目录

1 预备知识: 集合论与范畴

1.1 集合

设 S 是一个集合, 我们把 $S \times S$ 的子集 R 称为 S 上的一个关系. 如果 $(a, b) \in R$, 则称 a 与 b 具有关系 R, 记作 aRb. 对于一些特殊的关系, 我们有专门的记号, 例如 $<, \leq, =$ 等. 不难发现关系 "$=$" 对应于对角线 $\{(a, a) \mid a \in S\}$.

定义 1.1 (等价关系) 集合 S 上的关系 $\sim$ 如果满足

(1) 自反性: 对任意的 $a \in S$, 有 $a \sim a$.

(2) 对称性: 对任意的 $a, b \in S$, 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$.

(3) 传递性: 对任意的 $a, b, c \in S$, 若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$, 则 $a \sim c$.

则称 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系.

如果集合 S 的一族非空不交子集的并就是 S 本身, 则称这族子集是 S 的一个划分. 例如,

$$\mathcal{P} = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}, \{9\}\}$$

给出了

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

的一个划分.

从等价关系 $\sim$ 出发, 我们可以得到 S 的一个划分. 记

$$[a]_\sim := \{b \in S \mid a \sim b\},$$

为 a 所在的等价类, 那么全体等价类形成了 S 的一个划分 $\mathcal{P}_\sim$. 反之, 每一个划分都给出了 S 上的一个等价关系.

定义 1.2 (商) 我们把集合

$$S/\sim := \mathcal{P}_\sim$$

称为集合 S 关于等价关系 $\sim$ 的商.

直观上看, 集合的商就是将属于同一等价类的元素视为同一个元素, 不加区别.

例 1.3 定义 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系 $\sim$ 为

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \text{ 是偶数}.$$

那么

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0]_\sim, [1]_\sim\}.$$

下面我们来看一下集合的无交并运算.

粗略地说, 两个集合 S 与 T 的无交并 $S \amalg T$ 可以通过先产生 S 与 T 的副本 S' 与 T' 使得 $S' \cap T' = \varnothing$, 再取 S' 与 T' 的并来得到. (于是, 若 S 有 3 个元素, T 有 4 个元素, 那么它们的无交并 $S \amalg T$ 应当含有 7 个元素.)

1.2 映射

1.2.1 映射及其复合

定义 1.4 (映射) 设 A, B 是两个集合. 我们称如下的关系 $f \subset A \times B$ 为从 A 到 B 的映射: 对每一个 $a \in A$, 存在唯一的 $b \in B$ 使得 $(a, b) \in f$.

通常我们将映射 $f \subset A \times B$ 记为 $f : A \to B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$, 并把 $(a, b) \in f$ 记为 $f(a) = b$.

从集合 A 到集合 B 的全体映射也作成了一个集合, 记为 B^A. (因此我们可以将 B^A 视为 $A \times B$ 的幂集的子集.)

定义 1.5 (映射的复合) 设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to C$ 是两个映射, 我们定义它们的复合 $g \circ f : A \to C$ 为对任意的 $a \in A$,

$$(g \circ f)(a) := g(f(a))$$

从定义可以看出映射的复合具有结合律, 也即图表

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

是交换的. 此外, 恒等映射在复合中有着特殊的作用: 对任意的映射 $f : A \to B$, 有

$1_B \circ f = f$, $f \circ 1_A = f$, 也即图表

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & B \arrow[r, "1_B"] & B \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

是交换的.

1.2.2 单射与满射

定义 1.6 (单射, 满射) 设 $f : A \to B$ 是一个映射. 若对任意的 $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ 蕴含 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 则称 f 是单射. 若对任意的 $b \in B$, 存在 $a \in A$ 使得 $b = f(a)$, 则称 f 是满射. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是双射.

我们常常用 $\hookrightarrow$ 表示单射, 用 $\twoheadrightarrow$ 表示满射, 用 $\xrightarrow{\sim}$ 表示双射.

