目录

1 模

1.1 基本概念与性质

定义: 设 R 为一个环, M 是一个 Abel 群, 若存在映射

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

满足:

(1) $a(x+y) = ax + ay$;

(2) $(a+b)x = ax + bx$;

(3) $(ab)x = a(bx)$;

(4) $1x = x$,

其中 $a, b, 1 \in R, x, y \in M$, 则称 M 为一个**左 R 模**.

由此定义易知, 模实际上就是环在 Abel 群上的作用. 需要注意的是, 这里的 ax 是一种简写, 实际上应理解为环 R 中的元素 a 对 x 的作用.

类似地, 我们可以定义右 R 模.

定义: 设 R 为一个环, M 是一个 Abel 群, 若存在映射

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (x, a) &\longmapsto xa \end{aligned}$$

满足:

(1) $(x+y)a = xa + ya$;

(2) $x(a+b) = xa + xb$;

(3) $x(ab) = (xa)b$;

(4) $x1 = x$,

其中 $a, b, 1 \in R, x, y \in M$, 则称 M 为一个**右 R 模**.

若 R 为交换环, 那么左模就是右模. 以后若无特别说明, 我们总假定 R 是一个有单位元 1 的交换环, 并不再区分左模与右模.

设 M 是 R 模, 由定义易知对任意的 $a \in R, x \in M$, 有

$$a0 = 0, \quad 0x = 0,$$
$$(-a)x = -ax, \quad a(-x) = -ax,$$
$$a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} ax_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} a_i x.$$

证明 (1) $a0 = a(0+0) = a0 + a0$, 故 $a0 = 0$;

(2) $0x = (0+0)x = 0x + 0x$, 故 $0x = 0$;

(3) $(-a)x + ax = (-a+a)x = 0x = 0$, 故 $(-a)x = -ax$;

(4) $a(-x) + ax = a(-x+x) = a0 = 0$, 故 $a(-x) = -ax$.

(5) 与 (6) 由数学归纳法易证. □

例 域 F 上的线性空间是一个 F 模. 反之, 任一 F 模都是域 F 上的一个线性空间.

例 设 M 为一个 Abel 群. 对 $m \in \mathbb{Z}$(整数环), $x \in M$, 定义

$$mx = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{m\text{个}}, & m > 0 \\ 0, \quad m = 0 \\ \underbrace{(-x) + (-x) + \cdots + (-x)}_{-m\text{个}} = (-m)(-x), & m < 0 \end{cases}$$

按上述定义, Abel 群 M 作成一个 $\mathbb{Z}$ 模.

例 设 V 为域 F 上的向量空间, T 为 V 上的线性变换, $F[\lambda]$ 为域 F 上的多项式环, 对 $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$, 定义

$$\begin{aligned} F[\lambda] \times V &\longrightarrow V \\ (f(\lambda), x) &\longmapsto f(\lambda)x = f(T)x = a_0x + a_1Tx + \cdots + a_mT^mx \end{aligned}$$

则 V 成为一个 $F[\lambda]$ 模.

例 设 $\varphi : R \longrightarrow S$ 为环同态, 若 M 为 S 模, 定义

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax = \varphi(a)x \end{aligned}$$

按上述定义, M 也作成一个 R 模.

例 定义

$$\begin{aligned} R \times (R, +) &\longrightarrow (R, +) \\ (a, x) \quad &\longmapsto \quad ax \end{aligned}$$

其中 ax 为 R 的乘法, 则 R 自身也作成一个 R 模, 称为正则模. 此外, 设 S 为 R 的子环, 则易知 R 也作成一个 S 模, 但 S 不一定是 R 模, 这是因为当 $a \in R, x \in S$ 时, 不一定有 $ax \in S$.

1.2 子模

定义: 设 M 是 R 模, N 是 M 的非空子集. 若 N 是 M 的子群, 且对任意的 $a \in R, x \in N$, 有 $ax \in N$, 则称 N 为 M 的一个**子模**.

定理: 设 M 为 R 模, N 为 M 的非空子集, 则 N 为 M 的子模当且仅当

(1) 对任意的 $y_1, y_2 \in N, y_1 + y_2 \in N$;

(2) 对任意的 $a \in R, y \in N$, 有 $ay \in N$.

证明 必要性显然, 下证充分性.

任取 $y \in N$, 因为 $-1 \in R$, 故由 (2) 知

$$(-1)y = -y \in N.$$

又任取 $x \in N$, 由 (1) 知

$$x - y \in N.$$

故 N 为 M 的子群. 再由 (2) 知 N 为 M 子模. □

例 设 V 为域 F 上的向量空间, 则 N 为 V 的子模当且仅当 N 为 V 的子空间.

例 把环 R 看作正则模, 则 R 的子模就是理想.

例 设 V 为域 F 上的有限维向量空间, T 为 V 上的线性变换, 则 W 为 V 的 $F[\lambda]$ 子模当且仅当 W 为 T 的不变子空间.

证明 ($\Longrightarrow$) 因为 W 为 V 的 $F[\lambda]$ 子模, 故对任意的 $x_1, x_2 \in W$, $x_1 + x_2 \in W$, 且对任意的 $f(\lambda) \in F[\lambda]$, $x \in W$, $f(\lambda)x = f(T)x \in W$. 取 $f(\lambda) = a \in F$ 为 $F[\lambda]$ 上的零或零次多项式, 则 $ax \in W$, 故 W 为 V 的子空间. 又取 $f(\lambda) = \lambda$, 则 $\lambda x = Tx \in W$, 故 W 为 T 的不变子空间.

($\Longleftarrow$) 由 W 为 V 的子空间知对任意的 $x_1, x_2 \in W$, 有 $x_1 + x_2 \in W$. 又因为对任意的 $x \in W$, 有 $Tx \in W$, 故对任意的 $f(\lambda) \in F[\lambda]$, 有 $f(\lambda)x = f(T)x \in W$, 从而 W 为 V 的 $F[\lambda]$ 子模. □

例 设 $\{N_i \,|\, i \in I\}$ 为 R 模 M 的一族子模, 则 $\bigcap\limits_{i \in I} N_i$ 也是 M 的子模, 称为子模的交.

例 R 模 M 中的零元所成集合 $\{0\}$ 也是 M 的子模, 称为零子模, 简记为 0.

定义 (超级重要): 对 R 模 M 中的元素 x, 称

$$\mathrm{Ann}_R(x) = \{a \in R \,|\, ax = 0\}$$

为 x 的**零化子**, 它是 R 的一个理想. 若 $\mathrm{Ann}_R(x) \neq \{0\}$, 则称 x 为一个**扭元**. 如果 R 是整环, 则 M 的全体扭元所成集合 $T(M)$ 是 M 的一个子模, 称为 M 的**扭子模**. 若 $M = T(M)$, 则称 M 为**扭模**.

下面我们分别证明:

(1) $\mathrm{Ann}_R(x)$ 是环 R 的一个理想;

(2) 若 R 为整环, 则 $T(M)$ 为 M 的子模.

证明 (1) 任取 $a_1, a_2 \in \mathrm{Ann}_R(x)$, 则 $a_1x = a_2x = 0$, 故

$$(a_1 - a_2)x = a_1x - a_2x = 0 - 0 = 0,$$

从而 $a_1 - a_2 \in \mathrm{Ann}_R(x)$, $\mathrm{Ann}_R(x)$ 为 R 的子加群. 又任取 $r \in R, a \in \mathrm{Ann}_R(x)$, 则

$$(ra)x = r(ax) = r0 = 0,$$

故 $ra \in \mathrm{Ann}_R(x)$. 从而 $\mathrm{Ann}_R(x)$ 为 R 的理想.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in T(M)$, 则存在 $a_1, a_2 \in R, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, 使得 $a_1x_1 = a_2x_2 = 0$. 由 R 为交换环得

$$a_1a_2(x_1 + x_2) = a_2(a_1x_1) + a_1(a_2x_2) = 0 + 0 = 0.$$

因为 R 无零因子, 故 $a_1a_2 \neq 0$, 从而 $x_1 + x_2 \in T(M)$. 又任取 $r \in R, x \in T(M)$, 则存在 $0 \neq a \in R$, 使得 $ax = 0$. 由于

$$a(rx) = (ar)x = (ra)x = r(ax) = r0 = 0,$$

故 $rx \in T(M)$, 从而 $T(M)$ 为 M 子模. $\square$

定义: 若非零 R 模 M 的子模只有 0 及自身, 则称 M 为一个**单模** (或**不可约模**).

定义: 设 M 为 R 模, X 为 M 的非空子集, S 是环 R 的非空子集, 则 M 中形如

$$s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$$

的元素称为 **X 的 S 线性组合**. 记 X 的 S 线性组合全体所成集合为 SX, 即

$$SX = \{s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n \mid s_i \in S,\ x_i \in X,\ n\text{为正整数}\}.$$

定理: 设 X 为 R 模 M 的一个非空子集, 则 RX 为 M 的一个子模.

证明 显然对任意的 $x', x'' \in RX$, 有 $x' + x'' \in RX$. 又任取 $a \in R, x = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in RX$, 则

$$a(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) = a(r_1x_1) + \cdots + a(r_nx_n) = (ar_1)x_1 + \cdots + (ar_n)x_n \in RX.$$

从而 RX 为 M 的子模. $\square$

我们称 RX 为由 X 生成的子模, 记作 (X). 显然

$$RX = \bigcap_{\substack{X \subseteq N \\ N\text{是子模}}} N.$$

定义 (超级重要): 若 $M=RX$, 则称 X 为 M 的**生成元集**, X 中的元素称为 M 的**生成元**. 若 X 为有限集, 则称 M 是**有限生成的**. 若 $M=Rx$, 则称 M 为**循环模**.

例 循环群一定是循环 $\mathbb{Z}$ 模. 因为若循环群 $G=\langle a\rangle$, 则 $\mathbb{Z}a=G$.

例 环 R 作为正则模是一个循环模, 因为 $R1_R=R$.

例 单模一定是循环模, 且若 M 为 R 单模, 那么对任意的 $0\neq x\in M$, 都有 $M=Rx$.

证明 Rx 是 M 的子模, 又因为 $Rx\neq 0$, 故由 M 为单模知 $Rx=M$, 即 M 为循环模. □

定义: 设 $\{N_i\,|\,i\in I\}$ 为 R 模 M 的一族子模, 称

$$\sum_{i\in I}N_i=\{y_{i_1}+\cdots+y_{i_k}\,|\,y_{i_j}\in N_{i_j},j=1,\cdots,k,k\text{为正整数}\}$$

为子模 $\{N_i\,|\,i\in I\}$ 的**和**. 特别地, 对于有限个子模 $N_1,N_2,\cdots,N_s$, 则有

$$N_1+N_2+\cdots+N_s=\{y_1+y_2+\cdots+y_s\,|\,y_i\in N_i,\ i=1,2,\cdots,s\}.$$

定义: 设 K 为 R 模 M 的一个子模, 则 M 关于 K 的陪集作成的集合

$$M/K=\{x+K\,|\,x\in M\}$$

关于陪集的加法

$$(x+K)+(y+K)=(x+y)+K$$

以及模的乘法

$$a(x+K)=ax+K$$

也作成一个 R 模, 称为 M 关于 K 的**商模**.

下面我们证明上述关于模的乘法的定义是合理的. 事实上, 若 $x+K=y+K$, 则 $x-y\in K$. 由 K 为子模知对任意的 $a\in R$, 都有 $a(x-y)\in K$, 即 $ax-ay\in K$, 从而 $ax+K=ay+K$. 即是说

$$R\times M/K\longrightarrow M/K$$
$$(a,x+K)\longmapsto ax+K$$

的确是一个映射.

易知商模 M/K 中的零元为 K, $x+K$ 的负元为 $(-x)+K$.

2 模同态

2.1 基本概念与性质

定义: 设 M, M' 为 R 模, 若映射 $f: M \longrightarrow M'$ 满足

(1) 对任意的 $x, y \in M$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

(2) 对任意的 $a \in R, x \in M$, 有 $f(ax) = af(x)$,

则称 f 为一个 R **模同态**.

定义: 若 R 模同态 f 为单射, 则称 f 是一个**单同态**; 若 f 为满射, 则称 f 是一个**满同态**; 若 f 为双射, 则称 f 是一个 R **模同构**, 且称 R 模 M 与 M' 是同构的, 记为 $M \cong M'$.

设 K 为 M 的子模, 则

$$\begin{aligned} \nu: M &\longrightarrow M/K \\ x &\longmapsto x + K \end{aligned}$$

也是 R 模同态, 称为 M 到 M/K 的**自然同态**, 它是一个满同态.

定义: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为模同态, 分别称

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{x \in M \mid f(x) = 0\} \\ \operatorname{Im} f &= \{f(x) \in M' \mid x \in M\} \end{aligned}$$

为 f 的**核**与**像**, 称

$$\operatorname{Coker} f = M'/\operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Coim} f = M/\operatorname{Ker} f$$

为 f 的**余核**与**余像**.

不难验证 $\operatorname{Ker} f$ 为 M 的子模, $\operatorname{Im} f$ 为 M' 的子模.

定理: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则下列条件等价:

(1) f 为单同态;

(2) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$;

(3) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g, h: K \longrightarrow M$, 从 $fg = fh$ 可以得出 $g = h$;

(4) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g: K \longrightarrow M$, 从 $fg = 0$ 可以得出 $g = 0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 因为

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

故 $f(0) = 0$, 即 $0 \in \operatorname{Ker} f$. 由 f 为单射知 $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $fg = fh$. 任取 $x \in K$, 则 $f(g(x)) = f(h(x))$, 即 $f(g(x) - h(x)) = 0$, 故 $g(x) - h(x) \in \operatorname{Ker} f$, 由 (2) 知 $g(x) - h(x) = 0$, 即 $g(x) = h(x)$, 由 x 的任意性知 $g = h$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 取 $h = 0$, 则由 (3) 知从 $fg = 0 = fh$ 可以得到 $g = h = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (2) 取 $K = \operatorname{Ker} f$, 又取模同态 g 为嵌入映射

$$\begin{aligned} g : \operatorname{Ker} f &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

则易知 $fg = 0$, 由 (4) 可得 $g = 0$, 故 $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 - x_2) = 0$, 故 $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f$, 从而 $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = x_2$, 即 f 为单同态. $\square$

定理: 设 $f : M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则下列条件等价:

(1) f 为满同态;

(2) $\operatorname{Im} f = M'$;

(3) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g, h : M' \longrightarrow K$, 从 $gf = hf$ 可以得出 $g = h$;

(4) 对任意的 R 模 K, 对任意的 R 模同态 $g : M' \longrightarrow K$, 从 $gf = 0$ 可以得出 $g = 0$.

定理: 设 $f : M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则 f 为同构当且仅当存在映射 $g, h : M' \longrightarrow M$, 使得

$$fg = 1_{M'}, \quad hf = 1_M.$$

当上述等式成立时, $g = h$ 为 R 模同构.

证明 ($\Longrightarrow$) 因 f 为同构, 故 f 为双射, 因此 f 可逆. 取 $g = h = f^{-1}$, 则

$$fg = 1_{M'}, \quad hf = 1_M.$$

易知 $g = h = f^{-1}$ 是 M' 到 M 的 R 模同构.

