目录

1 复数与复变函数

1.1 复数

1.1.1 基本概念

定义: 令 $\mathrm{i}^2=-1$, 称 i 为虚数单位. 形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**, 其中 $x\in\mathbf{R}$ 称为 z 的**实部**, 记作 $\operatorname{Re} z$, $y\in\mathbf{R}$ 称为 z 的**虚部**, 记作 $\operatorname{Im} z$.

定义: 若复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的实部与实部, 虚部与虚部分别相等, 则称复数 z_1 与 z_2 **相等**.

定义: 设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 称复数 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**.

易知共轭是相互的, 即若 z_1 是 z_2 的共轭复数, 则 z_2 也是 z_1 的共轭复数.

对复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 定义它们的加法与减法为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2).$$

定义它们的乘法为按多项式乘法法则相乘, 再把其中的 i^2 换为 -1, 即

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).$$

定义它们的除法 $(z_2\neq 0)$ 为分子分母同时乘以 z_2 的共轭复数, 即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

定义: 全体复数按上述运算作成的集合称为**复数域**, 记作 $\mathbf{C}$.

定义: 设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 称 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$ 为 z 的**模**.

全体复数与复平面上的向量一一对应, z 的模就是对应向量的模. 由此易得三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\quad(\text{三角形两边之和大于第三边}).$$

此外, 还有不等式

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|\quad(\text{三角形两边之差小于第三边}).$$

易知 $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 的距离, 即

$$|z_1-z_2|=d(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

定义: 我们称实轴正向到非零向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 之间的夹角 θ 为 z 的**辐角**, 记作 $\operatorname{Arg} z$.

对复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的辐角 θ, 当 $x\neq 0$ 时, 有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$. 易知 z 的辐角有无穷多个, 我们称满足

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

的辐角 $\arg z$ 为 z 的**主辐角**. 辐角 $\operatorname{Arg} z$ 与主辐角 $\arg z$ 有如下关系:

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

注: 当 $z=0$ 时, 辐角无意义.

我们可以利用模 r 与辐角 θ 来表示非零复数 z, 即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

当 $r=1$ 时, $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 称为**单位复数**. 此外, 我们有**欧拉公式**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

由此, 我们得到复数的三种表示形式:

(1) 代数形式: $z=x+\mathrm{i}y$.

(2) 三角形式: $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

(3) 指数形式: $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

我们需要在不同的场合灵活选用不同的形式, 以方便我们处理问题.

利用复数的指数形式, 我们得到

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

因此, 两复数相乘相当于模长相乘, 辐角相加; 两复数相除相当于模长相除, 辐角相减. 特别地, $\mathrm{i}z$ 相当于将 z 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$. 此外,

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2,\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2.$$

1.1.2 复数的矩阵表示

复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 可以表示为矩阵 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

实际上, 记

$$\mathbb{M}=\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{2\times 2}\ \middle|\ a,b\in \mathbf{R}\right\},$$

则 $\varphi:\mathbf{C}\to\mathbb{M}$ 是双射.

1.1.3 复数的乘幂与方根

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\neq 0$, n 为正整数, 则

$$\begin{aligned} z^n &= r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\\ &= r^n(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n \end{aligned}$$

因为 $z\neq 0$, 故 $r\neq 0$, 从而得到**棣莫弗公式**

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

设 $z\neq 0$, 下面我们解方程 $w^n=z$. 令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

从而 $\rho=\sqrt[n]{r}$ (取算数根) , $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi-\theta)}=1$, 故 $n\varphi-\theta=2k\pi$, 从而

$$\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

注意到不同的 φ 之间可以相差 $2k\pi$, 因此实际上 k 只需取 $0,1,\cdots,n-1$. 综上,

$$w=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}(\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

记 $w_0=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$, 则 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}w_0$, $k=0,1,\cdots,n-1$. 即是说, z 的 n 个 n 次方根实际上就是将 w_0 沿原点逆时针旋转 $0,\dfrac{2\pi}{n},\dfrac{4\pi}{n},\cdots,\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

1.1.4 共轭复数

设 $z=x+\mathrm{i}y$, 它的共轭复数为 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$. 易知

(1) $|\overline{z}|=|z|$, $\operatorname{Arg}\overline{z}=-\operatorname{Arg}z$.

(2) $\overline{(\overline{z})}=z$.

(3) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(4) $\overline{z}z=|z|^2$, $x=\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

(5) 设 $R(z_1, z_2, \cdots)$ 是关于 $z_1, z_2, \cdots$ 的任一有理运算, 则 $\overline{R(z_1, z_2, \cdots)} = R(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots)$.
灵活运用这些公式会给我们解决问题带来极大的方便.

1.2 复平面上的点集

1.2.1 一些点集拓扑知识

定义: 称 $N_\rho(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \rho\}$ 为复平面上以 z_0 为中心, ρ 为半径的**邻域**, 简称 z_0 的 ρ 邻域. 称 $N_\rho(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 为复平面上以 z_0 为中心, ρ 为半径的**去心邻域**, 简称 z_0 的去心 ρ 邻域.

定义: 设 E 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的点集, $z_0 \in \mathbf{C}$. 若存在 z_0 的一个邻域 $N_\rho(z_0)$ 使得 $N_\rho(z_0) \subseteq E$, 则称 z_0 为 E 的**内点**. 若存在 z_0 的一个邻域 $N_\rho(z_0)$ 使得 $N_\rho(z_0) \cap E = \varnothing$, 则称 z_0 为 E 的**外点**. 若 z_0 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点, 则称 z_0 为 E 的**边界点**.

定义: E 的全体内点所成集合称为 E 的**内部** (interior), 记作 $\mathrm{int}(E)$. E 的全体外点所成集合称为 E 的**外部** (exterior), 记作 $\mathrm{ext}(E)$. E 的全体边界点所成集合称为 E 的**边界**, 记作 ∂E.

定义: 设 E 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的点集, $z_0 \in \mathbf{C}$. 若 z_0 的任意邻域内都含有 E 中无穷多个点, 则称 z_0 为 E 的**聚点**. E 的全体聚点所成集合称为 E 的**导集**, 记作 E'.

定义: 设 E 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的点集, 若 E 的每个聚点都属于 E, 即 $E' \subseteq E$, 则称 E 为**闭集**. 若 E 中的每个点都是 E 的内点, 则称 E 为**开集**.

定义: 设 E 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的点集, 若存在正数 M, 对任意的 $z \in E$, 有 $|f(z)| \leqslant M$, 则称 E 为**有界集**, 否则称 E 是**无界集**.

1.2.2 区域与若尔当曲线

定义: 设 E 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的点集, 若 E 中任意两点可用全在 E 中的折线连接起来, 则称 E 是**连通集**.

定义: 复平面 $\mathbf{C}$ 上的非空连通开集称为一个**区域**.

定义: 设 $x(t), y(t)$ 是关于实变量 t 的两个实值连续函数, 若由方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

或方程

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

所决定的曲线 C 没有自交点, 则称 C 为**简单曲线**或**若尔当 (Jordan) 曲线**.

定理 (若尔当定理) : 任一简单闭曲线 C 将复平面唯一地分为三个部分 $C, I(C), E(C)$, 且满足:

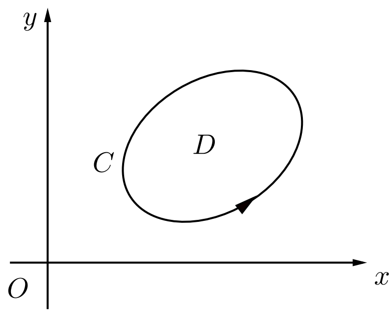
(1) $C, I(C), E(C)$ 互不相交.

(2) $I(C)$ 是一个有界区域 (称为 C 的内部).

(3) $E(C)$ 是一个无界区域 (称为 C 的外部).

(4) 若简单折线 L 的一个端点属于 $I(C)$, 另一个端点属于 $E(C)$, 则折线 L 必与 C 相交.

设简单闭曲线 C 所围区域为 D, 我们规定 C 的正方向为: 当人沿区域 D 的边界行走时, 区域 D 总在人的左边.



1.3 复变函数

1.3.1 复变函数的极限与连续

定义: 定义域、值域为复数集的函数称为**复变函数**.

需要注意的是, 复变函数可以是单值的, 也可以是多值的.

例 $f(z) = |z|, g(z) = \overline{z}, h(z) = z^2$ 都是单值复变函数.

例 $f(z) = \sqrt[n]{z}, g(z) = \operatorname{Arg} z$ 均为多值复变函数.

今后若无特别说明, 所提到的函数均值单值函数.

设 $z = x + \mathrm{i}y$, $f(z) = u + \mathrm{i}v$, 则 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 均为 x, y 的二元函数, 即

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

同理, 若使用复数的三角形式或指数形式, 则

$$f(z) = P(r, \theta) + \mathrm{i}Q(r, \theta).$$

定义: 设函数 $f(z)$ 定义于 E 上, A 为一给定的复数. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 且 $z \in E$ 时, 有

$$|f(z) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(z)$ 沿 E 在 z_0 处有极限 A, 记作

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} f(z) = A.$$

定理: 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义于 E 上, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为 E 的聚点, 则

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=a+\mathrm{i}b \Longleftrightarrow \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} u(x,y)=a,\ \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} v(x,y)=b.$$

定义: 设函数 $f(z)$ 定义于 E 上, $z_0\in E$ 为 E 的聚点. 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|z-z_0|<\delta$ 且 $z\in E$ 时, 有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 沿 E 在 z_0 处连续.

例 函数 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}(z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时极限不存在.

证明 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 其中 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. 当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于 0 时, 极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)=\frac{2k}{1+k^2}$$

随 k 的变化而变化, 故 $u(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的极限不存在, 从而 $f(z)$ 在 $z=0$ 的极限不存在. □

定义: 设函数 $f(z)$ 定义于 E 上, 若 $f(z)$ 在 E 上的每一点都连续, 则称 $f(z)$ 在 E 上连续.

1.3.2 聚点定理, 闭集套定理, 有限覆盖定理

定理 (魏尔斯特拉斯聚点定理) : 任一有界无限点集至少有一个聚点.

定理 (闭集套定理) : 设 $\{F_n\}_1^\infty$ 为复平面中的一列闭集, 至少一个有界且 $F_1\supseteq F_2\supseteq F_3\supseteq\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n)=0$, , 则存在唯一的 $z_0\in F_n$, $n=1,2,\cdots$.

定理 (海涅-博雷尔有限覆盖定理) : 设 E 是复平面 $\mathbf{C}$ 中的有界闭集, 且被一族开集 $\mathcal{A}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 覆盖, 则必可从 $\mathcal{A}$ 中选出有限个开集, 使得这有限个开集也覆盖了 E.

1.4 复球面与无穷远点

我们知道球面上除掉北极点外, 其余点可以与平面上的点一一对应, 对于复平面也是如此. 如果规定复平面上有一个模为无限大的假想点——无穷远点 ∞, 则该点可视为与球面上的北极点相对应. 这样, 我们就把扩充后的复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 与整个球面对应起来了.

我们规定:

(1) ∞ 的实部, 虚部以及辐角都无意义.

(2) $\dfrac{\infty}{a}=\infty,\ \dfrac{a}{\infty}=0,\ \infty\pm a=a\pm\infty=\infty.$

(3) $\infty\pm\infty,\ 0\cdot\infty,\ \dfrac{\infty}{\infty},\ \dfrac{0}{0}$ 无意义.

2 解析函数

2.1 导数、微分与柯西-黎曼方程

2.1.1 导数与微分

定义: 设 $f(z)$ 在 E 上有定义, z_0 为 E 的内点, 若极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在, 则称此极限为 $f(z)$ 在 z_0 处的**导数**, 记作 $f'(z_0)$.

上述定义等价于极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在. 该极限存在要求不论 z 以何种方式趋近 z_0, 对应的极限都存在且相等.

