目录

0 一些知识点

0.1 求和符号

例 $\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]=n^2$, 而 $k^2-(k-1)^2=2k-1$, 故

$$\begin{aligned} n^2 &= \sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2] \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}k-n, \end{aligned}$$

因此

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

例 $\sum_{k=1}^{n}[k^3-(k-1)^3]=n^3$, 而 $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$, 故

$$\begin{aligned} n^3 &= \sum_{k=1}^{n}[k^3-(k-1)^3] \\ &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1) \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+n \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{3(n^2+n)}{2}+n, \end{aligned}$$

因此

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

同理, 我们可以求得 $1^p+2^p+\cdots+n^p$ 的表达式, 其中 p 为正整数.

0.2 双阶乘符号

定义双阶乘

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1),$$

$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n).$$

0.3 特征函数

定义: 设 X 是一个集合, A 是 X 的子集, 则称函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

为 X 上 A 的**特征函数**.

性质: 设 X 是一个集合, A, B 是 X 的子集, 则

(1) $A \neq B \Longleftrightarrow \chi_A \neq \chi_B$.

(2) $A \subseteq B \Longleftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.

(3) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

(4) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(5) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$.

0.4 映射的限制

设映射 $f : U \to V$, W 为 U 的子集, 则称

$$\begin{aligned} f|_W : W &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

为映射 f 在 W 上的限制. 容易知道, 映射的限制就是缩小原映射的定义域, 而不改变原映射的陪域与对应法则.

0.5 max 与 min

容易验证

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$
$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

0.6 支撑集、紧支撑与卷积

定义 (支撑集) : 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$, 称集合

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

为函数 f 的**支撑集**.

定义: 若函数 f 的支撑集是紧集, 则称 f 是**紧支撑**的.

容易知道, 若函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的, 并且 $\operatorname{supp} f=[a,b]$, 那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 (卷积) : 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都是可积的紧支撑函数. 我们定义 f 与 g 的**卷积** $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

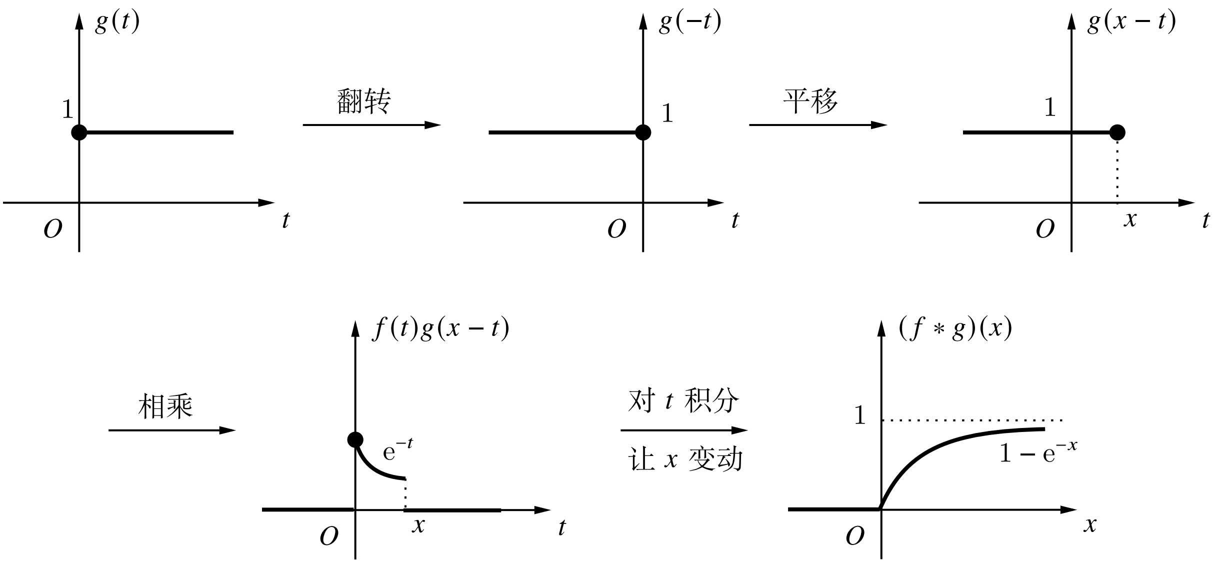
$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

注: 因为对于每一个 x, 关于 y 的函数 $f(y)g(x-y)$ 都是可积且紧支撑的, 因此上述定义是有意义的.

下面我们来直观理解一下卷积的意义. 设

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^t, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases} \quad \text{与} \quad g(t)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

首先将 $g(t)$ 翻转得到 $g(-t)$, 再将 $g(-t)$ 向右平移距离 x 得到 $g(x-t)$(当 x 为负时, 即为向左平移). 然后, 作乘积 $f(t)g(x-t)$. 最后, 我们对乘积进行积分, 就得到了卷积 $(f*g)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.



卷积不仅在傅里叶分析和偏微分方程中有着重要应用, 它在物理学、工程学和信号处理理论中也相当重要. 这里我们只对它做一个简要介绍.

性质: 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 均为连续的紧支撑函数, c 为实数, 则

(1) (保紧支撑性) 卷积 $f*g$ 也是连续的紧支撑函数.

(2) (交换律) $f*g=g*f$.

(3) (分配律) $f*(g+h)=f*g+f*h, (f+g)*h=f*h+g*h$.

(4) (数乘结合律) $f*(cg)=(cf)*g=c(f*g)$.

(5) (结合律) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(6) (卷积与导数可交换) 当 f, g 都可微时, $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

0.7 一些不等式的证明

例 对任意的 $x \geqslant 0$, 成立不等式 $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

例 应用上例证明 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减.

例 利用泰勒公式证明对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

例 利用泰勒公式证明对任意的 $\alpha > 1$, $x > -1$, 有广义伯努利不等式 $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.

0.8 导函数不连续的例子

例 定义 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

容易证明 f 处处可导, 且

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因此 $x = 0$ 是 f' 的震荡间断点, f' 在 $x = 0$ 处不连续.

为何会出现这种情况呢? 我们知道, f 在 x_0 处导数存在的充要条件是左导数 $f'_-(x)$ 与右导数 $f'_+(x)$ 都存在且相等. 而导函数 f' 在 x_0 处连续的充要条件是 f' 在 x_0 处左连续且右连续:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

注意左导数 $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ 与导数的左极限 $f'(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ 是不同的, 因此导函数存在但不一定连续.

虽然导数存在不能推出连续, 但是如果导数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在的话, 那么 f 就在 x_0 处可导, 且

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

换言之, 只要导数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在, 那么导数就是连续的.

定理 (导数极限定理) : 设 f 在 $U(x_0)$ 连续, 在 $U^\circ(x_0)$ 上可导. 若导数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在, 那么 f 在 x_0 处可导, 且导函 f' 在 x_0 处连续:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

0.9 导函数有多个不连续点

参见导函数有多个不连续点.

0.10 只在一点可导的函数

狄利克雷函数是数学中构造反例的大杀器.

例 定义

$$f(x) = x^2 D(x).$$

那么

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} xD(x) = 0.$$

因此 f 在 $x = 0$ 处是可导的. 但是, 由于 f 在任何 $x \neq 0$ 处都不存在极限, 因此不连续, 更不可导了.

0.11 在某点可导但在这点的去心邻域内无处连续的函数

例 令

$$f(x) = x^2 D(x).$$

则 f 在 $x = 0$ 处是可导的. 但是, f 在 $x = 0$ 的去心邻域内处处不连续.

0.12 只在一点连续的函数

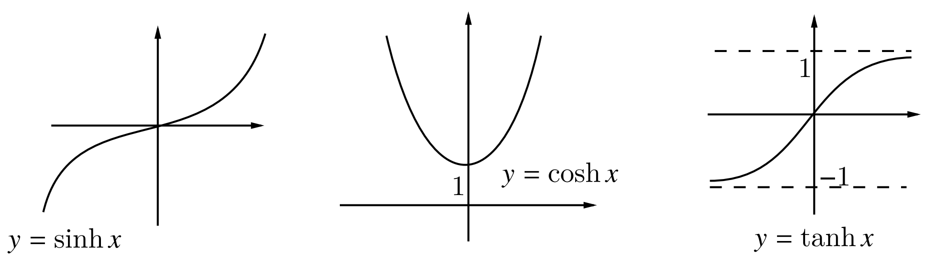
例 定义

$$f(x) = xD(x).$$

那么 f 只在 $x = 0$ 处是连续的, 而在其余 $x \neq 0$ 处均不连续.

0.13 双曲函数

定义双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.



所有的三角恒等式都能变为相应的双曲三角恒等式, 规则为 (称为 Osborn's Rule **奥斯本法则**):

(1) sin 变 sinh, cos 变 cosh.

(2) $\sin\cdot\sin$ 变 $-\sinh\cdot\sinh$. (注意加了一个负号)

(3) 对于其他三角函数, 需要先转化为 sin 与 cos 再使用前两条规则.

例 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 变为 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.

例 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 变为 $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$.

例 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ 变为 $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$.

例 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ 变为 $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$.

