复变函数第三章 复积分

§1 复积分的概念与简单性质

1、复积分的定义：$J=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta z_i=\int_C f(z)\mathrm{d}z$（分割、求和、取极限）

2、周线：逐段光滑的简单闭曲线。

3、若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 C 上连续，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$.

4、设光滑曲线 C： $z=z(t)\ (\alpha\leqslant z\leqslant\beta)$，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$（参数方程法）

5、一个<u>很重要的积分</u>：$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i} & (n=1)\\ 0 & (n\neq 1,\text{且为整数})\end{cases}$，其中 C 为以 a 为圆心，ρ 为半径的圆周。

6、复积分的基本性质：$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|=\int_C|f(z)|\mathrm{d}s$ （第一型曲线积分）

(其余基本性质与实函数积分一致)

7、积分估值：$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant ML$，其中 L 为曲线 C 之长，在 C 上 $|f(z)|\leqslant M$

8、<u>数学分析里面的积分中值定理不能直接推广到复积分上来</u>。

§2 柯西积分定理

1、柯西积分定理：$f(z)$ 在单连通区域 D 解析，C 为 D 内任一周线，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$

2、定理：$f(z)$ 在单连通区域 D 解析，C 为 D 内任一闭曲线，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$.

3、变上限积分 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，其中 z_0 为 D 内一定点，z 为 D 内动点。

（1） 定理：$f(z)$ 在单连通区域 D 解析，则 $F(z)$ 也在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$

（2） 定理：$f(z)$ 在单连通区域 D 连续，且积分与路径无关，则 $F(z)$ 也在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$

（3） 在(1)或(2)的条件下，若 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在单连通区域 D 内的原函数，则

$$\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta=\Phi(z)-\Phi(z_0)\quad(z,z_0\in D)$$（类似于实积分里的牛顿—莱布尼兹公式）

4、定理：$f(z)$ 在 $n+1$ 连通区域 D 解析，在 $\bar{D}=D+C$ 上连续，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$，也即

$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z=0$.（其中 $C=C_0+C_1^-+\ldots+C_n^-$ 为 D 的边界）

§3 柯西积分公式及其推论

1、定理（柯西积分公式）：$f(z)$ 在区域 D 解析，在 $\bar{D}=D+C$ 上连续，则

$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \quad (z\in D)$ （要求被积函数 $F(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在 D 上有唯一奇点）

2、在上述定理的条件下，$f(z)$ 在 D 上有各阶导数，且 $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$

$(z\in D, n=1,2,\cdots)$ （同样要求被积函数 $F(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$ 在 D 上有唯一奇点）

3、$f(z)$ 在区域 D 解析 $\Leftrightarrow \begin{cases}(1)\ u_x,u_y,v_x,v_y \text{连续} \\ (2)\ u,v \text{ 满足C.-R. 方程}\end{cases}$

4、解析函数的平均值定理：$f(z)$ 在圆 $|\zeta-z_0|<R$ 解析，在 $|\zeta-z_0|\leqslant R$ 上连续，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi$$

5、柯西不等式：$f(z)$ 在区域 D 解析，圆周 $\gamma:|\zeta-a|=R$ 及其内部均含于 D，则

$\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant\dfrac{n!M(R)}{R^n}$，其中 $M(R)=\max\limits_{|z-a|=R}|f(z)|, n=1,2,\ldots$

6、整函数：在整个复平面上解析的函数。

7、刘维尔定理：有界整函数必为常数。

8、代数学基本定理：n 次多项式 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$ 在复平面上至少一个零点。（从而复平面内 n 次多项式有且仅有 n 个根，重根按重数计算）

9、莫雷拉定理（柯西积分定理的逆定理）：$f(z)$ 在单连通区域 D 连续，且对 D 内任一周线 C 有 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$，则 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析。

10、$f(z)$ 在区域 D 解析 $\Leftrightarrow \begin{cases}(1)\ f(z)\text{在区域}D\text{连续} \\ (2)\ \text{对任一自身及其内部均含于}D\text{ 的周线}C, \int_C f(z)\mathrm{d}z=0\end{cases}$

（由柯西积分定理 + 莫雷拉定理即可得到此充要条件）

§4 解析函数与调和函数

1、定义：拉普拉斯算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

2、定义：满足 $\Delta H=0$ 的 $H(x,y)$ 称为调和函数。

3、定义：若两个调和函数 $u(x,y),v(x,y)$ 满足 $\mathrm{C.-R.}$ 方程，则称 v 为 u 的共轭调和函数。

4、若 v 为 u 的共轭调和函数，则 $-u$ 为 v 的共轭调和函数。

5、 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 解析 $\Leftrightarrow$ v 为 u 的共轭调和函数

6、定理： $u(x,y)$ 在单连通区域 D 上调和，则存在 $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+C$ ，使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 上解析。

7、调和函数的任意阶偏导也调和。（可由解析函数的任意阶导数仍解析得到）

附录

第三章至少应掌握的习题：P73 例 3.2， P84 例 3.10（3）， P86 例 3.12， P88 例 3.15， P91 例 3.17， P97 页例 3.21， 以及第三章习题 8+全部作业题

第三章习题 8

题目：

由积分 $\int_C\dfrac{\mathrm{d}z}{z+2}$ 之值证明 $\int_0^{\pi}\dfrac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$，其中 C 取单位圆周 $|z|=1$.

解：由柯西积分定理知 $\int_C\dfrac{\mathrm{d}z}{z+2}=0$，

又 $\int_C\dfrac{dz}{z+2}=\int_0^{2\pi}\dfrac{de^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta}+2}=\int_0^{2\pi}\dfrac{(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)}{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta+2}d\theta=\int_0^{2\pi}\dfrac{-2\sin\theta+(2\cos\theta+1)\mathrm{i}}{4\cos\theta+5}d\theta$ （最后一步是将被积函数分母实数化），

且 $\int_0^{2\pi}\dfrac{-2\sin\theta}{4\cos\theta+5}d\theta=0$，故 $\int_0^{2\pi}\dfrac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0$ ，

即 $\int_0^{\pi}\dfrac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0$ ，

作变换 $\theta=2\pi-\varphi$，则上式左边第二项

$$=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\pi}^{0}\frac{1+2\cos(2\pi-\varphi)}{5+4\cos(2\pi-\varphi)}\mathrm{d}(2\pi-\varphi)=\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\varphi}{5+4\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

=左边第一项，

从而 $\int_0^{\pi}\dfrac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$.