

2020.9.20

# 几何学选讲

数学与应用数学

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

$$\chi = 2 - 2g$$

西南大学数学与统计学院

1. 第五公设的等价命题.
2. 罗巴切夫斯基几何中两直线的位置关系.
3. 罗巴切夫斯基几何中的平行角与平行线的概念.
4. 罗巴切夫斯基几何中三角形的内角和.
5. 罗巴切夫斯基几何中极限圆的概念.
6. 罗巴切夫斯基几何中的基本公式 (平行角公式、直角三角形边长公式).
7. 庞加莱圆盘模型中的直线, 圆, 极限圆.
8. 庞加莱上半平面  $\mathbb{H}$  中的莫比乌斯变换 ( $SL(2, \mathbb{R})$ ).
9. 莫比乌斯变换的不动点与类型 (双曲、抛物、椭圆).
10. 关于单位圆的反演变换.
11. 球面到欧氏平面的球极投影的性质.
12. 椭圆函数 (Weierstrass 函数) 的周期性.
13. 椭圆函数 (Weierstrass 函数) 的极点与零点.
14. 复代数曲线的相交数 (贝祖定理).
15. 复代数曲线的光滑性, 奇点的判定; 复代数曲线的亏格  $g$ , 欧拉数  $\chi$ , 亏格-次数公式.
16. 复代数曲线上亚纯函数的零点与极点, 复代数曲线上亚纯微分的零点与极点.
17. 复代数曲线上的全纯微分, 线性独立的全纯微分的个数, 全纯微分的零点个数.
18. 黎曼球面 (复射影直线) 上的亚纯微分 ( $dz$ ) 的极点.
19. 复代数曲线上的除子, 主除子, 典范除子 ( $\kappa$ ), 典范除子的次数  $\deg(\kappa)$ .
20. 黎曼-罗赫定理 (Riemann-Roch theorem) .

### 1. 第五公设的等价命题. (知道一个或者两个就行)

- (1) 过已知直线外一点能且仅能作一条直线平行于已知直线.
- (2) 三角形内角和为  $\pi$ .
- (3) 勾股定理成立.
- (4) 存在相似但不全等的三角形.
- (5) 三角形的面积可以任意大.
- (6) 存在矩形.

### 2. 罗巴切夫斯基几何中两直线的位置关系.

罗巴切夫斯基几何中两直线的位置关系有三种: 相交、平行与分离.

- (1) 相交: 两直线有交点.
- (2) 平行: 两直线没有交点, 且一端无限接近, 另一端无限远离.
- (3) 分离: 两直线没有交点, 且两端均无限远离.

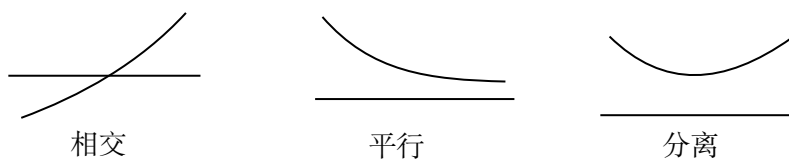


图 1: 罗巴切夫斯基几何中直线的三种位置关系

### 3. 罗巴切夫斯基几何中的平行角与平行线的概念.

设  $P$  是与直线  $AB$  的垂直距离为  $x$  的点, 垂足为  $Q$ . 罗巴切夫斯基假设存在一个角  $\pi(x)$  (注意它是距离  $x$  的函数), 使得所有过点  $P$  且与  $PQ$  所成的角小于  $\pi(x)$  的直线与  $AB$  相交, 而所有过点  $P$  且与  $PQ$  所成的角大于等于  $\pi(x)$  的直线与  $AB$  不相交. 罗巴切夫斯基将临界直线  $\ell_1$  与  $\ell_2$  称为  $AB$  的平行线,  $\pi(x)$  称为平行角.

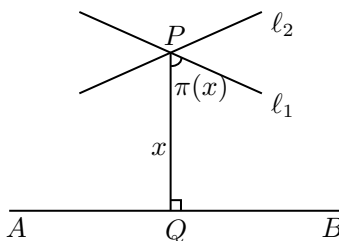


图 2: 罗巴切夫斯基几何中的平行角与平行线

### 4. 罗巴切夫斯基几何中三角形的内角和.

罗巴切夫斯基几何中三角形的内角和小于  $\pi$ . (直观上理解就是罗氏几何中的三角形比欧氏几何中的三角形“瘦”.)

