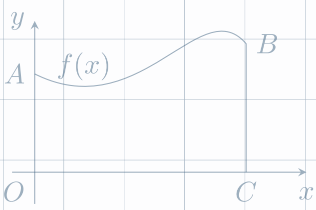


2020.9.20

几何学选讲

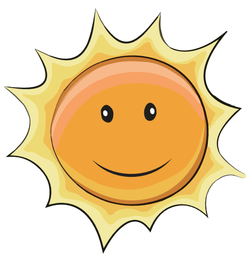
数学与应用数学

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

西南大学数学与统计学院

目录



世界上有两种最耀眼的光芒, 一种是太阳, 一种是数学人努力的模样 ~

1 欧氏几何与非欧几何

数学发展的历史长河中涌现过许多意义重大的创新, 它们不仅在数学的各个领域中发挥着不可或缺的作用, 还影响到了整个人类文明的进步, 比如:

(1) 分析学——从对运动的研究到微积分的创立与严密化.

(2) 代数学——从方程的根式可解问题到群论的出现和代数学的变革.

(3) 几何学——从平行公设到非欧几何的诞生与实现.

其中的 (1) 与 (2) 是我们早已接触过的知识, 而 (3) 中所提到的非欧几何就是我们本章的主要内容.

1.1 欧几里得几何概说

公元前 3 世纪, 欧几里得在他所著的《几何原本》中对古希腊的数学知识作了系统的总结. 他首先给出了一些最基本的定义. 例如, 他给出的平行直线的定义是

定义 (平行线): 设有处于同一平面内的两条直线, 如果它们往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交, 那么我们就称这两条直线是平行的.

在给出一些基本的定义之后, 欧几里得给出了 5 条公设: (其中的第 5 条你可以特别关注一下, 它的长度与前四条相比是那样的格格不入. 事实上, 它就是我们后面讨论的主角)

1. 从任一点到任一点可作一直线.
2. 一条有限直线可以不断循直线延长.
3. 以任一点为中心和任一距离为半径可以作一个圆.
4. 所有直角彼此相等.
5. 若一直线与两直线相交, 且在一侧构成的同旁内角之和小于两直角, 则这两直线无限延长后必在同旁内角和小于两直角的这一侧相交.

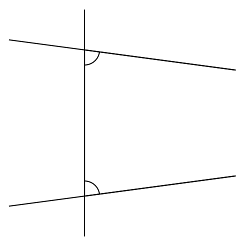


图 1.1: 第五公设

在 5 条公设之后, 欧几里得又给出了 5 条公理: (当然, 你唯一需要关心的只有上面的平行公设, 其他的公设与公理作一个大致了解即可)

1. 与同一个量相等的量彼此也相等.
2. 等量加等量, 总量仍相等.
3. 等量减等量, 余量仍相等.
4. 彼此重合的图形是全等的.
5. 整体大于部分.

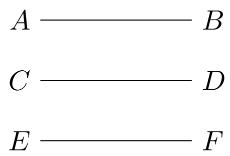


图 1.2: 与同一个量相等的量彼此也相等

欧几里得以这些基本定义, 5 条公设和 5 条公理作为全书推理的出发点, 要求在证明每一个命题时只能使用公设、公理、定义和前面已经证明了的定理进行逻辑推理. 这种方法后来被称为公理化的方法, 它使得知识条理化和严密化. 如果我们将那些原本零零散散的命题与定理比作各自为王的草寇, 那么欧几里得的工作就是把它们整编成了一支正规军.

尽管欧几里得几何一向被看做数学演绎推理的典范, 但它仍然是有漏洞的、不严密的, 并且有些结论的证明仍然依靠了直观——这样的情况甚至在《几何原本》第一个命题的证明中就出现了.

《几何原本》中的第一个命题：在一给定的有限直线上可以作一个等边三角形.

欧几里得在《几何原本》中给出的证明如下: (你能发现它的漏洞在哪吗？)

设有限直线为 AB,

(1) 以点 A 为中心, AB 为半径作圆.

(2) 以点 B 为中心, BA 为半径作圆.

(3) 设 C 为两圆的交点, 则 $\triangle ABC$ 就是所求的等边三角形.

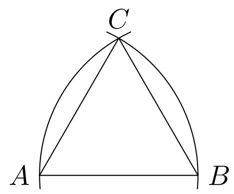


图 1.3: 有漏洞的证明

可以看出, 上面证明过程中的 (1) 与 (2) 没有问题 (它们使用了第三条公设), 问题在于 (3). 我们不难发现欧几里得在 (3) 中使用了直观: "以 A 和 B 为中心的两圆有交点". 尽管这看起来是一个显然的结论, 但遗憾的是, 这一结论并不能从欧几里得的定义、公设和公理中推出, 它是一个逻辑上的漏洞! (事实上, 如果要保证两圆有交点, 我们必须使用所谓的"连续公理", 而这一公理并没有出现在欧几里得的假设中.)

就像我们上面所讲的那样, 《几何原本》中的证明其实并不严密, 数学家们也意识到了这一点, 于是他们不停地探索着欧几里得几何系统. 最终, 希尔伯特的《几何基础》消除了欧几里得几何的不严密之处, 让它 (在自身给定的假设之下) 得到的结论达到了真正的无懈可击.

1.2 对平行公设的质疑

《几何原本》中证明过程的不严密并不是非常严重的问题, 因为我们可以将其严密化, 真正让数学家吃了大苦头的是它自身假定中的第五公设. 或许你已经发现了, 与前四条公设的简洁明了相比,

第五公设是如此的繁杂冗长. 和你一样, 数学家们也这样认为, 因此他们一直想寻求一个比较容易接受的、更加自然的等价公设来代替它, 或者试图把它当做一条定理, 由其他公设、公理推导出来. 在众多的替代公设中, 我们今天最常用的是如下的平行公设:

平行公设：过已知直线外一点能且只能作一条直线与已知直线平行.

令人遗憾的是, 所有这些替代公设并不比原来的第五公设更好接受, 包括上面所展示的平行公设. 那么, 问题究竟出在哪里呢? 回忆一下, 我们最开始给出的两直线平行的定义是: 它们在同一平面内, 往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交. 现在问题出现了: 人们能观察到的只是有限长的直线段, 怎么能知道两条直线在无穷远处的情况呢? (一旦涉及到无限, 事情往往就没有那么简单了. 这个时候如果仅凭经验直觉, 往往会掉入"想当然"的陷阱!) 由此看来, 平行公设只是人为的一种假定而已. 换言之, 我们可以舍弃平行公设, 使用另外两种假设取代它:

取代平行公设的第一种假设：过已知直线外一点至少能作两条直线与已知直线平行.

取代平行公设的第二种假设：过已知直线外一点不能作出任何平行于已知直线的直线.

没错, 分别使用上面的两种假设代替欧几里得平行公设, 我们就能得到数学上的革命性发现——非欧几何了. 换句话说, 长达几千年的欧氏几何一统天下的局面终于在人们对平行公设的质疑中被打破了!

$$
\text{非欧几何}\begin{cases}\text{过已知直线外一点至少能作两条直线平行于已知直线} & \longrightarrow \quad \text{罗巴切夫斯基几何}\\[2ex] \text{过已知直线外一点不能作出任何直线平行于已知直线} & \longrightarrow \quad \text{黎曼非欧几何}\end{cases}
$$

注：几何学中已经有一个分支叫做"黎曼几何", 为了不引起混淆, 我们把黎曼发现的非欧几何称为"黎曼非欧几何".