如果集合 A 与 B 之间存在双射, 则称 A 与 B 是同构的, 记为 $A \cong B$. 采用同构的术语, 我们可以更好地描述集合的无交并: 对于集合 A, B 而言, 我们先考虑分别与 A, B 同构的副本 A', B' 使得 $A' \cap B' = \varnothing$, 再取 A' 与 B' 的并即得 A 与 B 的无交并 $A \amalg B$. 此外, 同构的副本非常容易得到, $A' = \{0\} \times A$ 便是一例, 因为

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \{0\} \times A \\ a &\longmapsto (0, a) \end{aligned}$$

是一个双射.

定义 1.7 (左逆元, 右逆元) 设 $f : A \to B$ 是一个映射. 若存在映射 $g : B \to A$ 使得 $g \circ f = 1_A$, 则称 g 是 f 的左逆元. 若存在映射 $h : B \to A$ 使得 $f \circ h = 1_B$, 则称 h 是 f 的右逆元.

当 $f : A \to B$ 既有左逆元 g 又有右逆元 h 时, 左右逆元一定相等, 这是因为

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h.$$

此时我们把 $g = h$ 称为 f 的逆元, 记为 f^{-1}. 容易证明逆元若存在则必是唯一的.

命题 1.8 (左逆元 $\Leftrightarrow$ 单射, 右逆元 $\Leftrightarrow$ 满射) 设 $f : A \to B$ 是一个映射, 其中 A 非空, 那么

(1) f 有左逆元当且仅当 f 是单射.

(2) f 有右逆元当且仅当 f 是满射.

证明 只证明 (1).

($\Longrightarrow$) 易知.

($\Longleftarrow$) 由于 $A \neq \varnothing$, 因此我们可以任意取定 $s \in A$. 定义 $g : B \to A$ 为

$$g(b) := \begin{cases} a, & \text{若存在 } a \in A \text{ 使得 } b = f(a), \\ s, & \text{若 } b \notin \operatorname{im} f. \end{cases}$$

因为 f 是单射, 故 g 是定义良好的映射. 又因为对任意的 $a \in A$, 有

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = a = 1_A(a),$$

故 g 是 f 的左逆元. □

推论 1.9 (双射 $\Leftrightarrow$ 有逆元) 映射 $f : A \to B$ 是双射当且仅当 f 有逆元.

从命题 1.8 的证明可以看出如果一个映射是单的但不是满的, 那么它可能有多个左逆元. 类似地, 若一个映射是满的但不是单的, 那么它可能有多个右逆元. 最后需要注意的是, 根据命题 1.8, 要考察映射的单满性, 我们实际上并不需要关心集合中的具体元素!

定义 1.10 (单态, 满态) 设 $f : A \to B$ 是一个映射.

(1) 如果 f 满足左消去律, 即对任意的集合 C 与任意的映射 $\alpha_1, \alpha_2 : C \to A$, 均有

$$f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

则称 f 是一个单态.

(2) 如果 f 满足右消去律, 即对任意的集合 C 与任意的映射 $\beta_1, \beta_2 : B \to C$, 均有

$$\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 = \beta_2,$$

则称 f 是一个满态.

命题 1.11 (单射 $\Leftrightarrow$ 单态, 满射 $\Leftrightarrow$ 满态) 设 f 是一个映射, 那么

(1) f 是单射当且仅当 f 是单态.

(2) f 是满射当且仅当 f 是满态.

证明 设 $f : A \to B$. 下面证明 (1).

($\Longrightarrow$) 设 g 是 f 的一个左逆元, 那么 $g\circ f = 1_A$. 任取集合 C 与映射 $\alpha_1, \alpha_2 : C \to A$. 若 $f\circ\alpha_1 = f\circ\alpha_2$, 那么

$$\alpha_1 = 1_A\circ\alpha_1 = g\circ f\circ\alpha_1 = g\circ f\circ\alpha_2 = 1_A\circ\alpha_2 = \alpha_2.$$

因此左消去律成立, f 是单态.

