目录

1	模		2	
	1.1	基本概念与性质	2	
	1.2	子模	4	
2	模同态			
	2.1	基本概念与性质	7	
	2.2	模同态的相关定理	10	
	2.3	正合列	14	
3	模的直和与直积 1			
	3.1	两个模的直和	19	
	3.2	模族的直积与直和	24	
4	自由模			
	4.1	基本概念与性质	31	
	4.2	有限生成自由模	34	
5	Hom、投射模与内射模 3			
	5.1	Hom	37	
	5.2	投射模	41	
	5.3	内射模	44	
6	附录			
	6.1	映射	46	
	6.2	群	47	
	6.3	环与域	48	
	6.4	线性空间与线性变换	50	
	6.5	线性相关与线性无关	52	
	6.6	交换图	52	
	6.7	泛性质	53	

1 模

1.1 基本概念与性质

定义: 设 R 为一个环, M 是一个 Abel 群, 若存在映射

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(a,x) \longmapsto ax$$

满足:

- $(1) \ a(x+y) = ax + ay;$
- (2) (a+b)x = ax + bx;
- (3) (ab)x = a(bx);
- (4) 1x = x,

其中 $a,b,1 \in R, x,y \in M$, 则称 M 为一个左 R 模.

由此定义易知, 模实际上就是环在 Abel 群上的作用. 需要注意的是, 这里的 ax 是一种简写, 实际上应理解为环 R 中的元素 a 对 x 的作用.

类似地, 我们可以定义右 R 模.

定义: 设 R 为一个环, M 是一个 Abel 群, 若存在映射

$$M\times R\longrightarrow M$$

$$(x,a) \longmapsto xa$$

满足:

- (1) (x+y)a = xa + ya;
- (2) x(a+b) = xa + xb;
- $(3) \ x(ab) = (xa)b;$
- (4) x1 = x,

其中 $a,b,1 \in R, x,y \in M$, 则称 M 为一个右 R 模.

若 R 为交换环,那么左模就是右模.以后 若无特别说明,我们总假定 R 是一个有单位元 1 的交换环,并不再区分左模与右模.

设 $M \in \mathbb{R}$ 模, 由定义易知对任意的 $a \in \mathbb{R}, x \in M$, 有

$$a0 = 0, \quad 0x = 0,$$

 $(-a)x = -ax, \quad a(-x) = -ax,$
 $a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} ax_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} a_i x.$

证明 (1) a0 = a(0+0) = a0 + a0, 故 a0 = 0;

- (2) 0x = (0+0)x = 0x + 0x, the 0x = 0;
- (3) (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = 0, $\pm (-a)x = -ax$;
- (4) a(-x) + ax = a(-x + x) = a0 = 0, $\exists x \ a(-x) = -ax$.
- (5) 与(6) 由数学归纳法易证.

例 域 F 上的线性空间是一个 F 模. 反之, 任一 F 模都是域 F 上的一个线性空间.

例 设 M 为一个 Abel 群. 对 $m \in \mathbb{Z}($ 整数环), $x \in M$, 定义

$$mx = \begin{cases} \underbrace{x + x + \dots + x}_{m \uparrow}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ \underbrace{(-x) + (-x) + \dots + (-x)}_{-m \uparrow} = (-m)(-x), & m < 0 \end{cases}$$

按上述定义, Abel 群 M 作成一个 \mathbb{Z} 模.

例 设 V 为域 F 上的向量空间, T 为 V 上的线性变换, $F[\lambda]$ 为域 F 上的多项式环, 对 $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m,$ 定义

$$F[\lambda] \times V \longrightarrow V$$

$$(f(\lambda), x) \longmapsto f(\lambda)x = f(T)x = a_0x + a_1Tx + \dots + a_mT^mx$$

则 V 成为一个 $F[\lambda]$ 模.

例 设 $\varphi: R \longrightarrow S$ 为环同态, 若 M 为 S 模, 定义

$$R \times M \longrightarrow M$$

 $(a, x) \longmapsto ax = \varphi(a)x$

按上述定义, M 也作成一个 R 模.

例 定义

$$R \times (R, +) \longrightarrow (R, +)$$

 $(a, x) \longmapsto ax$

其中 ax 为 R 的乘法,则 R 自身也作成一个 R 模, 称为正则模 . 此外,设 S 为 R 的子环,则易知 R 也作成一个 S 模,但 S 不一定是 R 模,这是因为当 $a \in R, x \in S$ 时,不一定有 $ax \in S$.

1.2 子模

定义: 设 M 是 R 模, N 是 M 的非空子集. 若 N 是 M 的子群, 且对任意的 $a \in R, x \in N$, 有 $ax \in N$, 则称 N 为 M 的一个子模.

 $\mathbf{\overline{c}}\mathbf{\underline{u}}$: 设 M 为 R 模, N 为 M 的非空子集, 则 N 为 M 的子模当且仅当

- (1) 对任意的 $y_1, y_2 \in N, y_1 + y_2 \in N$;
- (2) 对任意的 $a \in R, y \in N$, 有 $ay \in N$.

证明 必要性显然,下证充分性.

任取 $y \in N$, 因为 $-1 \in R$, 故由 (2) 知

$$(-1)y = -y \in N.$$

又任取 $x \in N$, 由 (1) 知

$$x - y \in N$$
.

故 N 为 M 的子群. 再由 (2) 知 N 为 M 子模.

- 例 设V 为域F 上的向量空间,则N 为V 的子模当且仅当N 为V 的子空间.

例 设 V 为域 F 上的有限维向量空间, T 为 V 上的线性变换, 则 W 为 V 的 $F[\lambda]$ 子模当且仅当 W 为 T 的不变子空间.

证明 (\Longrightarrow) 因为 W 为 V 的 $F[\lambda]$ 子模, 故对任意的 $x_1, x_2 \in W$, $x_1 + x_2 \in W$, 且对任意的 $f(\lambda) \in F[\lambda]$, $x \in W$, $f(\lambda)x = f(T)x \in W$. 取 $f(\lambda) = a \in F$ 为 $F[\lambda]$ 上的零或零次多项式,则 $ax \in W$, 故 W 为 V 的子空间. 又取 $f(\lambda) = \lambda$, 则 $\lambda x = Tx \in W$, 故 W 为 T 的不变子空间.

(\iff) 由 W 为 V 的子空间知对任意的 $x_1, x_2 \in W$,有 $x_1 + x_2 \in W$. 又因为对任意的 $x \in W$,有 $Tx \in W$,故对任意的 $f(\lambda) \in F[\lambda]$,有 $f(\lambda)x = f(T)x \in W$,从而 W 为 V 的 $F[\lambda]$ 子模.

例 设 $\{N_i | i \in I\}$ 为 R 模 M 的一族子模, 则 $\bigcap N_i$ 也是 M 的子模, 称为子模的交.

M R 模 M 中的零元所成集合 $\{0\}$ 也是 M 的子模, 称为零子模, 简记为 0.

定义 (超级重要): 对 R 模 M 中的元素 x, 称

$$Ann_R(x) = \{a \in R \,|\, ax = 0\}$$

为 x 的**零化子**, 它是 R 的一个理想. 若 $Ann_R(x) \neq \{0\}$, 则称 x 为一个**扭元**. 如果 R 是整环, 则 M 的全体扭元所成集合 T(M) 是 M 的一个子模, 称为 M 的**扭子模**. 若 M = T(M), 则称 M 为**扭模**. 下面我们分别证明:

- (1) $Ann_R(x)$ 是环 R 的一个理想;
- (2) 若 R 为整环, 则 T(M) 为 M 的子模.

证明 (1) 任取 $a_1, a_2 \in \text{Ann}_R(x)$, 则 $a_1x = a_2x = 0$, 故

$$(a_1 - a_2)x = a_1x - a_2x = 0 - 0 = 0,$$

从而 $a_1 - a_2 \in \text{Ann}_R(x)$, $\text{Ann}_R(x)$ 为 R 的子加群. 又任取 $r \in R, a \in \text{Ann}_R(x)$, 则

$$(ra)x = r(ax) = r0 = 0,$$

故 $ra \in Ann_R(x)$. 从而 $Ann_R(x)$ 为 R 的理想.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in T(M)$, 则存在 $a_1, a_2 \in R$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, 使得 $a_1x_1 = a_2x_2 = 0$. 由 R 为交换环得

$$a_1a_2(x_1 + x_2) = a_2(a_1x_1) + a_1(a_2x_2) = 0 + 0 = 0.$$

因为 R 无零因子, 故 $a_1a_2 \neq 0$, 从而 $x_1 + x_2 \in T(M)$. 又任取 $r \in R, x \in T(M)$, 则存在 $0 \neq a \in R$, 使得 ax = 0. 由于

$$a(rx) = (ar)x = (ra)x = r(ax) = r0 = 0,$$

故 $rx \in T(M)$, 从而 T(M) 为 M 子模.

定义: 若非零 R 模 M 的子模只有 0 及自身, 则称 M 为一个单模 (或不可约模).

定义: 设 M 为 R 模, X 为 M 的非空子集, S 是环 R 的非空子集, 则 M 中形如

$$s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n$$

的元素称为 X 的 S 线性组合. 记 X 的 S 线性组合全体所成集合为 SX, 即

$$SX = \{s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n \mid s_i \in S, x_i \in X, n$$
为正整数 \}.

<mark>定理</mark>:设X为R模M的一个非空子集,则RX为M的一个子模.

证明 显然对任意的 $x',x''\in RX$, 有 $x'+x''\in RX$. 又任取 $a\in R, x=r_1x_1+\cdots+r_nx_n\in RX$, 则

$$a(r_1x_1 + \dots + r_nx_n) = a(r_1x_1) + \dots + a(r_nx_n) = (ar_1)x_1 + \dots + (ar_n)x_n \in RX.$$

从而 RX 为 M 的子模.

我们称 RX 为由 X 生成的子模, 记作 (X). 显然

$$RX = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \\ N$$
是子模}} N.

定义 (超级重要): 若 M = RX, 则称 X 为 M 的生成元集, X 中的元素称为 M 的生成元. 若 X 为有限集, 则称 M 是有限生成的. 若 M = Rx, 则称 M 为循环模.

例 循环群一定是循环 \mathbb{Z} 模. 因为若循环群 $G = \langle a \rangle$, 则 $\mathbb{Z}a = G$.

例 环 R 作为正则模是一个循环模, 因为 $R1_R = R$.

例 单模一定是循环模, 且若 M 为 R 单模, 那么对任意的 $0 \neq x \in M$, 都有 M = Rx.

证明 $Rx \in M$ 的子模, 又因为 $Rx \neq 0$, 故由 M 为单模知 Rx = M, 即 M 为循环模.

定义: 设 $\{N_i | i \in I\}$ 为 R 模 M 的一族子模, 称

$$\sum_{i \in I} N_i = \{ y_{i_1} + \dots + y_{i_k} \mid y_{i_j} \in N_{i_j}, j = 1, \dots, k, k \text{ in } \mathbb{E} \mathbb{E} \}$$

为子模 $\{N_i \mid i \in I\}$ 的**和**. 特别地, 对于有限个子模 N_1, N_2, \dots, N_s , 则有

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_s = \{y_1 + y_2 + \cdots + y_s \mid y_i \in N_i, i = 1, 2, \cdots, s\}.$$

 \mathbf{z} : 设 K 为 R 模 M 的一个子模, 则 M 关于 K 的陪集作成的集合

$$M/K = \{x + K \mid x \in M\}$$

关于陪集的加法

$$(x+K) + (y+K) = (x+y) + K$$

以及模的乘法

$$a(x+K) = ax + K$$

也作成一个 R 模, 称为 M 关于 K 的**商模**.

下面我们证明上述关于模的乘法的定义是合理的. 事实上, 若 x+K=y+K, 则 $x-y\in K$. 由 K 为子模知对任意的 $a\in R$, 都有 $a(x-y)\in K$, 即 $ax-ay\in K$, 从而 ax+K=ay+K. 即是说

$$R \times M/K \longrightarrow M/K$$

 $(a, x + K) \longmapsto ax + K$

的确是一个映射.

易知 <mark>商模 M/K 中的零元为 K, x + K 的负元为 (-x) + K.</mark>

2 模同态

2.1 基本概念与性质

定义: 设 M, M' 为 R 模, 若映射 $f: M \longrightarrow M'$ 满足

- (1) 对任意的 $x, y \in M$, 有 f(x + y) = f(x) + f(y);
- (2) 对任意的 $a \in R, x \in M$, 有 f(ax) = af(x),

则称 f 为一个 R 模同态.

定义: 若 R 模同态 f 为单射, 则称 f 是一个**单同态**; 若 f 为满射, 则称 f 是一个**满同态**; 若 f 为双射, 则称 f 是一个 R **模同构**, 且称 R 模 M 与 M' 是同构的, 记为 $M \cong M'$.

设K为M的子模,则

$$\nu: M \longrightarrow M/K$$
$$x \longmapsto x + K$$

也是 R 模同态, 称为 M 到 M/K 的 **自然同态**, 它是一个满同态.

 $\mathbf{c}\mathbf{Z}$: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为模同态, 分别称

Ker
$$f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

Im $f = \{f(x) \in M' \mid x \in M\}$

为 f 的 $\mathbf{核}$ 与 $\mathbf{像}$, 称

Coker
$$f = M'/\text{Im } f$$
, Coim $f = M/\text{Ker } f$

为 f 的余核与余像.

不难验证 $\operatorname{Ker} f \to M$ 的子模, $\operatorname{Im} f \to M'$ 的子模.

定理:设 $f: M \longrightarrow M'$ 为R模同态,则下列条件等价:

- (1) f 为单同态;
- (2) Ker $f = \{0\}$;
- (3) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g,h:K\longrightarrow M$, 从 fg=fh 可以得出 g=h;
- (4) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g:K\longrightarrow M$, 从 fg=0 可以得出 g=0.

证明 (1) ⇒ (2) 因为

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

故 f(0) = 0, 即 $0 \in \text{Ker } f$. 由 f 为单射知 $\text{Ker } f = \{0\}$.

- (2) \Rightarrow (3) 设 fg = fh. 任取 $x \in K$, 则 f(g(x)) = f(h(x)), 即 f(g(x) h(x)) = 0, 故 $g(x) h(x) \in \text{Ker } f$, 由 (2) 知 g(x) h(x) = 0, 即 g(x) = h(x), 由 x 的任意性知 g = h.
 - $(3) \Rightarrow (4)$ 取 h = 0, 则由 (3) 知从 fg = 0 = fh 可以得到 g = h = 0.

 $(4) \Rightarrow (2)$ 取 $K = \operatorname{Ker} f$, 又取模同态 g 为嵌入映射

$$g: \operatorname{Ker} f \longrightarrow M$$

$$x \longmapsto x$$

则易知 fg = 0, 由 (4) 可得 g = 0, 故 $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

 $(2) \Rightarrow (1)$ 设 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 - x_2) = 0$, 故 $x_1 - x_2 \in \text{Ker } f$, 从而 $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = x_2$, 即 f 为单同态.

定理: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则下列条件等价:

- (1) f 为满同态;
- (2) Im f = M';
- (3) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g,h:M'\longrightarrow K$, 从 gf=hf 可以得出 g=h;
- (4) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g: M' \longrightarrow K$, 从 gf = 0 可以得出 g = 0.

定理: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则 f 为同构当且仅当存在映射 $g, h: M' \longrightarrow M$, 使得

$$fg = 1_{M'}, \quad hf = 1_M.$$

当上述等式成立时, g = h 为 R 模同构.