($\Longleftarrow$) 因为 $fg = 1_{M'}$ 为满射, 故 f 满. 又因为 $hf = 1_M$ 为单射, 故 f 单. 因此 f 为双射, 故 f 为同构. 又

$$g = 1_M g = (hf)g = h(fg) = h1_{M'} = h,$$

故 $g = h$ 为双射. 下证 $g = h$ 为 R 模同态. 任取 $x, y \in M'$, 则

$$f(g(x+y)) = (fg)(x+y) = x + y = (fg)(x) + (fg)y = f(g(x)) + f(g(y)) = f(g(x) + g(y)).$$

由 f 为单射知

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

又任取 $a \in R$, 则

$$f(g(ax)) = (fg)(ax) = ax = a(fg)(x) = af(g(x)) = f(ag(x)).$$

由 f 为单射知

$$g(ax) = ag(x).$$

因此 g 为 R 模同态. $\square$

设 M' 和 M' 是两个 R 模, 我们把从 M 到 M' 的全体 R 模同态所成集合记为 $\mathrm{Hom}_R(M, M')$.

定义: 对 $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, 定义**模同态的加法**为

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in M.$$

设 $a \in R$, 定义**模的乘法**为

$$(af)(x) = af(x), \quad x \in M.$$

当 $M = M'$ 时, 定义**模同态的乘法**为

$$(fg)(x) = f(g(x)), \quad x \in M.$$

易知 $f+g$ 也为 R 模同态, 即 $f+g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. 容易证明, $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ 关于这样定义的加法作成一个 Abel 群. 当 $M = M'$ 时, $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M, M)$ 关于模同态的加法与乘法作成一个环, 称为 R 模 M 的**自同态环**.

例 当 M 为单模时, $\mathrm{End}_R(M)$ 是一个除环.

证明 任取 $0 \neq f \in \mathrm{End}_R(M)$, 则 $\mathrm{Ker}\, f, \mathrm{Im}\, f$ 均为 M 的子模. 当 $\mathrm{Ker}\, f = M$ 时, $f = 0$, 矛盾, 故 $\mathrm{Ker}\, f = 0$, 因此 f 为单同态. 当 $\mathrm{Im}\, f = 0$ 时, $f = 0$, 也矛盾, 故 $\mathrm{Im}\, f = M$, 即 f 为满同态, 因此 f 为双射, 可逆. 由此可知 $\mathrm{End}_R(M)$ 为除环. $\square$

我们可以验证, 在映射

$$\begin{aligned} R \times \mathrm{Hom}_R(M, M') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, M') \\ (a, f) \quad &\longmapsto \quad af \end{aligned}$$

下, $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ 作成一个 R 模. 以后我们总把 $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ 看成这样的 R 模. 需要注意的是, 当 R 为非交换环时, $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ 仍可作成 Abel 群, 但无法作成 R 模, 这是因为此时对 $a \in R, f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, 不一定有 $af \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. 具体原因是当 R 非交换时

$$(af)(rx) = a(f(rx)) = a(rf(x)) = (ar)f(x) = (ra)f(x) = r(af(x)) = r(af)(x)$$

中的第四个等号不一定成立, 故 af 不一定为 R 模同态.

2.2 模同态的相关定理

定理 (重要): 设 $f: M \longrightarrow M', g: M \longrightarrow N$ 均为 R 模同态, 其中 g 为满同态且 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$, 则存在唯一的 R 模同态 $h: N \longrightarrow M'$, 满足

$$f = hg$$

且

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M' \\ & N \arrow[u, dashed, "\exists h"'] \end{tikzcd}$$

(1) $\operatorname{Ker} h = g(\operatorname{Ker} f)$;

(2) $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$;

(3) h 单 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$;

(4) h 满 $\Longleftrightarrow f$ 满.

证明 ① 先证模同态 h 的存在性. 设

$$\begin{aligned} h: N &\longrightarrow \ M' \\ n &\longmapsto f(m), \text{其中} \, g(m) = n \end{aligned}$$

若 $g(m_1) = g(m_2)$, 则 $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$, 故 $f(m_1) = f(m_2)$, 从而 h 是一个映射. 又因为

$$(hg)(m) = h(g(m)) = h(n) = f(m), \quad m \in M,$$

故 $f = hg$. 下面再证 h 是 R 模同态. 任取 $n_1, n_2 \in N$, 设 $g(m_1) = n_1, g(m_2) = n_2$, 则

$$\begin{aligned} h(n_1) + h(n_2) &= h(g(m_1)) + h(g(m_2)) \\ &= f(m_1) + f(m_2) \\ &= f(m_1 + m_2) \\ &= h(g(m_1 + m_2)) \\ &= h(g(m_1) + g(m_2)) \\ &= h(n_1 + n_2). \end{aligned}$$

又任取 $a \in R, n \in N$, 设 $g(m) = n$, 则

$$ah(n) = af(m) = f(am) = h(g(am)) = h(ag(m)) = h(an),$$

从而 h 为 N 到 M' 的 R 模同态, 存在性得证.

② 再证模同态 h 的唯一性. 设有 R 模同态 $h_1, h_2: N \longrightarrow M'$ 满足 $h_1 g = h_2 g = f$, 由 g 为满同态得 $h_1 = h_2$.

③ 下证 $\operatorname{Ker} h = g(\operatorname{Ker} f)$. 任取 $n \in \operatorname{Ker} h$, 设 $g(m) = n$, 则

$$0 = h(n) = h(g(m)) = f(m),$$

故 $m \in \operatorname{Ker} f$, $n = g(m) \in g(\operatorname{Ker} f)$, 从而 $\operatorname{Ker} h \subseteq g(\operatorname{Ker} f)$. 又任取 $n \in g(\operatorname{Ker} f)$, 则存在 $m \in \operatorname{Ker} f$, 使得 $n = g(m)$, 从而

$$h(n) = h(g(m)) = f(m) = 0,$$

故 $n \in \operatorname{Ker} h$, 从而 $g(\operatorname{Ker} f) \subseteq \operatorname{Ker} h$. 因此 $\operatorname{Ker} h = g(\operatorname{Ker} f)$.

④ 下证 $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$. 任取 $m' \in \operatorname{Im} h$, 则存在 $n \in N$, 使得 $h(n) = m'$. 又因为 g 为满射, 故存在 $m \in M$, 使得 $g(m) = n$, 从而

$$m' = h(n) = h(g(m)) = f(m),$$

故 $m' \in \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{Im} f$. 又任取 $m' \in \operatorname{Im} f$, 则存在 $m \in M$, 使得 $f(m) = m'$, 也即 $h(g(m)) = m'$, 从而 $m' \in \operatorname{Im} h$, $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} h$. 因此 $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$.

⑤ 下面我们证明: h 单 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.

($\Longrightarrow$) 因 h 单, 故 $\operatorname{Ker} h = 0$. 任取 $m \in \operatorname{Ker} g$, 则 $g(m) = 0$, 从而

$$f(m) = h(g(m)) = h(0) = 0,$$

故 $m \in \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$. 又任取 $m \in \operatorname{Ker} f$, 则 $f(m) = 0$, 即 $h(g(m)) = 0$, 由 $\operatorname{Ker} h = 0$ 知 $g(m) = 0$, 故 $m \in \operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g$. 因此 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.

($\Longleftarrow$) 设 $n \in \operatorname{Ker} h$, 则 $h(n) = 0$. 设 $g(m) = n$, 则

$$f(m) = h(g(m)) = h(n) = 0,$$

故 $m \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, 从而 $n = g(m) = 0$, 故 $\operatorname{Ker} h = 0$, h 为单射.

⑥ 下面我们证明: h 满 $\Longleftrightarrow f$ 满.

($\Longrightarrow$) 任取 $m' \in M'$, 由 h 为满射可知存在 $n \in N$, 使得 $h(n) = m'$. 又因为 g 为满射, 故存在 $m \in M$, 使得 $g(m) = n$, 从而

$$f(m) = h(g(m)) = h(n) = m',$$

故 f 为满射.

($\Longleftarrow$) 任取 $m' \in M'$, 由 f 为满射知存在 $m \in M$, 使得 $f(m) = m'$, 从而

$$h(g(m)) = f(m) = m',$$

故 h 为满射. $\square$

定理 (究极重要): (1)(**模同态基本定理**) 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模同态, 则

$$M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f.$$

(2) 若 $K \subseteq N$ 均为 M 的子模, 则

$$M/N \cong (M/K)/(N/K).$$

(3) 若 K, N 均为 M 的子模, 则

$$(N+K)/K \cong N/(N \cap K).$$

证明 这三个定理的证明与群中相应结论的证明有异曲同工之妙, 我们只给出证明过程中需要构造的映射.

(1)

$$\begin{aligned} \sigma: M/\operatorname{Ker} f &\longrightarrow \operatorname{Im} f \\ x+\operatorname{Ker} f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f: M/K &\longrightarrow M/N \\ x+K &\longmapsto x+N \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f: N &\longrightarrow (N+K)/K \\ x &\longmapsto \quad x+K \end{aligned}$$

推论: 设 $f: M \longrightarrow M'$ 为 R 模满同态, 令 A 为 M 的所有包含 $\operatorname{Ker} f$ 的子模所成集合, B 为 M' 的所有子模所成集合, 则 A 与 B 之间存在一个双射.

证明 令

$$\begin{aligned} \sigma: A &\longrightarrow \ B \\ L &\longmapsto f(L) \end{aligned}$$

首先我们证明 σ 是一个定义合理的映射. 设 $L \in A$, 对任意的 $y_1, y_2 \in f(L)$, 存在 $x_1, x_2 \in L$, 使得

$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, 从而

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(L).$$

任取 $a \in R$, 由于对任意的 $y \in f(L)$, 存在 $x \in L$, 使得 $y = f(x)$, 从而

$$ay = af(x) = f(ax) \in f(L),$$

故 $f(L)$ 为 M' 的子模, σ 是一个具有良好定义的映射, 下证 σ 为单射. 设 $f(L_1) = f(L_2)$, 其中 $L_1, L_2 \in A$, 则对任意的 $l_1 \in L_1$, 存在 $l_2 \in L_2$, 使得 $f(l_1) = f(l_2)$, 从而 $l_1 - l_2 \in \operatorname{Ker} f \subseteq L_2$, 又因为 $l_2 \in L_2$, 从而 $l_1 \in L_2$. 故 $L_1 \subseteq L_2$. 同理可得 $L_2 \subseteq L_1$, 故 $L_1 = L_2$, 即 σ 为单射.

任取 $L' \in B$, 下面我们证明 $f^{-1}(L')$ 是 L' 在 σ 下的原像. 因为 $0 \in L'$, 故

$$f^{-1}(0) = \operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(L').$$

任取 $x_1, x_2 \in f^{-1}(L')$, 则 $f(x_1), f(x_2) \in L'$, 又因为 L' 为 M' 的子模, 故

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in L',$$

从而

$$x_1 + x_2 \in f^{-1}(L').$$

又任取 $a \in R, x \in f^{-1}(L')$, 则

$$f(ax) = af(x) \in L',$$

故 $ax \in f^{-1}(L')$, 从而 $f^{-1}(L')$ 为 M 的子模. 又因为 $\operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(L')$, 故 $f^{-1}(L') \in A$. 由 f 为满射知

$$f(f^{-1}(L')) = L',$$

也即

$$\sigma(f^{-1}(L')) = L',$$

故 σ 为满射. 综上, σ 为双射, 结论得证. $\square$

定理(重要): R 模 M 为循环模当且仅当 M 同构于正则模 R 的一个商模. 若 x 是循环模 M 的一个生成元, 则 $M \cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$. M 为单模当且仅当 $\operatorname{Ann}_R(x)$ 是 R 的极大理想.

证明 在证明过程中, 我们会用到如下结论: ①对于正则模 R 而言, 理想就是子模. ②设 N 为环 R 的理想, 则 N 为极大理想当且仅当 R/N 为单环.

(1) 我们证明 R 模 M 为循环模当且仅当 M 同构于正则模 R 的一个商模.

($\Longrightarrow$) 设 $M = Rx$, 定义

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow M = Rx \\ r &\longmapsto \quad rx \end{aligned}$$

易知 f 是一个 R 模满同态且 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ann}_R(x)$. 由模同态基本定理可知

$$M \cong R/\operatorname{Ann}_R(x).$$

($\Longleftarrow$) 设 K 是正则模 R 的子模, $M \cong R/K$. 由于

$$R/K = \{r + K \,|\, r \in R\} = \{r(1_R + K) \,|\, r \in R\} = R(1_R + K),$$

故 R/K 为循环模, 从而 M 为循环模.

(2) 设 x 为循环模 M 的一个生成元, 定义映射

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow M = Rx \\ r &\longmapsto \quad rx \end{aligned}$$

易知 f 是一个 R 模满同态, 且 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ann}_R(x)$, 从而由模同态基本定理知 $M \cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$. 下面我们证明 M 为单模当且仅当 $\operatorname{Ann}_R(x)$ 是 R 的极大理想.

($\Longrightarrow$) 因为 M 为单模, 故 M 只有平凡子模, 从而 $R/\operatorname{Ann}_R(x)$ 只有平凡子模, 也即只有平凡理想, 因此 $R/\operatorname{Ann}_R(x)$ 为单环, 故 $\operatorname{Ann}_R(x)$ 为 R 的极大理想.

($\Longleftarrow$) 因为 $\operatorname{Ann}_R(x)$ 为 R 的极大理想, 故 $R/\operatorname{Ann}_R(x)$ 为单环, 只有平凡理想, 也即只有平凡子模, 故 $R/\operatorname{Ann}_R(x)$ 为单模, 从而 M 为单模. □

2.3 正合列

定义: 设有一对 R 模同态

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

若 f 与 g 满足 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, 则称 f 与 g 在 M 处**正合**. 对于单独一个同态

$$M' \xrightarrow{f} M$$

我们称 f 在 M 与 M' 处均**正合**. 如果 R 模同态序列

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

在每一个 M_i 处均正合, 即

$$\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}, \quad \text{对所有有意义的}\, i$$

则称该序列为**正合列**.

定理: 设 $f: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, 则

(1) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ 正合当且仅当 f 为单同态;

(2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合当且仅当 f 为满同态;

(3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合当且仅当 f 为同构.

证明 (1) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ 正合 $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} 0 = \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Longleftrightarrow f$ 为单同态.

(2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合 $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = N \Longleftrightarrow f$ 为满同态.

(3) 由 (1) 和 (2) 可知 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ 正合 $\Longleftrightarrow f$ 为同构. □

设 $f: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, $i: \operatorname{Ker} f \longrightarrow M$ 为嵌入映射, ν 为自然同态

$$\begin{aligned} \nu: N &\longrightarrow \operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f \\ x &\longmapsto \quad x + \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

则不难验证

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\nu} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

是一个正合列.

定义: 具有形式

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

的正合列称为**短正合列**.

易知上述短正合列中的 f 必为单同态, g 必为满同态.

引理 (短五引理): 设有以下 R 模同态交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中水平的两行均为正合列, 则

(1) 若 α, γ 均为单同态, 则 β 为单同态;

(2) 若 α, γ 均为满同态, 则 β 为满同态;

(3) 若 α, γ 均为同构, 则 β 为同构.

证明 (1) 交换图如下.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f\,(单)"] \arrow[d, "\alpha\,(单)"] & M \arrow[r, "g\,(满)"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma\,(单)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'\,(单)"] & M' \arrow[r, "g'\,(满)"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} f'\alpha &= \beta f \\ g'\beta &= \gamma g \end{aligned}$$

任取 $m \in \operatorname{Ker}\beta$, 则 $\beta(m) = 0$, $g'(\beta(m)) = 0$, 从而 $\gamma(g(m)) = 0$, 因为 γ 单, 故 $g(m) = 0$, $m \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, 故存在 $k \in K$, 使得 $f(k) = m$. 从而 $f'(\alpha(k)) = \beta(f(k)) = \beta(m) = 0$, 由 f' 单可知 $\alpha(k) = 0$, 再由 α 单可知 $k = 0$, 故 $m = f(k) = f(0) = 0$. 因此 $\operatorname{Ker}\beta = 0$, 即 β 单.

