目录

1　度量空间

1.1　度量空间与收敛点列

定义: 设有非空集合 X 与映射

$$\begin{aligned} d: X\times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) \end{aligned}$$

满足

(1) 非负性: $d(x,y)\geqslant 0$, 且 $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$, 其中 $x,y\in X$;

(2) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$, 其中 $x,y\in X$;

(3) 三角不等式: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$, 其中 $x,y,z\in X$,

则称 (X,d) 构成一个**度量空间**, d 称为 X 的度量 (或距离).

例　设 $\mathbb{R}$ 为实数集, 定义 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为**标准度量** $d(x,y)=|x-y|$, 则 $(\mathbb{R},d)$ 构成一个度量空间. 若无特殊说明, 提到 $\mathbb{R}$ 时总是指标准度量.

例　设 (X,d) 为度量空间, Y 为 X 的子集, 把度量函数 d 限制到 $X\times X$ 的子集 $Y\times Y$ 上产生度量 $d|_{Y\times Y}:Y\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$, 易知 $(Y,d|_{Y\times Y})$ 是一个度量空间, 称为 (X,d) 的**由 Y 导出的子空间**.

例　设 $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$, 定义**欧几里得度量** (或 l^2 度量)$d_{l^2}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$d_{l^2}\left((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\right)=\left(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们把 $(\mathbb{R}^n,d_{l^2})$ 称为 n **维欧几里得空间**.

例　仍考虑 $\mathbb{R}^n$, 定义**出租车度量** (或 l^1 度量) $d_{l^1}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$d_{l^1}\left((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\right)=\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|.$$

易知 $(\mathbb{R}^n,d_{l^1})$ 构成度量空间, 且对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$d_{l^2}(x,y)\leqslant d_{l^1}(x,y)\leqslant\sqrt{n}d_{l^2}(x,y).$$

例　仍考虑 $\mathbb{R}^n$, 定义**上确界范数度量** (或 l^∞ 度量) $d_{l^1}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$d_{l^\infty}\left((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\right)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

易知 $(\mathbb{R}^n, d_{l^\infty})$ 为度量空间, 且以不等式

$$\frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x,y) \leqslant d_{l^\infty}(x,y) \leqslant d_{l^2}(x,y), \quad \text{对任意的} x,y \in \mathbb{R}^n$$

与 l^2 度量相联系.

注: l^1, l^2, l^∞ 度量都是 l^p 度量的特殊情形.

例 设 X 为任一集合 (有限或者无限), 定义**离散度量** $d_{disc} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$d_{disc}(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

按照这个度量, 所有不同点之间的距离是一样的. 易知 (X, d_{disc}) 是度量空间. 由此可见, 每个集合上面都至少有一个度量.

定义: 设 (X,d) 为度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的点列, $x \in X$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, 则称 $\{x_n\}$ **依度量** d **收敛**到 x, 并称 $\{x_n\}$ 是 X 中的**收敛点列**.

当不会引起混淆时, $\{x_n\}$ 依度量 d 收敛到 x 也简称为 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 同时也用当 $n \longrightarrow \infty$ 时 $x_n \longrightarrow x$ 表达此意. 上述依度量收敛的定义等价于对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $d(x_n, x) < \varepsilon$.

例 考察 $\mathbb{R}^2$ 中的点列 $\{x_n\}$, 其中 $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. 易知

$$\lim_{n\to\infty} d_{l^1}(x_n, (0,0)) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d_{l^2}(x_n, (0,0)) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d_{l^\infty}(x_n, (0,0)) = 0,$$

从而 $\{x_n\}$ 依度量 $d_{l^1}, d_{l^2}, d_{l^\infty}$ 均收敛到 $(0,0)$. 但由于

$$\lim_{n\to\infty} d_{disc}(x_n, (0,0)) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0,$$

故 $\{x_n\}$ 依离散度量不收敛到 $(0,0)$.

由此可见, 序列的收敛性依赖于所使用的度量. 并且易知若序列 $\{x_n\}$ 依某度量收敛, 则极限是唯一的. 因此, 我们可以使用下述记号:

$$d_{l^2}\text{-}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = d_{l^1}\text{-}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0).$$

一个序列依一个度量收敛到一个点, 依另一个度量收敛到另一个点是有可能发生的. 当然, 这样的例子是相当人造的.

例 设 $X=[0,1]$, 则用通常度量 d, 有 $d\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

定义度量

$$d'(x,y)=d(f(x),f(y)),$$

则 (X,d') 是度量空间, 但 $d'\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=1$. 可见, 改变空间的度量可大大影响空间上收敛 (也叫拓扑) 的性状.

1.2 度量空间中的一些点集拓扑知识

定义: 设 (X,d) 为度量空间, $x_0\in X, r>0$. 我们称集合

$$B_{(X,d)}(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}$$

是 X 中**依度量 d 的以 x_0 为中心, r 为半径的球**. 当度量空间 (X,d) 是明确的时, 简写为 $B(x_0,r)$.

例 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 记原点为 $O(0,0)$, 则

(1) 使用欧几里得度量 d_{l^2}, 球 $B_{(\mathbb{R}^2,d_{l^2})}(O,1)$ 是开的圆盘

$$B_{(\mathbb{R}^2,d_{l^2})}(O,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\}.$$

(2) 使用出租车度量 d_{l^1}, 则得菱形

$$B_{(\mathbb{R}^2,d_{l^1})}(O,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|<1\}.$$

(3) 使用离散度量 d_{disc}, 则球就是一个单点集

$$B_{(\mathbb{R}^2,d_{disc})}(O,1)=\{(0,0)\}.$$

若把半径增加到大于 1, 那么球就是整个 $\mathbb{R}^2$.

例 在具有通常度量 d 的 $\mathbb{R}$ 中, 开区间 $(3,7)$ 也是度量球 $B_{(\mathbb{R},d)}(5,2)$.

注: 无论半径 $r>0$ 多么小, 球 $B_{(X,d)}(x_0,r)$ 都至少含有一点 x_0.

定义: 设 (X,d) 为度量空间, E 为 X 的子集, $x_0\in X$. 若存在半径 $r>0$ 使得 $B(x_0,r)\subseteq E$, 则称 x_0 为 E 的**内点**. 若存在半径 $r>0$ 使得 $B(x_0,r)\cap E=\varnothing$, 则称 x_0 为 E 的**外点**. 若 x_0 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点, 则称 x_0 为 E 的**边界点**.

E 的全体内点所成集合称为 E 的内部, 有时记作 $\mathrm{int}(E)$. E 的全体外点所成集合称为 E 的外部, 有时记作 $\mathrm{ext}(E)$. E 的全体边界点所成集合称为 E 的边界, 有时记作 ∂E.

注: (1) 若 x_0 是 E 的内点, 则必有 $x_0 \in E$, 因为 $x_0 \in B(x_0, r) \subseteq E$.

(2) 若 x_0 是 E 的外点, 则必有 $x_0 \notin E$, 因为 $x_0 \in B(x_0, r)$ 而 $B(x_0, r) \cap E = \varnothing$.

(3) 若 x_0 为 E 的边界点, 则 x_0 可能属于 E, 也可能不属于 E.

例 在具有标准度量 d 的 $\mathbb{R}$ 上, 取 $E = [1, 2)$, 则 1.5 是 E 的内点, 因为 $B(1.5, 0.1) \subseteq E$, 3 是 E 的外点, 因为 $B(3, 0.1) \cap E = \varnothing$. 此外, $\mathrm{int}(E) = (1, 2), \mathrm{ext}(E) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty), \partial E = \{1, 2\}$. 注意此时一个边界点属于 E 而另一个不属于 E.

例 设 X 是一个集合, 具有离散度量 d_{disc}, E 为 X 的子集, 则 E 的每个元素都是 E 的内点, 不在 E 中的每个点都是 E 的外点, E 没有边界点. 这是因为设 $x \in X$, 若 $x \in E$, 则 $B(x, 0.5) = \{x\} \subseteq E$; 若 $x \notin E$, 则 $B(x, 0.5) \cap E = \{x\} \cap E = \varnothing$.

定义: 设 (X, d) 是度量空间, E 是 X 的子集, $x_0 \in X$. 若对任意 $r > 0$, $B(x_0, r) \cap E \neq \varnothing$, 则称 x_0 是 E 的**附着点**. E 的全体附着点所成集合称为 E 的**闭包**, 记作 $\overline{E}$.

下面的命题把附着点的概念, 内点, 边界点与收敛的概念联系了起来.

命题: 设 (X, d) 是度量空间, E 是 X 的子集, $x_0 \in X$, 则下列各条等价:

(1) x_0 是 E 的附着点.

(2) x_0 或是 E 的内点, 或是 E 的边界点.

(3) 存在 E 中的序列 $\{x_n\}$ 依度量 d 收敛到 x_0.

推论: 设 (X, d) 是度量空间, E 是 X 的子集, 则

$$\overline{E} = \mathrm{int}(E) \cup \partial E = X \setminus \mathrm{ext}(E).$$

定义: 设 (X, d) 为度量空间, E 是 X 的子集, $x_0 \in X$. 若 x_0 的任一邻域内都含有 E 中无穷多个点, 则称 x_0 为 E 的**聚点**. E 的全体聚点所成集合称为 E 的**导集**, 记作 E'.

命题: 设 (X, d) 为度量空间, E 为 X 的子集, $x_0 \in X$, 则下列各条等价:

(1) x_0 为 E 的聚点.

(2) 存在 E 中各项互异的点列 $\{x_n\}$ 依度量 d 收敛到 x_0.

正如前面所说, E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E. 视边界的情形, 我们可以把一个集合叫做开的、闭的或者既不是开的也不是闭的.

定义: 设 (X, d) 是度量空间, E 是 X 的子集. 若 E 含有它的一切边界点, 即 $\partial E \subseteq E$, 则称 E 是闭的. 若 E 不含边界点, 即 $\partial E \cap E = \varnothing$, 则称 E 是开的. 若 E 含有一些边界点而不含另一些边界点, 则 E 既不是开的也不是闭的.

例 在具有标准度量 d 的实直线 $\mathbb{R}$ 中, 集合 $(1, 2)$ 不含边界点 1 与边界点 2, 故 $(1, 2)$ 是开的. 集合 $[1, 2]$ 含边界点 1 与边界点 2, 故 $[1, 2]$ 是闭的. 集合 $[1, 2)$ 含边界点 1, 不含边界点 2, 故 $[1, 2)$ 既不是开的, 也不是闭的.

注: 如果一个集合没有边界点, 那么它就既是开的, 也是闭的, 这是可能的. 例如, 在度量空间 (X,d) 中, 全空间 X 没有边界 (每个点都是内点), 所以 X 既开又闭. 空集 $\varnothing$ 也没有边界, 从而也是既开又闭的. 在很多情况下, 这是仅有的既开又闭的集合, 但也有例外. 例如, 使用离散度量 d_{disc}, 那么每个集合都是既开又闭的 (因为没有边界点) .

容易看出, 开集和闭集这两个概念并不是互相否定的, 下面给出开集和闭集的进一步性质:

性质: 设 (X,d) 为度量空间, E 是 X 的子集, 则

(1) E 是开的当且仅当 $E=\mathrm{int}(E)$.

(2) E 是闭的当且仅当 E 含有它的一切附着点, 即 $\overline{E}\subseteq E$. 换言之, E 是闭的当且仅当对 E 中的每个收敛序列 $\{x_n\}$, 此序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 也属于 E.

(3) $\mathrm{int}(E)$ 是含在 E 中的最大开集. 换言之, $\mathrm{int}(E)$ 是开的, 并且若开集 $V\subseteq E$, 则 $V\subseteq\mathrm{int}(E)$.

(4) $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集. 换言之, $\overline{E}$ 是闭的, 并且若闭集 $K\supseteq E$, 则 $K\supseteq\overline{E}$.

(5) 任何球 $B(x_0,r)$ 都是开集, 集合 $\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant r\}$ 都是闭集 (有时称为闭球) .

(6) 有限个开集的交仍是开集, 有限个闭集的并仍是闭集.

(7) 一族开集的并仍是开集, 一族闭集的交仍是闭集.

(8) 任何单点集 $\{x_0\}$ 都自动是闭的.

(9) E 是开的当且仅当补集 $X\setminus E$ 是闭的.

注: 设 (X,d) 为度量空间, $x_0\in X$, $r>0$, 开球 $B=B(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$, 闭球 $C=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant r\}$, 则 $\overline{B}\subseteq C$. 但需要注意的是, 存在度量空间 (X,d) 与点 $x_0\in X$, $r>0$, 使得 $\overline{B}\neq C$. 对此你可以考察一下下面的例子.

例 设 X 为任意一个元素个数多于 2 的集合, 考察离散度量空间 (X,d_{disc}), 任取 $x_0\in X$, 则

$$\text{开球}\,B=\{x\in X:d(x,x_0)<1\}=\{x_0\},$$
$$\text{闭球}\,C=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant 1\}=X.$$

从而 $\overline{B}\neq C$.

1.3 相对拓扑

除了度量 d 之外, 环境空间 X 也对何为开集, 何为闭集起着作用.

例 考虑实直线 $\mathbb{R}$ 与标准度量 d, $X=(-1,1)$. 我们可以把度量 d 限制到 $X\times X$ 上产生 $(\mathbb{R},d)$ 的子空间 $(X,d|_{X\times X})$. 现在考虑集合 $[0,1)$, 它在 $\mathbb{R}$ 中不是闭的, 因为它的附着点 1 不属于它. 但是, 把 $[0,1)$ 看作 X 的子集时, 集合 $[0,1)$ 成为闭集. 这是因为 1 不是 X 的元素, 于是不再是 $[0,1)$ 的附着点, 故 $[0,1)$ 含有它的一切附着点, 成为闭集.

1.4 柯西列与完备度量空间

定义: 设 $\{x_n\}$ 为度量空间 (X,d) 中的点列, 又设

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

则称序列 $\{x_{n_j}\}$ 为原序列 $\{x_n\}$ 的**子列**.

若一个序列收敛, 则它的一切子列都收敛.

引理: 设 $\{x_n\}$ 为度量空间 (X,d) 中收敛到 x_0 的序列, 那么 $\{x_n\}$ 的每个子列 $\{x_{n_j}\}$ 也收敛到 x_0.

另一方面, 即使一个序列不收敛, 它仍可能有子列收敛. 例如序列 $1,0,1,0,1,\cdots$ 不收敛, 但它的子列 $1,1,1,\cdots$ 收敛. 为了定量描述此事, 我们给出如下定义.

定义: 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的点列, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, 有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为 (X,d) 中的**柯西列**.

下面的引理告诉我们, 收敛序列一定是柯西列.

引理: 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的收敛到 $x_0 \in X$ 的序列, 则 $\{x_n\}$ 是柯西列.

容易验证柯西列的子列也是柯西列. 需要注意的是, 并不是每个柯西列都收敛.

例 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数集, d 为标准度量 $d(x,y) = |x-y|$. 考虑 $(\mathbb{Q},d)$ 中的序列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415, \cdots$$

这个序列在 $\mathbb{R}$ 中是收敛的 (收敛到 π) , 但它在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛 (因为 $\pi \notin \mathbb{Q}$, 且极限具有唯一性).

由此可见, 在某些度量空间中, 柯西列不一定收敛.

定义: 设 (X,d) 为度量空间, 若 (X,d) 中每个柯西列都收敛, 则称 (X,d) 是**完备度量空间**.

例 设 d 为标准度量, 则 $(\mathbb{R},d)$ 是完备度量空间, $(\mathbb{Q},d)$ 不是完备度量空间.

例 设 l^∞ 为有界数列全体, 对 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^\infty$, 定义

$$d(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|,$$

则 (l^∞, d) 构成完备度量空间.

完备度量空间有一些好的性质. 例如, 不管把完备度量空间放到什么空间中, 它总是闭的.

命题: (1) 设 (X,d) 为度量空间, $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是 (X,d) 的子空间. 若 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是完备的, 则 Y 是 X 中的闭集.

(2) 反过来, 设 (X,d) 是完备的度量空间, Y 是 X 的闭子集, 那么子空间 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是完备的.

与此对照, 一个不完备的度量空间, 例如 $(\mathbb{Q},d)$, 在某些空间中可以是闭的 (例如 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是闭的), 但在另一些空间中就不是闭的 (例如 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中不是闭的). 实际上, 给定任何不完备的度量空间, 都存在一个完备的度量空间 $(\overline{X}, \overline{d})$, 它是包含 (X,d) 的更大的度量空间, 并且 X 在 $\overline{X}$ 中不是闭的 (实际上 X 在 $\overline{X}$ 中的闭包就是 $\overline{X}$). 例如, $\mathbb{Q}$ 的一个可能的完备化就是 $\mathbb{R}$.

注: 对于同一个集合 X, 在其上定义不同的度量, 所形成的度量空间的完备性可能是不同的.

例 (1) 对任意的 $x, y \in C[a,b]$, 定义

$$d_1(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|,$$

则 $(C[a,b], d_1)$ 是完备度量空间. (实际上, 该度量对应的是函数列的一致收敛, 而一致收敛的连续函数列的极限仍是连续函数, 故 $C[a,b]$ 按该度量完备.)

(2) 对任意的 $x, y \in C[a,b]$, 定义

$$d_2(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, \mathrm{d}t,$$

则 $(C[a,b], d_2)$ 是不完备度量空间.