0.14 原函数的存在性

含有第一类间断点 (可去, 跳跃) 与无穷间断点的函数在对应区间上没有原函数, 而含有震荡间断点的函数在对应区间上则可能存在原函数. 可以查看 原函数的存在性.

0.15 一道记忆深刻的题

例 设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, n 为非负整数, 且

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

请证明 f 在开区间 (a,b) 上存在 $n+1$ 个相异零点.

证明 当 $n=0$ 时, 由 (加强版) 积分中值定理可知结论成立.

假设结论对于非负整数 n 成立, 下面考虑 $n+1$ 时的情况. 此时对 $k=1,\cdots,n,n+1$, 有

$$\begin{aligned}0=\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b x^k\mathrm{d}\left(\int_a^x f\right)\\&=\left(x^k\int_a^x f\right)\Bigg|_a^b-\int_a^b\left(\int_a^x f\right)\mathrm{d}(x^k)\\&=(0-0)-\int_a^b\left(\int_a^x f\right)\mathrm{d}(x^k)\\&=-k\int_a^b x^{k-1}\left(\int_a^x f\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

记 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f$, 则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且

$$\int_a^b x^k F(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\cdots,n.$$

由归纳假设知函数 F 在 (a,b) 上有 $n+1$ 个相异零点

$$(a<)\quad x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}\quad(<b).$$

又注意到 $F(a)=0, F(b)=0$, 因此我们在 $[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_n,x_{n+1}],[x_{n+1},b]$ 这 $n+2$ 个区间上使用罗尔中值定理可得 $F'=f$ 在 (a,b) 上有 $n+2$ 个相异零点.

思考　若将上例中的条件加强为对任意非负整数 k 都有

$$\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

试问 f 是怎样的函数?

解　此时 f 是零函数, 即对任意的 $x\in[a,b]$, $f(x)\equiv 0$.

证明　因为 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 故由魏尔斯特拉斯逼近定理知存在 $[a,b]$ 上的多项式序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 从而 $\{f_n\cdot f\}$ 一致收敛于 $f\cdot f$ (因为一致收敛列同乘一个有界函数仍一致收敛), 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到每个 f_n 都是多项式, 因此都是有限个 x^k 的线性组合, 故由已知条件知对任意非负整数 n 都有 $\displaystyle\int_a^b f_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 从而

$$\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

因为 $(f(x))^2$ 非负连续, 故 $f(x)\equiv 0$.

1　实数

1.1　实数系的完备性

我们来介绍实数系的一个重要性质——完备性 (此处也可称为实数的连续性, 但是在后续的课程中我们会学到其他的完备性, 到那时就不能称之为连续性了). 这一性质体现为以下的确界原理.

确界原理　设 $E\neq\varnothing$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 若 E 在 $\mathbb{R}$ 中有上界, 则 E 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界.

确界原理 (第二种陈述)　设 $E\neq\varnothing$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 若 E 在 $\mathbb{R}$ 中有下界, 则 E 在 $\mathbb{R}$ 中有下确界.

注: 后面我们会学到实数完备性定理, 它们分别为:

(1) 确界原理.

(2) 单调有界定理.

(3) 闭区间套定理.

(4) 有限覆盖定理.

(5) 聚点定理.

(6) 柯西准则.

为了对完备性有一个更深的认识, 我们在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中考察上述几个定理.

例 在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中,

(1) 确界原理不成立. 例如 $E=\{x:x^2<2\}\cap\mathbb{Q}$, 则

$$\sup E=\sqrt{2},\quad \inf E=-\sqrt{2},$$

故 $\sup E\notin\mathbb{Q},\inf E\notin\mathbb{Q}$.

(2) 单调有界原理不成立. 例如 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中单调递增有上界, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}.$$

(3) 聚点定理不成立. 例如 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的有界无限点集, 但是其聚点 $\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$.

1.2 复数域 $\mathbb{C}$ 和 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的完备性

上一节我们提到了以下的实数完备性定理:

(1) 确界原理.

(2) 单调有界定理.

(3) 闭区间套定理.

(4) 有限覆盖定理.

(5) 聚点定理.

(6) 柯西准则.

其中确界原理与单调有界定理仅在实数域上讨论, 不在复数域和 $\mathbb{R}^m$ 中讨论, 定理 (3)~(6) 可以推广至 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^m$.

闭区间套定理

定理 (复数域 $\mathbb{C}$) : 设 $\{F_n\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的一列闭集, 且满足

(1) $F_{n+1}\subseteq F_n$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n)=0$.

则存在唯一的 $z_0\in\mathbb{C}$, 使得 $z_0\in F_n(n=1,2,\cdots)$.

定理: 设 $\{\overline{U}(\boldsymbol{x}_n,r_n)\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的闭球列, 其中 $\overline{U}(\boldsymbol{x}_n,r_n)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m:d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_n)\leqslant r_n\},r_n>0$. 若闭球列 $\{\overline{U}(\boldsymbol{x}_n,r_n)\}$ 满足

(1) $\overline{U}(\boldsymbol{x}_{n+1},r_{n+1})\subseteq\overline{U}(\boldsymbol{x}_n,r_n)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$.

则存在唯一的 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^m$, 使得 $\boldsymbol{x}_0\in\overline{U}(\boldsymbol{x}_n,r_n),n=1,2,\cdots$.

有限覆盖定理

定理 (海涅-博雷尔有限覆盖定理) : 设 E 为 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集, 若有一族开集 $\mathscr{M}$ 覆盖了 E, 即 $E\subseteq\mathscr{M}$, 则必可从 $\mathscr{M}$ 中选出有限个开集, 它们仍覆盖了 E.

定理 (海涅-博雷尔有限覆盖定理)：设 F 为 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集, $\mathscr{M} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ 为一族开集, 它覆盖了 F(即 $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in\Lambda} U_i$), 则 M 中一定存在有限多个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_m$, 它们同样覆盖了 F.

紧集一定是有界闭集, 而上述两个定理告诉我们 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集一定是紧集, 因此, 在 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^m$ 中, 紧集等价于有界闭集.

聚点定理

定理: 复数域 $\mathbb{C}$ 中有界无限点集必有聚点.

定理: $\mathbb{R}^m$ 中有界无限点集必有聚点.

柯西收敛准则

定理: 复数序列 $\{z_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{z_n\}$ 是柯西列.

定理: $\mathbb{R}^m$ 中的序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛的充要条件为 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为柯西列.

1.3 常用不等式

定理 (伯努利不等式)：

(1) $(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$, 其中 $x > -1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$.

(2) $(1+x)^\alpha \leqslant 1+\alpha x$, 其中 $x > -1, \alpha \in (0,1)$.

定理: 设 x 为弧度制表示的角, 则成立不等式

$$\sin x < x < \tan x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

推论: 以下不等式成立

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4 詹森不等式、赫德尔不等式、柯西不等式

定理 (詹森不等式)：设 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$, $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, 则

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

思路　使用数学归纳法.

定理 (幂倍不等式)：对 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$, $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 有

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

思路　令 $f(x) = -\ln x$, 利用詹森不等式.

定理 (均值不等式)：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, 则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

思路　幂倍不等式中取 $\alpha_1 = \alpha_2 \cdots \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ 即可.

引理: 设 $p, q > 0$, 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $x, y > 0$, 则

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y.$$

思路　幂倍不等式中取 $n = 2, \alpha_1 = \dfrac{1}{p}, \alpha_2 = \dfrac{1}{q}$, $x_1 = x, x_2 = y$ 即可.

定理 (赫德尔不等式)：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0, b_1, b_2, \cdots, b_n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, p, q > 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

思路　若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为 0, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为 0, 则取

$$x_i = \frac{a_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^p}, \quad y_i = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q}.$$

利用前述引理, 有

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

上式两边对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 求和, 得到

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全为 0 或 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为 0 时, 结论显然成立.

推论 (柯西不等式) : 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0, b_1, b_2, \cdots, b_n \geqslant 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

思路　赫德尔不等式中取 $p = q = 2$ 即可.

2　极限

2.1　数列极限

定义: 设 $\{x_n\}$ 为实数序列, a 为实数, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称序列 $\{x_n\}$ **收敛**, 且称 a 是 $\{x_n\}$ 的极限. 不收敛的序列称为**发散**序列.

定理 (极限的唯一性) : 若实数序列 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限是唯一的.

由此, 若实数序列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 则可记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

此外, 我们把以 0 为极限的实数序列称为**无穷小序列**.

定理 (迫敛性) : 设实数序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\{y_n\}$ 也收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

定理: 设 $\{x_n\}$ 为实数序列, a 为实数, 则下列各条等价:

(1) 序列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

(2) 序列 $\{x_n - a\}$ 是无穷小序列.

(3) 存在无穷小序列 $\{\alpha_n\}$, 使得 $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

定理 (有界性) : 收敛序列 $\{x_n\}$ 必有界.

定理 (保不等式性) : 若实数序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n,$$

则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$x_n < y_n.$$

推论: 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均为收敛序列, 若 $x_n \leqslant y_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

定理: 实数序列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件为 $\{x_n\}$ 的任意子列收敛.

例 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $a > 0$. (提示: $a = 1$ 时是显然的, 只需分 $a > 1$ 与 $a < 1$ 来讨论)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$.

