E)} = \mathcal{K}(E)$, 则称 E 有*逼近性质*. 当然有限维空间具有逼近性质, 不过我们还有更一般的结论.

定理 11.1.5 *若 H 是 Hilbert 空间, 则 $\overline{\mathcal{F}_r(H)} = \mathcal{K}(H)$.*

证明 这里我们只考虑 H 是可分的情形, 一般情形留作练习. 设 (e_n) 是 H 的规范正交基, 并设 P_n 为 H 到 $\operatorname{span}(e_1, \cdots, e_n) = H_n$ 上的正交投影算子, 则 $\|P_n\| \leqslant 1$ 且 $P_n \in \mathcal{F}_r(H)$. 任取 $T \in \mathcal{K}(H)$, 令 $T_n = P_n T$. 则也有 $T_n \in \mathcal{F}_r(H)$, 其关系如下图所示:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, "T_n"] & \\ H \arrow[r, "P_n"'] & H_n \end{tikzcd}$$

现证明 T_n 在 $\mathcal{B}(H)$ 中收敛到 T. 注意

$$(T - T_n)(x) = T(x) - P_n(T(x)) = (\mathrm{I}_H - P_n)(T(x)).$$

并且我们知道对任意 $y \in H$, 有

$$\|P_n(y) - y\| \to 0,\ n \to \infty.$$

因为 $T(B_H)$ 是相对紧的, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \geqslant 1$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有

$$\sup_{y \in T(B_H)} \|(\mathrm{I}_H - P_n)(y)\| = \sup_{y \in T(B_H)} \|y - P_n(y)\| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. ■

注 11.1.6 定理 11.1.5 表明 Hilbert 空间有逼近性质. 另外, 任意 L_p 空间具有逼近性质 (见习题十一, 11); 当 X 为局部紧的 Hausdorff 空间时, $C_0(X)$ 也有逼近性质. 但并不是所有的 Banach 空间具有逼近性质, 比如 $\mathcal{B}(\ell_2)$ 这个看似简单的空间就不具有逼近性质 (Enflo, 1973).

§11.2 紧算子的谱性质

算子谱理论是线性代数中特征值和特征向量理论的推广. 我们在本节先给出有界算子谱理论的一些基本概念和性质, 然后讨论紧算子谱的一些性质.

定义 11.2.1 设 $T \in \mathcal{B}(E)$.

(1) 令集合

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \text{ 不可逆}\},$$

这里 $\lambda - T = \lambda \mathrm{I} - T$ (I 是 E 上的恒等映射), 则称 $\sigma(T)$ 为 T 的谱集. 并称 $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ 为 T 的预解集.

(2) 若 $\lambda - T$ 不是单射, 即存在 $x \in E$, $x \neq 0$, 使得 $Tx = \lambda x$, 则称 λ 是 T 的特征值. 相应地, 称 $\ker(\lambda - T)$ 为 T 关于特征值 λ 的特征子空间, 并称非零的向量 $x \in \ker(\lambda - T)$ 是 T 相应于特征值 λ 的特征向量. 令 $\sigma_p(T)$ 表示 T 的所有特征值构成的集合, 则称 $\sigma_p(T)$ 为 T 的点谱集.

(3) 对任意 $\lambda \in \rho(T)$, 记 $R(\lambda, T) = (\lambda \mathrm{I} - T)^{-1}$, 并称它为算子 T 的预解式.

注 11.2.2 在此我们给出谱集和预解集的若干基本性质:

(1) 如果 $T \in \mathcal{K}(E)$ 且 $\dim E = \infty$, 那么显然有 $0 \in \sigma(T)$.

(2) 显然有 $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, 并且这种包含关系一般是严格的.

(3) 我们有预解方程: 对任意 $\lambda, \mu \in \rho(T)$, 有

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\mu, T) R(\lambda, T).$$

该等式意味着 $R(\lambda, T)$ 和 $R(\mu, T)$ 可以交换. 预解方程简单证明如下:

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T) &= R(\lambda, T)(\mu - \lambda) R(\mu, T) \\ &= R(\lambda, T)[(\mu - T) - (\lambda - T)] R(\mu, T) \\ &= R(\lambda, T) - R(\mu, T).\end{aligned}$$

定理 11.2.3 设 $T \in \mathcal{B}(E)$, 则

(1) 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在, 并且

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

通常, 记该极限值为 $r(T)$, 并称其为算子 T 的**谱半径**.

(2) 谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的紧集, 并且 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \colon |\lambda| \leqslant r(T)\}$.

证明 (1) 记 $a=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 首先我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\geqslant\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=a.$$

接下来, 我们讨论 $\limsup\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ 的值. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\geqslant 1$, 使得 $\|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}}\leqslant a+\varepsilon$. 对每个 $n>n_0$, 记 $n=q(n)\cdot n_0+r(n)$, 这里 $q(n)\in\mathbb{N}^*$, $r(n)<n_0$. 那么

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|T^{q(n)\cdot n_0+r(n)}\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}\frac{q(n)\cdot n_0}{n}}\|T\|^{\frac{r(n)}{n}}.$$

当 $n\to\infty$ 时, 有 $\frac{q(n)\cdot n_0}{n}\to 1$ 和 $\frac{r(n)}{n}\to 0$. 于是有

$$\limsup_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}\frac{q(n)\cdot n_0}{n}}\|T\|^{\frac{r(n)}{n}}\leqslant a+\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性, 可得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant a\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 故结论成立.

(2) 先证谱集 $\sigma(T)\subset\{\lambda\in\mathbb{K}:\ |\lambda|\leqslant r(T)\}$. 设有 $|\lambda|>r(T)$, 则由 $r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, 可取某个常数 $0<c<1$, 相应地存在 $n_0\geqslant 1$, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, 有 $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant c|\lambda|$, 于是有 $\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\|\leqslant c^n$. 从而可得级数 $S=\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中依范数收敛, 并且

$$(\lambda-T)S=(\lambda-T)\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n=\lambda.$$

故 $\lambda-T$ 可逆, 也就有 $\lambda\notin\sigma(T)$.