证明 (\Longrightarrow) 因 f 为同构, 故 f 为双射, 因此 f 可逆. 取 $g = h = f^{-1}$, 则

$$fg = 1_{M'}, \quad hf = 1_{M}.$$

易知 $g = h = f^{-1}$ 是 M' 到 M 的 R 模同构.

(\iff) 因为 $fg=1_{M'}$ 为满射, 故 f 满. 又因为 $hf=1_M$ 为单射, 故 f 单. 因此 f 为双射, 故 f 为同构. 又

$$g = 1_M g = (hf)g = h(fg) = h1_{M'} = h,$$

故 g = h 为双射. 下证 g = h 为 R 模同态. 任取 $x, y \in M'$, 则

$$f(g(x+y)) = (fg)(x+y) = x+y = (fg)(x) + (fg)y = f(g(x)) + f(g(y)) = f(g(x)+g(y)).$$

由 f 为单射知

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

又任取 $a \in R$, 则

$$f(g(ax)) = (fg)(ax) = ax = a(fg)(x) = af(g(x)) = f(ag(x)).$$

由 f 为单射知

$$g(ax) = ag(x).$$

因此 g 为 R 模同态.

设 M' 和 M' 是两个 R 模, 我们把从 M 到 M' 的全体 R 模同态所成集合记为 $\operatorname{Hom}_R(M,M')$. **定义**: 对 $f,g\in\operatorname{Hom}_R(M,M')$, 定义**模同态的加法**为

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in M.$$

设 $a \in R$, 定义**模的乘法**为

$$(af)(x) = af(x), \quad x \in M.$$

当 M = M' 时, 定义模同态的乘法为

$$(fg)(x) = f(g(x)), \quad x \in M.$$

易知 f+g 也为 R 模同态,即 $f+g \in \operatorname{Hom}_R(M,M')$. 容易证明, $\operatorname{Hom}_R(M,M')$ 关于这样定义的加法作成一个 Abel 群. 当 M=M' 时, $\operatorname{End}_R(M)=\operatorname{Hom}_R(M,M)$ 关于模同态的加法与乘法作成一个环,称为 R 模 M 的**自同态环**.

例 当 M 为单模时, $\operatorname{End}_R(M)$ 是一个除环.

证明 任取 $0 \neq f \in \operatorname{End}_R(M)$, 则 $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ 均为 M 的子模. 当 $\operatorname{Ker} f = M$ 时, f = 0, 矛盾, 故 $\operatorname{Ker} f = 0$, 因此 f 为单同态. 当 $\operatorname{Im} f = 0$ 时, f = 0, 也矛盾, 故 $\operatorname{Im} f = M$, 即 f 为满同态, 因此 f 为双射, 可逆. 由此可知 $\operatorname{End}_R(M)$ 为除环.

我们可以验证, 在映射

$$R \times \operatorname{Hom}_R(M, M') \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, M')$$

$$(a, f) \longmapsto af$$

下, $\operatorname{Hom}_R(M,M')$ 作成一个 R 模. 以后我们总把 $\operatorname{Hom}_R(M,M')$ 看成这样的 R 模. 需要注意的是, 当 R 为非交换环时, $\operatorname{Hom}_R(M,M')$ 仍可作成 Abel 群,但无法作成 R 模,这是因为此时对 $a \in R, f \in \operatorname{Hom}_R(M,M')$,不一定有 $af \in \operatorname{Hom}_R(M,M')$. 具体原因是当 R 非交换时

$$(af)(rx) = a(f(rx)) = a(rf(x)) = (ar)f(x) = (ra)f(x) = r(af(x)) = r(af)(x)$$

中的第四个等号不一定成立, 故 af 不一定为 R 模同态.

2.2 模同态的相关定理

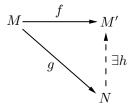
定理 (重要): 设 $f: M \longrightarrow M', g: M \longrightarrow N$ 均为 R 模同态, 其中 g 为满同态且 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$, 则存在唯一的 R 模同态 $h: N \longrightarrow M'$, 满足

$$f = hg$$

且

- (1) $\operatorname{Ker} h = g(\operatorname{Ker} f);$
- (2) $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$;
- (3) $h \not = \ker g = \operatorname{Ker} f$;
- $(4) h 满 \iff f 满.$

 $\overline{\mathbf{u}}$ ① 先证模同态 h 的存在性. 设



$$h: N \longrightarrow M'$$
 $n \longmapsto f(m), 其中 g(m) = n$

若 $g(m_1) = g(m_2)$, 则 $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$, 故 $f(m_1) = f(m_2)$, 从而 h 是一个映射. 又因为

$$(hg)(m)=h(g(m))=h(n)=f(m),\quad m\in M,$$

故 f = hg. 下面再证 $h \in R$ 模同态. 任取 $n_1, n_2 \in N$, 设 $g(m_1) = n_1, g(m_2) = n_2$, 则

$$h(n_1) + h(n_2) = h(g(m_1)) + h(g(m_2))$$

$$= f(m_1) + f(m_2)$$

$$= f(m_1 + m_2)$$

$$= h(g(m_1 + m_2))$$

$$= h(g(m_1) + g(m_2))$$

$$= h(n_1 + n_2).$$

又任取 $a \in R, n \in N$, 设 g(m) = n, 则

$$ah(n) = af(m) = f(am) = h(g(am)) = h(ag(m)) = h(an),$$

从而 h 为 N 到 M' 的 R 模同态, 存在性得证.

② 再证模同态 h 的唯一性. 设有 R 模同态 $h_1, h_2: N \longrightarrow M'$ 满足 $h_1g = h_2g = f$, 由 g 为满同态得 $h_1 = h_2$.

③ 下证 $\operatorname{Ker} h = g(\operatorname{Ker} f)$. 任取 $n \in \operatorname{Ker} h$, 设 g(m) = n, 则

$$0 = h(n) = h(g(m)) = f(m),$$

故 $m \in \operatorname{Ker} f$, $n = g(m) \in g(\operatorname{Ker} f)$, 从而 $\operatorname{Ker} h \subseteq g(\operatorname{Ker} f)$. 又任取 $n \in g(\operatorname{Ker} f)$, 则存在 $m \in \operatorname{Ker} f$, 使得 n = g(m), 从而

$$h(n) = h(q(m)) = f(m) = 0,$$

故 $n \in \operatorname{Ker} h$, 从而 $g(\operatorname{Ker} f) \subseteq \operatorname{Ker} h$. 因此 $\operatorname{Ker} h = g(\operatorname{Ker} f)$.

④ 下证 $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$. 任取 $m' \in \operatorname{Im} h$, 则存在 $n \in N$, 使得 h(n) = m'. 又因为 g 为满射, 故存在 $m \in M$, 使得 g(m) = n, 从而

$$m' = h(n) = h(g(m)) = f(m),$$

故 $m' \in \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{Im} f$. 又任取 $m' \in \operatorname{Im} f$, 则存在 $m \in M$, 使得 f(m) = m', 也即 h(g(m)) = m', 从而 $m' \in \operatorname{Im} h$, $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} h$. 因此 $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$.

- ⑤ 下面我们证明: $h \not = \text{Ker } g = \text{Ker } f$.
- (\Longrightarrow) 因 h 单, 故 $\operatorname{Ker} h = 0$. 任取 $m \in \operatorname{Ker} g$, 则 g(m) = 0, 从而

$$f(m) = h(g(m)) = h(0) = 0,$$

故 $m \in \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$. 又任取 $m \in \operatorname{Ker} f$, 则 f(m) = 0, 即 h(g(m)) = 0, 由 $\operatorname{Ker} h = 0$ 知 g(m) = 0, 故 $m \in \operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g$. 因此 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.

(
$$\iff$$
) 设 $n \in \text{Ker } h$, 则 $h(n) = 0$. 设 $g(m) = n$, 则

$$f(m) = h(g(m)) = h(n) = 0,$$

故 $m \in \text{Ker } f = \text{Ker } g$, 从而 n = g(m) = 0, 故 Ker h = 0, h 为单射.

- ⑥ 下面我们证明: $h 满 \iff f 满$.
- (\Longrightarrow) 任取 $m' \in M'$, 由 h 为满射可知存在 $n \in N$, 使得 h(n) = m'. 又因为 g 为满射, 故存在 $m \in M$, 使得 g(m) = n, 从而

$$f(m) = h(g(m)) = h(n) = m',$$

故 f 为满射.

(\iff) 任取 $m' \in M'$, 由 f 为满射知存在 $m \in M$, 使得 f(m) = m', 从而

$$h(g(m)) = f(m) = m',$$

故 h 为满射.

<mark>定理</mark> (究极重要): (1)(**模同态基本定理**) 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则

$$M/\mathrm{Ker}\,f\cong\mathrm{Im}\,f.$$

(2) 若 $K \subseteq N$ 均为 M 的子模, 则

$$M/N \cong (M/K)/(N/K)$$
.

(3) 若 K, N 均为 M 的子模, 则

$$(N+K)/K \cong N/(N \cap K).$$

证明 这三个定理的证明与群中相应结论的证明有异曲同工之妙,我们只给出证明过程中需要构造的映射.

(1)

$$\sigma: M/\mathrm{Ker} f \longrightarrow \mathrm{Im} f$$

 $x + \mathrm{Ker} f \longmapsto f(x)$

(2)

$$f: M/K \longrightarrow M/N$$

 $x+K \longmapsto x+N$

(3)

$$f: N \longrightarrow (N+K)/K$$

 $x \longmapsto x+K$

推论: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模 满同态 , 令 A 为 M 的所有包含 $\operatorname{Ker} f$ 的子模所成集合 , B 为 M' 的所有子模所成集合 , 则 A 与 B 之间存在一个双射 .

证明 令

$$\sigma: A \longrightarrow B$$

$$L \longmapsto f(L)$$

首先我们证明 σ 是一个定义合理的映射. 设 $L \in A$, 对任意的 $y_1, y_2 \in f(L)$, 存在 $x_1, x_2 \in L$, 使得

 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2),$ 从而

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(L).$$

任取 $a \in R$, 由于对任意的 $y \in f(L)$, 存在 $x \in L$, 使得 y = f(x), 从而

$$ay = af(x) = f(ax) \in f(L),$$

故 f(L) 为 M' 的子模, σ 是一个具有良好定义的映射, 下证 σ 为单射. 设 $f(L_1) = f(L_2)$, 其中 $L_1, L_2 \in A$, 则对任意的 $l_1 \in L_1$, 存在 $l_2 \in L_2$, 使得 $f(l_1) = f(l_2)$, 从而 $l_1 - l_2 \in \operatorname{Ker} f \subseteq L_2$, 又因 为 $l_2 \in L_2$, 从而 $l_1 \in L_2$. 故 $L_1 \subseteq L_2$. 同理可得 $L_2 \subseteq L_1$, 故 $L_1 = L_2$, 即 σ 为单射.

任取 $L' \in B$, 下面我们证明 $f^{-1}(L')$ 是 L' 在 σ 下的原像. 因为 $0 \in L'$, 故

$$f^{-1}(0) = \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(L').$$

任取 $x_1, x_2 \in f^{-1}(L')$, 则 $f(x_1), f(x_2) \in L'$, 又因为 L' 为 M' 的子模, 故

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in L',$$

从而

$$x_1 + x_2 \in f^{-1}(L').$$

又任取 $a \in R, x \in f^{-1}(L')$, 则

$$f(ax) = af(x) \in L',$$

故 $ax \in f^{-1}(L')$, 从而 $f^{-1}(L')$ 为 M 的子模. 又因为 $\operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(L')$, 故 $f^{-1}(L') \in A$. 由 f 为满射知

$$f(f^{-1}(L')) = L',$$

也即

$$\sigma(f^{-1}(L')) = L',$$

故 σ 为满射. 综上, σ 为双射, 结论得证.

定理 (重要): R 模 M 为循环模当且仅当 M 同构于正则模 R 的一个商模. 若 x 是循环模 M 的一个生成元, 则 $M \cong R/\mathrm{Ann}_R(x)$. M 为单模当且仅当 $\mathrm{Ann}_R(x)$ 是 R 的极大理想.

证明 在证明过程中,我们会用到如下结论: ①对于正则模 R 而言,理想就是子模. ②设 N 为环 R 的理想,则 N 为极大理想当且仅当 R/N 为单环.

(1) 我们证明 R 模 M 为循环模当且仅当 M 同构于正则模 R 的一个商模.

 (\Longrightarrow) 设 M = Rx, 定义

$$f: R \longrightarrow M = Rx$$

$$r \longmapsto rx$$

易知 f 是一个 R 模满同态且 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ann}_R(x)$. 由模同态基本定理可知

$$M \cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$$
.

 (\longleftarrow) 设 K 是正则模 R 的子模, $M \cong R/K$. 由于

$$R/K = \{r + K \mid r \in R\} = \{r(1_R + K) \mid r \in R\} = R(1_R + K),$$

故 R/K 为循环模, 从而 M 为循环模.

(2) 设 x 为循环模 M 的一个生成元, 定义映射

$$f:R\longrightarrow M=Rx$$
$$r\longmapsto rx$$

易知 f 是一个 R 模满同态, 且 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ann}_R(x)$, 从而由模同态基本定理知 $M \cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$. 下面我们证明 M 为单模当且仅当 $\operatorname{Ann}_R(x)$ 是 R 的极大理想.

- (⇒) 因为 M 为单模, 故 M 只有平凡子模, 从而 $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ 只有平凡子模, 也即只有平凡理想, 因此 $R/\mathrm{Ann}_R(x)$ 为单环, 故 $\mathrm{Ann}_R(x)$ 为 R 的极大理想.
- (\iff) 因为 $Ann_R(x)$ 为 R 的极大理想, 故 $R/Ann_R(x)$ 为单环, 只有平凡理想, 也即只有平凡子模, 故 $R/Ann_R(x)$ 为单模, 从而 M 为单模.

2.3 正合列

定义: 设有一对 R 模同态

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

若 f 与 g 满足 Im f = Ker g, 则称 f 与 g 在 M 处正合. 对于单独一个同态

$$M' \stackrel{f}{\longrightarrow} M$$

我们称 f 在 M 与 M' 处均正合. 如果 R 模同态序列

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

在每一个 M_i 处均正合, 即

$$\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$$
, 对所有有意义的 i

则称该序列为正合列.

定理:设 $f: M \longrightarrow N$ 为R模同态,则

- (1) 0 $\longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N$ 正合当且仅当 f 为单同态;
- (2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合当且仅当 f 为满同态;
- (3) 0 $\longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$ 正合当且仅当 f 为同构.

证明 (1) $0 \longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N$ 正合 \Longleftrightarrow Im $0 = \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow$ Ker $f = 0 \Longleftrightarrow f$ 为单同态.

- (2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合 \iff Im $f = \text{Ker } 0 \iff$ Im $f = N \iff f$ 为满同态.
- (3) 由 (1) 和 (2) 可知 $0 \longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$ 正合 $\iff f$ 为同构.

设 $f: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, $i: \operatorname{Ker} f \longrightarrow M$ 为嵌入映射, ν 为自然同态

$$\nu: N \longrightarrow \operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$$

$$x \longmapsto x + \operatorname{Im} f$$

则不难验证

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \stackrel{i}{\longrightarrow} M \stackrel{f}{\longrightarrow} N \stackrel{\nu}{\longrightarrow} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

是一个正合列.

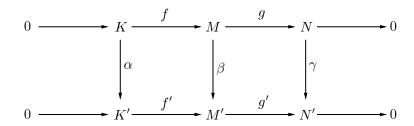
定义: 具有形式

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

的正合列称为短正合列.