($\Longleftarrow$) 考虑任一单点集 $\{p\}$ 与任意的映射 $\alpha_1, \alpha_2 : \{p\} \to A$. 设 $a_1 = \alpha_1(p)$, $a_2 = \alpha_2(p)$. 由于

$$f\circ\alpha_1 = f\circ\alpha_2 \quad\Longrightarrow\quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

也即

$$f\circ\alpha_1(p) = f\circ\alpha_2(p) \quad\Longrightarrow\quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

因此

$$f(a_1) = f(a_2) \quad\Longrightarrow\quad a_1 = a_2.$$

由映射 α_1, α_2 的任意性知 f 为单射. $\square$

下面是映射的一些常见例子.

例 1.12 设 A, B 是集合, 那么有自然投影

$$\begin{aligned} \pi_A : A\times B &\longrightarrow A \\ (a,b) &\longmapsto a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi_B : A\times B &\longrightarrow B \\ (a,b) &\longmapsto b \end{aligned}$$

容易知道 π_A 与 π_B 均为满射.

$$\begin{tikzcd} & A\times B \arrow[dl, two heads, "\pi_A"'] \arrow[dr, two heads, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

例 1.13 类似地, 我们有从 A (或 B) 到无交并 $A \amalg B$ 的自然单射, 它将 $a\in A$ (或 $b \in B$) 映为副本 A' (或 B') 中的相应元素.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook] & & B \arrow[dl, hook'] \\ & A\amalg B & \end{tikzcd}$$

例 1.14 (典范投影) 设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系, 那么将 $a \in A$ 映为其所在等价类 $[a]_\sim$ 的典范投影

$$A \twoheadrightarrow A/\sim$$

是一个满射.

1.2.3 典范分解

集合 A 上的每一个映射 $f: A \to B$ 都给出了 A 上的一个等价关系:

$$a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2).$$

定理 1.15 设 $f: A \to B$ 是任一映射, 等价关系 $\sim$ 如上定义, 那么 f 有分解

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "f"] & (A/\sim) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{im}\, f \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

其中第一个映射是典范投影, 中间的双射 $\tilde{f}$ 为 $\tilde{f}([a]_\sim) = f(a)$, 第三个映射为嵌入.

证明 由 $\tilde{f}$ 的定义易知 $\tilde{f}$ 是定义良好的单射. 满性也是易得的. □

上述定理说明每一个映射都有形如 "满射 $\to$ 双射 $\to$ 单射" 的分解. 这是一个非常基本且重要的结果, 因为它的各种其他版本将会在后面多次出现 (名为第一同构定理).

1.3 范畴

1.3.1 基本概念

定义 1.16 (范畴) 一个范畴 C 由以下资料构成: 全体对象所成的类 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, 以及从任意对象 A 到任意对象 B 的全体态射所成的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$, 并且

(1) 对任意的对象 A, 存在恒等态射 $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A)$.

(2) 对任意的对象 A, B, C, 给定了态射间的合成映射

$$\begin{aligned} \circ: \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C) \\ (g, f) &\longmapsto gf := g \circ f \end{aligned}$$

此外, 合成需要满足

(i) (结合律) 对任意的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C)$ 以及 $h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C,D)$, 有

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(ii) (恒等律) 对任意的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, 有

$$f \circ 1_A = f, \qquad 1_B \circ f = f.$$

最后, 除非 $A = A', B = B'$, 否则

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A',B') = \varnothing.$$

注 1.17 我们将 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 称为 "类" 而非 "集合", 是因为在一般情况下 $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 并不构成一个集合 (它 "太大了"). 对某些范畴而言, 其全体对象确实作成了一个集合, 此时我们称这些范畴是小的.

如果范畴 C 是明确的, 那么我们常把 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 简写为 $\mathrm{Hom}(A,B)$, 并把 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 记为 $f : A \to B$.

尽管范畴的定义稍显繁杂, 但不难发现集合与映射是符合这些条件的, 因此我们可以利用集合与映射的特性来记忆它们. 例如, 两个相等的映射必有相同的来源与目标, 这对应了上述定义的最后一点.