再来证明预解集 $\rho(T)=\mathbb{K}\setminus\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的开集. 为说明该结论成立, 我们建立如下映射

$$\begin{aligned}f:\mathbb{K}&\longrightarrow\mathcal{B}(E),\\ \lambda&\longmapsto\lambda-T.\end{aligned}$$

显然 f 连续. 我们记 $GL(E)$ 为 $\mathcal{B}(E)$ 中所有的可逆算子构成的集合, 则 $GL(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集 (见习题三, 9), 而 $\rho(T)=f^{-1}(GL(E))$, 故 $\rho(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的开集.

由以上结论可知谱集 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集, 故是 $\mathbb{K}$ 中的紧集. ■

定理 11.2.4 设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $T\in\mathcal{B}(E)$, 则 $\sigma(T)$ 非空, 并且

$$r(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|.$$

证明 对给定的 $T \in \mathcal{B}(E)$, 我们记

$$R(\lambda) = R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}, \ \lambda \in \rho(T).$$

注意, 因为 $GL(E) \to GL(E)$, $u \mapsto u^{-1}$ 是连续的 (见习题三, 9), 所以 $R : \rho(T) \to GL(E)$ 也是连续的. 任取 $\xi \in \mathcal{B}(E)^*$, 再构造函数 $\varphi : \rho(T) \to \mathbb{C}$ 如下,

$$\varphi(\lambda) = \xi(R(\lambda)), \quad \lambda \in \rho(T).$$

则 φ 是 $\rho(T)$ 上的连续函数. 我们来证明 φ 还是全纯的.

对任意 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 令 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$, 则有

$$\begin{aligned}(\lambda - T)^{-1} &= (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T)^{-1} \\ &= (\lambda_0 - T)^{-1}[1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - T)^{-1}]^{-1} \\ &= R(\lambda_0)\sum_{n \geqslant 0}(-1)^n R(\lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0}(-1)^n R(\lambda_0)^{n+1}(\lambda - \lambda_0)^n.\end{aligned}$$

在 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ 条件下, 我们有 $\|(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - T)^{-1}\| < 1$, 故由定理 3.2.16, 上面的级数在 $\mathcal{B}(E)$ 中绝对收敛. 从而

$$\varphi(\lambda) = \xi((\lambda - T)^{-1}) = \sum_{n \geqslant 0}(-1)^n \xi(R(\lambda_0)^{n+1})(\lambda - \lambda_0)^n$$

至少在 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ 时成立. 由于 λ_0 是在 $\rho(T)$ 中任意选取的, 故 φ 在 $\rho(T)$ 中是全纯的.

另一方面, 当 $|\lambda| > \|T\|$ 时, 我们有

$$R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

该级数在 $\mathcal{B}(E)$ 上绝对收敛. 则有

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n \geqslant 0}\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

那么

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant \sum_{n \geqslant 0}\frac{|\xi(T^n)|}{\lambda^{n+1}} \leqslant \sum_{n \geqslant 0}\frac{\|\xi\|\|T\|^n}{\lambda^{n+1}} = \frac{\|\xi\|}{\lambda}\frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|}.$$

当 $\lambda \to \infty$ 时, 有 $\varphi(\lambda) \to 0$. 如果 $\rho(T) = \mathbb{C}$, 那么由全纯函数下的 Liouville 定理, φ 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上有 $\varphi \equiv 0$. 特别地, 取 $\lambda > \|T\|$, 由定理 11.2.3 知此时 $(\lambda - T)^{-1}$ 存在. 因此对任意的 ξ, 我们有 $\xi((\lambda - T)^{-1}) = 0$. 但根据 Hahn-Banach 定理, 总存在某个 $\xi \in \mathcal{B}(E)^*$, 使得 $\xi((\lambda - T)^{-1}) \neq 0$, 矛盾. 故 $\sigma(T) \neq \varnothing$.

下面证明 $r(T) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. 记 $\alpha = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, 根据定理 11.2.3 (2), 可得 $r(T) \geqslant \alpha$, 故只需证明 $r(T) \leqslant \alpha$.

取 $|\lambda| > \alpha$, 则 $\lambda \in \rho(T)$, 故上面的 $\varphi(\lambda)$ 在 $\{\lambda : |\lambda| > \alpha\}$ 上也全纯. 从而级数

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

绝对收敛. 由此可得 $\sup\limits_n |\xi(T^n)| \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} < \infty$. 我们记算子 $B_n = \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$, 显然 $B_n \in \mathcal{B}(E)$. 运用 Banach 空间的对偶理论, 把 B_n 看成 $\mathcal{B}(E)^*$ 上的连续线性泛函, $\sup\limits_n |\xi(T^n)| \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} < \infty$ 意味着 B_n 作用在每个 $\xi \in \mathcal{B}(E)^*$ 上都是有界的. 根据 Banach-Steinhaus 定理, 可知 $(\|B_n\|)_{n \geqslant 1}$ 有界. 记 $M = \sup\limits_n \|B_n\|$, 于是有

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant M^{\frac{1}{n}} |\lambda|^{1 + \frac{1}{n}}.$$

两边取极限, 可得 $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|$. 由于 $|\lambda| > \alpha$ 是任意的, 则有 $r(T) \leqslant \alpha$. ■

下面我们给出紧算子谱的一些基本性质.

定理 11.2.5 设 $T \in \mathcal{K}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $\lambda \neq 0$, 则

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\dim \ker(\lambda - T)^n$ 是有限维的.

(2) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda - T)^n(E)$ 是闭集.

(3) 存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\ker(\lambda - T)^{n+1} = \ker(\lambda - T)^n$.

(4) 存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $(\lambda - T)^{n+1}(E) = (\lambda - T)^n(E)$.

(5) 任取 $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, 必有 $\lambda \in \sigma_p(T)$. 如果 E 是无穷维的, 那么必有 $0 \in \sigma_p(T)$.

(6) 算子 T 的非零特征值最多有可数个, 从而 $\sigma_p(T)$ 至多可数. 特别地, $\sigma(T)$ 是紧集. 记所有的特征值为序列 (λ_n). 则当 (λ_n) 是无限集时, 有 $\lim\limits_n \lambda_n = 0$.