易知上述短正合列中的 f 必为单同态, g 必为满同态.

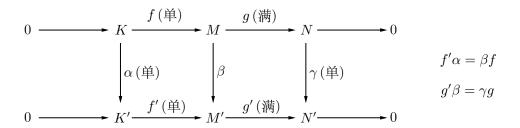
<mark>引理</mark> (短五引理): 设有以下 R 模同态交换图



其中水平的两行均为正合列,则

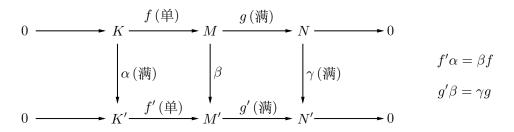
- (1) 若 α , γ 均为单同态, 则 β 为单同态;
- (2) 若 α , γ 均为满同态, 则 β 为满同态;
- (3) 若 α , γ 均为同构, 则 β 为同构.

证明 (1) 交换图如下.



任取 $m \in \text{Ker } \beta$, 则 $\beta(m) = 0$, $g'(\beta(m)) = 0$, 从而 $\gamma(g(m)) = 0$, 因为 γ 单, 故 g(m) = 0, $m \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, 故存在 $k \in K$, 使得 f(k) = m. 从而 $f'(\alpha(k)) = \beta(f(k)) = \beta(m) = 0$, 由 f' 单可知 $\alpha(k) = 0$, 再由 α 单可知 k = 0, 故 m = f(k) = f(0) = 0. 因此 $\text{Ker } \beta = 0$, 即 β 单.

(2) 交换图如下.



任取 $m' \in M'$, 则 $g'(m') \in N'$. 因 γ 满, 故存在 $n \in N$, 使得 $\gamma(n) = g'(m')$. 因 g 满, 故存在 $m \in M$, 使得 g(m) = n, 从而 $g'(m') = \gamma(n) = \gamma(g(m)) = g'(\beta(m))$, 即 $g'(m' - \beta(m)) = 0$, 故 $m' - \beta(m) \in \text{Ker } g' = \text{Im } f'$. 因此存在 $k' \in K'$, 使得 $f'(k') = m' - \beta(m)$. 因 α 满, 故存在 $k \in K$, 使得 $\alpha(k) = k'$, 从而 $\beta(f(k)) = f'(\alpha(k)) = f'(k') = m' - \beta(m)$, 故 $m' = \beta(f(k) + m) \in \text{Im } \beta$, 从而 β 满.

(3) 由(1)与(2)可得.

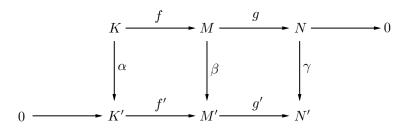
引理: 设 $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 为一对 R 模同态, 则 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ 当且仅当 gf = 0.

证明 (\Longrightarrow) 任取 $k \in K$, 则 $f(k) \in \text{Im } f \subseteq \text{Ker } g$, 从而 (gf)(k) = g(f(k)) = 0, 故 gf = 0.

(\iff) 任取 $m \in \text{Im } f$, 则存在 $k \in K$, 使得 f(k) = m, 从而 g(m) = g(f(k)) = (gf)(k) = 0, 故 $m \in \text{Ker } g$, 从而 $\text{Im } f \subseteq \text{Ker } g$.

由上述引理可知,对于 $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$, 当 $f \ni g$ 在 M 处正合时,有 gf = 0 (因为此时 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$).

<mark>引理</mark> (蛇形引理): 设有以下 R 模同态交换图



其中水平两行均正合, 则存在 R 模同态 δ : Ker $\gamma \longrightarrow \text{Coker } \alpha$, 使得序列

$$\operatorname{Ker} \alpha \xrightarrow{f_0} \operatorname{Ker} \beta \xrightarrow{g_0} \operatorname{Ker} \gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} \alpha \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{Coker} \beta \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{Coker} \gamma$$

正合,且

- (1) 若 f 单, 则 f_0 单;
- (2) 若 g' 满, 则 $\overline{g'}$ 满.

证明 第一步 构造同态映射.

① f_0, g_0 按如下方式构造:

$$f_0: \operatorname{Ker} \alpha \longrightarrow \operatorname{Ker} \beta$$
 $g_0: \operatorname{Ker} \beta \longrightarrow \operatorname{Ker} \gamma$
 $k \longmapsto f(k)$ $m \longmapsto g(m)$

若 $k \in \operatorname{Ker} \alpha$, 则 $\alpha(k) = 0$, 从而 $\beta(f(k)) = f'(\alpha(k)) = f'(0) = 0$, 故 $f(k) \in \operatorname{Ker} \beta$. 因此 f_0 是一个映射, 同理可知 g_0 是一个映射. 容易验证 f_0, g_0 是同态.

② $\overline{f'}$, $\overline{g'}$ 按如下方式构造:

$$\overline{f'}: \operatorname{Coker} \alpha \longrightarrow \operatorname{Coker} \beta \qquad \overline{g'}: \operatorname{Coker} \beta \longrightarrow \operatorname{Coker} \gamma$$

$$k' + \operatorname{Im} \alpha \longmapsto f'(k') + \operatorname{Im} \beta \qquad m' + \operatorname{Im} \beta \longmapsto g'(m') + \operatorname{Im} \gamma$$

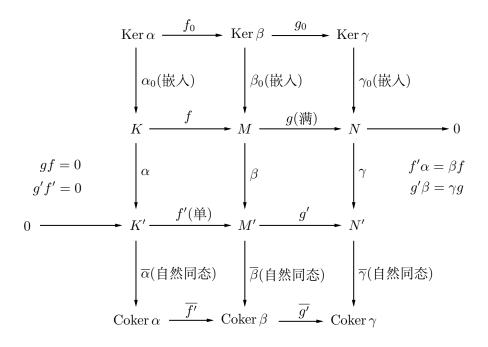
若 $k_1' + \operatorname{Im} \alpha = k_2' + \operatorname{Im} \alpha$, 则 $k_1' - k_2' \in \operatorname{Im} \alpha$, 从而存在 $k \in K$, 使得 $\alpha(k) = k_1' - k_2'$, 从 而 $\beta(f(k)) = f'(\alpha(k)) = f'(k_1' - k_2')$, 故 $f'(k_1') - f'(k_2') = \beta(f(k)) \in \operatorname{Im} \beta$, 从而 $f'(k_1') + \operatorname{Im} \beta = f'(k_2') + \operatorname{Im} \beta$. 因此 $\overline{f'}$ 是一个映射,同理可知 $\overline{g'}$ 是一个映射.容易验证 $\overline{f'}$, $\overline{g'}$ 是同态.

③ 下面构造 δ : Ker $\gamma \longrightarrow \operatorname{Coker} \alpha = K'/\operatorname{Im} \alpha$.

对任意的 $n \in \operatorname{Ker} \gamma$, 因为 g 满, 故存在 $m \in M$, 使得 g(m) = n, 从而 $g'(\beta(m)) = \gamma(g(m)) = \gamma(n) = 0$, 故 $\beta(m) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$, 从而存在 $k' \in K'$, 使得 $f'(k') = \beta(m)$. 令 $\delta(n) = k' + \operatorname{Im} \alpha$, 也即

$$\delta: \operatorname{Ker} \gamma \longrightarrow \operatorname{Coker} \alpha$$

$$n \longmapsto k' + \operatorname{Im} \alpha, \quad \sharp \operatorname{r} f'(k') = \beta(m), g(m) = n.$$



第二步 证明各处正合.

- (1) 下证 $\operatorname{Im} g_0 = \operatorname{Ker} \delta$.
- ① 先证 $\operatorname{Im} g_0 \subseteq \operatorname{Ker} \delta$.

任取 $n \in \text{Im } g_0 \subseteq \text{Ker } \gamma \subseteq N$,则存在 $m \in \text{Ker } \beta \subseteq M$,使得 $g_0(m) = n$,也即 g(m) = n.由 交换图知 $g'(\beta(m)) = \gamma(g(m)) = \gamma(n) = 0$,故 $\beta(m) \in \text{Ker } g' = \text{Im } f'$,从而存在 $k' \in K'$,使得 $f'(k') = \beta(m) = 0$.由 f' 单可知 k' = 0,从而 $\delta(n) = 0 + \text{Im } \alpha$,故 $n \in \text{Ker } \delta$.

② 再证 $\operatorname{Ker} \delta \subseteq \operatorname{Im} g_0$.

任取 $n \in \operatorname{Ker} \delta \subseteq \operatorname{Ker} \gamma \subseteq N$,则 $\gamma(n) = 0$. 因 g 满, 故存在 $m \in M$,使得 g(m) = n. 由交换图知 $g'(\beta(m)) = \gamma(g(m)) = \gamma(n) = 0$,故 $\beta(m) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$,从而存在 $k' \in K'$,使得 $f'(k') = \beta(m)$,故 $\delta(n) = k' + \operatorname{Im} \alpha$. 又因为 $n \in \operatorname{Ker} \delta$,故 $k' + \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \alpha$,从而 $k' \in \operatorname{Im} \alpha$. 因此 存在 $k \in K$,使得 $\alpha(k) = k'$,从而 $\beta(m) = f'(k') = f'(\alpha(k)) = \beta(f(k))$,故 $m - f(k) \in \operatorname{Ker} \beta$. 由于 $g_0(m - f(k)) = g(m - f(k)) = g(m) - (gf)(k)$. 因为 gf = 0,故 $g_0(m - f(k)) = g(m) = n$,从而 $n \in \operatorname{Im} g_0$.

- (2) 下证 $\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} \overline{f'}$.
- ① 先证 $\operatorname{Im} \delta \subseteq \operatorname{Ker} \overline{f'}$.

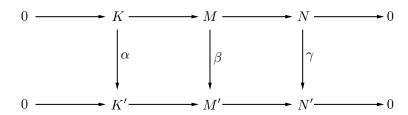
任取 $k' + \operatorname{Im} \alpha \in \operatorname{Im} \delta \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$, 则存在 $n \in \operatorname{Ker} \gamma$, 使得 $\delta(n) = k' + \operatorname{Im} \alpha$. 由 δ 的构造可知存在 $m \in M$, 使得 $f'(k') = \beta(m)$, g(m) = n. 因此 $\overline{f'}(k' + \operatorname{Im} \alpha) = f'(k') + \operatorname{Im} \beta = \beta(m) + \operatorname{Im} \beta = \operatorname{Im} \beta$, 即 $k' + \operatorname{Im} \alpha \in \operatorname{Ker} \overline{f'}$.

② 再证 $\operatorname{Ker} \overline{f'} \subseteq \operatorname{Im} \delta$.

任取 $k' + \operatorname{Im} \alpha \in \operatorname{Ker} \overline{f'}$, 则 $\overline{f'}(k' + \operatorname{Im} \alpha) = f'(k') + \operatorname{Im} \beta = \operatorname{Im} \beta$, 故 $f'(k') \in \operatorname{Im} \beta$. 因此存在 $m \in M$, 使得 $f'(k') = \beta(m)$. 令 n = g(m), 则 $\gamma(n) = \gamma(g(m)) = g'(\beta(m)) = g'(f'(k'))$. 因为 g'f' = 0, 故 $\gamma(n) = 0$, $n \in \operatorname{Ker} \gamma$. 由 δ 的构造可知 $\delta(n) = k' + \operatorname{Im} \alpha$, 因此 $k' + \operatorname{Im} \alpha \in \operatorname{Im} \delta$.

(3) 其余各处的正合性不难证明.

定义: 设有 R 模同态 交换图



其中水平两行为短正合列. 若 α, β, γ 均为同构, 则称这两个短正合列是同构的.

3 模的直和与直积

3.1 两个模的直和

定义: 设 M_1 与 M_2 为两个 R 模, 记 $M_1 \oplus M_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$, 定义 $M_1 \oplus M_2$ 上的加法与 R 模的作用分别为

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

 $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2),$

则 $M_1 \oplus M_2$ 也作成一个 R 模, 称为模 M_1 与 M_2 的**直和**.

定义: 称映射

$$\eta_1: M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \qquad \eta_2: M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$$

$$x_1 \longmapsto (x_1, 0) \qquad x_2 \longmapsto (0, x_2)$$

为典范内射, 称映射

$$\pi_1: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1 \qquad \pi_2: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_2$$

为典范射影.

易知 η_1, η_2 为单同态, π_1, π_2 为满同态, 且 (下面 5 个式子很重要)

$$\pi_1 \eta_1 = 1_{M_1}, \quad \pi_2 \eta_2 = 1_{M_2},$$

$$\pi_1 \eta_2 = 0, \qquad \pi_2 \eta_1 = 0,$$

$$\eta_1 \pi_1 + \eta_2 \pi_2 = 1_{M_1 \oplus M_2}.$$

与作直和的过程相反的是把一个模"分解"为子模的直和. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2$

且 $M = M_1 + M_2, M_1 \cap M_2 = 0$. 定义映射

$$i: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M$$

 $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$

易知 i 为 R 模同态. 任取 $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} i$, 则 $i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 0$, 从而 $x_1 = -x_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$, 故 $x_1 = x_2 = 0$, Ker i = 0, i 为单同态. 由 $M = M_1 + M_2$ 知对任意的 $x \in M$, 存在 $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$, 从而 $i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x$, 即 i 为满同态. 综上, i 为同构, $M \cong M_1 \oplus M_2$. 我们称 M 是它的子模 M_1, M_2 的**内直和**. 由 $M \cong M_1 \oplus M_2$ 可知在同构的意义下内直和与直和并无本质区别, 因此我们也把内直和写为 $M = M_1 \oplus M_2$ 的形式.

引理: $M=M_1\oplus M_2$ 当且仅当对任意的 $x\in M$,存在唯一的 $x_1\in M_1$ 以及 $x_2\in M_2$,使得 $x=x_1+x_2$.

证明 (⇒) 因 $M = M_1 + M_2$, 故对任意的 $x \in M$, 存在 $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$. 若另有 $y_1 \in M_1, y_2 \in M_2$, 使得 $x = y_1 + y_2$, 则 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, 从而 $x_1 - y_1 = -(x_2 - y_2) \in M_1 \cap M_2 = 0$, 故 $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, 因此分解唯一.

(\iff) 由分解的存在性知 $M = M_1 + M_2$. 任取 $x \in M_1 \cap M_2$, 则由 x + 0 = 0 + x 以及分解的 唯一性知 x = 0, 故 $M_1 \cap M_2 = 0$, $M = M_1 \oplus M_2$.

并不是 M 的所有子模都能出现在 M 的直和分解中. 若子模 K 能出现在 M 的直和分解中,则称 K 为 M 的**直和项**. 若 $M=M_1\oplus M_2$,则 M_1 与 M_2 均为 M 的直和项,此时我们称 M_1 与 M_2 互为对方的**直和补**. **直和补一般不唯一**.

引理: 设有 R 模同态 $f: N \longrightarrow M, g: M \longrightarrow N,$ 使得

$$qf = 1_N$$

则 f 为单同态, g 为满同态, 且 $M = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

证明 由 1_N 为双射知 f 为单同态, g 为满同态. 任取 $m \in M$, 则 $m = \underline{fg(m)} + \underline{m - fg(m)}$. 由于

$$g(m - fg(m)) = g(m) - (gf)(g(m)) = g(m) - g(m) = 0,$$

故 $m - fg(m) \in \text{Ker } g$. 又因为 $fg(m) \in \text{Im } f$, 从而 M = Im f + Ker g.