证明 不妨设 $[a,b] = [0,1]$. 令

$$x_m(t) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m} \leqslant t \leqslant 1, \\ m\left(t - \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m} \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

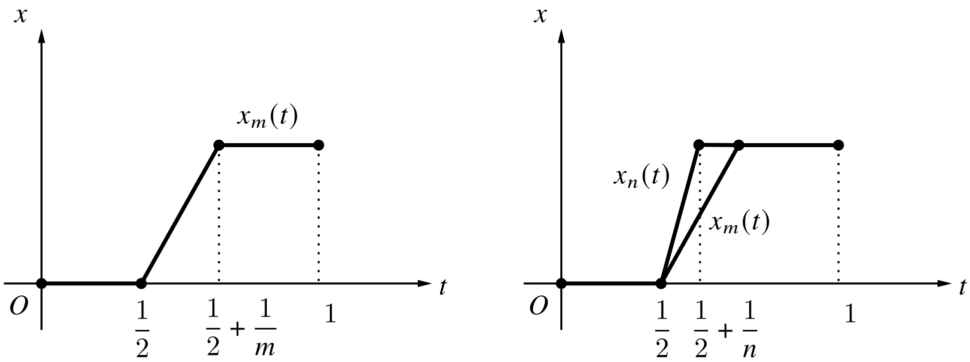
对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$d_2(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |x_n(t) - x_m(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

故 $\{x_m\}$ 为 $(C[0,1], d_2)$ 中的柯西列. 易知 $\{x_m\}$ 的极限函数为

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

由于 $x \notin C[0,1]$, 故 $(C[0,1], d_2)$ 不完备. □



作为对比, 现在我们在 $(C[0,1], d_1)$ 中考察 $\{x_m\}$. 设 $n > m$, 则

$$d_1(x_n, x_m) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n(t) - x_m(t)| = 1 - x_m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{m}{n}.$$

对任意的 m, 取 $n = 2m$, 则

$$d_1(x_{2m}, x_m) = 1 - \frac{m}{2m} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

故 $\{x_m\}$ 不是 $(C[0,1], d_1)$ 中的柯西列.

1.5 度量空间的完备化

定义: 设 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 是两个度量空间, 若映射 $T : X \longrightarrow Y$ 是满射, 且对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 有

$$d_Y(Tx_1, Tx_2) = d_X(x_1, x_2),$$

则称 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ **等距同构**, 并称 T 是从 (X, d_X) 到 (Y, d_Y) 的**等距同构映射**.

我们知道 $(\mathbb{Q}, d|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}})$ 作为 $(\mathbb{R}, d)$ 的子空间不是完备的, 但我们可以向 $\mathbb{Q}$ 中加入无理数, 使之成为新的度量空间 $\mathbb{R}$, 并且 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

定理 (度量空间的完备化定理) : 设 (X, d) 为度量空间, 则一定存在完备的度量空间 $(\tilde{X}, \tilde{d})$, 使得 X 与 $\tilde{X}$ 的某个稠密子空间等距同构. 在等距同构的意义下, 这样的 $\tilde{X}$ 是唯一的.

1.6 有限覆盖定理与紧集

定理 (海涅-博雷尔有限覆盖定理) : 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $\mathscr{M} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ 为一族开集, 它覆盖了 F(即 $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in\Lambda} U_i$), 则 M 中一定存在有限多个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_m$, 它们同样覆盖了 F.

定义: 设 (X, d) 为度量空间, M 为 X 的子集, 若对任一覆盖了 M 的开集族 $\mathscr{M}$, 都能从 $\mathscr{M}$ 中选出有限个开集仍然覆盖 M, 则称 M 为 X 中的**紧集**.

由海涅-博雷尔有限覆盖定理知 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集一定是紧集. 反之, 我们有如下定理:

定理: 设 M 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集.

由此可知, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, M 是紧集等价于 M 是有界闭集 (实际上, 后面我们会看到, 不仅仅是 $\mathbb{R}^n$, 在任何有限维赋范线性空间中, 都有紧集等价于有界闭集这一结论) .

需要注意的是, 在一般度量空间中, 紧集一定是有界闭集, 但有界闭集不一定是紧集.

定理 (紧集的充要条件) : 设 (X, d) 为度量空间, M 为 X 的子集, 则 M 为紧集的充要条件为对 M 中任何点列 $\{x_n\}$, 都存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 M 中一元素 x_0.

定义: 设 (X, d) 为度量空间, M 为 X 的子集, 若对 M 中任何点列 $\{x_n\}$, 都存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 M 中一元素, 则称 M 为 (X, d) 中的**列紧集**.

有了上述定义, 前一定理可以如下叙述:

定理: 度量空间中紧集等价于列紧集.

注: 集合 M 的紧性是一条内在的属性, 它只取决于限制到 M 上的度量 d, 而与环境空间 X 的选择无关.

定义: 设 (X,d) 为度量空间, M 为 X 的子集. 若 $\overline{M}$ 是 X 中的紧集, 则称 M 为 X 中的**相对紧集**.

注: 相对紧集与环境空间 X 有关 (所以名字里面有"相对"二字), 因为涉及到了闭包的概念.

例 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集是相对紧集.

实际上, 有界闭集不是紧集的这种情况只可能发生在"无穷维空间"中, 这一点我们后面会进行说明.

注: 总结一下:

(1) 有限维赋范线性空间中, 有界闭集 $\Longleftrightarrow$ 紧集 $\Longleftrightarrow$ 列紧集.

(2) 度量空间中, 紧集 $\Longleftrightarrow$ 列紧集.

(3) 拓扑空间中, 紧集与列紧集稍有区别.

例 设 X 为一无限集合, 取离散度量空间 (X,d_{disc}), 则 X 的任一子集 E 都是有界闭集, 但只有有限集才是紧集.

1.7 可分空间

定义: 设 (X,d) 为度量空间, M 为 X 的子集. 若 $\overline{M}=X$, 则称 M 是 X 的**稠密子集**. 若 M 还是可数的, 则称 X 是一个可分度量空间, 简称**可分空间**.

例 取通常度量 d, 则 $(\mathbb{R},d)$ 是一个可分空间, $\mathbb{Q}$ 是它的一个可数稠密子集.

例 设 l^∞ 为有界实数列全体所成集合, 对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^\infty$, 定义 $d(x,y)=\sup\limits_i |x_i-y_i|$, 则 (l^∞,d) 构成一个度量空间, 它是一个不可分空间.

证明 令 M 为 l^∞ 中各项为 0 或 1 的数列全体所成集合, 则 M 中的元素与二进制小数一一对应, 故 M 的基数为 c. 易知 M 中任意不同元素之间的距离为 1. 令

$$\mathscr{A}=\left\{U\left(x,\frac{1}{3}\right):x\in M\right\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是 l^∞ 中一族互不相交的球. 若 l^∞ 可分, 设它的可数稠密子集为 $\{y_k\}$, 则 $\mathcal{A}$ 中的每个开球都至少含有 $\{y_k\}$ 中的一项, 但 $\mathscr{A}$ 不可数, 矛盾, 故 l^∞ 不可分.

1.8 连续映射

前面我们考虑的都是一个度量空间 (X,d), 下面我们考虑一对度量空间 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ 以及映射 $f:X\longrightarrow Y$, 它们将使度量空间的理论更为丰富.

定义: 设 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 是两个度量空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y$, $x_0\in X$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $d_X(x,x_0)<\delta$ 时, $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$, 则称 f 在 x_0 处是连续的. 若 f 在 X 的每一点处均连续, 则称 f 是 X 上的**连续映射**.

定理: 设 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 是两个度量空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y$, $x_0\in X$, 则下列各条等价:

(1) f 在 x_0 处连续.

(2) 对任意依度量 d_X 收敛到 x_0 的序列 $\{x_n\}$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 依度量 d_Y 收敛到 $f(x_0)$.

(3) 对任意含有 $f(x_0)$ 的开集 $V\subseteq Y$, 存在含有 x_0 的开集 $U\subseteq X$, 使得 $f(U)\subseteq V$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 任取 X 中依度量 d_X 收敛到 x_0 的序列 $\{x_n\}$. 因为 f 在 x_0 处连续, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $d_X(x,x_0)<\delta$ 时, 有 $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. 因为 $\{x_n\}$ 依度量 d_X 收敛到 x_0, 故存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $d_X(x_n,x_0)<\delta$, 从而 $d_Y(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$, 故 $\{f(x_n)\}$ 依度量 d_Y 收敛到 $f(x_0)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 假设 f 在 x_0 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意的 $\delta>0$, 存在 x' 满足 $d_X(x',x_0)<\delta$ 使得 $d_Y(f(x'),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$.

取 $\delta_1=1$, 则存在 x_1 满足 $d_X(x_1,x_0)<1$, 使得 $d_Y(f(x_1),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$. 取 $\delta_2=\dfrac{1}{2}$, 则存在 x_2 满足 $d_X(x_2,x_0)<\dfrac{1}{2}$, 使得 $d_Y(f(x_2),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$. $\cdots$. 取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, 则存在 x_n 满足 $d_X(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$, 使得 $d_Y(f(x_n),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$. 如此重复下去, 得到序列 $\{x_n\}$ 依度量 d_X 收敛到 x_0, 但由于 $d_Y(f(x_n),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$, 故 $\{f(x_n)\}$ 不依度量 d_Y 收敛到 $f(x_0)$, 与条件矛盾, 从而假设错误, f 在 x_0 处连续.

定理: 设 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 是两个度量空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y$, 则下列各条等价:

(1) f 是连续映射.

(2) 对任意依度量 d_X 收敛到 X 中某点 x_0 的序列 $\{x_n\}$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 依度量 d_Y 收敛到 $f(x_0)$.

(3) 对任意 Y 中的开集 V, 它的原像 $f^{-1}(V)=\{x\in X:f(x)\in V\}$ 是 X 中的开集.

(4) 对任意 Y 中的闭集 F, 它的原像 $f^{-1}(F)=\{x\in X:f(x)\in F\}$ 是 X 中的闭集.

证明 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 由前一定理即得.

(1) $\Longrightarrow$ (3) 任取 Y 中的开集 V,

(i) 若 $f^{-1}(V)=\varnothing$, 则 $f^{-1}(V)$ 是开集, 结论成立.

(ii) 若 $f^{-1}(V)\neq\varnothing$, 任取 $x_0\in f^{-1}(V)$, 从而 $f(x_0)\in V$, 因 V 是开集, 由前一定理知存在含有 x_0 的开集 $U\subseteq X$, 使得 $f(U)\subseteq V$, 从而 $U\subseteq f^{-1}(V)$. 即是说, 对任意的 $x_0\in f^{-1}(V)$, 存在包含 x_0 的开集 U, 使得 $U\subseteq f^{-1}(V)$, 因此 $f^{-1}(V)$ 是 Y 中的开集.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任取 $x_0\in X$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, $B(f(x_0),\varepsilon)$ 是 Y 中的开集, 由条件知 $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ 是 X 中的开集. 因为 $x_0\in f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$, 故存在 $\delta>0$, 使得 $B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$. 即是说对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $d_X(x,x_0)<\delta$ 时, 有 $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$, 也即 f 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 f 是连续映射.

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) 注意到 $f^{-1}(M^c)=\left(f^{-1}(M)\right)^c$. 设 M 为 Y 中任一闭集, 则 M^c 为 Y 中的开集, 则任意开集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 是开集 $\Longleftrightarrow$ 任意开集 M^c 的原像 $f^{-1}(M^c)=\left(f^{-1}(M)\right)^c$ 是开集 $\Longleftrightarrow$ 任意闭集 M 的原像 $f^{-1}(M)$ 是闭集. $\square$

注: 连续映射保证开集的原像是开集, 但不能保证开集的像仍是开集. 对此很容易举出例子: 设 f 是将 X 中的任意元素都映为 Y 中同一个点 y_0 的映射, 则开集 X 的像 $f(X)=\{y_0\}$ 在一般情况下

不是开集.

推论: 设 $(X,d_X),(Y,d_Y),(Z,d_Z)$ 是三个度量空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y, g:Y\longrightarrow Z$, 则

(1) 若 f 在 x_0 处连续, g 在 $f(x_0)$ 处连续, 则 $g\circ f:X\longrightarrow Z$ 在 x_0 处连续.

(2) 若 f 连续, g 连续, 则 $g\circ f:X\longrightarrow Z$ 连续.

最后, 我们指出度量空间 (X,d) 的度量函数是 $X\times X$ 上的连续函数.

命题: 设 (X,d) 为度量空间, 则度量函数 $d(x,y)$ 是关于 x,y 连续的.

证明 任取收敛点列 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq X$ 且 $x_n\longrightarrow x, y_n\longrightarrow y(n\longrightarrow\infty)$, 则

$$\begin{aligned}
|d(x_n,y_n)-d(x,y)| &= |d(x_n,y_n)-d(x_n,y)+d(x_n,y)-d(x,y)| \\
&\leqslant |d(x_n,y_n)-d(x_n,y)|+|d(x_n,y)-d(x,y)| \\
&\leqslant d(y_n,y)+d(x_n,x)\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)
\end{aligned}$$

从而

$$d(x_n,y_n)\longrightarrow d(x,y)\,.$$

1.9 压缩映射原理

定义: 设 (X,d) 为度量空间, 映射 $T:X\longrightarrow X$, 若存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得对任意的 $x,y\in X$, 都有

$$d(Tx,Ty)\leqslant \alpha d(x,y),$$

则称 T 为 X 上的**压缩映射**.

定理: 设 (X,d) 为完备度量空间, $T:X\longrightarrow X$ 为压缩映射, 则 T 有且仅有一个不动点 (即 $Tx=x$ 有且仅有一个解).

证明 任取 $x_0\in X$, 令 $x_{n+1}=Tx_n$, $n=0,1,2,\cdots$. 由于

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_{m+1}) &= d(Tx_{m-1},Tx_m) \\
&\leqslant \alpha d(x_{m-1},x_m) \\
&\cdots \\
&\leqslant \alpha^m d(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

设 $m < n$, 则

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leqslant \alpha^m d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1) \\
&= \alpha^m (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\
&= \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \\
&\leqslant \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

令 $m \longrightarrow \infty, n \longrightarrow \infty$, 则 $d(x_m, x_n) \longrightarrow 0$, 故 $\{x_n\}$ 为柯西列. 由 X 完备可知存在 $x^* \in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. 下证 $x^* = Tx^*$. 由于

$$\begin{aligned}
d(x^*, Tx^*) &\leqslant d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx^*) \\
&= d(x^*, x_n) + d(Tx_{n-1}, Tx^*) \\
&\leqslant d(x^*, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x^*),
\end{aligned}$$

令 $n \longrightarrow \infty$, 则 $d(x^*, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x^*) \longrightarrow 0$, 从而 $d(x^*, Tx^*) = 0$, 即 $Tx^* = x^*$. 下证唯一性. 若另有 $\overline{x} \in X$ 满足 $T\overline{x} = \overline{x}$, 则

$$d(\overline{x}, x^*) = d(T\overline{x}, Tx^*) \leqslant \alpha d(\overline{x}, x^*),$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 故 $d(\overline{x}, x^*) = 0, \overline{x} = x^*$.

1.10 拓扑空间简介

定义: 集合 X 的全体子集所成集合称为 X 的**幂集**, 记作 2^X.

例如, 设有集合 $\{a, b\}$, 则它的幂集为 $2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

定义: 设 X 是一个集合, 集族 $\mathcal{T} \subseteq 2^X$, 若 $\mathcal{T}$ 满足

(1) $\varnothing \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$. (即空集 $\varnothing$ 与全集 X 属于 $\mathcal{T}$)

(2) 对任意有限个集合 $V_1, \cdots, V_n \in \mathcal{T}$, 有 $V_1 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{T}$. (即任意有限个集合的交仍属于 $\mathcal{T}$)

(3) 对任意一族集合 $V_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in I$, 都有 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{T}$. (即任意多个集合的并仍属于 $\mathcal{T}$)

则称 $(X, \mathcal{T})$ 是一个**拓扑空间**, 集族 $\mathcal{T}$ 称为 X 的一个**拓扑**, $\mathcal{T}$ 中的元素称为 $(X, \mathcal{T})$ 中的**开集**.

例 设 X 是一个非空集合, 令 $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$, 则 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, 称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的**平凡拓扑**.

例 设 (X, d) 为度量空间, 取 $\mathcal{T}_d$ 为 (X, d) 中全体开集构成的族, 则 $(X, \mathcal{T}_d)$ 作成一个拓扑空间, 称 $\mathcal{T}_d$ 为**由度量 d 诱导的拓扑**, 称 $(X, \mathcal{T}_d)$ 为由度量 d 诱导的拓扑空间.

由上可知, 度量空间实际上是一种特殊的拓扑空间. 以后若无特殊说明, 以后提到度量空间的拓扑总是指这样的拓扑. 需要注意的是, 存在拓扑空间不由度量空间产生.

例 若 X 含有多于一个的元素, 则平凡拓扑 $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ 不能由在 X 上定义一个度量来得到.

在拓扑空间中没有度量, 因此球的概念必须用邻域的概念代替.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, $x\in X, U\in\mathcal{T}$, 若 $x\in U$, 则称 U 是 x 的一个**邻域**. 换言之, x 的邻域就是含有 x 的开集.

例 设 (X,d) 为度量空间, $x\in X$, $r>0$, 则球 $B(x,r)$ 是 x 的一个邻域.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的点列, $x\in X$. 若对 x 的任意邻域 V, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $x_n\in V$, 则称 $\{x_n\}$ **收敛到** x.

读者可能会问, 若 $\{x_n\}$ 在 $(X,\mathcal{T})$ 中收敛, 它的极限是否具有唯一性. 在通常的情况下, 回答是肯定的 (只要该拓扑空间具有所谓的 Hausdorff 性质). 需要注意的是, 在某些拓扑空间中, 这一问题的回答也可能是否定的.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, 若对任意不同的两点 $x,y\in X$, 总存在 X 的邻域 V 与 y 的邻域 W, 使得 $V\cap W=\varnothing$, 则称 $(X,\mathcal{T})$ 是一个 **Hausdorff 空间**.

例 平凡拓扑不是 Hausdorff 拓扑.

例 由度量空间生成的拓扑空间一定是 Hausdorff 空间.