1.3 罗巴切夫斯基几何概览

最早、最系统地发表关于非欧几里得几何内容的人是罗巴切夫斯基 (N.I.Lobatchevsky). 他在一系列开创性的论文中放弃了欧几里得平行公设, 作出了下面的假设: (当然, 我们这里所给出的是简化后的版本, 并不是罗巴切夫斯基的原话)

罗巴切夫斯基平行公设：过已知直线外一点至少能作两条直线与已知直线平行.

下面让我们一起来看一下罗巴切夫斯基假设的具体阐述.

如图 1.4 所示, 设 P 是与直线 AB 的垂直距离为 x 的点, 垂足为 Q. 罗巴切夫斯基假设存在一个角 $\pi(x)$(注意它是距离 x 的函数), 使得所有过点 P 且与 PQ 所成的角小于 $\pi(x)$ 的直线与 AB 相交, 而所有过点 P 且与 PQ 所成的角大于等于 $\pi(x)$ 的直线与 AB 不相交. 罗巴切夫斯基将临界直线 ℓ_1 与 ℓ_2 称为 AB 的平行线, $\pi(x)$ 称为平行角, 而把位于 ℓ_1 与 ℓ_2 内部的与 AB 不相交的直线称为 AB 的分离直线.

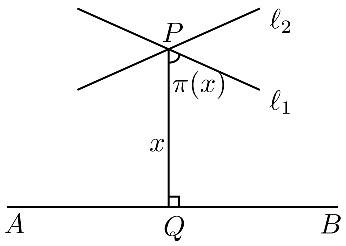


图 1.4: 罗巴切夫斯基平行假设的示意图

注: 有些地方将我们这里所说的平行直线与分离直线都称作平行直线. 如果采用这样的定义方式, 那么罗氏几何中过直线外一点就有无数条直线与给定直线平行.

在 "过已知直线外一点至少能作两条直线与已知直线平行" 的假设之下, 罗巴切夫斯基确定了平行角 $\pi(x)$ 所满足的关系式为 (称之为平行角公式)

$$\tan\frac{\pi(x)}{2} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}},$$

这里的 k 是一个正的常数, 它可以任意选取. 由平行角公式我们立马可得 $\pi(x)$ 是单调递减函数, 且

$$\lim_{x\to 0}\pi(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to +\infty}\pi(x) = 0.$$

注: 如果你对这里常数 k 的存在感到困惑, 可以类比一下球面几何中球面半径 R 所充当的角色. 此外, 为了研究上的方便, 我们通常把 k 取为 1.

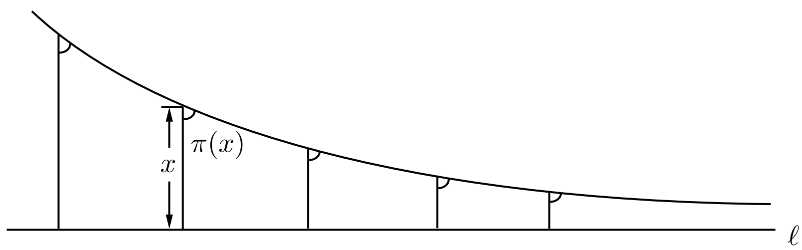


图 1.5: 距离 x 趋于无穷大时, 平行角 $\pi(x)$ 趋于 0; 距离 x 趋于 0 时, 平行角 $\pi(x)$ 趋于 $\dfrac{\pi}{2}$

罗巴切夫斯基证明了以下事实: 给定一族 (指向同一方向的) 平行线, 并在其中的一条直线上选

定一个点, 必可经过此点作一条垂直所有这些直线的曲线. 他把这条曲线命名为极限圆 (horocycle), 而这一叫法也沿用至今.

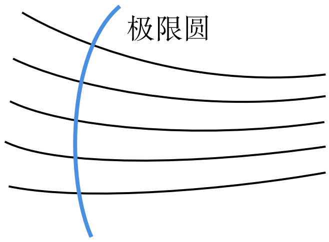


图 1.6: 罗巴切夫斯基几何中的极限圆

由罗巴切夫斯基平行假设, 我们能够得到一系列与欧几里得几何大相径庭的结果, 例如:

1. 三角形的三个内角之和小于两直角.
2. 若两个三角形的三个角对应相等, 那么这两个三角形全等.
3. 圆的周长 C 与半径 r 的关系为 $C = \pi k(\mathrm{e}^{r/k} - \mathrm{e}^{-r/k})$.
4. 圆的面积 S 与半径 r 的关系为 $S = \pi k^2(\mathrm{e}^{\frac{r}{2k}} - \mathrm{e}^{-\frac{r}{2k}})^2$.

回忆一下, 双曲正弦函数的定义为 $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, 因此上面的结果 3 与结果 4 可以用双曲三角函数来表示. 事实上, 罗巴切夫斯基几何中的大量结论都可以写成双曲三角函数的形式, 因此它又被称为双曲几何. 此外, 由于 $\cosh(z) = \cos(\mathrm{i}z)$, $\mathrm{i}\sinh(z) = \sin(\mathrm{i}z)$ (注意这里出现了虚数 i), 故 hyperbolic geometry (双曲几何) 也被称为 imaginary geometry (“想象几何” 或 “虚几何”).

尽管对现在的我们来说, 罗巴切夫斯基的新几何是一个非常伟大的发现, 但在当时, 他的工作并没有得到别人的理解, 他本人甚至还遭到了同行的攻击. 晚年的罗巴切夫斯基心情更加沉重——他被免去所有职务, 自己心爱的大儿子也因为肺结核治疗无效而去世了 (这使得罗巴切夫斯基的精神遭到了巨大的打击). 不过, 他从来没有向命运屈服, 更没有放弃自己对新几何的追求, 甚至于在身患重病、卧床不起的困境下, 他也没有停止对非欧几何的研究. 最终, 罗巴切夫斯基在双目失明的情况下完成了他留给世人的最后一部巨著《论几何学》.

1.4 黎曼非欧几何概览

黎曼采用另一种方式去改变欧几里得平行公设, 最终得到了不同于罗巴切夫斯基的新非欧几何 (称之为黎曼非欧几何). 他采取的平行公设如下:

黎曼非欧平行公设：过已知直线外一点不能作出任何直线平行于已知直线.

与罗巴切夫斯基几何类似, 在上述新平行假定之下, 我们可以推出一系列与欧氏几何不同的结论, 例如:

1. 同一平面内的两条直线必定相交.
2. 三角形内角和大于两直角.

黎曼非欧几何有一个自然的模型——球面. 黎曼把球面当做非欧平面, 并把球面上的大圆看做直线. 这样一来, 球面上的任意两条直线必定相交, 这就满足黎曼非欧平行公设. 此外不难看出, 球面上的大圆所围成的三角形内角和是大于两直角的. 总之, 黎曼非欧几何在球面上得到了成功的实现, 球面几何中的定理都可以翻译为黎曼非欧几何中的相应结论. (正因如此, 我们也直接把黎曼非欧几何称为球面几何.)