范畴 C 中对象 A 到自身的态射称为 A 的自同态 (endomorphism), 其全体所成集合记为 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$, 即 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,A)$. 易知 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$ 是非空的, 因为 $1_A \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$. 此外, 合成定义了 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$ 上的一个运算: 若 $f, g \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$, 那么它们的复合 $gf \in \mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$. (由结合律知 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$ 作成了一个幺半群.)

1.3.2 例子

例 1.18 (集合范畴) 集合以及映射构成了一个范畴, 用 Set 表示. 其中 $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ 为全体集合所成的类, 从集合 A 到集合 B 的全体态射为 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(A,B) = B^A$, 合成为映射的复合.

例 1.19 (带基点的集合范畴) 考虑带基点的集合 (S, s_0), 其中 s_0 是集合 S 中的元素. 全体带基点的集合连同将基点映为基点的映射形成了一个范畴 Set_*, 其中的合成为映射的复合.

下面是一个完全不同的例子.

例 1.20 (等价关系决定的范畴) 设 S 是一个集合, $\sim$ 是 S 上的一个等价关系, 那么以下资料构成了一个范畴:

(1) 对象: S 中的元素.

(2) 态射: 当 $a \sim b$ 时, $\mathrm{Hom}(a,b)$ 定义为由 $(a,b) \in S \times S$ 构成的单点集; 否则 $\mathrm{Hom}(a,b)$ 定义为 $\varnothing$.

(3) 恒等态射 $1_a \in \mathrm{Hom}(a,a)$ 定义为 (a,a). (注意 $\mathrm{Hom}(a,a)$ 只含这一个元素!)

(4) 合成: 设有态射 $f = (a,b) \in \mathrm{Hom}(a,b)$ 及 $g = (b,c) \in \mathrm{Hom}(b,c)$, 那么合成态射 $g \circ f \in \mathrm{Hom}(a,c)$ 定义为 (a,c). (注意 $\mathrm{Hom}(a,c)$ 只含这一个元素!)

证明 只需验证合成具有结合律与恒等律. 设有态射 $f = (a,b), g = (b,c)$ 与 $h = (c,d)$, 那么

$$gf = (a,c), \qquad hg = (b,d).$$

从而

$$(hg)f = (a,d) = h(gf).$$

即合成有结合律. 恒等律的验证也是容易的. □

在例 1.20 中取等价关系为 "=", 那么所得范畴中的态射只有恒等态射. 我们把这样的范畴称为离散范畴.

例 1.21 在 $\mathbb{Z}$ 上考虑关系 $\leq$.

(1) 对象: $\mathbb{Z}$ 中的成员, 即整数.

(2) 态射: 若整数 a, b 满足 $a \leq b$, 则定义 $\mathrm{Hom}(a,b)$ 为由偶对 (a,b) 构成的单点集; 否则定义 $\mathrm{Hom}(a,b)$ 为空集.

(3) 恒等态射以及合成的定义与例 1.20 类似.

例 1.22 现在来看另一个小范畴的例子. 设 S 是一个集合, 定义范畴 $\hat{\mathsf{S}}$ 为

(1) 对象: S 的子集, 即 $\mathrm{Ob}(\hat{\mathsf{S}}) = \mathcal{P}(S)$.

(2) 态射: 当子集 A, B 满足 $A \subset B$ 时, 定义 $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{S}}}(A,B)$ 为由偶对 (A,B) 构成的单点集; 否则定义 $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{S}}}(A,B) = \varnothing$.

(3) 恒等态射与合成可仿照例 1.20 给出.

例 1.23 (切片范畴) 设 C 是一个范畴, A 是 C 中的一个对象. 我们将定义一个新范畴 C_A, 其对象为 C 中的态射, 其态射为 C 的交换图.

(1) 对象: 从 C 中任意对象到 A 的态射 $Z \xrightarrow{f} A$.

(2) 态射: 对任意两个对象 $Z_1 \xrightarrow{f_1} A$ 与 $Z_2 \xrightarrow{f_2} A$, 定义态射 $f_1 \to f_2$ 为 C 中的交换图

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

换言之, $\mathrm{Hom}(f_1, f_2)$ 对应于 C 中所有满足 $f_1 = f_2\sigma$ 的态射 $\sigma : Z_1 \to Z_2$.