实际上, 我们遇到的绝大部分拓扑空间都是 Hausdorff 空间. 非 Hausdorff 空间具有病态的性质, 以至于研究它们没有太大的用处.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, E 为 X 的子集, $x_0\in X$. 若存在 x_0 的邻域 V, 使得 $V\subseteq E$, 则称 x_0 是 E 的**内点**; 若存在 x_0 的邻域 V, 使得 $V\cap E=\varnothing$, 则称 x_0 是 E 的**外点**; 若 x_0 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点, 则称 x_0 是 E 的**边界点**.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, E 为 X 的子集, $x_0\in X$. 若 x_0 的任意邻域 V 内都含有 E 中的点, 则称 x_0 为 E 的**附着点**. E 的全体附着点所成集合称为 E 的闭包, 记作 $\overline{E}$.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, 若子集 E 的补集 $X\setminus E$ 是开集, 则称 E 为 X 中的**闭集**.

定义: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, Y 为 X 的子集, 令

$$\mathcal{T}_Y=\{V\cap Y: V\in\mathcal{T}\},$$

则 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 作成拓扑空间, 称为 $(X,\mathcal{T})$ 的**拓扑子空间**, $\mathcal{T}_Y$ 称为由子集 Y 导出的拓扑.

定义: 设 $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ 为两个拓扑空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y$, $x_0\in X$. 若对 $f(x_0)$ 的任意邻域 V, 存在 x_0 的邻域 U, 使得 $f(U)\subseteq V$, 则称 f **在** x_0 **处连续**. 若 f 在 X 的每一点处都连续, 则称 f 是连续的.

定理: 设 $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ 为两个拓扑空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y$, 则 f 是连续的当且仅当 Y 中任意开集的原像是 X 中的开集.

定义: 设 $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ 为两个拓扑空间, 映射 $f:X\longrightarrow Y$ 为双射. 若 f 与 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 是一个**同胚映射**或**同胚**, 并称拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_X)$ 与 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ **同胚**.

性质:

(1) 恒等映射 $i_X:X\longrightarrow X$ 是同胚.

(2) 若 $f: X \longrightarrow Y$ 是同胚, 则 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ 是同胚.

(3) 若 $f: X \longrightarrow Y$ 与 $g: Y \longrightarrow Z$ 均为同胚, 则 $g \circ f: X \longrightarrow Z$ 是同胚.

性质:

(1) 自反性: X 与 X 同胚.

(2) 对称性: 若 X 与 Y 同胚, 则 Y 与 X 同胚.

(3) 传递性: 若 X 与 Y 同胚, Y 与 Z 同胚, 则 X 与 Z 同胚.

由上可知在一个给定的由拓扑空间族中, 两个拓扑空间是否同胚是一种等价关系. 因此, 同胚关系将这个拓扑空间族分为互不相交的等价类, 属于同一类的拓扑空间彼此同胚, 属于不同类的拓扑空间彼此不同胚.

定义: 记拓扑空间的某个性质为 P. 若从某个拓扑空间具有性质 P 可以得到所有与其同胚的拓扑空间均具有性质 P, 则称 P 是一个**拓扑不变性质**. 换言之, 拓扑不变性质即为同胚的拓扑空间所共有的性质.

拓扑学的中心任务就是研究拓扑不变性质.

2 赋范线性空间, 巴拿赫空间与有界线性算子

2.1 线性空间

定义: 设 P 是一个数域, 非空集合 V 上有一个代数运算 "+" 叫做加法, P 与 V 之间有一个代数运算 "·" 叫做数量乘法 ("·" 往往省略不写), 且满足

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) 对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) 存在 $\theta \in V$, 对任意的 $\alpha \in V$, $\theta + \alpha = \alpha$;

(4) 对任意的 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$, $\alpha + \beta = \theta$;

(5) 对任意的 $k \in P, \alpha, \beta \in V$, $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(6) 对任意的 $k, l \in P, \alpha \in V$, $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(7) 对任意的 $k, l \in P, \alpha \in V$, $(kl)\alpha = k(l\alpha)$;

(8) $1\alpha = \alpha$,

则称 $(V, P, +, \cdot)$ 为数域 P 上的**线性空间**或**向量空间**.

当加法与数乘是明确的时, 我们可以把线性空间 $(V, P, +, \cdot)$ 简记为 V. 以后仍把零元 θ 记为 0.

例 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 对 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$, 定义

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$
$$ax = (ax_1, \cdots, ax_n),$$

则 $\mathbb{R}^n$ 按上述运算成为一个线性空间.

例 记区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数所成集合为 $C[a,b]$. 对 $x,y\in C[a,b]$ 以及数 α, 定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)\,,\ a\leqslant t\leqslant b.$$
$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)\,,\ a\leqslant t\leqslant b.$$

则 $C[a,b]$ 按上述运算成为一个线性空间.

例 记 p 次收敛数列全体所成集合为 $l^p(p>0)$, 即

$$l^p=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<+\infty\right\}.$$

对 $x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^p$, 定义

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots)\,,$$
$$ax=(ax_1,ax_2,\cdots)\,,$$

则 l^p 按上述运算成为一个线性空间.

易证对于数 a, 有 $ax\in l^p$. 下面证明 $x+y\in l^p$. 因为

$$|x_i+y_i|^p\leqslant(|x_i|+|y_i|)^p\leqslant(2\max\{|x_i|,|y_i|\})^p=2^p(\max\{|x_i|,|y_i|\})^p\leqslant 2^p(|x_i|^p+|y_i|^p)\,,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\leqslant 2^p\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2\right)<+\infty\,,$$

故 $x+y\in l^p$.

定义: 设 V 为数域 P 上的线性空间, W 为 V 的非空子集, 若 W 关于 V 的加法与数量乘法也作成一个线性空间, 则称 W 为 V 的**线性子空间**, 简称子空间.

定理: 非空子集 W 为 V 的子空间当且仅当 W 对于 V 上的两种运算封闭, 即

(1) 对任意的 $\alpha,\beta\in W$, 有 $\alpha+\beta\in W$;

(2) 对任意的 $k\in P,\alpha\in W$, 有 $k\alpha\in W$.

定义: 设 M 为数域 P 上线性空间 V 的非空子集, 记 M 中任意有限个元素的线性组合全体所成集合为 $\operatorname{span}M$, 称为**由 M 张成的线性包**.

易知 $\operatorname{span}M$ 是 V 的子空间, 并且是包含 M 的最小子空间.

定义: 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是数域 P 上的线性空间 V 中的向量. 若存在 n 个不全为 0 的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in P$, 使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0,$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 **P-线性相关**的, 简称线性相关的. 否则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 **P-线性无关**的, 简称线性无关的.

易知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关的充要条件为

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

定义: 设 V 为线性空间, M 为 V 的子集. 若 M 中任意有限个互不相同的向量都是线性无关的, 则称 M 为 V 的**线性无关子集**.

定义: 设 V 为线性空间, M 为 V 的线性无关子集. 若 $\operatorname{span} M = V$, 则称 M 是 V 的一个**基**, 且称 M 的基数为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$. 当 $\dim V$ 有限时, 称 V 是有限维线性空间; 当 $\dim V$ 无限时, 称 V 是无限维线性空间. 当 $V = \{0\}$ 时, 称 V 是 0 维线性空间.

在线性代数中已经证明, 有限维线性空间的维数不随基的改变而改变.

例 $\mathbb{R}^n$ 是有限维线性空间.

例 $C[a, b]$ 是无限维线性空间.

2.2 赋范线性空间与巴拿赫空间

若无特别说明, 以后我们所涉及的数域均为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, 所提到的线性空间均为实线性空间或复线性空间.

定义: 设 X 为实 (复) 线性空间, 若对任意的 $x \in X$, 存在实数 $\|x\|$ 与之对应, 并且满足

(1) $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, 其中 α 为任意实 (复) 数.

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**范数**, 称 $\|x\|$ 为 x 的**范数**, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为**赋范线性空间**.

定义: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列. 若存在 $x \in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 为 $(X, \|\cdot\|)$ 中的**收敛点列**, 且称 $\{x_n\}$ **依范数** $\|\cdot\|$ **收敛**到 x, 记作 $\|\cdot\|\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 当范数明确时, 简记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n \longrightarrow x \ (n \longrightarrow \infty)$.

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 对任意的 $x, y \in X$, 定义

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

则易知 (X, d) 是一个度量空间, 即是说, 赋范线性空间实际上是一种特殊的度量空间. 因此, 赋范线性空间中的柯西列, 完备性等概念均可由度量空间中的相应概念给出.

定义: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, 有

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 为 $(X, \|\cdot\|)$ 中的**柯西列**.

定义: 若赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中的柯西列均收敛, 即柯西列的极限仍在 X 中, 则称 $(X,\|\cdot\|)$ 是完备的. 完备的赋范线性空间称为**巴拿赫空间**.

命题: 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 若 M 是 X 的子空间, 则 $\overline{M}$ 也是 X 的子空间.

证明 任取 $x,y\in\overline{M}$ 与数 α,β, 则存在序列 $\{x_n\},\{y_n\}\subseteq M$, 使得 $x_n\longrightarrow x, y_n\longrightarrow y(n\longrightarrow\infty)$. 因为 M 为子空间, 故 $\alpha x_n+\beta y_n\in M$, $n=1,2,\cdots$. 又因为 $\alpha x_n+\beta y_n\longrightarrow\alpha x+\beta y(n\longrightarrow\infty)$, 故由闭包的定义知 $\alpha x+\beta y\in\overline{M}$, 从而 $\overline{M}$ 为子空间.

例 对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义范数

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},$$

则 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间. (因为 $\mathbb{R}^n$ 按欧几里得度量 $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是完备度量空间.)

例 对任意的 $x\in C[a,b]$, 定义

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

则 $(C[a,b],\|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间. (因为 $C[a,b]$ 按度量 $d(x,y)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|x(t)-y(t)|$ 是完备度量空间.)

例 对任意的 $x\in l^\infty$(有界数列全体), 定义

$$\|x\|=\sup_i|x_i|,$$

则 $(l^\infty,\|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间. (因为 l^∞ 按度量 $d(x,y)=\sup\limits_i|x_i-y_i|$ 是完备度量空间.)

命题: 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 则范数 $\|x\|$ 是 x 的连续函数, 也即当 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛时, $\left\|\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

证明 对赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中任意元素 x,y, 有

$$\|x\|=\|(x-y)+y\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|,$$
$$\|y\|=\|(y-x)+x\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|,$$

从而由 $\|x-y\|=\|y-x\|$ 知

$$|\,\|x\|-\|y\|\,|\leqslant\|x-y\|.$$

因此, 当 $\|x_n-x\|\longrightarrow 0$, 即 $x_n\longrightarrow x$ 时, 有 $\|x_n\|\longrightarrow\|x\|$, 即 $\|x\|$ 是 x 的连续函数.

2.3 两个重要的巴拿赫空间

例 1 p 方可积函数空间 $L^p[a,b]$.

设 f 是区间 $[a,b]$ 上的实值可测函数, 若 $|f(t)|^p$ 是 $[a,b]$ 上的 L 可积函数, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的 p 方可积函数. $[a,b]$ 上的全体 p 方可积函数所成集合记为 $L^p[a,b]$. 当 $p=1$ 时, $L^1[a,b]$ 即为 $[a,b]$ 上的 L 可积函数全体. 在 $L^p[a,b]$ 中, 我们把几乎处处相等的函数视为同一元素.

设 $f, g \in L^p[a,b]$, 下证 $f+g \in L^p[a,b]$. 事实上, 对任意的 $t \in [a,b]$, 有

$$|f(t)+g(t)|^p \leqslant (|f(t)|+|g(t)|)^p \leqslant (2\max\{|f(t)|,|g(t)|\})^p \leqslant 2^p(|f(t)|^p+|g(t)|^p),$$

故 $|f+g|^p$ 是 $[a,b]$ 上的 p 方可积函数, $f+g \in L^p[a,b]$. 又显然对于数 α, 有 $\alpha f \in L^p[a,b]$, 因此 $L^p[a,b]$ 按照函数通常的加法与数乘构成一个线性空间. 对任意的 $f \in L^p[a,b]$, 定义

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

下面我们证明当 $p \geqslant 1$ 时, $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 成为赋范线性空间, 即验证 $\|\cdot\|_p$ 确实是范数, 并进一步证明 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是巴拿赫空间.

引理 (赫德尔不等式): 设 $p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, f \in L^p[a,b], g \in L^q[a,b]$, 则 $f(t)g(t)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积, 且

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

引理 (闵可夫斯基不等式): 设 $p \geqslant 1, f, g \in L^p[a,b]$, 则 $f+g \in L^p[a,b]$, 且

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p .$$

思路 $p=1$ 时由 $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)|$ 即可证得结论. $p>1$ 时利用赫德尔不等式证明.

显然在 $L^p[a,b]$ 中 $\|\cdot\|_p$ 满足范数的性质 (1)(2). 由闵可夫斯基不等式可知当 $p \geqslant 1$ 时, $\|\cdot\|_p$ 也满足范数的性质 (3), 因此我们有如下结论.

定理: 当 $p \geqslant 1$ 时, $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间.

更进一步, 我们可以证明:

定理: 当 $p \geqslant 1$ 时, $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是巴拿赫空间.

注: 对每个 $f \in C[a,b]$, 我们也可定义

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

易知 $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ 成为 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 的赋范线性子空间. 与证明 $(C[a,b], d_2)$ 不完备的方法类似, 我们可以证明 $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是不完备的. 更进一步可以证明 $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ 的完备化空间其实就是 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$. 从这个观点看, L 可积函数类只不过是 R 可积函数类的完备化推广.

例 2 p 次收敛数列空间 l^p, 即

$$l^p = \left\{x=(x_1,x_2,\cdots): \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty\right\}.$$

对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$, 定义

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

和 $L^p[a,b]$ 空间一样, 在 l^p 空间中也有类似的赫德尔不等式与闵可夫斯基不等式.

引理 (赫德尔不等式)：设 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p,y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^q$, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

引理 (闵可夫斯基不等式)：设 $p\geqslant 1,x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^p$, 则 $x+y\in l^p$, 且

$$\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p.$$

由上可知 $(l^p,\|\cdot\|_P)$ 成为赋范线性空间, 并且不难验证 $(l^p,\|\cdot\|_P)$ 完备, 成为巴拿赫空间.

2.4 有界线性算子与连续线性泛函

为方便起见, 以后若无特殊说明, 我们把不同空间中的范数均记为 $\|\cdot\|$, 不再加角标进行区分. 读者可以利用元素所在空间加以区分, 不会引起混淆.

定义: 设 X,Y 同为实 (复) 线性空间, 映射 $T:X\longrightarrow Y$. 若对任意的 $x,y\in X$, 对任意的数 a, 有

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$
$$T(ax)=aTx,$$

则称 T 为 X 到 Y 的**线性算子**. 当 Y 为实 (复) 数域时, 称 T 为实 (复) **线性泛函**.

定义: 设 X,Y 同为实 (复) 线性空间, $T:X\longrightarrow Y$ 为线性算子, 分别称

$$\mathscr{R}(T)=\{Tx\in Y:x\in X\}$$
$$\mathscr{N}(T)=\{x\in X:Tx=0\}$$

为 T 的**值域**与**零空间**.

注: $\mathscr{N}(T)$ 是 X 的子空间, $\mathscr{R}(T)$ 是 Y 的子空间.

线性算子 T 连续性的定义就是通常的映射的连续性的定义. 关于这一点有一个非常美妙的结论: 只要线性算子 T 在某一点连续, 那么它就在整个定义域上连续.

定理: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $T:X\longrightarrow Y$ 为线性算子, 若 T 在某 $x_0\in X$ 处连续, 则 T 在整个 X 上连续.

证明　任取 $x^*\in X$, 下证 T 在 x^* 处连续. 由于 T 在 x_0 处连续, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$,

当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时, 有 $\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$. 因此当 $\|x-x^*\|=\|(x-x^*+x_0)-x_0\|<\delta$ 时, 有

$$\|Tx-Tx^*\|=\|T(x-x^*+x_0)-Tx_0\|<\varepsilon,$$

即 T 在 x^* 处连续. 由 x^* 的任意性知 T 在 X 上是连续的.

例 算子 T 按如下方式定义:

$$\begin{aligned} T: C[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\ x(t) &\longmapsto (Tx)(t)=\int_a^t x(\mu)\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

由积分的线性性质可知 $T: C[a,b]\longrightarrow C[a,b]$ 为线性算子.

例 考虑算子

$$\begin{aligned} f: C[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

则 f 为 $C[a,b]$ 上的线性泛函.

例 记 $P[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的全体多项式, 定义

$$\begin{aligned} T: P[a,b] &\longrightarrow P[a,b] \\ x(t) &\longmapsto (Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \end{aligned}$$

由求导运算的线性性质可知 $T: P[a,b]\longrightarrow P[a,b]$ 为线性算子.

例 记 $P[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的全体多项式, 任取 $t_0\in[a,b]$, 定义泛函

$$\begin{aligned} f: P[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=x'(t_0) \end{aligned}$$

易知 f 为线性泛函.

定义: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $T: X\longrightarrow Y$ 为线性算子. 若存在常数 c, 对任意的 $x\in X$, 有

$$\|Tx\|\leqslant c\,\|x\|,$$

则称 T 为**有界线性算子**, 否则称 T 为**无界线性算子**.

定理: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $T: X\longrightarrow Y$ 为线性算子, 则 T 为有界线性算子当且仅当 T 为连续线性算子.

证明 ($\Longrightarrow$) 由 T 有界知存在 $c>0$, 对任意的 $x\in X$, 有 $\|Tx\|\leqslant c\,\|x\|$. 任取 $x_0\in X$, 下证 T 在

x_0 处连续.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$, 则当 $\|x - x_0\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ 时, 有

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leqslant c\,\|x - x_0\| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

故 T 在 x_0 处连续. 由 T 的任意性知 T 在 X 上连续.