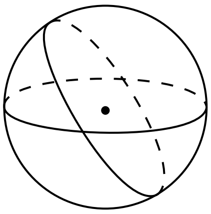


图 1.7: 球面上的大圆必定相交

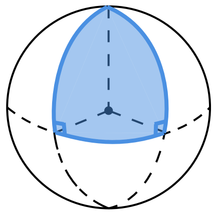


图 1.8: 球面三角形内角和大于两直角

注: 我们可以很容易地找到黎曼非欧几何的模型, 因而我们对它是不难理解的. 但是, 要找到罗巴切夫斯基几何的模型却并不是一件容易的事 (事实上, 这种模型直到罗巴切夫斯基几何正式发表半个世纪之后才被发现). 正因如此, 我们并没有在上一节提到双曲几何的模型, 而是把它放到下一章进行专门讲解.

1.5 三种几何的对比与统一

现在我们对欧氏几何与非欧几何的一些结论作一个对比. 当然, 你不必烦心于记住它们, 因为把它们写在这里只是为了让你感受一下数学的神奇与美丽 ≧ ▽ ≦ .

表 1.1: 三种几何的对比 (相关的比例常数 R 与 k 均取 1)

	勾股定理	圆的周长	圆的面积	三角形的正弦定理
球面几何	$\cos(a)\cos(b)=\cos(c)$	$2\pi\sin r$	$4\pi\sin^2\dfrac{r}{2}$	$\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin b}{\sin B}=\dfrac{\sin c}{\sin C}$
欧氏几何	$a^2+b^2=c^2$	$2\pi r$	πr^2	$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
双曲几何	$\cosh(a)\cosh(b)=\cosh(c)$	$2\pi\sinh r$	$4\pi\sinh^2\dfrac{r}{2}$	$\dfrac{\sinh a}{\sin A}=\dfrac{\sinh b}{\sin B}=\dfrac{\sinh c}{\sin C}$

注: 和欧氏几何一样, 我们把球面几何与双曲几何中的圆定义为到定点的距离等于定长的点的集合. 此外我还要提醒你一下: 球面几何中圆的周长 $2\pi\sin r$ 与面积 $4\pi\sin^2(r/2)$ 里的 r 指

的是球面上圆的半径, 而不是球面本身的半径 R.

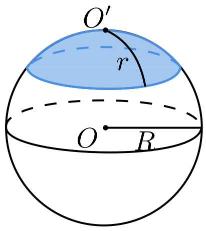


图 1.9: 半径为 R 的球面上以 r 为半径的圆 O'

是的, 你没有看错, 三种不同的几何学在结论上有着某种惊人的相似性, 这让我们有理由相信它们能够统一在一个大的框架下. 事实上, 情况确实如此, 它们都能够被纳入另一个几何分支——微分几何.

利用微分几何的手段, 我们可以为每一个空间都赋予所谓的"曲率", 其中那些曲率为正、负、0 的常曲率空间就分别对应于球面几何、双曲几何与欧氏几何 (当然, 微分几何所研究的对象不仅于此, 它还包括那些曲率逐点变化的空间). 特别地, 我们在上面的表中将相关的比例常数 R 与 k 取为 1, 就分别得到了曲率为 $+1$ 的球面几何与曲率为 -1 的双曲几何. 因此我们可以这样说: 欧氏几何是平直空间上的几何, 双曲几何与球面几何是弯曲空间上的几何!

1.6 非欧几何的现实意义

至此, 我们已经对非欧几何有了一个大致的了解 (尽管它的一些结论让人难以接受). 那么, 非欧几何究竟有什么用呢? 它会不会只是数学家们自娱自乐的一个逻辑游戏呢?

首先必须承认一点, 数学家们的确有着天马行空的想象力 (不然又怎么能写出《爱丽丝梦游仙境》这样疯狂而奇妙的故事呢?). 但是请你放心, 非欧几何绝不是一场华丽的空想. 在某种程度上, 它甚至关乎到人类对整个宇宙的认识.

根据广义相对论的观点, 宇宙的时空不是一个四维的欧几里得空间, 而是一个十分复杂的、有着各种弯曲的空间, 其弯曲程度取决于空间物质的质量分布. 但是, 在一个很小的局部范围内, 忽略掉某些因素之后, 其曲率可以视为常数, 这时它就可以用非欧几何或欧氏几何来近似描述. 因此, 如果人类想要真正理解我们所在的宇宙, 那就无法回避非欧几何, 这便是非欧几何最大的意义之一.

图 1.10: 电影《爱丽丝梦游仙境》里的柴郡猫

当然, 除了上面提到的高大上的意义外, 非欧几何 (特别是双曲几何) 在当前多个热门领域 (比如深度学习、图像处理等等) 也都开始展现出强大的能力. 因此我们有理由相信, 在若干年后, 非欧几何将会影响我们日常生活的方方面面. 到那时, 它就能和欧氏几何一样被大众 (而不仅仅是少部分人) 所接受、所熟知了.

2 双曲几何的模型

通过上一章的学习, 我们已经对非欧几何有了一定的了解. 回忆一下, 当时我们给出了黎曼非欧几何的模型——球面, 因此我们对黎曼非欧几何是比较容易接受的. 同样地, 建立双曲几何的模型是我们理解双曲几何必不可少的一环, 这就是本章的主要内容.

2.1 双曲几何模型总述

所谓的“双曲几何的模型”, 就是在欧氏几何的框架之下来实现双曲几何的一种途径. 通过它们, 我们能够对双曲空间有一个直观的感受.

在正式介绍具体的模型之前, 我们需要先弄清楚双曲几何和它的模型之间的关系. 要做到这一点, 我们可以考虑地球与地图的关系. 首先, 地球只有一个, 但它有多种不同的方式投影到平面上, 因此我们可以在不同的场合选用不同投影方式的地图. 其次, 由于球面与平面具有不同的曲率, 因此地图是不可能完全准确地反映地球的.

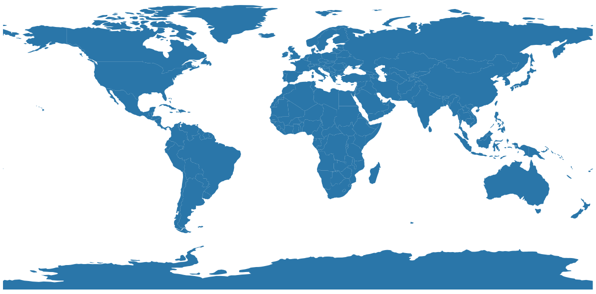


图 2.1: 墨卡托投影是最常用的地图投影方法之一, 它导致越靠近南北两极的地方面积失真越严重

受此启发, 我们可以将双曲几何及其模型的关系表述为: 双曲空间是不变的, 但它有多种不同的方式投影到欧氏空间中 (即是说双曲几何有着多种不同的模型). 此外, 由于双曲空间与欧氏空间有不同的曲率, 因此这些模型在反映双曲几何的同时也会丢失一些原本的信息. 换言之, 我们通过这些模型看到的是一个变了形的双曲空间! (就像我们通过地图看到的是变了形的地球.)