称 $f'(z)\Delta z$ 为 $w=f(z)$ 在点 z 的微分, 记为 $\mathrm{d}w$ 或 $\mathrm{d}f(z)$. 因为 $\mathrm{d}z=\Delta z$, 故

$$\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z,$$

从而

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z},$$

因此, $f(z)$ 在点 z 可导与可微是等价的.

函数 $f(z)$ 在可微点处必然连续, 但连续点处不一定可微, 并且处处连续但处处不可微的函数几乎随手可得, 例如

$$f(z)=\overline{z},\quad g(z)=\mathrm{Re}\,z,\quad h(z)=|z|.$$

例 试证函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处不可微.

证明 对任意的 $z\in\mathbf{C}$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y}.$$

当 Δz 沿实轴趋于 0 时, 极限为 1; 当 Δz 沿虚轴趋于 0 时, 极限为 -1. 因此极限不存在, $f(z)$ 处处不可微. □

例 试证明函数 $f(z)=z^n$ 在复平面上处处可微, 且 $f'(z)=nz^{n-1}$, 其中 n 为正整数.

证明 对任意的 $z\in\mathbf{C}$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{nz^{n-1}\Delta z+\mathrm{C}_n^2z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^n}{\Delta z}=nz^{n-1},$$

从而 $f(z)$ 处处可微, 且 $f'(z)=nz^{n-1}$. □

2.1.2 解析函数

定义: 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微, 则称 $f(z)$ 在**区域 D 内可微**, 并称 $f(z)$ 为区域 D 内的**解析函数** (或全纯函数).

定义: 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内解析, 则称 $f(z)$ 在点 z_0 处解析. 若 $f(z)$ 在包含 $\overline{D}$ 的某区域内解析, 则称 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析.

定义: 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不解析, 但在 z_0 的任一邻域内总有 $f(z)$ 的解析点, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点**.

例 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在复平面上有奇点 $z=0$.

设 $f(z),g(z)$ 在区域 D 内解析, 则它们的和、差、积、商 (分母不为 0) 也在区域 D 内解析, 且有如下求导公式.

(1) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$.

(2) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

(3) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g'(z)]'},\quad g(z)\neq 0$.

此外, 复合函数的求导法则对复变函数也成立.

例 多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在整个复平面上解析.

例 函数 $f(z)=(2z+1)^5$ 在整个复平面上解析, 且 $f'(z)=5(2z+1)^4\cdot 2=10(2z+1)^4$.

2.1.3 柯西-黎曼方程

设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可微, 则有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

设 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$, 又设 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$, 则

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),\quad \Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y).$$

且

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}.$$

令 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$, 则

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right].$$

从而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 存在, 且

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

同理, 令 $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$ 可得 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 存在, 且

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

由 (1)(2) 两式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{C.–R.}$$

上面两式是关于 u,v 的偏微分方程组, 称为**柯西-黎曼方程**, 简称 C.–R. 方程.

由此可知当 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微时, 其导数

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y.$$

由上述讨论可得可微的必要条件.

定理 (可微的必要条件) : 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内有定义, 且 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微, 则

(1) 偏导数 u_x,u_y,v_x,v_y 均在点 (x,y) 处存在.

(2) $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 处满足 C.–R. 方程.

定理 (可微的充要条件) : 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内有定义, 则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微的充要条件为

(1) $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微.

(2) $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 处满足 C.–R. 方程.

推论 (可微的充分条件) : 若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内有定义, 则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微的充分条件为

(1) 偏导数 u_x,u_y,v_x,v_y 均在点 (x,y) 处连续.

(2) $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x,y) 处满足 C.–R. 方程.

定理: 设 $f(z)$ 是定义在区域 D 上的函数, 则 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件为

(1) $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 内可微.

(2) $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内满足 C.–R. 方程.

定理: 设 $f(z)$ 是定义在区域 D 上的函数, 则 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充分条件为

(1) u_x,u_y,v_x,v_y 在区域 D 内连续.

(2) $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内满足 C.–R. 方程.

例　讨论函数 $f(z)=|z|^2$ 在复平面上的解析性.

解　$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$, 故 $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0$. 因此

$$u_x=2x,\quad u_y=2y,$$
$$v_x=0,\quad v_y=0.$$

故 u_x, u_y, v_x, v_y 在全平面上连续. 易知 $f(z)$ 只在点 $(0,0)$ 处满足 C.–R. 方程, 因此 $f(z)$ 只在 $(0,0)$ 处可微, 且 $f'(0) = (u_x + \mathrm{i}v_x)|_{(0,0)} = 0$. 由于 $f(z)$ 只在一个点可微, 无法形成区域, 因此 $f(z)$ 在整个复平面上处处不解析.

例 讨论函数 $f(z) = x^2 - \mathrm{i}y$ 在复平面上的解析性.

解 $u(x,y) = x^2, v(x,y) = -y$, 故

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, \quad u_y = 0, \\ v_x &= 0, \quad v_y = -1. \end{aligned}$$

故 u_x, u_y, v_x, v_y 在全平面上连续. 易知 $f(z)$ 只在直线 $x = -\dfrac{1}{2}$ 上满足 C.–R. 方程, 因此 $f(z)$ 只在直线 $x = -\dfrac{1}{2}$ 上可微, 且

$$f'(z) = (u_x + \mathrm{i}v_x)|_{x=-\frac{1}{2}} = -1.$$

由于 $f(z)$ 只在一条直线上可微, 无法形成区域, 因此 $f(z)$ 在整个复平面上处处不解析.

例 试证 $f(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ 在全平面上解析, 且 $f'(z) = f(z)$.

证明 $u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y, v(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$, 故

$$\begin{aligned} u_x &= \mathrm{e}^x \cos y, \quad u_y = -\mathrm{e}^x \sin y, \\ v_x &= \mathrm{e}^x \sin y, \quad v_y = \mathrm{e}^x \cos y. \end{aligned}$$

故 u_x, u_y, v_x, v_y 在全平面上连续且满足 C.–R. 方程, 因此 $f(z)$ 在全平面上解析, 且

$$f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = f(z).$$

2.1.4 r-θ 形式的柯西-黎曼方程

由

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

可得极坐标下函数 $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$ 的 C.–R. 方程

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r.$$

定理: 设函数 $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, 则 $f(z)$ 可微当且仅当 $u(r,\theta), v(r,\theta)$ 可微且满足 C.–R. 方程

$$u_r = \frac{v_\theta}{r}, \quad u_\theta = -rv_r.$$

并且 $f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$ 的导数为

$$f'(z)=\frac{r}{z}(u_r+\mathrm{i}v_r). \tag{$*$}$$

注: 我们解释一下求导公式 $(*)$ 的由来. 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$f(z)=f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=u(r,\theta)+v(r,\theta).$$

上式对 r 求导得

$$f'(z)\cdot e^{\mathrm{i}\theta}=u_r+\mathrm{i}v_r,$$

从而

$$f'(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}(u_r+\mathrm{i}v_r),$$

也即

$$f'(z)=\frac{r}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}(u_r+\mathrm{i}v_r)=\frac{r}{z}(u_r+\mathrm{i}v_r).$$

2.1.5 用 z 与 $\overline{z}$ 刻画解析性

由 $\begin{cases} z=x+\mathrm{i}y \\ \overline{z}=x-\mathrm{i}y \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2} \end{cases}$, 从而

$$\begin{cases} \mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\overline{z}=\mathrm{d}z-\mathrm{i}\mathrm{d}y \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}z+\mathrm{d}\overline{z}}{2} \\ \mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}z-\mathrm{d}\overline{z}}{2} \end{cases}$$

若复变函数 $f(z)=f(x+\mathrm{i}y)$ 作为实变元 x 与 y 的函数可微, 则其微分为

$$\mathrm{d}f(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(z)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(z)\mathrm{d}y.$$

将前式带入, 得

$$\mathrm{d}f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\overline{z}.$$

据此, 我们可以形式地定义偏微分算子

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

从而

$$\mathrm{d}f(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}.$$

此外, 容易验证 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 具有线性性质, 且满足莱布尼茨法则.

尽管 z 与 $\overline{z}$ 不是独立的, 但是 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 之间的求导关系与规则同 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 之间的求导关系与规则完全类似, 因此在求导的过程中, 可将 z 与 $\overline{z}$ 看作独立变元进行求导运算. 对于解析函数, 我们有下面的定理.

定理: 设 $u(x,y), v(x,y)$ 在区域 D 内具有一阶连续偏导数, 则 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内解析的充要条件为

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0.$$

实际上, 柯西-黎曼方程就等价于 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. 为此, 直接利用算子 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 的定义即可:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + \mathrm{i}v).$$

原始的柯西黎曼方程会使得我们复复分析理论停留在较低的水平上, 无法推广到更一般、更广阔的领域, 这是数学家们所不能接受的. 于是, 我们提出了柯西-黎曼算子来简化柯西-黎曼方程.

注: 因为

$$f(x,y) = f\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}\right)$$

是 z 与 $\overline{z}$ 的函数. 上述定理表明 $f(x,y)$ 要成为解析函数, 必须与 $\overline{z}$ 无关.

2.2 初等解析函数

2.2.1 指数函数

定义: 对任意的 $z \in \mathbf{C}$, 定义

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),$$

称其为**指数函数**, 它在全平面上解析.

定义: 设 $w_0 \in \mathbf{C}$ 为一常数, 若对任意的 z, 恒有 $f(z + w_0) = f(z)$, 则称 w_0 为 $f(z)$ 的**周期**. 若 $f(z)$ 的所有周期都是 w_0 的整数倍, 则称 w_0 为 $f(z)$ 的**基本周期**.

性质:

(1) $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

(2) $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.

(3) $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$(以 $2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期).

(4) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x > 0$ (因此在全平面上 $\mathrm{e}^z \neq 0$) , $\operatorname{Arg}\mathrm{e}^z = y$.

(5) e^{∞} 无意义. (因 z 沿实轴趋于 $+\infty$ 时 $\mathrm{e}^{z}\to+\infty$, z 沿实轴趋于 $-\infty$ 时 $\mathrm{e}^{z}\to 0$)

注: (1) 虽然 $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z}$, 但是 $(\mathrm{e}^{z})'=\mathrm{e}^{z}\neq 0$, 即不满足罗尔中值定理, 因此微分中值定理不能直接推广过来. 但是, 洛必达法则在复平面上仍然成立.

(2) e^{z} 仅仅是一个记号, 并没有幂的含义.

2.2.2 三角函数

在 $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 中令 $x=0$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}&=\cos y+\mathrm{i}\sin y,\\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}&=\cos y-\mathrm{i}\sin y,
\end{aligned}
$$

将上述等式中的 y 换为 z, 等式左边有意义, 右边尚无意义, 据此, 我们有如下定义.

定义: 对任意的 $z\in\mathbf{C}$, 分别称

$$
\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\quad \cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}
$$

为 z 的**正弦函数**与**余弦函数**.

性质:

(1) 当自变量 z 取实数时, $\sin z,\cos z$ 与通常的实正弦、实余弦函数一致.

(2) $\sin z$ 为奇函数, $\cos z$ 为偶函数.

(3) $\sin z,\cos z$ 均为以 2π 为周期的周期函数.

(4) $(\sin z)'=\cos z,(\cos z)'=-\sin z$.

(5) 通常的三角恒等式仍然成立, 例如

$$
\begin{aligned}
&\sin^2 z+\cos^2 z=1.\\
&\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.\\
&\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.
\end{aligned}
$$

(6) 在 $\mathbf{C}$ 内, $\sin z$ 的零点为 $k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. $\cos z$ 的零点为 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(7) 在 $\mathbf{C}$ 内, $\sin z,\cos z$ 均为无界函数.

证明 (6) $\sin z=0\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=1$. 设 $z=\alpha+\mathrm{i}\beta$, 则

$$
\sin z=0\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-2\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\alpha)}=1\Longleftrightarrow \beta=0,2\alpha=2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots
$$

故 $\sin z$ 的零点为 $k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. $\cos z$ 的零点同理可得.