($\Longleftarrow$) 假设 T 无界, 则对任意的 $c > 0$, 存在 $x' \in X$, 有 $\|Tx'\| > c\,\|x'\|$. 特别地, 对任意的正整数 n, 存在 $x_n \in X$, 使得 $\|Tx_n\| > n\,\|x_n\|$.

令 $y_n = \dfrac{x_n}{n\,\|x_n\|}$, 则 $\|y_n\| = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty)$, 从而 $y_n \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty)$. 由 T 的连续性知 $Ty_n \longrightarrow T0 = 0\,(n \longrightarrow \infty)$. 但是

$$\|Ty_n\| = \left\|T\left(\frac{x_n}{n\,\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\,\|x_n\|} \geqslant 1,$$

矛盾, 故假设错误, T 有界.

定理: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, f 为 X 上的线性泛函, 则 f 为连续线性泛函当且仅当 f 的零空间 $\mathscr{N}(f)$ 为 X 中的闭子空间.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $x_n \in \mathscr{N}(f)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 由于 f 连续, 故 $f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, 从而 $x \in \mathscr{N}(f)$, 故 $\mathscr{N}(f)$ 为闭子空间.

($\Longleftarrow$) 假设 f 无界, 则对任意的 $c > 0$, 存在 $x' \in X$, 有 $|f(x')| > c\,\|x'\|$. 特别地, 对任意的正整数 n, 存在 $x_n \in X$, 使得 $|f(x_n)| > n\,\|x_n\|$.

令 $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, 则 $\|y_n\| = 1$, 且 $|f(y_n)| = \dfrac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} > n$. 又令 (注意到 $f(y_n) \neq 0$)

$$z_n = \frac{y_n}{f(y_n)} - \frac{y_1}{f(y_1)},$$

则 $f(z_n) = f\left(\dfrac{y_n}{f(y_n)} - \dfrac{y_1}{f(y_1)}\right) = \dfrac{f(y_n)}{f(y_n)} - \dfrac{f(y_1)}{f(y_1)} = 0$, 故 $z_n \in \mathscr{N}(f)$. 注意到

$$\left\|\frac{y_n}{f(y_n)}\right\| = \frac{\|y_n\|}{|f(y_n)|} = \frac{1}{|f(y_n)|} < \frac{1}{n} \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty),$$

故 $\dfrac{y_n}{f(y_n)} \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty)$, 从而 $z_n \longrightarrow -\dfrac{y_1}{f(y_1)}\,(n \longrightarrow \infty)$. 由于 $f\left(-\dfrac{y_1}{f(y_1)}\right) = -1 \neq 0$, 故 $-\dfrac{y_1}{f(y_1)} \notin \mathscr{N}(f)$, 与 $\mathscr{N}(f)$ 为闭子空间矛盾, 故假设错误, f 有界, 也即 f 连续.

2.5 等价范数与有限维赋范线性空间

定义: 设 X 为线性空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为 X 上的两种范数, 若存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1, \quad x \in X,$$

则称 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强.

注: 之所以称范数 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ “强”, 是因为若某序列 $\{x_n\}$ 按 $\|\cdot\|_1$ 收敛, 则必按 $\|\cdot\|_2$ 收敛.

定义: 设 X 为线性空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为 X 上的两种范数, 若存在常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得

$$c_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2 \|x\|_1, \quad x \in X, \tag{1}$$

则称 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是**等价**的.

注: 换言之, 范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价就是指 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强.

注: 范数的等价是一种等价关系, 满足

(1) 自反性: $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|$ 等价.

(2) 对称性: 若 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价, 则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价.

(3) 传递性: 若 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价, $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_3$ 等价, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_3$ 等价.

性质: 设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 为线性空间 X 上的等价范数, 则 $(X, \|\cdot\|_1)$ 完备当且仅当 $(X, \|\cdot\|_2)$ 完备.

定理: 设 X 为有限维线性空间, 则 X 上任意两种范数都是等价的.

思路　设 X 为 n 维线性空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 X 的一组基, 只需证明 X 上的任意范数 $\|\cdot\|_1$ 与范数 $\|x\|_2$ 等价, 其中

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 对\, x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X.$$

推论: 有限维赋范线性空间必完备.

证明　因为有限维赋范线性空间按欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$ 完备, 故由等价范数的性质知, 有限维赋范线性空间按任一范数均完备.

推论:

(1) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 则 X 的任一有限维子空间都是 X 中的闭集.

(2) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维赋范线性空间, K 为 X 的子集, 则 K 是紧集当且仅当 K 是有界闭集.

(3) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维赋范线性空间, 设 $(Y, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 则线性算子 $T: X \to Y$ 必有界.

证明　(1) 因为有限维赋范线性空间必完备, 而完备空间一定是闭的, 因此有限维子空间一定是闭集.

(2) 略.

(3) 设 X 为 n 维线性空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 X 的一组基, $T: X \to Y$ 为线性算子, 则

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, \|Te_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = M \|x\|_2,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 为欧几里得范数, $M = \left(\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 因为 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价, 因此存在 $M' > 0$, 使得

$\|x\|_2 \leqslant M' \|x\|, x \in X$, 从而

$$\|Tx\| \leqslant M \|x\|_2 \leqslant MM' \|x\|, \quad x \in X,$$

即 T 为有界线性算子 (且 $\|T\| \leqslant MM'$).

下面给出无穷维线性空间中不满足上述性质的反例.

1. 范数不等价的例子

例 1 对 $C[a,b]$ 中的任意函数 x, 定义

$$\|x\|_\infty = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 完备, $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ 不完备, 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 与 $\|\cdot\|_2$ 不等价.

2. 线性子空间不是闭集的例子

例 2 空间 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 按如上方式定义, 区间 $[a,b]$ 上全体多项式组成的多项式空间 $P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的线性子空间, 但不是 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 中的闭集. 实际上, 取

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g \notin P[a,b]$, 其中 $g(t) = \mathrm{e}^t, t \in [a,b]$.

3. 有界闭集不是紧集的例子

例 3 l^2 中的单位闭球 $B = \{x \in l^2 : \|x\| \leqslant 1\}$ 是有界闭集, 但不是紧集. 其中

$$l^2 = \left\{x = \{x_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty\right\}, \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, x = (x_1, x_2, \cdots).$$

证明 易知 B 为有界闭集. 取 $\{e_k\} \subseteq B$, 其中

$$e_k = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{k-1\text{个}}, 1, 0, \cdots), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

容易知道 $\{e_k\}$ 中任意两个不同元素之间的距离为 $\left\|e_i - e_j\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,(i \neq j)$, 因此 $\{e_k\}$ 中不存在任何收敛子列, 故 B 不是紧集. (并且由于 B 本身是闭集, 故 B 也不是相对紧集.)

4. 线性算子不连续的例子

例 4 记 $P[0,1]$ 为区间 $[0,1]$ 上的全体多项式. 对多项式 $x(t) = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 定义范数为

$$\|x\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|.$$

定义求导算子

$$\begin{aligned} T : P[0,1] &\longrightarrow P[0,1] \\ x(t) &\longmapsto (Tx)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \end{aligned}$$

由求导运算的线性性质可知 T 为线性算子. 取 $x_n(t) = t^n$, 则 $\|x_n\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |t^n| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 但

$$\|Tx_n\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |nt^{n-1}| = n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

从而

$$n = \|Tx_n\| \leqslant \|T\| \, \|x_n\| = \|T\|, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

故 T 无界, 为不连续线性算子.

2.6 线性算子的范数

定义: 设 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $T : X \longrightarrow Y$ 为线性算子, 称

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为**算子 T 在 X 上的范数**.

由 $\|T\|$ 的定义可知当 T 有界时, 对任意的 $x \in X$, 有

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \|x\| \leqslant \left(\sup_{\substack{y\in X \\ y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \right) \|x\| = \|T\| \, \|x\|,$$

从而 $\|Tx\| \leqslant \|T\| \, \|x\|$. 此外, 容易发现 T 为有界线性算子当且仅当 $\|T\| < +\infty$.

引理: 设 T 为 X 上的有界线性算子, 则

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\|.$$

证明 易知

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \left\| \frac{Tx}{\|x\|} \right\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|.$$

对任意的 $0 \neq x \in X$, 令 $y = \dfrac{x}{\|x\|}$, 则 $y \in X$ 且 $\|y\| = 1$, 故

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \leqslant \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\|. \tag{1}$$

另一方面, 对任意的 $x \in X$ 且 $\|x\| \leqslant 1$, 有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\| \leqslant \|T\|,$$

故

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Tx\| \leqslant \|T\|. \tag{2}$$

由 (1) (2) 即得结论.

实际上, 我们还没有证明按 $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ 定义的 $\|\cdot\|$ 的确是一个范数, 这一工作我们在下一节完成.

2.7 有界线性算子空间

这一节我们讨论赋范线性空间上有界线性算子全体所成空间与连续线性泛函全体所成空间.

定义: 设 X, Y 为两个赋范线性空间, 记 $\mathscr{B}(X, Y)$ 为从 X 到 Y 的有界线性算子全体. 对任意的 $A, B \in \mathscr{B}(X, Y)$ 与数 α, 定义

$$(A+B)(x) = Ax + Bx,$$
$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax,$$

分别称为**有界线性算子的加法与数乘**. 当 $X = Y$ 时, 把 $\mathscr{B}(X, X)$ 简记为 $\mathscr{B}(X)$.

下面我们验证 $\mathscr{B}(X, Y)$ 与其上的算子范数确实构成赋范线性空间.

对任意的 $A, B \in \mathscr{B}(X, Y)$, 对任意的 $x \in X$, 有

$$\|(A+B)(x)\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| \|x\| + \|B\| \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \|x\|,$$

故 $A + B \in \mathscr{B}(X, Y)$, 且 $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. 又任取数 α, 则

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\alpha A)(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha| \|A\|,$$

从而 $\alpha A \in \mathscr{B}(X, Y)$, 且 $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$. 又显然

$$\|A\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X, \|Ax\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X, Ax = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0,$$

即 $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$. 因此, $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ 确实是范数, $(\mathscr{B}(X, Y), \|\cdot\|)$ 确实成为赋范线性空间.

定理: 当 Y 是巴拿赫空间时, $\mathscr{B}(X, Y)$ 也为巴拿赫空间.

设 X, Y, Z 为三个赋范线性空间, 线性算子 $A : Y \longrightarrow Z, B : X \longrightarrow Y$, 定义 A 与 B 的乘积

$AB : X \longrightarrow Z$ 为

$$(AB)(x) = A(Bx), \quad \text{对任意的} x \in X.$$

易知 AB 是线性算子, 且

$$\|(AB)(x)\| = \|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \|Bx\| \leqslant \|A\| \|B\| \|x\| = (\|A\| \|B\|) \|x\|,$$

从而 $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$, 故 $AB \in \mathscr{B}(X, Z)$.

定义: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 若 $(X, \|\cdot\|)$ 中定义了两个向量之间的乘积运算 "·"

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \triangleq xy \end{aligned}$$

且满足

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|, \quad \text{对任意的} x, y \in X,$$

则称 $(X, \|\cdot\|, \cdot)$ 为**赋范代数**. 当 $(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间时, 称 $(X, \|\cdot\|, \cdot)$ 为**巴拿赫代数**.

由前述定理知当 $(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间时, $(\mathscr{B}(X), \|\cdot\|, \cdot)$ 为巴拿赫代数.

2.8 共轭空间

定义: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 上全体有界线性泛函所成空间为 X 的**共轭空间**, 记作 X'.

由于 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 是完备的, 因此由前一小节最后一个定理可得如下结论.

定理: 任意赋范线性空间 X 的共轭空间 X' 都是巴拿赫空间.

定义: 设 X, Y 为赋范线性空间. 若存在线性算子 $T : X \longrightarrow Y$, 对任意 $x \in X$, 有

$$\|Tx\| = \|x\|,$$

则称 T 是 X 到 Y 的**保距算子**. 若 T 还是满射, 则称 T 是 X 到 Y 的**同构映射**, 且称 X 与 Y **同构**.

注: 保距算子一定是单射, 这是因为若 $Tx = Ty$, 则

$$\|x - y\| = \|T(x - y)\| = 0,$$

从而 $x = y$, 即 T 为单射.

我们把同构的赋范线性空间视为同一空间, 不加区别.

例 l^1 的共轭空间为 l^∞, 即 $(l^1)' = l^\infty$.

例 $l^p (1 < p < \infty)$ 的共轭空间为 l^q, 其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

2.9 有限秩算子

本节我们引入与矩阵最接近的算子——有限秩算子.

定义: 设 X, Y 是巴拿赫空间, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. 若 $\mathscr{R}(T)$ 是 Y 的有限维子空间, 则称 T 为**有限秩算子**.

记 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的全体有限秩算子所成空间为 $\mathscr{F}(X,Y)$, 若 $Y=X$, 则记为 $\mathscr{F}(X)$.

3 内积空间与希尔伯特空间

3.1 内积空间

定义: 设 X 是复线性空间, 对 X 中的任意两个元素, 有一个复数 $\langle x,y\rangle$ 与之对应, 且满足

(1) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$, 且 $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x=0$.

(2) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

(3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 上的**内积**, $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为**内积空间**, 简称 X 为内积空间.

由 (2)(3) 可得

$$\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle .$$

此外, 对于实内积空间, 条件 (3) 就变成了 $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间, 对任意的 $x\in X$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

下面我们证明 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

显然按 $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数性质的 (1)(2). 下面证明 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式.

引理 (施瓦茨不等式) : 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间, 则对任意的 $x,y\in X$, 有

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间, 则对任意的 $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad (z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z) \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \quad (\operatorname{Re} z \leqslant |z|) \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \quad (\text{施瓦茨不等式}).
\end{aligned}$$

因此 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

由上述讨论可知按 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 定义的 $\|\cdot\|$ 确实是范数, 因此 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 称为由内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 导出的赋范线性空间, $\|\cdot\|$ 称为由内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 导出的范数. 因此, 内积空间实际上是一种特殊的赋范线性空间. 内积空间的完备性, 收敛列, 柯西列等概念均使用赋范线性空间中的相应概念.

由施瓦茨不等式可知内积 $\langle x, y\rangle$ 是关于 x, y 的连续函数, 即当 $x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y\,(n \longrightarrow \infty)$ 时, 有 $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$. 事实上,

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&\leqslant |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leqslant \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

上式最后一行趋于 0 是由于 $\{y_n\}$ 收敛, 故 $\{y_n\}$ 有界, 从而 $\|y_n\|$ 乘以无穷小量 $\|x_n - x\|$ 仍是一个无穷小量.

以后若无特殊说明, 内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的范数均按 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 定义.

若内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中任意柯西列的极限都仍在 X 中, 则称 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是完备的. 实际上, 内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的完备性就是由内积诱导的赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的完备性, 也即由 $d(x, y) = \|x - y\|$ 确定的度量空间 (X, d) 的完备性.

定义: 完备的内积空间称为**希尔伯特空间**.

易知对内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的任意两个向量 x, y, 有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \qquad (*)$$

称其为内积空间中的平行四边形公式. 反之, 在赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中, 若对任意的 $x, y \in X$, 都有平行四边形公式 $(*)$ 成立, 则一定可以在 X 上定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 使 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 成为内积空间.

注: 实际上, 在复赋范线性空间中, 若平行四边形公式成立, 定义

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\mathrm{i}^k\left\|x+\mathrm{i}^k y\right\|^2.$$

可以验证这样定义的 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个内积. 上式称为**极化恒等式**. 在实赋范线性空间中, 极化恒等式变为

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

由于内积空间的范数一定满足平行四边形公式, 从而若赋范线性空间中有向量不满足 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, 则该范数无法由内积导出, 不能成为内积空间.

例 平方可积函数空间 $L^2[a,b]$. 对任意的 $x, y\in L^2[a,b]$, 定义

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

则 $(L^2[a,b],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 成为内积空间, 且诱导范数为 $\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $L^2[a,b]$ 按该范数是完备的 (见 §2.3) , 故 $(L^2[a,b],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 成为希尔伯特空间.

例 二次收敛数列空间 l^2. 对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$, 定义

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i},$$

则 $(l^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 成为希尔伯特空间.

例 $(l^p,\|\cdot\|_p)$ $(p\neq 2)$ 不构成内积空间.

事实上, 取 $x=(1,1,0,\cdots), y=(1,-1,0,\cdots)\in l^p$, 则 $x+y=(2,0,0,\cdots), x-y=(0,2,0,\cdots)$. 由于 $\|x\|=\|y\|=2^{\frac{1}{p}}$, $\|x+y\|=\|x-y\|=2$, 故平行四边形公式不成立, 范数 $\|\cdot\|_p$ $(p\neq 2)$ 不能由内积导出, 无法构成内积空间.

例 $C[a,b]$ 按 $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ 不构成内积空间.

事实上, 取 $x(t)\equiv 1, y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$, $a\leqslant t\leqslant b$, 则 $x(t)+y(t) = 1+\dfrac{t-a}{b-a}, x(t)-y(t) = 1-\dfrac{t-a}{b-a}$, $a\leqslant t\leqslant b$, 故 $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x+y\|=2, \|x-y\|=1$, 不满足平行四边形公式, 因此 $C[a,b]$ 按 $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ 不构成内积空间.

例 当 $p\geqslant 1$ 且 $p\neq 2$ 时, $L^p[a,b]$ 不是内积空间.

3.2 凸集与极小化向量定理

定义: 设 (X,d) 为度量空间, M 为 X 的非空子集, $x\in X$, 称

$$d(x,M) = \inf_{y\in M} d(x,y)$$

为**点 x 到子集 M 的距离**.

因为赋范线性空间中的度量为 $d(x,y)=\|x-y\|$, 因此赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中点 x 到子集 M 的距离为 $d(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$. 这里我们再次说明一下内积空间完备性的含义. 内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 及其子空间的完备性就是指柯西列按度量 (或范数)

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$

的完备性.