(2) 交换图如下.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f\,(单)"] \arrow[d, "\alpha\,(满)"] & M \arrow[r, "g\,(满)"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma\,(满)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'\,(单)"] & M' \arrow[r, "g'\,(满)"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} f'\alpha &= \beta f \\ g'\beta &= \gamma g \end{aligned}$$

任取 $m' \in M'$, 则 $g'(m') \in N'$. 因 γ 满, 故存在 $n \in N$, 使得 $\gamma(n) = g'(m')$. 因 g 满, 故存在 $m \in M$, 使得 $g(m) = n$, 从而 $g'(m') = \gamma(n) = \gamma(g(m)) = g'(\beta(m))$, 即 $g'(m' - \beta(m)) = 0$, 故 $m' - \beta(m) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$. 因此存在 $k' \in K'$, 使得 $f'(k') = m' - \beta(m)$. 因 α 满, 故存在 $k \in K$, 使得 $\alpha(k) = k'$, 从而 $\beta(f(k)) = f'(\alpha(k)) = f'(k') = m' - \beta(m)$, 故 $m' = \beta(f(k) + m) \in \operatorname{Im}\beta$, 从而 β 满.

(3) 由 (1) 与 (2) 可得.

引理: 设 $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 为一对 R 模同态, 则 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ 当且仅当 $gf = 0$.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $k \in K$, 则 $f(k) \in \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$, 从而 $(gf)(k) = g(f(k)) = 0$, 故 $gf = 0$.

($\Longleftarrow$) 任取 $m \in \operatorname{Im} f$, 则存在 $k \in K$, 使得 $f(k) = m$, 从而 $g(m) = g(f(k)) = (gf)(k) = 0$, 故 $m \in \operatorname{Ker} g$, 从而 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$. □

由上述引理可知, 对于 $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$, 当 f 与 g 在 M 处正合时, 有 $gf = 0$ (因为此时 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$).

引理 (蛇形引理): 设有以下 R 模同态交换图

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' & \end{tikzcd}$$

其中水平两行均正合, 则存在 R 模同态 $\delta:\operatorname{Ker}\gamma\longrightarrow\operatorname{Coker}\alpha$, 使得序列

$$\operatorname{Ker}\alpha\xrightarrow{f_0}\operatorname{Ker}\beta\xrightarrow{g_0}\operatorname{Ker}\gamma\xrightarrow{\delta}\operatorname{Coker}\alpha\xrightarrow{\overline{f'}}\operatorname{Coker}\beta\xrightarrow{\overline{g'}}\operatorname{Coker}\gamma$$

正合, 且

(1) 若 f 单, 则 f_0 单;

(2) 若 g' 满, 则 $\overline{g'}$ 满.

证明　第一步　构造同态映射.

① f_0,g_0 按如下方式构造:

$$\begin{aligned} f_0:\operatorname{Ker}\alpha &\longrightarrow \operatorname{Ker}\beta & g_0:\operatorname{Ker}\beta &\longrightarrow \operatorname{Ker}\gamma\\ k &\longmapsto f(k) & m &\longmapsto g(m)\end{aligned}$$

若 $k\in\operatorname{Ker}\alpha$, 则 $\alpha(k)=0$, 从而 $\beta(f(k))=f'(\alpha(k))=f'(0)=0$, 故 $f(k)\in\operatorname{Ker}\beta$. 因此 f_0 是一个映射, 同理可知 g_0 是一个映射. 容易验证 f_0,g_0 是同态.

② $\overline{f'},\overline{g'}$ 按如下方式构造:

$$\begin{aligned} \overline{f'}:\quad \operatorname{Coker}\alpha &\longrightarrow \operatorname{Coker}\beta & \overline{g'}:\quad \operatorname{Coker}\beta &\longrightarrow \operatorname{Coker}\gamma\\ k'+\operatorname{Im}\alpha &\longmapsto f'(k')+\operatorname{Im}\beta & m'+\operatorname{Im}\beta &\longmapsto g'(m')+\operatorname{Im}\gamma\end{aligned}$$

若 $k_1'+\operatorname{Im}\alpha=k_2'+\operatorname{Im}\alpha$, 则 $k_1'-k_2'\in\operatorname{Im}\alpha$, 从而存在 $k\in K$, 使得 $\alpha(k)=k_1'-k_2'$, 从而 $\beta(f(k))=f'(\alpha(k))=f'(k_1'-k_2')$, 故 $f'(k_1')-f'(k_2')=\beta(f(k))\in\operatorname{Im}\beta$, 从而 $f'(k_1')+\operatorname{Im}\beta=f'(k_2')+\operatorname{Im}\beta$. 因此 $\overline{f'}$ 是一个映射, 同理可知 $\overline{g'}$ 是一个映射. 容易验证 $\overline{f'},\overline{g'}$ 是同态.

③ 下面构造 $\delta:\operatorname{Ker}\gamma\longrightarrow\operatorname{Coker}\alpha=K'/\operatorname{Im}\alpha$.

对任意的 $n\in\operatorname{Ker}\gamma$, 因为 g 满, 故存在 $m\in M$, 使得 $g(m)=n$, 从而 $g'(\beta(m))=\gamma(g(m))=\gamma(n)=0$, 故 $\beta(m)\in\operatorname{Ker}g'=\operatorname{Im}f'$, 从而存在 $k'\in K'$, 使得 $f'(k')=\beta(m)$. 令 $\delta(n)=k'+\operatorname{Im}\alpha$, 也即

$$\begin{aligned} \delta:\operatorname{Ker}\gamma &\longrightarrow \operatorname{Coker}\alpha\\ n &\longmapsto k'+\operatorname{Im}\alpha,\quad \text{其中} f'(k')=\beta(m),g(m)=n.\end{aligned}$$

下面我们证明 δ 确实是一个映射. 任取 $n\in\operatorname{Ker}\gamma$. 若 $g(m_1)=g(m_2)=n$, 则存在 $k_1',k_2'\in K'$, 使得 $\beta(m_1)=f'(k_1'),\beta(m_2)=f'(k_2')$, 从而 $\beta(m_1-m_2)=f'(k_1'-k_2')=0$. 又因为 $m_1-m_2\in\operatorname{Ker}g=\operatorname{Im}f$, 故存在 $k\in K$, 使得 $f(k)=m_1-m_2$, 从而 $f'(\alpha(k))=\beta(f(k))=\beta(m_1-m_2)=f'(k_1'-k_2')$. 由于 f' 单, 故 $k_1'-k_2'=\alpha(k)\in\operatorname{Im}\alpha$, 从而 $k_1'+\operatorname{Im}\alpha=k_2'+\operatorname{Im}\alpha$, 故 δ 是一个映射. 容易验证 δ 是一个同态.

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0(\text{嵌入})"] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0(\text{嵌入})"] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d, "\gamma_0(\text{嵌入})"] & \\
 & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g(\text{满})"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'(\text{单})"] \arrow[d, "\overline{\alpha}(\text{自然同态})"] & M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\overline{\beta}(\text{自然同态})"] & N' \arrow[d, "\overline{\gamma}(\text{自然同态})"] & \\
 & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r, "\overline{f'}"] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r, "\overline{g'}"] & \operatorname{Coker}\gamma &
\end{tikzcd}
$$

$gf=0$
$g'f'=0$

$f'\alpha=\beta f$
$g'\beta=\gamma g$

第二步 证明各处正合.

(1) 下证 $\operatorname{Im} g_0=\operatorname{Ker}\delta$.

① 先证 $\operatorname{Im} g_0\subseteq\operatorname{Ker}\delta$.

任取 $n\in\operatorname{Im} g_0\subseteq\operatorname{Ker}\gamma\subseteq N$, 则存在 $m\in\operatorname{Ker}\beta\subseteq M$, 使得 $g_0(m)=n$, 也即 $g(m)=n$. 由交换图知 $g'(\beta(m))=\gamma(g(m))=\gamma(n)=0$, 故 $\beta(m)\in\operatorname{Ker} g'=\operatorname{Im} f'$, 从而存在 $k'\in K'$, 使得 $f'(k')=\beta(m)=0$. 由 f' 单可知 $k'=0$, 从而 $\delta(n)=0+\operatorname{Im}\alpha$, 故 $n\in\operatorname{Ker}\delta$.

② 再证 $\operatorname{Ker}\delta\subseteq\operatorname{Im} g_0$.

任取 $n\in\operatorname{Ker}\delta\subseteq\operatorname{Ker}\gamma\subseteq N$, 则 $\gamma(n)=0$. 因 g 满, 故存在 $m\in M$, 使得 $g(m)=n$. 由交换图知 $g'(\beta(m))=\gamma(g(m))=\gamma(n)=0$, 故 $\beta(m)\in\operatorname{Ker} g'=\operatorname{Im} f'$, 从而存在 $k'\in K'$, 使得 $f'(k')=\beta(m)$, 故 $\delta(n)=k'+\operatorname{Im}\alpha$. 又因为 $n\in\operatorname{Ker}\delta$, 故 $k'+\operatorname{Im}\alpha=\operatorname{Im}\alpha$, 从而 $k'\in\operatorname{Im}\alpha$. 因此存在 $k\in K$, 使得 $\alpha(k)=k'$, 从而 $\beta(m)=f'(k')=f'(\alpha(k))=\beta(f(k))$, 故 $m-f(k)\in\operatorname{Ker}\beta$. 由于 $g_0(m-f(k))=g(m-f(k))=g(m)-(gf)(k)$. 因为 $gf=0$, 故 $g_0(m-f(k))=g(m)=n$, 从而 $n\in\operatorname{Im} g_0$.

(2) 下证 $\operatorname{Im}\delta=\operatorname{Ker}\overline{f'}$.

① 先证 $\operatorname{Im}\delta\subseteq\operatorname{Ker}\overline{f'}$.

任取 $k'+\operatorname{Im}\alpha\in\operatorname{Im}\delta\subseteq\operatorname{Ker}\alpha$, 则存在 $n\in\operatorname{Ker}\gamma$, 使得 $\delta(n)=k'+\operatorname{Im}\alpha$. 由 δ 的构造可知存在 $m\in M$, 使得 $f'(k')=\beta(m),g(m)=n$. 因此 $\overline{f'}(k'+\operatorname{Im}\alpha)=f'(k')+\operatorname{Im}\beta=\beta(m)+\operatorname{Im}\beta=\operatorname{Im}\beta$, 即 $k'+\operatorname{Im}\alpha\in\operatorname{Ker}\overline{f'}$.

② 再证 $\operatorname{Ker}\overline{f'}\subseteq\operatorname{Im}\delta$.

任取 $k'+\operatorname{Im}\alpha\in\operatorname{Ker}\overline{f'}$, 则 $\overline{f'}(k'+\operatorname{Im}\alpha)=f'(k')+\operatorname{Im}\beta=\operatorname{Im}\beta$, 故 $f'(k')\in\operatorname{Im}\beta$. 因此存在 $m\in M$, 使得 $f'(k')=\beta(m)$. 令 $n=g(m)$, 则 $\gamma(n)=\gamma(g(m))=g'(\beta(m))=g'(f'(k'))$. 因为 $g'f'=0$, 故 $\gamma(n)=0,n\in\operatorname{Ker}\gamma$. 由 δ 的构造可知 $\delta(n)=k'+\operatorname{Im}\alpha$, 因此 $k'+\operatorname{Im}\alpha\in\operatorname{Im}\delta$.

(3) 其余各处的正合性不难证明. $\square$

定义: 设有 R 模同态交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中水平两行为短正合列. 若 α, β, γ 均为同构, 则称这两个短正合列是同构的.

3 模的直和与直积

3.1 两个模的直和

定义: 设 M_1 与 M_2 为两个 R 模, 记 $M_1 \oplus M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$, 定义 $M_1 \oplus M_2$ 上的加法与 R 模的作用分别为

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2),$$

则 $M_1 \oplus M_2$ 也作成一个 R 模, 称为模 M_1 与 M_2 的**直和**.

定义: 称映射

$$\begin{aligned} \eta_1 : M_1 &\longrightarrow M_1 \oplus M_2 \\ x_1 &\longmapsto (x_1, 0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \eta_2 : M_2 &\longrightarrow M_1 \oplus M_2 \\ x_2 &\longmapsto (0, x_2) \end{aligned}$$

为**典范内射**, 称映射

$$\begin{aligned} \pi_1 : M_1 \oplus M_2 &\longrightarrow M_1 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_2 : M_1 \oplus M_2 &\longrightarrow M_2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

为**典范射影**.

易知 η_1, η_2 为单同态, π_1, π_2 为满同态, 且 (下面 5 个式子很重要)

$$\pi_1\eta_1 = 1_{M_1}, \quad \pi_2\eta_2 = 1_{M_2},$$
$$\pi_1\eta_2 = 0, \quad \pi_2\eta_1 = 0,$$
$$\eta_1\pi_1 + \eta_2\pi_2 = 1_{M_1 \oplus M_2}.$$

与作直和的过程相反的是把一个模“分解”为子模的直和. 设 M_1, M_2 为 R 模 M 的两个子模,

且 $M = M_1 + M_2, M_1 \cap M_2 = 0$. 定义映射

$$\begin{aligned} i: M_1 \oplus M_2 &\longrightarrow \quad M \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

易知 i 为 R 模同态. 任取 $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} i$, 则 $i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 0$, 从而 $x_1 = -x_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$, 故 $x_1 = x_2 = 0$, $\operatorname{Ker} i = 0$, i 为单同态. 由 $M = M_1 + M_2$ 知对任意的 $x \in M$, 存在 $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$, 从而 $i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x$, 即 i 为满同态. 综上, i 为同构, $M \cong M_1 \oplus M_2$. 我们称 M 是它的子模 M_1, M_2 的**内直和**. 由 $M \cong M_1 \oplus M_2$ 可知在同构的意义下内直和与直和并无本质区别, 因此我们也把内直和写为 $M = M_1 \oplus M_2$ 的形式.

引理: $M = M_1 \oplus M_2$ 当且仅当对任意的 $x \in M$, 存在唯一的 $x_1 \in M_1$ 以及 $x_2 \in M_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$.

证明 ($\Longrightarrow$) 因 $M = M_1 + M_2$, 故对任意的 $x \in M$, 存在 $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$. 若另有 $y_1 \in M_1, y_2 \in M_2$, 使得 $x = y_1 + y_2$, 则 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, 从而 $x_1 - y_1 = -(x_2 - y_2) \in M_1 \cap M_2 = 0$, 故 $x_1 = y_1, x_2 = y_2$, 因此分解唯一.

($\Longleftarrow$) 由分解的存在性知 $M = M_1 + M_2$. 任取 $x \in M_1 \cap M_2$, 则由 $x + 0 = 0 + x$ 以及分解的唯一性知 $x = 0$, 故 $M_1 \cap M_2 = 0$, $M = M_1 \oplus M_2$. □

并不是 M 的所有子模都能出现在 M 的直和分解中. 若子模 K 能出现在 M 的直和分解中, 则称 K 为 M 的**直和项**. 若 $M = M_1 \oplus M_2$, 则 M_1 与 M_2 均为 M 的直和项, 此时我们称 M_1 与 M_2 互为对方的**直和补**. 直和补一般不唯一.