证明 (1) 记 $K_n = \ker(\lambda - T)^n$, K_n 是 E 的闭向量子空间. 首先注意 K_n 是关于 T 的不变子空间, 即 $T(K_n) \subset K_n$, 这是因为任取 $x \in K_n$, 有

$$(\lambda - T)^n(T(x)) = (\lambda^n T - \lambda^{n-1} T^2 + \cdots + (-1)^n T^{n+1})(x) = T((\lambda - T)^n(x)) = 0.$$

接下来, 我们记 $S=\lambda^{n-1}T-\cdots-(-1)^nT^n$, 则 $(\lambda^n-S)|_{K_n}=(\lambda-T)^n|_{K_n}=0$. 那么 $\mathrm{I}_{K_n}=\frac{1}{\lambda^n}S|_{K_n}$. 并且由 $T\in\mathcal{K}(E)$, 可得 $S\in\mathcal{K}(E)$, 因此 I_{K_n} 是紧算子. 根据 Riesz 定理 3.1.14, 则可知 $\dim K_n<\infty$.

(2) 设 $H_n=(\lambda-T)^n(E)$. 首先考虑 $n=1$ 的情形. 因 $\dim K_1<\infty$, 故 K_1 在 E 中可补: 存在 E 的闭向量子空间 F_1, 使得 $E=K_1\oplus F_1$ (见习题十一, 22). 那么可得 $H_1=(\lambda-T)(F_1)$, 且 $(\lambda-T)|_{F_1}: F_1\to H_1$ 是连续线性双射. 由此, 证明 H_1 是闭的等价于证明 $(\lambda-T)|_{F_1}$ 的逆映射是连续的.

假设 $(\lambda-T)|_{F_1}$ 的逆映射不连续, 则存在序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}\subset F_1$, 满足 $\|x_n\|=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda-T)(x_n)=0$. 由于 T 是紧算子, 则存在 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}), 使得 $(T(x_{n_k}))$ 收敛. 于是 (λx_{n_k}) 也收敛, 并由 $\lambda\neq 0$ 可知 (x_{n_k}) 收敛于某个向量 $x\in E$. 因 F_1 是 E 的闭子空间, 故 $x\in F_1$. 此时

$$(\lambda-T)(x)=\lim(\lambda-T)(x_{n_k})=0,$$

这意味着 $x\in K_1$, 与 $x\in F_1$ 矛盾. 故 H_1 是闭的.

当 $n\geqslant 2$ 时, 假设 H_n 是 E 的闭子空间, 则 H_n 也是 Banach 空间, 而

$$H_{n+1}=(\lambda-T)^{n+1}(E)=(\lambda-T)(H_n)=(\lambda-T)|_{H_n}(E).$$

注意, H_n 也是关于算子 T 的不变子空间, 即 $T(H_n)\subset H_n$. 再由 $T|_{H_n}$ 是紧算子以及 $\dim K_n<\infty$, 类似前面 $n=1$ 的证明过程可得 H_{n+1} 是闭的. 根据数学归纳法可知结论成立.

(3) 显然有

$$K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_n\subset K_{n+1}\subset\cdots.$$

假设上面所有的包含关系是严格的. 那么对每一个 $n\geqslant 1$, 存在 $x_n\in K_{n+1}$, 满足 $\|x_n\|=1$ 且 $d(x_n,K_n)\geqslant\frac{1}{2}$ (参见引理 3.1.15). 对任意 $1\leqslant n<m$, 有

$$\begin{aligned}Tx_m-Tx_n&=Tx_m-\lambda x_m+\lambda x_m-\lambda x_n+\lambda x_n-Tx_n\\&=\lambda x_m+(T-\lambda)(x_m)+(\lambda-T)(x_n)-\lambda x_n.\end{aligned}$$

令 $y=(\lambda-T)(x_m)+(T-\lambda)(x_n)+\lambda x_n$. 则 $y\in K_m$. 再由 x_m 的选取可得

$$\|Tx_m-Tx_n\|=\|\lambda x_m-y\|=\lambda\left\|x_m-\frac{1}{\lambda}y\right\|\geqslant\frac{\lambda}{2}.$$

所以 (Tx_n) 不可能有收敛子列, 这与 T 是紧算子矛盾.

(4) 直接由 (3) 的结论可得. 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\ker(\lambda-T^*)^{n+1}=\ker(\lambda-T^*)^n$. 于是由双极定理 8.3.8 可得 $\overline{(\lambda-T)^{n+1}(E)}^{\|\cdot\|}=\overline{(\lambda-T)^n(E)}^{\|\cdot\|}$. 又因对任意 $n\geqslant 1$, $(\lambda-T)^n(E)$ 都是闭的, 故结论成立.

(5) 任取 $\lambda \neq 0$, 假设 $\lambda - T$ 是单射. 由命题 (4), 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$(\lambda - T)^{n+1}(E) = (\lambda - T)^n(E).$$

那么对任意 $x \in E$, 存在 $y \in E$, 使得 $(\lambda - T)^n(x) = (\lambda - T)^{n+1}(y)$. 由于 $(\lambda - T)^n$ 是单射, 则 $x = (\lambda - T)(y)$, 故 $\lambda - T$ 是满射. 根据开映射定理, $\lambda - T$ 是同构映射. 因此, 若 λ 不属于 $\sigma_p(T)$, 则 λ 不属于 $\sigma(T)$.

(6) 只需证明: 对任意 $\delta > 0$, 仅存在有限多的 $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, 使得 $|\lambda| \geqslant \delta$.

用反证法. 假设存在 $\delta > 0$ 以及元素两两不同的无穷序列 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \sigma_p(T)$, 且对每个 n, 有 $|\lambda_n| \geqslant \delta$. 由于 λ_n 是特征值, 存在单位特征向量 e_n, 使得 $T(e_n) = \lambda_n e_n$. 因而对任意给定的 n, 向量组 $(e_1, \cdots, e_n)$ 线性无关.