(4) 若 $x_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

(5) 对给定的正整数 $k \geqslant 2$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{k^n} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k^n}{n!} = 0$, 因此当 n 充分大时, 有 $n^k < k^n < n!$.

定义: 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是相邻列.

定理: 相邻列有相同的敛散性, 且当相邻列均收敛时, 它们的极限相同.

2.2 单调有界定理、闭区间套定理、魏尔斯特拉斯定理与柯西收敛准则

定理 (单调有界定理) : 在实数系中, 单调有界数列必收敛.

定义: 若闭区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \cdots.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个**闭区间套**.

定理 (闭区间套定理) : 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为一个闭区间套, 则存在唯一的实数 $c \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

证明 由于 $\{[a_n, b_n]\}$, 故 $\{a_n\}$ 为单调递增序列且有上界 b_1, $\{b_n\}$ 为单调递减序列且有下界 a_1, 从而 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

若另有 c' 满足 $c' \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$, 则

$$a_n \leqslant c' \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

两边取极限, 由追敛性得

$$c' = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,$$

唯一性得证.

定理 (魏尔斯特拉斯定理)：有界序列必有收敛子列.

定义: 设有实数序列 $\{x_n\}$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$, 有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的**柯西序列** (或**基本序列**).

引理: 柯西序列必有界.

证明 设 $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的柯西列, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \leqslant 1 + |x_{N+1}|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$, 则

$$|x_n| \leqslant M, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由定义易知收敛序列必为柯西列. 下面我们将证明一个更为重要的事实——$\mathbb{R}$ 中的柯西列必为收敛列.

定理 (柯西收敛准则)：设 $\{x_n\}$ 为实数序列, 则 $\{x_n\}$ 为收敛列当且仅当 $\{x_n\}$ 为柯西列.

证明 ($\Longrightarrow$) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当 $n, m > N$ 时, 有

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 为柯西序列.

($\Longleftarrow$) 设 $\{x_n\}$ 为柯西序列, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n, m > N_1$ 时, 有

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $\{x_n\}$ 为柯西列, 故 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$, 则对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 > 0$, 当 $k > N_2$ 时, 有

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 又取定 $k_0>N$, 则当 $n>N$ 时, 有 (注意到 $n_{k_0}\geqslant k_0>N$)

$$|x_n-a|\leqslant|x_n-x_{n_{k_0}}|+|x_{n_{k_0}}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\{x_n\}$ 为收敛序列.

上述收敛准则也可以陈述为: 实数序列 $\{x_n\}$ 为收敛列当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意的 $p\in\mathbb{N}^+$, 有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

例 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 取 $m=2n$, 则

$$|x_{2n}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

故 $\{x_n\}$ 发散.

例 设 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, 则

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 对任意的 $p\in\mathbb{N}^+$, 有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}<\varepsilon,$$

故 $\{x_n\}$ 收敛.

2.3 斯托尔茨 (Stolz) 定理

定理 (斯托尔茨定理) : 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为两个实数序列, 其中 $\{b_n\}$ 为严格递增的趋于 $+\infty$ 的正数列. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A\in[-\infty,+\infty],$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

例 考察序列

$$c_n=\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}},\quad n=1,2,\cdots.$$

解 令 $a_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, b_n = n^{p+1}$, 又

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1} - (n^{p+1} - (p+1)n^p + \cdots)} = \frac{1}{p+1}.$$

由斯托尔茨定理知

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{p+1}.$$

利用 Stolz 定理, 我们很容易得到平均值极限定理.

定理 (算数平均值极限定理)：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in [-\infty, +\infty]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = A$.

思路 将 Stolz 定理的分子数列取为 $\{a_1 + \cdots + a_n\}$, 分母数列取为 $\{n\}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

算数平均值极限定理我们可以得到几何平均数极限定理.

定理 (几何平均值极限定理)：设 $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in [0, +\infty]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = A$.

思路 对下面的不等式利用迫敛性即可.

$$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1} \cdots \dfrac{1}{a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

推论 (比式极限推根式极限)：设 $a_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

思路 取数列 $\{\alpha_n\}$ 为 $a_1, \dfrac{a_2}{a_1}, \dfrac{a_3}{a_2}, \dfrac{a_4}{a_3}, \cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

上面的结论告诉我们只要比式极限存在, 相应的根式极限也存在, 而且二者相等. 由此我们可以很容易地求出一些原本比较复杂的根式极限.

例 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. (取 $a_n = n$)

例 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \dfrac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (取 $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$)

例 设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. 这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{a} = 1$. (取 $a_n = a$ 为常数列)

例 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

思路 设 $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n$, 其中 $\alpha_n, \beta_n \to 0 (n \to \infty)$. 设对任意的 n 有 $|\beta_n| \leqslant M$, 则

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|}{n} \to 0.$$

又

$$\begin{aligned}\frac{a_1b_n + \cdots + a_nb_1}{n} &= \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + \cdots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n} \\ &= ab + a\cdot\frac{\beta_n + \cdots + \beta_1}{n} + b\cdot\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}.\end{aligned}$$

后面三项都趋于 0, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$.

2.4 函数极限

下面我们介绍函数极限的两种定义方式——海涅提出的序列式定义与柯西提出的 ε-δ 式定义 (它们是等价的) .

定义 (序列式定义) : 设函数 $f(x)$ 在点 a 的某去心邻域 $U^\circ(a)$ 内有定义, 且对任意以 a 为极限的序列 $\{x_n\} \subseteq U^\circ(a)$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$

则称当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 有极限 A.

定义 (ε-δ 式定义) : 设函数 $f(x)$ 在点 a 的某去心邻域 $U^\circ(a)$ 内有定义, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 有极限 A.

定理 (极限的唯一性) : 若 $f(x)$ 在点 a 处极限存在, 则是唯一的.

有了上述定理, 我们可以将函数 $f(x)$ 在点 a 处的极限 A 记作 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

定理 (局部有界性) : 若函数 f 在点 a 处的极限存在, 则 f 在点 a 的某去心邻域内有界.

思路 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 a 的某邻域, 当 x 属于该邻域时, 有 $|f(x) - A| < 1$, 从而

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - A| + |A| \leqslant 1 + |A|.$$

定理 (迫敛性) : 设在点 a 的某去心邻域 $U^\circ(a)$ 内有

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, 则

$$\lim_{x\to a} g(x) = A.$$

定理 (局部保不等式性)：设 $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, 则存在 a 的某去心邻域 $U^\circ(a)$, 当 $x \in U^\circ(a)$ 时, 有

$$f(x) < g(x).$$

推论: 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某去心邻域 $U^\circ(a)$ 内满足 $f(x) \leqslant g(x)$, 若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 与 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在, 则有

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

定理 (函数极限的柯西收敛准则)：函数 f 在点 a 处的极限存在的充要条件为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in U^\circ(a, \delta)$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

下面我们讨论单侧极限.

定义 (序列式定义)：设 $f(x)$ 在 $(a, a+\eta)$ 上有定义, 若对任意收敛于 a 的序列 $\{x_n\} \subseteq (a, a+\eta)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$

则称当 $x \to a^+$ 时, $f(x)$ 有极限 A.

定义 (ε-δ 式定义)：设 $f(x)$ 在 $(a, a+\eta)$ 上有定义, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $a < x < a+\delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x \to a^+$ 时 $f(x)$ 有极限 A.

易知 $f(x)$ 在点 a 处的右侧极限若存在则必唯一, 因此我们可以使用记号 $\lim_{x\to a^+} = A$. 左侧极限可以类似定义, 这里不再赘述. 对于区间的端点, 我们只讨论单侧极限.

下面的定理告诉我们单调函数的单侧极限总是存在的.

定理: 若函数 $f(x)$ 在 $(a, a+\eta)$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在点 a 处的右侧极限存在, 且

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{a<x<a+\eta} f(x).$$

对于 $f(x)$ 在 $(a, a+\eta)$ 上单调递增, 在 $(a-\eta, a)$ 上单调递增或单调递减这三种情况, 也有相应于上述定理的结论, 这里我们不再赘述.

例　狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

处处极限不存在.

证明 任取 $a\in\mathbb{R}$, 则存在有理数序列 $\{r_n\}$ 与无理数序列 $\{r'_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty} r'_n=a$, 但是

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} D(r_n)=1,\\
\lim_{n\to\infty} D(r'_n)=0.
\end{aligned}
$$

故 $D(x)$ 在 a 处极限不存在. 由 a 的任意性知 $D(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的极限处处不存在.

例 黎曼函数

$$
R(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\text{为正整数},\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}),\\ 0, & x=0,1\text{或}(0,1)\text{内的无理数}.\end{cases}
$$

在 $[0,1]$ 处处极限为 0.