(3) 对 C_A 的对象 $f : Z \to A$ 而言, 其上的恒等态射 1_f 为交换图 (该图的交换性由 C 中的恒等律得到)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "1_Z"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(4) 对 C_A 中的如下两个态射 $f_1 \to f_2$ 与 $f_2 \to f_3$

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f_1"'] & Z_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f_2"'] & Z_3 \arrow[dl, "f_3"] \\ A & \end{tikzcd}$$

定义其合成为交换图 (该图的交换性仍由 C 是范畴得到)

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "\tau\sigma"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_3 \arrow[dl, "f_3"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

例 1.24 现在我们采用类似的方式从一个给定的范畴 C 以及其中的两个对象 A, B 出发来得到一个新的范畴 $\mathsf{C}_{A,B}$.

(1) 对象: 从 C 中的任意对象 Z 分别到 A 与 B 的态射, 也即图表

$$\begin{tikzcd} & A \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

(2) 态射: 两个对象之间的态射

$$\begin{tikzcd} & A \\ Z_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] \\ & B \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} & A \\ Z_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] \\ & B \end{tikzcd}$$

为交换图

$$\begin{tikzcd} & & A \\ Z_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & Z_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

(因此 $f_1 = f_2\sigma$ 且 $g_1 = g_2\sigma$.)

(3) 恒等态射与合成可仿照例 1.23 给出.

例 1.25 反转例 1.24 中的箭头, 我们可以采用类似的方式构造范畴 $\mathsf{C}^{A,B}$.

1.4 态射

1.4.1 同构

定义 1.26 (同构) 对范畴 C 中的态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 而言, 若存在态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$ 使得

$$gf = 1_A \quad 且 \quad fg = 1_B,$$

则称 f 是一个同构.

同构的逆是唯一的. 这是因为若 g 与 h 均为 f 的同构, 那么

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_Ah = h.$$

这样一来, 我们就可以把 f 唯一的逆记为 f^{-1}.

性质 1.27 下面是同构的一些基本性质:

(1) 每一个恒等态射 1_A 都是同构, 并且其逆为自身.

(2) 若 f 是同构, 则 f^{-1} 也是同构, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

(3) 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 与 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C)$ 是同构, 那么 gf 也是同构, 且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

证明 (1) 和 (2) 是显然的. 对于 (3),

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = gg^{-1} = 1_C.$$

同理可证 $f^{-1}g^{-1}$ 是 gf 的左逆. □

若对象 A 与 B 之间存在同构, 则称 A 与 B 是同构的, 记为 $A \cong B$. 根据性质 1.27 可知同构是一种等价关系.

例 1.28 集合范畴 Set 中的同构就是双射.

定义 1.29 (广群) 每个态射都是同构的范畴称为广群 (groupoids).

我们把对象 A 到自身的同构称为 A 的一个自同构 (automorphism), 其全体所成集合记为 $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$, 它是 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$ 的子集. 性质 1.27 告诉我们 $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$ 具有非凡的结构: 它作成了一个群!

1.4.2 单态与满态

定义 1.30 (单态, 满态) 设 C 是一个范畴, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$.

(1) 若 f 满足左消去律, 即对任意的对象 Z 与态射 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, A)$, 均有

$$f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

则称 f 是一个单态.

(2) 若 f 满足右消去律, 即对任意的对象 Z 与态射 $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, Z)$, 均有

$$\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 = \beta_2,$$

则称 f 是一个满态.

例 1.31 在集合范畴 Set 中, 单态就是单射, 满态就是满射.

一般范畴中单态与满态可能不具有集合范畴 Set 中单态与满态的一些良好性质. 例如, 在 Set 中态射是同构当且仅当它既是单态又是满态, 然而在一般的范畴 C 中这是不

一定成立的. 又比如, Set 中态射是满态当且仅当它有右逆元, 但这对一般范畴 C 而言并不成立.