设 $E_n = \mathrm{span}(e_1, \cdots, e_n)$. 则

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots.$$

注意以上包含关系是严格的, 并且 E_n 是 E 的闭子空间. 我们可以选择单位向量 $y_n \in E_{n+1}$, 使得 $d(y_n, E_n) \geqslant \frac{1}{2}$. 设 $1 \leqslant n < m$, 则有 $(T - \lambda_{n+1})(y_n) \in E_n \subset E_m$.

$$\begin{aligned}
T(y_m) - T(y_n) &= (T - \lambda_{m+1})(y_m) + \lambda_{m+1}y_m - \lambda_{n+1}y_n - (T - \lambda_{n+1})(y_n) \\
&= \lambda_{m+1}y_m - \lambda_{n+1}y_n + (T - \lambda_{m+1})(y_m) - (T - \lambda_{n+1})(y_n) \\
&= \lambda_{m+1}\Big\{y_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}}[\lambda_{n+1}y_n - (T - \lambda_{m+1})(y_m) \\
&\qquad + (T - \lambda_{n+1})(y_n)]\Big\}.
\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{\lambda_{m+1}}[\lambda_{n+1}y_n - (T - \lambda_{m+1})(y_m) + (T - \lambda_{n+1})(y_n)] \in E_m$, 那么

$$\|T(y_m) - T(y_n)\| \geqslant |\lambda_{m+1}| d(y_m, E_m) \geqslant \frac{1}{2}\delta.$$

因此, $(T(y_n))$ 没有收敛子列, 这与 T 是紧算子矛盾, 故定理得证. ■

由以上定理的结论立即可以导出下面著名的 Fredholm 选择定理.

推论 11.2.6 (Fredholm 选择定理) 设 $T \in \mathcal{K}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda - T$ 是单射当且仅当它是满射.

§11.3 Hilbert 空间上的自伴紧算子

在本节中, H 总是表示一个 Hilbert 空间, 而 T^* 表示 Hilbert 空间上的有界算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 的伴随算子 (详见定理 4.3.3).

定义 11.3.1 若算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 满足 $T^* = T$, 则称 T 是自伴算子或 *Hermite* 算子; 若 T 是自伴的且对任意 $x \in H$, 有 $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, 则称 T 为正算子.

注 11.3.2 (1) 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 则 T 是自伴的当且仅当对任意 $x \in H$, 有 $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. 因而在复情形下, T 是正算子当且仅当对任意 $x \in H$, 有 $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$.

(2) 假设 T 是正算子. 那么映射 $(x, y) \mapsto \langle Tx, y\rangle$ 拥有除了正定性以外, 内积所具有的其他所有性质. 因此我们有如下的 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leqslant \langle Tx, x\rangle \langle Ty, y\rangle, \quad \forall\, x, y \in H.$$

所以容易得到

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

而对一般的自伴算子, 我们有如下的结论.

定理 11.3.3 设 T 是 H 上的自伴算子. 则

(1) $r(T) = \|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}$.

(2) 若令

$$m = \inf\{\langle Tx, x\rangle : x \in H,\ \|x\| = 1\}, \quad M = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in H,\ \|x\| = 1\},$$

则

$$\sigma(T) \subset [m, M] \text{ 且 } m \in \sigma(T),\ M \in \sigma(T).$$

并有

$$r(T) = \|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

证明 (1) 先证明 $r(T) = \|T\|$. 由 $T^* = T$, 可得

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leqslant \left\|T^2\right\| \|x\|^2,\ x \in H.$$

由此得出 $\|T\| \leqslant \left\|T^2\right\|^{\frac{1}{2}}$. 而显然有 $\left\|T^2\right\| \leqslant \|T\|^2$, 于是可得 $\|T\| = \left\|T^2\right\|^{\frac{1}{2}}$. 重复此过程, 可得

$$\|T\| = \left\|T^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}},\ n \geqslant 1.$$

再根据谱半径的定义, 立即得到 $r(T) = \|T\|$.

接下来我们记 $\alpha = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}$. 不等式 $\alpha \leqslant \|T\|$ 是显然的, 我们只需证明反向不等式. 首先, 对任意非零 $x \in H$, 有

$$|\langle Tx, x\rangle| = \|x\|^2 \left|\left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leqslant \alpha \|x\|^2.$$

当然 $x=0$ 时, $|\langle Tx, x\rangle| \leqslant \alpha \|x\|^2$ 也成立, 因此对于任意 $x, y \in H$ 以及任意 $\lambda \in \mathbb{K}$, 有

$$|\langle T(x \pm \lambda y), x \pm \lambda y\rangle| \leqslant \alpha \|x \pm \lambda y\|^2 .$$

由上面的不等式和平行四边形法则, 可得

$$\begin{aligned} |\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle - \langle T(x-\lambda y), x-\lambda y\rangle| &\leqslant \alpha(\|x+\lambda y\|^2 + \|x-\lambda y\|^2) \\ &= 2\alpha(\|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2). \end{aligned}$$

然而

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle - \langle T(x-\lambda y), x-\lambda y\rangle = 4 \operatorname{Re} \overline{\lambda} \langle Tx, y\rangle.$$

于是有

$$2|\operatorname{Re} \overline{\lambda}\langle Tx, y\rangle| \leqslant \alpha(\|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2).$$

现在利用 λ 的任意性, 取 $\lambda = \operatorname{sgn} \overline{\langle Tx, y\rangle}$ 可以得到

$$|\langle Tx, y\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\alpha(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

因此

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle Tx, y\rangle| \leqslant \alpha.$$

(2) 设 $\lambda \notin [m, M]$, 记 $d(\lambda) = d(\lambda, [m, M])$, 则 $d(\lambda) > 0$. 由 m 和 M 的定义, 当 $\|x\| = 1$ 时, 可得

$$|\langle(\lambda - T)x, x\rangle| = |\lambda - \langle Tx, x\rangle| \geqslant d(\lambda).$$

那么对任意 $x \in H$, 可得

$$d(\lambda) \|x\|^2 \leqslant |\langle(\lambda - T)x, x\rangle| \leqslant \|(\lambda - T)x\| \|x\| .$$

也就有

$$d(\lambda) \|x\| \leqslant \|(\lambda - T)x\| .$$

因此, $\lambda - T$ 是单射, 注意这里 $d(\lambda) > 0$. 并且也可得到 $(\lambda - T)(H)$ 是闭的, 则

$$(\lambda - T)(H) = \overline{(\lambda - T)(H)} = \ker(\overline{\lambda} - T^*)^{\perp}.$$

因 T 是自伴算子, 故 $\overline{\lambda} - T^* = \overline{\lambda} - T$. 又因 $\lambda \notin [m, M]$, 也就有 $\overline{\lambda} \notin [m, M]$, 故可知 $\overline{\lambda} - T$ 是单射. 因此 $\ker(\overline{\lambda} - T) = \{0\}$. 于是可得 $(\lambda - T)(H)$ 在 H 中稠密, 也就有 $(\lambda - T)(H) = H$. 由此可知 $\lambda \in \rho(T)$, 即证明了 $\sigma(T) \subset [m, M]$.