证明 任取 $a\in[0,1]$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 满足 $\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的正整数 q 至多有限个. 令 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{3}$, 则满足 $\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的正整数 q 至多有限个且一定存在 (因为至少 $q=2$ 或 3 满足条件). 因此, 对任意的 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$, 满足 $\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$ 的既约有理点 $\dfrac{p}{q}$ 一定存在且至多有限个, 设为 $x_1,x_2,\cdots,x_k(k\geqslant 3$,因为至少$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$满足条件), 令

$$
\delta=\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ x_i\neq a}}\{|x_i-a|\}.
$$

当 x 为 $U^\circ(a,\delta)\cap(0,1)$ 中的有理点时, 有

$$
|R(x)-0|=R(x)=\frac{1}{q}<\varepsilon.
$$

当 x 为 $U^\circ(a,\delta)\cap(0,1)$ 中的无理点时, 有

$$
|R(x)-0|=R(x)=0<\varepsilon.
$$

从而对任意的 $x\in U^\circ(a,\delta)\cap(0,1)$, 有

$$
|R(x)-0|<\varepsilon,
$$

即 $\lim\limits_{x\to a}R(x)=0$. 由 a 的任意性知黎曼函数在区间 $[0,1]$ 上的极限处处为 0.

3 连续函数

3.1 连续与间断

对比函数极限的两种定义方式, 连续性的定义有以下两种形式.

定义 (序列式定义) : 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 若对任意以 x_0 为极限的序列

$\{x_n\} \subseteq U(x_0)$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称函数 f 在点 x_0 处连续.

由此定义知若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的序列 $\{x_n\}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

定义 (ε-δ 式定义) : 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在点 x_0 处连续.

定理 (局部有界性) : 若函数 f 在点 x_0 处连续, 则 f 在 x_0 的某邻域内有界.

定理 (局部绝对连续性) : 若 f 在 x_0 处连续, 则 $|f|$ 也在 x_0 处连续.

证明 考虑

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)|.$$

定理 (局部保不等式性) : 若 f 与 g 均在 x_0 处连续, 且 $f(x_0) < g(x_0)$, 则存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, 有

$$f(x) < g(x).$$

注: 由上述定理可得: 若函数 f 在 x_0 处连续, 且 $A < f(x_0) < B$, 则存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, 有

$$A < f(x) < B.$$

定理 (复合函数的连续性) : 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 函数 $g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 也在 x_0 处连续.

定义: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, a+\eta)$ 上有定义, 若

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**右连续**. 左连续可类似定义.

定理: $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件为 $f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续.

3.2 闭区间上连续函数的性质

定理 (根的存在性定理) : 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且

$$f(a)f(b) < 0,$$

则存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$f(c) = 0.$$

推论 (介值定理) : 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一值 γ, 存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$f(c) = \gamma.$$

思路 令 $g(x) = f(x) - \gamma$, 利用根的存在性定理.

定理: 若 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界.

定理 (最大值与最小值定理) : 闭区间上的连续函数必有最大值与最小值.

定义 (ε-δ 式定义) : 设 $f(x)$ 定义在 $E \subseteq \mathbb{R}$ 上. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x_1, x_2 \in E$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在集合 E 上是**一致连续的**.

定理 (序列式描述) : 设 $f(x)$ 是定义在集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数, 则 $f(x)$ 在 E 上一致连续的充要条件为对任意的序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$, 只要

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0,$$

就有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

用相邻列的语言来描述上述定理即是: 函数一致连续当且仅当任意相邻列的函数值列也是相邻列.

例 考察 $f(x) = x$, 其中 $x \in \mathbb{R}$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon,$$

即 $f(x) = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

例 考察 $g(x) = x^2$, 其中 $x \in \mathbb{R}$. 任取 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 取 $x_1 = \dfrac{2\varepsilon_0}{\delta}$, $x_2 = \dfrac{2\varepsilon_0}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$, 则

$|x_1 - x_2| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, 但

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = \left(\frac{4\varepsilon_0}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > \frac{4\varepsilon_0}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0.$$

例 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在半开半闭区间 $(0, 1]$ 上不一致连续, 因为取 $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{2n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0,$$

但

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = \lim_{n\to\infty}(n - 2n) = \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty.$$

定理 (一致连续性定理) : 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

3.3 指数函数, 对数函数, 初等函数

定义: 设 $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, x 为无理数, 我们定义

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

其中 $\{r_n\}$ 为任一收敛于 x 的有理数序列.

3.4 无穷小量

定义: 设有函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义在 $U^\circ(a)$ 上,

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $x \to a$ 时的有界变量, 则记为 $f(x) = O(g(x))\ (x \to a)$.

(2) 若 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则记为 $f(x) = o(g(x))\ (x \to a)$.

(3) 若 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则记为 $f(x) \sim g(x)\ (x \to a)$.

特别地, 记号

$$f(x) = O(1)\ (x \to a)$$

表示 $f(x)$ 在 a 的某去心邻域内有界. 记号

$$f(x) = o(1)\ (x \to a)$$

则表示 $f(x)$ 是 $x \to a$ 时的无穷小量 (即 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$) .

定理: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 的某去心邻域 $U^\circ(a)$ 内有定义, $g(x) \neq 0$, 则

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

思路 证明 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0.$
当 $x \to 0$ 时, 有

$$\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},$$
$$\ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x.$$

4 导数与微分

4.1 基本概念

定义: 设函数 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 若存在与 h 无关的数 A, 使得

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h),$$

则称 f 在 x_0 处**可微**.

易知上述定义中的常数 A 是唯一的. 我们把

$$\mathrm{d}f(x_0) = Ah \tag{1}$$

称为 f 在 x_0 处的微分, 它是一个线性函数:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto Ah \end{aligned}$$

定理: 函数 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微.

定义: 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微, 则定义

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x := \Delta x, \\ &\mathrm{d}y := f'(x_0)\mathrm{d}x = f'(x_0)\Delta x. \end{aligned}$$

并称 $f'(x_0)\mathrm{d}x$ 为函数 f 在点 x_0 处的**微分**.

注: (1) 从几何上看, 微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$ 为切线函数的增量.

(2) 从代数上看, 微分 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$ 是函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 的线性主部, 微分 $\mathrm{d}y$ 与函数增量 Δy 仅仅相差一个高阶无穷小量 $o(\Delta x)$. 因此, 当 Δx 充分小时, 我们可以用 $\mathrm{d}y$ 作为 Δy 的近似值, 这一事实是微分的许多实际应用的基础.

(3) 我们之前引入 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 作为导数的记号, 有了微分的概念之后, 又可以把记号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 解释为 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x_0).$$

4.2 链式法则与微分的形式不变性

定理: 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, $g(y)$ 在 $y = f(x_0)$ 处可导, 则 $\varphi(x) = g \circ f(x)$ 在 x_0 处可导, 且

$$\varphi'(x_0)' = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

证明 作辅助函数

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}, & y \neq f(x_0), \\ g'(f(x_0)), & y = f(x_0). \end{cases}$$

易知 $h(y)$ 在 $f(x_0)$ 处连续. 当 $f(x) \neq f(x_0)$ 时,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = h(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

当 $f(x) = f(x_0)(x \neq x_0)$ 时,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = 0 = h(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

因此, 我们总是有

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = h(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

令 $x \to x_0$, 利用 $h(y)$ 在 $f(x_0)$ 处的连续性知

$$\varphi'(x_0) = h(f(x_0))f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

若 $z = g(y), y = f(x)$, 则求导公式 (链式法则) 变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

由于

$$\mathrm{d}g(f(x)) = (g(f(x)))'\mathrm{d}x = g'(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = g'(f(x))\mathrm{d}f(x).$$

令 $y = f(x)$, 则

$$\mathrm{d}g(y) = g'(y)\mathrm{d}y.$$

因此, 不论 x 为自变量还是中间变量, 都有

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x.$$

上述重要性质称为**一阶微分的形式不变性**.

4.3 无穷小增量公式

设 f 在 x_0 处可微 (或可导), 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

或

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

或

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

以上三式称为**无穷小增量公式**, 它反映了当 $\Delta x = h = x - x_0 \to 0$ 时函数的变化情况.

引理: 设 $\varphi(h)$ 在 0 的某去心邻域内有定义, $0 \neq A \in \mathbb{R}$, 若

$$\varphi(h) = Ah + o(h) \quad (h \to 0),$$

则当 $h \neq 0$ 充分小时, $\varphi(h)$ 与 Ah 同号.

注: 实际上, 还有如下结论.

引理 $'$: 设 $0 \neq A \in \mathbb{R}$, 若

$$\varphi(h) = Ah^n + o(h^n),$$

则当 $h \neq 0$ 充分小时, $\varphi(h)$ 与 Ah^n 同号.

定理 (费马定理, 极值的必要条件) : 设 f 在 x_0 处取得极值, 若 f 在 x_0 处可导, 则

$$f'(x_0) = 0.$$

思路 反证法, 利用上述引理得出 $A > 0$ 与 $A < 0$ 均矛盾, 从而只能 $A = 0$.

4.4 有限增量公式

定理 (罗尔定理) : 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = f(b)$, 则存在 $c \in (a, b)$, 使得

$$f'(c) = 0.$$

思路　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值分别为 M,m. (1) 若 $M=m$, 则 $f(x)$ 为常值函数, 结论成立. (2) 若 $M>m$, 则 M 与 m 二者至少有一个在 (a,b) 内一点 c 处取得 (因为 $f(a)=f(b)$), 从而由费马定理得 $f'(c)=0$.

定理 (拉格朗日定理) : 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

思路　作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

对 $F(x)$ 利用罗尔定理.