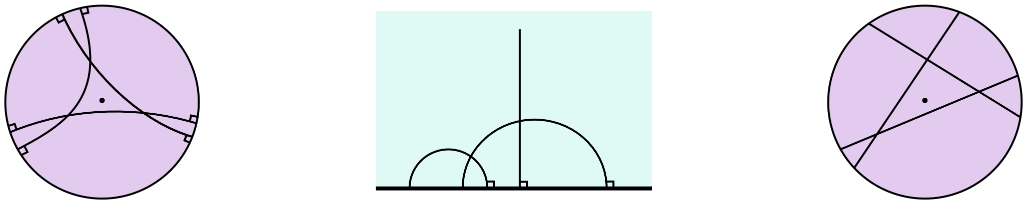


图 2.2: 双曲几何的一些模型: 庞加莱圆盘、庞加莱上半平面、克莱因圆盘

正如我们上面所说, 双曲几何模型的一大作用就是可视化双曲空间 (尽管我们看到的是它变形后的样子). 不过对于数学家而言, 双曲几何模型的最大作用并不是可视化, 而是用来检验双曲几何公理系统的相容性. 其具体原理是: 通过这些模型, 双曲几何的每一个命题都能被翻译为欧氏几何的命题. 例如, 使用庞加莱上半平面, 我们可以将双曲几何的结论 "两点确定一条直线" 转化为欧氏几何的结论: 上半平面内的两点确定一个圆心位于 x 轴的半圆或者一条垂直于 x 轴的半直线 (它们是庞加莱上半平面的直线).

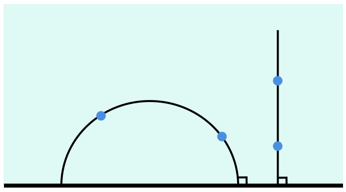


图 2.3: 庞加莱上半平面对 "两点确定一条直线" 的翻译

正是由于双曲几何模型具有我们上面所说的 "翻译" 作用, 一旦我们发现了非欧几何的矛盾, 那也就发现了欧氏几何的矛盾. 因此, 只要欧氏几何是没有问题的, 那么非欧几何也是没有问题的!

下面我们可以正式开始介绍双曲几何的模型了.

2.2 庞加莱圆盘

我们要介绍的第一个模型是庞加莱圆盘模型. 庞加莱圆盘是复平面上的单位开圆盘

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

它是最著名和最常见的双曲几何模型之一 (因此我们将它作为第一个模型进行介绍). 这里的记号 $\mathbb{D}$ 来自圆盘 "disc" 的首字母.

定义 (庞加莱圆盘内的直线): 我们把以下两种曲线称为庞加莱圆盘内的直线:

(1) 圆盘的直径 (不包括端点).

(2) 与单位圆周 C 相交成直角的圆弧 (不包括端点).

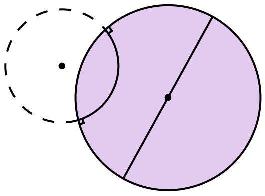


图 2.4: 庞加莱圆盘内的直线

回忆一下, 罗巴切夫斯基几何的直线有三种不同的关系——相交、平行与分离. 当我们在庞加莱圆盘内考察这三种关系时, 它们就分别表现为:

(1) 相交: 两条直线在圆盘 $\mathbb{D}$ 内相交于唯一一点.

(2) 平行: 两条直线在圆盘 $\mathbb{D}$ 内没有交点, 在圆周 C 上有一个公共端点.

(3) 分离: 两条直线在圆盘 $\mathbb{D}$ 内没有交点, 且在圆周 C 上没有公共端点.

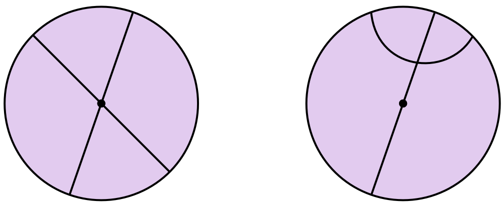


图 2.5: 庞加莱圆盘内的相交直线

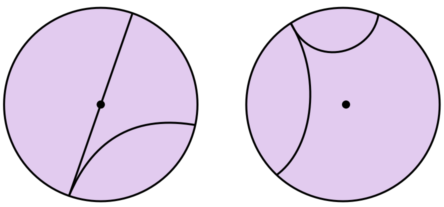


图 2.6: 庞加莱圆盘内的平行直线

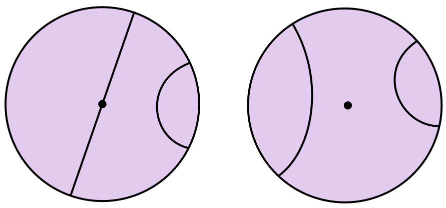


图 2.7: 庞加莱圆盘内的分离直线

和你所期望的一样, 庞加莱圆盘满足罗氏几何的平行公理: 过直线外的一点 P, 有两条直线与这条直线平行 (这是庞加莱圆盘能够反映罗氏几何的最主要原因).

图 2.8: 在庞加莱圆盘中, 过直线外一点有两条平行线

庞加莱圆盘有一个非常好的性质: 双曲圆恰好也是欧氏圆 (但它们的圆心与半径是不同的). 此外, 庞加莱圆盘中的极限圆就是圆盘内与边界相切的圆.

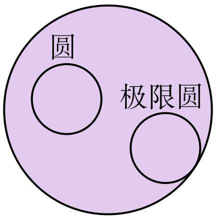


图 2.9: 庞加莱圆盘内的圆与极限圆

2.3 庞加莱上半平面

我们把复平面的上半部分

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

称为庞加莱上半平面 (简称上半平面), 它是另一种非常重要的双曲几何模型. (这里的记号 $\mathbb{H}$ 来自半平面 “half-plane” 的首字母.)

定义 (上半平面内的直线): 我们把下面两种曲线称为庞加莱上半平面 $\mathbb{H}$ 内的直线:

(1) 垂直于 x 轴的上半直线.

(2) 圆心位于 x 轴的上半圆周.

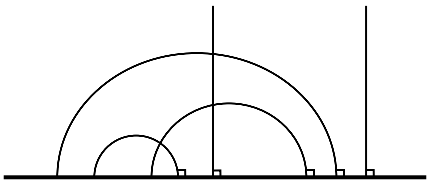


图 2.10: 上半平面内的直线

和庞加莱圆盘上的情况类似, 上半平面内的直线也有三种情况:

(1) 相交: 两直线在 $\mathbb{H}$ 内相交.

(2) 平行: 两直线有一个公共端点.

(3) 分离: 两直线没有公共端点.

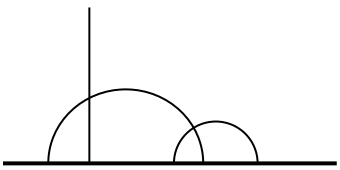


图 2.11: 上半平面内的相交直线

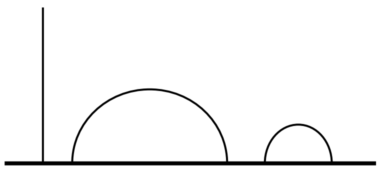


图 2.12: 上半平面内的分离直线

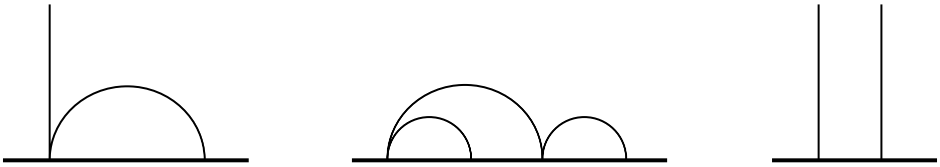


图 2.13: 上半平面内的平行直线

注：两条垂直于 x 轴的直线之所以也是平行的, 是因为它们有公共端点 ∞.

作为双曲几何的模型之一, 上半平面满足罗氏几何的平行公理: 过直线外的一点 P, 有两条直线与这条直线平行 (这是上半平面能够反映罗氏几何的关键所在) .