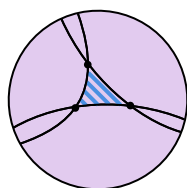


图 3: 双曲三角形是“瘦的”, 内角和小于  $\pi$

### 5. 罗巴切夫斯基几何中极限圆的概念.

**定义 (极限圆):** 我们把垂直于一族平行线的曲线称为极限圆.

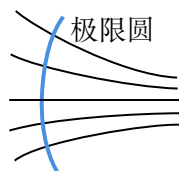


图 4: 罗巴切夫斯基几何中的极限圆

### 6. 罗巴切夫斯基几何中的基本公式 (平行角公式、直角三角形边长公式).

在“过已知直线外一点至少能作两条直线与已知直线平行”的假设之下, 罗巴切夫斯基确定了平行角  $\pi(x)$  所满足的关系式为 (称之为平行角公式)

$$\tan \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x}.$$

由此我们立马可得  $\pi(x)$  是单调递减函数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \pi(x) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) = 0$ . 此外, 由函数的单调性可知平行角  $\pi(x)$  始终介于 0 到  $\frac{\pi}{2}$  之间.

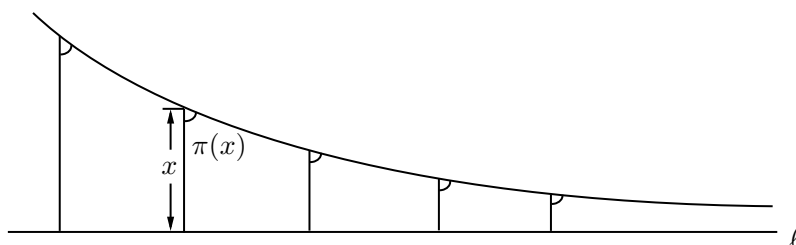


图 5: 距离  $x$  趋于无穷大时, 平行角  $\pi(x)$  趋于 0; 距离  $x$  趋于 0 时, 平行角  $\pi(x)$  趋于  $\frac{\pi}{2}$

罗巴切夫斯基几何中的直角三角形边长公式 (即勾股定理) 为

$$\cosh(a) \cosh(b) = \cosh(c),$$

其中  $a, b$  为直角边,  $c$  为斜边.

# 7. 庞加莱圆盘模型中的直线, 圆, 极限圆.

庞加莱圆盘是复平面上的单位开圆盘

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

它是最著名和最常见双曲几何模型之一.

**定义 (庞加莱圆盘内的直线):** 我们把以下两种曲线称为庞加莱圆盘内的直线:

- (1) 圆盘的直径 (不包括端点).
- (2) 与单位圆周  $C$  相交成直角的欧氏圆弧 (不包括端点).

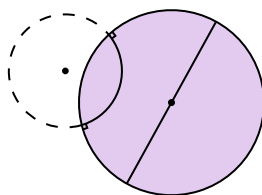


图 6: 庞加莱圆盘内的直线

庞加莱圆盘内的圆就是普通的欧氏圆, 极限圆就是与边界相切的欧氏圆.

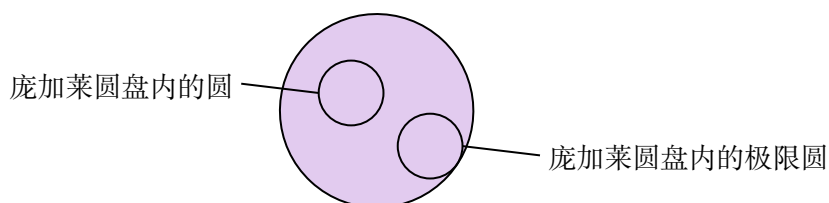


图 7: 庞加莱圆盘内的圆与极限圆

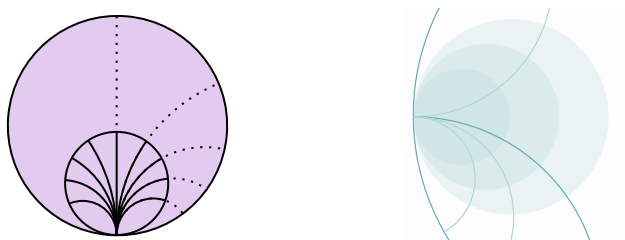


图 8: 庞加莱圆盘内与边界相切的圆正交于一族平行线, 因此是极限圆

### 8. 庞加莱上半平面 $\mathbb{H}$ 中的莫比乌斯变换 ( $SL(2, \mathbb{R})$ ).

庞加莱上半平面是复平面的上半部分

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

**定义** ( $\mathbb{H}$  上的莫比乌斯变换) : 我们把

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

称为庞加莱上半平面  $\mathbb{H}$  上的莫比乌斯变换, 其中  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  且  $ad - bc > 0$ .