(7) 对任意实数 β, 取 $z=\mathrm{i}\beta$, 则

$$\cos(\mathrm{i}\beta)=\frac{\mathrm{e}^{-\beta}+\mathrm{e}^{\beta}}{2}>\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{2},$$

因此 $\cos z$ 无界. 又取 $z=\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\beta$, 则由 $\sin z=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$ 知

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\beta\right)=\cos(\mathrm{i}\beta)=\frac{\mathrm{e}^{-\beta}+\mathrm{e}^{\beta}}{2}>\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{2},$$

因此 $\sin z$ 无界.

由 $\sin z,\cos z$ 的定义可知 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$, 这是欧拉公式在复数域内的推广.

定义: 分别称

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{1}{\tan z},$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

为 z 的**正切函数, 余切函数, 正割函数, 余割函数**.

2.2.3 双曲三角函数

定义: 分别称

$$\sinh z=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2},\quad \cosh z=\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}$$

为 z 的**双曲正弦函数, 双曲余弦函数**.

定义: 分别称

$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\quad \coth z=\frac{1}{\tanh z},$$
$$\operatorname{sech} z=\frac{1}{\cosh z},\quad \operatorname{csch} z=\frac{1}{\sinh z}$$

为 z 的**双曲正切函数, 双曲余切函数, 双曲正割函数, 双曲余割函数**.

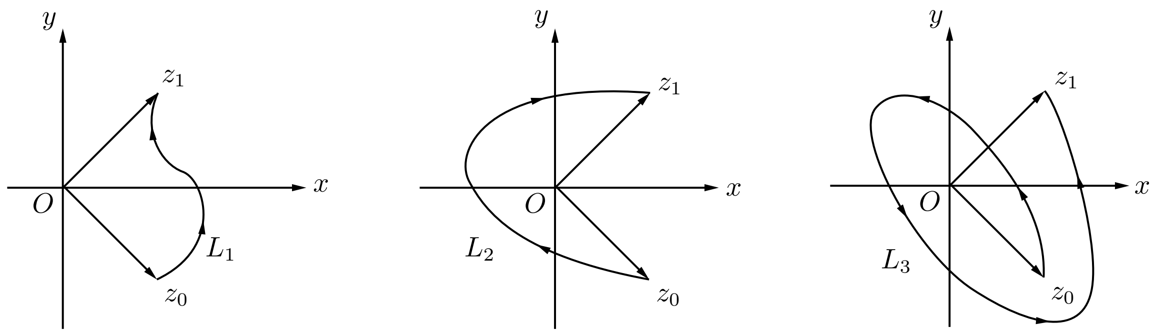
2.3 初等多值函数

2.3.1 辐角函数

我们知道, 任一非零复数 z 都有无穷多个辐角, 因此辐角函数 $w=\operatorname{Arg} z$ 是一个定义在 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上的多值函数.

定义: 设 L 是 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内以 z_0 为起点, z_1 为终点的简单曲线. 当 z 沿 L 从 z_0 连续变动到 z_1 时, 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 所旋转的角称为 $\operatorname{Arg} z$ 在 L 上的改变量, 简称**辐角改变量**, 记作 $\Delta_L\operatorname{Arg} z$.

例 设 $z_0=1-\mathrm{i}, z_1=1+\mathrm{i}$, 以 z_0 为起点, z_1 为终点的简单曲线 L_1,L_2,l_3 及其对应的辐角改变量如图所示.



$\Delta_{L_1}\mathrm{Arg}\, z = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\Delta_{L_2}\mathrm{Arg}\, z = -\dfrac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $\Delta_{L_3}\mathrm{Arg}\, z = \dfrac{5\pi}{2}$

定义: 设 L_1, L_2 为区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内的两条简单曲线. 若 L_1 能够不离开区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 而连续形变到 L_2, 则称曲线 L_1 与 L_2 在 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内是**同伦** (homotopy) 的, 记为 $L_1 \sim L_2$.

当曲线 L 是一个点时, 显然 $\Delta\mathrm{Arg}\, z = 0$. 由于区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内任一简单闭曲线 L 都可以不离开该区域而连续收缩到一个点 (记作 $L \sim 0$) , 从而

$$\Delta_L \mathrm{Arg}\, z = \begin{cases} 0, & 0\text{在 } L \text{ 的外部}, \\ 2\pi, & 0\text{在 } L \text{ 的内部}. \end{cases}$$

2.3.2 根式函数

定义: 规定根式函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 为幂函数 $w = z^n$ 的反函数 ($n \geqslant 1$, n 为正整数) .

当 $z = 0$ 时, $w = \sqrt[n]{z}$ 只取 0 这一个值. 当 $z = \infty$ 时, $w = \sqrt[n]{z}$ 只取 ∞ 这一个值. 当 $z \neq 0, \infty$ 的时候, 由

$$w = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

可知根式函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 是 n 值函数. 出现多值性的原因是当 z 确定后, 辐角并不唯一确定. 我们称

$$w = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

为 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个**单值连续分支函数**, 它们都是区域上的解析函数, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sqrt[n]{z})_k = \frac{1}{n}\frac{(\sqrt[n]{z})_k}{z}.$$

(利用极坐标下的 C.–R. 方程与 $f'(z) = \dfrac{r}{z}(u_r + \mathrm{i}v_r)$ 直接计算即可.)

定义: 设 $f(z)$ 为区域 D 上的多值函数, $z_0 \in \mathbf{C}$ 为复平面上一点. 若自变量 z 绕 z_0 一周后, 多值函数 $f(z)$ 从其一支变到另一支, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**支点**.

函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 以 $z = 0$ 及 $z = \infty$ 为支点.

2.3.3 对数函数

定义: 我们称指数函数的反函数为对数函数, 即若

$$\mathrm{e}^w = z \quad (z \neq 0, \infty),$$

则称 w 为复数 z 的对数, 记为 $w = \mathrm{Ln}\, z$.

由于 $|\mathrm{e}^w|$ 不可能为 0, 故 $z=0$ 时方程无解, 因此在上述定义中, 我们要求 $z \neq 0$. 设 $w = x + \mathrm{i}y$, 当 $z = \infty$ 时, 由等式两边取模可知 $\mathrm{e}^x = +\infty$, 故 $x = +\infty$, 从而 w 只可能是 ∞, 但是 e^∞ 无意义, 因此我们要求 $z \neq \infty$.

下面我们来解方程 $\mathrm{e}^w = z$. 设 $w = x + \mathrm{i}y, z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

由此可知

$$x = \ln r, \quad y = \theta + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

因此 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 是一个无穷多值的函数, 且

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + \mathrm{i}\, \mathrm{Arg}\, z.$$

定义: 设 $\arg z$ 为 z 的主辐角, 我们称

$$\ln z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z$$

为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的**主值 (支)** .

由上述定义可知

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

并记 $\mathrm{Ln}\, z$ 相对应的分支为 $(\ln z)_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 同样利用 C.–R. 方程可知 $(\ln z)_k$ 在区域内是解析的, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z)_k = \frac{1}{z}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

性质:

(1) $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$.

(2) $\mathrm{Ln}\, \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

2.3.4 一般幂函数与一般指数函数

定义: 设 $\alpha \in \mathbf{C}$ 为常数, 称 $w = z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}\, (z \neq 0, \infty)$ 为**一般幂函数**.

由于

$$w = z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln z + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}\mathrm{e}^{\alpha(2k\pi \mathrm{i})},$$

由于 $\mathrm{e}^{\alpha \ln z}$ 是单值的, 故我们可以讨论 $\mathrm{e}^{\alpha(2k\pi \mathrm{i})}$ 的多值性来确定 $w = z^\alpha$ 的多值性.

(1) 当 α 为整数时, $\mathrm{e}^{\alpha(2k\pi \mathrm{i})} = 1$, 此时 $w = z^\alpha$ 是单值的.

(2) 当 $\alpha = \dfrac{q}{p}$ 为既约分数时, $\mathrm{e}^{\alpha(2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi q \mathrm{i}}{p}}$ 仅有 p 个不同的值, 即 $k = 0, 1, \cdots, p-1$ 所对应的值, 此时 $w = z^\alpha$ 为 p 值函数.

(3) 当 α 为无理数或虚数时, $\mathrm{e}^{\alpha(2k\pi \mathrm{i})}$ 对不同的 $k \in \mathbb{Z}$ 均有不同的值, 此时 $w = z^\alpha$ 为无穷多值的函数.

注: 对于上述讨论的 (2), 我们可以换一个角度来理解. 由于 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{p} \cdot q$, 故 $w = z^{\frac{q}{p}}$ 的多值性实际上来源于根式函数 $w = z^{\frac{1}{p}}$ 的多值性, 因此当 $\alpha = \dfrac{q}{p}$ 时, $w = z^\alpha$ 是一个 p 值函数 $(z \neq 0, \infty)$.

定义: 设 $\alpha \in \mathbf{C}, \alpha \neq 0, \infty$, 称 $w = \alpha^z = \mathrm{e}^{z \mathrm{Ln}\, \alpha}$ 为**一般指数函数**.

由于

$$w = \alpha^z = \mathrm{e}^{z \mathrm{Ln}\, \alpha} = \mathrm{e}^{z(\ln \alpha + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{z \ln \alpha}\mathrm{e}^{z(2k\pi \mathrm{i})}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

故 $w = \alpha^z$ 是无穷多值的多值函数, 每一支在复平面上分别解析.

注: 取 $\alpha = \mathrm{e}$, 那么 $w = \mathrm{e}^z$ 也是无穷多值函数, 这似乎与我们最开始所学相矛盾. 实际上, 对于最开始所学的函数 e^z, 我们只取了它的一支 (主值支) 作为定义, 只是为了方便起见, 我们使用了记号 e^z. 若要加以区别, 读者可将最开始所学的指数函数 (即 e^z 的主值支) 记为 $\exp(z)$ 以示区别.

例 求 i^{i}.

解 由

$$\begin{cases} \mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \mathrm{Ln}\, \mathrm{i}}, \\ \mathrm{Ln}\, \mathrm{i} = \ln \mathrm{i} + 2k\pi \mathrm{i}, \\ \ln \mathrm{i} = \ln |\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg \mathrm{i} = \mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

可知 $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

3 复变函数的积分

3.1 基本概念与性质

3.1.1 基本概念

定义: 逐段光滑的简单闭曲线称为**周线**.

对于简单闭曲线 C, 我们在第一章已经规定过逆时针方向为它的正方向, 顺时针方向为负方向.

定义: 设函数 $f(z)$ 在有向曲线

$$C : z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

上有定义, 其中 $z(\alpha), z(\beta)$ 分别为有向曲线 C 的起点与终点. 沿 C 的正方向取分割 $T : \alpha = z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n = \beta$, 将 C 划分为 $L_1, L_2, \cdots, L_n$. 设 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. 在 C 的每一段 L_i 上取一点 $\xi_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$, 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$$

存在且与点 ξ_i 和分割 T 的取法无关, 则称此极限为 $f(z)$ 沿有向曲线 C 的积分, 记作 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

定理 (可积的必要条件) : 若 $f(z)$ 在曲线 C 上可积, 则 $f(z)$ 在曲线 C 上有界.

定理 (可积的充分条件) : 若 $f(z)$ 在曲线 C 上连续, 则 $f(z)$ 在曲线 C 上可积, 且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y. \tag{1}$$

证明　设 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, $\xi_k = \sigma_k + \mathrm{i}\eta_k$, 则 $\Delta z_k = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k$, $f(\xi_k) = u(\sigma_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\sigma_k, \eta_k)$, 则

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [u(\sigma_k, \eta_k) + \mathrm{i}v(\sigma_k, \eta_k)](\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k) \\
&= \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [u(\sigma_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\sigma_k, \eta_k)\Delta y_k] + \mathrm{i}\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [v(\sigma_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\sigma_k, \eta_k)\Delta y_k].
\end{aligned}$$

由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故 $u(x, y), v(x, y)$ 在 C 上连续, 从而上式最后的极限存在, 故积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在, 且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

注: (1) 公式 (1) 在形式上可以看成 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 与 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$ 相乘后得到的.