在许多数学问题 (例如函数逼近论) 中, 常常会有这样的问题: 对 $x\in X$, 是否存在点 $y_0\in M$, 使得

$$\|x-y_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|=d(x,M).$$

当 M 是内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的完备凸子集时, 回答是肯定的.

定义: 设 X 是线性空间, $x,y\in X$, 称集合

$$[x,y]=\{z=\alpha x+(1-\alpha)y:0\leqslant\alpha\leqslant1\}$$

为 X 中**连接 x 与 y 的线段**.

定义: 设 X 为线性空间, M 为 X 的非空子集, 若对任意的 $x,y\in M$, 有 $[x,y]\subseteq M$, 则称 M 是 X 中的**凸集**.

定理 (极小化向量定理) : 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的完备凸子集, 则对任意的 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in M$, 使得

$$\|x-y\|=d(x,M).$$

由于完备子空间一定是凸集, 故我们有如下推论.

推论: 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的完备子空间, 则对任意的 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in M$, 使得

$$\|x-y\|=d(x,M).$$

推论: 设 M 为希尔伯特空间 X 的闭子空间, 则对任意的 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in M$, 使得

$$\|x-y\|=d(x,M).$$

极小化向量定理是内积空间中的一个基本定理, 它在微分方程、现代控制论和逼近论中有重要应用.

3.3 正交补与投影定理

定义: 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, $x, y \in X$. 若 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 x 与 y **正交**, 记作 $x \perp y$. 若 X 的子集 A 中的每个元素与子集 B 中的每个元素均正交, 则称 A 与 B **正交**, 记作 $A \perp B$. 若子集 A 只有一个元素 x, 则称 x 与子集 B **正交**, 记作 $x \perp B$.

有了正交的概念, 类似于有限维欧氏空间, 我们可以在一般的内积空间中建立起相应的几何学.

易知内积空间中正交的两个向量 x, y 满足勾股定理

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

当 X 为实内积空间时, 反之也对. 即若 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 则 $x \perp y$. 但当 X 为复内积空间时, 由 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ 不能得出 $x \perp y$. 例如, 取 $0 \neq x \in X$, 再取 $y = \mathrm{i}x$, 则 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 但是 $\langle x, y\rangle = -\mathrm{i}\,\|x\|^2 \neq 0$.

引理: 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的线性子空间, $x \in X$, 若存在 $y \in M$, 使得

$$\|x - y\| = d(x, M),$$

则 $x - y \perp M$.

定义: 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的子集, 称集合

$$M^\perp = \{x \in X : x \perp M\}$$

为 M 在 X 中的**正交补**.

由定义即知对内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的子集 M, 有 $M \perp M^\perp$. 此外, 显然有 $\{0\}^\perp = X, X^\perp = \{0\}$.

命题: 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的子集, 则 $M^\perp$ 是 X 的闭子空间.

证明 (1) 先证 M 是子空间.

① 由于 $0 \in M^\perp$, 故 $M^\perp$ 非空.

② 任取 $x_1, x_2 \in M^\perp$, 则 $x_1 \perp M, x_2 \perp M$. 从而对任意的 $y \in M$, 有 $\langle x_1, y\rangle = 0, \langle x_2, y\rangle = 0$, 从而 $\langle x_1 + x_2, y\rangle = 0$. 由 y 的任意性知 $x_1 + x_2 \perp M$, 又 $x_1 + x_2 \in X$, 故 $x_1 + x_2 \in M^\perp$.

③ 任取 $x \in M^\perp$, 则 $x \perp M$, 从而对任意的 $y \in M$, 有 $\langle x, y\rangle = 0$. 任取数 α, 则 $\alpha x \in X$ 且对任意的 $y \in M$, 有 $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle = 0$, 从而 $\alpha x \in M^\perp$.

综上, $M^\perp$ 为 X 的线性子空间.

(2) 再证 $M^\perp$ 是 X 中的闭集.

任取 $M^\perp$ 中的收敛点列 $\{x_n\}$ 且 $x_n \longrightarrow x\,(n \longrightarrow \infty)$, 下证 $x \in M^\perp$.

由于 $x_n \in M^\perp, n = 1, 2, \cdots$, 故 $x_n \in X$, 且对任意的 $y \in M$, 有 $\langle x_n, y\rangle = 0, n = 1, 2, \cdots$. 由内积的连续性知

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0,$$

故 $x \perp M$. 由于 $\{x_n\}$ 是收敛点列, 故其极限 $x \in X$, 从而 $x \in M^{\perp}$.

注: 这里用到的结论是: 设 (X,d) 为度量空间, M 为 X 的子集, 则 M 为 X 中的闭集当且仅当 M 中任意收敛点列的极限仍在 M 中.

定义: 设 X 为线性空间, Y 和 Z 为 X 的子空间. 若对任意的 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y, z \in Z$, 使得 $x = y + z$, 则称 X 是 Y 与 Z 的**直和**, 记为 $X = Y \oplus Z$.

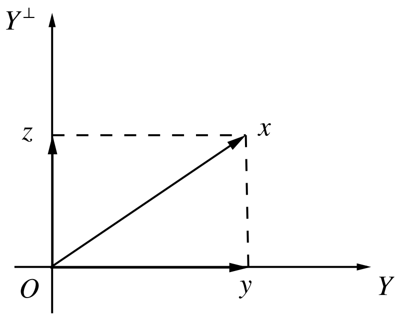
定理 (投影定理) : 若 Y 为希尔伯特空间 X 的闭子空间, 则

$$X = Y \oplus Y^{\perp}.$$

由直和的性质可知, 当 Y 为希尔伯特空间 X 的闭子空间时, 对任意的 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 以及 $z \in Y^{\perp}$, 使得 $x = y + z$ 且 $y \perp z$. 称 y 为 x 在 Y 上的**投影** (projection) . 此时, 我们可以定义映射

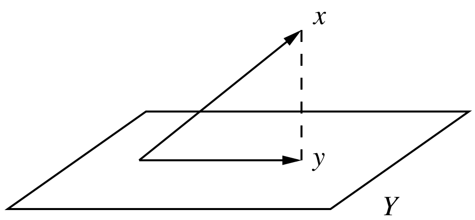
$$\begin{aligned} P : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto Px = y \end{aligned}$$

我们称 P 为 X 到 Y 的**投影算子**. 此时 $x - y \in Y^{\perp}$, 也即 $x - y \perp Y$.



根据投影定理, 对任意的 $x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$, 使得 $x - y \in Y^{\perp}$. 因此投影算子的定义也可表述为:

定义: 设 Y 为希尔伯特空间 X 的闭子空间, $x \in X, y \in Y$. 若 $x - y \perp Y$, 则称 y 为 x 在 Y 上的**投影**. 由此得到的映射 $P : X \longrightarrow Y$ 称为**投影算子**.



投影算子 $P : X \longrightarrow Y$ 具有如下性质:

(1) $PX = Y, PY = Y, PY^{\perp} = \{0\}$.

(2) $P \in \mathscr{B}(X,Y)$, 且当 $Y \neq \{0\}$ 时, $\|P\| = 1$.

(3) $P^2=P$, 其中 $P^2=P\circ P$.

证明 (1) 对任意的 $y\in Y$, 有 $y-y\perp Y$, 故 y 是 y 的一个原像, 故 P 为满射, $PX=Y$, 同时我们得到 $PY=Y$.

对任意的 $x\in Y^{\perp}$, 有 $x\perp Y$. 由投影算子的定义知 $x-Px\perp Y$, 故 $x-(x-Px)=Px\perp Y$. 但是 $Px\in Y$, 故 $Px=0$, 即 $PY^{\perp}=\{0\}$.

(2) 先证 P 为线性算子. 任取 $x_1,x_2\in X$, 设 $Px_1=y_1,Px_2=y_2$, 则 $x_1-y_1\perp Y, x_2-y_2\perp Y$, 从而 $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\perp Y$. 因为 $x_1+x_2\in X$, $y_1+y_2\in Y$, 故 $P(x_1+x_2)=y_1+y_2=Px_1+Px_2$. 任取 $x\in X$, 设 $Px=y$, 则 $x-y\perp Y$. 任取数 α, 则 $\alpha(x-y)\perp Y$, 故 $\alpha x-\alpha y\perp Y$. 因为 $\alpha x\in X$, $\alpha y\in Y$, 故 $P(\alpha x)=\alpha y=\alpha Px$. 因此, P 为线性算子.

下证 P 有界. 对任意的 $x\in X$, 设 $Px=y$, 则 $x-y\perp Y$, 故 $x-y\perp y$, 从而

$$\|x\|^2=\|(x-y)+y\|^2=\|x-y\|^2+\|y\|^2\geqslant\|y\|^2=\|Px\|^2,$$

故 $\|Px\|\leqslant\|x\|$, 从而 $P\in\mathscr{B}(X,Y)$ 且 $\|P\|\leqslant 1$. 另一方面, 当 $Y\neq\{0\}$ 时, 取 $0\neq x_0\in Y$, 则 $Px_0=x_0$, 从而 $\|x_0\|=\|Px_0\|\leqslant\|P\|\,\|x_0\|$, 故 $\|P\|\geqslant 1$. 因此, 当 $Y\neq\{0\}$ 时, $\|P\|=1$.

(3) 因为对任意的 $y\in Y$, 有 $Py=y$, 故对任意的 $x\in X$, 有 $P^2x=P(Px)=Px$, 即 $P^2=P$.

注: 实际上, 对于一般的内积空间及其子空间, 我们也可以定义一个元素在子空间上的投影.

定义: 设 M 为内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的子空间, $x\in X, y\in M$, 若 $x-y\perp M$, 则称 y 为 x 在子空间 M 上的投影.

命题: 投影具有唯一性.

证明 设 $y_1,y_2\in M$ 均为 x 在子空间 M 上的投影, 则 $x-y_1\perp M, x-y_2\perp M$, 从而 $(x-y_1)-(x-y_2)\perp M$, 即 $y_2-y_1\perp M$, $y_2-y_1\in M^{\perp}$. 由于 $y_1,y_2\in M$ 且 M 为子空间, 故 $y_2-y_1\in M$. 因此 $y_2-y_1\in M\cap M^{\perp}=\{0\}$, $y_1=y_2$.

记 $(M^{\perp})^{\perp}=M^{\perp\perp}$. 关于正交补, 我们还有如下性质: 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的子集, 则

(1) $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

(2) $M^{\perp}=(\operatorname{span}M)^{\perp}$.

(3) $M\subseteq M^{\perp\perp}$.

证明 (1) 由于 $M\subseteq\overline{M}$, 故若 $x\perp\overline{M}$, 则必有 $x\perp M$, 因此 $(\overline{M})^{\perp}\subseteq M^{\perp}$. 下证 $M^{\perp}\subseteq(\overline{M})^{\perp}$.

任取 $x\in M^{\perp}$. 对任意的 $y\in\overline{M}$, 存在 $\{y_n\}\subseteq M$, 使得 $y_n\longrightarrow y\ (n\longrightarrow\infty)$, 从而由内积的连续性知

$$\langle x,y\rangle=\left\langle x,\lim_{n\to\infty}y_n\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,y_n\rangle=0.$$

因此 $x\in(\overline{M})^{\perp}$, $M^{\perp}\subseteq(\overline{M})^{\perp}$.

(2) 因为 $M\subseteq\operatorname{span}M$, 故若 $x\perp\operatorname{span}M$, 则必有 $x\perp M$, 因此 $(\operatorname{span}M)^{\perp}\subseteq M^{\perp}$. 下证 $M^{\perp}\subseteq(\operatorname{span}M)^{\perp}$.

任取 $x \in M^{\perp}$, 则 $x \perp M$, 从而对任意的 $y \in M$, 有 $x \perp y$, 也即 $\langle x, y\rangle = 0$. 因此, 任取有限个元素 $y_1, \cdots, y_n \in M$, 对任意的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 有

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle x, y_i\rangle = 0,$$

故 $x \perp (\operatorname{span} M)^{\perp}$.

(3) 任取 $y \in M$, 则对任意的 $x \in M^{\perp} = \{x \in X : x \perp M\}$, 有 $y \perp x$, 因此 $y \perp M^{\perp}$. 由 y 的任意性知 $M \subseteq M^{\perp\perp}$.

定理: 若 Y 为希尔伯特空间 X 的闭子空间, 则

$$Y = Y^{\perp\perp}.$$

证明 只需证 $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$. 任取 $x \in Y^{\perp\perp} \subseteq X$, 由投影定理知存在唯一的 $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$ 以及 $z \in Y^{\perp}$, 使得 $x = y + z$ 且 $y \perp z$. 由于 $x, y \in Y^{\perp\perp}$, 故 $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$, 又因为 $z \in Y^{\perp}$, 从而 $z \in Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = \{0\}$, 故 $z = 0$. 因此 $x = y \in Y$, 故 $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$.

3.4 规范正交系与傅里叶级数

定义: 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间, M 为 X 的不含 0 的子集. 若 M 中的元素两两正交, 则称 M 为 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的**正交系**. 若 M 中每个元素的范数均为 1, 则称 M 为 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的**规范正交系**.

例 在实线性空间 $L^2[0, 2\pi]$ 中, 定义内积

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

则三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \cdots \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \cdots$$

是 $L^2[0, 2\pi]$ 中的规范正交系.

性质: 设 M 为内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的正交系, 则

(1) M 是 X 的线性无关子集.

(2) 对任意有限个互异的 $x_1, x_2 \cdots, x_n \in M$, 有

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

证明 (1) 任取互异的 $v_1, \cdots, v_m \in M$, 设

$$k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m = 0,$$

其中 $k_1,\cdots,k_m$ 为数, 则对任意的 $i\,(1\leqslant i\leqslant m)$, 有

$$\langle k_1v_1+\cdots+k_mv_m, v_i\rangle = 0,$$

从而

$$k_i\,\langle v_i, v_i\rangle = 0.$$

由于 $v_i\neq 0$, 故 $\langle v_i, v_i\rangle\neq 0$, 从而

$$k_i=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

即 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关.

(2)

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\left\langle\sum_{i=1}^n x_i,\sum_{j=1}^n x_j\right\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left\langle x_i,x_j\right\rangle=\sum_{i=1}^n\langle x_i,x_i\rangle=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

我们引入规范正交系的目的就是把内积空间中的向量展开成关于规范正交系的级数. 为此, 我们首先介绍一般赋范线性空间中级数收敛的概念.

定义: 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, $x_1,x_2,\cdots$ 是 X 中的一列向量, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 是一列数, 作形式级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ix_i$, 称 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$ 为级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ix_i$ 的**前 n 项部分和**. 若存在 $x\in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=x$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i-x\right\|=0,$$

则称级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ix_i$ **收敛**, 并称 x 是该级数的和, 记作 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ix_i$.

设 M 为内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的规范正交系, $e_1,e_2,\cdots$ 是 M 中的可数个向量, $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i$, 则由内积的连续性知对任意正整数 j, 有

$$\left\langle x,e_j\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i,e_j\right\rangle=\left\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i,e_j\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i,e_j\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\alpha_i\left\langle e_i,e_j\right\rangle=\alpha_j.$$

类似地, 对于 M 中有限个向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 若 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$, 则

$$\left\langle x,e_j\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i,e_j\right\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\left\langle e_i,e_j\right\rangle=\alpha_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

受此启发, 我们有如下定义.

定义: 设 M 为内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的规范正交系, $x\in X$, 称数集

$$\{\langle x,e\rangle : e\in M\}$$

为 x 关于规范正交系 M 的**傅里叶系数集**, 其中的元素 $\langle x,e\rangle$ 称为 x 关于 e 的**傅里叶系数**.

性质: 设 M 为内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的规范正交系, 任取有限个不同的向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in M$, 则

(1) $\left\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum\limits_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\geqslant 0$.

(2) 对任意的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 有 $\left\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|\geqslant\left\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|$, 当且仅当 $\alpha_i=\langle x,e_i\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立.

证明 (1) 因为 $\left\langle x-\sum\limits_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,e_j\right\rangle=0(j=1,2,\cdots,n)$, 故 $x-\sum\limits_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\perp e_j(j=1,2,\cdots,n)$, 从而

$$x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\perp\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

由勾股定理知

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\left\|\left(x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2\\&=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2+\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2\\&=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2+\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2,\end{aligned}$$

移项得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\geqslant 0.$$

(2) 对任意的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 有

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|^2&=\left\langle x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\rangle\\&=\|x\|^2-\left\langle x,\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\rangle-\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,x\right\rangle+\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|^2\\&=\|x\|^2-2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}\langle x,e_i\rangle\right)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\\&=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}2\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha_i}\langle x,e_i\rangle\right)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\end{aligned}$$

由上式及 (1) 中结论 $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$ 知

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2-\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2&=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2-\sum_{i=1}^{n}2\mathrm{Re}\left(\overline{\alpha_i}\langle x,e_i\rangle\right)+\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\\&=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\langle x,e_i\rangle|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

这里用到了 $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)+|z_2|^2$. 同时由此得出等号成立当且仅当 $\alpha_i=\langle x,e_i\rangle\,(i=1,2,\cdots,n)$.

定理 (贝塞尔不等式) : 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的有限或可数规范正交系, 则对任意的 $x\in X$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

证明 当 $\{e_i\}_1^n$ 为有限规范正交系时, 由傅里叶系数的性质 (1) 可知 $\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$. 当 $\{e_i\}_1^\infty$ 为可数规范正交系时, 令傅里叶系数性质 (1) 中的 $n\longrightarrow\infty$ 即可.