每个莫比乌斯变换  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  都对应于一个矩阵  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ . 此外, 当  $\lambda \neq 0$  时,  $\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d}$ , 故矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R})$$

对应着同一个莫比乌斯变换. 因此为了方便起见, 我们可以只考虑  $GL(2, \mathbb{R})$  中行列式为 1 的矩阵, 即考虑特殊线性群

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det A = 1\}.$$

**注:** 尽管我们只考虑行列式为 1 的情形, 但莫比乌斯变换与  $SL(2, \mathbb{R})$  中的矩阵仍然不是一一对应的, 因为  $\pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  都对应着同一个莫比乌斯变换  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . (不过二对一的关系也已经足够好了.)

### 9. 莫比乌斯变换的不动点与类型 (双曲、抛物、椭圆).

考虑扩充复平面  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . 此外, 对任意的非零复数  $z$  (可以为  $\infty$ ), 我们规定  $\frac{z}{0} = \infty$ .

**定义** (莫比乌斯变换) : 我们把

$$\begin{aligned} f : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

称为莫比乌斯变换, 其中  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  且  $ad - bc \neq 0$ .

**注：**前面我们定义了庞加莱上半平面  $\mathbb{H}$  上的莫比乌斯变换  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , 它与我们在这里所给出的莫比乌斯变换的定义是相容的. 这是因为当系数  $a, b, c, d$  取实数且  $ad - bc > 0$  时,  $\overline{\mathbb{C}}$  上的莫比乌斯变换  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  将  $\mathbb{H}$  映到  $\mathbb{H}$ , 因此庞加莱上半平面  $\mathbb{H}$  上的莫比乌斯变换可以理解为一一般莫比乌斯变换在  $\mathbb{H}$  上的限制.

现在我们来考虑莫比乌斯变换的不动点, 即满足  $f(z) = z$  的点  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ .

(一) 对于恒等莫比乌斯变换  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto z$  而言, 每个  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  都是它的不动点.

(二) 对于非恒等的莫比乌斯变换而言:

(1) 若  $f$  在上半平面与下半平面内 (不包括实轴) 各有一个不动点, 并且它们是共轭的, 则称莫比乌斯变换  $f$  是椭圆型的.

(2) 若  $f$  在扩充实轴  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  上仅有一个不动点, 则称莫比乌斯变换  $f$  是抛物型的.

(3) 若  $f$  在扩充实轴  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  上有两个互异的不动点, 则称莫比乌斯变换  $f$  是双曲型的.

**例 1** 求莫比乌斯变换  $f(z) = \frac{z}{z+1}$  的不动点以及它的类型.

**解** 令  $f(z) = z$ , 即  $\frac{z}{z+1} = z$ , 也即  $z^2 = 0$ , 解得  $z_1 = z_2 = 0$ . 因此  $f$  在实轴上有一个不动点 0, 它是抛物型的.

**例 2** 求莫比乌斯变换  $f(z) = z + 1$  的不动点以及它的类型.

**解** 令  $f(z) = z$ , 即  $z + 1 = z$ . 显然它只有唯一解  $\infty$ , 因此  $f$  有唯一不动点  $\infty$ , 它是抛物型的.

**例 3** 求莫比乌斯变换  $f(z) = 4z$  的不动点以及它的类型.

**解** 令  $f(z) = z$ , 即  $4z = z$ . 显然它有两个互异解  $z_1 = 0, z_2 = \infty$ , 因此  $f$  有两个互异不动点 0 与  $\infty$ , 它是双曲型的.

**例 4** 求莫比乌斯变换  $f(z) = \frac{1}{z}$  的不动点以及它的类型.

**解** 令  $f(z) = z$ , 即  $\frac{1}{z} = z$ , 解得  $z = \pm 1$ , 故  $f$  有两个实的互异不动点 1 与  $-1$ , 它是双曲型的.

**例 5** 求莫比乌斯变换  $f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$  的不动点以及它的类型.

**解** 令  $f(z) = z$ , 即  $\frac{z+1}{-z+1} = z$ , 也即  $z^2 + 1 = 0$ , 解得  $z = \pm i$ , 故  $f$  有两个共轭的复不动点  $i$  与  $-i$ , 它是椭圆型的.