1.5 泛性质

1.5.1 始对象与终对象

定义 1.32 (始对象, 终对象) 设 C 是一个范畴, I, F 是 C 中的对象.

(1) 若对 C 中的任意对象 A, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(I, A)$ 都是单点集, 则称 I 是 C 中的始对象 (initial objects).

(2) 若对 C 中的任意对象 A, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, F)$ 都是单点集, 则称 F 是 C 中的终对象 (final objects).

例 1.33 集合范畴 Set 中空集 $\varnothing$ 是始对象, 任一单点集都是终对象.

命题 1.34 (始/终对象在同构的意义下是唯一的) 设 C 为范畴.

(1) 若 I_1, I_2 均为始对象, 则 $I_1 \cong I_2$.

(2) 若 F_1, F_2 均为终对象, 则 $F_1 \cong F_2$.

证明 若 I 为始对象, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(I, I)$ 是单点集, 因而 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(I, I)$ 只含恒等态射 1_I.

由于 I_1 是始对象, 故 C 中存在唯一的态射 $f : I_1 \to I_2$. 因为 I_2 是始对象, 故 C 中存在唯一的态射 $g : I_2 \to I_1$. 考虑态射 $gf : I_1 \to I_1$. 由于 I_1 是始对象, 故 gf 只能是恒等态射 1_{I_1}. 同理有 $fg = 1_{I_2}$. 这说明 f 是同构, $I_1 \cong I_2$.

终对象的证明类似. □

1.5.2 泛性质

始, 终对象及其唯一性一般被用来表述泛性质.

例 1.35 记 1 为某个单点集, 那么对任意的集合 X, 存在唯一的从 X 到 1 的映射.

1.5.3 乘积的泛性质

先来看 Set 中乘积的泛性质. 设有集合 A, B, 考虑它们的自然投影

$$\begin{tikzcd} & A \\ A\times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

那么对任意的集合 Z 以及态射

$$\begin{tikzcd} & A \\ Z \arrow[ur, "f_A"] \arrow[dr, "f_B"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

存在唯一的态射 $\sigma : Z \to A \times B$ 使得

$$\begin{tikzcd} & & A \\ Z \arrow[r, "\sigma"] \arrow[urr, bend left, "f_A"] \arrow[drr, bend right, "f_B"'] & A\times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

交换. (此时我们通常将 σ 记为 $f_A \times f_B$.)

证明 定义 $\sigma : Z \to A \times B$ 为 $\sigma(z) = (f_A(z), f_B(z))$, 其中 $z \in Z$. 易知对任意的 $z \in Z$, 有

$$\pi_A\sigma(z) = f_A(z), \qquad \pi_B\sigma(z) = f_B(z),$$

故上图是交换的. 此外, 若另有映射 $\tau : Z \to A \times B$ 使得 $\pi_A\tau = f_A$ 且 $\pi_B\tau = f_B$, 那么对任意的 $z \in Z$, 有 $\pi_A\tau(z) = f_A(z)$ 且 $\pi_B\tau(z) = f_B(z)$, 故

$$\tau(z) = (f_A(z), f_B(z)) = \sigma(z).$$

因此 $\tau = \sigma$, 唯一性得证. □

由此可知集合 A, B 的乘积 $A \times B$ 连同自然投影 π_A, π_B 就是例 1.24 中 $\mathsf{C}_{A,B}$ 的终

对象, 这里 C 取为 Set.

通过这种方式刻画集合的乘积, 我们可以将其推广到任意的范畴上. 如果对 C 中的任意两个对象 A, B 而言, $\mathsf{C}_{A,B}$ 都有终对象, 则称范畴 C 有乘积. 注意该终对象由两部分构成: C 中的一个对象 (通常记为 $A \times B$) 以及两个态射 $A \times B \to A, A \times B \to B$, 即

$$\begin{tikzcd} & A \\ A \times B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B \end{tikzcd}$$

1.5.4 余积的泛性质

"余" 通常代表的是反转箭头. 注意到乘积是范畴 $\mathsf{C}_{A,B}$ 的终对象, 其中的箭头来源是任意的, 但箭头的目标是 A 与 B. 因此, "余积" 是范畴 $\mathsf{C}^{A,B}$ 的始对象, 其中的箭头来源是 A 与 B, 但目标是任意的.