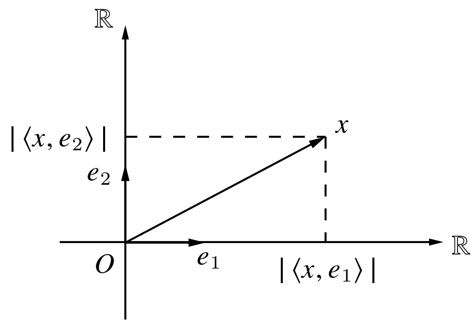
当贝塞尔不等式的等号成立时, 称此等式 $\left(\text{即}\ \|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\right)$ 为**帕塞瓦尔等式**.

推论: 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的可数规范正交系, 则对任意的 $x\in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0.$$

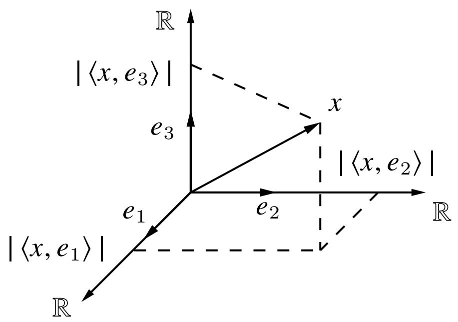
证明 由贝塞尔不等式知级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$ 收敛, 从而通项趋于 0, 故 $\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0$.

例 在内积空间 $\mathbb{R}^2$ 中取规范正交系 $\{e_1,e_2\}$, 其中 $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}^2$, 帕塞瓦尔等式 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{2}|\langle x,e_i\rangle|^2$ 成立. 但是, 若取规范正交系 $\{e_1\}$, 则帕塞瓦尔等式 $\|x\|^2=|\langle x,e_1\rangle|^2$ 只在 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $\{(x_1,0):x_1\in\mathbb{R}\}$(即横轴) 上成立.



例 在内积空间 $\mathbb{R}^3$ 中取规范正交系 $\{e_1,e_2,e_3\}$, 其中 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}^3$, 帕塞瓦尔等式 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{3}|\langle x,e_i\rangle|^2$ 成立. 若取规范正交系 $\{e_1,e_2\}$, 则帕塞瓦尔

等式 $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{2} |\langle x, e_i\rangle|^2$ 只在 $\mathbb{R}^3$ 的子集 $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ 上成立.



命题: 设 M 为内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的规范正交系, $x \in X$, 则使得 $\langle x, e\rangle \neq 0$ 的 $e \in M$ 至多可数个, 即 $\{e \in M : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ 为至多可数集.

证明 (1) 先证对任意正整数 m, 集合

$$M_m = \left\{ e \in M : |\langle x, e\rangle| > \frac{1}{m} \right\}$$

为有限集. 假设 M_m 是无限集, 则可以取到 M_m 的一个可数子集 $\{e_1, e_2, \cdots\}$, 满足 $|\langle x, e_i\rangle|^2 > \dfrac{1}{m^2}$, 与级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ 收敛矛盾.

(2) 由于对每个正整数 m, 集合 M_m 都是有限集, 故

$$\{e \in M : \langle x, e\rangle \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ e \in M : |\langle x, e\rangle| > \frac{1}{m} \right\}$$

为至多可数集.

当 M 为内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的不可数规范正交系时, 级数 $\sum\limits_{e\in M} \langle x, e\rangle\, e$ 是不可数项求和, 但是其中只有至多可数项不为 0, 因此我们人为约定此时

$$\sum_{e\in M} \langle x, e\rangle\, e = \sum_{\langle x, e\rangle \neq 0} \langle x, e\rangle\, e = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

3.5 希尔伯特空间中的完全规范正交系

设 M 为内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的规范正交系, 则对任意的 $x \in X$, 我们都可以作级数 $\sum\limits_{e\in M} \langle x, e\rangle\, e$. 但是, 该级数是否一定收敛呢? 若收敛, 是否一定收敛于 x 呢? 若不一定, 满足什么条件时一定是收敛到 x 的呢? 这就是我们接下来要研究的问题.

引理: 设 $\{e_i\}$ 为希尔伯特空间 X 中的可数规范正交系, 则

(1) 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ 收敛.

(2) 对任意的 $x \in X$, 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ 收敛.

证明 (1) 记 $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$. 任取正整数 n, m 且 $n > m$, 则

$$\|S_n - S_m\|^2 = \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

由此可知 $\{S_n\}$ 为柯西列当且仅当 $\{\sigma_n\}$ 为柯西列. 由 X 完备可知若 $\{S_n\}$ 为柯西列, 则其必为收敛列. 同理, 由数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 完备可知若 $\{\sigma_n\}$ 为柯西列, 则其必为收敛列. 因此 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当 $\{\sigma_n\}$ 收敛, 也即级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ 收敛.

(2) 由贝塞尔不等式知对任意的 $x \in X$, 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ 收敛, 从而由 (1) 知级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ 收敛.

定义: 设 M 是内积空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的规范正交系, 若

$$\overline{\operatorname{span} M} = X,$$

则称 M 为 X 中的**完全规范正交系**.

引理: 设 M 为希尔伯特空间 X 的非空子集, 则 $\operatorname{span} M$ 在 X 中稠密 (即 $\overline{\operatorname{span} M} = X$) 的充要条件为 $M^{\perp} = \{0\}$.

证明 ($\Longrightarrow$) 任取 $x \in M^{\perp}$, 则 $x \in X = \overline{\operatorname{span} M}$, 存在 $\{x_n\} \subseteq \operatorname{span} M$, 使得 $x_n \longrightarrow x (n \longrightarrow \infty)$. 因为 $x \in M^{\perp} = (\operatorname{span} M)^{\perp}$, 故

$$\langle x, x \rangle = \left\langle \lim_{n \to \infty} x_n, x \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, x \rangle = 0,$$

从而 $x = 0$, 即 $M^{\perp} = \{0\}$.

($\Longleftarrow$) 由于 $M^{\perp} = (\operatorname{span} M)^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} M})^{\perp}$, 故 $(\overline{\operatorname{span} M})^{\perp} = \{0\}$, 又因为 $\overline{\operatorname{span} M}$ 是 X 中的闭子空间, 故由投影定理知

$$X = \overline{\operatorname{span} M} \oplus (\overline{\operatorname{span} M})^{\perp} = \overline{\operatorname{span} M} \oplus \{0\} = \overline{\operatorname{span} M}.$$

(这里运用了结论: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 若 M 是 X 的子空间, 则 $\overline{M}$ 也是 X 的子空间.)

定理: 设 M 是希尔伯特空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的规范正交系, 则 M 为完全规范正交系当且仅当 $M^{\perp} = \{0\}$.

上述定理告诉我们完全规范正交系中不能再加入新的向量, 使之成为更大的规范正交系.

定理: 设 M 是希尔伯特空间 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的完全规范正交系, 则对任意的 $x \in X$, 均有

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e.$$

上式称为 x 关于完全规范正交系 M 的**傅里叶展开式**.

证明 任取 $x \in X$, 设其非零傅里叶系数为 $\{\langle x, e_i\rangle\}_1^\infty$. 由本节开头的引理知 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$ 收敛, 设其和为 y, 即 $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$, 下证 $x = y$.

对任意正整数 i, 有

$$\langle x - y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j\right\rangle e_j, e_i \right\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j\right\rangle \left\langle e_j, e_i\right\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0.$$

又对任意的使 $\langle x, e\rangle = 0$ 的 $e \in M$, 有

$$\langle x - y, e\rangle = \langle x, e\rangle - \langle y, e\rangle = \langle x, e\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j\right\rangle e_j, e \right\rangle = \langle x, e\rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x, e_j\right\rangle \left\langle e_j, e\right\rangle = 0 - 0 = 0.$$

由以上讨论知 $x - y \perp M$, 即 $x - y \in M^\perp$. 由于 M 完全, 故 $M^\perp = \{0\}$, 从而 $x = y$, 即

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{e \in M} \langle x, e\rangle e.$$

定理: 设 M 是希尔伯特空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的规范正交系, 则 M 为完全规范正交系当且仅当对任意的 $x \in X$, 帕塞瓦尔等式成立.

证明 ($\Longrightarrow$) 由前一定理可知对任意的 $x \in X$, 有 $x = \sum\limits_{e \in M} \langle x, e\rangle e$, 即 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$, 从而由范数的连续性知

$$\|x\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2,$$

即帕塞瓦尔等式成立.

($\Longleftarrow$) 假设 M 不完全, 则存在 $0 \neq x_0 \in X$, 使得 $x_0 \perp M$, 从而对任意的 $e \in M$, 有 $\langle x_0, e\rangle = 0$. 由于帕塞瓦尔等式对 x_0 成立, 故

$$\|x_0\|^2 = \sum_{e \in M} |\langle x_0, e\rangle|^2 = 0,$$

从而 $x_0 = 0$, 矛盾.

定理: 设 M 是希尔伯特空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的规范正交系, 则 M 为完全规范正交系当且仅当对任意的 $x \in X$,

$$x = \sum_{e \in M} \langle x, e\rangle e.$$

证明 ($\Longrightarrow$) 前面已证.

($\Longleftarrow$) 任取 $x \in X$, 下面我们证明帕塞瓦尔等式对任意的 $x \in X$ 成立.

设 $x = \sum\limits_{e\in M} \langle x, e\rangle e = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$, 令 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$, 则

$$\|x - S_n\|^2 = \left\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2,$$

从而由 $S_n \longrightarrow x\,(n \longrightarrow \infty)$ 可知

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2\right) = \lim_{n\to\infty} \|x - S_n\|^2 = 0,$$

故帕塞瓦尔等式 $\|x\|^2 = \sum\limits_{e\in M} |\langle x, e\rangle|^2$ 对任意的 $x \in X$ 均成立, 即 M 为完全规范正交系.

综合以上论述, 我们得到如下结论.

定理: 设 M 是希尔伯特空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的规范正交系, 则下列各条等价:

(1) M 是完全规范正交系.

(2) 对任意的 $x \in X$, 有傅里叶展开 $x = \sum\limits_{e\in M} \langle x, e\rangle e$.

(3) 对任意的 $x \in X$, 帕塞瓦尔等式 $\|x\|^2 = \sum\limits_{e\in M} |\langle x, e\rangle|^2$ 均成立.

注: 再次说明一下, 因为对任意的 $x \in X$, 至多可数个 $e \in M$ 满足 $\langle x, e\rangle \neq 0$, 因此上述定理的 (2)(3) 中等式右边的求和都是有意义的.

推论: 设 M 是希尔伯特空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的规范正交系, 若帕塞瓦尔等式在 X 的某个稠密子集上成立, 则 M 是完全的.

例 定义 $L^2[0, 2\pi]$ 中的内积为

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \cdots \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \cdots$$

是 $L^2[0, 2\pi]$ 中的完全规范正交系, 因此, 任一 $f \in L^2[0, 2\pi]$ 均可展开成傅里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

注: 上述等式中等号 “=” 的含义并不是逐点收敛, 而是指右边的级数平方平均收敛于 $f(x)$. 这是因为赋范线性空间中级数的收敛是利用范数定义的, 而空间 $L^2[0, 2\pi]$ 中的范数为

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.6 施密特正交化与希尔伯特维数

引理 (格拉姆-施密特正交化)：设 X 为内积空间, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 X 中的线性无关向量, 则存在规范正交系 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 使得

$$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$

思路

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{x_1}{\|x_1\|}, & e_1 &= v_1; \\
v_2 &= x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1, & e_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|}; \\
&\cdots & &\cdots \\
v_n &= x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i, & e_n &= \frac{v_n}{\|v_n\|}.
\end{aligned}$$

注: 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i$ 实际上是 x_n 在 $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$ 上的投影.

定理: 非零希尔伯特空间必有完全规范正交系.

可以证明, 若 M_1 与 M_2 均为希尔伯特空间 X 的完全规范正交系, 则 M_1 与 M_2 具有相同的基数, 称该基数为 X 的**希尔伯特维数**.

定义: 设有内积空间 $X, \widetilde{X}$, 若存在满射 $T: X \longrightarrow \widetilde{X}$ 满足

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty,$$
$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle,$$

则称内积空间 X 与 $\widetilde{X}$ **同构**, 并称 T 为 X 到 $\widetilde{X}$ 的**同构映射**.

注: 实际上同构映射是一定是双射, 但是定义里面只提到满射, 这是因为条件 $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ 保证了 T 一定是单射. 事实上, 若 $Tx = Ty$, 则 $T(x-y) = 0$, 从而 $\langle T(x-y), T(x-y) \rangle = 0$, 由条件知 $\langle x-y, x-y \rangle = 0$, 故 $x - y = 0$, 即 $x = y$, 因此 T 为单射.

定理: 两个希尔伯特空间同构的充要条件是它们具有相同的希尔伯特维数.

对于可分希尔伯特空间, 利用施密特正交化, 我们可以得到如下结论.

推论: 有限维可分希尔伯特空间与 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 同构, 无限维可分希尔伯特空间与 l^2 同构.

注: 希尔伯特空间的希尔伯特维数 (也称为正交维数) 是指其完全规范正交系的基数 (用到了内积), 而不是 Hamel 基 (也称为线性基) 的基数 (只将其视为线性空间, 没有考虑内积). 例如, 无限维可分希尔伯特空间在完全规范正交系下是可数维的, 而在 Hamel 基下的维数 (称为线性维数) 就是不可数的. 实际上, 我们有如下结论.

定理: 希尔伯特空间 X 的线性维数大于等于其正交维数.

至于为什么会出现这种情况, 我们可以从两种基的定义来看. 设 X 为一个线性空间, 若 X 的线

性无关子集 M 满足

$$\operatorname{span} M = X, \tag{1}$$

则称 M 为 X 的 Hamel 基或线性基, M 的基数称为 X 的 Hamel 维数或线性维数. 希尔伯特空间 X 的希尔伯特维数则定义为其完全规范正交系的基数, 而完全规范正交系 M 满足

$$\overline{\operatorname{span} M} = X. \tag{2}$$

由 (1) 与 (2) 便不难看出为何线性维数大于等于正交维数了. 当然, 对于有限维空间, 我们有

定理: 若希尔伯特空间 X 的线性维数或希尔伯特维数中有一个是有限的, 则另一个也是有限的, 且二者相等.

3.7 里斯定理与希尔伯特空间上的连续线性泛函

定理 (里斯定理) : 设 f 是希尔伯特空间 X 上的连续线性泛函, 则存在唯一的 $z \in X$, 使得

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad x \in X,$$

并且 $\|f\| = \|z\|$.

证明 (1) 当 $f = 0$ 时, 取 $z = 0$, 则 $f(x) = 0 = \langle x, 0 \rangle, \forall x \in X$, 且 $\|f\| = \|z\| = 0$. 唯一性易证.

(2) 当 $f \neq 0$ 时, $\mathcal{N}(f) \neq X$. 因为 f 连续, 故 $\mathcal{N}(f)$ 是 X 中的闭子空间, 从而是 X 的完备子空间. 由投影定理可知 $X = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^{\perp}$. 因为 $\mathcal{N}(f) \neq X$, 故 $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$. 取 $0 \neq z_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, 则对任意的 $x \in X$, 有

$$f(f(z_0)x - f(x)z_0) = f(z_0)f(x) - f(x)f(z_0) = 0,$$

故 $v = f(z_0)x - f(x)z_0 \in \mathcal{N}(f)$. 又因为 $z_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, 故

$$0 = \langle v, z_0 \rangle = \langle f(z_0)x - f(x)z_0, z_0 \rangle = f(z_0) \langle x, z_0 \rangle - f(x) \|z_0\|^2 .$$

因为 $z_0 \neq 0$, 故 $\|z_0\| \neq 0$, 从而

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \langle x, z_0 \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle.$$

令 $z = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$, 则对任意的 $x \in X$, 有

$$f(x) = \langle x, z \rangle .$$

若另有 $z_1 \in X$ 满足对任意的 $x \in X$, 有 $f(x) = \langle x, z \rangle$, 则 $\langle x, z \rangle - \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z - z_1 \rangle = 0$. 取 $x = z - z_1$,

则 $\|z-z_1\|^2=0$, 故 $z=z_1$. 下证 $\|f\|=\|z\|$.

由于 $f(z)=\langle z,z\rangle=\|z\|^2$, 故

$$\|z\|^2=f(z)\leqslant\|f\|\,\|z\|\,.$$

因为 $f\neq 0$, 故 $z\neq 0,\|z\|\neq 0$, 从而

$$\|z\|\leqslant\|f\|\,.$$

又由施瓦茨不等式知

$$|f(x)|=|\langle x,z\rangle|\leqslant\|x\|\,\|z\|\,,$$

故 $\|f\|\leqslant\|z\|$. 综上, $\|f\|=\|z\|$.

我们把内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 按范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 诱导的赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的共轭空间称为该内积空间的共轭空间.

设 X 是希尔伯特空间, 定义映射

$$\begin{aligned} T:X&\longrightarrow X'\\ y&\longmapsto f_y \end{aligned}$$

其中 $f_y(x)=\langle x,y\rangle,x\in X$. 由里斯定理可知 T 是满射, 且 $\|Ty\|=\|y\|$, 因此 T 是赋范线性空间 X 与 X' 之间的同构映射, 即 $X=X'$. 因此, 希尔伯特空间的共轭空间我们不必寻找了, 它就是它自己的共轭空间.

定理: 设 X 为希尔伯特空间, 则 $X'=X$, 其中 X' 是 X 的共轭空间.

例 由于 $(l^p)'=l^q$, 其中 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 故当 $p=2$ 时, $(l^2)'=l^2$.

注: (1) 在赋范线性空间 $l^p(p\geqslant 1)$ 中, 只有 l^2 是内积空间.

(2) 对 $L^2[a,b]$, 同样有 $(L^2[a,b])'=L^2[a,b]$.