任取 $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } g$, 则存在 $n \in N$, 使得 f(n) = x, 从而

$$n = g(f(n)) = g(x) = 0,$$

故 x = f(n) = f(0) = 0, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = 0$. 因此 $M = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

定义: (1) 设 $f: N \longrightarrow M$ 为 R 模同态, 若存在 R 模同态 $g: M \longrightarrow N$, 使得

$$gf = 1_N$$
,

则称 f 是分裂单同态.

(2) 设 $g: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, 若存在 R 模同态 $f: N \longrightarrow M$, 使得

$$gf = 1_N$$
,

则称 g 是**分裂满同态**.

(3) 若短正合列

$$0 \longrightarrow K \stackrel{f}{\longrightarrow} M \stackrel{g}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$$

中 f 为分裂单同态, g 为分裂满同态, 则称该短正合列是**分裂**的.

易知前述引理中的 f 与 g 分别为分裂单同态与分裂满同态, 并且不难验证

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\eta_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

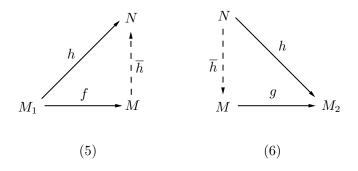
是一个分裂短正合列.

定理(非常重要): 设有 <math>R 模同态短正合列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

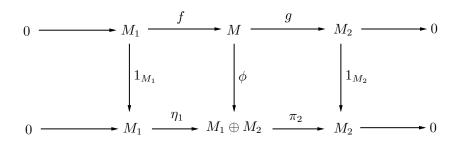
则下列各条等价:

- (1) 该短正合列分裂;
- (2) f 是分裂单同态;
- (3) g 是分裂满同态;
- (4) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \stackrel{.}{\neq} M$ 的直和项;
- (5) 任意的 R 模同态 $h: M_1 \longrightarrow N$ 通过 f 分解;



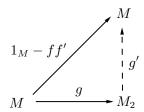
(6) 任意的 R 模同态 $h: N \longrightarrow M_2$ 通过 g 分解;

(7) 存在短正合列的同构:



证明 $(1) \Rightarrow (2)$ 显然.

 $(2) \Rightarrow (3)$ 因为 f 分裂单, 故存在 R 模同态 $f': M \longrightarrow M_1$, 使得 $f'f = 1_{M_1}$.



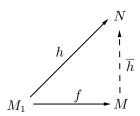
因为 $(1_M - ff')f = f - f = 0$, 故 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} (1_M - ff')$. 因为 g 是满同态, 由定理(*) 可知存在唯一的 R 模同态 $g': M_2 \longrightarrow M$, 使得 $1_M - ff' = g'g$, 从而

$$(gg')g = g(g'g) = g(1_M - ff') = g - 0 = g.$$

由于 g 满, 故可右消去, 从而得到 $gg' = 1_{M_2}$, 即 g 是分裂满的.

 $(3) \Rightarrow (4)$ 因为 g 分裂满, 故存在 R 模同态 $g': M_2 \longrightarrow M$, 使得 $gg' = 1_{M_2}$, 从而由前述引理知 $M = \operatorname{Im} g' \oplus \operatorname{Ker} g$. 因此 $\operatorname{Ker} g$ 为 M 的直和项. 又因为 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, 故 $\operatorname{Im} f$ 也为 M 的直和项.

$$(4) \Rightarrow (5)$$

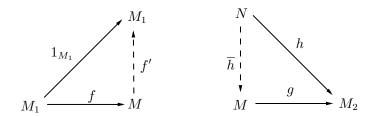


因为 Im f 为 M 的直和项, 故存在 M 的子模 M', 使得 $M = \text{Im } f \oplus M'$. 任取 $m \in M$, 则存在唯一的 $m_0 \in \text{Im } f$ 与 $m' \in M'$, 使得 $m = m_0 + m'$. 因为 f 单, 故存在唯一的 $m_1 \in M_1$, 使得 $f(m_1) = m_0$. 令

$$\overline{h}: M \longrightarrow N$$

$$m = f(m_1) + m' \longmapsto h(m_1)$$

易知 \overline{h} 为 R 模同态, 且 $(\overline{h}f)(m_1) = \overline{h}(f(m_1)) = h(m_1)$, 故 $\overline{h}f = h$, 即 h 通过 f 分解. (5) \Rightarrow (6)



由 (5) 知存在 $f': M \longrightarrow M_1$, 使得 $f'f = 1_{M_1}$, 从而由前述引理知 $M = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f'$, 也即 $M = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker} f'$. 下面考察同态 g 在 $\operatorname{Ker} f'$ 上的限制 $g|_{\operatorname{Ker} f'}: \operatorname{Ker} f' \longrightarrow M_2$.

显然 $\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Ker} f'}) \subseteq \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f'$. 由于 $M = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker} f'$, 故 $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f' = 0$, 从而 $\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Ker} f'}) = 0$, $g|_{\operatorname{Ker} f'}$ 单.

任取 $m_2 \in M_2$, 因为 g 满, 故存在 $m \in M$, 使得 $g(m) = m_2$. 又因为 $M = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker} f'$, 故存在唯一的 $m_0 \in \operatorname{Ker} g$ 与 $m' \in \operatorname{Ker} f'$, 使得 $m = m_0 + m'$, 从而

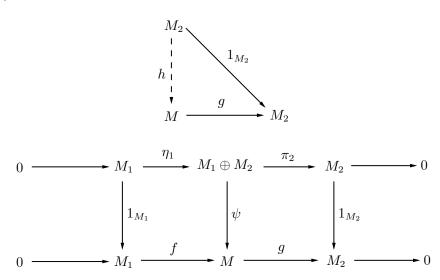
$$m_2 = g(m) = g(m_0 + m') = g(m_0) + g(m') = g(m'),$$

注意到 $m' \in \text{Ker } f'$, 故 $g|_{\text{Ker } f'}$ 满. 综上, $g|_{\text{Ker } f'}$ 为双射. 令

$$\overline{h}: N \longrightarrow M$$

$$n \longmapsto (g|_{\operatorname{Ker} f'})^{-1} h(n)$$

易知 \overline{h} 为 R 模同态, 且 $g\overline{h}(n) = g(g|_{\text{Ker }f'})^{-1}h(n) = h(n)$, 因此 $g\overline{h} = h$, 即 h 通过 g 分解. (6) \Rightarrow (7)



由 (6) 知存在 R 模同态 $h: M_2 \longrightarrow M$, 使得 $gh = 1_{M_2}$. 令

$$\psi: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1) + h(x_2)$$

则对任意的 $x_1 \in M_1$, 有

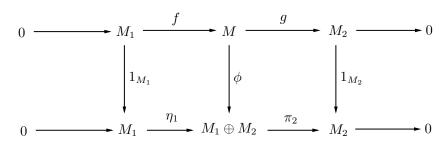
$$\psi \eta_1(x_1) = \psi(x_1, 0) = f(x_1) = f1_{M_1}(x_1),$$

因此 $\psi \eta_1 = f1_{M_1}$. 又因为对任意的 $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$, 有

$$g\psi(x_1, x_2) = g(f(x_1) + h(x_2)) = gh(x_2) = 1_{M_2}(x_2) = 1_{M_2}\pi_2(x_1, x_2),$$

故 $g\psi=1_{M_2}\pi_2$. 综上所述, 上图为交换图. 由于 $1_{M_1},1_{M_2}$ 为同构, 因此由短五引理可知 ψ 为同构, 故两短正合列同构.

$$(7) \Rightarrow (1)$$



因为

$$\pi_1 \phi f = \pi_1 \eta_1 1_{M_1} = 1_{M_1},$$

故 f 分裂单. 又因为

$$g\phi^{-1}\eta_2 = 1_{M_2}g\phi^{-1}\eta_2 = \pi_2\phi\phi^{-1}\eta_2 = \pi_2\eta_2 = 1_{M_2}$$

故 g 分裂满. 因此短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \stackrel{f}{\longrightarrow} M \stackrel{g}{\longrightarrow} M_2 \longrightarrow 0$ 分裂.

3.2 模族的直积与直和

定义: 设 $\{M_i \mid i \in I\}$ 是一族 R 模, 记 $\prod_{i \in I} M_i = \{\{m_i\}_{i \in I} \mid m_i \in M_i\}$. 定义 $\prod_{i \in I} M_i$ 的加法与模的乘法分别为

$$\{m_i\} + \{m'_i\} = \{m_i + m'_i\}, \quad a\{m_i\} = \{am_i\},$$

则 $\prod_{i \in I} M_i$ 关于这样定义的运算作成一个 R 模, 称为模族 $\{M_i\}_{i \in I}$ 的**直积**.

定义: 对任意的 $j \in I$, 称映射

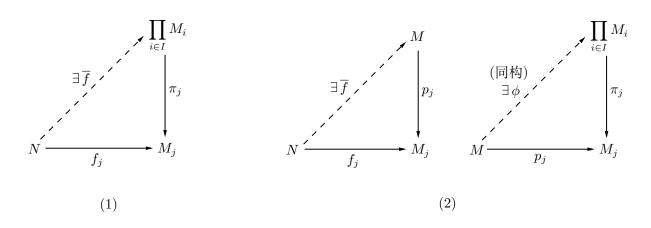
$$\pi_j: \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

$$\{m_i\}_{i\in I} \longmapsto m_j$$

为直积 $\prod_{i \in I} M_i$ 的**典范射影**.

定理 (直积的泛性质) : (1) 对任意的 R 模 N 与一族 R 模同态 $\{f_i:N\longrightarrow M_i\}_{i\in I}$,存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}:N\longrightarrow \prod_{i\in I}M_i$,使得

$$f_j = \pi_j \overline{f}, \quad \forall j \in I.$$

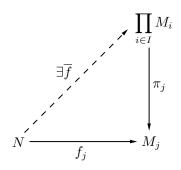


(2) 设 R 模 M 带有一族 R 模同态 $\{p_i: M \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$, 且满足: 对任意的 R 模 N 与一族 R 模同态 $\{f_i: N \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}: N \longrightarrow M$, 使得

$$f_j = p_j \overline{f}, \quad \forall j \in I,$$

则存在 R 模同构 $\phi: M \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$, 且 $p_j = \pi_j \phi$, $\forall j \in I$.

证明 (1)



作映射

$$\overline{f}: N \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$$

$$n \longmapsto \{f_i(n)\}_{i \in I}$$

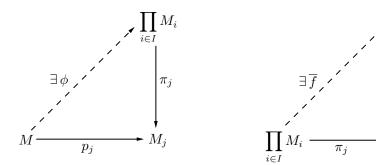
则对任意的 $n \in N$, 有

$$\pi_j \overline{f}(n) = \pi_j(\{f_i(n)\}_{i \in I}) = f_j(n), \quad j \in I,$$

故 $\pi_j \overline{f} = f_j, j \in I$. 易证 \overline{f} 为 R 模同态, 下证 \overline{f} 的唯一性. 设另有 R 模同态 $g: N \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$, 使 得 $\pi_j g = f_j$. 设 $g(n) = \{x_i\}_{i \in I}$, 则

$$x_j=\pi_j(\{x_i\}_{i\in I})=\pi_jg(n)=\pi_j\overline{f}(n)=f_j(n),\quad j\in I,$$

从而 $g(n) = \{x_i\}_{i \in I} = \{f_i(n)\}_{i \in I} = \overline{f}(n)$, 故 $g = \overline{f}$, 唯一性得证. (2)

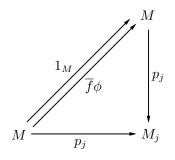


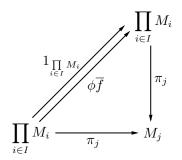
由 (1) 知存在 R 模同态 $\phi: M \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$, 使得 $p_j = \pi_j \phi$, $\forall j \in I$. 下证 ϕ 为同构. 取 N 为 $\prod_{i \in I} M_i$, 再取 f_j 为 π_j , 由条件知存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}: \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M$, 使得 $\pi_j = p_j \overline{f}$, $\forall j \in I$, 因此 $i \in I$

$$\begin{cases} p_j = p_j \overline{f} \phi, \\ \pi_j = \pi_j \phi \overline{f}. \end{cases}$$

取 N 为 M, 再取 f_j 为 p_j , 则由条件中的唯一性知 $\overline{f}\phi=1_M$, 从而 ϕ 单.

取
$$M$$
 为 $\prod_{i \in I} M_i$, 则由 (1) 中的唯一性知 $\phi \overline{f} = 1_{\prod_{i \in I} M_i}$, 故 ϕ 满. 综上, ϕ 为同构.





上述定理中的 (1) 说明模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的直积具有泛性质, (2) 说明若模 M 具有直积的泛性质, 则 M 本质上就是直积.

定理: 设有 R 模 N 与 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$, 则有 R 模同构

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_{R}(N, M_{i}) \cong \operatorname{Hom}_{R}\left(N, \prod_{i \in I} M_{i}\right).$$

证明 由前述定理可知对任意一族 R 模同态 $\{f_i: N \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$,存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}: N \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$ 满足 $f_j = \pi_j \overline{f}, \forall j \in I$,从而我们可以定义映射

$$\sigma: \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_{R}(N, M_{i}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{R}\left(N, \prod_{i \in I} M_{i}\right)$$

$$\{f_{i}\}_{i \in I} \longmapsto \overline{f}, \quad \sharp + f_{j} = \pi_{j}\overline{f}, \ j \in I.$$

显然 σ 是 R 模同态, 下面我们证明 σ 为双射.

任取 $\{f_i\}_{i\in I}\in \operatorname{Ker}\sigma$, 则 $\sigma(\{f_i\}_{i\in I})=0$, $f_j=\pi_j0=0, j\in I$. 因此 $\{f_i\}_{i\in I}=\{0\}_{i\in I}$, 故 σ 为单同态. 任取 $\overline{f}\in \operatorname{Hom}_R\left(N,\prod_{i\in I}M_i\right)$, 令 $f_j=\pi_j\overline{f}$, 则 $\sigma(\{f_i\}_{i\in I})=\overline{f}$, 因此 σ 为满同态. 综上, σ 为

$$R$$
 模同构, $\prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_R(N, M_i) \cong \operatorname{Hom}_R\left(N, \prod_{i \in I} M_i\right)$.

定义: 设 $\prod_{i \in I} M_i$ 是 R 模族 $\{M_i\}_{i \in I}$ 的直积, 称 $\prod_{i \in I} M_i$ 的子集

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \left\{ \{m_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \middle| \text{ 只有有限个 } m_i \text{ 不为 } 0 \right\}$$

为 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的**直和**, 它是 $\prod_{i\in I} M_i$ 的子模.

由定义不难看出,<mark>当指标集 I 有限时,直积与直和是相同的</mark>,而当 I 是无限集时,直积与直和是不同的.

定义: 对任意的 $j \in I$, 称映射

$$\eta_j:M_j\longrightarrow \bigoplus_{i\in I}M_i$$

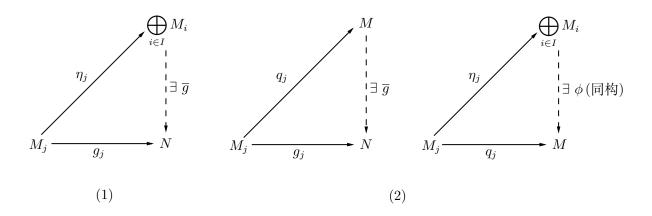
$$m_j\longmapsto \{m_i\}_{i\in I},\quad \mbox{\'=}i\neq j\ \mbox{\text{bl}},m_i=0$$

为 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 的**典范内射**.