**例 6** 求与矩阵  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$  相对应的莫比乌斯变换的不动点及其类型.

**解** 对应的莫比乌斯变换为  $f(z) = \frac{3z+0}{0z+1/3} = 9z$ . 令  $f(z) = z$ , 即  $9z = z$ , 解得  $z_1 = 0, z_2 = \infty$ , 因此  $f$  在扩充实轴上有两个互异不动点, 它是双曲型的.

#### 10. 关于单位圆的反演变换.

**定义 (反演):** 设圆  $O$  为欧氏平面内的以原点为心的单位圆,  $\ell$  是从圆心  $O$  出发的一条射线,  $A$  与  $A'$  是射线  $\ell$  上的两点. 如果

$$|OA| \cdot |OA'| = 1,$$

则称  $A$  与  $A'$  互为反演点, 单位圆  $O$  称为反演圆. 将每个点变成它的反演点的变换称为反演.

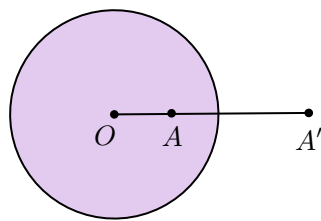


图 9: 满足  $|OA| \cdot |OA'| = 1$  的  $A$  与  $A'$  互为反演点

**命题:** 反演具有以下的重要性质:

- (1) 反演将不过原点的圆映为不过原点的圆.
- (2) 反演将不过原点的直线映为过原点的圆, 反之亦然. (直线的无穷远点对应于反演圆的圆心)

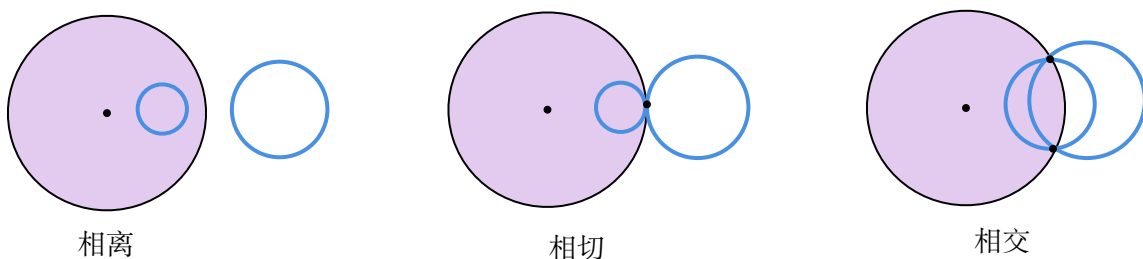


图 10: 反演将不过原点的圆映为不过原点的圆

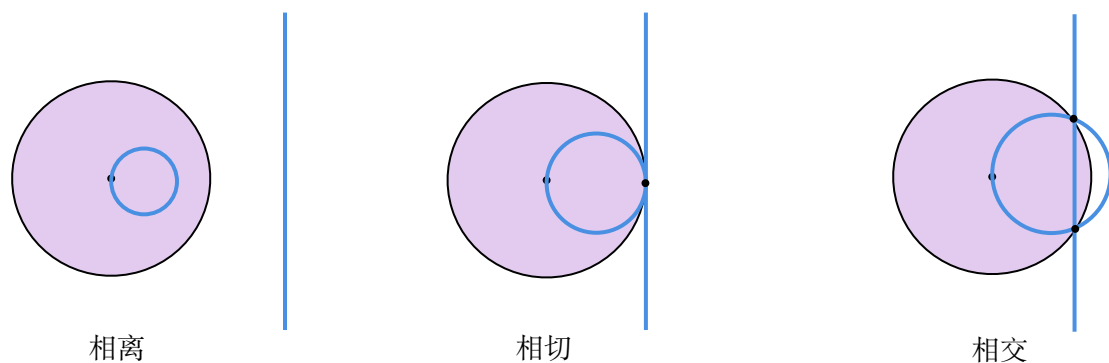


图 11: 反演将不过原点的直线映为过原点的圆 (反之亦然)

**例 7** 在平面直角坐标系  $xOy$  内, 求圆  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  关于单位圆  $O$  的反演像 (写出曲线方程).

**解析** 先根据反演的性质确定像曲线是直线还是圆, 然后找特殊点 (例如相切就找切点, 相交就找交点, 相离就自行寻找容易计算的点) 得到像曲线的具体方程.

**解** 根据反演的性质我们知道反演之后的像是圆心位于  $x$  轴的圆. 又因为点  $(1, 0)$  的像是



$(1, 0)$ , 点  $(3, 0)$  的像是  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ , 故反演后的像曲线过  $(1, 0)$  与  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ , 因此反演后的像曲线是圆