引理: 设有 R 模同态 $f: N \longrightarrow M$, $g: M \longrightarrow N$, 使得

$$gf = 1_N,$$

则 f 为单同态, g 为满同态, 且 $M = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

证明 由 1_N 为双射知 f 为单同态, g 为满同态. 任取 $m \in M$, 则 $m = \underline{fg(m)} + \underline{m - fg(m)}$. 由于

$$g(m - fg(m)) = g(m) - (gf)(g(m)) = g(m) - g(m) = 0,$$

故 $m - fg(m) \in \operatorname{Ker} g$. 又因为 $fg(m) \in \operatorname{Im} f$, 从而 $M = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$.

任取 $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, 则存在 $n \in N$, 使得 $f(n) = x$, 从而

$$n = g(f(n)) = g(x) = 0,$$

故 $x = f(n) = f(0) = 0$, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = 0$. 因此 $M = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$. □

定义: (1) 设 $f: N \longrightarrow M$ 为 R 模同态, 若存在 R 模同态 $g: M \longrightarrow N$, 使得

$$gf = 1_N,$$

则称 f 是**分裂单同态**.

(2) 设 $g: M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, 若存在 R 模同态 $f: N \longrightarrow M$, 使得

$$gf = 1_N,$$

则称 g 是**分裂满同态**.

(3) 若短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

中 f 为分裂单同态, g 为分裂满同态, 则称该短正合列是**分裂**的.

易知前述引理中的 f 与 g 分别为分裂单同态与分裂满同态, 并且不难验证

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\eta_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

是一个分裂短正合列.

定理(非常重要): 设有 R 模同态短正合列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

则下列各条等价:

(1) 该短正合列分裂;

(2) f 是分裂单同态;

(3) g 是分裂满同态;

(4) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ 是 M 的直和项;

(5) 任意的 R 模同态 $h: M_1 \longrightarrow N$ 通过 f 分解;

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & M \arrow[u, dashed, "\overline{h}"'] \end{tikzcd}$$

(5)

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\overline{h}"'] \arrow[dr, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M_2 \end{tikzcd}$$

(6)

(6) 任意的 R 模同态 $h: N \longrightarrow M_2$ 通过 g 分解;

(7) 存在短正合列的同构:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M_1}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\eta_1"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r, "\pi_2"] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 因为 f 分裂单, 故存在 R 模同态 $f' : M \longrightarrow M_1$, 使得 $f'f = 1_{M_1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & M \\
M \arrow[ur, "1_M - ff'"] \arrow[r, "g"] & M_2 \arrow[u, dashed, "g'"']
\end{tikzcd}$$

因为 $(1_M - ff')f = f - f = 0$, 故 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker}(1_M - ff')$. 因为 g 是满同态, 由定理$(*)$ 可知存在唯一的 R 模同态 $g' : M_2 \longrightarrow M$, 使得 $1_M - ff' = g'g$, 从而

$$(gg')g = g(g'g) = g(1_M - ff') = g - 0 = g.$$

由于 g 满, 故可右消去, 从而得到 $gg' = 1_{M_2}$, 即 g 是分裂满的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 因为 g 分裂满, 故存在 R 模同态 $g' : M_2 \longrightarrow M$, 使得 $gg' = 1_{M_2}$, 从而由前述引理知 $M = \operatorname{Im} g' \oplus \operatorname{Ker} g$. 因此 $\operatorname{Ker} g$ 为 M 的直和项. 又因为 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, 故 $\operatorname{Im} f$ 也为 M 的直和项.

(4) $\Rightarrow$ (5)

$$\begin{tikzcd}
 & N \\
M_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, dashed, "\overline{h}"']
\end{tikzcd}$$

因为 $\operatorname{Im} f$ 为 M 的直和项, 故存在 M 的子模 M', 使得 $M = \operatorname{Im} f \oplus M'$. 任取 $m \in M$, 则存在唯一的 $m_0 \in \operatorname{Im} f$ 与 $m' \in M'$, 使得 $m = m_0 + m'$. 因为 f 单, 故存在唯一的 $m_1 \in M_1$, 使得 $f(m_1) = m_0$. 令

$$\begin{aligned}
\overline{h} : \quad M \quad & \longrightarrow N \\
m = f(m_1) + m' & \longmapsto h(m_1)
\end{aligned}$$

易知 $\overline{h}$ 为 R 模同态, 且 $(\overline{h}f)(m_1)=\overline{h}(f(m_1))=h(m_1)$, 故 $\overline{h}f=h$, 即 h 通过 f 分解.

(5) $\Rightarrow$ (6)

$$\begin{tikzcd} & M_1 \\ M_1 \arrow[ur, "1_{M_1}"] \arrow[r, "f"'] & M \arrow[u, dashed, "f'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\overline{h}"'] \arrow[dr, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M_2 \end{tikzcd}$$

由 (5) 知存在 $f':M\longrightarrow M_1$, 使得 $f'f=1_{M_1}$, 从而由前述引理知 $M=\operatorname{Im}f\oplus\operatorname{Ker}f'$, 也即 $M=\operatorname{Ker}g\oplus\operatorname{Ker}f'$. 下面考察同态 g 在 $\operatorname{Ker}f'$ 上的限制 $g|_{\operatorname{Ker}f'}:\operatorname{Ker}f'\longrightarrow M_2$.

显然 $\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Ker}f'})\subseteq\operatorname{Ker}g\cap\operatorname{Ker}f'$. 由于 $M=\operatorname{Ker}g\oplus\operatorname{Ker}f'$, 故 $\operatorname{Ker}g\cap\operatorname{Ker}f'=0$, 从而 $\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Ker}f'})=0$, $g|_{\operatorname{Ker}f'}$ 单.

任取 $m_2\in M_2$, 因为 g 满, 故存在 $m\in M$, 使得 $g(m)=m_2$. 又因为 $M=\operatorname{Ker}g\oplus\operatorname{Ker}f'$, 故存在唯一的 $m_0\in\operatorname{Ker}g$ 与 $m'\in\operatorname{Ker}f'$, 使得 $m=m_0+m'$, 从而

$$m_2=g(m)=g(m_0+m')=g(m_0)+g(m')=g(m'),$$

注意到 $m'\in\operatorname{Ker}f'$, 故 $g|_{\operatorname{Ker}f'}$ 满. 综上, $g|_{\operatorname{Ker}f'}$ 为双射. 令

$$\begin{aligned}\overline{h}:N\longrightarrow&\quad M\\ n\longmapsto&\ (g|_{\operatorname{Ker}f'})^{-1}h(n)\end{aligned}$$

易知 $\overline{h}$ 为 R 模同态, 且 $g\overline{h}(n)=g(g|_{\operatorname{Ker}f'})^{-1}h(n)=h(n)$, 因此 $g\overline{h}=h$, 即 h 通过 g 分解.

(6) $\Rightarrow$ (7)

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "1_{M_2}"] & \\ M \arrow[r, "g"] & M_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "1_{M_1}"] & M_1\oplus M_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\psi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_2}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由 (6) 知存在 R 模同态 $h: M_2 \longrightarrow M$, 使得 $gh = 1_{M_2}$. 令

$$\begin{aligned} \psi: M_1 \oplus M_2 \longrightarrow & \quad M \\ (x_1, x_2) \longmapsto & f(x_1) + h(x_2) \end{aligned}$$

则对任意的 $x_1 \in M_1$, 有

$$\psi\eta_1(x_1) = \psi(x_1, 0) = f(x_1) = f1_{M_1}(x_1),$$

因此 $\psi\eta_1 = f1_{M_1}$. 又因为对任意的 $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$, 有

$$g\psi(x_1, x_2) = g(f(x_1) + h(x_2)) = gh(x_2) = 1_{M_2}(x_2) = 1_{M_2}\pi_2(x_1, x_2),$$

故 $g\psi = 1_{M_2}\pi_2$. 综上所述, 上图为交换图. 由于 $1_{M_1}, 1_{M_2}$ 为同构, 因此由短五引理可知 ψ 为同构, 故两短正合列同构.

(7) $\Rightarrow$ (1)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M_1}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\eta_1"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r, "\pi_2"] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为

$$\pi_1\phi f = \pi_1\eta_1 1_{M_1} = 1_{M_1},$$

故 f 分裂单. 又因为

$$g\phi^{-1}\eta_2 = 1_{M_2}g\phi^{-1}\eta_2 = \pi_2\phi\phi^{-1}\eta_2 = \pi_2\eta_2 = 1_{M_2},$$

故 g 分裂满. 因此短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ 分裂. $\square$

3.2 模族的直积与直和

定义: 设 $\{M_i \,|\, i \in I\}$ 是一族 R 模, 记 $\prod\limits_{i\in I} M_i = \{\{m_i\}_{i\in I} \,|\, m_i \in M_i\}$. 定义 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 的加法与模的乘法分别为

$$\{m_i\} + \{m_i'\} = \{m_i + m_i'\}, \quad a\{m_i\} = \{am_i\},$$

则 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 关于这样定义的运算作成一个 R 模, 称为模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的**直积**.

定义: 对任意的 $j \in I$, 称映射

$$\begin{aligned} \pi_j : \prod_{i\in I} M_i &\longrightarrow M_j \\ \{m_i\}_{i\in I} &\longmapsto m_j \end{aligned}$$

为直积 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 的**典范射影**.

定理 (直积的泛性质): (1) 对任意的 R 模 N 与一族 R 模同态 $\{f_i : N \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{f} : N \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} M_i$, 使得

$$f_j = \pi_j \overline{f}, \quad \forall j \in I.$$

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ N \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"] \arrow[r, "f_j"'] & M_j \end{tikzcd}$$

(1)

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "p_j"] \\ N \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"] \arrow[r, "f_j"'] & M_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\text{(同构)}\ \exists \phi"] \arrow[r, "p_j"'] & M_j \end{tikzcd}$$

(2)

(2) 设 R 模 M 带有一族 R 模同态 $\{p_i : M \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$, 且满足: 对任意的 R 模 N 与一族 R 模同态 $\{f_i : N \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{f} : N \longrightarrow M$, 使得

$$f_j = p_j \overline{f}, \quad \forall j \in I,$$

则存在 R 模同构 $\phi : M \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} M_i$, 且 $p_j = \pi_j \phi$, $\forall j \in I$.

证明 (1)

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ N \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{f}"] \arrow[r, "f_j"'] & M_j \end{tikzcd}$$

作映射

$$
\begin{aligned}
\overline{f}: N &\longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \\
n &\longmapsto \{f_i(n)\}_{i\in I}
\end{aligned}
$$

则对任意的 $n \in N$, 有

$$\pi_j\overline{f}(n) = \pi_j(\{f_i(n)\}_{i\in I}) = f_j(n), \quad j \in I,$$

故 $\pi_j\overline{f} = f_j, j \in I$. 易证 $\overline{f}$ 为 R 模同态, 下证 $\overline{f}$ 的唯一性. 设另有 R 模同态 $g: N \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} M_i$, 使得 $\pi_j g = f_j$. 设 $g(n) = \{x_i\}_{i\in I}$, 则

$$x_j = \pi_j(\{x_i\}_{i\in I}) = \pi_j g(n) = \pi_j\overline{f}(n) = f_j(n), \quad j \in I,$$

从而 $g(n) = \{x_i\}_{i\in I} = \{f_i(n)\}_{i\in I} = \overline{f}(n)$, 故 $g = \overline{f}$, 唯一性得证.

(2)

$$
\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_j"] \\
M \arrow[ur, dashed, "\exists\,\phi"] \arrow[r, "p_j"'] & M_j
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, "p_j"] \\
\prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[ur, dashed, "\exists\,\overline{f}"] \arrow[r, "\pi_j"'] & M_j
\end{tikzcd}
$$

由 (1) 知存在 R 模同态 $\phi: M \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} M_i$, 使得 $p_j = \pi_j\phi, \forall\, j \in I$. 下证 ϕ 为同构.

取 N 为 $\prod\limits_{i\in I} M_i$, 再取 f_j 为 π_j, 由条件知存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}: \prod\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow M$, 使得 $\pi_j = p_j\overline{f}$, $\forall\, j \in I$, 因此

$$\begin{cases} p_j = p_j\overline{f}\phi, \\ \pi_j = \pi_j\phi\overline{f}. \end{cases}$$

取 N 为 M, 再取 f_j 为 p_j, 则由条件中的唯一性知 $\overline{f}\phi = 1_M$, 从而 ϕ 单.

取 M 为 $\prod\limits_{i\in I} M_i$, 则由 (1) 中的唯一性知 $\phi\overline{f} = 1_{\prod\limits_{i\in I} M_i}$, 故 ϕ 满. 综上, ϕ 为同构. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "p_j"] \\
M \arrow[ur, shift left, "1_M"] \arrow[ur, shift right, "\overline{f}\phi"'] \arrow[r, "p_j"'] & M_j
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_j"] \\
\prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[ur, shift left, "1_{\prod\limits_{i\in I} M_i}"] \arrow[ur, shift right, "\phi\overline{f}"'] \arrow[r, "\pi_j"'] & M_j
\end{tikzcd}
$$

上述定理中的 (1) 说明模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的直积具有泛性质, (2) 说明若模 M 具有直积的泛性质, 则 M 本质上就是直积.

定理: 设有 R 模 N 与 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$, 则有 R 模同构

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i) \cong \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right).$$

证明 由前述定理可知对任意一族 R 模同态 $\{f_i : N \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{f} : N \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} M_i$ 满足 $f_j = \pi_j \overline{f}, \forall j \in I$, 从而我们可以定义映射

$$
\begin{aligned}
\sigma : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \\
\{f_i\}_{i\in I} &\longmapsto \overline{f}, \quad \text{其中} f_j = \pi_j \overline{f},\ j \in I.
\end{aligned}
$$

显然 σ 是 R 模同态, 下面我们证明 σ 为双射.

任取 $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Ker}\,\sigma$, 则 $\sigma(\{f_i\}_{i\in I}) = 0$, $f_j = \pi_j 0 = 0, j \in I$. 因此 $\{f_i\}_{i\in I} = \{0\}_{i\in I}$, 故 σ 为单同态. 任取 $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod\limits_{i\in I} M_i\right)$, 令 $f_j = \pi_j \overline{f}$, 则 $\sigma(\{f_i\}_{i\in I}) = \overline{f}$, 因此 σ 为满同态. 综上, σ 为 R 模同构, $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i) \cong \mathrm{Hom}_R\left(N, \prod\limits_{i\in I} M_i\right)$. □

定义: 设 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 是 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的直积, 称 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 的子集

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ \{m_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; \text{只有有限个 } m_i \text{ 不为 } 0 \right\}$$

为 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的**直和**, 它是 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 的子模.

由定义不难看出, 当指标集 I 有限时, 直积与直和是相同的, 而当 I 是无限集时, 直积与直和是不同的.

定义: 对任意的 $j \in I$, 称映射

$$\begin{aligned} \eta_j : M_j &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \\ m_j &\longmapsto \{m_i\}_{i \in I}, \quad \text{当 } i \neq j \text{ 时}, m_i = 0 \end{aligned}$$

为 $\bigoplus_{i \in I} M_i$ 的**典范内射**.

特别地, 当指标集 I 有限或可数时, 对任意的 $m_j \in M_j$, 有 $\eta_j(m_j) = \{\cdots, 0, m_j, 0, \cdots\}$.