特别地, 当指标集 I 有限或可数时, 对任意的 $m_j \in M_j$, 有 $\eta_j(m_j) = \{\cdots, 0, m_j, 0, \cdots\}$.

<mark>定理 (直和的泛性质)</mark>: (1) 对任意的 R 模 N 与一族 R 模同态 $\{g_i: M_i \longrightarrow N\}_{i \in I}$, 存在唯一 的 R 模同态 $\bar{g}: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow N$, 使得

$$g_j = \overline{g}\eta_j, \quad \forall j \in I.$$

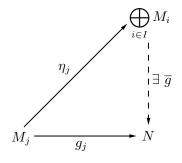


(2) 设 R 模 M 带有一族 R 模同态 $\{q_i:M_i\longrightarrow M\}_{i\in I}$, 且满足: 对任意的 R 模 N 和一族 R模同态 $\{g_i:M_i\longrightarrow N\}_{i\in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}:M\longrightarrow N$, 使得

$$g_j = \overline{g}q_j, \quad \forall j \in I,$$

则存在 R 模同构 $\phi: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M$, 且 $q_j = \phi \eta_j, \forall j \in I$.

证明 (1)



作映射

$$\overline{g}: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$

$$\{m_i\}_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} g_i(m_i)$$

因为 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 中的元素至多有限项不为 0, 故 $\sum_{i \in I} g_i(m_i)$ 实际上是有限和 . 易知 \overline{g} 为 R 模同态. 由

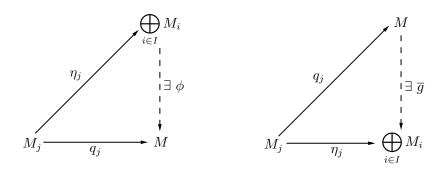
于对任意的 $j \in I, m_j \in M_j$, 有 $\bar{g}\eta_j(m_j) = g_j(m_j)$, 故 $g_j = \bar{g}\eta_j$.

若另有
$$h: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$
, 使得 $g_j = h\eta_j$, 则

$$h(\{m_i\}_{i \in I}) = h\left(\sum_{i \in I} \eta_i(m_i)\right) = \sum_{i \in I} h\eta_i(m_i) = \sum_{i \in I} g_i(m_i) = \overline{g}(\{m_i\}_{i \in I}).$$

因此 $h = \overline{g}$, 唯一性得证.

(2)

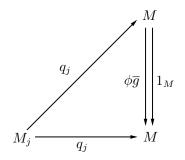


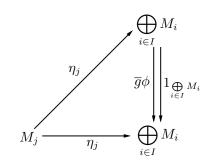
由 (1) 知存在 R 模同态 $\phi: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M$,使得 $q_j = \phi \eta_j, \forall j \in I$. 下证 ϕ 为同构. 取 N 为 $\bigoplus_{i \in I} M_i$,再取 g_j 为 η_j ,则由条件知存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$,使得 $\eta_j = \overline{g}q_j, \forall j \in \overset{i \in I}{I}$. 从而

$$\begin{cases} q_j = \phi \overline{g} q_j, \\ \eta_j = \overline{g} \phi \eta_j. \end{cases}$$

取 N 为 M, 取 g_j 为 q_j , 则由条件中的唯一性知 $\phi \overline{g} = 1_M$, 从而 ϕ 为满同态.

取 M 为 $\bigoplus_{i \in I} M_i$, 取 q_j 为 η_j , 则由 (1) 中的唯一性知 $\bar{g}\phi = 1_{\bigoplus_{i \in I} M_i}$, 从而 ϕ 为单同态. 综上, ϕ 为同构.





上述定理中的 (1) 说明模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的直和具有泛性质, (2) 说明若模 M 具有直和的泛性质, 则 M 本质上就是直和.

定理: 对于 R 模 N 与 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$, 有 R 模同构

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_{R}(M_{i}, N) \cong \operatorname{Hom}_{R} \left(\bigoplus_{i \in I} M_{i}, N \right).$$

证明 由前述定理可知对任意的一族 R 模同态 $\{g_i:M_i\longrightarrow N\}_{i\in I}$,存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}:\bigoplus_{i\in I}M_i\longrightarrow N$,使得 $g_j=\overline{g}\eta_j, \forall\, j\in I$.作映射

不难验证 σ 是模同构.

<mark>命题</mark>:设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是 R模 M的一族子模,且满足

$$(1)\ M = \sum_{i \in I} M_i;$$

(2)
$$M_j \cap \sum_{i \neq j} M_i = 0, \ \forall j \in I.$$

则存在同构 $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$.

证明 作映射

$$\varphi: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M$$
$$\{m_i\}_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} m_i$$

因为 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 中的元素至多有限项不为 0, 故 $\sum_{i \in I} m_i$ 是一个有限和. 易证 φ 是 R 模同态.

因为
$$M = \sum_{i \in I} M_i$$
, 故 φ 是满同态. 又设 $0 = \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} m_i'$, 则

$$m_j - m'_j = \sum_{i \neq j} (m'_i - m_i) \in M_j \cap \left(\sum_{i \neq j} M_i\right) = 0, \quad j \in I.$$

故 $m_j=m_j',\ j\in I$, 从而 0 的分解唯一. 又因为 $\varphi(\{0\}_{i\in I})=0$, 故 $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}_{i\in I}$, 因此 φ 单. 综上, φ 为同构, $M\cong\bigoplus M_i$.

上述命题中的 (1) 说明 M 可被子模 $M_i, i \in I$ 分解, (2) 说明每个元素的分解是唯一的. 我们称上述命题中的 M 是它的子模的**内直和**,且仍记为 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$,它是两个子模的内直和 $M = M_1 \oplus M_2$ 的推广.

4 自由模

4.1 基本概念与性质

定义: 设 M 为 R 模, x_1, \dots, x_n 为 M 中互异的 n 个元素, $a_1, \dots, a_n \in R$. 若

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

则称 x_1, \dots, x_n 是 R-线性无关的.

定义: 设 X 是 R 模 M 的非空子集. 如果 X 中任意有限个不同的元素都是 R-线性无关的,则称 X 是 R-线性无关的.

定义: 若 $X \in \mathbb{R}$ 模 M 的生成元集 (即 M = RX), 且 X 线性无关, 则称 $X \in \mathbb{R}$ 的一个基.

定义: 若 R 模 M 有一个基, 则称 M 是一个自由模.

例 设 F 为一个域, 则 F 模就是线性空间, 而线性空间必有基存在, 因此 F 模都是自由模.

例 含幺环 R 作为正则模是自由 R 模, 它的基就是 $\{1_R\}$.

定理: R 模 V 是自由模当且仅当 V 是它的同构于 R 的循环 R 子模 V_i 的内直和: $V = \bigoplus_i V_i$.

证明 (\Longrightarrow) 设 X 是 V 的一个基. 对任意的 $x \in X$, Rx 是 V 的循环 R 子模. 由于

$$\sigma:R\longrightarrow Rx$$
$$r\longmapsto rx$$

是满同态, 且 $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Ann}_R(x)$, 从而由模同态基本定理知 $Rx \cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$. 设 rx = 0, 由 X 是 R-线性无关的可知 r = 0, 故 $\operatorname{Ann}_R(x) = 0$, 从而 $Rx \cong R$. 下证 $V = \bigoplus_{x \in X} Rx$.

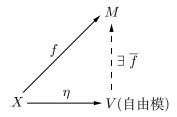
显然
$$V = RX = \sum_{x \in X} Rx$$
. 设 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$. 又因为 X 是 R -线性无关的, 故 $r_1 = \cdots = r_n = 0$,

故 V 中 0 的分解是唯一的. 因此 $V = \bigoplus Rx$.

(⇐=) 设 V 的同构于 R 的循环子模为 Rx_i , 即 $R \cong V_i = Rx_i$, $i \in I$. 由 $Rx_i \cong R/\operatorname{Ann}_R(x_i)$ 及 $Rx_i \cong R$ 可知 $R/\operatorname{Ann}_R(x_i) \cong R$, 故 $\operatorname{Ann}_R(x_i) = 0$, $i \in I$. 下面证明 $X = \{x_i\}_{i \in I}$ 就是 V 的基.

显然 $V = \sum_{i \in I} Rx_i = RX$. 设 $\sum_{i \in I} r_i x_i = 0$,由于 $V = \bigoplus_{i \in I} Rx_i$ 是内直和,因此 V中 0 的分解 $0 = \sum_{i \in I} r_i x_i$ 是唯一的,故 $r_i x_i = 0$.又因为 $\operatorname{Ann}_R(x_i) = 0$,故 $r_i = 0$, $i \in I$,从而 $X = \{x_i\}_{i \in I}$ 是线性无关的. 综上, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ 是 V的一个基, V是自由模.

定理 (自由模的泛性质/线性扩张): 设 V 是自由 R 模, 则存在集合 X 与映射 $\eta: X \longrightarrow V$, 对任意的 R 模 M 与映射 $f: X \longrightarrow M$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}: V \longrightarrow M$, 使得 $f = \overline{f}\eta$.



证明 取 X 为 V 的基, 映射 η 取为嵌入映射

$$\eta: X \longrightarrow V$$

$$x \longmapsto x$$

定义映射

$$\overline{f}: V \longrightarrow M$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)$$

易知 \overline{f} 为 R 模同态. 任取 $x \in X$, 则 $\overline{f}\eta(x) = \overline{f}(x) = f(x)$, 从而 $f = \overline{f}\eta$. 下证唯一性. 若另有 R 模同态 $g: V \longrightarrow M$, 使得 $f = g\eta$, 则对任意的 $y = \sum_{i=1}^n r_i x_i \in V$, 有

$$g(y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i g\eta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) = \overline{f}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \overline{f}(y).$$

从而
$$g = \overline{f}$$
.

实际上定理中的集合 X 不一定是 V 的基, 映射 $\eta: X \longrightarrow V$ 不一定是嵌入映射, 但必有 $\eta(X)$ 是 V 的基.

定理 (重要): 任何 R 模 M 都是自由模的商模. 若 M 是有限生成的,则 M 可以是有限生成自由模的商模.

证明 设 X 是 M 的一个生成元集 (当 M 有限生成时, X 可以取为有限集). 作自由模 $V = \bigoplus_{x \in X} R_x$, 其中 R_x 是同构于 R 的循环模, \tilde{x} 为其生成元, 即 $R_x = R\tilde{x}$. 定义映射

$$\eta: X \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto \tilde{x}$$

易知 $\eta(X)$ 是 V 的基. 令

$$f: X \longrightarrow M$$
$$x \longmapsto x$$

为嵌入映射, 则由前述定理知存在 R 模同态 $\overline{f}:V\longrightarrow M$, 使得 $f=\overline{f}\eta$, 从而

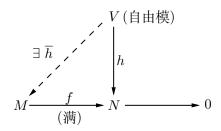
$$X = f(X) \subseteq \overline{f}(V),$$

故 $M \subseteq \overline{f}(V) = \operatorname{Im} \overline{f}$. 又 $\operatorname{Im} \overline{f} \subseteq M$, 故 $\operatorname{Im} \overline{f} = M$, \overline{f} 为满射. 由模同态基本定理知

$$V/\operatorname{Ker} \overline{f} \cong M$$
,

即 M 同构于自由模的商模.

命题: 设 R 模满同态 $f: M \longrightarrow N$, R 模同态 $h: V \longrightarrow N$, 其中 V 是自由模, 则存在 R 模同 态 $\overline{h}: V \longrightarrow M$, 使得 $h = f\overline{h}$.

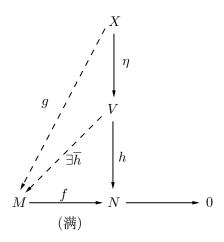


证明 设X是自由模V的基,

$$\eta: X \longrightarrow V$$

$$x \longmapsto x$$

为嵌入映射. 因为 f 满, 故对任意的 $x \in X$, $h(x) \in N$, 存在 $m_x \in M$, 使得 $f(m_x) = h(x)$ (可能有



多个原像, 但只取一个), 从而可定义映射

$$g: X \longrightarrow M$$

$$x \longmapsto m_x, \sharp \Phi f(m_x) = h(x)$$

易知 $g(x) = m_x$, 从而对任意的 $x \in X$, 有

$$f(g(x)) = f(m_x) = h(x) = h(\eta(x)),$$

因此 $fg=h\eta$. 由自由模的线性扩张知存在 R 模同态 $\overline{h}:V\longrightarrow M$, 使得 $g=\overline{h}\eta$, 从而 $fg=f\overline{h}\eta=h\eta$. 由线性扩张的唯一性知 $h=f\overline{h}$.



注意上述命题中的同态 \overline{h} 不一定唯一.

4.2 有限生成自由模

我们知道, 线性空间的维数是不变的, 即它的任意一个基都含有相同个数的向量. 但是, 对一般的环 R 而言, R 自由模 M 的基不一定含有相同个数的元素 . 不过, 因为我们 考虑的都是交换环, 此时对有限生成自由模则有如下结论.

 \mathbf{cu} : 设 V 是有限生成自由 R 模, 则 V 中所有的基都含有相同个数的元素.

证明 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ 为 V 的一个生成元集, X 为 V 的一个基, 下面证明 X 必为有限集. 因为 X 为基, 故 e_1, e_2, \dots, e_s 可被 X 中有限个元素线性表出, 即存在互异的 $u_1, u_2, \dots u_t \in X$,

使得

$$\begin{cases}
e_1 = r_{11}u_1 + r_{12}u_2 + \dots + r_{1t}u_t \\
e_2 = r_{21}u_1 + r_{22}u_2 + \dots + r_{2t}u_t \\
\dots \\
e_s = r_{s1}u_1 + r_{s2}u_2 + \dots + r_{st}u_t
\end{cases}$$

其中 $r_{ij} \in R$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, t$. 注意到 V 中任意元素均可由 e_1, e_2, \dots, e_s 线性表出, 故 V 中任意元素均可由 $u_1, u_2, \dots u_t$ 线性表出, 从而由 X 线性无关知 $X = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$, 即 X 是有限集.

又令 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_m 均为 V 的基, 则可设

$$(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n)A, \quad \sharp + A = (a_{ij})_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

 $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)B, \quad \sharp + B = (b_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n},$

从而

$$(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)AB.$$

又因为

$$(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)E_n,$$

故 $(x_1, \dots, x_n)(AB - E_n) = (0, \dots, 0)$. 由 x_1, \dots, x_n 线性无关知 $AB = E_n$. 若 $m \neq n$, 不妨设 m < n. 分别将矩阵 A, B 添 0 补成方阵 $\overline{A}, \overline{B}$, 即

$$\overline{A} = (A, O) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

从而

$$\overline{A}\overline{B} = (A, O) \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} = AB = E_n.$$

因为 R 为交换环, 故行列式理论仍然有效, 从而等式两边取行列式得

$$\det \overline{A} \cdot \det \overline{B} = \det E_n = 1_R.$$

但由 m < n 知 $\det \overline{A} = 0_R$, 矛盾, 故 m = n.

定义: 设 V 是有限生成的自由 R 模, 我们把 V 的基所含元素的个数称为 V 的秩, 记为 $\operatorname{rk}_R V$.

由于 R 模 V 是自由模当且仅当 V 是它的同构于 R 的循环子模的内直和, 故 n 秩自由 R 模必同构于 $R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ (简记为 $R^{(n)}$). 换言之,在同构的意义下, 秩为 n 的自由 R 模只有 $R^{(n)}$.