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}.$$

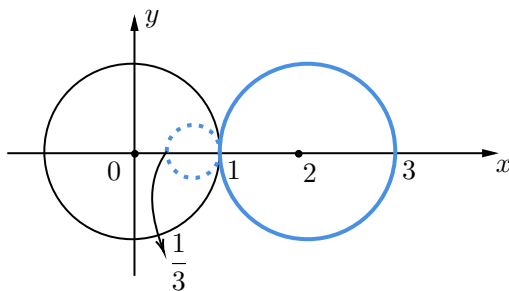


图 12: 例 7 示意图

**例 8** 在平面直角坐标系  $xOy$  内, 求圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  关于单位圆  $O$  的反演像 (写出曲线方程).

**解** 因为圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  与单位圆  $O$  交于  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  与  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  两点, 因此根据反演的性质, 像曲线为由这两点所确定的直线, 即直线  $x = \frac{1}{2}$ .

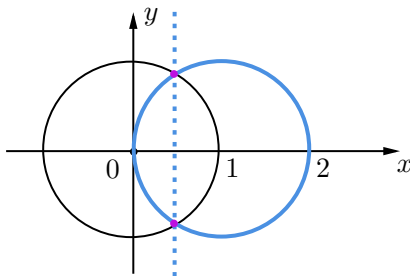


图 13: 例 8 示意图

#### 11. 球面到欧氏平面的球极投影的性质.

考虑欧氏平面以及球心位于原点  $O$ , 半径为  $r$  的球面. 设球面的北极点为  $N$ , 则欧氏平面上任意一点  $P$  与北极点  $N$  的连线均与球面有唯一交点  $P'$ , 我们把点  $P$  称为  $P'$  的球极投影. 现在我们在欧氏平面上引入无穷远点  $\infty$ , 并规定无穷远点  $\infty$  是北极点  $N$  的球极投影. 如此一来, 我们就在球面与引入了无穷远点的欧氏平面之间建立了一个一一对应. 我们把由上述方式所确定的从球面到平面 (或者从平面到球面) 的映射称为球极投影.

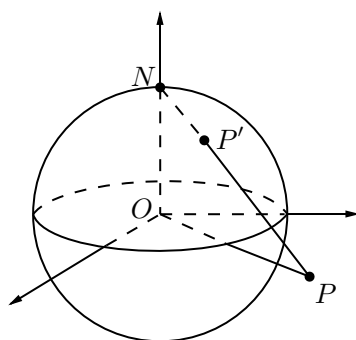


图 14: 球极投影

**命题:** 球极投影

- (1) 将欧氏平面上的直线映为球面上过北极点  $N$  的圆周,
- (2) 将欧氏平面上的圆周映为球面上不过北极点  $N$  的圆周.

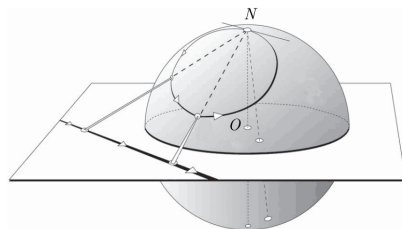


图 15: 球极投影将欧氏平面上的直线映为球面上过北极点  $N$  的圆周

如果我们把直线看做半径为无穷的圆, 那么上面的结论就可以统一表述为球极投影的保圆性.

**命题 (保圆性):** 球极投影将欧氏平面上的圆变为球面上的圆.

实际上球极投影不仅是保圆的, 还是保角的.

**命题 (保角性):** 球极投影是保角变换.

注意保角变换指的是角的大小与方向都不变.

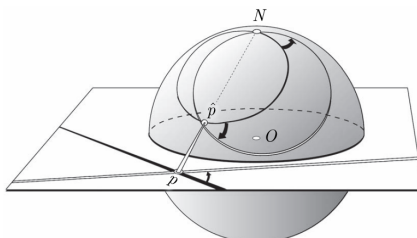


图 16: 球极投影是保角的

12. 椭圆函数 (Weierstrass 函数) 的周期性.

**定义 (格):** 设  $\omega_1, \omega_2$  是两个  $\mathbb{R}$ -线性无关的非零复数 (即  $\omega_1/\omega_2$  不是实数), 我们把

$$\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

称为  $\mathbb{C}$  中的格.