设 f 在区间 I (不一定是闭区间) 上连续, 在 I 的内部 I^0 内可导, 则对任意的 $x_0,x\in I$, 在 $[x_0,x]$(或 $[x,x_0]$) 上使用拉格朗日定理, 存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ (也即 $x_0<\xi<x$ 或 $x<\xi<x_0$), 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

或者

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$$

或者

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h$$

或者

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

其中 $0<\theta<1$. 上述几式称为**有限增量公式**, 其中的 $\Delta x=h=x-x_0$ 可以不再是无穷小量, 而是任何满足 $x=x_0+h=x_0+\Delta x\in I$ 的“有限量”.

定理: 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I^0 内可导, 则

$$f(x)=\text{常数},\ x\in I\quad\Longleftrightarrow\quad f'(x)=0,\ x\in I^0.$$

思路　必要性显然, 下面考虑充分性. 任取 $x_0,x\in I$, 在 $[x_0,x]$ 或 $[x,x_0]$ 上应用拉格朗日中值定理, 则存在 ξ 介于 x_0 与 x 之间, 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)=f(x_0)+0(x-x_0)=f(x_0).$$

由 x_0 与 x 的任意性知 $f(x)=$ 常数.

推论: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上有定义, 在 I^0 内可导, 若

$$f'(x) = g'(x), \quad x \in I^0,$$

那么存在常数 C, 使得

$$f(x) = g(x) + C, \quad x \in I.$$

思路　令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, 利用上一定理即可.

4.5　柯西中值定理与洛必达法则

将拉格朗日中值定理应用于参数表示的可微曲线, 则得到柯西中值定理.

定理 (柯西中值定理)：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$g'(x) \neq 0, \quad x \in (a, b),$$

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

思路　由拉格朗日中值定理与条件 $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$ 可知 $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \neq 0$, 因此分式 $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 有意义. 考察辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

对 $F(x)$ 使用罗尔中值定理即得结论.

定理 (洛必达法则 I, $\dfrac{0}{0}$ 型)：设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a(可为 $\pm\infty$ 或 ∞) 的某去心邻域内可导, $g'(x) \neq 0, x \in U^\circ(a)$, 且

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$(可为 $\pm\infty$ 或 ∞),

则有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

定理 (洛必达法则 II, $\dfrac{\cdot}{\infty}$ 型)：设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a(可为 $\pm\infty$) 的某去心邻域内可导, $g'(x) \neq 0, x \in U^\circ(a)$, 且

(1′) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$,

则有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

4.6 泰勒公式

引理: 设 $\varphi(x)$ 在 a 的某邻域 $U(a)$ 内有定义, 且在 a 点有 n 阶导数, 若

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0,$$

那么

$$\varphi(x)=o((x-a)^n).$$

思路 对 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^n}$ 使用多次洛必达法则.

引理: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 的某邻域 $U(a)$ 内有定义, 且在 a 点有 n 阶导数, 若

$$f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a),\quad k=0,1,\cdots,n,$$

那么

$$f(x)=g(x)+o((x-a)^n).$$

思路 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, 利用前一引理.

定理 (带有皮亚诺型余项的泰勒定理) : 设 $f(x)$ 在 a 的某邻域 $U(a)$ 内有定义, 在 a 处有 n 阶导数, 则

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

思路 构造多项式 $g(x)$, 使得 $g(x)$ 满足 $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a), k=0,1,,\cdots,n$, 得到

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

由上一引理可知 $f(x)=g(x)+o((x-a)^n)$.

带皮亚诺余项的泰勒公式只适用于研究函数 f 在点 a 附近的情况, 为了研究函数在较大范围内的性质, 我们引入带有拉格朗日型余项的泰勒公式.

引理: 设 φ 在区间 I 上有 n 阶连续导数, 在 I^0 内有 $n+1$ 阶导数, $a\in I$. 若

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0,$$

则对任意的 $x\in I$, 存在介于 a 与 x 之间的 ξ, 使得

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

思路 令 $\psi(x) = (x-a)^{n+1}$, 则

$$\psi(a) = \psi'(a) = \cdots = \psi^{(n)}(a) = 0.$$

对 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 应用柯西中值定理有

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}.$$

再对 $\dfrac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}$ 应用柯西中值定理, 有

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(a)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(a)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}.$$

如此重复下去, 得到

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} \cdots = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}.$$

带入 $\psi(x) = (x-a)^{n+1}$ 与 $\psi^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$ 即得

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

定理 (带有拉格朗日型余项的泰勒定理)：设 f 在区间 I 有 n 阶连续导数, 在 I^0 有 $n+1$ 阶导数, 则对任意的 $a, x \in I$, 存在介于 a 与 x 之间的 ξ, 使得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

思路 对 $\varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 应用上述引理即得结论.

4.7 常见函数的泰勒公式

5 积分

5.1 基本概念与性质

定义: 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义, $I \in \mathbb{R}$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|P\| < \delta$, 对任意的标志点组 $\xi = \{\xi_i\}$, 都有

$$\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且称 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

引理 (可积的必要条件): 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

思路 反证法. 由于 f 在 $[a,b]$ 上无界, 故 f 在某子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 上无界. 任取选定点 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i](i \neq j)$, 在 $[x_{j-1},x_j]$ 上选取 ξ_j, 使得 $|f(\xi_j)|\Delta x_j$ 足够大, 导出矛盾.

证明 设 $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故对 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|P\| < \delta$ 时, 对任意的标志点组 $\xi = \{\xi_i\}$, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| &\leqslant \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| + |I| \\ &< 1 + |I|.\end{aligned}$$

取定这样的一个分割 P. 由于 f 在 $[a,b]$ 上无界, 故存在分割 P 的某子区间 $[x_{j-1},x_j]$, f 在其上是无界的. 任取 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, 其中 $i \neq j$. 在 $[x_{j-1},x_j]$ 上取 ξ_j 满足

$$|f(\xi_j)|\Delta x_j > \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| + 1 + |I|.$$

此时

$$\begin{aligned}1 + |I| > \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right| &= \left|f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \\ &\geqslant |f(\xi_j)|\Delta_j - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \\ &> 1 + |I|.\end{aligned}$$

矛盾, 故 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 (积分的单调性) : 若 $f(x) \leqslant g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

5.2 可积函数类

定理: f 在 $[a,b]$ 上有定义, 则下列条件等价:

(1) f 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在分割 T, 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

性质: 记 $M(\varphi)=\sup\limits_{x\in J}\varphi(x)$, $m(\varphi)=\inf\limits_{x\in J}\varphi(x)$, $\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi)$, 则

$$\omega(\varphi)=\sup_{x',x''\in J}|\varphi(x')-\varphi(x'')|.$$

引理: 设分割 T' 是分割 T 增加若干个分点所得的新分割, 则

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'\leqslant\sum_T\omega_i\Delta x_i.$$

证明　只需证增加一个分点的情形. 设新增的分点落在 $\Delta_j=[x_{j-1},x_j]$ 上, 并将 Δ_j 划分为 Δ_j' 与 Δ_i''. 易知 $\omega_j'\leqslant\omega_j$, $\omega_j''\leqslant\omega_j$. 由于在其余 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i](i\neq j)$ 上分割没有变化, 因此

$$\begin{aligned}\sum_T\omega_i\Delta x_i-\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'&=\omega_j\Delta x_j-(\omega_j'\Delta x_j'+\omega_j''\Delta x_j'')\\&\geqslant\omega_j\Delta x_j-(\omega_j\Delta x_j'+\omega_j\Delta x_j'')\\&=\omega_j\Delta x_j-\omega_j(\Delta x_j'+\Delta x_j'')\\&=0.\end{aligned}$$

定理: 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 则

(1) $f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) λf 在 $[a,b]$ 上可积.

(3) fg 在 $[a,b]$ 上可积.

(4) $|f|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明　(3) 设 $|f(x)|\leqslant M_1,|g(x)|\leqslant M_2$. 易知

$$\begin{aligned}\omega_i^{fg}&=\sup|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&\leqslant\sup\{|f(x')|\cdot|g(x')-g(x'')|\}+\sup\{|g(x'')|\cdot|f(x')-f(x'')|\}\\&\leqslant M_1\omega_i^g+M_2\omega_i^f.\end{aligned}$$

因此, 对任意的分割 T, 有

$$\sum_T\omega_i^{fg}\Delta x_i\leqslant M_1\sum_T\omega_i^g\Delta x_i+M_2\sum_T\omega_i^f\Delta x_i. \tag{1}$$

由于 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在分割 T_1 与 T_2, 使得

$$\sum_{T_1}\omega_i^f\Delta x_i<\varepsilon,\quad\sum_{T_2}\omega_i^g\Delta x_i<\varepsilon.$$

取分割 $T_3 = T_1 + T_2$, 则由 (1) 式与前述引理知

$$\begin{aligned}\sum_{T_3} \omega_i^{fg} \Delta x_i &\leqslant M_1 \sum_{T_3} \omega_i^{g} \Delta x_i + M_2 \sum_{T_3} \omega_i^{f} \Delta x_i \\ &\leqslant M_1 \sum_{T_2} \omega_i^{g} \Delta x_i + M_2 \sum_{T_1} \omega_i^{f} \Delta x_i \\ &< (M_1 + M_2)\varepsilon.\end{aligned}$$

至此, 我们已经证明了: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在分割 T_3, 使得

$$\sum_{T_3} \omega_i^{fg} \Delta x_i < (M_1 + M_2)\varepsilon,$$

故 fg 在 $[a, b]$ 上可积.