下面证 $m \in \sigma(T)$. 由于 m 的定义, 可知存在 H 中的序列 (x_n), $\|x_n\| = 1$, 使得 $m = \lim\limits_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \langle (T-m)x_n, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle - m = 0.$$

容易验证 $T - m$ 是正算子, 则根据正算子对应的 Cauchy-Schwarz 不等式, 对任意 $y \in H$, 有

$$|\langle (T-m)x_n, y\rangle| \leqslant \langle (T-m)x_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}} \langle (T-m)y, y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

在上式两边关于 $\|y\| \leqslant 1$ 取上确界, 可得

$$\|(T-m)x_n\| \leqslant \langle (T-m)x_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}} \|T-m\|^{\frac{1}{2}},$$

这意味着当 $n \to \infty$ 时, $\|(T-m)x_n\| \to 0$, 但 $\|x_n\| = 1$. 由此可知 $T - m$ 不可逆, 即证明 $m \in \sigma(T)$.

类似地考虑正算子 $M - T$, 可证 $M \in \sigma(T)$. ■

推论 11.3.4 设 T 是 H 上的自伴算子, 则 T 是正算子当且仅当 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. 并且若 T 是正算子, 则有 $\|T\| \in \sigma(T)$.

证明 若 T 是正算子, 则对任意 $x \in H$, $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$. 所以有 $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle : x \in H,\ \|x\| = 1\} \geqslant 0$. 因此, $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. 另一方面, 若 $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, 则 $m \geqslant 0$. 那么对任意 $x \in H$, 有 $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$. 因此 T 是正算子.

此外, 若 T 是正算子, 由定理 11.3.3 (1), 得

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in H,\ \|x\| = 1\} = M \in \sigma(T).$$

推论得证. ■

推论 11.3.5 设 T 是 H 上的自伴紧算子. 则存在 T 的特征值 λ, 使得 $|\lambda| = \|T\|$.

证明 对任意自伴紧算子 T, 由定理 11.3.3 (2), 我们有 $\|T\| = \max\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$. 再由紧算子的谱理论 (见定理 11.2.5), 对任意 $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, 必有 $\lambda \in \sigma_p(T)$. 故推论成立. ■

Hilbert 空间的直和 设 $\{H_i\}_{i\in I}$ 是一簇 Hilbert 空间. 令

$$\bigoplus_{i\in I} H_i$$

是 $\{H_i\}_{i\in I}$ 的 笛卡儿积 $\prod\limits_{i\in I} H_i$ 的子集, 其中的元素 $(x_i)_{i\in I}$ 满足

$$\sum_{i\in I}\|x_i\|^2<\infty.$$

我们赋予 $\bigoplus\limits_{i\in I} H_i$ 如下的范数:

$$\|(x_i)_{i\in I}\|=\left(\sum_{i\in I}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这实际上是一个 Hilbert 空间下的范数, 它能被下面的内积诱导:

$$\langle (x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}\langle x_i,y_i\rangle.$$

那么 $\bigoplus\limits_{i\in I} H_i$ 成为一个新的 Hilbert 空间, 我们称该 Hilbert 空间为 $\{H_i\}_{i\in I}$ 的直和.

下面我们给出 Hilbert 空间上自伴紧算子的谱分解定理.

定理 11.3.6 设 T 是 H 上的自伴紧算子, V_λ 表示特征值 λ 对应的特征子空间, 则

(1) $H=\bigoplus\limits_{\lambda\in\sigma_p(T)} V_\lambda$.

因而, H 有一个由 T 的特征向量构成的正交基.

(2) 空间 $\overline{T(H)}$ 有一个由特征向量 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 构成的正交基, 这里 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 是分别对应于特征值 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ 的特征向量 (序列 (λ_n) 可能是有限的), 使得

$$Tx=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\langle x,e_n\rangle e_n,\ \forall\, x\in H\quad (\text{在范数收敛意义下}).$$

并且, 若 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ 是无限的, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

证明 由于 T 是紧算子, 根据定理 11.2.5, 可知 $\sigma(T)$ 至多可数, 故可记所有的特征值为序列 (λ_n); 特别地, 当 (λ_n) 是无限集时, 有 $\lim\limits_n \lambda_n=0$. 我们还知道, 对应于紧算子 T 的非 0 特征值的特征子空间 V_λ 是有限维的. 此时可记

$$\sigma(T)\setminus\{0\}=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\},$$

并且 $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots|\lambda_n|\geqslant\cdots>0$, 在这个序列中的特征值允许重复, 特征值出现的次数等于它对应的特征子空间的维数.

若 $T=0$, 结论显然成立, 此时 $H=V_0$. 不妨设 $T\neq 0$, 则 $\|T\|>0$. 由定理 11.3.3 知道, 存在 $\lambda^{(1)}\in\sigma(T)$, 使得

$$|\lambda^{(1)}|=\|T\|=\max\{|m|,|M|\}.$$

并由序列 (λ_n) 的性质可知, $\lambda^{(1)}$ 正好取序列 (λ_n) 前面的某有限多个. 我们记

$$K_1=\bigoplus_{|\lambda|=\|T\|}V_\lambda,$$

则 K_1 是 H 的有限维子空间, 并有 $T(K_1)\subset K_1$, 即 K_1 是关于 T 不变的子空间. 由此立即可得 $K_1^\perp$ 也是 T 不变的, 这里因为当我们任取 $y\in K_1^\perp$ 及 $x\in K_1$, 有

$$\langle Ty,x\rangle=\langle T^*y,x\rangle=\langle y,Tx\rangle=0.$$

我们记满足 $|\lambda|=\|T\|$ 的 $\lambda^{(1)}$ 为 λ_j, $1\leqslant j\leqslant k$, 则在 K_1 中存在一组相应的规范正交基 $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$, 使得 $Te_j=\lambda_je_j$.