(2) 上述定理说明复变函数的积分问题可以转化为其实部与虚部的两个二元实变函数的曲线积分问题.

3.1.2　复积分的计算及其性质

定理 (参数曲线法, 变量替换公式) : 设 $f(z)$ 在有向曲线

$$C : z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

上连续, 则积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在, 且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

证明 设在曲线 C 上

$$\begin{aligned} f(z) = f(z(t)) &= u(x(t), y(t)) + \mathrm{i}v(x(t), y(t)) \\ &= u(t) + \mathrm{i}v(t). \end{aligned}$$

由上节定理可知

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \\ &= \int_\alpha^\beta [u(t)x'(t) - v(t)y'(t)]\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta [v(t)x'(t) + u(t)y'(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta [u(t) + \mathrm{i}v(t)][x'(t) + \mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

例 (一个很重要的积分) 证明

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1\text{为整数}. \end{cases}$$

其中 C 是以 a 为圆心, ρ 为半径的圆周.

解 曲线 C 的参数方程为 $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, 即 $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + a$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 从而

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}z.$$

(1) $n = 1$ 时, $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$.

(2) $n \neq 0$ 为整数时,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\rho^{1-n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}\rho^{1-n}\int_0^{2\pi} [\cos(1-n)t + \mathrm{i}\sin(1-n)t]\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1\text{为整数}. \end{cases}$$

复积分的性质:

(1) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$

(2) (积分估值) 设曲线 C 的长度为 L, 且在曲线 C 上, $|f(z)|$ 有上界 M, 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML.$$

注: 数学分析中实函数的积分中值定理不能直接推广到复积分中. 例如 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = 0$, 但是对任意的 $t \in [0, 2\pi]$, 有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(2\pi - 0) \neq 0$.

3.2 柯西积分定理

3.2.1 柯西积分定理

定理 (柯西积分定理) : 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 为 D 内的任意一条周线 (即逐段光滑的简单闭曲线), 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

由柯西积分定理可得

定理: 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 为 D 内的任意一条闭曲线 (不必是简单的), 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

推论: 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内的积分与路径无关, 即对任意的 $z_1, z_2 \in D$,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z$$

只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

3.2.2 柯西积分定理的推广

下面的定理比柯西积分定理更一般, 它是从一个方面推广了的柯西积分定理.

定理: 设 C 为一条周线, D 是 C 所围的区域, 若 $f(z)$ 在区域 D 解析, 在 $\overline{D} = D + C$ 上连续 (即 "连续到 C"), 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

下面的定理是上述定理的推广.

定理: 设 $n+1$ 连通区域 D 的边界为复周线

$$C = C_0 + C_1^- + C_2^- \cdots + C_n^-,$$

若 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在 $\overline{D}=D+C$ 上连续, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0,$$

也即

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

例 设 C 为将点 a 包含在其所围区域内的任一周线, 则

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n\neq 1\text{为整数}. \end{cases}$$

证明 设 C_0 为以 a 为圆心的圆周, 且含于 C 的内部, 则

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_{C_0} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n\neq 1\text{为整数}. \end{cases}$$

例 计算 $\displaystyle\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$, 其中 C 为包含圆周 $|z|=1$ 的任一正向曲线.

解 分别取以 $z=0$, $z=1$ 为圆心的圆周 C_1 与 C_2, 使得 C_1 与 C_2 不相交且所围成的两圆互不包含, 并且 C_1 与 C_2 均在 C 的内部, 则

$$\begin{aligned}\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z&=\int_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z+\int_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z\\ &=\int_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_1} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\int_{C_2} \frac{1}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_2} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z\\ &=2\pi\mathrm{i}+0+0+2\pi\mathrm{i}=4\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

3.2.3 不定积分

对于单连通区域 D 内的解析函数 $f(z)$, 它沿 D 内曲线的积分只与起点和终点有关, 因此变上限积分

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是关于 z 的单值函数, 其中 z_0 为 D 内一定点, $z\in D$ 为动点.

定理: 设 $f(z)$ 为单连通区域 D 内的解析函数, $z_0\in D$, $F(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$, 则 $F(z)$ 在区域 D 内解析, 且

$$F'(z)=f(z).$$

定义: 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续, $\Phi(z)$ 满足 $\Phi'(z)=f(z)$, $z\in D$, 则称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个**不定积分**或**原函数**.

设 $f(z)$ 为单连通区域 D 内的解析函数, 则 $f(z)$ 的任一原函数都具有形式

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi+C,$$

其中 C 为常数. 若令 $z=z_0$, 则可得 $C=\Phi(z_0)$, 从而有 $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\Phi(z)-\Phi(z_0)$.

定理: 设 $f(z)$ 为单连通区域 D 内的解析函数, $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 则对任意的 $z,z_0\in D$, 有

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\Phi(z)-\Phi(z_0).$$

注: 本节所有内容中的条件 "$f(z)$ 在单连通区域 D 内解析" 均可换为 "$f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且在 D 内的积分与路径无关".

例　在单连通区域 $D:-\pi<\arg z<\pi$ 内, $\ln z$ 是 $\dfrac{1}{z}$ 的一个原函数, 又 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在区域 D 内解析, 故

$$\int_{1}^{z}\frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi=\ln z-\ln 1=\ln z,\quad z\in D.$$

3.3　柯西积分公式

3.3.1　柯西积分公式

利用复周线形式的柯西积分定理, 我们可以得到用边界值表示解析函数内部值的一个公式.

定理 (柯西积分公式): 设区域 D 的边界为周线 (或复周线) C, $f(z)$ 在区域 D 内解析, $\overline{D}=D+C$ 上连续, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,\quad z\in D.$$

上述公式称为**柯西积分公式**, 它是解析函数的积分表达式, 因而是我们研究解析函数局部性质的重要工具. 积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$ 称为**柯西积分**. 将柯西积分公式改写为

$$\int_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=2\pi\mathrm{i}f(z),\quad z\in D,$$

借此可以计算某些周线积分 (路径为周线的积分).

注: 柯西积分公式中, 被积函数

$$F(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-z}$$

在区域 D 内只有一个奇点 $\xi=z$. 若被积函数 $F(z)$ 在区域 D 内有两个及以上的奇点, 则不能直接使用柯西积分公式.

作为柯西积分公式的特殊情形, 我们有如下的解析函数的平均值定理.

定理 (解析函数的平均值定理)：$f(z)$ 在圆 $|\xi - z_0| < R$ 内解析, 在 $|\xi - z_0| \leqslant R$ 上连续, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta.$$

即是说, $f(z)$ 在圆心处的值等于它在圆周上的值的算数平均数.

3.3.2 解析函数的无穷可微性

定理: 设区域 D 的边界为周线 (或复周线) C, $f(z)$ 在区域 D 内解析, $\overline{D} = D + C$ 上连续, 则 $f(z)$ 在区域 D 内有各阶导数, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi, \quad z \in D, \quad n = 1, 2, \cdots$$

注: (1) 这是一个用解析函数 $f(z)$ 的边界值表示其各阶导数内部值的积分公式, 可以看成是柯西积分公式形式上地多次求导.

(2) 可以利用上述公式求某些周线积分.

(3) 被积函数 $F(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}$ 在区域 D 内有唯一奇点 $\xi = z$. 若 $F(\xi)$ 在 D 内有两个及以上的奇点, 则不能直接应用它们.

定理 (解析函数的无穷可微性)：若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 具有各阶导数, 且它们也在 D 解析.

由此我们得到刻画解析函数的第二个等价条件.

定理: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件为

(1) u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 内连续.

(2) $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 D 内满足 C.–R. 方程.

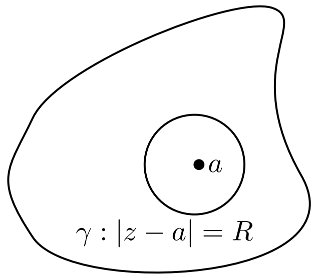
证明 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 故 $f'(z)$ 也在 D 内解析, 从而 $f'(z)$ 在 D 内连续, 故 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 内连续. 其余部分的证明已在前面的学习中得到.

3.3.3 柯西不等式与刘维尔定理

定理 (柯西不等式)：设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $a \in D$, 圆周 $\gamma : |z - a| = R$ 及其内部均含于区域 D, 则

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M(R)}{R^n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中 $M(R) = \max\limits_{|z-a|=R} |f(z)|$.



证明

$$|f^{(n)}(a)| = \left|\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M(R)}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!M(R)}{R^n}, \quad n=1,2,\cdots.$$

注: 柯西不等式是对解析函数各阶导数模的估计式.

定义: 在整个复平面上解析的函数称为**整函数**.

多项式函数, $\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z$ 都是整函数, 当然, 常值函数也是整函数. 应用柯西不等式可以得到如下的定理.

定理 (刘维尔定理) : 有界整函数必为常数.

证明　任取 $a \in \mathbf{C}$, 设 M 为 $|f(z)|$ 的一个上界, 则对任意的 $R>0$, 有 $M(R) = \max\limits_{|z-a|=R}|f(z)| \leqslant M$, 从而当 $n=1$ 时,

$$|f'(a)| \leqslant \frac{M(R)}{R} \leqslant \frac{M}{R}.$$

由于 $\dfrac{M}{R} \to 0\,(R\to+\infty)$, 而 $|f'(a)|$ 与 R 无关, 因此 $|f'(a)|=0$, 即 $f'(a)=0$. 由 a 的任意性知在整个复平面上有 $f'(z)=0$, 故 $f(z)$ 为常值函数.

应用刘维尔定理可以很简洁地证明代数学基本定理.

定理 (代数学基本定理) : n 次多项式 $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,(n \geqslant 1, a_n \neq 0)$ 在复平面内至少一个零点.

证明　假设 $p(z)$ 在复平面内无零点, 则 $\dfrac{1}{p(z)}$ 也在复平面内解析. 下证 $\dfrac{1}{p(z)}$ 有界. 由于

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = \lim_{z\to\infty} z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right) = \infty,$$

故

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)} = 0.$$

从而存在 $R>0$, 当 $|z|>R$ 时,

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqslant 1.$$

由于 $|z| \leqslant R$ 为有界闭集, 且 $f(z)$ 在其上连续, 故存在 $M > 0$, 当 $|z| \leqslant R$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqslant M.$$

从而在整个复平面上有

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqslant M + 1.$$

由刘维尔定理知 $\dfrac{1}{p(z)}$ 为常值函数, 矛盾, 从而假设错误, $p(z)$ 在复平面上必有零点.

3.3.4 莫雷拉定理

下面我们证明柯西积分定理的逆定理——莫雷拉定理.

定理 (莫雷拉定理) : 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 若对 D 内的任一周线 C, 都有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明 由条件知 D 内曲线的积分与路径无关. 令

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则由 §3.2.3 定理可知 $F(z)$ 在 D 内解析, 且

$$F'(z) = f(z).$$

由解析函数的无穷可微性知 $f(z)$ 在 D 内解析.

由此我们得到刻画解析函数的第三个等价定理.

定理: $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件为

(1) $f(z)$ 在 D 内连续.

(2) 对任一自身及其内部均含于 D 的周线 C, 都有 $\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

3.4 调和函数

定义: 算子 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为**拉普拉斯算子**.

定义: 设二元实函数 $H(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 若 $H(x,y)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta H = 0$, 则称 $H(x,y)$ 为区域 D 内的**调和函数**.

定义: 若区域 D 内的两个调和函数 $u(x,y), v(x,y)$ 满足 C.–R. 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

则称 v 为 u 在区域 D 内的**共轭调和函数**.

注: 由定义可知若 v 是 u 的共轭调和函数, 则 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

现在, 我们得到刻画解析函数的又一等价定理.

定理: 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件为 v 是 u 在区域 D 内的共轭调和函数.