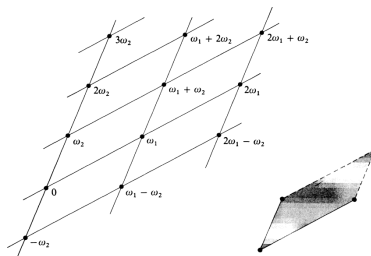


图 17: 由格  $\Lambda$  划分的基本平行四边形

**定义 (魏尔斯特拉斯函数):** 我们把亚纯函数

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega_{ij} \in \Lambda - \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega_{ij})^2} - \frac{1}{\omega_{ij}^2} \right).$$

称为关于格  $\Lambda$  的魏尔斯特拉斯  $\wp$ -函数, 简称魏尔斯特拉斯函数.

**定义 (双周期函数):** 设  $\Lambda$  是关于  $\omega_1, \omega_2$  的格, 若定义在  $\mathbb{C}$  上的函数满足

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

则称  $f$  是关于格  $\Lambda$  的双周期函数 (或者带有周期  $\omega_1$  与  $\omega_2$  的双周期函数).

**命题 (魏尔斯特拉斯函数的周期性):** 魏尔斯特拉斯函数是双周期的亚纯函数.

### 13. 椭圆函数 (Weierstrass 函数) 的极点与零点.

根据双周期性, 我们只需要考虑魏尔斯特拉斯函数在一个基本平行四边形内的表现即可.

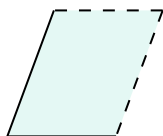


图 18: 基本平行四边形 (注意它是半开半闭的)

**命题:** 魏尔斯特拉斯函数在任一基本平行四边形内的极点个数等于零点个数 (按重数计).

**命题 (魏尔斯特拉斯函数的极点):** 魏尔斯特拉斯函数在每一个周期内有一个二阶极点.

**命题 (魏尔斯特拉斯函数的零点):** 魏尔斯特拉斯函数在每一个周期内有一个二阶零点或者两个一阶零点.

#### 14. 复代数曲线的相交数 (贝祖定理).

我们把多项式方程的解集称为代数曲线. 此外, 如果这个多项式方程中最高次幂为  $n$ , 则称所确定的代数曲线为  $n$  次代数曲线. 若只在实数范围内考虑, 则称为实代数曲线, 若在复数域  $\mathbb{C}$  中考虑, 则称为复代数曲线.

**例 9** 圆  $x^2 + y^2 = 1$  是二次代数曲线.

**例 10**  $x^2y^2 = x^3 + x$  是四次代数曲线.

**例 11** 费马曲线  $s^n + t^n = 1$  是  $n$  次代数曲线.

**定理 (贝祖定理):** 两条没有公共曲线段且次数分别为  $n, m$  的复代数曲线有  $nm$  个交点 (按重数计, 且考虑无穷远点).

**注:** 之所以要求两个曲线没有公共片段, 是因为一旦两条曲线在某一段是重合的, 那么它们就有无穷多个交点.

**例 12** 求复代数曲线  $x^2 + y^2 = 1$  与  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  的交点.

**解 解**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x - 3)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

得  $x = \frac{3}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$ . 因此交点为  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}i\right)$  与  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)$ .

**注:** 圆  $x^2 + y^2 = 1$  与圆  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  在实数范围内没有交点, 在复数范围内有交点, 这体现了复数域  $\mathbb{C}$  的优越性. 此外由贝祖定理我们知道两个二次曲线有 4 个交点 (按重数计), 但我们上面只求出了 2 个 (1 重) 交点. 实际上, 剩下的 2 个交点在无穷远处, 我们对此不做要求.

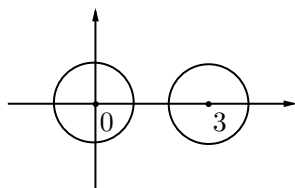


图 19: 圆  $x^2 + y^2 = 1$  与圆  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  在实数范围内没有交点

#### 15. 复代数曲线的光滑性, 奇点的判定; 复代数曲线的亏格 $g$ , 欧拉数 $\chi$ , 亏格-次数公式.

**定义 (奇点):** 设  $C$  是由方程  $f(x, y) = 0$  所确定的复代数曲线. 如果  $C$  上的点  $(a, b)$  满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0,$$

则称  $(a, b)$  是复代数曲线  $C$  的奇点.