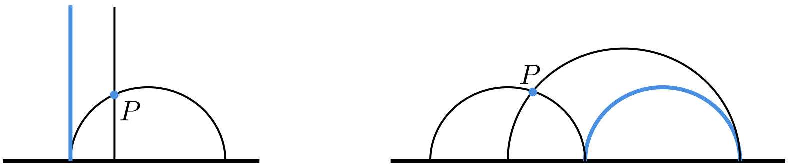


图 2.14: 在上半平面内, 过直线外一点有两条平行线

和庞加莱圆盘类似, 庞加莱上半平面内双曲圆也恰好是欧氏圆, 只不过二者的圆心与半径不同. 此外, 庞加莱上半平面内的极限圆就是上半平面年内与实轴相切的圆.

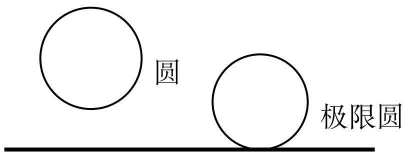


图 2.15: 上半平面内的圆与极限圆

2.4 $\mathbb{D}$ 与 $\mathbb{H}$ 的关系

相信你已经发现了, 庞加莱圆盘 $\mathbb{D}$ 与上半平面 $\mathbb{H}$ 非常相似: 它们都有两种直线, 并且双曲圆都是欧氏圆. 事实上它们的确关系密切: $\mathbb{H}$ 与 $\mathbb{D}$ 是等距的, 并且它们之间的等距就是著名的凯莱变换:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \end{aligned}$$

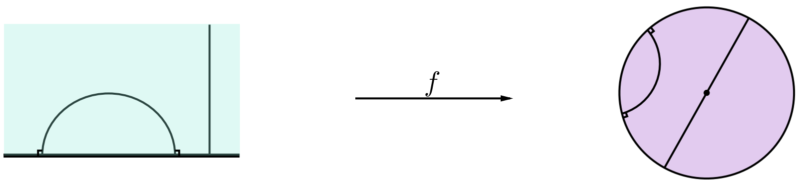


图 2.16: 凯莱变换是 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{D}$ 的等距

2.5 克莱因圆盘

这一节我们来认识一下另一种双曲几何的模型——克莱因圆盘. 与庞加莱圆盘不同的是, 克莱因圆盘内的直线就是通常的圆内的弦.

定义 (克莱因圆盘内的直线): 我们把圆盘内的弦 (不包括端点) 称为克莱因圆盘内的直线.

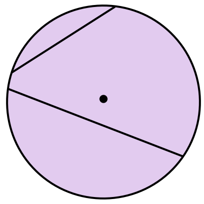


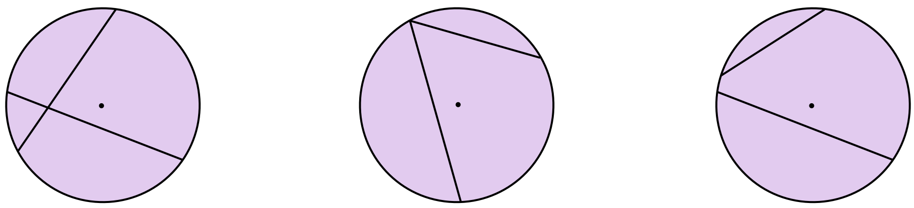
图 2.17: 克莱因圆盘内的直线

作为双曲几何的模型之一, 克莱因圆盘内的直线具有相交、平行与分离这三种位置关系, 它们分别表现为

(1) 相交: 在克莱因圆盘内交于一点.

(2) 平行: 有一个公共端点.

(3) 分离: 在圆盘内不相交, 且没有公共端点.



相交　　平行　　分离

图 2.18: 克莱因圆盘内直线的三种情况

同样地, 作为双曲几何的模型, 克莱因圆盘内过直线外一点可以作两条平行线.

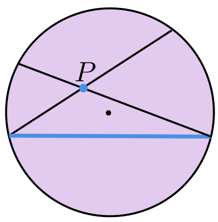


图 2.19: 克莱因圆盘内, 过直线外一点可以作两条平行线

2.6 伪球面

伪球面是高斯曲率为负常数的曲面, 它是另一种双曲几何的模型.

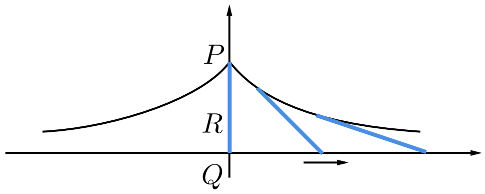


图 2.20: 曳物线的形成过程

要了解伪球面, 我们必须先认识一种特殊的曲线——曳物线. 如图 2.20 所示, 给出一根长度为 R 的木棍 PQ, 将它放在纵轴上, 其中一端 P 位于点 $(0,R)$, 另一端 Q 位于点 $(0,0)$. 将 Q 沿着横轴向右滑动, 那么 P 就会被拖动, 而 P 在这个过程中画出的曲线就是右半边曳物线 (正如你所想的那样, 曳物线的名称就来源于此). 同样地, 让 Q 沿着横轴向左滑动, 那么 P 就画出了左半边曳物线. 将它们合在一起, 我们就得到了一条完整的曳物线.

让曳物线绕着横轴旋转一周, 它就形成了一个旋转曲面, 我们将其称为伪球面, 而木棍 PQ 的长度 R 就称为这个伪球面的半径.

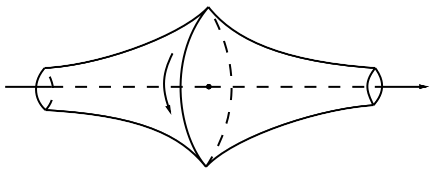


图 2.21: 曳物线旋转一周形成伪球面

我们知道, 半径为 R 的球面的高斯曲率是 $\dfrac{1}{R^2}$. 很巧的是, 半径为 R 的伪球面的高斯曲率为 $-\dfrac{1}{R^2}$ (事实上, "伪球面" 这个名字就来源于这里). 此外, 只要我们将伪球面上的测地线当做直线, 那么双曲几何的一片就能够在伪球面的一片上实现.

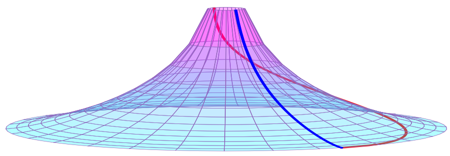


图 2.22: 伪球面上的两种测地线

或许你已经注意到我们上面的限定词 "一片" 了. 是的, 我们没有办法在伪球面上实现完整的双曲几何, 而造成这一悲惨事实的原因是: 伪球面的 "赤道" 是不光滑的, 它上面的点根本就没有所谓的曲率可言! 正因如此, 伪球面的两半之间有着一条不可逾越的鸿沟, 我们无法在它上面实现完整的双曲几何, 只能退而求其次地实现双曲几何的一片. (不过请不要为此而伤心, 毕竟我们本就无法真正地看到双曲空间. 从这个角度出发, 伪球面对于我们而言已经足够好了 ◡̈)

3 流形

前面我们对非欧几何和它的模型作了一个简要的介绍, 现在我们把目光转向几何学的另一重要内容——流形.

作为 20 世纪数学最具代表性的概念之一, 流形是描述无数自然现象的一种空间形式. 可以这样说, 流形集几何、代数、分析于一体而成为了现代数学的重要研究对象, 它为非线性分析的蓬勃发展提供了广阔的舞台. 正是因为流形具有如此重要的地位, 我们有必要对它作一个了解.