现在, 如果 $K_1^\perp=\{0\}$, 则意味着 H 是有限维空间, 那么结论成立; 设 $K_1^\perp\neq\{0\}$, 记 $T_1=T|_{K_1^\perp}$, 则 T_1 是 $K_1^\perp$ 上的自伴紧算子. 设 $T_1\neq 0$, 则 $\|T_1\|>0$. 那么又存在非 0 的特征值 $\lambda^{(2)}$, 满足

$$|\lambda^{(2)}|=\|T_1\|\leqslant\|T\|.$$

再记

$$K_2=K_1\oplus\left(\bigoplus_{|\lambda|=\|T_1\|}V_\lambda\right),$$

接下来对 K_2 做类似于上面的讨论, 则可给出算子 $T_2=T|_{K_2^\perp}:K_2^\perp\to K_2^\perp$. 重复这个过程, 如果在有限次后, 有 $T_n=0$, 则得证. 否则, 这个过程可以无限进行下去, 我们记

$$K=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}}V_\lambda,$$

则 K 也是一个 Hilbert 空间, 并且是可分的. 按照我们的构造方法, 任取 $y\in K^\perp$, 对任意 $n\geqslant 1$, 也有 $y\in K_n$. 于是

$$|\langle Ty,y\rangle|=|\langle T_ny,y\rangle|\leqslant\|T_n\|\,\|y\|^2=\|\lambda^n\|\,\|y\|^2\to 0,\ n\to\infty.$$

从而可得, 对任意 $y\in K^\perp$, 有 $\|Ty\|=0$, 即 $T(K^\perp)=\{0\}$. 并且这还意味着:

(1) $K^\perp=V_0$. 于是得到

$$H=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)}V_\lambda.$$

(2) 空间 $\overline{T(H)} = K$. 于是有一个由特征向量 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 构成的正交基, 这里特征向量 $(e_n)_{n\geqslant 1}$ 分别联系于特征值 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, 使得

$$\forall\, x \in H, \quad Tx = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

并且, 若 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ 是无限的, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. ■

习 题 十 一

1. 设 E 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(E)$. 并设 (λ_n) 是 $\rho(T)$ 中收敛到 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的数列. 证明: 若 $(R(\lambda_n, T))$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中有界, 则 $\lambda \in \rho(T)$.

2. 设 E 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(E)$. 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $S \in \mathcal{B}(E)$, 有

$$\|T - S\| < \delta \;\Rightarrow\; \sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : d(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}.$$

3. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 定义 ℓ_p 上的算子 S (前移算子) 为 $S(x)(n) = x(n+1)$, 这里 $x = (x(n))_n \in \ell_p$.

(a) 证明: 当 $p < \infty$ 时, $\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$; 当 $p = \infty$ 时, $\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant 1\}$.

(b) 由此导出 $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant 1\}$.

4. 设 E 是 Banach 空间, T 是 E 上的线性等距映射. 并记

$$D = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}, \quad C = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}, \quad \overline{D} = D \cup C.$$

(a) 证明: $\sigma_p(T) \subset C$, $\sigma(T) \subset \overline{D}$; 并且当 $\lambda \in D$ 时, 有

$$\lambda \in \rho(T) \;\Leftrightarrow\; (\lambda - T)(E) = E.$$

(b) 假设 $(\lambda_n) \subset D \cap \rho(T)$ 收敛到 D 中元素 λ. 证明: $\lambda \in \rho(T)$.

(c) 证明: $D \cap \rho(T)$ 在 D 中既是开集又是闭集. 由此导出 $D \cap \rho(T)$ 是空集或者 $D \cap \rho(T) = D$.

(d) 证明: $\sigma(T)$ 或者包含于 C 中或者等于 $\overline{D}$, 并且前者成立的充分必要条件是 T 为满射.

(e) 假设 $E = \ell_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 且 T 为 E 上的后移算子:

$$T(x)(1) = 0 \quad 且 \quad T(x)(n) = x(n-1),\; n > 1.$$

证明: $\sigma(T) = \overline{D}$ 并且 $\sigma_p(T) = \varnothing$.

5. 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 并有 $\varphi \in C(X)$. 设 M_φ 表示 $C(X)$ 上由 φ 确定的乘法算子: $M_\varphi(f) = \varphi f$. 证明: $\sigma(M_\varphi) = \varphi(X)$, 并且 $\sigma_p(M_\varphi)$ 由满足如下性质的 λ 构成: $\{\varphi = \lambda\}$ 内部是空集.

此外, 当 M_φ 定义在 $L_p(\mu)$ 上, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 其中 μ 是 X 上的正则测度, 我们有什么么结论?

6. 设 X 是度量空间, $E = C_b(X)$ 是 X 上的有界连续复函数构成的 Banach 空间, 其上赋予范数:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

并设 T 是 E 上的正算子, 即对每个 $f \geqslant 0$, 有 $T(f) \geqslant 0$.

(a) 证明: 任取 $f \in E$, 有 $|T(f)| \leqslant T(|f|)$.

(b) 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $|\lambda| > r(T)$. 证明:

$$|R(\lambda, T)(f)| \leqslant R(|\lambda|, T)(|f|).$$

由此导出

$$\|R(\lambda, T)\| \leqslant \|R(|\lambda|, T)\|.$$

(c) 证明: $r(T) \in \sigma(T)$.

7. 设 H 是 Hilbert 空间, E 和 F 是 H 的两个闭的正交补子空间. 假设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 且 $T(E) \subset E$, $T(F) \subset F$. 证明:

$$\sigma(T) = \sigma(T\big|_E) \cup \sigma(T\big|_F).$$

作为应用, 确定 $\sigma(T)$, 其中 $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 定义为

$$T(x)(n) = x(n+2) + \frac{1 + (-1)^n}{2} x(n), \quad \forall n \geqslant 1, \forall x = (x(n))_{n \geqslant 1} \in \ell_2.$$

8. 设 E 和 F 是赋范空间. 证明下面的命题成立:

(a) 若 (x_n) 是 E 中的弱收敛序列, 则 (x_n) 有界.