(4) 由于

$$\begin{aligned}\omega_i(|f|) &= \sup_{x', x'' \in \Delta_i} \big||f(x')| - |f(x'')|\big| \\ &\leqslant \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')| \\ &= \omega_i(f).\end{aligned}$$

故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在分割 P, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{|f|} \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{f} \Delta x_i < \varepsilon.$$

故 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积.

注: 上述定理中 (4) 的逆不成立, 即 $|f|$ 可积不能得出 f 可积.

定理: 若 f 在 $[a, b]$ 上单调, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证明 不妨设 f 单调递增, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$, 只要分割 T 满足 $\|T\| < \delta$, 就有

$$\sum_{T} \omega_i \Delta x_i = \sum_{T} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i \leqslant \delta \sum_{T} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta[f(b) - f(a)] < \varepsilon.$$

因此 f 在 $[a, b]$ 上可积.

定理: 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证明 f 在 $[a, b]$ 上一致连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in [a, b]$ 时, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

只要分割 T 满足 $\|T\| < \delta$, 就有

$$\omega_i = \sup_{\Delta_i} |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a},$$

从而

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_T \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

故 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定理: 若 f 为 $[a,b]$ 上的只有有限个间断点的有界函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定理: 设 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件为 f 在 $[a,b]$ 上的不连续点为零测集, 即 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

注: 学习实变函数之后我们会知道, L 积分是 R 积分的推广, 也是非负 R 反常积分的推广, 但不是一般 R 反常积分的推广.

例 狄利克雷函数 $D(x)$ 有界, 但处处不连续, 故在任意区间上都不是 R 可积的.

例 黎曼函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 且不连续点为有理点, 是零测集, 因此黎曼函数在 $[0,1]$ 上是 R 可积的.

5.3 积分中值定理

定理 (积分第一中值定理) : f 连续, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

定理 (推广的积分第一中值定理) : f 连续, g 不变号可积, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 (预备的积分第二中值定理) :

(1) $f \geqslant 0$ 单调递减, g 可积, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $f \geqslant 0$ 单调递增, g 可积, 则存在 $\eta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\eta^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 (积分第二中值定理)：f 单调, g 可积, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

思路 设 f 单调递减, 则 $h(x) = f(x) - f(a)$ 非负单调递减, 利用预备的积分第二中值定理的 (1) 即可. 另一种情况类似.

6 广义积分

前面讨论黎曼积分时, 我们假定了积分区间 $[a,b]$ 是有限的, 并且被积函数是有界的. 但是, 在实际应用中, 这两个条件有时并不能满足. 为了突破黎曼积分的限制条件, 我们下面考虑积分区间无限或者被积函数无界的积分问题, 它们分别被称为无穷限积分与瑕积分.

6.1 无穷限积分收敛的定义与柯西主值

定义: 设 f 定义在区间 $[a,+\infty)$ 上, 且对任意的 $u > a$, 函数 f 在 $[a,u]$ 上可积, 若极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则称反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 或者称 f 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 并且定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

如果要考虑 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分, 我们实际上需要考虑两个极限:

$$\lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^a f(x)\mathrm{d}x \quad 与 \quad \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

这两个极限过程: $u' \to -\infty$ 与 $u \to +\infty$ 是彼此独立的, 因此实际上我们要检验的是极限

$$\lim_{u'\to-\infty, u\to+\infty}\int_{u'}^u f(x)\mathrm{d}x$$

是否存在且有限. 但是, 若只考虑展布在对称区间上的积分, 我们可以定义另一种较弱意义下的收敛性.

定义: 设 f 定义在整个 $\mathbb{R}$ 上, 且对任意的 $u > 0$, 函数 f 在区间 $[-u,u]$ 可积. 若极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^u f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 在柯西主值意义下收敛, 并称此极限为广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的**柯西主值**, 记为

$$(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

以后我们会知道, 柯西主值在某些领域中有独到的作用.

6.2 无穷限积分敛散的判别

由函数极限的柯西准则, 我们可以得到无穷限积分收敛的柯西准则.

定理 (无穷限积分收敛的柯西准则)：无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件为: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > a$, 当 $A_1, A_2 > A$ 时, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

推论: 若无穷限积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定义: 若无穷限积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**. 若无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 不收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

对于非负函数的无穷限积分, 我们有如下的比较原则.

定理 (非负函数的比较原则)：设非负函数 f 与 g 在 $[a, +\infty)$ 上有

$$f(x) \leqslant g(x),$$

那么

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 (比较原则的极限形式)：设 f, g 非负, 且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma,$$

那么

(1) 若 $\gamma = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 若 $\gamma = +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(3) 若 $0 < \gamma < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态.

对于一般函数、条件收敛的判别, 我们有下面的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法, 它们的证明需要用到积分第二中值定理.

定理 (狄利克雷判别法)：若 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 有界, $g(x)$ 单调趋于 0, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 设 $\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$, 那么对任意的 $u_1,u_2>a$, 有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 因此对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>a$, 当 $x>A$ 时,

$$|g(x)|<\varepsilon.$$

因此, 当 $A_1,A_2>A$ 时, 由积分第二中值定理得

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant |g(A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &< 2M\varepsilon + 2M\varepsilon = 4M\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西准则知 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 (阿贝尔判别法)：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 设 $|f(x)|\leqslant M$. 因为 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>a$, 当 $A_1,A_2>A$ 时, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

由于 f 单调, 故由积分第二中值定理得

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant |f(A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} g(x)\mathrm{d}x\right| + |f(A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} g(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant M\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

这里第二个不等号是因为 $\xi\in[A_1,A_2]$, 故由 $(*)$ 式知 $\left|\int_{A_1}^{\xi} g(x)\mathrm{d}x\right|$ 与 $\left|\int_{\xi}^{A_2} g(x)\mathrm{d}x\right|$ 均小于 ε. 由柯西准则知 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

注: 阿贝尔判别法也可以用狄利克雷判别法来证明, 具体过程如下.

证明 因为 f 单调有界, 故存在有穷极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, 从而

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-l]=0.$$

又因为 f 单调, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 故

$$\int_a^{+\infty} [f(x)-l]g(x)\mathrm{d}x$$

收敛. 由于 $\int_a^{+\infty} lg(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 故 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 (1) 当 $p>1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(2) 当 $0<p\leqslant 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

证明 由狄利克雷判别法知对任意的 $p>0$, 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 均收敛.

(1) 当 $p>1$ 时,

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}.$$

故 $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(2) 当 $0<p\leqslant 1$ 时,

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^p} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}, \quad x\in[1,+\infty).$$

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 发散, 从而 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

6.3 瑕积分收敛的定义与柯西主值

定义: 设 f 在 $[a,b)$ 上有定义, 在点 b 的左邻域无界, 且对任意的 $[a,b']\subseteq[a,b)$, f 在 $[a,b']$ 上均常义可积. 若极限

$$\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则称以 b 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且定义其积分值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

以左端点 a 为瑕点的瑕积分及其敛散性的定义与之类似.

定义: 设 f 在 $[a,c)$ 与 $(c,b]$ 上有定义, 且 c 为 f 在 $[a,b]$ 上的唯一瑕点. 若两个瑕积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

均收敛, 则称以 c 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且定义其积分值为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

与无穷限积分类似, 我们可以定义当唯一瑕点 c 在 $[a,b]$ 内部时该瑕积分的柯西主值:

$$(\mathrm{cpv})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

这是一种在较弱意义下的收敛性.

6.4 瑕积分敛散的判别

瑕积分敛散的判别与无穷限积分类似, 这里以右端点 b 为瑕点直接给出相应的结论.

定理 (瑕积分收敛的柯西准则) : 瑕点为 b 的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $u_1, u_2 \in (b-\delta, b)$ 时, 有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

定理 (狄利克雷判别法) : $F(u) = \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b)$ 上有界, 且当 $x \to b^-$ 时 $g(x)$ 单调趋于 0, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 (阿贝尔判别法) : f 在 $[a,b)$ 上单调有界, 瑕积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

6.5 欧拉积分

数学里面有许多特殊的函数与积分, 它们非常值得我们研究. 本节给出应用十分广泛的特殊函数——欧拉积分, 它包括所谓的 Beta 函数与 Gamma 函数. 在后面学习含参量积分的时候, 我们会详细研究它们.

例 考察 $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x =: I_1 + I_2.$$

(1) 先看 I_1. 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, I_1 是常义积分. 当 $\alpha < 1$ 时, 取 $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$, 则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}(1-x)^{\beta-1} = 1.$$

因此当 $\alpha > 0$ 时, I_1 收敛; 当 $\alpha \leqslant 0$ 时, I_1 发散.

(2) 再看 I_2. 注意到此积分的对称性, 作变量替换 $t=1-x$, 得

$$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\mathrm{d}t.$$

因此由 (1) 的讨论可知当 $\beta>0$ 时, I_2 收敛; 当 $\beta\leqslant 0$ 时, I_2 发散.