3.1 内蕴几何与外蕴几何

18 世纪, 克莱洛、欧拉、蒙日等人创立了微分几何, 这是一个运用微积分的技巧研究曲线和曲面逐点变化的性质的领域. 在那个时候, 曲面是被当作三维欧氏空间中的图形进行研究的.

1827 年, 高斯发表了著作《关于曲面的一般研究》. 在这篇文章中, 高斯提出了一个全新的想法: 曲面本身可以看成一个独立的空间. 事实上, 他证明了曲面的全部有用性质都能够从

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u\mathrm{d}u + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

中推导出来. 基于这一点, 我们可以忘掉曲面是位于三维空间中的这个事实, 考察曲面自身的几何 (称之为曲面的 “内蕴几何”).

从字面意思上看, 内蕴几何就是指那些源于内在结构, 而与其所处的外在空间无关的几何. 事实上情况也确实如此. 理解内蕴几何的最简单例子就是将一张展平的纸卷成圆筒. 在平纸变成圆筒的过程中, 我们没有对纸张进行拉伸和压缩, 因此纸张的内部结构未曾变化, 居住在这张纸上的生物从始至终都不知道它们的居住地被我们改变了.

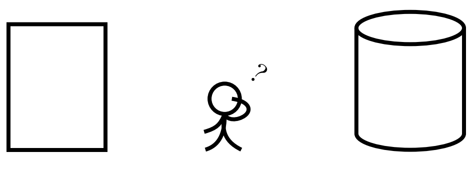


图 3.1: 生活在纸面上的生物不能区分纸是平的还是卷的

既然有 “内蕴几何”, 那自然就有与之相对的 “外蕴几何”. 和你所想的一样, 外蕴几何就是曲面依赖于它所在的外部空间的几何. 可以这样说, 外蕴几何是我们 “最熟悉的陌生人”, 因为我们经常在不知不觉中用到了它 (例如当我们为解决一个球面上的几何问题而建立空间直角坐标系时).

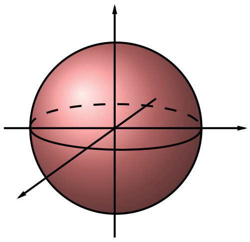


图 3.2: 建立外在的坐标系解决球面几何问题

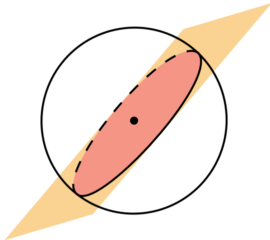


图 3.3: 用外蕴的方式定义大圆

利用内蕴与外蕴, 我们可以对几何中的对象给出两种不同的定义方式: (1) 利用外在空间给出定义 (外蕴) ; (2) 不借助外部空间, 利用对象自身给出定义 (内蕴). 下面我们以球面上的大圆为例进行说明, 希望你能对这两种定义方式有一个直观的理解.

定义 (**大圆, 外蕴**) : *我们把球面与过球心的平面所成的交线称为球面上的大圆.*

定义 (**大圆, 内蕴**) : *我们把球面上的封闭测地线称为该球面上的大圆.*

或许你已经发现了, 采用外蕴的定义方式往往使概念更加直观, 而采用内蕴的方式则往往更能揭示其本质. 正是因为这一点, 在一般的初等几何中, 我们通常采用外蕴这种更加直观明了的定义方式. (不仅如此, 外蕴的计算也常常要比内蕴来得轻松.)

尽管外蕴几何十分的方便, 但它有一个致命的缺点——要想采用外蕴几何, 我们必须知道研究对象所处的外部空间. 换句话说, 如果我们不清楚研究对象所处的外部环境, 我们就无法使用外蕴几何. 因此, 内蕴几何才是数学家们关注的核心 (并且它才反映了事物的本质). 以人类所关注的宇宙为例, 如果没有内蕴几何, 那么我们也许永远无法弄清楚宇宙的真正奥秘! (除非人类能够达到宇宙之外, 不过目前看来这似乎还是一件很遥远的事情.)

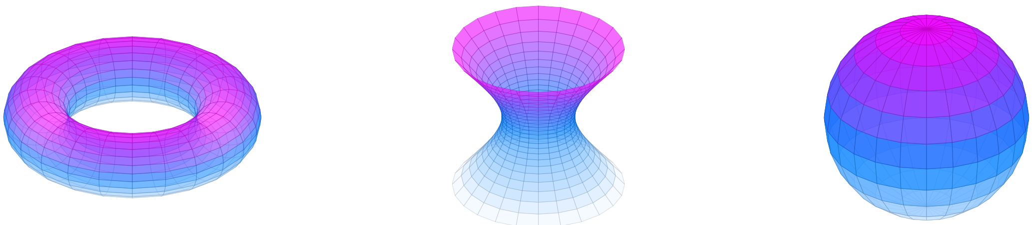


图 3.4: 宇宙的形状究竟是怎样的?

3.2 流形

1854 年, 黎曼作了就职演说《论作为几何学基础的假设》——这被认为是数学史上最伟大的演讲之一. 黎曼在这场演讲中指出, 不仅仅是三维空间中的曲面, 任意维空间中 (满足某些条件) 的对象都可以被视为一个独立的空间 (称之为流形), 其上都有它们自身的几何. 换言之, 黎曼将高斯关于曲面的内蕴几何思想推广到了一般的流形, 将几何学的研究对象从低维推广到了高维.

究竟什么是流形呢？粗略地说，流形就是在每一点附近看起来都像欧几里得空间的集合 (当然我们在这里省略了很多技术性的细节)，而 n 维流形就是每一点附近看起来都像 $\mathbb{R}^n$ 的空间.

空洞的概念往往有些抽象，这时具体的例子可以帮助我们更好地理解它们. n 维流形的一个最典型例子就是 $\mathbb{R}^n$ (它显然符合我们上一段的描述). 此外，流形的开子集也是流形，并且它们具有相同的维数. (因此 $\mathbb{R}^n$ 中的开集都是 n 维流形.)

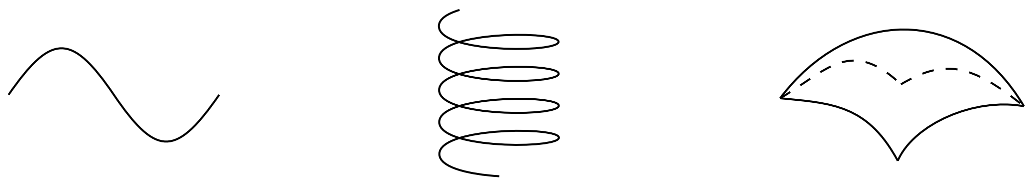


图 3.5: 曲线局部看起来像 $\mathbb{R}^1$，是一维流形; 曲面局部看起来像 $\mathbb{R}^2$，是二维流形

流形的维数可以理解为它的独立可变参数的个数 (物理学中称之为 “自由度”). 比如说：曲线可被一个独立参数 (通常用 t 表示) 确定，它是一维流形; 曲面需要两个独立参数 (通常用 u 与 v 表示) 才能确定，它是二维流形. 此外，$\mathbb{R}^3$ 和它的开子集需要三个独立参数才能确定，它们是三维流形. 事实上，$\mathbb{R}^3$ 和它的开子集是仅有的能被我们看见的高维流形 (这里的高维指的是维数大于 2).