定理 (直和的泛性质): (1) 对任意的 R 模 N 与一族 R 模同态 $\{g_i : M_i \longrightarrow N\}_{i \in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{g} : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow N$, 使得

$$g_j = \overline{g}\eta_j, \quad \forall j \in I.$$

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists\, \overline{g}"] \\ M_j \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[r, "g_j"'] & N \end{tikzcd}$$

(1)

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, dashed, "\exists\, \overline{g}"] \\ M_j \arrow[ur, "q_j"] \arrow[r, "g_j"'] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists\, \phi\,(\text{同构})"] \\ M_j \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[r, "q_j"'] & M \end{tikzcd}$$

(2)

(2) 设 R 模 M 带有一族 R 模同态 $\{q_i : M_i \longrightarrow M\}_{i \in I}$, 且满足: 对任意的 R 模 N 和一族 R 模同态 $\{g_i : M_i \longrightarrow N\}_{i \in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{g} : M \longrightarrow N$, 使得

$$g_j = \overline{g} q_j, \quad \forall j \in I,$$

则存在 R 模同构 $\phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M$, 且 $q_j = \phi\eta_j, \forall j \in I$.

证明 (1)

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists\, \overline{g}"] \\ M_j \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[r, "g_j"'] & N \end{tikzcd}$$

作映射

$$\begin{aligned} \overline{g}: \bigoplus_{i\in I} M_i &\longrightarrow N \\ \{m_i\}_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} g_i(m_i) \end{aligned}$$

因为 $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ 中的元素至多有限项不为 0, 故 $\sum\limits_{i\in I} g_i(m_i)$ 实际上是有限和. 易知 $\overline{g}$ 为 R 模同态. 由于对任意的 $j\in I, m_j\in M_j$, 有 $\overline{g}\eta_j(m_j) = g_j(m_j)$, 故 $g_j = \overline{g}\eta_j$.

若另有 $h: \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow N$, 使得 $g_j = h\eta_j$, 则

$$h(\{m_i\}_{i\in I}) = h\left(\sum_{i\in I}\eta_i(m_i)\right) = \sum_{i\in I} h\eta_i(m_i) = \sum_{i\in I} g_i(m_i) = \overline{g}(\{m_i\}_{i\in I}).$$

因此 $h = \overline{g}$, 唯一性得证.

(2)

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists\ \phi"] \\ M_j \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[r, "q_j"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[d, dashed, "\exists\ \overline{g}"] \\ M_j \arrow[ur, "q_j"] \arrow[r, "\eta_j"'] & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \end{tikzcd}$$

由 (1) 知存在 R 模同态 $\phi: \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow M$, 使得 $q_j = \phi\eta_j, \forall\, j\in I$. 下证 ϕ 为同构.

取 N 为 $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, 再取 g_j 为 η_j, 则由条件知存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: M \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, 使得 $\eta_j = \overline{g}q_j, \forall\, j\in I$. 从而

$$\begin{cases} q_j = \phi\overline{g}q_j, \\ \eta_j = \overline{g}\phi\eta_j. \end{cases}$$

取 N 为 M, 取 g_j 为 q_j, 则由条件中的唯一性知 $\phi\overline{g} = 1_M$, 从而 ϕ 为满同态.

取 M 为 $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, 取 q_j 为 η_j, 则由 (1) 中的唯一性知 $\overline{g}\phi = 1_{\bigoplus\limits_{i\in I} M_i}$, 从而 ϕ 为单同态. 综上, ϕ 为同构. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, shift right, "\phi\overline{g}"'] \arrow[d, shift left, "1_M"] \\
M_j \arrow[ur, "q_j"] \arrow[r, "q_j"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, shift right, "\overline{g}\phi"'] \arrow[d, shift left, "1_{\bigoplus\limits_{i\in I} M_i}"] \\
M_j \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[r, "\eta_j"'] & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i
\end{tikzcd}
$$

上述定理中的 (1) 说明模族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的直和具有泛性质, (2) 说明若模 M 具有直和的泛性质, 则 M 本质上就是直和.

定理: 对于 R 模 N 与 R 模族 $\{M_i\}_{i\in I}$, 有 R 模同构

$$
\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right).
$$

证明 由前述定理可知对任意的一族 R 模同态 $\{g_i : M_i \longrightarrow N\}_{i\in I}$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{g} : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \longrightarrow N$, 使得 $g_j = \overline{g}\eta_j, \forall\, j \in I$. 作映射

$$
\begin{aligned}
\sigma : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \\
\{g_i\}_{i\in I} &\longmapsto \overline{g}, \quad \text{其中}\, g_j = \overline{g}\eta_j,\ j \in I.
\end{aligned}
$$

不难验证 σ 是模同构. $\square$

命题: 设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是 R 模 M 的一族子模, 且满足

(1) $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$;

(2) $M_j \cap \sum\limits_{i\neq j} M_i = 0,\ \forall\, j \in I$.

则存在同构 $M \cong \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

证明 作映射

$$
\begin{aligned}
\varphi : \bigoplus_{i\in I} M_i &\longrightarrow M \\
\{m_i\}_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} m_i
\end{aligned}
$$

因为 $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ 中的元素至多有限项不为 0, 故 $\sum\limits_{i\in I} m_i$ 是一个有限和. 易证 φ 是 R 模同态.

因为 $M=\sum_{i\in I}M_i$, 故 φ 是满同态. 又设 $0=\sum_{i\in I}m_i=\sum_{i\in I}m_i'$, 则

$$m_j-m_j'=\sum_{i\neq j}(m_i'-m_i)\in M_j\cap\left(\sum_{i\neq j}M_i\right)=0,\quad j\in I.$$

故 $m_j=m_j'$, $j\in I$, 从而 0 的分解唯一. 又因为 $\varphi(\{0\}_{i\in I})=0$, 故 $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}_{i\in I}$, 因此 φ 单. 综上, φ 为同构, $M\cong\bigoplus_{i\in I}M_i$. □

上述命题中的 (1) 说明 M 可被子模 $M_i, i\in I$ 分解, (2) 说明每个元素的分解是唯一的. 我们称上述命题中的 M 是它的子模的**内直和**, 且仍记为 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$, 它是两个子模的内直和 $M=M_1\oplus M_2$ 的推广.

4 自由模

4.1 基本概念与性质

定义: 设 M 为 R 模, $x_1,\cdots,x_n$ 为 M 中互异的 n 个元素, $a_1,\cdots,a_n\in R$. 若

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\quad\Longrightarrow\quad a_1=\cdots=a_n=0$$

则称 $x_1,\cdots,x_n$ 是 ***R*-线性无关**的.

定义: 设 X 是 R 模 M 的非空子集. 如果 X 中任意有限个不同的元素都是 R-线性无关的, 则称 X 是 ***R*-线性无关**的.

定义: 若 X 是 R 模 M 的生成元集 (即 $M=RX$), 且 X 线性无关, 则称 X 是 M 的一个**基**.

定义: 若 R 模 M 有一个基, 则称 M 是一个**自由模**.

例 设 F 为一个域, 则 F 模就是线性空间, 而线性空间必有基存在, 因此 F 模都是自由模.

例 含幺环 R 作为正则模是自由 R 模, 它的基就是 $\{1_R\}$.

定理: R 模 V 是自由模当且仅当 V 是它的同构于 R 的循环 R 子模 V_i 的内直和: $V=\bigoplus_{i\in I}V_i$.

证明 ($\Longrightarrow$) 设 X 是 V 的一个基. 对任意的 $x\in X$, Rx 是 V 的循环 R 子模. 由于

$$\sigma: R\longrightarrow Rx$$
$$r\longmapsto rx$$

是满同态, 且 $\operatorname{Ker}\sigma=\operatorname{Ann}_R(x)$, 从而由模同态基本定理知 $Rx\cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$. 设 $rx=0$, 由 X 是 R-线性无关的可知 $r=0$, 故 $\operatorname{Ann}_R(x)=0$, 从而 $Rx\cong R$. 下证 $V=\bigoplus_{x\in X}Rx$.

显然 $V=RX=\sum_{x\in X}Rx$. 设 $\sum_{i=1}^{n}r_ix_i=0$. 又因为 X 是 R-线性无关的, 故 $r_1=\cdots=r_n=0$,

故 V 中 0 的分解是唯一的. 因此 $V=\bigoplus\limits_{x\in X}Rx$.

($\Longleftarrow$) 设 V 的同构于 R 的循环子模为 Rx_i, 即 $R\cong V_i=Rx_i,\ i\in I$. 由 $Rx_i\cong R/\mathrm{Ann}_R(x_i)$ 及 $Rx_i\cong R$ 可知 $R/\mathrm{Ann}_R(x_i)\cong R$, 故 $\mathrm{Ann}_R(x_i)=0,\ i\in I$. 下面证明 $X=\{x_i\}_{i\in I}$ 就是 V 的基.

显然 $V=\sum\limits_{i\in I}Rx_i=RX$. 设 $\sum\limits_{i\in I}r_ix_i=0$, 由于 $V=\bigoplus\limits_{i\in I}Rx_i$ 是内直和, 因此 V 中 0 的分解 $0=\sum\limits_{i\in I}r_ix_i$ 是唯一的, 故 $r_ix_i=0$. 又因为 $\mathrm{Ann}_R(x_i)=0$, 故 $r_i=0, i\in I$, 从而 $X=\{x_i\}_{i\in I}$ 是线性无关的. 综上, $X=\{x_i\}_{i\in I}$ 是 V 的一个基, V 是自由模. $\square$

定理 (自由模的泛性质/线性扩张): 设 V 是自由 R 模, 则存在集合 X 与映射 $\eta: X\longrightarrow V$, 对任意的 R 模 M 与映射 $f: X\longrightarrow M$, 存在唯一的 R 模同态 $\overline{f}: V\longrightarrow M$, 使得 $f=\overline{f}\eta$.

$$\begin{tikzcd}
 & M \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\eta"'] & V(\text{自由模}) \arrow[u, dashed, "\exists\,\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

证明 取 X 为 V 的基, 映射 η 取为嵌入映射

$$\begin{aligned}\eta: X&\longrightarrow V\\ x&\longmapsto x\end{aligned}$$

定义映射

$$\begin{aligned}\overline{f}:\qquad V\quad&\longrightarrow\quad M\\ \sum_{i=1}^n r_ix_i&\longmapsto\sum_{i=1}^n r_if(x_i)\end{aligned}$$

易知 $\overline{f}$ 为 R 模同态. 任取 $x\in X$, 则 $\overline{f}\eta(x)=\overline{f}(x)=f(x)$, 从而 $f=\overline{f}\eta$. 下证唯一性.

若另有 R 模同态 $g: V\longrightarrow M$, 使得 $f=g\eta$, 则对任意的 $y=\sum\limits_{i=1}^n r_ix_i\in V$, 有

$$g(y)=g\left(\sum_{i=1}^n r_ix_i\right)=\sum_{i=1}^n r_ig(x_i)=\sum_{i=1}^n r_ig\eta(x_i)=\sum_{i=1}^n r_if(x_i)=\overline{f}\left(\sum_{i=1}^n r_ix_i\right)=\overline{f}(y).$$

从而 $g=\overline{f}$. $\square$

实际上定理中的集合 X 不一定是 V 的基, 映射 $\eta: X\longrightarrow V$ 不一定是嵌入映射, 但必有 $\eta(X)$ 是 V 的基.

定理(重要): 任何 R 模 M 都是自由模的商模. 若 M 是有限生成的, 则 M 可以是有限生成自由模的商模.

证明　设 X 是 M 的一个生成元集 (当 M 有限生成时, X 可以取为有限集). 作自由模 $V = \bigoplus\limits_{x\in X} R_x$, 其中 R_x 是同构于 R 的循环模, $\tilde{x}$ 为其生成元, 即 $R_x = R\tilde{x}$. 定义映射

$$\begin{aligned} \eta : X &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \tilde{x} \end{aligned}$$

易知 $\eta(X)$ 是 V 的基. 令

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

为嵌入映射, 则由前述定理知存在 R 模同态 $\overline{f} : V \longrightarrow M$, 使得 $f = \overline{f}\eta$, 从而

$$X = f(X) \subseteq \overline{f}(V),$$

故 $M \subseteq \overline{f}(V) = \operatorname{Im}\overline{f}$. 又 $\operatorname{Im}\overline{f} \subseteq M$, 故 $\operatorname{Im}\overline{f} = M$, $\overline{f}$ 为满射. 由模同态基本定理知

$$V/\operatorname{Ker}\overline{f} \cong M,$$

即 M 同构于自由模的商模. □

命题: 设 R 模满同态 $f : M \longrightarrow N$, R 模同态 $h : V \longrightarrow N$, 其中 V 是自由模, 则存在 R 模同态 $\overline{h} : V \longrightarrow M$, 使得 $h = f\overline{h}$.

$$\begin{tikzcd}
 & V\,(\text{自由模}) \arrow[dl, dashed, "\exists\,\overline{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\
M \arrow[r, "f", "(\text{满})"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明　设 X 是自由模 V 的基,

$$\begin{aligned} \eta : X &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

为嵌入映射. 因为 f 满, 故对任意的 $x \in X$, $h(x) \in N$, 存在 $m_x \in M$, 使得 $f(m_x) = h(x)$(可能有

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\eta"] \arrow[ddl, dashed, "g"'] & \\
& V \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\exists\overline{h}"] & \\
M \arrow[r, "f", "(满)"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

多个原像, 但只取一个), 从而可定义映射

$$
\begin{aligned}
g : X &\longrightarrow M \\
x &\longmapsto m_x, \text{其中} f(m_x) = h(x)
\end{aligned}
$$

易知 $g(x) = m_x$, 从而对任意的 $x \in X$, 有

$$
f(g(x)) = f(m_x) = h(x) = h(\eta(x)),
$$

因此 $fg = h\eta$. 由自由模的线性扩张知存在 R 模同态 $\overline{h} : V \longrightarrow M$, 使得 $g = \overline{h}\eta$, 从而 $fg = f\overline{h}\eta = h\eta$. 由线性扩张的唯一性知 $h = f\overline{h}$. □

$$
\begin{tikzcd}
& M \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\eta"] & V \arrow[u, dashed, "\exists\overline{h}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& N \\
X \arrow[ur, "fg"] \arrow[r, "\eta"] & V \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[u, shift right, "f\overline{h}"']
\end{tikzcd}
$$

注意上述命题中的同态 $\overline{h}$ 不一定唯一.

4.2 有限生成自由模

我们知道, 线性空间的维数是不变的, 即它的任意一个基都含有相同个数的向量. 但是, 对一般的环 R 而言, R 自由模 M 的基不一定含有相同个数的元素. 不过, 因为我们考虑的都是交换环, 此时对有限生成自由模则有如下结论.

定理: 设 V 是有限生成自由 R 模, 则 V 中所有的基都含有相同个数的元素.

证明 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_s\}$ 为 V 的一个生成元集, X 为 V 的一个基, 下面证明 X 必为有限集. 因为 X 为基, 故 $e_1, e_2, \cdots, e_s$ 可被 X 中有限个元素线性表出, 即存在互异的 $u_1, u_2, \cdots u_t \in X$,

使得

$$\begin{cases} e_1 = r_{11}u_1 + r_{12}u_2 + \cdots + r_{1t}u_t \\ e_2 = r_{21}u_1 + r_{22}u_2 + \cdots + r_{2t}u_t \\ \cdots \\ e_s = r_{s1}u_1 + r_{s2}u_2 + \cdots + r_{st}u_t \end{cases}$$

其中 $r_{ij} \in R$, $i = 1, \cdots, s$, $j = 1, \cdots, t$. 注意到 V 中任意元素均可由 $e_1, e_2, \cdots, e_s$ 线性表出, 故 V 中任意元素均可由 $u_1, u_2, \cdots u_t$ 线性表出, 从而由 X 线性无关知 $X = \{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$, 即 X 是有限集.