证明 ($\Longrightarrow$) $f(z)$ 在区域 D 内满足 C.–R. 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

求二阶偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}. \tag{1}$$

由于解析函数的导函数仍为解析函数, 故 u,v 具有连续的二阶偏导, 从而 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, 因此由 (1) 知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

($\Longleftarrow$) 由于 u,v 在区域 D 内具有二阶连续偏导, 故 u_x,u_y,v_x,v_y 在 D 内连续. 又由共轭调和函数的定义知 u,v 在其余区域 D 内满足 C.–R. 方程, 故 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析.

设 $u(x,y)$ 是单连通区域 D 内的调和函数, 下面我们构造函数 $v(x,y)$, 使得 $u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析. 因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

令 $P=-\dfrac{\partial u}{\partial y},Q=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 由数学分析知 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是全微分, 故可设

$$\mathrm{d}v(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

两端积分得

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C. \tag{$*$}$$

其中 (x_0,y_0) 是 D 内的定点, (x,y) 是 D 内的动点, C 为任意常数. 由数学分析知上述积分与路径

无关, 故可取折线段 $(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$ 进行积分, 从而

$$v(x,y)=\int_{x_0}^{x}-\frac{\partial u}{\partial y}(s,y_0)\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t+C.$$

求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

故 u,v 满足 C.−R. 方程. 又因为 u_x,u_y,v_x,v_y 在 D 内连续, 故 $u+\mathrm{i}y$ 在单连通区域 D 内解析.

注: 设 D 是平面上的单连通区域, $P(x,y),Q(x,y)$ 具有连续偏导数, 则下列条件等价:

(1) 沿 D 内任一分段光滑的简单闭曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

(2) 沿 D 内任一分段光滑的曲线, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关.

(3) 存在可微函数 $U(x,y)$, 使得 $\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

(4) D 内处处成立 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

其中 (2) 与 (3) 的等价性不需要单连通这一条件.

定理: 若 $u(x,y)$ 在单连通区域 D 内调和, 则存在由 $(*)$ 确定的函数 $v(x,y)$, 使得 $u+\mathrm{i}v$ 在单连通区域 D 内解析.

注: (1) 若 D 为多连通区域, 则积分 $(*)$ 可能确定一个多值函数.

(2) 积分 $(*)$ 不必强记, 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v(x,y)&=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y\\&=-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(3) 类似地, 可以得到

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-u_x\mathrm{d}y+C.$$

定理: 调和函数的任意阶偏导也是调和函数.

证明 设 $u(x,y)$ 在区域 D 内调和, 任取 $P_0=(x_0,y_0)\in D$, 设 $U(P_0)$ 为 P_0 的含于区域 D 内的邻域, 则 u 在 $U(P_0)$ 内调和, 因为 $U(P_0)$ 是单连通区域, 故存在 $U(P_0)$ 内的函数 $v(x,y)$, 使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 $U(P_0)$ 内解析. 由解析函数的无穷可微性知 u 的任意阶偏导也是 $U(P_0)$ 内的调和函数. 由 P_0 的任意性知 u 的任意阶偏导是 D 内的调和函数.

4　解析函数的幂级数表示

4.1　复级数

4.1.1　复数项级数

定义: 设复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, 记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ 为其前 n 项部分和, 若存在有限复数 α, 使得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha,$$

则称复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **收敛**于 α, 记作 $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, 并称 α 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的**和**. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 不收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **发散**.

定理: 设 $\alpha_n=x_n+\mathrm{i}y_n$, 则复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛于 $\alpha_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 当且仅当实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 分别收敛于 x_0 与 y_0.

定理: 复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛的充要条件为对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意正整数 p, 有

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}|<\varepsilon.$$

推论: 若复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

推论: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛.

证明　利用三角不等式 $|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}|\leqslant|\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+2}|+\cdots+|\alpha_{n+p}|$ 即可.

注: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 是实级数, 可以对其使用数学分析中的相应结论.

定义: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **绝对收敛**. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **条件收敛**.

定理: 绝对收敛的复级数任意重排各项的次序后, 不改变原级数的绝对收敛性与和.

4.1.2　复函数项级数

定义: 设有各项均定义在点集 E 上复函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$, 记 $S_n(z)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(z)$. 若在 E 上存在函数 $f(z)$, 当 $z\in E$ 时, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上 (逐点) **收敛**于 $f(z)$, 并称 $f(z)$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的和函数.

定义: 设函数 $f(z)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 均定义在点集 E 上. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意的 $z \in E$, 有

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **一致收敛**于 $f(z)$.

注: 逐点收敛的 $N = N(\varepsilon, z)$ 是与点 z 有关的, 而一致收敛的 $N = N(\varepsilon)$ 是与点 z 无关的.

4.1.3 一致收敛的判别法

定理 (一致收敛的柯西准则)：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛的充要条件为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意的 $z \in E$ 与 $p \in \mathbb{N}^+$, 有

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

定理 (魏尔斯特拉斯判别法/优级数判别法)：设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 与收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. 若对任意的 $z \in E$, 有

$$|f_n(z)| \leqslant M_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上绝对收敛且一致收敛.

4.1.4 一致收敛复级数的性质

定理 (连续性)：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上一致收敛于 $f(z)$, 且各项均在 E 上连续, 则和函数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

也在 E 上连续.

定理 (逐项求积)：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在曲线 C 上一致收敛于 $f(z)$, 且各项均在曲线 C 上连续, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)\mathrm{d}z.$$

定义: 设 $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$ 定义于区域 D, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 的任一有界闭子集上一致收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在区域 D 内**内闭一致收敛**.

例 几何级数

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

在圆 $|z|<1$ 内是收敛且内闭一致收敛的, 但不是一致收敛的. (在圆 $|z|\leqslant r(r<1)$ 上是一致收敛的.)

定理 (魏尔斯特拉斯定理, 逐项求导) : 若 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 在区域 D 内解析, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 内闭一致收敛于 $f(z)$, 则

(1) $f(z)$ 在区域 D 内解析.

(2) $f^{(p)}(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z), \quad z\in D,\ p=1,2,\cdots.$

4.2 幂级数

4.2.1 幂级数的收敛性

幂级数是最简单的解析函数项级数, 其收敛范围十分规范, 是一个圆.

定理 (阿贝尔定理) : 若幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

在 z_1 处收敛, 则其在圆 $|z-a|<|z_1-a|$ 内绝对收敛且内闭一致收敛.

推论: 若幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

在 z_2 处发散, 则其在 $|z-a|>|z_2-a|$ 也发散.

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

的收敛可分为三种情况:

(1) 只在 $z=a$ 处收敛.

(2) 在整个复平面上均收敛.

(3) 在某个圆周 $|z-a|=|z_1-a|$ 所围区域内绝对收敛, 在所围区域外发散.

我们称 (3) 中圆周的半径为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的**收敛半径**, 记为 R, 称 $|z-a|=|z_1-a|$ 为**收敛圆周**, 称 $|z-a|<|z_1-a|$ 为**收敛圆**. 此外, 约定 (1)(3) 中的收敛半径分别为 $R=0$ 与 $R=+\infty$.

注: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆周上可能收敛也可能发散.

例 以下幂级数的收敛半径均为 1, 收敛圆周均为 $|z|=1$.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 在收敛圆周上处处发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 在 $z=1$ 处发散, 在收敛圆周上其余点处均收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 在收敛圆周上处处收敛.

注: 对 (2) 中级数在收敛圆周 $|z|=1$ 上的收敛情况我们做一点解释说明. 设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}.$$

当 $\theta\in(0,2\pi)$ 时, 实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}$ 均收敛, 从而当 $z\neq 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 收敛. 当 $z=1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 显然不收敛. (数学分析中有如下结论: 设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0, 则 $\sum a_n\cos nx$ 与 $\sum a_n\sin nx$ 在 $(0,2\pi)$ 上收敛.)

4.2.2 收敛半径的求法

定理: 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l,\quad (\text{达朗贝尔}) \tag{1}$$

则收敛半径

$$R=\begin{cases}0, & l=+\infty\\ \dfrac{1}{l}, & 0<l<+\infty\\ +\infty, & l=0.\end{cases}$$

注: 公式 (1) 可以换为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l\quad (\text{柯西}) \tag{2}$$

或

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l\quad (\text{柯西-阿达马}). \tag{3}$$

需要注意的是, 上述公式 (1) (2) (3) 并不是等价的.

4.2.3 幂级数和函数的解析性

定理: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 $R\,(0<R\leqslant+\infty)$, 其在收敛圆 $|z-a|<R$ 内的和函数为 $f(z)$, 则

(1) $f(z)$ 在收敛圆内解析.

(2) $f(z)$ 可逐项求任意阶导, 且原幂级数的系数 $c_p=\dfrac{f^{(p)}(z)}{p!}$.

(3) $f(z)$ 可沿收敛圆内的曲线 C 逐项积分.

4.3 解析函数的泰勒展式

4.3.1 泰勒展开

上一节我们看到, 幂级数在收敛圆内可以收敛于一个解析函数, 这个性质是很重要的. 但是, 幂级数对于解析函数的研究的重要性还在于这一性质的逆命题也是成立的.

定理 (泰勒定理) : 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则对任一含于 D 的圆 $K:|z-a|<R$, $f(z)$ 在 K 内可以展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

并且展式是唯一的, 其中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi.$$

(分别为系数的微分形式与积分形式)

上式中的积分曲线 C 为 $|z-a|=\rho, 0<\rho<R$.

式 (1) 称为 $f(z)$ 在 a 处的**泰勒展式**, 右边的级数称为**泰勒级数**, c_n 称为对应的**泰勒系数**.

显然幂级数 (1) 的收敛半径大于大于 R.

由此得到刻画解析函数的又一个等价定理.

定理: $f(z)$ 在区域 D 内解析的充要条件为对任意的 $a\in D$, $f(z)$ 在 a 的某个邻域内可以展开成泰勒级数.

4.3.2 幂级数的和函数在收敛圆周上的情况

定理: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 $R>0$, 令

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad z\in K:|z-a|<R,$$

则 $f(z)$ 在收敛圆周 $|z-a|=R$ 上至少一个奇点.

注: (1) 由此可得一个确定收敛半径的方法: 设 $f(z)$ 在点 a 处解析, b 是 $f(z)$ 的离 a 最近的奇点, 则 $f(z)$ 在 a 处的幂级数展开式的收敛半径就是 $|b-a|$.

(2) 即使幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在其收敛圆周上处处收敛, 其和函数在收敛圆周上仍至少一个奇点.

例 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛, 但是

$$f'(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n} + \cdots, \quad (|z|<1)$$

因此当 z 沿实轴在单位圆内趋于 1 时, $f'(z) \to +\infty$, 故 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一个奇点.

有了以上的分析, 一些在实数域内不了解的事情, 在复数域内便豁然开朗了. 例如, 在实数域内, 我们不清楚为什么 $\frac{1}{1+x^2}$ 在整个实轴上的值都是确定的, 并且具有任意阶导数, 但是其展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

却只在 $|x|<1$ 时成立. 现在我们明白了, 由于

$$\frac{1}{1+z^2}$$

在 $|z|=1$ 上有奇点 $z=\pm \mathrm{i}$, 因此其在原点的泰勒展开的收敛半径为 1.

4.3.3 一些初等函数的泰勒展开

例 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在整个复平面上解析, 且 $f^{(n)}(0)=1$, 故它在 $z=0$ 处的泰勒系数

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

因此

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad z \in \mathbf{C}.$$

例 由上例与

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

可得

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad z \in \mathbf{C},$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad z \in \mathbf{C}.$$

例 函数 $f(z)=[\ln(1+z)]_0$ 在 $z=0$ 处的泰勒系数为

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

由于 $z=-1$ 是 $[\ln(1+z)]_0$ 的奇点, 因此收敛圆为 $|z|<1$, 故

$$[\ln(1+z)]_0=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots,\quad |z|<1.$$

更进一步,

$$[\ln(1+z)]_k=2k\pi\mathrm{i}+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots,\quad k\in\mathbf{Z},\quad |z|<1.$$

4.4 解析函数零点的孤立性

4.4.1 解析函数零点的孤立性

定义: 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $a\in D$. 若 $f(a)=0$, 则称 a 为解析函数 $f(z)$ 的**零点**.