注：我们把一维流形统称为曲线，把二维流形统称为曲面. 例如 $(x_1(t), \cdots, x_n(t)), t \in (a, b)$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中曲线的一般表示，其中每个坐标 x_i 均为连续函数.

除了 $\mathbb{R}^n$ 之外，最基本、最重要的 n 维流形或许就是 n 维单位球面 S^n 了. n 维单位球面 S^n 是 $n+1$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子集，其具体表示为

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2 + (x_{n+1})^2 = 1\}.$$

例如，一维单位球面 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 就是我们通常所说的圆周，而二维单位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 就是通常的球面. (习惯上用 x, y 表示 $\mathbb{R}^2$ 的标准坐标，用 x, y, z 表示 $\mathbb{R}^3$ 的标准坐标.)

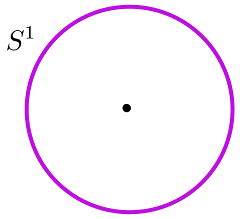


图 3.6: 一维球面

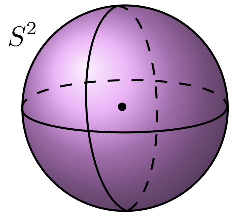


图 3.7: 二维球面

可以发现，虽然 S^n 上的点有 $n+1$ 个坐标分量，但只要给出其中 n 个分量，就能通过解方程来确定剩下的一个分量. 换句话说，S^n 可被 n 个独立参数确定，因此它是一个 n 维流形 (这就是为什

么 S^n 位于 $n+1$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中, 而我们却叫它 n 维球面).

注：我们把 n 维流形的 $n-1$ 维子流形称为该 n 维流形中的超曲面. 由此可以看出, n 维球面 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面, 所以我们又叫它超球面. 与之类似, 方程

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n+a_{n+1}x_{n+1}=b$$

也确定了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个 n 维流形, 因此也是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面, 我们将其称为超平面.

在介绍完 $\mathbb{R}^n$ 与 S^n 之后, 让我们来看一下第三种常见的 n 维流形——$\mathbb{R}^n$(或它的开子集) 上连续函数的图像. 具体来说, 对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U 上的连续函数 $f:U\to\mathbb{R}^m$ 而言, 它的图像

$$\Gamma(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+m}\mid x\in U\}$$

是一个 n 维流形. 事实上, 尽管 f 的图像 $\Gamma(f)$ 是 $n+m$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的子集, 但它的独立可变参数只有前 n 个分量, 剩下的 m 个分量是被前 n 个分量控制着的, 因此 $\Gamma(f)$ 的自由度为 n, 它是 n 维的. 下面的图 3.8 与图 3.9 分别给出了 $m=1,n=1$ 与 $m=1,n=2$ 时的情形.

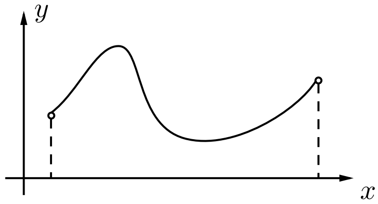


图 3.8: 开区间上连续函数的图像是流形

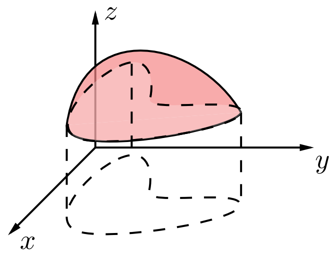


图 3.9: 开区域上连续函数的图像是流形

除了前面所讲的例子之外, 数学中还有许多有趣的流形, 比如莫比乌斯带与克莱因瓶 (它们是二维流形). 莫比乌斯带与克莱因瓶有一系列共同的奇特性质, 其中最著名的就是它们均为单侧曲面 (在看到这些例子之前, 或许大部分人都很难想象出只有一个侧的曲面是什么样的). 尽管如此, 它们之间也有着很大的不同: 莫比乌斯带可以展示在我们所处的三维空间中, 而克莱因瓶的真身却只有在四维或更高维度的空间才能显现 (因此我们所看到的克莱因瓶实际上只是它在三维空间中的投影). 当然, 这部分内容还有很多有意思的地方值得讲解, 但由于篇幅所限, 我们只能点到为止了.

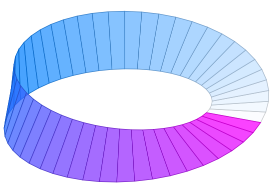


图 3.10: 莫比乌斯带

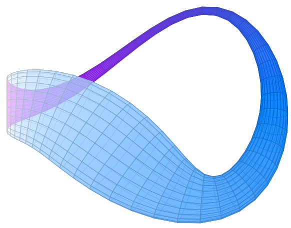


图 3.11: 克莱因瓶

3.3 光滑流形与切空间

到目前为止我们已经认识了一些常见的流形: $\mathbb{R}^n$ 及其开子集、单位球面 S^n、开集上连续函数的图像. 我需要提醒你的是, 虽然我们在上一节的图片中所展示的流形都是光滑的, 但在一般情况下流形却可以不光滑. 事实上我们很容易举出不光滑流形的例子, 比如连续函数 $y = x^{2/3}$ 在开区间 $(-1, 1)$ 上的图像是一个流形, 但它却是不光滑的 (因为它在 $x = 0$ 处有一个尖点).

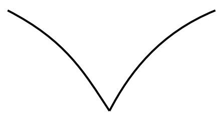


图 3.12: 函数 $y = x^{2/3}$ 的图像具有尖点, 它不是光滑流形

相比于这种带有奇异点的“坏流形”, 我们更喜欢研究那些没有怪异性质的“好流形”, 即光滑流形. 回忆一下, 流形的开子集仍然是一个流形, 于是类似地我们有: 光滑流形的开子集仍然是光滑流形. 此外我们容易想到, 既然开集上连续函数的图像是一个流形, 那么开集上光滑函数的图像自然就是一个光滑流形.

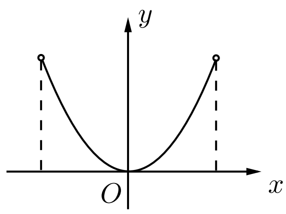


图 3.13: 开集上光滑函数的图像是光滑流形

对于光滑流形, 我们可以考虑它在每一点处的切空间. 设 M 是一个流形, p 是它上面的一点, 我们把 p 处的全体切向量所成的线性空间称为 p 处的切空间, 记为 T_pM. 这里的记号 M 来自流形 “manifold” 的首字母, 记号 T_pM 中的 T 来自切空间 “tangent space” 的首字母. 不难发现, 切空间实际上是曲线的切线以及曲面的切平面在流形上的推广.

或许你已经注意到了, 曲线的切线是一维的, 而曲线本身也是一维的; 曲面的切平面是二维的, 而曲面本身也是二维的. 事实上, 这里确实有一个普遍的结论: 流形在一点处的切空间与该流形具有相同的维数. 更精确地说, n 维流形 M 在一点 p 处的切空间 T_pM 是 n 维线性空间.

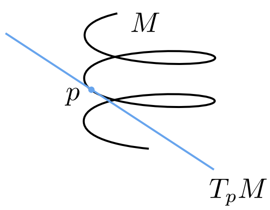


图 3.14: 曲线与它的切线都是一维的

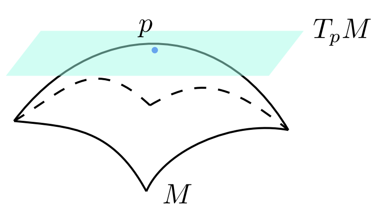


图 3.15: 曲面和它的切平面都是二维的

3.4 流形与其他领域的联系

一、代数

我们把实数域 $\mathbb{R}$ 上的全体 n 阶可逆方阵按矩阵乘法作成的群称为一般线性群, 记为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 它是抽象代数中最重要的研究对象之一 (这里的记号 GL 来自 general linear 的首字母).