综上, 当 $\alpha>0,\beta>0$ 时, $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ 收敛; 其余情况 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ 均发散.

例 考察 $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 记被积函数为 $f(x)$.

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x=:I_1+I_2.$$

(1) 先看 I_1. 当 $p\geqslant 1$ 时, I_1 是常义积分. 当 $p<1$ 时, I_1 是以 $x=0$ 为瑕点的瑕积分. 取 $g(x)=\dfrac{1}{x^{p-1}}$, 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1-p}}}{\dfrac{1}{x^{1-p}}}=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}=1,$$

故当 $p>0$ 时, I_1 收敛; 当 $p\leqslant 0$ 时, I_1 发散.

(2) 再看 I_2. 取 $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p+1}=0,$$

因此无论 p 为何值, I_2 总是收敛的.

综上, 当 $p>0$ 时, $\Gamma(p)$ 收敛; $p\leqslant 0$ 时, $\Gamma(p)$ 发散.

7 数项级数

7.1 基本概念

定义: 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 则称级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且称 $\{S_n\}$ 的极限 S 为该级数的和, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

由定义可知级数的收敛与序列的收敛本质上是一回事. 具体来说, 序列 $\{a_n\}$ 的收敛性等价于级

数

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$$

的收敛性, 并且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 等价于

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = a.$$

定理 (收敛的必要条件)：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

证明 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 从而 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$

7.2 正项级数

若 $a_n \geqslant 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 由于正项级数的部分和序列是单调递增的, 因此由单调序列的收敛原理可得

定理 (正项级数收敛的充要条件)：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件为部分和序列 $\{S_n\}$ 有界.

命题 (比较原则)：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个正项级数, 且

$$a_n \leqslant b_n.$$

则

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

命题 (比较原则极限形式)：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两个正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \gamma.$$

(1) 当 $\gamma = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $\gamma = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 当 $0 < \gamma < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛态.

使用几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ 作为比较尺度, 我们有如下的比式判别法与根式判别法.

命题 (比式判别法) : 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

若 $l < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $l > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

命题 (根式判别法) : 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

若 $l < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $l > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

命题 (积分判别法) : 设函数 f 在 $[1, +\infty)$ 上非负单调递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛态.

证明 令 $F(x) = \int_1^x f(u)\mathrm{d}u$, 则 $F(1) = 0$. 易知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)]$ 同敛态. 由不等式

$$F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = F(n) - F(n-1)$$

可知结论得证, 这里中间的两个不等号用到了 f 是单调递减的.

例 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$. (3) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$.

解 (1) 当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leqslant 1$ 时, 级数发散.

(2) 当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leqslant 1$ 时, 级数发散. (使用积分判别法, 归结为 (1).)

(3) 当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leqslant 1$ 时, 级数发散. (使用积分判别法, 归结为 (2).)

使用 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 作为比较尺度, 我们有如下的拉贝判别法.

命题 (拉贝判别法) : 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l.$$

若 $l > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $l < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注: 拉贝判别法比比式判别法与根式判别法更广泛, 但当 $l = 1$ 时仍然无能为力. 由于没有收敛

得最慢的级数, 因此没有判别法能够解决所有的收敛问题. 我们可以不断精进比较尺度, 但是这个过程可以无限进行下去.

7.3 上下极限

对任意的一个数列 $\{x_n\}$, 我们可以构造两个单调序列 $\{y_n\}$ 与 $\{z_n\}$, 其中

$$y_n = \inf_{k \geqslant n} x_k,$$

$$z_n = \sup_{k \geqslant n} x_k.$$

不难发现 $\{y_n\}$ 单调递增, $\{z_n\}$ 单调递减. 在这里我们允许序列的极限值为无穷大. 由于单调数列必有极限, 因此我们给出以下定义.

定义: 对任意的一个序列 $\{x_n\}$, 我们分别称

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \sup_n \inf_{k\geqslant n} x_k,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \inf_n \sup_{k\geqslant n} x_k$$

为序列 $\{x_n\}$ 的**下极限**与**上极限**.

上下极限对任意的序列都存在, 我们不必费心考虑它们的存在性, 因而人们乐于采用.

命题: 设 $\{x_n\}$ 为实数序列, 则下面各条等价.

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

(3) $\{x_n\}$ 有唯一极限点 ξ.

性质: 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 为两数列, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

7.4 再探正项级数

命题 (比式判别法): 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 若

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

与比式判别法不同, 根式判别法只需要用到上极限.

命题 (根式判别法)：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

若 $l < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $l > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

下面的命题说明, 凡是能用比式判别法进行判别的情形, 也一定能用根式判别法进行判定.

命题: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 则

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \leqslant \quad \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \quad \leqslant \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \quad \leqslant \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

命题 (拉贝判别法)：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若

$$\varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 若

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

7.5 交错级数

命题 (莱布尼兹判别法)：若数列 $\{u_n\}$ 单调递减趋于 0, 则交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

收敛.

7.6 一般项级数

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性与其部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性一致, 因而由数列的柯西收敛准则, 我们可以得到级数的柯西收敛准则.

定理 (柯西收敛准则)：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件为对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 对任意的 $n > N$ 与正整数 p, 都有

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

推论: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

注: 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 我们不能得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

定义: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛**. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 不收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**.

对于绝对收敛性, 我们可以利用正项级数敛散性的判别法. 对于条件收敛, 我们则需要引入另外的判别法.

引理: 设 α_i 与 β_i $(i = 1, \cdots, p)$ 均为实数, 则

(1) (分部求和公式) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i = \alpha_p B_p - \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i$, 其中 $B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$.

(2) (阿贝尔引理) 若 $\{\alpha_i\}_1^p$ 单调, $|B_i| \leqslant L$ $(i = 1, \cdots, p)$, 则

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i \right| \leqslant L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|).$$

注: (1) 中的公式称为分部求和公式, 若记 $B_0 = 0$, 则可将其写为与分部积分公式很相似的形式:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta B_i = \alpha_j B_j \Big|_{j=0}^{j=p} - \sum_{i=1}^{p-1} B_i \Delta \alpha_i.$$

这里 $\Delta B_i = B_i - B_{i-1} = \beta_i$, $\Delta \alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$.

证明 (1) 令 $B_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (B_i - B_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B_{i-1} \\
&= \alpha_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B_{i-1} \\
&= \alpha_p B_p - \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i.
\end{aligned}$$

(2) 由分部求和公式得

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| &= \left|\alpha_p B_p - \sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)Bi\right| \\
&\leqslant |\alpha_p||B_p| + \sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i||B_i| \\
&\leqslant L\left(|\alpha_p| + \sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i|\right).
\end{aligned}
$$

注意到 $\{\alpha_i\}_1^p$ 单调, 因此每个 $|\alpha_{i+1}-\alpha_i|$ 均同号, 从而

$$
\sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i| = |\alpha_p - \alpha_1|.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| &\leqslant L(|\alpha_p| + |\alpha_p - \alpha_1|) \\
&\leqslant L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|).
\end{aligned}
$$

由上述引理, 我们可以得到下面两个判别一般项级数收敛的方法.

定理 (狄利克雷判别法)：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列有界, $\{b_n\}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明　设 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right| \leqslant L$ $(n=1,2,\cdots)$, 则对任意的正整数 n 与 p, 有

$$
\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+p}a_i - \sum_{i=1}^{n}a_i\right| \leqslant 2L.
$$

由 $\{b_n\}$ 趋于 0 可知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$
|b_n| < \varepsilon.
$$

由阿贝尔引理得

$$
\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ib_i\right| \leqslant 2L(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|) < 6L\varepsilon.
$$

由柯西收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

定理 (阿贝尔判别法)：若 $\{a_n\}$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明　因 $\{a_n\}$ 单调有界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界, 故由狄利克雷判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ 收敛. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ab_n$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例　设 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛; 对任意的 $x \neq 2k\pi$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛.

思路　利用三角函数的和差化积公式求出取定 x 之后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ 的部分和数列, 运用狄利克雷判别法.

注: 不难发现莱布尼兹判别法是狄利克雷判别法的特殊情况.

7.7　绝对收敛级数与条件收敛级数的性质

我们发现只要级数是收敛的, 我们就可以随意加括号 (无论是绝对收敛还是条件收敛), 并且加括号后的级数仍然收敛, 且和不变.

定理 (加法结合律) : 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则在其求和表达式中任意添加括号后该级数仍然收敛, 且其和不变.

证明　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$. 又设添加括号后

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots .$$

记 $v_k = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}, k = 1, 2, \cdots$, 其中 $n_0 = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和数列为 $\{S_{n_k}\}$, 它是 $\{S_n\}$ 的子列. 由于 $\{S_n\}$ 收敛, 故其子列 $\{S_{n_k}\}$ 必收敛且与 $\{S_n\}$ 有相同的极限, 也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且与原级数有相同的和.

注: 添加了括号后的级数收敛不能保证原级数收敛.

定理 (绝对收敛级数的加法交换律) : 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则任意重排后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ 也绝对收敛, 且和不变.

下面的定理说明条件收敛的级数不具有加法交换律.

定理 (黎曼定理, 条件收敛级数不具有加法交换律) : 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则对任意的实数 a 或 $\pm\infty$, 存在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个重排, 使得重排后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n = a$.