3.8 希尔伯特空间中的共轭算子

设 X 是 n 维内积空间, $e_1,\cdots,e_n$ 是 X 中的规范正交系, $A:X\longrightarrow X$ 为线性算子, 易知 A 与 n 阶矩阵 (a_{ij}) 对应, 其中 $a_{ij}=\left\langle Ae_j,e_i\right\rangle,i,j=1,\cdots,n$. 设 (b_{ij}) 为 (a_{ij}) 的共轭转置矩阵, 即 $b_{ij}=\overline{a_{ji}},i,j=1,\cdots,n$. 记 (b_{ij}) 所对应的算子为 A^*, 则

$$\left\langle Ae_i,e_j\right\rangle=a_{ji}=\overline{b_{ij}}=\overline{\left\langle A^*e_j,e_i\right\rangle}=\left\langle e_i,A^*e_j\right\rangle,$$

从而对任意的 $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ 与 $y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j\in X$, 有

$$\begin{aligned}\langle Ax,y\rangle&=\left\langle A\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right),\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_iAe_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\overline{y_j}\left\langle Ae_i,e_j\right\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\overline{y_j}\left\langle e_i,A^*e_j\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_jA^*e_j\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,A^*\left(\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)\right\rangle=\langle x,A^*y\rangle.\end{aligned}$$

接下来, 我们把有限维内积空间中的共轭转置矩阵的概念推广到一般的内积空间中去.

定理: 设 X 与 Y 是两个希尔伯特空间, 则对任意的算子 $A\in\mathscr{B}(X,Y)$, 存在唯一的算子 $A^*\in\mathscr{B}(Y,X)$, 使得

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle,\quad x\in X,y\in Y,$$

并且 $\|A^*\|=\|A\|$.

证明 (1) 构造算子 $A^*:Y\longrightarrow X$.

任取 $y\in Y$, 定义

$$f_y(x)=\langle Ax,y\rangle,\quad x\in X.$$

易知 f_y 是线性泛函, 下证 f_y 有界. 由施瓦茨不等式知

$$|f_y(x)|=|\langle Ax,y\rangle|\leqslant\|Ax\|\,\|y\|\leqslant\|A\|\,\|x\|\,\|y\|=(\|A\|\,\|y\|)\,\|x\|,\quad x\in X,$$

故 f_y 有界, 且

$$\left\|f_y\right\|\leqslant\|A\|\,\|y\|.\tag{1}$$

由里斯定理知存在唯一的 $z\in X$, 使得

$$f_y(x)=\langle x,z\rangle,\quad x\in X$$

且 $\left\|f_y\right\|=\|z\|$. 令 $A^*y=z$, 则

$$\langle Ax,y\rangle=f_y(x)=\langle x,A^*y\rangle,\quad x\in X.\tag{2}$$

(2) 证明 $A^*\in\mathscr{B}(Y,X)$.

任取 $x\in X,y_1,y_2\in Y$, 则

$$\begin{aligned}\langle x,A^*(\alpha y_1+\beta y_2)\rangle&=\langle Ax,\alpha y_1+\beta y_2\rangle=\overline{\alpha}\langle Ax,y_1\rangle+\overline{\beta}\langle Ax,y_2\rangle\\&=\overline{\alpha}\langle x,A^*y_1\rangle+\overline{\beta}\langle x,A^*y_2\rangle=\langle x,\alpha A^*y_1+\beta A^*y_2\rangle.\end{aligned}$$

由 x 的任意性知 $A^*(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha A^*y_1+\beta A^*y_2$, 进而由 y_1,y_2 的任意性知 A^* 为线性算子.

(3) 证明 $\|A^*\| = \|A\|$.

由 A^* 的定义与 (1) 知

$$\|A^*y\| = \|z\| = \left\|f_y\right\| \leqslant \|A\|\,\|y\|,$$

从而 $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. 在 (2) 式中取 $y = Ax$, 则

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle \leqslant \|x\|\,\|A^*\|\,\|Ax\|.$$

当 $\|Ax\| \neq 0$ 时, 有 $\|Ax\| \leqslant \|A^*\|\,\|x\|$. 当 $\|Ax\| = 0$ 时, 显然有 $\|Ax\| \leqslant \|A^*x\|$. 因此

$$\|Ax\| \leqslant \|A^*x\|, \quad x \in X,$$

故 $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. 综上, $\|A^*\| = \|A\|$.

(4) 证明 A^* 的唯一性.

算子 $A^* \in \mathscr{B}(Y, X)$ 满足

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad x \in X, y \in Y.$$

若另有算子 $B \in \mathscr{B}(Y, X)$ 满足

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle, \quad x \in X, y \in Y,$$

则

$$\langle x, (B - A^*)y\rangle = 0, x \in X, y \in Y.$$

由 x 的任意性知对任意的 $y \in Y$, 有 $(B - A^*)y = 0$. 由 y 的任意性知 $B - A^* = 0$, 即 $B = A^*$.

定义: 设 A 是希尔伯特空间 X 到希尔伯特空间 Y 的有界线性算子, 则称上述定理中的算子 A^* 为 A 的**希尔伯特共轭算子**, 简称**共轭算子**.

性质:

(1) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

(3) $(A^*)^* = A$.

(4) $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$. （由此可知若 $A^*A = 0$, 则 $A = 0$. ）

(5) 当 $X = Y$ 时, $(AB)^* = B^*A^*$.

证明 (1) 任取 $x \in X, y \in Y$, 则

$$\langle x, (A + B)^*y\rangle = \langle (A + B)x, y\rangle = \langle Ax + Bx, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, A^*y + B^*y\rangle.$$

由 x 的任意性知 $(A+B)^*y = A^*y + B^*y = (A^*+B^*)y$, 由 y 的任意性知 $(A+B)^* = A^* + B^*$.

(2) $\langle x, (\alpha A)^*y\rangle = \langle (\alpha A)x, y\rangle = \langle \alpha Ax, y\rangle = \alpha\langle Ax, y\rangle = \alpha\langle x, A^*y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}A^*y\rangle = \langle x, (\overline{\alpha}A^*)y\rangle$.

(3) $\langle x, (A^*)^*y\rangle = \langle A^*x, y\rangle = \overline{\langle y, A^*x\rangle} = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle$.

(4) 由施瓦茨不等式得

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*(Ax)\rangle = \langle x, (A^*A)x\rangle \leqslant \|x\|\,\|A^*A\|\,\|x\| = \|A^*A\|\,\|x\|^2,$$

因此

$$\|Ax\| \leqslant \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}\,\|x\|,$$

故 $\|A\| \leqslant \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$. 又因为

$$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2,$$

故 $\|A^*A\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \|A\|$, 从而 $\|A^*A\|^{\frac{1}{2}} = \|A\|$, 即 $\|A^*A\| = \|A\|^2$. 以 A^* 代 A, 并利用 $(A^*)^* = A$, 得

$$\|AA^*\| = \|(A^*)^*A^*\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2.$$

(5) $\langle x, (AB)^*y\rangle = \langle (AB)x, y\rangle = \langle A(Bx), y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle x, B^*A^*y\rangle$.

注: 实际上, 设 X 与 Y 为内积空间, 映射 $A: X \longrightarrow Y$, $B: Y \longrightarrow X$, 若对任意的 $x \in X, y \in Y$, 有

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle,$$

则 A 与 B 一定是线性算子, 且 $\|A\| = \|B\|$.

证明 任取 $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ 与数 α, β, 则

$$\langle A(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle = \langle \alpha x_1 + \beta x_2, By\rangle = \alpha\langle x_1, By\rangle + \beta\langle x_2, By\rangle = \alpha\langle Ax_1, y\rangle + \beta\langle Ax_2, y\rangle = \langle \alpha Ax_1 + \beta Ax_2, y\rangle.$$

故 A 为线性算子. 同理可得 B 是线性算子. 又因为

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, B(Ax)\rangle \leqslant \|x\|\,\|B(Ax)\| \leqslant \|x\|\,\|B\|\,\|Ax\|.$$

当 $\|Ax\| \neq 0$ 时, 有

$$\|Ax\| \leqslant \|B\|\,\|x\|,$$

当 $\|Ax\| = 0$ 时, 上式显然也成立, 故 $\|A\| \leqslant \|B\|$ (注意当 $\|B\| = +\infty$ 时结论也成立) . 同理可得 $\|B\| \leqslant \|A\|$, 因此

$$\|A\| = \|B\|.$$

3.9 自伴算子、酉算子与正规算子

我们先回顾一下在矩阵理论中的埃尔米特矩阵, 酉矩阵与正规矩阵的概念.

定义: 设 $A = (a_{ij})$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $m \times n$ 矩阵. 将 A 的每个元素取共轭, 再将矩阵转置, 称这样得到的矩阵

$$(\overline{A})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

为矩阵 A 的**共轭转置矩阵**, 记作 A^H.

注: (1) 共轭转置是转置在复数域的推广.

(2) 要得到 A^H, 也可以先转置, 再取共轭, 结果是完全一样的.

(3) 对于矩阵的共轭, 我们有结论: 共轭矩阵的行列式等于行列式的共轭, 即 $|\overline{A}| = \overline{|A|}$.

性质:

(1) $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$. (实际上, 共轭、逆和转置这三种操作与顺序无关)

(2) $(AB)^H = B^H A^H$.

注: 设 $u = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}, v = (v_1, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$, 定义它们的内积为

$$\langle u, v\rangle = v^H u = u_1\overline{v}_1 + \cdots + u_n\overline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v}_i.$$

由此, $\mathbb{C}^n$ 作成了 $\mathbb{C}$ 上的内积空间, 其上的范数为

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u^H u} = \sqrt{\overline{z_1}z_1 + \cdots + \overline{z_n}z_n} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2},$$

其中 $u = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$.

注: 实数域上的内积空间称为**欧氏空间**, n 维欧氏空间同构于 $\mathbb{R}^n$. 复数域上的内积空间称为**酉空间**, n 维酉空间同构于 $\mathbb{C}^n$.

定义: 设 $A = (a_{ij})$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 方阵, 若

$$A^H = A,$$

则称方阵 A 为**埃尔米特 (Hermite) 矩阵** (又称**自共轭矩阵**).

性质: (1) 埃尔米特矩阵是实对称矩阵在复数域的推广.

(2) 埃尔米特矩阵的特征值均为实数.

(3) 埃尔米特矩阵的属于不同特征值的特征向量是彼此正交.

(4) n 阶埃尔米特矩阵必有 n 个线性无关的特征向量.

定义: 设 $A = (a_{ij})$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 方阵, 若

$$A^H A = AA^H,$$

则称 A 为**正规矩阵 (normal matrix)**.

性质: 正规矩阵的属于不同特征值的特征向量彼此正交.

定义: 设 $A = (a_{ij})$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 方阵, 若

$$A^H A = AA^H = E,$$

则称 A 为**酉矩阵 (unitary matrix)**.

性质: (1) 酉矩阵是正交矩阵在复数域的推广.

(2) 酉矩阵的特征值的模为 1.

注: 埃尔米特矩阵与酉矩阵都是正规矩阵, 因此它们的属于不同特征值的特征向量也都是彼此正交的.

下面我们在希尔伯特空间中建立相应的自伴算子、正规算子与酉算子的概念.

定义: 设 X 为希尔伯特空间, $T \in \mathscr{B}(X)$. 若 $T^* = T$, 则称 T 为 X 上的**自伴算子**; 若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 为 X 上的**正规算子**; 若 T 为双射且 $T^* = T^{-1}$, T 为 X 上的**酉算子**.

性质:

(1) 由定义知对自伴算子 T, 有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in X.$$

(2) 自伴算子必为正规算子. 这是因为若 T 是自伴算子, 则 $TT^* = T^2 = T^*T$.

(3) 酉算子必为正规算子. 这是因为若 T 是酉算子, 则

$$TT^* = T^*T = T^{-1}T = I,$$

故 T 正规算子.

设 X 为希尔伯特空间, $T \in \mathscr{B}(X)$, 令

$$A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2\mathrm{i}},$$

容易证明 A, B 为自伴算子, 且 $T = A + \mathrm{i}B$. 分别称 A, B 为算子 T 的**实部**与**虚部**, $T = A + \mathrm{i}B$ 称为算子 T 的**笛卡儿分解**.

4 巴拿赫空间中的基本定理

4.1 泛函延拓定理

定义: 设 X 为实 (复) 线性空间, p 是 X 上的泛函, 若对任意的 $x, y \in X$ 与数 α, 有

(1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,

(2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,

则称 $p(x)$ 为 X 上的**次线性泛函**.

注: 易知 $p(0)=0$. 由 (1) 知 $p(-x)=p(x)$, 由 (2) 知

$$0 = p(0) = p(x-x) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x),$$

故 $p(x) \geqslant 0$. 因此, 次线性泛函与范数相比, 只差如下一点: $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$. 因此, 我们又称次线性泛函为**半范数**.

定理 (哈恩-巴拿赫泛函延拓定理) : 设 X 为实 (复) 线性空间, $p(x)$ 为 X 上的次线性泛函, f 是定义在 X 的子空间 Z 上的线性泛函, 且满足

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in Z,$$

则存在 X 上的线性泛函 $\widetilde{f}$, 它是 f 的延拓, 且满足

$$|\widetilde{f}(x)| \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

上面的定理其实并没有涉及到度量或范数, 下面我们将哈恩-巴拿赫泛函延拓定理应用到赋范线性空间上.

定理: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $f(x)$ 是定义在 X 的子空间 Z 上的连续线性泛函, 则存在 X 上的连续线性泛函 $\widetilde{f}$, 它是 f 的延拓, 且

$$\|\widetilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Z'}.$$

注: 对于 $f \in X'$ 与 $x \in X$, 我们有时候也把 $f(x)$ 写为 $\langle f, x\rangle$.

定理: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, $0 \neq x_0 \in X$, 则存在 $f \in X'$, 使得 $\|f\|=1$ 且 $f(x_0) = \|x_0\|$.

注: (1) 上述定理说明了对任意的 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$, 存在连续线性泛函 f 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 实际上, 令 $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$, 则由上述定理, 存在 $f \in X'$, 使得 $\|f\|=1$ 且 $f(x_1-x_2) = \|x_1-x_2\| \neq 0$, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(2) 上述定理保证了赋范线性空间上有足够多的连续线性泛函. 所谓“足够多”, 是指多到能够分辨空间中不同元素的程度, 也即当 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 必有连续线性泛函 f, 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

推论: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $x_0 \in X$, 若对任意的 $f \in X'$, 均有 $f(x_0)=0$, 则 $x_0 = 0$.

4.2 典范映射、共轭算子与自反空间

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 任意取定 $x \in X$, 定义映射

$$\begin{aligned} J_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R}(\text{或}\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

则泛函 $J_x \in (X')'$. 让 x 取遍 X, 则得到映射

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X'' = (X')' \\ x &\longmapsto J_x \end{aligned}$$

下面我们证明 π 是保距映射 (即证对任意的 $x \in X$, 有 $\|J_x\| = \|x\|$).

任取 $x \in X$, 则对任意的 $f \in X'$, 有

$$\|J_x(f)\| = |f(x)| \leqslant \|f\| \, \|x\|,$$

故 $\|J_x\| \leqslant \|x\|$. 由上节最后一个定理可知对任意的 $0 \neq x \in X$, 存在 $f \in X'$, 使得 $\|f\| = 1$ 且 $f(x) = \|x\|$, 从而

$$\|x\| = f(x) = J_x(f) \leqslant \|J_x\| \, \|f\| = \|J_x\|,$$

因此 $\|J_x\| \geqslant \|x\|$. 当 $x = 0$ 时, 显然有 $\|J_x\| \geqslant \|x\|$. 综上, $\|J_x\| = \|x\|$, 即 π 为保距映射. 我们称如此定义的映射 π 为 X 到 X'' 的**典范映射**.

注: 因为典范映射 $\pi : X \longrightarrow X''$ 为保距算子, 因此 X 同构于 X'' 的子空间 $\mathscr{R}(\pi)$, 从而我们可以把 X 视为 X'' 的赋范线性子空间.

设 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, 定义映射

$$\begin{aligned} T^\times : Y' &\longrightarrow X' \\ g &\longmapsto gT \end{aligned}$$

注: 映射 $T^\times$ 是定义良好的. 实际上, 对任意的 $g \in Y'$, 易知 gT 为线性泛函, 又因为

$$|(gT)(x)| = |g(Tx)| \leqslant \|g\| \, \|Tx\| \leqslant \|g\| \, \|T\| \, \|x\|,$$

故 gT 为有界线性泛函, 也即 $gT \in X'$.

定义: 称按如上方式定义的算子 $T^\times : Y' \longrightarrow X'$ 为有界线性算子 $T : X \longrightarrow Y$ 的**共轭算子**.

注: 与共轭算子 $T^\times$ 相对应的是转置矩阵.

定理: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, 若 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 则 $T^{\times}\in\mathscr{B}(Y',X')$, 且

$$\|T\|=\|T^{\times}\|.$$

性质:

(1) $(A+B)^{\times}=A^{\times}+B^{\times}$.

(2) $(\alpha A)^{\times}=\alpha A^{\times}$.

(3) $(AB)^{\times}=B^{\times}A^{\times}$.

注: 在 §3.8 中我们定义过希尔伯特空间中的希尔伯特共轭算子 (简称共轭算子). 需要注意的是, 即使在希尔伯特空间中, 本节所学的共轭算子 $T^{\times}$ 与希尔伯特共轭算子 T^* 也是不同的 (具体细节参看本节末尾的注记). 但是, 由于习惯上的原因, 人们往往都写作 T^*, 读者可以视情况自动加以区别.

注: 共轭算子 T^* 与矩阵的共轭转置相对应, 具有性质 $(\alpha A)^*=\overline{\alpha}A^*$. 共轭算子 $T^{\times}$ 与矩阵的转置相对应, 具有性质 $(\alpha A)^{\times}=\alpha A^{\times}$, 我们可以将它们进行对比, 并以此加深理解与记忆.