**定义 (光滑复代数曲线):** 如果复代数曲线  $C$  没有奇点, 则称  $C$  是光滑的.

**例 13** 判断曲线  $x^2 + y^2 = 1$  的光滑性. (若不光滑请写出奇点)

**解析** 先根据  $\begin{cases} f_x = 0, \\ f_y = 0 \end{cases}$  求出所有可能的奇点, 然后验证它们是否在所给曲线上即可.

**解**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , 因此  $f_x = 2x, f_y = 2y$ . 解方程组

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0 \end{cases}$$

得  $(x, y) = (0, 0)$ . 注意到  $(0, 0)$  不在曲线  $x^2 + y^2 = 1$  上, 因此  $x^2 + y^2 = 1$  是光滑的.

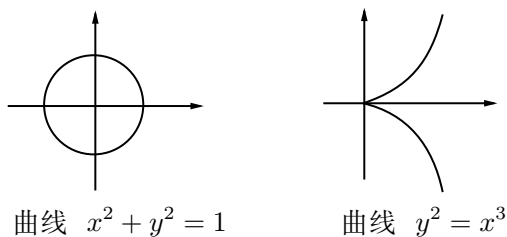


图 20: 例 13 与例 14 的示意图

**例 14** 判断曲线  $y^2 = x^3$  的光滑性. (若不光滑请写出奇点)

**解**  $f(x, y) = x^3 - y^2, f_x = 3x^2, f_y = -2y$ . 解方程组

$$\begin{cases} 3x^2 = 0, \\ -2y = 0 \end{cases}$$

得  $(x, y) = (0, 0)$ , 它在所给曲线上, 因此  $y^2 = x^3$  不是光滑的, 它有奇点  $(0, 0)$ .

下面介绍复代数曲线的亏格  $g$ . 亏格  $g$  直观上可以理解为曲面所具有的洞的数量, 例如球面的亏格为 0, 环面的亏格为 1.

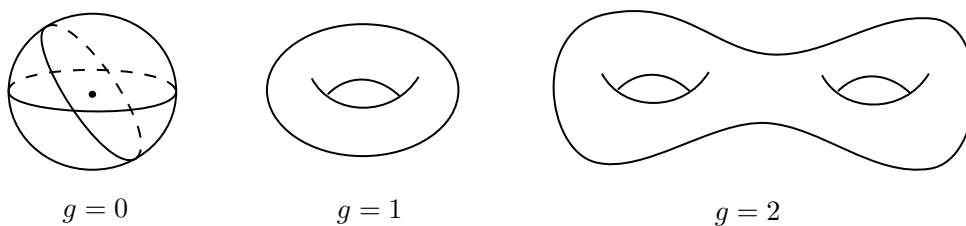


图 21: 亏格

复代数曲线的欧拉数  $\chi$  定义为

$$\chi = 2 - 2g.$$

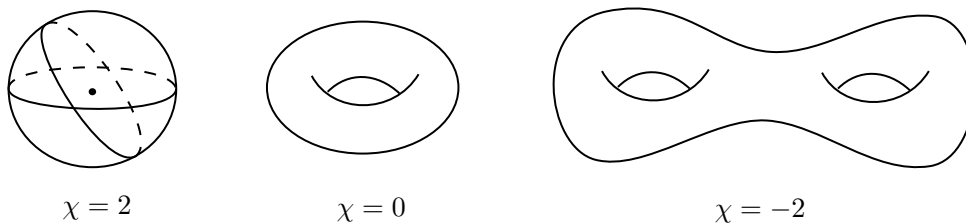


图 22: 欧拉数

**命题 (亏格-次数公式) :**  $d$  次光滑复代数曲线的欧拉数为

$$\chi = d(3 - d),$$

亏格为

$$g = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2).$$

**例 15** 一次曲线的亏格  $g = (d - 1)(d - 2)/2 = 0$ , 欧拉数  $\chi = d(3 - d) = 2$ . (对应于球面)

**例 16** 二次曲线的亏格  $g = (d - 1)(d - 2)/2 = 0$ , 欧拉数  $\chi = d(3 - d) = 2$ . (对应于球面)

**例 17** 三次曲线的亏格  $g = (d - 1)(d - 2)/2 = 1$ , 欧拉数  $\chi = d(3 - d) = 0$ . (对应于环面)

**例 18** 二次曲线  $y^2 = x$  的亏格  $g = 0$ , 欧拉数  $\chi = 2$ , 对应于球面.

**例 19** 三次曲线  $y^2 = x(x - 1)(x - 2)$  的亏格  $g = 1$ , 欧拉数  $\chi = 0$ , 对应于环面.

16. 复代数曲线上亚纯函数的零点与极点, 复代数曲线上亚纯微分的零点与极点.