又令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 均为 V 的基, 则可设

$$\begin{aligned} (y_1, \cdots, y_m) &= (x_1, \cdots, x_n)A, \quad \text{其中 } A = (a_{ij})_{n\times m} \in R^{n\times m}, \\ (x_1, \cdots, x_n) &= (y_1, \cdots, y_m)B, \quad \text{其中 } B = (b_{ij})_{m\times n} \in R^{m\times n}, \end{aligned}$$

从而

$$(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)AB.$$

又因为

$$(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)E_n,$$

故 $(x_1, \cdots, x_n)(AB - E_n) = (0, \cdots, 0)$. 由 $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关知 $AB = E_n$.

若 $m \neq n$, 不妨设 $m < n$. 分别将矩阵 A, B 添 0 补成方阵 $\overline{A}, \overline{B}$, 即

$$\overline{A} = (A, O) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

从而

$$\overline{A}\,\overline{B} = (A, O)\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} = AB = E_n.$$

因为 R 为交换环, 故行列式理论仍然有效, 从而等式两边取行列式得

$$\det \overline{A} \cdot \det \overline{B} = \det E_n = 1_R.$$

但由 $m < n$ 知 $\det \overline{A} = 0_R$, 矛盾, 故 $m = n$. □

定义: 设 V 是有限生成的自由 R 模, 我们把 V 的基所含元素的个数称为 V 的秩, 记为 $\mathrm{rk}_R V$.

由于 R 模 V 是自由模当且仅当 V 是它的同构于 R 的循环子模的内直和, 故 n 秩自由 R 模必同构于 $\underbrace{R\oplus R\oplus\cdots\oplus R}_{n\text{个}}$(简记为 $R^{(n)}$). 换言之, 在同构的意义下, 秩为 n 的自由 R 模只有 $R^{(n)}$.

在线性空间中, 当基取定后, 线性变换与矩阵之间存在一一对应的关系. 类似地, 自由 R 模同态与环 R 上的矩阵之间也可以建立一一对应的关系, 即

$$\mathrm{Hom}_R(R^{(n)},R^{(m)})\cong R^{m\times n}\ (\text{加群同构}).$$

当 $m=n$ 时, 有

$$\mathrm{Hom}_R(R^{(n)},R^{(n)})\cong R^{n\times n}\ (\text{环同构}).$$

定理 (非常重要): 设 R 为主理想整环, V 为 n 秩自由 R 模, 则 V 的任一子模都是自由模, 且 $\mathrm{rk}_R N\leqslant n$.

证明 我们把零模视为 0 秩自由模. 下面对 n 用数学归纳法.

(1) 当 $n=1$ 时, $V\cong R$, 不妨设 $V=R$, 则子模 N 就是 R 的理想. 因 R 为主理想整环, 故可设 $N=(a)=\{ra\,|\,r\in R\}$.

(i) $a=0$. 此时 $N=0$ 为 0 秩自由模.

(ii) $a\neq 0$. 设 $ra=0$, 因 R 是整环, 故 $r=0$, 即 a 是线性无关的. 又 a 生成了 N, 故 a 是 N 的一个基, N 为 1 秩自由模.

由上可知, $n=1$ 时结论成立.

(2) 假设命题对 $n-1$ 秩自由模成立 $(n\geqslant 2)$, 即 $n-1$ 秩自由 R 模 V 的任一子模 N 都是自由模, 且 $\mathrm{rk}_R N\leqslant n-1$. 下证命题对 n 秩自由模也成立.

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基, N 是 V 的子模. 令

$$K=(e_2,\cdots,e_n)=\{r_2e_2+\cdots+r_ne_n\,|\,r_i\in R, i=2,\cdots,n\}$$

为 V 的 $n-1$ 秩子模. 由于 N,K 均为 V 的子模, 故 $(N+K)/K$ 是 V/K 的子模. 下证 V/K 是以 e_1+K 为基的 1 秩自由模. 任取 $v+K\in V/K$, 因为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的基, 故存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$, 使得 $v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$. 从而 $v+K=a_1e_1+K=a_1(e_1+K)$, 故 V/K 中任意元素可被 e_1+K 线性表出. 又若 $a(e_1+K)=K$, 则 $ae_1+K=K$, $ae_1\in K$, 从而存在 $a_2,\cdots,a_n\in R$, 使得 $ae_1=a_2e_2+\cdots+a_ne_n$, 即 $ae_1-a_2e_2-\cdots-a_ne_n=0$. 由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关知 $a=0$, 从而 e_1+K 线性无关, 是 V/K 的基.

由于 V/K 是以 e_1+K 为基的 1 秩自由模, 故由 (1) 可知 $(N+K)/K$ 为 0 秩或 1 秩自由模.

(i) 若 $(N+K)/K$ 为 0 秩自由模, 则 $N\subseteq K$. 由 K 是 $n-1$ 秩自由模及归纳假设可知 N 作为 K 的子模也是自由模, 且 $\mathrm{rk}_R N\leqslant n-1<n$.

(ii) 若 $(N+K)/K$ 为 1 秩自由模, 则 $N\nsubseteq K$. 设 f_1+K 是 $(N+K)/K$ 的基, 易知 $f_1\in N$ 且 $f_1\notin K$. 注意到 $N\cap K$ 为 K 的子模且 $\mathrm{rk}_R K=n-1$.

① $N \cap K = 0$. 下证 此时 f_1 就是 N 的基. 任取 $n \in N$, 则 $n + K \in (N+K)/K$, 因为 $f_1 + K$ 是 $(N+K)/K$ 的基, 故可设 $n + K = a(f_1 + K) = af_1 + K$, 从而 $n - af_1 \in K$, 又因为 $n - af_1 \in N$, 故 $n - af_1 \in N \cap K = 0$, $n = af_1$, 即 N 中任意元素均可被 f_1 线性表出. 又若 $af_1 = 0$, 则 $af_1 + K = K$, 即 $a(f_1 + K) = K$. 因为 $f_1 + K$ 为 $(N+K)/K$ 的基, 故 $a = 0$, 从而 f_1 线性无关. 因此 f_1 为 N 的基, N 为 1 秩自由模, $\mathrm{rk}_R N = 1 < n$.

② $N \cap K \neq 0$. 此时可设 $N \cap K$ 是 $m-1$ 秩自由模 $(1 < m \leqslant n)$. 令 $f_2, \cdots, f_m$ 为 $N \cap K$ 的基, 下证 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 N 的基.

先证 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 线性无关. 设 $r_1 f_1 + r_2 f_2 + \cdots + r_m f_m = 0$, 则由 $r_2 f_2 + \cdots + r_m f_m \in N \cap K \subseteq K$ 知 $r_1 f_1 = -(r_2 f_2 + \cdots + f_m f_m) \in K$, 故 $r_1 f_1 + K = K$, 即 $r_1(f_1 + K) = K$, 又 $f_1 + K$ 是 $(N+K)/K$ 的基, 故 $r_1 = 0$, 从而 $r_2 f_2 + \cdots + r_m f_m = 0$. 因为 $f_2, \cdots, f_m$ 是 $N \cap K$ 的基, 因此线性无关, 从而 $r_2 = \cdots = r_m = 0$, $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 线性无关.

再证 N 中任意元素可被 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 线性表出. 任取 $n \in N$, 由 $f_1 + K$ 是 $(N+K)/K$ 的基可知存在 $r'_1 \in R$, 使得 $n + K = r'_1(f_1 + K) = r'_1 f_1 + K$, 故 $n - r'_1 f_1 \in K$. 又因为 $n - r'_1 f_1 \in N$, 故 $n - r'_1 f_1 \in N \in N \cap K$. 因为 $f_2, \cdots, f_m$ 为 $N \cap K$ 的基, 故存在 $r'_2, \cdots, r'_m \in R$, 使得 $n - r'_1 f_1 = r'_2 f_2 + \cdots + r'_m f_m$, 也即 $n = r'_1 f_1 + r'_2 f_2 + \cdots + r'_m f_m$, 故 N 中任意元素均可被 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 线性表出, $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 为 N 的基. 因此 N 是自由模, 且 $\mathrm{rk}_R N = m \leqslant n$.

由上述 (i) (ii) 可知当命题对 $n-1$ 秩自由模成立时, 该命题对 n 秩自由模也成立, 从而由数学归纳法知该结论对任意正整数 n 均成立. □

注: 实际上, 上述定理对无限秩自由模也成立, 但证明更加困难, 这里不再赘述.

5 Hom、投射模与内射模

5.1 Hom

定理: 设 R 模同态序列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 正合, 则对任意的 R 模同态 $\beta : X \longrightarrow B$, 若 $g\beta = 0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{\beta} : X \longrightarrow A$, 使得 $\beta = f\overline{\beta}$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
 & X \arrow[u, dashed, "\exists\overline{\beta}"] \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}
$$

实际上, 由 f 是单同态知 $A \cong \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$, 故上述定理本质上是核的泛性质.

定理: 设 R 模同态序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 则对任意的 R 模同态 $\alpha : B \longrightarrow X$, 若 $\alpha f = 0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{\alpha} : C \longrightarrow X$, 使得 $\alpha = \overline{\alpha} g$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\alpha"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\,\overline{\alpha}"] & 0 \\
 & & X &
\end{tikzcd}
$$

实际上, 因为 g 为满同态, 由模同态基本定理可知 $C \cong B/\mathrm{Ker}\, g = B/\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Coker}\, f$, 故上述定理本质上是余核的泛性质.

设有 R 模同态 $f : A \longrightarrow B$ 与 R 模 M, 定义

$$
\begin{aligned}
\overline{f} : \mathrm{Hom}_R(M, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, B) \\
\alpha &\longmapsto f\alpha
\end{aligned}
$$

易知 $\overline{f}$ 也为 R 模同态. 我们也把 $\overline{f}$ 记作 $\mathrm{Hom}_R(M, f)$. 又定义

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f} : \mathrm{Hom}_R(B, M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M) \\
\beta &\longmapsto \beta f
\end{aligned}
$$

易知 $\widetilde{f}$ 也是 R 模同态. 我们也把 $\widetilde{f}$ 记作 $\mathrm{Hom}_R(f, M)$.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f\alpha"] & \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & M \\
A \arrow[ur, "\beta f"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

图 1: $\overline{f}$ 与 $\widetilde{f}$ 的构造示意图

定理 (非常重要): R 模同态序列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 正合当且仅当对任意的 R 模 M, 序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}_R(M, C)$$

正合.

证明 $(\Longrightarrow)$ (1) 证明 $\overline{f}$ 单.

任取 $\alpha \in \mathrm{Ker}\, \overline{f}$, 则 $\overline{f}(\alpha) = f\alpha = 0$. 因为 f 单, 故 $\alpha = 0$, $\mathrm{Ker}\, \overline{f} = 0$, 因此 $\overline{f}$ 单.

(2) 证明 $\mathrm{Im}\, \overline{f} \subseteq \mathrm{Ker}\, \overline{g}$.

任取 $\beta \in \mathrm{Im}\, \overline{f}$, 则存在 $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$, 使得 $\beta = \overline{f}(\alpha)$, 从而

$$\overline{g}(\beta) = \overline{g}(\overline{f}(\alpha)) = \overline{g}(f\alpha) = gf\alpha = 0\alpha = 0,$$

故 $\beta \in \operatorname{Ker} \overline{g}$, $\operatorname{Im} \overline{f} \subseteq \operatorname{Ker} \overline{g}$.

(3) 证明 $\operatorname{Ker} \overline{g} \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
 & M \arrow[u, dashed, "\exists\alpha"] \arrow[ru, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

任取 $\beta \in \operatorname{Ker} \overline{g}$, 则 $\overline{g}(\beta) = g\beta = 0$. 由本节第一个定理可知存在 $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(M, A)$, 使得 $\beta = f\alpha = \overline{f}(\alpha)$, 故 $\beta \in \operatorname{Im} \overline{f}$, $\operatorname{Ker} \overline{g} \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}$.

($\Longleftarrow$) (1) 证明 f 单.

取 $M = \operatorname{Ker} f$, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, C)$$

正合. 取 $\eta \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} f, A)$ 为嵌入同态, 则 $\overline{f}(\eta) = f\eta = 0$, 故 $\eta \in \operatorname{Ker} \overline{f} = 0$, 从而 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} \eta = 0$, f 为单同态.

(2) 证明 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

取 $M = A$, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A, A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(A, C)$$

正合, 从而

$$0 = \overline{g}\,\overline{f}(1_A) = gf1_A = gf,$$

故 $gf = 0$, 因此 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

(3) 证明 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

取 $M = \operatorname{Ker} g$, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, A) \xrightarrow{\overline{f}} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, B) \xrightarrow{\overline{g}} \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, C)$$

正合. 取 $\eta \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, B)$ 为嵌入同态, 则 $\overline{g}(\eta) = g\eta = 0$, 从而 $\eta \in \operatorname{Ker} \overline{g} = \operatorname{Im} \overline{f}$, 故存在 $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, A)$, 使得 $\eta = \overline{f}(\alpha) = f\alpha$, 因此 $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} \eta \subseteq \operatorname{Im} f$. □

定理 (非常重要): R 模同态序列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合当且仅当对任意的 R 模 N, 序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, N) \xrightarrow{\tilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B, N) \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A, N)$$

正合.

证明 $(\Longrightarrow)$ (1) 证明 $\widetilde{g}$ 单.

任取 $\gamma \in \operatorname{Ker} \widetilde{g}$, 则 $\widetilde{g}(\gamma)=\gamma g=0$, 又因 g 满, 故 $\gamma=0$, $\operatorname{Ker} \widetilde{g}=0$, $\widetilde{g}$ 单.

(2) 证明 $\operatorname{Im} \widetilde{g} \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{f}$.

任取 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, N)$, 则

$$\widetilde{f} \widetilde{g}(\gamma)=\widetilde{f}(\gamma g)=\gamma g f=\gamma 0=0,$$

故 $\widetilde{f} \widetilde{g}=0$, $\operatorname{Im} \widetilde{g} \subseteq \operatorname{Ker} \widetilde{f}$.

(3) 证明 $\operatorname{Ker} \widetilde{f} \subseteq \operatorname{Im} \widetilde{g}$.

任取 $\beta \in \operatorname{Ker} \widetilde{f}$, 则 $\widetilde{f}(\beta)=\beta f=0$, 从而存在 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, N)$, 使得 $\beta=\gamma g=\widetilde{g}(\gamma) \in \operatorname{Im} \widetilde{g}$.

$(\Longleftarrow)$ (1) 证明 g 满.

任取 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, N)$ 且满足 $\gamma g=0$, 则 $\widetilde{g}(\gamma)=0$. 因 $\widetilde{g}$ 单, 故 $\gamma=0$, g 可被右消去, g 满.

(2) 证明 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

取 $N=C$, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, C) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B, C) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A, C)$$

正合, $\widetilde{f} \widetilde{g}=0$, 从而

$$0=\widetilde{f} \widetilde{g}(1_C)=\widetilde{f}(1_C g)=1_C g f=g f,$$

故 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

(3) 证明 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

取 $N=\operatorname{Coker} f$, 则序列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, \operatorname{Coker} f) \xrightarrow{\widetilde{g}} \operatorname{Hom}_R(B, \operatorname{Coker} f) \xrightarrow{\widetilde{f}} \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Coker} f)$$

正合. 取 $\nu \in \operatorname{Hom}_R(B, \operatorname{Coker} f)$ 为自然同态, 则 $\nu f=0$, 从而存在 $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(C, \operatorname{Coker} f)$, 使得 $\nu=\gamma g$. 因此 $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} \nu=\operatorname{Im} f$. $\square$

由上述两个命题可以看到, 一个短正合列经过 Hom “作用” 后, 只能得到一个左边正合的序列, 所以我们称 Hom 是 “左正合” 的. 但是在某些情况下, 经过 Hom 函子作用后的短正合列仍然变为短正合列, 例如下面的分裂短正合列.