尽管初看起来一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 好像和流形没有什么关系, 但我们马上就会知道它其实一个 n^2 维流形. 首先注意到行列式 $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ 本质上是一个函数, 于是我们得到了一般线性群的另一种表示:

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}),$$

其中 $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ 为 $\mathbb{R} - \{0\}$ 在行列式函数 det 下的原像.

其次, 由于 $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 而行列式函数 $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 是连续的, 故 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ 作为开集在连续函数下的原像自然也是开集. 回忆一下我们前面的结论: 流形的开子集仍然是流形, 并且它们具有相同的维数. 这样一来, 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 作为 $\mathbb{R}^{n\times n}$(同构于 $\mathbb{R}^{n^2}$) 的开子集自然也是一个 n^2 维流形了.

现在我们要指出, 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 不仅是流形, 而且还是一个李群.

定义 (**李群**) : 设 G 是一个光滑流形, 如果它同时是一个群, 并且群的乘法运算与取逆运算

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G & \qquad \eta : G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab & x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

都是光滑的, 那么我们就把光滑流形 G 称为一个李群 (Lie group).

简言之, 李群就是带有光滑群结构的光滑流形.

根据定义, 一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 里的乘法是矩阵的普通乘法, 从而由矩阵乘积的定义与逆矩阵的计算公式我们很容易知道 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的乘法运算 $\mu : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 与取逆运算 $\eta : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 都是光滑的, 因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是一个李群.

事实上, 李群为流形提供了大量的例子, 并且它自身也有着丰富的理论, 这里我们就不作过多的讨论了.

二、代数几何

代数几何是一个研究多项式方程组解集的几何性质的数学分支.

也许我们对这个领域的名字不太熟悉, 但不用害怕, 其实它所研究的一些基本问题对我们来说并不陌生, 例如: 由 k 次多项式与 ℓ 次多项式所定义的两个平面曲线有多少个交点? 对于一个给定的多项式方程, 它的解集有多少个连通分支? 什么情况下平面曲线有自交点或尖点?

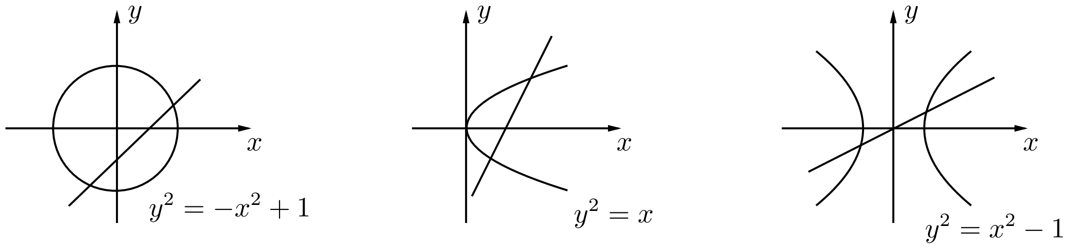


图 3.16: 二次曲线与一次曲线 (即直线) 的交点

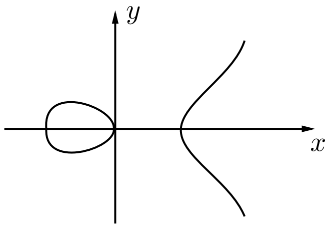


图 3.17: 曲线 $y^2 = x^3 - x$ 有两个连通分支

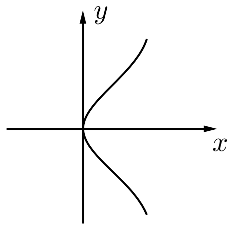


图 3.18: 曲线 $y^2 = x^3 + x$ 有一个连通分支

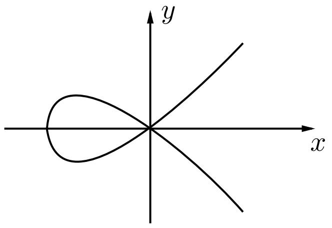


图 3.19: 曲线 $y^2 = x^3 + x^2$ 有自交点

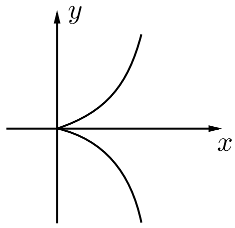


图 3.20: 曲线 $y^2 = x^3$ 有尖点

我们在上面的图中考虑的都是实数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式, 但实际上代数几何的威力只有在我们考虑代数闭域上的多项式时才能显现.

定义 (代数闭域): 设 $\mathbb{F}$ 为一个域. 如果域 $\mathbb{F}$ 上的非常值一元多项式在 $\mathbb{F}$ 中一定有根, 那么我们就把域 $\mathbb{F}$ 称为一个代数闭域 (algebraically closed field).

由上述定义容易知道实数域 $\mathbb{R}$ 不是代数闭域 (比如 $\mathbb{R}$ 上的多项式 x^2+1 在 $\mathbb{R}$ 中没有根), 而复数域 $\mathbb{C}$ 是代数闭域 (因为有代数学基本定理). 除了复数域之外当然还有其他的代数闭域, 但复数域是我们研究得最多、最有用的情况, 因此接下来我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的多项式.

定义 (代数簇): 我们把 n 元复系数多项式方程组

$$\begin{cases} f_1(z_1, \cdots, z_n) = 0, \\ \qquad \cdots \\ f_m(z_1, \cdots, z_n) = 0 \end{cases}$$

的解集称为 $\mathbb{C}^n$ 中的代数簇 (algebraic variety).

不难发现当上面的每个多项式都是一次的时候, 代数簇其实就是我们在线性代数里面所讨论的线性方程组的解空间. (然而当这些多项式不是一次的时候, 对它的研究就要困难得多, 需要综合运用分析、代数与几何等领域中的大量数学方法和工具.)

在经过一番铺垫之后, 我们的流形终于能够出场了. 代数簇和流形具有如下的关系: $\mathbb{C}^n$ 中的代数簇在除去包含奇异点 (例如自交点) 的小开子集之后成为一个流形. (和你所想的一样, 如果代数簇没有奇异点, 那么它天然地就是一个流形.)

代数几何为流形提供了大量的例子, 并且不断促进着流形理论的发展. 例如, 近现代数学家们在四维流形方面的许多进展都是由作为代数簇出现的流形实例所推动的.

三、其他领域

除了前面所讲的李群和代数簇之外, 流形还出现在数学的许多领域内, 例如在复分析中占有重要地位的黎曼曲面就是连通的一维复解析流形. 不仅如此, 流形在众多的科学领域也都扮演着不可或缺的角色, 比如经典力学、广义相对论、量子场论等等. 此外, 在 2000 年被首次提出的流形学习 (Manifold Learning) 也已成为信息科学领域的研究热点. 随着时间的推移, 流形理论只会变得越来越重要. 正如陈省身先生所说, "未来数学的研究对象, 必然是流形" .

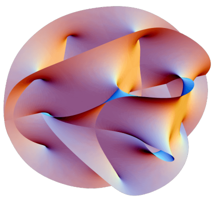


图 3.21: 卡拉比-丘流形