设 a 为解析函数 $f(z)$ 的零点, 但在 a 的某邻域内 $f(z)$ 不恒为 0, 则由 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的幂级数展开式

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots \tag{1}$$

可知存在正整数 m, 使得

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0,\quad 但\, f^{(m)}(a)\neq 0.$$

定义: 设 $f(z)$ 为区域 D 内的解析函数, $a\in D$, 若存在正整数 m, 使得

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0,\quad 但\, f^{(m)}(a)\neq 0,$$

则称 a 为 $f(z)$ 的 m **阶零点**, m 称为零点 a 的**阶**. 当 $m=1$ 时, a 也称为**单零点**.

定理 (m 阶零点的充要条件) : a 是不恒为 0 的解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点当且仅当

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$.

证明 考虑 (1) 式.

定理 (解析函数零点的孤立性) : 设 $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析且不恒为零, a 为 $f(z)$ 的零点, 则存在 a 的某邻域, 使得 $f(z)$ 在该邻域内除 a 外无其他零点.

证明 设 a 为 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则存在函数 $\varphi(z)$ 使得

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

且 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析, $\varphi(a)\neq 0$. 因此, 在点 a 的某邻域 $N_\rho(a)$ 内 $\varphi(z)$ 不为 0, 因此在点 a 的空心邻域 $N_\rho(a)\setminus\{a\}$ 内 $f(z)\neq 0$.

推论: 若

(1) $f(z)$ 在 $K:|z-a|<R$ 内解析,

(2) $f(z)$ 在 K 内有一列收敛于 a 的各项互异的零点 $\{z_n\}$,

则 $f(z)$ 在 K 内恒为 0.

注: (1) 上述推论并没有事先假定 $f(a)=0$. 实际上, 由于 $f(z_n)=0$, 故利用解析函数的连续性, 两边取极限即得 $f(a)=0$.

(2) 为了便于应用, 可将上述推论中的条件 (2) 换为更强的条件: $f(z)$ 在 K 的某一子区域 (或一小段弧) 上为 0. (因为在子区域或一小段弧上为 0 蕴含了存在一列互异零点)

注: 可微实函数的零点不一定是孤立的, 例如函数

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在实轴上处处可微, 且 0 与 $\pm\dfrac{1}{n\pi}\,(n=1,2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的零点, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\pm\dfrac{1}{n\pi}\right)=0$, 即 0 不是 $f(x)$ 的孤立零点. 而复函数与实函数之所以会出现这种差异, 是因为解析复函数具有无穷可微性且可以泰勒展开, 而实函数即使处处可微也不能保证导函数连续, 即使无穷次可微也不一定保证其泰勒级数收敛于自身, 例如

$$f_2(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的任意阶导数都为 0, 即 $f_2^{(n)}(0)=0\,(n=1,2,\cdots)$, 因此 $f_2(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数为

$$0+0\cdot x+\frac{0}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{0}{n!}\cdot x^n+\cdots,$$

其和函数为 $S(x)=0, x\in\mathbf{R}$, 显然不同于 $f_2(x)$(甚至 $S(x)$ 与 $f_2(x)$ 只在 $x=0$ 这一点处相等). 但是, 如果将实函数加强为实解析函数, 则零点的孤立性就成立了, 此处我们不做过多展开.

例 在原点解析, 在 $z=\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots$ 处取下列各组值的函数是否存在.

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},\cdots$. (2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{6},\cdots$.

解 设函数为 $f(z)$.

(1) 易知函数 $f(z)=z$ 满足条件 $f\left(\dfrac{1}{2k}\right)=\dfrac{1}{2k}, k=1,2,\cdots$, 故由唯一性定理可知, 若所求函

数存在, 则只能是 $f(z)=z$, 但

$$f\left(\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{1}{2k}, k=1,2,\cdots,$$

矛盾, 因此所求函数不存在.

(2) 由于

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}, \quad n=1,2,\cdots,$$

故 $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ 满足条件.

4.4.2 唯一性定理

定理: 设 $f_1(z), f_2(z)$ 都是区域 D 内的解析函数, 且存在 D 内的收敛于 $a\in D$ 的各项互异的点列 $\{z_n\}$, 使得 $f_1(z_n)=f_2(z_n)\,(n=1,2,\cdots)$, 则在区域 D 内 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

证明 令 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$, 则 $\{z_n\}$ 是 $f(z)$ 在 D 内的收敛于 $a\in D$ 的各项互异的零点列, 利用解析函数零点的孤立性证明 $f(z)$ 在 D 内恒为 0 即可.

推论: 设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 为区域 D 上的解析函数, 若 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域 D 的某个子区域内 (或一小段弧上) 相等, 则 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

推论: 一切在实轴上成立的恒等式, 只要等式两边在复平面上解析, 则该恒等式在复平面上也成立.

例 在复平面上 $\sin^2 z+\cos^2 z=1, \quad \sin 2z=2\sin z\cos z$.

注: (1) 上述几个定理与推论都可以叫做解析函数的唯一性定理.

(2) 唯一性定理揭示了解析函数的一个非常深刻的性质——解析函数在区域 D 内的局部值确定了函数在区域 D 内整体的值, 它的局部与整体之间有十分紧密的内在联系.

(3) 应用唯一性定理, 在数学分析中一些初等函数的幂级数展开式都可以推广到复数域上来.

4.4.3 最大模原理

下面的定理是解析函数论中极有用的定理之一.

定理 (最大模原理) : 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 若 $f(z)$ 不为常值函数, 则 $|f(z)|$ 不可能在 D 内取到最大值.

推论: 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在 $\overline{D}=D+\partial D$ 上连续, 则

$$\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|=\max_{z\in\partial D}|f(z)|.$$

若 $f(z)$ 在区域 D 内不为常数, 则

$$|f(z_0)| < \max_{z\in\partial D} |f(z)|, \quad z_0 \in D.$$

5 洛朗展式与孤立奇点

5.1 洛朗展式

5.1.1 双边幂级数

设有幂级数

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{1}$$

与级数

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots . \tag{2}$$

对级数 (2) 作变量代换 $\xi = \dfrac{1}{z-a}$, 则级数 (2) 变为幂级数

$$c_{-1}\xi + c_{-2}\xi^2 + \cdots . \tag{3}$$

设幂级数 (3) 的收敛圆为 $|\xi| < \dfrac{1}{r}\ (0 < \dfrac{1}{r} \leqslant +\infty)$, 则级数 (2) 的收敛区域为 $|z-a| > r$, 且在此区域内收敛到某解析函数 $f_2(z)$. 又设幂级数 (1) 的收敛圆为 $|z-a| < R$, 且在此区域内收敛到某解析函数 $f_1(z)$, 则当 $r < R$ 时, 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{4}$$

有公共的收敛区域 $r < |z-a| < R$, 且在此区域内收敛到解析函数 $f_1(z) + f_2(z)$. 我们称级数 (4) 为**双边幂级数**.

定理: 设双边幂级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛圆环为

$$H : r < |z-a| < R, \quad \text{其中}\, 0 \leqslant r < R \leqslant +\infty,$$

则

(1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 H 内绝对收敛且内闭一致收敛于 $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, 且 $f(z)$ 在 H 内解析.

(2) $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 H 内可任意阶逐项求导.

(3) $f(z)$ 可沿 H 内的曲线逐项积分.

5.1.2 洛朗展式

双边幂级数在收敛圆环内表示一解析函数, 反过来, 我们有如下定理.

定理 (洛朗定理) : 若 $f(z)$ 在圆环 $H: r < |z-a| < R$ 内解析, 其中 $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, 则在 H 内 $f(z)$ 可以展开为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{$*$}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

其中曲线 C 为圆周 $|z-a| = \rho\,(r < \rho < R)$, 且展式是唯一的.

上述定理中的 $(*)$ 式称为 $f(z)$ 在点 a 的**洛朗展式**, $(*)$ 式右端的级数称为 $f(z)$ 的**洛朗级数**, 其中的 c_n 称为**洛朗系数**.

5.1.3 洛朗级数与泰勒级数的关系

当 $f(z)$ 在点 a 解析时, 洛朗级数的负幂项系数

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(\xi)(\xi - a)^{n-1} \mathrm{d}\xi = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

此时洛朗级数就变为泰勒级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

因此, 泰勒级数实际上是洛朗级数的特殊情形.

例 分别求函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在下面三个区域内的展式.

(1) 圆 $|z| < 1$.

(2) 圆环 $1 < |z| < 2$.

(3) 圆环 $2 < |z| < +\infty$.

解 将 $f(z)$ 裂项得

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

(1) 注意到 $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 故

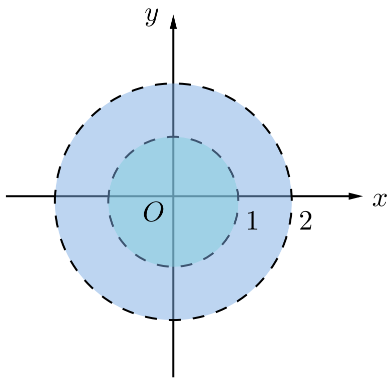
$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

(2) 注意到 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$, 故

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(3) 注意到 $\left|\dfrac{2}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, 故

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}.$$



注: 从上例我们可以看出

(1) 若 $f(z)$ 可以在以 a 为中心的圆环 $r < |z-a| < R$ 内展开成洛朗级数, 则 a 可能是 $f(z)$ 的奇点, 也可能不是 $f(z)$ 的奇点 (尽管 $f(z)$ 的洛朗级数中含有 $z-a$ 的负幂项).

(2) 在以 a 为中心的不同的圆环域内, $f(z)$ 有不同的洛朗展式.

5.1.4 孤立奇点邻域内的洛朗展式

定义: 设 a 为函数 $f(z)$ 的奇点, 若 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $N_\rho(a)\setminus\{a\}$ 内解析, 则称 a 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**.

注: 设 a 为 $f(z)$ 的奇点, 若 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $N_\rho(a)\setminus\{a\}$ 内是单值的, 则称 a 为**单值性孤立奇点**; 若 $f(z)$ 在 $N_\rho(a)\setminus\{a\}$ 内是多值的, 则称 a 为**多值性孤立奇点** (即支点). 以后若无特殊说明, 所提到的孤立奇点均指单值性孤立奇点.

若 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 可在以 a 为圆心的某圆环 $0 < |z-a| < R$ 内展开成洛朗级数.

例 求函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)^2}$ 在下列区域内的洛朗展式.

(1) $0 < |z-1| < 2$.

(2) $2 < |z-1| < +\infty$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{z-3}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^n$, 故

$$\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\right]'=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z-1)^n}{2^n}\right]'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}},$$

从而由 $\left(\dfrac{1}{z-3}\right)'=-\dfrac{1}{(z-3)^2}$ 得

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-3)^2}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-2}}{2^{n+1}}.$$

(2) 因为 $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$, 故

$$\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}\right]'=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}},$$

从而

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-3)^2}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{(z-1)^{n+3}}.$$

5.2 孤立奇点

5.2.1 孤立奇点的分类

设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内有洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

我们称上述双边幂级数的非负幂部分为 $f(z)$ 在点 a 的正则部分, 负幂部分称为 $f(z)$ 在点 a 的主要部分. 由于正则部分 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 是 $|z-a|<R$ 内的解析函数, 因此 $f(z)$ 在点 a 的奇异性完全体现在洛朗展式的主要部分上.

定义: 设 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点,

(1) 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.

(2) 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分不为 0, 且只有有限多项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a},\quad \text{其中}\, c_{-m}\neq 0,$$

则称 a 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**.