定理 (重要): 下列各条等价:

(1) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是分裂正合列.

(2) 对任意的 R 模 M,

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M, C) \longrightarrow 0$$

是分裂正合列.

(3) 对任意的 R 模 N,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,N) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Hom}_R(B,N) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Hom}_R(A,N) \longrightarrow 0$$

是分裂正合列.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 只需证 $\overline{g}$ 分裂满.

因为 g 分裂满, 故存在 R 模同态 $g':C\longrightarrow B$, 使得 $gg'=1_C$, 从而对任意的 $\gamma\in\mathrm{Hom}_R(M,C)$, 有

$$\overline{g}\,\overline{g'}(\gamma)=\overline{g}(g'\gamma)=gg'\gamma=1_C\gamma=\gamma.$$

因此 $\overline{g}\,\overline{g'}=1_{\mathrm{Hom}_R(M,C)}$, $\overline{g}$ 分裂满.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 只需证 g 分裂满.

取 $M=C$, 则序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,A) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}_R(C,B) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}_R(C,C) \longrightarrow 0$$

分裂正合, $\overline{g}$ 分裂满, 故存在 $g'\in\mathrm{Hom}_R(C,B)$, 使得 $gg'=\overline{g}(g')=1_C$, 从而 g 分裂满.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 只需证 $\widetilde{f}$ 分裂满.

因 f 分裂单, 故存在 $f':B\longrightarrow A$, 使得 $f'f=1_A$, 从而对任意的 $\gamma\in\mathrm{Hom}_R(A,N)$, 有

$$\widetilde{f}\widetilde{f'}(\gamma)=\widetilde{f}(\gamma f')=\gamma f'f=\gamma 1_A=\gamma,$$

故 $\widetilde{f}\widetilde{f'}=1_{\mathrm{Hom}_R(A,N)}$, $\widetilde{f}$ 分裂满.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 只需证 f 分裂单.

取 $N=A$, 则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,A) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Hom}_R(B,A) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Hom}_R(A,A) \longrightarrow 0$$

分裂正合, $\widetilde{f}$ 分裂满, 从而存在 $f'\in\mathrm{Hom}_R(B,A)$, 使得 $f'f=\widetilde{f}(f')=1_A$, 故 f 分裂单. □

5.2 投射模

定义: 设 P 为 R 模. 若对任意的 R 模满同态 $g:B\longrightarrow C$ 与 R 模同态 $h:P\longrightarrow C$, 存在 R 模同态 $\overline{h}:P\longrightarrow B$, 使得 $h=g\overline{h}$, 则称 P 为**投射模** (projective module).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists \overline{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由定义与 §4.1 最后一个命题可知自由模一定是投射模, 但反之不然.

推论(重要): 任何 R 模 M 都是投射模的商模. 若 M 是有限生成的, 则 M 可以是有限生成投射模的商模.

定理(究极重要): 设 P 为 R 模, 则下列各条等价:

(1) P 为投射模.

(2) 若 R 模同态 $g : B \longrightarrow C$ 满, 则 R 模同态 $\overline{g} : \mathrm{Hom}_R(P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, C)$ 满.

(3) 若 R 模同态列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}_R(P, C) \longrightarrow 0$$

正合.

(4) 短正合列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ 都是分裂的.

(5) P 是自由模的直和项.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由投射模的定义即得.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 只需证 $\overline{g}$ 满.

因为 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 故 g 满, 从而由 (2) 知 $\overline{g}$ 满.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 取 $C = P$, 则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}_R(P, P) \longrightarrow 0$$

正合, $\overline{g}$ 满. 因此, 对 $1_P \in \mathrm{Hom}_R(P, P)$, 存在 $g' \in \mathrm{Hom}_R(P, B)$, 使得 $\overline{g}(g') = gg' = 1_P$, 从而 g 分裂满, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ 分裂.

(4) $\Longrightarrow$ (5) 因为任意 R 模都是自由模的商模, 因此存在自由模 V 及其子模 K, 使得 $P \cong V/K$, 从而存在满同态 $g : V \longrightarrow P$. 取 $\eta : \mathrm{Ker}\, g \longrightarrow V$ 为嵌入同态, 则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, g \xrightarrow{\eta} V \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

为短正合列. 由 (4) 知该正合列分裂, 又由分裂短正合列的等价条件 (7) 知 $V \cong P \oplus \mathrm{Ker}\, g$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) 任取 R 模满同态 $g : B \longrightarrow C$ 与 R 模同态 $h : P \longrightarrow C$, 下证存在 R 模同态 $\overline{h} : P \longrightarrow B$, 使得 $h = g\overline{h}$.

设 $P = V \oplus K$, 其中 V 为自由模. 取 $\pi : V = P \oplus K \longrightarrow P$ 为典范射影, $\eta : P \longrightarrow V = P \oplus K$

为典范内射. 因为 V 是自由模, 因此存在 R 模同态 $\overline{g}: V \longrightarrow B$, 使得 $h\pi = g\overline{g}$. 令 $\overline{h} = \overline{g}\eta$, 则

$$g\overline{h} = g\overline{g}\eta = h\pi\eta = h1_P = h,$$

从而 P 为投射模. □

$$\begin{tikzcd}
 & V = P \oplus K \arrow[d, shift right, "\pi"'] \arrow[ddl, dashed, "\exists\,\overline{g}"'] & \\
 & P \arrow[u, shift right, "\eta"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

例 $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ 是自由 $\mathbb{Z}_6$ 模, $\{\overline{1}\}$ 是它的基. 取它的子模 $K = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, N = \{\overline{0}, \overline{3}\}$. 因为

$$K + N = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{7}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\} = \mathbb{Z}_6,$$

故 $\mathbb{Z}_6 = K + N$. 又因为 $K \cap N = \{\overline{0}\}$, 故 $\mathbb{Z}_6 = K \oplus N$, 因此 K 与 N 是自由模 $\mathbb{Z}_6$ 的直和项, K 与 N 是投射模. 但由于 K 与 N 没有基, 故它们都不是自由模.

定理(非常重要): 设 $\{P_i\}_{i\in I}$ 为一族 R 模, 则直和 $\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ 为投射 R 模当且仅当每个 P_i 都为投射 R 模.

证明 $(\Longrightarrow)$ 因 $\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ 为投射模, 故存在自由模 V 及其子模 K, 使得 $V = K \oplus \left(\bigoplus\limits_{i\in I} P_i\right)$, 从而 P_i 为 V 的直和项, 因此 P_i 为投射模.

$(\Longleftarrow)$ 设 R 模满同态 $g: B \longrightarrow C$ 与 R 模同态 $h: \bigoplus\limits_{i\in I} P_i \longrightarrow C$. 取 $\eta_j: P_j \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ 为典范内射. 由投射模定义知存在 R 模同态 $g_j: P_j \longrightarrow B$, 使得 $h\eta_j = gg_j$. 由 $\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ 的泛性质知存在 R 模同态 $\overline{h}: \bigoplus\limits_{i\in I} P_i \longrightarrow B$, 使得 $g_j = \overline{h}\eta_j$, 从而

$$h\eta_j = gg_j = g\overline{h}\eta_j.$$

由直和泛性质的唯一性知 $g\overline{h} = h$, 故 $\bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ 为投射模. □

$$\begin{tikzcd}
& P_j \arrow[d, "\eta_j"] \arrow[ddl, dashed, "\exists g_j"'] & \\
& \bigoplus\limits_{i\in I} P_i \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"'] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \bigoplus\limits_{i\in I} P_i \arrow[d, shift right, "g\overline{h}"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\
P_j \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[r, "gg_j"] & C
\end{tikzcd}$$

定理 (重要): 主理想整环上的投射模必为自由模.

证明　主理想整环上的投射模是主理想整环上自由模的直和项, 因而是主理想整环上自由模的子模. 由 §4.2 最后一个定理及其注记可知主理想整环上自由模的子模仍为自由模, 故主理想整环上的投射模是自由模. $\square$

推论: 主理想整环上投射模的子模仍为投射模.

5.3　内射模

定义: 设 I 为 R 模, 若对任意的 R 模单同态 $f : A \longrightarrow B$ 以及 R 模同态 $h : A \longrightarrow I$, 存在 R 模同态 $\overline{h} : B \longrightarrow I$, 使得 $h = \overline{h}f$, 则称 I 为**内射模** (injective module).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\overline{h}"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

定理 (究极重要): 设 I 为 R 模, 则下列各条等价:

(1) I 为内射模.

(2) 若 R 模同态 $f : A \longrightarrow B$ 单, 则 R 模同态 $\widetilde{f} : \mathrm{Hom}_R(B, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, I)$ 满.

(3) 若 R 模同态列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, I) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Hom}_R(B, I) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathrm{Hom}_R(A, I) \longrightarrow 0$$

正合.

(4) 短正合列 $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 都是分裂的.

证明　我们先证明 (1)(2)(3) 等价, (1) 与 (4) 的等价我们后面再证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 由内射模的定义即得.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 只需证 $\widetilde{f}$ 满.

因为 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 正合, 故 f 单, 从而由 (2) 知 $\widetilde{f}$ 满.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 因 $\widetilde{f}$ 满, 故对任意的 $h \in \mathrm{Hom}_R(A, I)$, 存在 $\overline{h} \in \mathrm{Hom}_R(B, I)$, 使得 $\widetilde{f}(\overline{h}) = \overline{h}f = h$, 即 I 为内射模. $\square$

为了证明 (1) 与 (4) 等价, 我们需要先证明以下结论.

定理(非常重要): 设 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为一族 R 模, 则直积 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 是内射模当且仅当每个 I_λ 都是内射模.

证明 ($\Longrightarrow$) 设有 R 模单同态 $f : A \longrightarrow B$ 与 R 模同态 $h_\lambda : A \longrightarrow I_\lambda$. 由直积的泛性质知存在 R 模同态 $g : A \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 使得 $h_\lambda = \pi_\lambda g$. 由于 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 是内射模, 故存在 R 模同态 $g' : B \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 使得 $g = g'f$, 从而

$$h_\lambda = \pi_\lambda g = \pi_\lambda g' f.$$

令 $\overline{h_\lambda} = \pi_\lambda g'$, 则 $h_\lambda = \overline{h_\lambda} f$, 故 I_λ 为内射模.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h_\lambda"] \arrow[ddr, dashed, "g"'] & & B \arrow[dl, "\overline{h_\lambda}"'] \arrow[ddl, "g'"] \\
& & I_\lambda & \\
& & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \arrow[u, "\pi_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

($\Longleftarrow$) 因为 I_λ 为内射模, 故对任意的 R 模单同态 $f : A \longrightarrow B$ 与 R 模同态 $h : A \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 存在 R 模同态 $\overline{h_\lambda} : B \longrightarrow I_\lambda$, 使得 $\pi_\lambda h = \overline{h_\lambda} f$. 由 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 的泛性质知存在 R 模同态 $\overline{h} : B \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 使得 $\overline{h_\lambda} = \pi_\lambda \overline{h}$, 从而 $\pi_\lambda h = \pi_\lambda \overline{h} f$. 由泛性质的唯一性知 $h = \overline{h} f$, 故 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 为内射模. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, dashed, "\overline{h}"'] \arrow[ddl, dashed, "\overline{h_\lambda}"] \\
& \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \\
& I_\lambda &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\
A \arrow[ur, shift left, "\overline{h}f"] \arrow[ur, shift right, "h"'] \arrow[r, "\overline{h_\lambda}f"'] & I_\lambda
\end{tikzcd}
$$

定理: 任何一个 R 模 M 都可以嵌入到内射模中 (即任何一个 R 模都是内射模的子模).

现在, 我们可以来证明前面待证的 (1) 与 (4) 的等价性了.

命题: 设 I 为 R 模, 则 I 为内射模当且仅当短正合列 $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 都是分裂的.

证明 ($\Longrightarrow$) 因为 I 是内射模, 故存在 $f' : B \longrightarrow I$, 使得 $f'f = 1_I$, 因此 f 分裂单, 短正合列 $0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 分裂.

($\Longleftarrow$) 因为任意 R 模都可以嵌入内射模, 故存在内射模 F 与嵌入同态 $f : I \longrightarrow F$, 使得

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\nu} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

正合. 由条件知该短正合列分裂, 从而 $F \cong I \oplus \operatorname{Coker} f$. 注意到该直和也是直积, 因此由 F 为内射模知 I 也是内射模. $\square$

6 附录

6.1 映射

引理: 设映射 $g : A \longrightarrow B, f : B \longrightarrow C$, 则

(1) 若 fg 单, 则 g 单;

(2) 若 fg 满, 则 f 满.

证明 (1) 任取 $x, y \in A, x \neq y$, 则由 fg 为单射知

$$f(g(x)) \neq f(g(y)),$$

从而 $g(x) \neq g(y)$, 故 g 为单射.

(2) 任取 $y \in C$, 由 fg 为满射知存在 $x \in A$, 使得

$$(fg)x = f(g(x)) = y,$$

故 f 为满射. $\square$

引理: 设映射 $\varphi : X \longrightarrow Y$, A 与 B 分别是 X 与 Y 的非空子集, 则

(1) $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$, 当 φ 为单射时取等;

(2) $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B$, 当 φ 为满射时取等.

6.2 群

定义: 设非空集合 G 上有代数运算 $\circ$ 满足

(1) 有结合律;

(2) 有左单位元;

(3) 每个元素有左逆元;

则称 G 关于代数运算 $\circ$ 作成一个**群**. 若运算 $\circ$ 有交换律, 则称 G 为一个 **Abel 群**.

Abel 群也称为加群, 其代数运算常用 "+" 表示. 因为模论中的群是 Abel 群, 因此我们直接给出 Abel 群的相应的定义与结论.

设 G 为 Abel 群, 则

(1) 子群的充要条件为 H 为 G 的一个子群 $\Longleftrightarrow$ 对任意的 $a, b \in H$, 都有 $a - b \in H$.

(2) 子集 A 与 B 的运算为

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}.$$

(3) 关于子群 N 的陪集为

$$a + N = \{\, a + x \,|\, x \in N\}.$$

(4) 陪集相等的充要条件为

$$a + N = b + N \Longleftrightarrow a - b \in N.$$

(5) 陪集的运算为

$$(a + N) + (b + N) = (a + b) + N.$$

(6) G 关于子群 N 的商群为

$$G/N = \{x + N \mid x \in G\}.$$

商群 G/N 的零元为 N, $a+N$ 的负元为 $(-a)+N$.

(7) 若映射 $\varphi : G \longrightarrow \widetilde{G}$ 满足对任意的 $a, b \in G$, 有

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

则称 φ 为一个群同态. 若 φ 还为双射, 则称 φ 是一个群同构, 且称群 G 与 $\widetilde{G}$ 同构.

定义: 设 G_1, G_2 为群, 记

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\},$$

定义

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2'),$$

则 $G_1 \times G_2$ 也作成一个群, 称为群 G_1 与 G_2 的**直积**. 当 G_1 与 G_2 为 Abel 群时, 直积称为**直和**, 记作 $G_1 \oplus G_2$.

易知 $G_1 \times G_2$ 的单位元为 $e_{G_1 \times G_2} = (e_{G_1}, e_{G_2})$, 元素 (g_1, g_2) 的逆元为 (g_1^{-1}, g_2^{-1}).

6.3 环与域

定义: 设非空集合 R 上有两个代数运算“加法”与“乘法”, 若

(1) R 关于加法作成 Abel 群;

(2) R 关于乘法满足结合律;

(3) 乘法对加法满足左右分配律;

则称 R 对这两个代数运算作成一个**环**.