(b) 若 $T \in \mathcal{B}(E, F)$ 且 x_n 弱收敛到 x, 则 $T(x_n)$ 弱收敛到 $T(x)$.

(c) 若 $T \in \mathcal{B}(E, F)$ 是紧算子且 x_n 弱收敛到 x, 则 $T(x_n)$ 依范数收敛到 $T(x)$.

(d) 若 E 自反, $T \in \mathcal{B}(E, F)$ 且当 x_n 弱收敛到 x 时, 有 $T(x_n)$ 依范数收敛到 $T(x)$, 则 T 是紧算子.

(e) 若 E 自反, 且 $T \in \mathcal{B}(E, \ell_1)$ 或 $T \in \mathcal{B}(c_0, E)$, 则 T 是紧算子.

9. 设 (e_n) 是 ℓ_2 中的标准基. 定义算子 $T : \ell_2 \to \ell_2$ 为

$$T\left(\sum_{n \geqslant 1} x_n e_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{n} e_n, \quad (x_n)_{n \geqslant 1} \in \ell_2.$$

证明: $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$.

10. 设 $(\alpha_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$. 定义算子 $T \in \mathcal{B}(c_0)$ 为

$$T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\geqslant 1}, \quad x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in c_0.$$

证明: $T \in \mathcal{K}(c_0) \Leftrightarrow \lim\limits_n \alpha_n = 0$.

11. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间, $p \in [1, \infty)$. 设 $\mathcal{P}$ 是由所有有限个两两不相交的具有有限正测度的可测子集构成的集合.

(a) 对任意 $\pi = \{A_k\}_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathcal{P}$, 定义 $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 上的算子 P_π 为

$$P_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f \mathrm{d}\mu \right) \mathbb{1}_{A_k}.$$

证明: $P_\pi \in \mathcal{B}(L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu))$ 且 $\|P_\pi\| = 1$.

(b) 证明: 对任意 $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 中的紧子集 K 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $\pi \in \mathcal{P}$, 使得

$$\|P_\pi(f) - f\|_p < \varepsilon, \quad \forall f \in K.$$

(c) 导出 $\mathcal{F}_r(L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu))$ 在 $\mathcal{K}(L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu))$ 中稠密.

(d) 假设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间. 证明在空间 $C_0(X)$ 上有和上面类似的结果.

12. 设 $E = C([0, 1])$ 上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$, 且 Φ 是 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的连续函数. 定义算子 $T : E \to E$ 为

$$T(f)(s) = \int_0^1 \Phi(s, t) f(t) \mathrm{d}t, \quad s \in [0, 1].$$

证明: T 是紧的.

13. 设 $E = L_2(0, 1)$ 且 $\Phi \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$. 定义算子 $T : E \to E$ 为

$$T(f)(s) = \int_0^1 \Phi(s, t) f(t) \mathrm{d}t, \quad s \in [0, 1].$$

证明: T 是紧的.

14. 定义 $C([0, 1])$ 上的算子 T:

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t) \mathrm{d}t, \quad x \in [0, 1].$$

证明 T 是紧的并确定 $\sigma(T)$.

设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 在 $L_p([0, 1])$ 上定义和上面一样的算子 T, 回答同样的问题.

15. 设 E 是空间 $C([0,1])$ 或 $L_p(0,1)$, 其中 $p\in[1,\infty]$.

(a) 在 E 上定义算子 T 如下:

$$Tf(x)=\int_0^1 \min\{x,y\}f(y)\mathrm{d}y,\quad x\in[0,1].$$

求 T 的谱集.

(b) 在 $L_2(0,1)$ 上定义如下的算子 S:

$$Sf(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y.$$

确定 S^*, 证明 SS^* 和上面的算子 T 在空间 $E=L_2(0,1)$ 上相同, 求出 $\|S\|$.

16. 设 H 是 Hilbert 空间, 并有 $T\in\mathcal{B}(H)$. 令

$$W(T)=\{\langle T(x),x\rangle : x\in H, \|x\|=1\}.$$

设 $\sigma_{pa}(T)$ 满足如下性质的所有 $\lambda\in\mathbb{C}$ 构成的集合: H 的单位球中存在一个序列 (x_n) , 使得 $\langle T(x_n),x_n\rangle\to\lambda$.

(a) 证明: $\sigma(T)=\sigma_{pa}(T)\cup\overline{\sigma_p(T^*)}$.

(b) 证明: $\sigma(T)\subset\overline{W(T)}$.

(c) 在 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 的情形下, 导出

$$r(T)\leqslant \sup_{\|x\|=1}|\langle T(x),x\rangle|\leqslant\|T\|.$$

17. 设 H 是复 Hilbert 空间. 称 $T\in\mathcal{B}(H)$ 是正规的, 若 $T^*T=TT^*$.

(a) 证明: T 是正规的当且仅当对任意 $x\in H$, 有 $\|T(x)\|=\|T^*(x)\|$.

(b) 假设 T 是正规的. 证明: 对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有

$$\ker(\lambda-T)=\ker(\bar\lambda-T^*).$$

由此导出: $\lambda\in\sigma_p(T)$ 等价于 $\bar\lambda\in\sigma_p(T^*)$.

(c) 证明: T 的相应于不同特征值的特征子空间相互正交.

(d) 依然假设 T 是正规的.

  (i) 证明: $r(T)=\|T\|$.

  (ii) 导出结论:

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle T(x),x\rangle|.$$

18. 试把谱分解定理扩展到复 Hilbert 空间的正规算子上.

19. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧算子，$\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $\lambda \neq 0$. 证明: 方程

$$\lambda x - T(x) = y$$

或者对每一个 $y \in E$ 有唯一解, 或者对某些 y 有无穷多个解但对其他的 y 无解 (Fredholm 选择定理).

20. 设 (λ_n) 是有界数列, 并定义算子 $T : \ell_2 \to \ell_2$ 为 $(x_n) \mapsto (\lambda_n x_n)$.

(a) 证明 $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$, 确定 $\|T\|$ 和 $\sigma(T)$.

(b) 什么情况下 T 是紧的?