(3) 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分有无限多项不为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的**本质奇点**.

5.2.2 可去奇点

设 a 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内可展开为

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots.$$

而等式右边的幂级数是圆 $|z-a|<R$ 内的解析函数, 因此, 若我们令 $f(a)=c_0$, 则 $f(z)$ 就成为 $|z-a|<R$ 内的解析函数, a 就成为 $f(z)$ 的解析点了, 这就是可去奇点名字的由来.

定理: 设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列各条等价:

(1) a 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=c_0\,(\neq\infty)$.

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

例 $z=1$ 为 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z}$ 的可去奇点.

5.2.3 极点

设 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内有洛朗展式

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots,\quad \text{其中}\,c_{-m}\neq 0.$$

定理: 设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列各条等价:

(1) a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

(2) $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=c_{-m}\neq 0$.

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可以表示成 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 处解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$.

(4) a 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点. (可去奇点视为解析点)

例 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 以 $z=1$ 为一阶极点, 以 $z=2$ 为二阶极点.

例 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点为 $k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 因为 $\sin k\pi=0$, 而 $\cos k\pi=(-1)^k\neq 0$, 故 $k\pi$ 为 $\sin z$ 的一阶零点, 从而为 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的一阶极点.

下面的定理也可以判断一个孤立奇点是否为极点, 但是它不能指明极点的阶数.

定理: 设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 a 为 $f(z)$ 的极点当且仅当

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty.$$

证明 a 为 $f(z)$ 的极点 $\Longleftrightarrow$ a 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

5.2.4 本质奇点

定理: 设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列各条等价:

(1) a 为 $f(z)$ 的本质奇点.

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在.

证明 利用可去奇点等价于 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$ 与极点等价于 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, 再由孤立奇点只有这三种类型即可证明.

定理: 设 a 为 $f(z)$ 的本质奇点, 若 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内不为 0, 则 a 也为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本质奇点.

例 $z=0$ 为 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点, 又因为

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots, \quad 0<|z|<+\infty,$$

故 $z=0$ 为 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的本质奇点. 不难得到 $z=0$ 也为 $\dfrac{1}{f(z)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}$ 的本质奇点.

魏尔斯特拉斯给出了下面这一定理, 它描述了解析函数在本质奇点邻域内的特性.

定理 (魏尔斯特拉斯) : 若 a 为 $f(z)$ 的本质奇点, 则对任意的常数 A (可为 ∞), 存在收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A.$$

定理 (皮卡) : 若 a 为 $f(z)$ 的本质奇点, 则对任意的 $A\neq\infty$, 除掉一个可能的值 $A=A_0$ 外, 存在一个收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$, 使得

$$f(z_n)=A, \quad n=1,2,\cdots.$$

必须指出, 皮卡定理较之魏尔斯特拉斯定理更加普遍且深刻.

例 $z=0$ 是函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 的本质奇点.

(1) $A=\infty$, 取 $z_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $f(z_n)=\mathrm{e}^n\to\infty(n\to\infty)$.

(2) $A=0$, 取 $z_n=-\dfrac{1}{n}$, 则 $f(z_n)=\mathrm{e}^{-n}\to 0(n\to\infty)$.

(3) $A\neq 0, A\neq\infty$, 直接求解 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=A$, 得

$$z=\frac{1}{\mathrm{Ln}\, A}=\frac{1}{\ln A+2k\pi\mathrm{i}}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

令 $z_n=\dfrac{1}{\ln A+2n\pi\mathrm{i}}, n=1,2,\cdots$, 则

$$f(z_n)=A, \quad n=1,2,\cdots.$$

注: 就本书所遇到的情形, 奇点可以分类如下.

$$
\text{奇点}\begin{cases}\text{单值函数奇点}\begin{cases}\text{孤立奇点}\begin{cases}\text{可去奇点}\\ m\,\text{阶极点}\\ \text{本质奇点}\end{cases}\\ \text{非孤立奇点}\end{cases}\\ \text{多值函数奇点}\end{cases}
$$

5.2.5 施瓦茨引理

引理 (施瓦茨) : 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 且满足

$$f(0)=0, \quad |f(z)|<1,$$

则在单位圆 $|z|<1$ 内, 有

$$①|f'(0)|\leqslant 1, \quad ②|f(z)|\leqslant |z|.$$

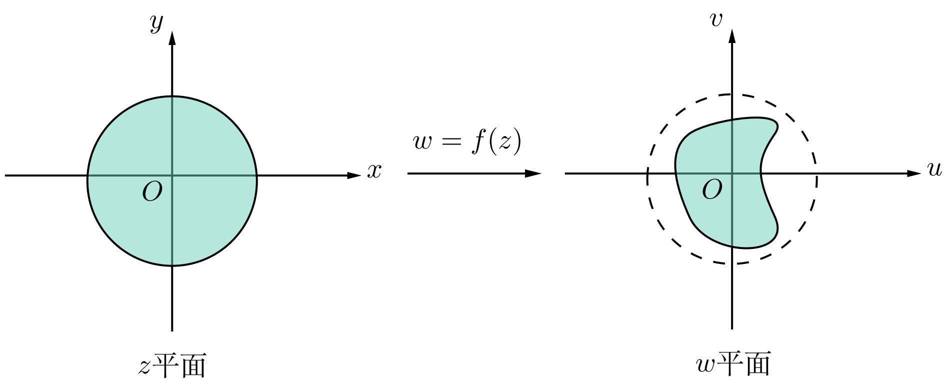
此外, ①式等号成立或者②式等号在单位圆内一点 $z_0\neq 0$ 处成立当且仅当

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z, \quad \alpha\in\mathbf{R}\,\text{为常数}, |z|<1.$$

注: 施瓦茨引理的几何意义是: 对于一个将单位圆变到单位圆内子区域的满足 $f(0)=0$ 解析变换 $w=f(z)$,

(1) 圆内任意一点 $z\neq 0$ 的像 $f(z)$ 离原点的距离不会比 z 本身离原点的距离远.

(2) 若有某一点 $z_0\neq 0$ 的像 $f(z_0)$ 离原点的距离等于 z_0 本身离原点的距离, 那么变换 $f(z)$ 其实就是一个旋转变换 (将单位圆映为单位圆).



5.3 解析函数在无穷远点的性质

上一节我们讨论了解析函数的奇点为有限值的情形, 本节我们探讨无穷远点 ∞ 作为奇点的情形. 需要注意的是, 因为一个函数在无穷远处总是无意义的, 因此 ∞ 始终是函数 $f(z)$ 的奇点.

定义: 若存在 $r>0$, 使得函数 $f(z)$ 在点 ∞ 的去心邻域

$$N(\infty)\setminus\{\infty\}=\{z\in\mathbf{C}\,|\,r<|z|<+\infty\}$$

内解析, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**.

设 $f(z)$ 在无穷远点 ∞ 的去心邻域 $0<r<|z|<+\infty$ 内解析, 作变换 $z'=\dfrac{1}{z}$, 则 $z=\dfrac{1}{z'}$, 令

$$\varphi(z')=f\left(\frac{1}{z'}\right)=f(z), \tag{1}$$

则 $\varphi(z')$ 在原点的去心邻域 $0<|z'|<\dfrac{1}{r}$ 内解析, $z'=0$ 为 $\varphi(z')$ 的孤立奇点, 因此我们可以利用 $\varphi(z')$ 在原点的性态定义 $f(z)$ 在无穷远点的性态.

定义: 若 $z'=0$ 为 $\varphi(z')$ 的可去奇点、m 阶极点、本质奇点, 则相应地称 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、m 阶极点与本质奇点.

定义: 若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则称 $f(z)$ **在点 ∞ 处解析**, 且定义 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$.

函数 $\varphi(z')$ 在原点的去心邻域 $0<|z'|<\dfrac{1}{r}$ 内有洛朗展式

$$\varphi(z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz'^n,$$

由 (1) 式可得

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,\quad 其中\, b_n=c_{-n},\, n=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{1.1}$$

定义: 称 $f(z)$ 在点 ∞ 处的洛朗展式 (1.1) 中的正幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 为 $f(z)$ **在点 ∞ 的主要部分** (它对应着 $\varphi(z')$ 在 $z'=0$ 的主要部分 $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}c_nz'^n$) .

注: 我们当然也可以利用 $f(z)$ 在点 ∞ 处的主要部分的情况来定义 ∞ 作为孤立奇点的类型, 具体如下:

(1) 若 $f(z)$ 在点 ∞ 处的主要部分为零, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) 若 $f(z)$ 在点 ∞ 处的主要部分为

$$b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m,\quad 其中\, b_m\neq0,$$

则称 ∞ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

(3) 若 $f(z)$ 在点 ∞ 处的主要部分有无穷多项都不为 0, 则称 ∞ 为 $f(z)$ 的本质奇点.

对于 $z=a$ 为孤立奇点的各条结论, 都可以相应地迁移到 $z=\infty$ 为孤立奇点的情形.

定理: 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列各条等价:

(1) ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} = b_0\,(\neq\infty)$.

(3) $f(z)$ 在点 ∞ 的某去心邻域内有界.

定理: 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列各条等价:

(1) ∞ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^m} = b_m \neq 0$.

(3) $f(z)$ 在点 ∞ 的某去心邻域内可表示为

$$f(z) = z^m\lambda(z),$$

其中 $\lambda(z)$ 在点 ∞ 处解析, 且 $\lambda(\infty)\neq 0$.

(4) ∞ 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点. (可去奇点当作解析点)

定理: 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 ∞ 为 $f(z)$ 的极点当且仅当

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

定理: 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 则下列各条等价:

(1) ∞ 为 $f(z)$ 的本质奇点.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在.

实际上, 对于 §5.2.4 中本质奇点的结论都可以迁移到 $z=\infty$ 为本质奇点的情形, 这里我们不再展开.

例 指出函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内的奇点及其类型.

解 令 $\sin\pi z = 0$, 得 $f(z)$ 的全部奇点为 $z=k\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 注意到

$$f(z)=\frac{(z+1)(z-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}.$$

(1) $z=-1,1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点, 因为

$$\lim_{z\to-1}(z+1)^2 f(z) = \lim_{z\to-1}\frac{(z+1)^3}{(\sin\pi z)^3}(z-1)(z-2)^3 = \frac{18}{\pi^3}\neq 0.$$

同理可得 $z=1$ 为二阶极点.

(2) $z=2$ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(3) 其余 $z=k(k\in\mathbf{Z}, k\neq -1,1,2)$ 为 $f(z)$ 的三阶极点.

(4) $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点.

5.4 整函数与亚纯函数

5.4.1 整函数

整函数是整个复平面上的解析函数, 它只以 ∞ 为奇点 (因而 ∞ 为孤立奇点), 故可设整函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots,\quad z\in\mathbf{C}.$$

定理: 设 $f(z)$ 为整函数, 则

(1) ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点当且仅当 $f(z)\equiv c_0$ 为常值函数.

(2) ∞ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点当且仅当 $f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_mz^m(c_m\neq 0)$ 为 m 次多项式.

(3) ∞ 为 $f(z)$ 的本质奇点当且仅当有无限多个 $c_n\neq 0$. (称这样的整函数为**超越整函数**)

注: 上述定理中的 (1) 可以与刘维尔定理——有界整函数必为常数联系起来.

例如, $\mathrm{e}^z,\sin z,\cos z$ 都是超越整函数.

5.4.2 亚纯函数

因为可去奇点可以变成解析点, 因此下面的定义与定理我们都不考虑可去奇点.

定义: 在整个复平面上除极点外没有其他类型的奇点的单值解析函数称为**亚纯函数**.

由定义不难看出, 亚纯函数族比整函数族更广泛.

定理: $f(z)$ 为有理函数当且仅当 $f(z)$ 在扩充复平面上除极点外无其他类型的奇点.

定义: 非有理函数的亚纯函数称为**超越亚纯函数**.