定义 1.36 (余积) 设 A, B 是范畴 C 中的两个对象, 那么 A 与 B 的余积 $A \amalg B$ 是范畴 C 中带有两个态射 $i_A : A \to A \amalg B$ 与 $i_B : B \to A \amalg B$ 的对象, 且此对象满足以下泛性质: 对任意的对象 Z 与态射

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_A"'] \\ Z & \\ & B \arrow[ul, "f_B"] \end{tikzcd}$$

存在唯一的态射 $\sigma : A \amalg B \to Z$ 使得

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dll, bend right, "f_A"'] \arrow[dl, "i_A"] \\ Z & A \amalg B \arrow[l, "\sigma"'] & \\ & & B \arrow[ull, bend left, "f_B"] \arrow[ul, "i_B"'] \end{tikzcd}$$

交换.

如果范畴 C 中的任意两个对象 A, B 都有余积, 则称范畴 C 有余积.

例 1.37 (无交并是余积) 无交并是 Set 的一个余积.

证明 考虑 A 的副本 $A' = \{0\} \times A$ 与 B 的副本 $B' = \{1\} \times B$. 下面证明 $A \amalg B = A' \cup B'$ 是 A 与 B 的余积. 分别定义 $i_A : A \to A \amalg B$ 与 $i_B : B \to A \amalg B$ 为

$$i_A(a) = (0, a), \qquad i_B(b) = (1, b)$$

对任意的集合 Z 与态射 $f_A : A \to Z, f_B : B \to Z$, 定义 $\sigma : A \amalg B \to Z$ 为

$$\sigma(c) = \begin{cases} f_A(a), & \text{若 } c = (0, a) \in \{0\} \times A, \\ f_B(b), & \text{若 } c = (1, b) \in \{1\} \times B. \end{cases}$$

易知 $\sigma i_A = f_A$ 且 $\sigma i_B = f_B$, 从而

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dl, "i_A"'] \arrow[dll, bend right, "f_A"'] \\ Z & A \amalg B \arrow[l, "\sigma"'] & \\ & & B \arrow[ul, "i_B"] \arrow[ull, bend left, "f_B"] \end{tikzcd}$$

是交换的. 由 σ 的构造易得唯一性. □

注 1.38 因为范畴的终对象一般不具有唯一性, 故无交并一般是不唯一的. 但注意到终对象是彼此同构的, 因此无交并在同构的意义下是唯一的.

注 1.39 利用泛性质我们可以看出集合的乘积与无交并具有出乎意料的对称性!

1.5.5 商的泛性质

设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系. 考虑映射 $\varphi : A \to Z$, 这里 Z 是任意一个集合, 且满足

$$a_1 \sim a_2 \implies \varphi(a_1) = \varphi(a_2).$$

将这样的映射视为对象, 并简记为 (φ, Z). 定义态射 $(\varphi_1, Z_1) \to (\varphi_2, Z_2)$ 为交换图

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "\sigma"] & & Z_2 \\ & A \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

那么 $(\pi, A/\sim)$ 是这一范畴的始对象, 其中 π 是典范投影. 换言之, 对任意的 (φ, Z), 存在唯一的态射 $(\pi, A/\sim) \to (\varphi, Z)$, 也即存在唯一的映射 $\overline{\varphi}: A/\sim \to Z$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A/\sim \arrow[rr, "\overline{\varphi}"] & & Z \\
& A \arrow[ul, "\pi"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

证明 要使得上图交换, 必有对任意的 $a \in A$,

$$\overline{\varphi}([a]_\sim) = \varphi(a).$$

因此只需证明 $\overline{\varphi}$ 是定义良好的. 若 $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$, 那么 $a_1 \sim a_2$, 从而 $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. 这说明 $\overline{\varphi}$ 是定义良好的. $\square$