21. 定义 Hilbert 算子 $u : \ell_2 \to \ell_2$ 为

$$u(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{j+k} \right)_{j \geqslant 1}, \ \forall\, x = (x_k)_{k \geqslant 1} \in \ell_2.$$

对每个 $n \geqslant 1$, 令 $a_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \cdots)$, $b_n = \frac{a_n}{\|a_n\|}$. 证明:

(a) b_n 弱收敛到 0.

(b) $\langle u(a_n),\ a_n \rangle \geqslant \pi \ln n + O(1)$.

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} \|u(b_n)\| \geqslant \pi$.

(d) $\liminf \|(u - v)(b_n)\| \geqslant \pi$, $\forall\, v \in \mathcal{K}(\ell_2)$.

(e) $\operatorname{dist}(u,\ \mathcal{K}(\ell_2)) = \pi$, 结论意味着 u 不是紧的.

22. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上自伴紧算子，λ 是 T 的非零特征值. 证明:

$$\ker(\lambda - T) \cap (\lambda - T)(H) = \{0\}.$$

由此导出: $\ker(\lambda - T) = \ker(\lambda - T)^2$ 且

$$H = \ker(\lambda - T) \oplus (\lambda - T)(H).$$

23. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自伴紧算子. 对 T 的每个非零特征值 λ, 令 P_λ 表示相应的特征子空间上的正交投影. 取 $x \in H$, 证明:

$$(*) \qquad T(y) = x$$

有解当且仅当 $x \in (\ker T)^\perp$ 且

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \frac{\|P_\lambda(x)\|^2}{\lambda^2} < \infty.$$

并证明: 若以上充分条件成立, 则 $(*)$ 式的通解为

$$y = z + \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \frac{P_\lambda(x)}{\lambda^2}, \text{ 其中 } z \in \ker T.$$

24. 设 H 是一个可分的 Hilbert 空间.

(a) 设 $(e_n)_n$ 和 $(f_n)_n$ 是 H 中的两个规范正交基. 证明: 任取 $T \in \mathcal{B}(H)$, 都有

$$\sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2.$$

后面我们固定 H 中的规范正交基为 (e_n). 设 $\mathcal{S}_2(H)$ 为满足如下条件的算子 T 构成的集合:

$$\|T\|_2 = \left(\sum_n \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

我们称这样的算子为 *Hilbert-Schmidt* 算子.

(b) 假设 $\dim H = N < \infty$. 利用算子 T 在基 $(e_1, \cdots, e_N)$ 下的矩阵形式, 给出范数 $\|T\|_2$ 的一个具体刻画.

(c) 证明: $\mathcal{S}_2(H)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的双边理想并包含所有的有限秩算子.

(d) 证明: 任取 $T \in \mathcal{S}_2(H)$, 有 $\|T\| \leqslant \|T\|_2$, 并且 $(\mathcal{S}_2(T), \|\cdot\|_2)$ 是一个 Hilbert 空间.

(e) P_n 表示到空间 $\mathrm{span}(e_1, \cdots, e_n)$ 上的正交投影. 证明: 在 $\dim H = \infty$ 时, 有

$$\lim_n \|T - TP_n\|_2 = 0, \forall\, T \in \mathcal{S}_2(H).$$

因而, 任意的 Hilbert-Schmidt 算子是紧的.

(f) 假设 T 是自伴紧算子. 对每个 $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, 令 $d_\lambda = \dim\ker(\lambda - T)$. 证明: $T \in \mathcal{S}_2(H)$ 当且仅当

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}} d_\lambda\, \lambda^2 < \infty.$$

参 考 文 献

[1] DUNFORD N, SCHWARTZ J T. Linear Operators I: General Theory. Applied Mathematics, Vol.7. New York: Intersience Publishers, Inc., 1958.

[2] FOLLAND B. Real Analysis. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[3] KATZNELSON Y. An Introduction to Harmonic Analysis. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1976.

[4] KELLEY J L. General Topology (GTM027). Heidelberg: Springer, 1975.

[5] ROYDEN H L, FITZPATRICK P M. Real Analysis. 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010.

[6] RUDIN W. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill Co. Inc., 1991.

[7] RUDIN W. Real and Complex Analysis. New York: McGraw-Hill Co. Inc., 1987.

[8] SAKAI S. C^*-Algebras and W^*-Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

[9] STEIN E M, SHAKARCHI R. Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. New Jersey: Princeton University Press, 2005.

[10] 许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾. 算子代数与非交换 L_p 空间引论. 北京: 科学出版社, 2010.

[11] YOSIDA K. Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

索　　引

(按拼音字母排序)

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

P

Q

R

S

T

U

W

X

Y

Z

其他

中外译名对照

A

Alaoglu 阿拉奥格卢
Alexandroff 亚历山德罗夫
Ascoli 阿斯科利

B

Banach 巴拿赫
Baire 贝尔
Bernstein 伯恩斯坦
Bessel 贝塞尔
Borel 博雷尔

C

Cauchy 柯西
Clarkson 克拉克森

D

Dirac 狄拉克
Dirichlet 狄利克雷

F

Fejér 费耶尔
Fourier 傅里叶
Fredholm 弗雷德霍姆
Fréchet 弗雷歇

G

Goldstine 戈德斯坦
Gram 格拉姆

H

Hahn 哈恩
Hamel 哈默尔
Hanner 汉那
Hardy 哈代
Hausdorff 豪斯多夫
Hermite 埃尔米特
Hilbert 希尔伯特
Hölder 赫尔德

J

Jordan 若尔当

L

Lebesgue 勒贝格
Liouville 刘维尔
Lipschitz 利普希茨
Lusin 卢津

M

Mazur 马祖尔
Minkowski 闵可夫斯基
Montel 蒙泰尔

N

Nikodým 尼科迪姆

P

Parseval 帕塞瓦尔
Pythagoras 毕达哥拉斯

R

Radon 拉东

Riemann 黎曼

Riesz 里斯

S

Steinhaus 施坦豪斯

Stone 斯通

Schwartz 施瓦兹

Schwarz 施瓦茨

Schmidt 施密特

T

Taylor 泰勒

Tychonoff 吉洪诺夫

U

Urysohn 乌雷松

V

von Neumann 冯 · 诺伊曼

W

Weierstrass 魏尔斯特拉斯

Wiener 维纳

Y

Young 杨

Z

Zorn 佐恩

郑重声明