**定义 (亚纯函数) :** 在复代数曲线  $C$  上除极点外均解析的复函数称为复代数曲线上的亚纯函数.

**命题:** 复代数曲线上的亚纯函数的零点个数等于极点个数 (按重数计).

**定义 (亚纯微分) :** 设  $f_1$  和  $f_2$  是复代数曲线  $C$  上的亚纯函数, 那么我们把  $f_1 df_2$  称为  $C$  上的亚纯微分.

我们把  $f_1 f_2'$  的零点称为亚纯微分  $f_1 df_2$  的零点, 把  $f_1 f_2'$  的极点称为亚纯微分  $f_1 df_2$  的极点.

**命题:** 复代数曲线上的亚纯微分的零点与极点个数相差  $2g - 2$  个 (按重数计), 其中  $g$  是复代数曲线的亏格.

17. 复代数曲线上的全纯微分, 线性独立的全纯微分的个数, 全纯微分的零点个数.

**定义 (全纯微分) :** 没有极点的亚纯微分称为全纯微分.

设  $C$  是亏格为  $g$  的非奇异复代数曲线 (考虑无穷远点).

**命题 (线性独立的全纯微分的个数) :** 复代数曲线  $C$  上线性独立的全纯微分的个数为  $g$ .

**命题 (全纯微分的零点个数) :** 复代数曲线  $C$  上全纯微分的零点个数为  $2g - 2$ .

18. 黎曼球面 (复射影直线) 上的亚纯微分  $(dz)$  的极点.

黎曼球面 (复射影直线) 上的亚纯微分  $(dz)$  在无穷远处有两个极点.

19. 复代数曲线上的除子, 主除子, 典范除子  $(\kappa)$ , 典范除子的次数  $\deg(\kappa)$ .

设  $C$  是亏格为  $g$  的非奇异复代数曲线 (考虑无穷远点).

**定义 (除子):** 我们把形式和

$$D = \sum_{p \in C} n_p p$$

称为  $C$  上的一个除子, 其中  $n_p \in \mathbb{Z}$ , 且除了有限个  $p \in C$  之外均有  $n_p = 0$ .

简言之,  $C$  上的除子就是  $C$  上一些点的整系数线性组合.

**定义 (除子的次数):** 我们把

$$\deg(D) = \sum_{p \in C} n_p$$

称为除子  $D = \sum_{p \in C} n_p p$  的次数.

**定义 (亚纯函数的除子):** 设  $f$  为复代数曲线  $C$  上的非零亚纯函数, 我们称

$$(f) = \sum_{p \in C} n_p p$$

为  $f$  的除子, 其中当  $p$  为  $f$  的  $m$  阶极点时  $n_p = -m$ , 当  $p$  为  $f$  的  $n$  阶零点时  $n_p = n$ , 其余情况  $n_p = 0$ .

**定义 (主除子):** 如果  $D$  是某个亚纯函数的除子, 则称  $D$  为主除子.

**命题 (主除子的次数):** 主除子的次数为 0, 即亚纯函数有相同个数的零点与极点 (按重数计).

与亚纯函数的除子完全类似, 对亚纯微分  $\omega$ , 我们同样可以利用  $\omega$  的极点与零点来定义亚纯微分的除子  $(\omega)$ .

**定义 (典范除子):** 我们把亚纯微分的除子称为典范除子, 常记作  $\kappa$ .

**命题 (典范除子的次数):** 典范除子  $\kappa$  的次数为  $\deg(\kappa) = 2g - 2$ .

20. 黎曼-罗赫定理 (Riemann-Roch theorem).

设  $D = \sum_{p \in C} n_p p$  是  $C$  上的除子, 记  $\mathcal{L}(D)$  是零函数与满足

$$(f) + D \geq 0$$

的亚纯函数所成集合, 它关于通常的函数加法与数乘构成一个复线性空间. 记  $\ell(D) = \dim \mathcal{L}(D)$ .

**定理 (黎曼-罗赫定理) :** 设  $D$  是亏格为  $g$  的非奇异代数曲线  $C$  (考虑无穷远点) 上的任一除子,  $\kappa$  是  $C$  上的典范除子, 那么

$$\ell(D) - \ell(\kappa - D) = \deg(D) - g + 1.$$