6 留数定理

6.1 留数

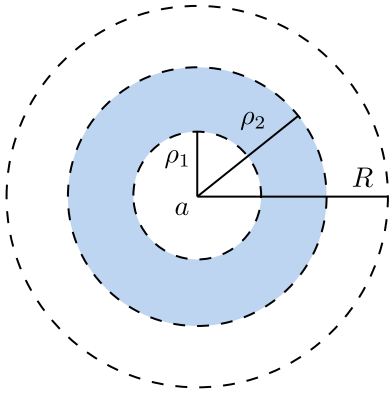
6.1.1 基本概念与柯西留数定理

定义: 设 $z=a\,(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内解析, 则称

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的**留数 (residue)** , 其中曲线 $C:|z-a|=\rho\,(0<\rho<R)$.

由柯西积分定理知当 $0<\rho<R$ 时, 留数 $\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)$ 的值与 ρ 的大小无关 (对下图中的蓝色部分应用复周线形式的柯西积分定理) .



由于 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的洛朗展式 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi, \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

故

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)\mathrm{d}z=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

命题: 函数 $f(z)$ 在有限可去奇点 $z=a$ 处的留数为 0.

证明 由于可去奇点的主要部分为 0, 故对于有限可去奇点 a, 其留数 $\operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z)=c_{-1}=0$.

注: 若 ∞ 为可去奇点, 则不一定有 $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$, 这是因为 $f(z)$ 在 ∞ 处的主要部分是洛朗级数的正幂部分 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, 故 c_{-1} 与其无关.

定理: $f(z)$ 在 (复) 周线所围的区域 D 内除有限个点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外解析, 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上除了 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外连续, 则大范围积分

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_i} f(z).$$

思路 如图1所示, 由柯西积分定理与留数的定义, 有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_i} f(z).$$

注: (1) 定理中好像没有说 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为孤立奇点, 但实际上因为 $f(z)$ 只在这有限个点处不解析, 故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 必为孤立奇点, 因此可以放心地谈论 $f(z)$ 在这些点处的留数.

(2) 柯西留数定理把计算周线积分的整体问题化为了计算孤立奇点处留数的局部问题.

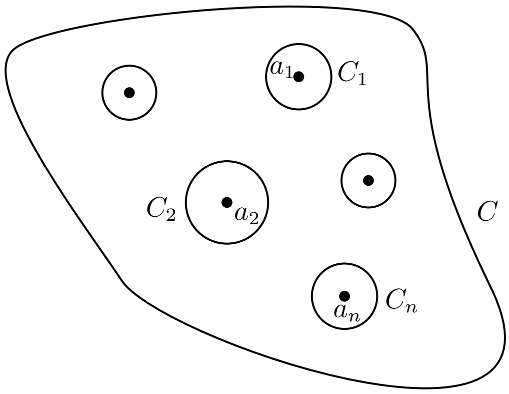


图 1: 柯西留数定理

6.1.2 留数的求法

我们可以直接计算函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的洛朗展式中 $\dfrac{1}{z-a}$ 这一项的系数 c_{-1} 来求留数 $\operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z)$, 但有时这非常繁琐, 因此我们有必要寻求其他的方法.

定理: 设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, 且

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n},$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 处解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

其中 $\varphi^{(n-1)}(a)=\lim\limits_{z\to a}\varphi^{(n-1)}(z)$.

证明 设 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 内解析, 曲线 $C:|z-a|=\rho$, 其中 $0<\rho<R$, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\mathrm{d}z=\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},$$

其中最后一个等号是利用了 §3.3.2 的高阶导数公式.

定理: 设 a 为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\phi(z)}$ 的一阶极点, 其中 $\phi(a)=0.\phi'(a)\neq 0$, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\phi'(a)}.$$

例 计算 $\displaystyle\int_{|z|=n}\tan\pi z\mathrm{d}z$, 其中 n 为正整数.

解 $f(z)=\tan\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 在 $|z|=n$ 所围区域内有 $2n$ 个一阶极点 $z_k=k+\dfrac{1}{2}$, 且由上述定

理知

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = -\frac{1}{\pi}, \quad k = -n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1.$$

故由柯西留数定理知

$$\int_{|z|=n} \tan \pi z \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot 2n \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4n\pi.$$

例 计算 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z \sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3} \mathrm{d}z.$

解 易知 $f(z) = \dfrac{z \sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$ 在 $|z| = 1$ 所围区域内只有一阶极点 $z = 0$. 易知

$$f(z) = \frac{\dfrac{z^2 \sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}}{z} =: \frac{\varphi(z)}{z},$$

由 n 阶极点留数的求法知

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \varphi(0) = \lim_{z\to 0} \varphi(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 \sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3} = -\lim_{z\to 0} \frac{z^2 \sin z}{(\mathrm{e}^z-1)^3} = -1.$$

由柯西留数定理知

$$\int_{|z|=1} \frac{z \sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot (-1) = -2\pi\mathrm{i}.$$

6.1.3 函数在无穷远处的留数

定义: 若 ∞ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在 $0 \leqslant r < |z| < +\infty$ 内解析, 则称

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C^-} f(z) \mathrm{d}z$$

为 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数, 其中曲线 $C : |z| = \rho(\rho > r)$.

注: 定义中的积分曲线是沿 C 的负方向 C^-, 因为 C^- 可以自然地看作绕点 ∞ 的正方向.

设 $f(z)$ 在 $0 \leqslant r < |z| < +\infty$ 内解析, 则有洛朗展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$. 因此

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \int_{C^-} f(z) \mathrm{d}z = -\int_C f(z) \mathrm{d}z = -c_{-1}.$$

注: 有限孤立奇点处 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$, 无穷远处 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$, 二者是不同的.

定理: 若 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty$, 则 $f(z)$ 在各奇点处的留数之

和为零.

此外, 我们有如下公式来计算无穷远处的留数:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{t=0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right].$$

例 计算 $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z$.

解 由于 $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 除了 ∞ 外的孤立奇点均在 $|z|=4$ 所围区域内, 因此我们利用各孤立奇点处留数之和为 0 来计算所求积分. 令 $z=\dfrac{1}{t}$, 则

$$g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{\dfrac{1}{(t^2+1)^2(2t^4+1)^3}}{t}=:\frac{\varphi(t)}{t},$$

因此 $t=0$ 为 $g(t)$ 的一阶极点, 从而

$$\operatorname*{Res}_{t=0} g(t)=\varphi(0)=1,$$

故

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{t=0} g(t)=-\operatorname*{Res}_{t=0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right]=-1.$$

因此其余各奇点处的留数之和为

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=1.$$

由柯西留数定理知

$$I=\int_{|z|=4} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_i \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)=2\pi\mathrm{i}.$$

6.2 辐角原理

6.2.1 对数留数与零-极定理

定理: 设 C 周线, 则称留数

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$ 的对数留数.

注: 之所以叫对数留数, 是因为

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\mathrm{d}\ln f(z).$$

引理: (1) 若 a 为 $f(z)$ 的 n 阶零点, 则 a 为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)}=n.$$

(2) 若 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则 a 为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)}=-m.$$

定理 (零-极定理)：设 C 为周线, 且

(1) f 在 C 内亚纯.

(2) f 在 C 上解析且不为 0.

则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=N(f,C)-P(f,C),$$

其中 $N(f,C)$ 与 $P(f,C)$ 分别为 f 在 C 内的零点与极点个数 (一个 n 阶零点算 n 个零点, 一个 m 阶极点算 m 个极点).

证明　满足 (1)(2) 的函数 f 在 C 内部必然只有有限个零点与极点, 设不同的零点为 $a_1,\cdots,a_p$, 阶数分别为 $n_1,\cdots,n_p$. 设不同的零点为 $b_1,\cdots,b_q$, 阶数分别为 $m_1,\cdot,m_q$, 由上述引理知 $a_1,\cdots,a_p$, $b_1,\cdots,b_q$ 为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点. 由柯西留数定理知

$$\begin{aligned}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z&=2\pi\mathrm{i}\left(\sum_{i=1}^{p}\operatorname*{Res}_{z=a_i}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{Res}_{z=b_j}\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\\&=2\pi\mathrm{i}\left(\sum_{i=1}^{p}n_i+\sum_{j=1}^{q}m_j\right)\\&=2\pi\mathrm{i}[N(f,C)-P(f,C)].\end{aligned}$$

因而

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=N(f,C)-P(f,C).$$

6.2.2 辐角原理

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}\ln f(z)\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}\left[\ln|f(z)|+\mathrm{i}\arg f(z)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}\ln|f(z)|+\frac{1}{2\pi}\int_C \mathrm{d}\arg f(z)\end{aligned}$$

任取 $z_0\in C$, 当 z 从 z_0 沿 C 绕行一圈回到 z_0 时,

$$\int_C \mathrm{d}\ln|f(z)| = \ln|f(z_0)|-\ln|f(z_0)|=0,$$

$$\int_C \mathrm{d}\arg f(z) = \arg{}_2 f(z_0)-\arg{}_1 f(z_0)=\Delta_C\arg f(z_0).$$

因此

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{\Delta_C\arg f(z)}{2\pi}, \tag{1}$$

其中 $\Delta_C\arg f(z)$ 为当 z 沿 C 绕行一圈后 $\arg f(z)$ 的改变量.

由 (1) 式及零-极定理即得辐角原理.

定理 (辐角原理) : 设 C 为周线, 且

(1) f 在 C 内亚纯.

(2) f 在 C 上解析且不为 0.

则有

$$N(f,C)-P(f,C)=\frac{\Delta_C\arg f(z)}{2\pi}.$$

注: 条件 (2) 可减弱为 f 连续到 C 且在 C 上不为 0.

6.2.3 鲁歇定理

定理 (鲁歇定理) : 设 C 为周线, 函数 f 与 g 满足

(1) f 与 g 在 C 内解析, 且连续到 C.

(2) 在 C 上 $|f|>|g|$.

则 $f+g$ 与 f 在 C 内有相同个数的零点 (n 阶零点算 n 个), 也即

$$N(f+g,C)=N(f,C).$$

思路　鲁歇定理是辐角原理的推论.

例 设 $p(z) = a_0 z^n + \cdots + a_t z^{n-t} + \cdots + a_n$, 其中 $a_0 \neq 0$, 且

$$|a_t| > |a_0| + \cdots + |a_{t-1}| + |a_{t+1}| + \cdots + |a_n|.$$

证明: $p(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内有 $n-t$ 个零点.

证明 令 $f(z) = a_t z^{n-t}$, $g(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{t-1} z^{n-t+1} + a_{t+1} z^{n-t-1} + \cdots + a_n$, 则在单位圆周 $C: |z| = 1$ 上有

$$|f(z)| = |a_t| > |a_0| + \cdots + |a_{t-1}| + |a_{t+1}| + \cdots + |a_n| \geqslant |g(z)|.$$

由鲁歇定理知

$$N(p, C) = N(f+g, C) = N(f, C) = n - t.$$

例 证明方程

$$z^7 - z^3 + 12 = 0$$

的根全在圆环 $1 < |z| < 2$ 内.

证明 由上例知 $|z| < 1$ 内没有方程的根. 令 $f(z) = z^7$, $g(z) = 12 - z^3$, 周线 $C: |z| = 2$, 则在 C 上有

$$|f(z)| = |z^7| = |z|^7 = 128 > 20 = 12 + |z^3| \geqslant |12 - z^3| = |g(z)|.$$

令 $\varphi(z) = z^7 - z^3 + 12$, 由鲁歇定理知

$$N(\varphi, C) = N(f+g, C) = N(f, C) = 7.$$

因此, 方程的根全在 $1 \leqslant |z| < 2$ 中. 当 $|z| = 1$ 时,

$$|\varphi(z)| = |z^7 - z^3 + 12| \geqslant 12 - |z^7 - z^3| = 12 - |z^4 - 1| \geqslant 12 - (|z|^4 + 1) = 12 - 2 = 10 > 0,$$

故 $|z| = 1$ 上没有方程的根. 综上, 方程的根全在 $1 < |z| < 2$ 内.