在线性空间中, 当基取定后, 线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系. 类似地, 自由 R 模同态与环 R 上的矩阵之间也可以建立一一对应的关系, 即

$$\operatorname{Hom}_{R}(R^{(n)}, R^{(m)}) \cong R^{m \times n}$$
 (加群同构).

当 m=n 时,有

$$\operatorname{Hom}_R(R^{(n)}, R^{(n)}) \cong R^{n \times n}$$
 (环同构).

定理 (非常重要): 设 R 为主理想整环, V 为 n 秩自由 R 模, 则 V 的任一子模都是自由模, 且 $\operatorname{rk}_R N \leqslant n$.

证明 我们把零模视为 0 秩自由模. 下面对 n 用数学归纳法.

- (1) 当 n=1 时, $V\cong R$, 不妨设 V=R, 则子模 N 就是 R 的理想. 因 R 为主理想整环, 故可设 $N=(a)=\{ra\,|\,r\in R\}.$
 - (i) a = 0. 此时 N = 0 为 0 秩自由模.
- (ii) $a \neq 0$. 设 ra = 0, 因 R 是整环, 故 r = 0, 即 a 是线性无关的. 又 a 生成了 N, 故 a 是 N 的一个基, N 为 1 秩自由模.

由上可知, n=1 时结论成立.

(2) 假设命题对 n-1 秩自由模成立 $(n \ge 2)$, 即 n-1 秩自由 R 模 V 的任一子模 N 都是自由 模,且 $\mathrm{rk}_R N \le n-1$. 下证命题对 n 秩自由模也成立.

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的基, N 是 V 的子模. 令

$$K = (e_2, \dots, e_n) = \{r_2 e_2 + \dots + r_n e_n \mid r_i \in R, i = 2, \dots, n\}$$

为 V 的 n-1 秩子模. 由于 N, K 均为 V 的子模, 故 (N+K)/K 是 V/K 的子模. 下证 V/K 是以 e_1+K 为基的 1 秩自由模. 任取 $v+K\in V/K$, 因为 e_1,e_2,\cdots,e_n 是 V 的基, 故存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$, 使得 $v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$. 从而 $v+K=a_1e_1+K=a_1(e_1+K)$, 故 V/K 中任意元素可被 e_1+K 线性表出. 又若 $a(e_1+K)=K$, 则 $ae_1+K=K$, $ae_1\in K$, 从而存在 $a_2,\cdots,a_n\in R$, 使得 $ae_1=a_2e_2+\cdots+a_ne_n$, 即 $ae_1-a_2e_2-\cdots-a_ne_n=0$. 由 e_1,e_2,\cdots,e_n 线性无关知 a=0, 从而 e_1+K 线性无关,是 V/K 的基.

由于 V/K 是以 $e_1 + K$ 为基的 1 秩自由模, 故由 (1) 可知 (N + K)/K 为 0 秩或 1 秩自由模.

- (i) 若 (N+K)/K 为 0 秩自由模, 则 $N\subseteq K$. 由 K 是 n-1 秩自由模及归纳假设可知 N 作 为 K 的子模也是自由模, 且 $\mathrm{rk}_R N\leqslant n-1< n$.
- (ii) 若 (N+K)/K 为 1 秩自由模, 则 $N \nsubseteq K$. 设 f_1+K 是 (N+K)/K 的基, 易知 $f_1 \in N$ 且 $f_1 \notin K$. 注意到 $N \cap K$ 为 K 的子模且 $\operatorname{rk}_R K = n-1$.

① $N \cap K = 0$. 下证 此时 f_1 就是 N 的基. 任取 $n \in N$, 则 $n + K \in (N + K)/K$, 因为 $f_1 + K$ 是 (N + K)/K 的基, 故可设 $n + K = a(f_1 + K) = af_1 + K$, 从而 $n - af_1 \in K$, 又因为 $n - af_1 \in N$, 故 $n - af_1 \in N \cap K = 0$, $n = af_1$, 即 N 中任意元素均可被 f_1 线性表出. 又若 $af_1 = 0$, 则 $af_1 + K = K$, 即 $a(f_1 + K) = K$. 因为 $f_1 + K$ 为 (N + K)/K 的基, 故 a = 0, 从而 f_1 线性无关. 因此 f_1 为 N 的基, N 为 1 秩自由模, $rk_RN = 1 < n$.

② $N \cap K \neq 0$. 此时可设 $N \cap K$ 是 m-1 秩自由模 $(1 < m \leq n)$. 令 f_2, \dots, f_m 为 $N \cap K$ 的基,下证 f_1, f_2, \dots, f_m 是 N 的基.

先证 f_1, f_2, \dots, f_m 线性无关. 设 $r_1 f_1 + r_2 f_2 + \dots + r_m f_m = 0$, 则由 $r_2 f_2 + \dots + r_m f_m \in N \cap K \subseteq K$ 知 $r_1 f_1 = -(r_2 f_2 + \dots + f_m f_m) \in K$, 故 $r_1 f_1 + K = K$, 即 $r_1 (f_1 + K) = K$, 又 $f_1 + K$ 是 (N + K)/K 的基, 故 $r_1 = 0$, 从而 $r_2 f_2 + \dots + r_m f_m = 0$. 因为 f_2, \dots, f_m 是 $N \cap K$ 的基, 因此 线性无关, 从而 $r_2 = \dots = r_m = 0$, f_1, f_2, \dots, f_m 线性无关.

再证 N 中任意元素可被 f_1, f_2, \dots, f_m 线性表出. 任取 $n \in N$, 由 $f_1 + K$ 是 (N+K)/K 的基可知存在 $r'_1 \in R$, 使得 $n + K = r'_1(f_1 + K) = r'_1f_1 + K$, 故 $n - r'_1f_1 \in K$. 又因为 $n - r'_1f_1 \in N$, 故 $n - r'_1f_1 \in N$ 反为 $n - r'_1f_1 \in N$ 的基,故存在 $r'_2, \dots, r'_m \in R$, 使得 $n - r'_1f_1 = r'_2f_2 + \dots + r'_mf_m$, 也即 $n = r'_1f_1 + r'_2f_2 + \dots + r'_mf_m$, 故 N 中任意元素均可被 f_1, f_2, \dots, f_m 线性表出, f_1, f_2, \dots, f_m 为 N 的基. 因此 N 是自由模,且 $\mathrm{rk}_R N = m \leqslant n$.

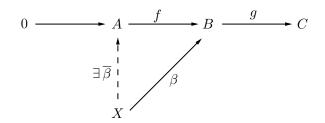
由上述 (i) (ii) 可知当命题对 n-1 秩自由模成立时, 该命题对 n 秩自由模也成立, 从而由数学 归纳法知该结论对任意正整数 n 均成立.

注: 实际上, 上述定理对无限秩自由模也成立, 但证明更加困难, 这里不再赘述.

5 Hom、投射模与内射模

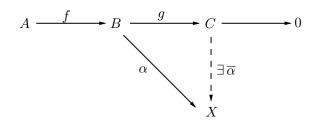
5.1 Hom

定理: 设 R 模同态序列 $0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C$ 正合, 则对任意的 R 模同态 $\beta: X \longrightarrow B$, 若 $g\beta=0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{\beta}: X \longrightarrow A$, 使得 $\beta=f\overline{\beta}$.



实际上, 由 f 是单同态知 $A \cong \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, 故上述定理本质上是核的泛性质.

定理: 设 R 模同态序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 则对任意的 R 模同态 $\alpha: B \longrightarrow X$, 若 $\alpha f = 0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{\alpha}: C \longrightarrow X$, 使得 $\alpha = \overline{\alpha}g$.



实际上, 因为 g 为满同态, 由模同态基本定理可知 $C \cong B/\mathrm{Ker}\,g = B/\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Coker}\,f$, 故上述 定理本质上是余核的泛性质.

设有 R 模同态 $f:A \longrightarrow B$ 与 R 模 M, 定义

$$\overline{f}: \operatorname{Hom}_R(M,A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,B)$$

$$\alpha \longmapsto f\alpha$$

易知 \overline{f} 也为 R 模同态. 我们也把 \overline{f} 记作 $\operatorname{Hom}_R(M,f)$. 又定义

$$\widetilde{f}: \operatorname{Hom}_R(B, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A, M)$$

$$\beta \longmapsto \beta f$$

易知 \widetilde{f} 也是 R 模同态. 我们也把 \widetilde{f} 记作 $\operatorname{Hom}_R(f, M)$.

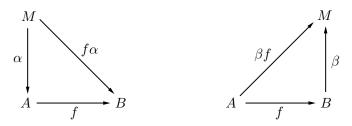


图 1: \overline{f} 与 \widetilde{f} 的构造示意图

定理 (非常重要): R 模同态序列 $0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C$ 正合当且仅当对任意的 R 模 M, 序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,A) \stackrel{\overline{f}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(M,B) \stackrel{\overline{g}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(M,C)$$

正合.

证明 (\Longrightarrow) (1) 证明 \overline{f} 单.

任取 $\alpha \in \text{Ker } \overline{f}$, 则 $\overline{f}(\alpha) = f\alpha = 0$. 因为 f 单, 故 $\alpha = 0$, $\text{Ker } \overline{f} = 0$, 因此 \overline{f} 单.

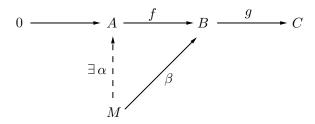
(2) 证明 $\operatorname{Im} \overline{f} \subseteq \operatorname{Ker} \overline{g}$.

任取 $\beta \in \text{Im } \overline{f}$, 则存在 $\alpha \in \text{Hom}_R(M, A)$, 使得 $\beta = \overline{f}(\alpha)$, 从而

$$\overline{g}(\beta) = \overline{g}(\overline{f}(\alpha)) = \overline{g}(f\alpha) = gf\alpha = 0\alpha = 0,$$

故 $\beta \in \operatorname{Ker} \overline{g}, \operatorname{Im} \overline{f} \subseteq \operatorname{Ker} \overline{g}.$

(3) 证明 $\operatorname{Ker} \overline{g} \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}$.



任取 $\beta \in \operatorname{Ker} \overline{g}$, 则 $\overline{g}(\beta) = g\beta = 0$. 由本节第一个定理可知存在 $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(M,A)$, 使得 $\beta = f\alpha = \overline{f}(\alpha)$, 故 $\beta \in \operatorname{Im} \overline{f}$, $\operatorname{Ker} \overline{g} \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}$.

 (\Longleftrightarrow) (1) 证明 f 单.

取 M = Ker f, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, A) \stackrel{\overline{f}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, B) \stackrel{\overline{g}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, C)$$

正合. 取 $\eta \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, A)$ 为嵌入同态, 则 $\overline{f}(\eta) = f\eta = 0$, 故 $\eta \in \operatorname{Ker} \overline{f} = 0$, 从而 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} \eta = 0$, f 为单同态.

(2) 证明 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

取 M = A, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A,A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(A,B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(A,C)$$

正合,从而

$$0 = \overline{g}\overline{f}(1_A) = gf1_A = gf,$$

故 gf = 0, 因此 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

(3) 证明 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

取 M = Ker g, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g,A) \stackrel{\overline{f}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g,B) \stackrel{\overline{g}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g,C)$$

正合. 取 $\eta \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, B)$ 为嵌入同态, 则 $\overline{g}(\eta) = g\eta = 0$, 从而 $\eta \in \operatorname{Ker} \overline{g} = \operatorname{Im} \overline{f}$, 故存在 $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, A)$, 使得 $\eta = \overline{f}(\alpha) = f\alpha$, 因此 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} \eta \subseteq \operatorname{Im} f$.

<mark>定理</mark> (非常重要): R 模同态序列 $A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$ 正合当且仅当对任意的 R 模 N, 序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{R}(C, N) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_{R}(B, N) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_{R}(A, N)$$

正合.

证明 (\Longrightarrow) (1) 证明 \tilde{g} 单.

任取 $\gamma \in \text{Ker } \widetilde{g}$, 则 $\widetilde{g}(\gamma) = \gamma g = 0$, 又因 g 满, 故 $\gamma = 0$, $\text{Ker } \widetilde{g} = 0$, \widetilde{g} 单.

(2) 证明 $\operatorname{Im} \widetilde{g} \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{f}$.

任取 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, N)$, 则

$$\widetilde{f}\widetilde{g}(\gamma) = \widetilde{f}(\gamma g) = \gamma g f = \gamma 0 = 0,$$

故 $\widetilde{f}\widetilde{g}=0,\,\mathrm{Im}\,\widetilde{g}\subseteq\mathrm{Ker}\,\widetilde{f}.$

(3) 证明 Ker $\widetilde{f} \subseteq \operatorname{Im} \widetilde{g}$.

任取 $\beta \in \operatorname{Ker} \widetilde{f}$, 则 $\widetilde{f}(\beta) = \beta f = 0$, 从而存在 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, N)$, 使得 $\beta = \gamma g = \widetilde{g}(\gamma) \in \operatorname{Im} \widetilde{g}$.

 $(\Leftarrow=)$ (1) 证明 g 满.

任取 $\gamma \in \text{Hom}_R(C, N)$ 且满足 $\gamma g = 0$, 则 $\widetilde{g}(\gamma) = 0$. 因 \widetilde{g} 单, 故 $\gamma = 0$, g 可被右消去, g 满.

(2) 证明 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

取 N = C, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,C) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B,C) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A,C)$$

正合, $\widetilde{f}\widetilde{g}=0$, 从而

$$0 = \widetilde{f}\widetilde{g}(1_C) = \widetilde{f}(1_C g) = 1_C g f = g f,$$

故 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

(3) 证明 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

取 N = Coker f, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, \operatorname{Coker} f) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B, \operatorname{Coker} f) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Coker} f)$$

正合. 取 $\nu \in \operatorname{Hom}_R(B, \operatorname{Coker} f)$ 为自然同态, 则 $\nu f = 0$, 从而存在 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, \operatorname{Coker} f)$, 使得 $\nu = \gamma g$. 因此 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} \nu = \operatorname{Im} f$.

由上述两个命题可以看到, 一个短正合列经过 Hom "作用"后, 只能得到一个左边正合的序列, 所以我们称 Hom 是"左正合"的. 但是在某些情况下, 经过 Hom 函子作用后的短正合列仍然变为短正合列, 例如下面的分裂短正合列.

定理 (重要): 下列各条等价:

- (1) 0 $\longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是分裂正合列.
- (2) 对任意的 R 模 M,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(M,B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(M,C) \longrightarrow 0$$

是分裂正合列.

(3) 对任意的 R 模 N,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,N) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B,N) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A,N) \longrightarrow 0$$

是分裂正合列.

证明 $(1) \Longrightarrow (2)$ 只需证 \overline{g} 分裂满.

因为 g 分裂满, 故存在 R 模同态 $g':C\longrightarrow B$, 使得 $gg'=1_C$, 从而对任意的 $\gamma\in \operatorname{Hom}_R(M,C)$, 有

$$\overline{g}\overline{g'}(\gamma) = \overline{g}(g'\gamma) = gg'\gamma = 1_C\gamma = \gamma.$$

因此 $\overline{g}\overline{g'} = 1_{\text{Hom}_{R}(M,C)}$, \overline{g} 分裂满.

 $(2) \Longrightarrow (1)$ 只需证 g 分裂满.

取 M = C, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(C,B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(C,C) \longrightarrow 0$$

分裂正合, \bar{g} 分裂满, 故存在 $g' \in \text{Hom}_R(C, B)$, 使得 $gg' = \bar{g}(g') = 1_C$, 从而 g 分裂满.

 $(1) \Longrightarrow (3)$ 只需证 \widetilde{f} 分裂满.