命题: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 则下图交换, 其中 π_X,π_Y 为典范映射, $T^{**}=(T^*)^*$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X'' \arrow[r, "T^{**}"] & Y''
\end{tikzcd}$$

证明 任取 $x\in X, f\in Y'$, 则

$$[(T^{**}\pi_X)(x)](f)=[T^{**}(\pi_X(x))](f)=(T^{**}J_x)(f)=(J_xT^*)(f)=J_x(T^*f)=(T^*f)(x)=(fT)(x)=f(Tx),$$
$$[(\pi_YT)(x)](f)=[\pi_Y(Tx)](f)=J_{Tx}(f)=f(Tx).$$

因此对任意的 $x\in X$, 有

$$T^{**}\pi_X(x)=(\pi_YT)(x),$$

从而

$$T^{**}\pi_X=\pi_YT.$$

定义: 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 若 $X=X''$(也即典范映射 π 为满射), 则称 X 为**自反空间**.

注: 因为 $X''=(X')'$ 是巴拿赫空间, 因此自反空间必为巴拿赫空间.

例 希尔伯特空间必为自反空间. (注意到希尔伯特空间 X 是自同构的, $X=X'$)

例 有限维赋范线性空间必为自反空间. (注意到典范映射保距, 因此为单射, 而有限维线性空间中单射等价于满射、双射)

注记: 现在我们来探究一下共轭算子 T^* 与 $T^\times$ 的区别与联系. 设 H 为希尔伯特空间, 由里斯定理, 对任意的 $f \in H'$, 存在唯一的 $z \in H$, 使得 $f(x) = \langle x, z \rangle, x \in H$. 令 $A(f) = z$, 称如此定义的映射 $A : H' \longrightarrow H$ 为由里斯定理诱导的映射, 它满足

$$f(x) = \langle x, A(f) \rangle, \quad x \in H.$$

设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_1), (Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 为两个希尔伯特空间, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, 映射

$$\begin{aligned} A_1 : X' &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto A_1(f) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} A_2 : Y' &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto A_2(f) \end{aligned}$$

是由里斯定理诱导的映射.

对任意的 $f \in Y'$, 由共轭算子 $T^* : Y \longrightarrow X$ 的定义有

$$\langle x, T^*(A_2(f)) \rangle_1 = \langle Tx, A_2(f) \rangle_2 = f(Tx), \quad x \in X.$$

对任意的 $f \in Y'$, 由共轭算子 $T^\times : Y' \longrightarrow X'$ 的定义有

$$\left\langle x, A_1(T^\times f) \right\rangle_1 = (T^\times f)(x) = (fT)(x) = f(Tx), \quad x \in X.$$

因此, 对任意的 $f \in Y'$, 对任意的 $x \in X$, 有

$$\langle x, T^*(A_2(f)) \rangle_1 = \left\langle x, A_1(T^\times f) \right\rangle_1,$$

故 $T^*(A_2(f)) = A_1(T^\times f)$, 也即

$$(T^* A_2)(f) = (A_1 T^\times)(f), \quad f \in Y',$$

从而

$$T^* A_2 = A_1 T^\times.$$

由上述讨论可知, 对于希尔伯特空间 X, Y 与 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, 下图交换, 其中 A_1, A_2 为由里斯定理诱导的映射. (最上面那根箭头 $T : X \longrightarrow Y$ 是为了便于理解, 但是作为交换图时此箭头应该忽略不看)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "T"] & Y \arrow[l, shift left, "T^*"] \\
X' \arrow[u, "A_1"] & Y' \arrow[l, "T^\times"'] \arrow[u, "A_2"']
\end{tikzcd}
$$

4.3 纲定理与一致有界性定理

本节将给出巴拿赫 (Banach) 和斯坦因豪斯 (Steinhaus) 在 1927 年给出的一致有界性原理, 它是巴拿赫空间理论的基石之一.

定义: 设 (X, d) 为度量空间, M 为 X 的子集, 若 $\overline{M}$ 没有内点, 即 $\operatorname{int}(\overline{M}) = \varnothing$, 则称 M 为 (X, d) 中的**疏朗集** (或**无处稠密集**).

定义: 设 (X, d) 为度量空间, M 为 X 的子集, 若 M 是 (X, d) 中至多可数个疏朗集的并集, 则称 M 为**第一纲集**, 否则称为**第二纲集**.

例 度量空间 $(\mathbb{R}, d)$ 中, 任意有限集都是无处稠密的, 因此 $\mathbb{R}$ 中任意可数集都是第一纲集. 这里 $d(x, y) = |x - y|$ 为通常度量.

定理 (贝尔纲定理) : 非空的完备度量空间必为第二纲集.

注: 上述定理的逆是不对的, 存在不完备的度量空间为第二纲集.

由贝尔纲定理我们可以得到下面的一致有界性定理.

定理 (一致有界性定理/共鸣定理) : 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $\{T_n\} \subseteq \mathscr{B}(X, Y)$. 若对任意的 $x \in X$, 存在常数 $C_x > 0$, 使得

$$
\|T_n x\| \leqslant C_x, \quad n = 1, 2, \cdots ,
$$

则存在常数 $C > 0$, 使得

$$
\|T_n\| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \cdots .
$$

一致有界性定理中 $(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间这一条件是必不可少的.

注: 上述定理的逆否命题为: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间, $(Y, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $\{T_n\} \subseteq \mathscr{B}(X, Y)$. 若

$$
\sup_i \|T_i\| = +\infty,
$$

则存在 $x_0 \in X$, 使得 $\sup\limits_i \|T_i x_0\| = +\infty$. 我们把这里的 x_0 称为**共鸣点** (因此上述定理也叫共鸣定理) .

推论: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间, $\{f_n\} \subseteq X'$. 若对任意的 $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ 有界, 则 $\{f_n\}$ 一致有界.

证明 将共鸣定理中的 Y 取为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 即可.

4.4 强收敛、弱收敛与一致收敛

定义: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $\{x_n\} \subseteq X$.

(1) 若存在 $x \in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

则称点列 $\{x_n\}$ **强收敛**于 x, 记作 $x_n \to x$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. (实际上, 强收敛就是我们之前一直在使用的依范数收敛, 只是现在为了区别于其他收敛, 所以起了另外的名字)

(2) 若存在 $x \in X$, 对任意的 $f \in X'$, 有

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0,$$

则称点列 $\{x_n\}$ **弱收敛**于 x, 记作 $x_n \rightharpoonup x$ 或 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

性质 (强收敛):

(1) 强收敛列的极限是唯一的.

(2) $\{x_n\}$ 强收敛于 $x \Longrightarrow \{x_n\}$ 弱收敛于 x.

(3) 有限维赋范线性空间中强收敛等价于弱收敛.

证明 (1) 前面已证.

(2)

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n - x)| = \lim_{n\to\infty} \|f\| \, \|x_n - x\| = \|f\| \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \|f\| \cdot 0 = 0.$$

例 在 l^2 中, 取 $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1\text{个}}, 1, 0, \cdots)$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $\|e_n\| = 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 故 $\{e_n\}$ 不强收敛于 0. 但是, 任取 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in (l^2)' = l^2$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 < +\infty$. 由里斯定理,

$$f_y(e_n) = \langle e_n, y \rangle = \eta_n \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} |f_y(e_n) - f(0)| = \lim_{n\to\infty} |f_y(e_n)| = 0,$$

故 $\{e_n\}$ 弱收敛于 0.

性质 (弱收敛):

(1) 弱收敛列的极限是唯一的.

(2) 弱收敛列 $\{x_n\}$ 为有界集.

证明 (1) 假设另有 x' 使得 $x_n \rightharpoonup x'$, 则

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x')| = 0,$$

从而

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x')| \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty),$$

注意到 $f(x) - f(x')$ 与 n 无关, 故 $f(x) = f(x')$, 也即

$$f(x - x') = 0\,, \quad \text{对任意的}\ f \in X'.$$

由 §4.1 的最后一个推论可知 $x - x' = 0$, 即 $x = x'$.

(2) 任取 $f \in X'$, 由于数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限为 $f(x)$, 故数列 $\{f(x_n)\}$ 有界, 即

$$\sup_n |f(x_n)| < +\infty,$$

也即

$$\sup_n |J_{x_n}(f)| < +\infty.$$

注意到 $J_{x_n} \in \mathscr{B}(X', \mathbb{R}), n = 1, 2, \cdots$ (这里的 $\mathbb{R}$ 可换为 $\mathbb{C}$), 而 X' 为巴拿赫空间, 从而由一致有界性定理可知

$$\sup_n \left\|J_{x_n}\right\| < +\infty.$$

由于 $\|x_n\| = \left\|J_{x_n}\right\|\,(n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$\sup_n \|x_n\| < +\infty.$$

定义: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, $\{f_n\} \subseteq X'$, 若存在 $f \in X'$, 对任意的 $x \in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

则称 $\{f_n\}$ **弱*收敛**于 f, 记作 $w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

性质 (弱*收敛) :

(1) 弱*收敛列的极限是唯一的.

(2) $\{f_n\}$ 弱收敛于 $f \Longrightarrow \{f_n\}$ 弱*收敛于 f.

(3) 若 X 为巴拿赫空间, 则弱*收敛序列 $\{f_n\}$ 有界.

(4) 设 X 为自反空间, 则 X' 中的弱收敛等价于弱*收敛.

证明 (1) 设 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f 与 g, 则对任意的 $x \in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - g(x)| = 0.$$

从而

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - g(x)| \longrightarrow 0\ (n \longrightarrow \infty),$$

故 $f(x) = g(x)$, $x \in X$, 即 $f = g$.

(2) 设 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f, 即对任意的 $F \in X''$, 有

$$\lim_{n\to\infty} |F(f_n) - F(f)| = 0.$$

任取 $x \in X$, 则 $J_x \in X''$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} |J_x(f_n) - J_x(f)| = 0,$$

也即

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

故 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 f.

(3) 设 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 f, 则对任意的 $x \in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

也即

$$\lim_{n\to\infty} |(f_n - f)(x)| = 0,$$

故

$$\sup_n |(f_n - f)(x)| < +\infty, \quad x \in X.$$

由一致有界性定理可得

$$\sup_n \|f_n - f\| < +\infty,$$

故 $\{f_n - f\}$ 为有界集, 从而 $\{f_n\} = \{(f_n - f) + f\}$ 为有界集.

(4) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为自反空间, 则 $X=X''$. 设 $\{f_n\}\subseteq X'$, $f\in X'$, 则

$$\begin{aligned}\{f_n\}\text{弱收敛于 }f &\Longleftrightarrow \forall F\in X'',\ \lim_{n\to\infty}|F(f_n)-F(f)|=0\\ &\Longleftrightarrow \forall x\in X,\ \lim_{n\to\infty}|J_x(f_n)-J_x(f)|=0\\ &\Longleftrightarrow \forall x\in X,\ \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0\\ &\Longleftrightarrow \{f_n\}\text{弱}^*\text{收敛于 }f.\end{aligned}$$

(当 X 不是自反空间时, 上面第二个 "$\Longleftrightarrow$" 变为 "$\Longrightarrow$", 性质 (4) 就变为性质 (2).)

定义: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个赋范线性空间, $\{T_n\}\subseteq\mathscr{B}(X,Y)$, $T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

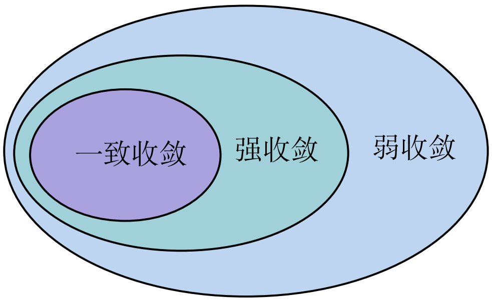
(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$, 则称 $\{T_n\}$ **一致收敛**于 T.

(2) 若对任意的 $x\in X$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx-Tx\|=0$, 则称 $\{T_n\}$ **强收敛**于 T.

(3) 若对任意的 $x\in X$, 对任意的 $f\in Y'$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(T_nx)-f(Tx)|=0$, 则称 $\{T_n\}$ **弱收敛**于 T.

性质: (1) 有界线性算子列的一致收敛, 强收敛, 弱收敛的极限都是唯一的.

(2) 对于有界线性算子列 $\{T_n\}$, 一致收敛 $\Longrightarrow$ 强收敛 $\Longrightarrow$ 弱收敛.



对于强收敛, 我们有以下结论.

定理: 设 $(X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|)$ 为两个巴拿赫空间, $\{T_n\}\subseteq\mathscr{B}(X,Y)$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛的充要条件为:

(1) $\{\|T_n\|\}$ 有界.

(2) 对 X 的某稠密子集 D 中的每个 x, $\{T_nx\}$ 均收敛.

将上述定理用于泛函的情形, 则有

定理: 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间, $\{f_n\}\subseteq X'$, 则 $\{f_n\}$ 弱*收敛的充要条件为

(1) $\{\|f_n\|\}$ 有界.

(2) 对 X 的某稠密子集 D 中的每个 x, $\{f_n(x)\}$ 收敛.

4.5 开映射定理与逆算子定理

定义: 设 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ 为两个度量空间, 映射 $T:X\to Y$, 若 T 将 X 中的任意开集映为 Y 中的开集, 则称 T 为**开映射 (open mapping)** .

注: 我们曾经学过 $T:X\to Y$ 为连续映射当且仅当 Y 中任意开集的原像是 X 中的开集, 而开映射要求任意开集的像为开集, 二者是不同的.

引理: 设 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ 为两个巴拿赫空间, 映射 $T : X \to Y$ 为满射, $B_X(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ 为 X 中以 0 为心的单位开球, 则存在 Y 中以 0 为心的开球 $B_Y(0,r)$, 使得

$$B_Y(0,r) \subseteq T(B_X(0,1)),$$

其中 $r > 0$.

定理 (开映射定理) : 设 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ 为两个巴拿赫空间, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. 若 T 为满射, 则 T 为开映射.

逆算子定理是开映射定理的一个推论.

定理 (逆算子定理) : 设 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ 为两个巴拿赫空间, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. 若 T 为双射, 则 $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$.

思路 $T : X \to Y$ 是满射保证了开集的像为开集, 故此时只要 T^{-1} 存在 (T 为双射保证了这一点), 那么 T^{-1} 就保证了开集的原像是开集, 从而 T^{-1} 连续.

推论: 设 $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ 均为巴拿赫空间, 若存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|x\|_2 \leqslant c\,\|x\|_1, \quad x \in X,$$

则存在常数 $c' > 0$, 使得

$$c'\,\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2, \quad x \in X.$$

即是说, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 为等价范数.

注: 我们曾经学过, 有限维赋范线性空间上的任意两种范数都是等价的. 上述推论告诉我们, 对于巴拿赫空间上的两种范数, 只要它们单边有界, 则它们等价.

4.6 闭图像定理

本节将要学习的闭图像定理是逆算子定理的推论.

注: 即是说开映射定理 $\Longrightarrow$ 逆算子定理 $\Longrightarrow$ 闭图像定理.

设 $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ 为两个赋范线性空间, 定义 $X \times Y$ 中的加法与数乘为

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ a(x,y) = (ax, ay),\end{gathered}$$

则 $X \times Y$ 成为一个线性空间. 定义 $X \times Y$ 中的范数为

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad (x,y) \in X \times Y,$$

则 $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ 成为赋范线性空间.

性质: 若 $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ 均为巴拿赫空间, 则 $(X\times Y,\|\cdot\|_{X\times Y})$ 也为巴拿赫空间.

定义: 设 $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ 为两个赋范线性空间, 映射 $T:X\to Y$ 为线性算子, 则称

$$G(T)=\{(x,Tx)\in X\times Y:x\in X\}$$

为算子 T 的**图像 (graph)**. 若 $G(T)\subseteq X\times Y$ 为 $(X\times Y,\|\cdot\|_{X\times Y})$ 中的闭集, 则称 T 为**闭算子**.

注: 按定义, 要证明线性算子 T 为闭算子, 就是要证明 $G(T)$ 中任意收敛点列的极限仍在 $G(T)$ 中, 即是说要证明: 若点列 $\{(x_n,Tx_n)\}\subseteq G(T)$ 且 $(x_n,Tx_n)\longrightarrow(x_0,Tx_0)$, 则 $(x_0,Tx_0)\in G(T)$.

定理 (闭图像定理) : 设 $(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$ 为两个巴拿赫空间, 映射 $T:X\to Y$. 若 T 为闭线性算子, 则 T 为有界线性算子.

证明 作算子

$$\begin{aligned}P:\ G(T)&\longrightarrow X\\(x,Tx)&\longmapsto x\end{aligned}$$

易知 P 为线性算子且为双射. 由于

$$\|P(x,Tx)\|_X=\|x\|_X\leqslant\|x\|_X+\|Tx\|_Y=\|(x,Tx)\|_{X\times Y}\,,$$

故 P 为有界线性算子. 由逆算子定理可知

$$\begin{aligned}P^{-1}:\ X&\longrightarrow G(T)\\x&\longmapsto(x,Tx)\end{aligned}$$

也为有界线性算子, 从而对任意的 $x\in X$,

$$\|Tx\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|=\left\|P^{-1}x\right\|\leqslant\left\|P^{-1}\right\|\|x\|\,,$$

故 T 为有界线性算子.

5 附录

常用记号与相应度量/范数:

(1) l^∞: 有界数列全体. 常用度量为 $d(x,y)=\sup\limits_i|x_i-y_i|$, 且 (l^∞,d) 完备.

(2) $C[a,b]$: 区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体. 常用度量为 $d(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$, 且 $(C[a,b],d)$ 完备. (需要注意的是, $C[a,b]$ 按照度量 $d'(x,y)=\displaystyle\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t$ 不是完备的.)

(3) l^p: p 次收敛数列空间, 即 $l^p = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}$, 范数为 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

(4) $L^p[a, b]$: p 方可积函数空间, 范数为 $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$.

注意:

(1) 度量空间 (X, d) 中集合的开闭性与环境空间 X 和度量 d 均有关, 而集合的紧性只与度量 d 有关, 与环境空间 X 无关.