定义: 设 $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$, 对任意的 $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_n$, 规定

$$\bar{i} + \bar{j} = \overline{i+j}, \quad \bar{i}\,\bar{j} = \overline{ij},$$

则 $\mathbb{Z}_n$ 按上述定义的加法与乘法作成一个环, 称为**模 n 剩余类环**. 它的零元是 $\bar{0}$, 单位元是 $\bar{1}$, $\bar{i}$ 的负元是 $\overline{-i}$.

易知在 $\mathbb{Z}_n$ 中, 若 $\bar{i} = \bar{j}$, 则 $n | (i-j)$.

例 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong K_4$(Klein 四元群)(群同构), 因此, K_4 可以表示为

$$K_4 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}.$$

例 (1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$; (2) $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$(环同构), 其中 m, n 互素.

证明 作映射

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{mn} &\longrightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \\ [x] &\longmapsto \ (\overline{x}, \widetilde{x}) \end{aligned}$$

易知 f 是一个映射. 若 $f([x]) = f([y])$, 则 $\overline{x} = \overline{y} \in \mathbb{Z}_m, \widetilde{x} = \widetilde{y} \in \mathbb{Z}_n$, 故 $m|(x-y), n|(x-y)$. 因 m, n 互素, 故 $mn|(x-y)$, $[x] = [y] \in \mathbb{Z}_{mn}$, 即 f 单. 又 $|\mathbb{Z}_{mn}| = mn = |\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n|$, 故 f 满. 由于

$$f([x]+[y]) = f([x+y]) = (\overline{x+y}, \widetilde{x+y}) = (\overline{x}+\overline{y}, \widetilde{x}+\widetilde{y}) = (\overline{x}, \widetilde{x}) + (\overline{y}, \widetilde{y}) = f([x]) + f([y]),$$
$$f([x][y]) = f([xy]) = (\overline{xy}, \widetilde{xy}) = (\overline{x}\,\overline{y}, \widetilde{x}\,\widetilde{y}) = (\overline{x}, \widetilde{x})(\overline{y}, \widetilde{y}) = f([x])f([y]),$$

故 f 为环同态. 综上, f 为同构, $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$.

定义: 阶大于 1, 有单位元, 无零因子的交换环称为**整环**.

整数环 $\mathbb{Z}$ 和数域 P 上的多项式环 $P[x]$ 都是整环.

定义: 设 $R, \widetilde{R}$ 为环, 映射 $\varphi : R \longrightarrow \widetilde{R}$. 若对任意的 $a, b \in R$, 都有

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

则称 φ 为 R 到 $\widetilde{R}$ 的一个**环同态**.

定理: S 为 R 的子环 $\Longleftrightarrow$ 对任意的 $a, b \in S, a-b \in S, ab \in S$.

定义: 设 N 是环 R 的子加群 (保证陪集加法有意义), 且对任意的 $r \in R, a \in N$, 有 $ra \in N$(保证陪集乘法有意义), 则称 N 是 R 的一个**左理想**, 并称 N 满足**左吸收律**.

右理想定义与之类似. 若 N 既是左理想, 又是右理想, 则称 N 是 R 的理想, 记作 $N \trianglelefteq R$.

设 N 为 R 的一个理想, 则 N 为 R 的子加群, 从而也为 R 的正规子群, 因此 R/N 对**陪集的加法**

$$(a+N) + (b+N) = (a+b) + N$$

作成一个加群. 定义**陪集的乘法**为

$$(a+N)(b+N) = ab + N.$$

定义: 设 N 为 R 的一个理想, 则 R 关于 N 的陪集所成集合 $R/N = \{a + N \,|\, a \in R\}$ 关于陪集的加法与乘法作成一个环, 称为 R 关于 N 的**商环**.

定义: 若环 R 的理想只有 0 与自身, 则称 R 为一个**单环**.

定义: 设 a 为环 R 的一个元素, 则 R 的所有包含 a 的理想的交 $\langle a \rangle$ 也是 R 的一个理想, 称为由 a 生成的**主理想**.

当 R 是有单位元的交换环时, 有

$$\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}.$$

设 $\mathbb{Z}$ 为整数环, n 为正整数, 则 $\mathbb{Z}/\langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$, 同构映射可取为

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Z}/\langle n \rangle &\longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ a + \langle n \rangle &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

定义: 若整环 R 的每一个理想都是主理想, 则称 R 是一个**主理想整环**.

定义: 设 N 为环 R 的一个理想, 且 $N \neq R$. 若除 R 和 N 外, R 中没有包含 N 的其他理想, 则称 N 为 R 的一个**极大理想**.

定理: 设 N 为环 R 的理想, 则 N 为极大理想当且仅当 R/N 为单环.

定义: 若环 R 满足 $|R| > 1$, 有单位元且任意非零元均可逆, 则称 R 为一个**除环**. 可换除环称为**域**.

易知除环 R 的非零元对乘法作成一个群, 域 F 的非零元对乘法作成一个 Abel 群.

6.4 线性空间与线性变换

一、线性空间

定义: 设 P 是一个数域, 非空集合 V 上有一个代数运算叫做加法, P 与 V 之间有一个运算叫做数量乘法, 且满足

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) 对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) 存在 $0 \in V$, 对任意的 $\alpha \in V$, $0 + \alpha = \alpha$;

(4) 对任意的 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$, $\alpha + \beta = 0$;

(5) 对任意的 $k \in P, \alpha, \beta \in V$, $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(6) 对任意的 $k, l \in P, \alpha \in V$, $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(7) 对任意的 $k, l \in P, \alpha \in V$, $(kl)\alpha = k(l\alpha)$;

(8) $1\alpha = \alpha$,

则称 V 为数域 P 上的**线性空间**.

第 (1) 到 (4) 条说明 V 关于 "+" 作成一个 Abel 群, 第 (5) 到 (8) 条说明 V 是一个 P 模.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, W 为 V 的非空子集, 若 W 关于 V 的加法与数量乘法也作成一个线性空间, 则称 W 为 V 的**线性子空间**, 简称子空间.

定理: 非空子集 W 为 V 的子空间当且仅当 W 对于 V 上的两种运算封闭, 即

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha + \beta \in W$;

(2) 对任意的 $k \in P, \alpha \in W$, 有 $k\alpha \in W$.

定义: 设 V 和 W 分别为数域 P 上的线性空间, 记

$$V \times W = \{(\alpha, \beta) \,|\, \alpha \in V, \beta \in W\},$$

定义加法与数乘分别为

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta'), \quad k(\alpha, \beta) = (k\alpha, k\beta)$$

则 $V \times W$ 也作成数域 P 上的线性空间, 称为 V 与 W 的**外直积**.

若 V, W 分别为数域 P 上的 n 与 m 维线性空间, 则 $V \times W$ 是一个 $n+m$ 维线性空间. 事实上, 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基, $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是 W 的基, 则

$$(\alpha_1, 0), \cdots, (\alpha_n, 0), (0, \beta_1), \cdots, (0, \beta_m)$$

是 $V \times W$ 的基

二、线性变换

定义: 线性空间 V 到自身的映射称为一个**变换**.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, 若 V 上的变换 $\mathscr{A}$ 满足

(1) $\mathscr{A}(\alpha + \beta) = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta, \quad \alpha, \beta \in V;$

(2) $\mathscr{A}(k\alpha) = k(\mathscr{A}\alpha), \quad k \in P, \alpha \in V,$

则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的**线性变换**.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为 V 上的两个线性变换, 定义 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**乘积**为

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha) = \mathscr{A}(\mathscr{B}\alpha), \quad \alpha \in V.$$

定义 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**加法**为

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})(\alpha) = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{B}\alpha, \quad \alpha \in V.$$

设 $k \in P$, 定义 k 与 $\mathscr{A}$ 的**数量乘法**为

$$(k\mathscr{A})\alpha = k(\mathscr{A}\alpha), \quad \alpha \in V.$$

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换, 对 $P[x]$ 中的任意多项式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0,$$

定义

$$f(\mathscr{A}) = a_m \mathscr{A}^m + \cdots + a_1 \mathscr{A} + a_0 \mathscr{E},$$

称为**线性变换 $\mathscr{A}$ 的多项式**, 它仍然是一个线性变换.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换, W 为 V 的子空间. 若对任意的 $\alpha \in W$, 有 $\mathscr{A}\alpha \in W$, 即 $\mathscr{A}W \subseteq W$, 则称 W 是 $\mathscr{A}$ 的**不变子空间**, 简称 $\mathscr{A}-$子空间.

6.5 线性相关与线性无关

线性相关性取决于系数所在的空间. 例如, 若将复数域 $\mathbb{C}$ 视为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 则 $1, \mathrm{i}$ 是线性无关的, 而若将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 则 $1, \mathrm{i}$ 是线性相关的 (因为 $\mathrm{i} \cdot 1 + (-1) \cdot \mathrm{i} = 0$).

模中成员的线性相关性与线性空间有很多相似之处, 但也有不同, 其原因是模中元素线性组合的 “系数” 来自一般的环, 而线性空间中元素的线性组合的 “系数” 来自于域.

(1) 线性空间中, 一个非零元必定线性无关, 而在模中该命题不成立.

反例 $\mathbb{Z}_6$ 视为 $\mathbb{Z}_6$ 模, $\overline{2}$ 是其非零元, 但因为 $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, 故 $\overline{2}$ 是 $\mathbb{Z}_6$-线性相关的.

(2) 线性空间中, 若 $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关, $x_1, \cdots, x_n, y$ 线性相关, 则 y 可由 $x_1, \cdots, x_n$ 线性表出. 在模中该命题不成立.

反例 $\mathbb{Z}$ 视为 $\mathbb{Z}$ 模, 2 是线性无关的, $2, 3$ 是线性相关的 (因为 $-3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$), 但 2 无法线性表出 3.

6.6 交换图

如下图所示, 如果群之间的同态用箭头来表示, 可以得到一个有向图

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

其中 f, g, h 为群同态. 若 $f = gh$, 则称上述有向图为一个**交换图**. 类似地, 环, 模之间的同态也有相应的交换图.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\
C \arrow[r, "f"] & D
\end{tikzcd}$$

与三个同态的交换图类似, 如果上图中的四个同态 f, g, α, β 满足 $fg = \alpha\beta$, 则称该图是一个交换图.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
D \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & F
\end{tikzcd}
$$

如上图所示, 对于具有两个方块的有向图, 如果两个方块都是交换的, 即 $f'\alpha = \beta f, g'\beta = \gamma g$, 则称该图为一个交换图. 容易知道, 此时整个大方块也是交换的, 即 $g'f'\alpha = \gamma g f$, 并且二者还都等于 $g'\beta f$. 换言之, 当上图为交换图时, 从 A 到 F 的任何路径都是等效的. 需要注意的是, 当大方块交换时, 两个小方块不一定是交换的.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
D \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & F
\end{tikzcd}
$$

(当两个小方块交换时, 整个大方块也是交换的, 且三条彩色路径是等效的)

6.7 泛性质

我们把 "在给定某些条件下存在唯一态射" 这种性质统称为**泛性质** (Universal property). 在前面的学习中, 我们已经研究过直积的泛性质, 直和的泛性质以及自由模的泛性质(点击蓝色字体即可跳转到对应位置). 下面我们给出同态的核与余核的泛性质.

定理 (核的泛性质): 设 $f : M \longrightarrow N$ 为 R 模同态, $\eta : \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow M$ 为嵌入同态, 则对任意的 R 模同态 $g : X \longrightarrow M$, 若 $fg = 0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g} : X \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f$, 使得 $g = \eta\overline{g}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
X \arrow[u, dashed, "\exists \overline{g}"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
f\eta &= 0 \\
fg &= 0 \\
\eta\overline{g} &= g
\end{aligned}
$$

证明 因为 $fg=0$, 故 $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f$. 定义映射

$$\begin{aligned}\overline{g}: X &\longrightarrow \operatorname{Ker} f\\ x &\longmapsto g(x)\end{aligned}$$

易知 $\overline{g}$ 为 R 模同态, 且对任意的 $x\in X$, 有

$$\eta\overline{g}(x)=\eta g(x)=g(x),$$

故 $\eta\overline{g}=g$. 下证唯一性. 若另有 R 模同态 $g':X\longrightarrow \operatorname{Ker} f$ 满足 $g=\eta g'$, 则 $\eta\overline{g}=\eta g'$. 由于 η 单, 故可左消去, 从而 $\overline{g}=g'$. $\square$

定理 (余核的泛性质): 设 $f:M\longrightarrow N$ 为 R 模同态, $\nu:N\longrightarrow \operatorname{Coker} f$ 为自然同态, 则对任意的 R 模同态 $g:N\longrightarrow X$, 若 $gf=0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}:\operatorname{Coker} f\longrightarrow X$, 使得 $g=\overline{g}\nu$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "g"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists\overline{g}"] \\
& & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}\nu f&=0\\ gf&=0\\ \overline{g}\nu&=g\end{aligned}$$

定理: 设 $f:M\longrightarrow N$ 与 $\eta:K\longrightarrow M$ 均为 R 模同态, $f\eta=0$, 且满足: 对任意的 R 模同态 $g:X\longrightarrow M$, 若 $fg=0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}:X\longrightarrow K$, 使得 $g=\eta\overline{g}$, 则 $K\cong \operatorname{Ker} f$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
X \arrow[u, dashed, "\exists\overline{g}"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}f\eta&=0\\ fg&=0\\ \eta\overline{g}&=g\end{aligned}$$

证明 取 X 为 $\operatorname{Ker} f$, g 取为嵌入映射 $\iota:\operatorname{Ker} f\longrightarrow M$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}:\operatorname{Ker} f\longrightarrow K$, 使得 $\iota=\eta\overline{g}$. 由核 $\operatorname{Ker} f$ 的泛性质知存在唯一的 R 模同态 $g':K\longrightarrow \operatorname{Ker} f$, 使得 $\eta=\iota g'$, 故

$$\begin{cases}\iota=\iota g'\overline{g}\\ \eta=\eta\overline{g}g'\end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, dashed, shift left, "g'"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "\iota"'] \arrow[u, dashed, shift left, "\overline{g}"]
\end{tikzcd}$$

将 X 取为 K, g 取为 η, 则由条件中的唯一性知 $\overline{g}g' = 1_K$.

将 K 取为 $\operatorname{Ker} f$, η 取为 ι, 则由核的泛性质中的唯一性知 $g'\overline{g} = 1_{\operatorname{Ker} f}$.

综上, $\overline{g}$ 为同构, $K \cong \operatorname{Ker} f$. □

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
K \arrow[ur, "\eta"'] \arrow[u, dashed, shift left, "\overline{g}g'"] \arrow[u, dashed, shift right, "1_K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "\iota"'] \arrow[u, dashed, shift left, "g'\overline{g}"] \arrow[u, dashed, shift right, "1_{\operatorname{Ker} f}"']
\end{tikzcd}$$

上述定理说明具有核的泛性质的模本质上就是核.

定理: 设 $f: M \longrightarrow N$ 与 $\nu: N \longrightarrow Y$ 均为 R 模同态, $\nu f = 0$, 且满足: 对任意的 R 模同态 $g: N \longrightarrow X$, 若 $gf = 0$, 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{g}: Y \longrightarrow X$, 使得 $g = \overline{g}\nu$, 则 $Y \cong \operatorname{Coker} f$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists \overline{g}"] \\
& & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
\nu f &= 0 \\
gf &= 0 \\
\overline{g}\nu &= g
\end{aligned}$$

上述定理说明具有余核的泛性质的模本质上就是余核.