因 f 分裂单, 故存在 $f': B \longrightarrow A$, 使得 $f'f = 1_A$, 从而对任意的 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(A, N)$, 有

$$\widetilde{f}\widetilde{f}'(\gamma) = \widetilde{f}(\gamma f') = \gamma f' f = \gamma 1_A = \gamma,$$

故 $\widetilde{f}\widetilde{f}' = 1_{\operatorname{Hom}_R(A,N)}, \widetilde{f}$ 分裂满.

 $(3) \Longrightarrow (1)$ 只需证 f 分裂单.

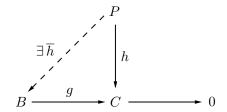
取 N = A, 则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,A) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B,A) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A,A) \longrightarrow 0$$

分裂正合, \widetilde{f} 分裂满,从而存在 $f' \in \operatorname{Hom}_R(B,A)$,使得 $f'f = \widetilde{f}(f') = 1_A$,故 f 分裂单.

5.2 投射模

定义: 设 P 为 R 模. 若对任意的 R 模满同态 $g: B \longrightarrow C$ 与 R 模同态 $h: P \longrightarrow C$, 存在 R 模同态 $\overline{h}: P \longrightarrow B$, 使得 $h = g\overline{h}$, 则称 P 为**投射模** (projective module).



由定义与 §4.1 最后一个命题可知 自由模一定是投射模, 但反之不然.

推论 (重要): 任何 R 模 M 都是投射模的商模. 若 M 是有限生成的,则 M 可以是有限生成投射模的商模.

定理 (究极重要): 设 P 为 R 模, 则下列各条等价:

- (1) P 为投射模.
- (2) 若 R 模同态 $g: B \longrightarrow C$ 满, 则 R 模同态 $\overline{g}: \operatorname{Hom}_R(P, B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P, C)$ 满.
- (3) 若 R 模同态列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P,A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(P,B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(P,C) \longrightarrow 0$$

正合.

- (4) 短正合列 $0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} P \longrightarrow 0$ 都是分裂的.
- (5) P 是自由模的直和项.

证明 $(1) \Longrightarrow (2)$ 由投射模的定义即得.

 $(2) \Longrightarrow (3)$ 只需证 \overline{g} 满.

因为 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 故 g 满, 从而由 (2) 知 \overline{g} 满.

 $(3) \Longrightarrow (4)$ 取 C = P,则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P,A) \stackrel{\overline{f}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(P,B) \stackrel{\overline{g}}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(P,P) \longrightarrow 0$$

正合, \overline{g} 满. 因此, 对 $1_P \in \operatorname{Hom}_R(P, P)$, 存在 $g' \in \operatorname{Hom}_R(P, B)$, 使得 $\overline{g}(g') = gg' = 1_P$, 从而 g 分裂 满, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ 分裂.

 $(4) \Longrightarrow (5)$ 因为任意 R 模都是自由模的商模,因此存在自由模 V 及其子模 K,使得 $P \cong V/K$,从而存在满同态 $g: V \longrightarrow P$. 取 $\eta: \operatorname{Ker} g \longrightarrow V$ 为嵌入同态,则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \stackrel{\eta}{\longrightarrow} V \stackrel{g}{\longrightarrow} P \longrightarrow 0$$

为短正合列. 由 (4) 知该正合列分裂, 又由分裂短正合列的等价条件 (7) 知 $V \cong P \oplus \operatorname{Ker} g$.

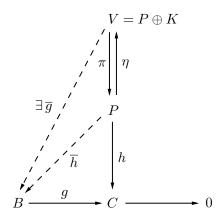
 $(5) \Longrightarrow (1)$ 任取 R 模满同态 $g: B \longrightarrow C$ 与 R 模同态 $h: P \longrightarrow C$, 下证存在 R 模同态 $\overline{h}: P \longrightarrow B$, 使得 $h = g\overline{h}$.

设 $P = V \oplus K$, 其中 V 为自由模. 取 $\pi : V = P \oplus K \longrightarrow P$ 为典范射影, $\eta : P \longrightarrow V = P \oplus K$

为典范内射. 因为 V 是自由模, 因此存在 R 模同态 $\overline{g}:V\longrightarrow B$, 使得 $h\pi=g\overline{g}$. 令 $\overline{h}=\overline{g}\eta$, 则

$$g\overline{h} = g\overline{g}\eta = h\pi\eta = h1_P = h,$$

从而 P 为投射模.



例 $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ 是自由 \mathbb{Z}_6 模, $\{\overline{1}\}$ 是它的基. 取它的子模 $K = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, N = \{\overline{0}, \overline{3}\}.$ 因为

$$K + N = {\overline{0}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{7}} = {\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}} = \mathbb{Z}_6,$$

故 $\mathbb{Z}_6 = K + N$. 又因为 $K \cap N = {\overline{0}}$, 故 $\mathbb{Z}_6 = K \oplus N$, 因此 $K \in N$ 是自由模 \mathbb{Z}_6 的直和项, $K \in N$ 是投射模. 但由于 $K \in N$ 没有基, 故它们都不是自由模.

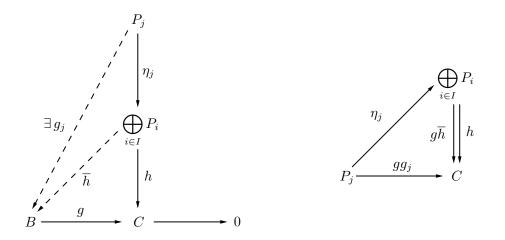
定理 (非常重要): 设 $\{P_i\}_{i\in I}$ 为一族 R 模, 则直和 $\bigoplus_{i\in I} P_i$ 为投射 R 模当且仅当每个 P_i 都为投射 R 模.

证明 (\Longrightarrow) 因 $\bigoplus_{i\in I} P_i$ 为投射模, 故存在自由模 V 及其子模 K, 使得 $V=K\oplus\left(\bigoplus_{i\in I} P_i\right)$, 从 而 P_i 为 V 的直和项, 因此 P_i 为投射模.

(秦) 设 R 模满同态 $g:B\longrightarrow C$ 与 R 模同态 $h:\bigoplus_{i\in I}P_i\longrightarrow C$. 取 $\eta_j:P_j\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}P_i$ 为典范内射. 由投射模定义知存在 R 模同态 $g_j:P_j\longrightarrow B$, 使得 $h\eta_j=gg_j$. 由 $\bigoplus_{i\in I}P_i$ 的泛性质知存在 R 模同态 $\overline{h}:\bigoplus_{i\in I}P_i\longrightarrow B$, 使得 $g_j=\overline{h}\eta_j$, 从而

$$h\eta_j = gg_j = g\overline{h}\eta_j.$$

由直和泛性质的唯一性知 $g\overline{h}=h$, 故 $\bigoplus_{i\in I}P_i$ 为投射模.



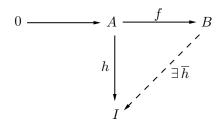
定理 (重要): 主理想整环上的投射模必为自由模.

证明 主理想整环上的投射模是主理想整环上自由模的直和项, 因而是主理想整环上自由模的子模. 由 §4.2 最后一个定理及其注记可知主理想整环上自由模的子模仍为自由模, 故主理想整环上的投射模是自由模. □

推论: 主理想整环上投射模的子模仍为投射模.

5.3 内射模

定义: 设 I 为 R 模, 若对任意的 R 模单同态 $f:A\longrightarrow B$ 以及 R 模同态 $h:A\longrightarrow I$, 存在 R 模同态 $\overline{h}:B\longrightarrow I$, 使得 $h=\overline{h}f$, 则称 I 为**内射模** (injective module).



定理 (究极重要): 设 I 为 R 模, 则下列各条等价:

- (1) I 为内射模.
- (2) 若 R 模同态 $f: A \longrightarrow B$ 单, 则 R 模同态 $\widetilde{f}: \operatorname{Hom}_R(B,I) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A,I)$ 满.
- (3) 若 R 模同态列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C,I) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B,I) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A,I) \longrightarrow 0$$

正合.

(4) 短正合列 $0 \longrightarrow I \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$ 都是分裂的.

证明 我们先证明 (1)(2)(3) 等价, (1) 与 (4) 的等价我们后面再证明.

 $(1) \Longrightarrow (2)$ 由内射模的定义即得.

 $(2) \Longrightarrow (3)$ 只需证 \widetilde{f} 满.

因为 $0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$ 正合, 故 f 单, 从而由 (2) 知 \widetilde{f} 满.

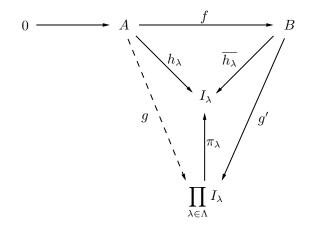
为了证明(1)与(4)等价,我们需要先证明以下结论.

定理 (非常重要): 设 $\{I_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为一族 R 模, 则直积 $\prod_{\lambda\in\Lambda}I_{\lambda}$ 是内射模当且仅当每个 I_{λ} 都是内射模.

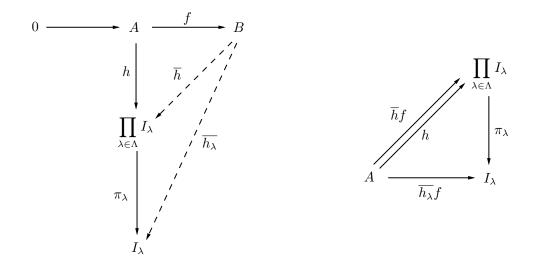
证明 (⇒) 设有 R 模单同态 $f:A \to B$ 与 R 模同态 $h_{\lambda}:A \to I_{\lambda}$. 由直积的泛性 质知存在 R 模同态 $g:A \to \prod_{\lambda \in \Lambda} I_{\lambda}$, 使得 $h_{\lambda} = \pi_{\lambda}g$. 由于 $\prod_{\lambda \in \Lambda} I_{\lambda}$ 是内射模, 故存在 R 模同态 $g':B \to \prod_{\lambda \in \Lambda} I_{\lambda}$, 使得 g=g'f, 从而

$$h_{\lambda} = \pi_{\lambda} g = \pi_{\lambda} g' f.$$

令 $\overline{h_{\lambda}} = \pi_{\lambda} g'$, 则 $h_{\lambda} = \overline{h_{\lambda}} f$, 故 I_{λ} 为内射模.



(﴿ 因为 I_{λ} 为内射模,故对任意的 R 模单同态 $f:A\longrightarrow B$ 与 R 模同态 $h:A\longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}I_{\lambda}$,存在 R 模同态 $\overline{h_{\lambda}}:B\longrightarrow I_{\lambda}$,使得 $\pi_{\lambda}h=\overline{h_{\lambda}}f$.由 $\prod_{\lambda\in\Lambda}I_{\lambda}$ 的泛性质知存在 R 模同态 $\overline{h}:B\longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda}I_{\lambda}$,使得 $\overline{h_{\lambda}}=\pi_{\lambda}\overline{h}$,从而 $\pi_{\lambda}h=\pi_{\lambda}\overline{h}f$.由泛性质的唯一性知 $h=\overline{h}f$,故 $\prod_{\lambda\in\Lambda}I_{\lambda}$ 为内射模.



定理: 任何一个 <math>R 模 M 都可以嵌入到内射模中 (即任何一个 R 模都是内射模的子模).

现在, 我们可以来证明前面待证的(1)与(4)的等价性了.

命题: 设 I 为 R 模, 则 I 为内射模当且仅当短正合列 $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 都是分裂的. **证明** (\Longrightarrow) 因为 I 是内射模, 故存在 $f': B \longrightarrow I$, 使得 $f'f = 1_I$, 因此 f 分裂单, 短正合列 $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 分裂.

(\iff) 因为任意 R 模都可以嵌入内射模, 故存在内射模 F 与嵌入同态 $f:I\longrightarrow F$, 使得

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\nu} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

正合. 由条件知该短正合列分裂, 从而 $F\cong I\oplus \mathrm{Coker}\, f$. 注意到该直和也是直积, 因此由 F 为内射 模知 I 也是内射模.

6 附录

6.1 映射

引理: 设映射 $g: A \longrightarrow B, f: B \longrightarrow C$, 则

- (1) 若 fg 单, 则 g 单;
- (2) 若 fg 满,则 f 满.

证明 (1) 任取 $x, y \in A, x \neq y$, 则由 fg 为单射知

$$f(g(x)) \neq f(g(y)),$$

从而 $g(x) \neq g(y)$, 故 g 为单射.

(2) 任取 $y \in C$, 由 fg 为满射知存在 $x \in A$, 使得

$$(fg)x = f(g(x)) = y,$$

故 f 为满射.

引理: 设映射 $\varphi: X \longrightarrow Y$, A 与 B 分别是 X 与 Y 的非空子集, 则

- (1) $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$, 当 φ 为单射时取等;
- (2) $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B$, 当 φ 为满射时取等.

6.2 群

定义: 设非空集合 G 上有代数运算。满足

- (1) 有结合律;
- (2) 有左单位元;
- (3) 每个元素有左逆元;

则称 G 关于代数运算。作成一个**群**. 若运算。有交换律, 则称 G 为一个 **Abel 群**.

Abel 群也称为加群, 其代数运算常用"+"表示. 因为模论中的群是 Abel 群, 因此我们直接给出 Abel 群的相应的定义与结论.

设G为Abel群,则

- (1) 子群的充要条件为 H 为 G 的一个子群 \iff 对任意的 $a,b \in H$, 都有 $a-b \in H$.
- (2) 子集 A 与 B 的运算为

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(3) 关于子群 N 的陪集为

$$a + N = \{ a + x | x \in N \}.$$

(4) 陪集相等的充要条件 为

$$a + N = b + N \iff a - b \in N.$$

(5) 陪集的运算为

$$(a+N) + (b+N) = (a+b) + N.$$

(6) G 关于子群 N 的商群为

$$G/N = \{x + N \mid x \in G\}.$$

商群 G/N 的零元为 N, a+N 的负元为 (-a)+N.

(7) 若映射 $\varphi: G \longrightarrow \widetilde{G}$ 满足对任意的 $a, b \in G$, 有

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

则称 φ 为一个群同态. 若 φ 还为双射, 则称 φ 是一个群同构, 且称群 G 与 \widetilde{G} 同构.

定义: 设 G₁, G₂ 为群, 记

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\},\$$

定义

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2),$$

则 $G_1 \times G_2$ 也作成一个群, 称为群 G_1 与 G_2 的**直积**. 当 G_1 与 G_2 为 Abel 群时, 直积称为**直和**, 记作 $G_1 \oplus G_2$.

易知 $G_1 \times G_2$ 的单位元为 $e_{G_1 \times G_2} = (e_{G_1}, e_{G_2})$, 元素 (g_1, g_2) 的逆元为 (g_1^{-1}, g_2^{-1}) .

6.3 环与域

定义: 设非空集合 R 上有两个代数运算"加法"与"乘法", 若

- (1) R 关于加法作成 Abel 群;
- (2) R 关于乘法满足结合律;
- (3) 乘法对加法满足左右分配律;

则称 R 对这两个代数运算作成一个 \mathbf{N} .

定义: 设 $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$, 对任意的 $\overline{i}, \overline{j} \in \mathbb{Z}_n$, 规定

$$\overline{i} + \overline{j} = \overline{i+j}, \quad \overline{i}\,\overline{j} = \overline{ij},$$

则 \mathbb{Z}_n 按上述定义的加法与乘法作成一个环, 称为**模** n **剩余类环**. 它的零元是 $\overline{0}$, 单位元是 $\overline{1}$, \overline{i} 的负元是 $\overline{-i}$.

易知在 \mathbb{Z}_n 中, 若 $\overline{i} = \overline{i}$, 则 n|(i-i).

例 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong K_4(\text{Klein 四元群})(群同构), 因此, <math>K_4$ 可以表示为

$$K_4 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}.$$

例 (1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$; (2) $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ (环同构), 其中 m, n 互素. 证明 作映射

$$f: \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$$

$$[x] \longmapsto (\overline{x}, \widetilde{x})$$

易知 f 是一个映射. 若 f([x]) = f([y]), 则 $\overline{x} = \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$, $\widetilde{x} = \widetilde{y} \in \mathbb{Z}_n$, 故 m|(x-y), n|(x-y). 因 m, n 互素, 故 $mn|(x-y), [x] = [y] \in \mathbb{Z}_{mn}$, 即 f 单. 又 $|\mathbb{Z}_{mn}| = mn = |\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n|$, 故 f 满. 由于

$$f([x] + [y]) = f([x + y]) = (\overline{x + y}, \widetilde{x + y}) = (\overline{x} + \overline{y}, \widetilde{x} + \widetilde{y}) = (\overline{x}, \widetilde{x}) + (\overline{y}, \widetilde{y}) = f([x]) + f([y]),$$

$$f([x][y]) = f([xy]) = (\overline{xy}, \widetilde{xy}) = (\overline{x}, \overline{y}, \widetilde{x}, \widetilde{y}) = (\overline{x}, \widetilde{x})(\overline{y}, \widetilde{y}) = f([x])f([y]),$$

故 f 为环同态. 综上, f 为同构, $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$.

定义: 阶大于 1, 有单位元, 无零因子的交换环称为整环.

整数环 \mathbb{Z} 和数域 P 上的多项式环 P[x] 都是整环.

定义: 设 R, \widetilde{R} 为环, 映射 $\varphi : R \longrightarrow \widetilde{R}$. 若对任意的 $a, b \in R$, 都有

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$

则称 φ 为 R 到 \widetilde{R} 的一个**环同态**.

定理: $S \to R$ 的子环 \iff 对任意的 $a,b \in S, a-b \in S, ab \in S$.

定义: 设 N 是环 R 的子加群 (保证陪集加法有意义), 且对任意的 $r \in R, a \in N$, 有 $ra \in N$ (保证陪集乘法有意义), 则称 N 是 R 的一个**左理想**, 并称 N 满足**左吸收律**.

右理想定义与之类似. 若 N 既是左理想, 又是右理想, 则称 N 是 R 的理想, 记作 $N \triangleleft R$.

设 N 为 R 的一个理想, 则 N 为 R 的子加群, 从而也为 R 的正规子群, 因此 R/N 对**陪集的加 法**

$$(a+N) + (b+N) = (a+b) + N$$

作成一个加群. 定义陪集的乘法为

$$(a+N)(b+N) = ab + N.$$

定义: 设 N 为 R 的一个理想,则 R 关于 N 的陪集所成集合 $R/N = \{a+N \mid a \in R\}$ 关于陪集的加法与乘法作成一个环, 称为 R 关于 N 的**高环**.

定义: 若环 R 的理想只有 0 与自身, 则称 R 为一个单环.

定义: 设 a 为环 R 的一个元素,则 R 的所有包含 a 的理想的交 $\langle a \rangle$ 也是 R 的一个理想,称为由 a 生成的主理想.

当 R 是有单位元的交换环时,有

$$\langle a \rangle = \{ ra \, | \, r \in R \}.$$

设 \mathbb{Z} 为整数环, n 为正整数, 则 $\mathbb{Z}/\langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$, 同构映射可取为

$$\sigma: \mathbb{Z}/\langle n\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$
$$a+\langle n\rangle \longmapsto \overline{a}$$

定义: 若整环 R 的每一个理想都是主理想, 则称 R 是一个主理想整环.

定义: 设 N 为环 R 的一个理想, 且 $N \neq R$. 若除 R 和 N 外, R 中没有包含 N 的其他理想, 则 称 N 为 R 的一个极大理想.

定理: 设 N 为环 R 的理想, 则 N 为极大理想当且仅当 R/N 为单环.

定义: 若环 R 满足 |R| > 1, 有单位元且任意非零元均可逆, 则称 R 为一个**除环**. 可换除环称为 **域**.

易知除环 R 的非零元对乘法作成一个群, 域 F 的非零元对乘法作成一个 Abel 群.

6.4 线性空间与线性变换

一、线性空间

定义: 设 P 是一个数域,非空集合 V 上有一个代数运算叫做加法,P 与 V 之间有一个运算叫做数量乘法,且满足

- (1) 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) 对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (3) 存在 $0 \in V$, 对任意的 $\alpha \in V$, $0 + \alpha = \alpha$;
- (4) 对任意的 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$, $\alpha + \beta = 0$;
- (5) 对任意的 $k \in P, \alpha, \beta \in V, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;
- (6) 对任意的 $k, l \in P, \alpha \in V, (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;
- (7) 对任意的 $k, l \in P, \alpha \in V, (kl)\alpha = k(l\alpha);$
- (8) $1\alpha = \alpha$,

则称 V 为数域 P 上的**线性空间**.

第 (1) 到 (4) 条说明 V 关于 "+" 作成一个 Abel 群, 第 (5) 到 (8) 条说明 V 是一个 P 模.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, W 为 V 的非空子集, 若 W 关于 V 的加法与数量乘法也作成一个线性空间, 则称 W 为 V 的**线性子空间**, 简称子空间.

定理: 非空子集 W 为 V 的子空间当且仅当 W 对于 V 上的两种运算封闭, 即

- (1) 对任意的 $\alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha + \beta \in W$;
- (2) 对任意的 $k \in P, \alpha \in W$, 有 $k\alpha \in W$.

定义: 设V和W分别为数域P上的线性空间,记

$$V \times W = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in V, \beta \in W\},\$$

定义加法与数乘分别为

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta'), \quad k(\alpha, \beta) = (k\alpha, k\beta)$$

则 $V \times W$ 也作成数域 P 上的线性空间, 称为 V 与 W 的**外直积**.

若 V,W 分别为数域 P 上的 n 与 m 维线性空间, 则 $V \times W$ 是一个 n+m 维线性空间. 事实上, 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的基, β_1, \dots, β_m 是 W 的基, 则

$$(\alpha_1, 0), \cdots, (\alpha_n, 0), (0, \beta_1), \cdots, (0, \beta_m)$$

是 $V \times W$ 的基

二、线性变换

定义: 线性空间 V 到自身的映射称为一个**变换**.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, 若 V 上的变换 $\mathscr A$ 满足

- (1) $\mathscr{A}(\alpha + \beta) = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta, \quad \alpha, \beta \in V;$
- (2) $\mathscr{A}(k\alpha) = k(\mathscr{A}\alpha), \quad k \in P, \alpha \in V,$

则称 \mathscr{A} 为 V 上的**线性变换**.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, $\mathscr A$ 与 $\mathscr B$ 为 V 上的两个线性变换, 定义 $\mathscr A$ 与 $\mathscr B$ 的**乘积** 为

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha) = \mathscr{A}(\mathscr{B}\alpha), \quad \alpha \in V.$$

定义 & 与 8 的加法为

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})(\alpha) = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{B}\alpha, \quad \alpha \in V.$$

设 $k \in P$, 定义 $k = \emptyset$ 的**数量乘法**为

$$(k\mathscr{A})\alpha = k(\mathscr{A}\alpha), \quad \alpha \in V.$$

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, \mathscr{A} 为 V 上的线性变换, 对 P[x] 中的任意多项式

$$f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0,$$

定义

$$f(\mathscr{A}) = a_m \mathscr{A}^m + \dots + a_1 \mathscr{A} + a_0 \mathscr{E},$$

称为**线性变换** Ø **的多项式**, 它仍然是一个线性变换.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, \mathscr{A} 为 V 上的线性变换, W 为 V 的子空间. 若对任意的 $\alpha \in W$, 有 $\mathscr{A} \alpha \in W$, 即 $\mathscr{A} W \subseteq W$, 则称 W 是 \mathscr{A} 的**不变子空间**, 简称 $\mathscr{A} -$ 子空间.

6.5 线性相关与线性无关

线性相关性取决于系数所在的空间. 例如, 若将复数域 \mathbb{C} 视为实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 则 1, i 是线性无关的, 而若将 \mathbb{C} 视为 \mathbb{C} 上的线性空间, 则 1, i 是线性相关的 (因为 i · 1 + (-1) · i = 0).

模中成员的线性相关性与线性空间有很多相似之处,但也有不同,其原因是模中元素线性组合的"系数"来自一般的环,而线性空间中元素的线性组合的"系数"来自于域.

(1) 线性空间中, 一个非零元必定线性无关, 而在模中该命题不成立.

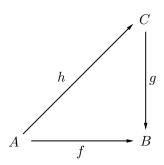
反例 \mathbb{Z}_6 视为 \mathbb{Z}_6 模, $\overline{2}$ 是其非零元, 但因为 $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, 故 $\overline{2}$ 是 \mathbb{Z}_6 -线性相关的.

(2) 线性空间中, 若 x_1, \dots, x_n 线性无关, x_1, \dots, x_n, y 线性相关, 则 y 可由 x_1, \dots, x_n 线性表出. 在模中该命题不成立.

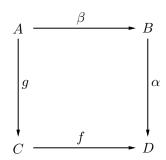
反例 \mathbb{Z} 视为 \mathbb{Z} 模, 2 是线性无关的, 2,3 是线性相关的 (因为 $-3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$), 但 2 无法线性表出 3.

6.6 交换图

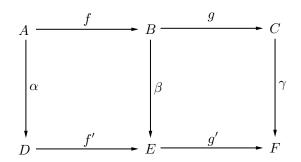
如下图所示, 如果群之间的同态用箭头来表示, 可以得到一个有向图



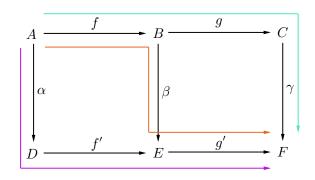
其中 f,g,h 为群同态. 若 f=gh,则称上述有向图为一个**交换图**. 类似地,环,模之间的同态也有相应的交换图.



与三个同态的交换图类似,如果上图中的四个同态 f,g,α,β 满足 $fg=\alpha\beta$,则称该图是一个交换图.



如上图所示,对于具有两个方块的有向图,如果两个方块都是交换的,即 $f'\alpha=\beta f, g'\beta=\gamma g$,则称该图为一个交换图. 容易知道,此时整个大方块也是交换的,即 $g'f'\alpha=\gamma g f$,并且二者还都等于 $g'\beta f$. 换言之,当上图为交换图时,从 A 到 F 的任何路径都是等效的.需要注意的是,当大方块交换时,两个小方块不一定是交换的.

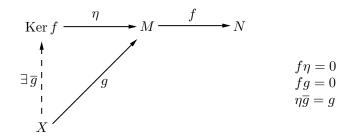


(当两个小方块交换时,整个大方块也是交换的,且三条彩色路径是等效的)

6.7 泛性质

我们把"在给定某些条件下存在唯一态射"这种性质统称为**泛性质** (Universal property). 在前面的学习中, 我们已经研究过<u>直积的泛性质</u>, <u>直和的泛性质</u>以及<u>自由模的泛性质</u>(点击蓝色字体即可跳转到对应位置). 下面我们给出同态的核与余核的泛性质.

定理 (核的泛性质): 设 $f: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, $\eta: \operatorname{Ker} f \longrightarrow M$ 为嵌入同态, 则对任意的 R 模同态 $g: X \longrightarrow M$, 若 fg = 0, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: X \longrightarrow \operatorname{Ker} f$, 使得 $g = \eta \overline{g}$.



证明 因为 fg = 0, 故 $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$. 定义映射

$$\overline{g}: X \longrightarrow \operatorname{Ker} f$$

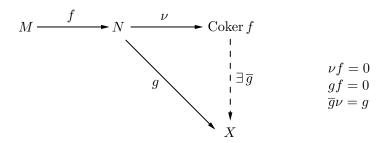
$$x \longmapsto g(x)$$

易知 \bar{g} 为 R 模同态, 且对任意的 $x \in X$, 有

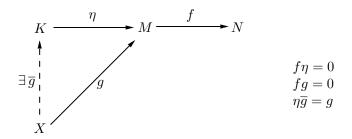
$$\eta \overline{g}(x) = \eta g(x) = g(x),$$

故 $\eta \bar{g} = g$. 下证唯一性. 若另有 R 模同态 $g': X \longrightarrow \operatorname{Ker} f$ 满足 $g = \eta g'$, 则 $\eta \bar{g} = \eta g'$. 由于 η 单,故可左消去, 从而 $\bar{g} = g'$.

定理 (余核的泛性质): 设 $f: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, $\nu: N \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ 为自然同态, 则对任意的 R 模同态 $g: N \longrightarrow X$, 若 gf = 0, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: \operatorname{Coker} f \longrightarrow X$, 使得 $g = \overline{g}\nu$.

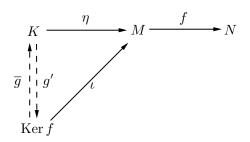


定理: 设 $f: M \longrightarrow N$ 与 $\eta: K \longrightarrow M$ 均为 R 模同态, $f\eta = 0$, 且满足: 对任意的 R 模同态 $g: X \longrightarrow M$, 若 fg = 0, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: X \longrightarrow K$, 使得 $g = \eta \overline{g}$, 则 $K \cong \operatorname{Ker} f$.



证明 取 X 为 $\operatorname{Ker} f, g$ 取为嵌入映射 $\iota : \operatorname{Ker} f \longrightarrow M$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g} : \operatorname{Ker} f \longrightarrow K$, 使得 $\iota = \eta \overline{g}$. 由核 $\operatorname{Ker} f$ 的泛性质知存在唯一的 R 模同态 $g' : K \longrightarrow \operatorname{Ker} f$, 使得 $\eta = \iota g'$, 故

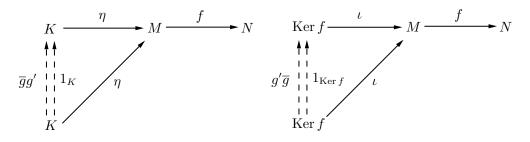
$$\begin{cases} \iota = \iota g' \overline{g} \\ \eta = \eta \overline{g} g' \end{cases}$$



将 X 取为 K, g 取为 η , 则由条件中的唯一性知 $\bar{g}g'=1_K$.

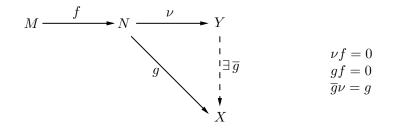
将 K 取为 $\operatorname{Ker} f, \eta$ 取为 ι , 则由核的泛性质中的唯一性知 $g'\bar{g}=1_{\operatorname{Ker} f}$.

综上, \bar{g} 为同构, $K \cong \text{Ker } f$.



上述定理说明具有核的泛性质的模本质上就是核.

定理: 设 $f: M \longrightarrow N$ 与 $\nu: N \longrightarrow Y$ 均为 R 模同态, $\nu f = 0$, 且满足: 对任意的 R 模同态 $g: N \longrightarrow X$, 若 gf = 0, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: Y \longrightarrow X$, 使得 $g = \overline{g}\nu$, 则 $Y \cong \operatorname{Coker} f$.



上述定理说明具有余核的泛性质的模本质上就是余核.