两个有限和 $\sum_{n=1}^{N} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{N} b_n$ 的乘积是一切可能的 $a_i b_j$ 之和

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) = \sum_{i,j=1}^{N} a_i b_j.$$

对于无穷级数, 我们也写出一切可能的 $a_i b_j$, 并将其排成无穷矩阵的形式:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

这些 $a_i b_j$ 有很多种方式排列, 其中最常用的一种是按对角线排列, 写出来即为

$$\underline{a_1b_1}\,,\ \underline{a_1b_2\,,\ a_2b_1}\,,\ \underline{a_1b_3\,,\ a_2b_2\,,\ a_3b_1}\,,\ \cdots$$

定理 (绝对收敛级数的乘积)：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个绝对收敛的级数, 则所有乘积 $a_i b_j$ 按任意顺序排列求和所得的级数也绝对收敛, 且其和为 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

注: 我们把按对角线元素排列得到的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_1 b_n + \cdots + a_n b_1)$$

叫做 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的柯西乘积. 若将上述定理的条件放宽, 则有以下结论:

定理: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则它们的柯西乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且和为 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

若进一步放宽条件, 我们可以得到下面的结论.

定理: 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 若它们的柯西乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则其和为 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

7.8 无穷乘积

设有数列 $\{p_n\}$, 我们称

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} p_i = p_1 p_2 \cdots p_n$$

为数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项部分乘积. 若

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0,$$

则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛于 P. 此外, 人为约定当 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P = 0$ 时, 称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散于 0. 显然, 只要某 $p_j = 0$, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 就发散于 0. 因此, 后面我们总假定对任意的 n 都有 $p_n \neq 0$.

注: 后面我们将会看到, 采用发散于 0 的说法是为了更好地与无穷级数相联系.

定理 (收敛的必要条件) : 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

由于这种原因, 人们常常将无穷级数 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 写为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$. 这样一来, 上述必要条件就可以改写为

定理 (收敛的必要条件$'$) : 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

由于收敛的无穷级数 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$, 故存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $p_n > 0$. 注意到无穷乘积的收敛性与前面有限项无关, 因此在下面的讨论中, 我们总假定无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的每一项都是正数.

定理: 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件为无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

收敛.

证明 由 $\ln\prod\limits_{i=1}^{n} p_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln p_i$ 得

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln p_i}.$$

因此结论得证.

注: 由证明过程可知

(1) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散于 0 当且仅当无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散于 $-\infty$.

(2) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散于 $+\infty$ 当且仅当无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散于 $+\infty$.

由上述定理我们容易得到下面的结论.

定理: 设 $a_n \geqslant 0$, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件为无穷正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

思路

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{ 收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)\text{ 收敛} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{ 收敛}.$$

此外, 注意到 $a_n \geqslant 0$ 保证了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 均为正项级数.

证明 ($\Longrightarrow$) 设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

由正项级数的比较原则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛态. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

($\Longleftarrow$) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 从而又由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛. 由前一定理知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

下面我们讨论无穷乘积的绝对收敛. 设无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\ln p_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$$

收敛, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛. 由定义即得下述定理.

定理: 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛的充要条件为无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$$

绝对收敛.

下面我们来看一些无穷乘积的例子.

例 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解 因为 $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$, 故前 n 项部分乘积为

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{1\times 3}{2\times 2}\cdot\frac{2\times 4}{3\times 3}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}(n\to\infty).$$

因此

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})$, 其中 $|x|<1$.

解 前 n 项部分乘积为

$$P_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}).$$

注意到

$$(1-x)P_n=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=1-x^{2^n},$$

因此

$$P_n=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\to\frac{1}{1-x}(n\to\infty),$$

从而

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.$$

例 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\varphi}{2^n}$, 其中 $\varphi\neq 0$.

解 前 n 项部分乘积为

$$P_n=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cos\frac{\varphi}{2^n},$$

从而

$$P_n\sin\frac{\varphi}{2^n}=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sin\varphi.$$

因此

$$P_n=\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}\to\frac{\sin\varphi}{\varphi}(n\to\infty).$$

即是说

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\quad(\varphi\neq 0).$$

8 函数序列与函数项级数

8.1 函数序列的逐点收敛与一致收敛

定义 (逐点收敛) : 设 $\{f_n\}$ 为定义在 $D \subseteq \mathbb{R}$ 上的一列函数, $f: D \to \mathbb{R}$. 若对任意的 $x \in D$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

则称函数序列 $\{f_n\}$ **逐点收敛**于 f, 记作 $f_n \to f(n \to \infty)$.

注: 上述定义等价于: 对任意的 $x \in D$ 与任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

逐点收敛是一个很自然的概念, 但它存在一些缺陷: 不能保持连续性、导数运算、极限运算与积分运算. 这里的问题在于, 虽然对于每一个 x 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 但是收敛的速度会因 x 的不同而发生巨大的变化. 换言之, $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 不是一致的, 使 $f_n(x)$ 与 $f(x)$ 的距离小于 ε 的 N 不仅与 ε 有关, 还与 x 有关. 这启发我们引入一个更强的收敛概念.

定义 (一致收敛) : 设 $\{f_n\}$ 为定义在 $D \subseteq \mathbb{R}$ 上的一列函数, $f: D \to \mathbb{R}$. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意的 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数序列 $\{f_n\}$ **一致收敛**于 f, 记作 $f_n \rightrightarrows f(n \to \infty)$.

容易发现, 若 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 则 $\{f_n\}$ 一定逐点收敛于 f. 因此, 若一致收敛极限与逐点收敛极限都存在, 则二者一定相等.

注: 由定义可得不一致收敛的正面描述为: 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的 $N > 0$, 存在 $n_0 > N$ 与 $x_0 \in D$, 使得

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

例 (逐点收敛但不一致收敛) 函数序列 $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$ 的逐点收敛极限为 $f(x) = 0$, $x \in (0,1)$. 但是, f 不是它的一致收敛极限. 不难验证对任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 只需取

$$N = N(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right],$$

那么当 $n > N$ 时, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon.$$

下面我们来说明 f 不是 $\{f_n\}$ 的一致收敛极限. 任意取定 $\varepsilon_0 \in (0,1)$, 再任取正整数 n_0 与点 $x_0 =$

$\varepsilon_0^{\frac{1}{n_0}} \in (0,1)$, 则

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| = \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_0.$$

因此 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f.

例 (一致收敛) 考查函数序列 $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$, $x \in (0,1)$ 与函数 $f(x) = 0$, $x \in (0,1)$. 因为

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n},$$

从而对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 那么当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

因此 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

8.2 函数序列一致收敛的判定

对于两个函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 与 $g : D \to \mathbb{R}$, 我们定义它们之间的距离为

$$d(f,g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|.$$

这样一来, 对任意的 $x \in D$, 就有

$$|f(x) - g(x)| \leqslant d(f,g).$$

当我们已经知道逐点收敛的极限函数, 需要进一步判断是否一致收敛的时候, 我们可以使用如下的结论.

定理 (一致收敛的等价条件) : 设 $\{f_n\}$ 为 D 上的函数序列, f 为 D 上的函数, 则下列各条是等价的:

(1) $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

(3) 对任意的 $\{x_n\} \subseteq D$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} [f_n(x_n) - f(x_n)] = 0$.

注: 陈述 (2) 常用于证明一致收敛性, 陈述 (3) 则常用于指出函数序列不一致收敛.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 对任意的 $x \in D$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) 对任意的 $\{x_n\} \subseteq D$, 有 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant d(f_n, f)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 反证法. 若 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的 $N > 0$, 存在 $n' > N$ 与 $x' \in D$, 使得 $|f_{n'}(x') - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$.

取 $N=1$, 则存在 $n_1>1$ 与 $x_1\in D$, 使得 $|f_{n_1}(x_1)-f(x_1)|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $N=n_1$, 则存在 $n_2>n_1$ 与 $x_2\in D$, 使得 $|f_{n_2}(x_2)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $N=n_2$, 则存在 $n_3>n_2$ 与 $x_3\in D$, 使得 $|f_{n_3}(x_3)-f(x_3)|\geqslant\varepsilon_0$.

不断重复下去, 得到 $\{x_{n_k}\}\subseteq D$, 不满足 $\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]=0$, 矛盾, 故假设错误, $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

例 函数序列 $f_n(x)=(1-x)x^n\ (n=1,2,\cdots)$ 一致收敛于 $f(x)=0,\ x\in[0,1]$.

证明

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}(1-x)x^n.$$

容易验证 $(1-x)x^n$ 在区间 $[0,1]$ 上有最大值点 $x=\dfrac{n}{n+1}$, 故

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[0,1]}(1-x)x^n=\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}d(f_n,f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=0.$$

因此 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

例 函数序列 $f_n(x)=2n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}\ (n=1,2,\cdots)$ 逐点收敛于 $f(x)=0,\ x\in[0,1]$, 但 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f.

证明 取 $x_n=\dfrac{1}{n}\in[0,1]$, 则

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]=\lim_{n\to\infty}2n\mathrm{e}^{-1}=+\infty\neq 0,$$

因此 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f.

开始我们已经提到, 使用上面的定理时, 我们需要知道函数序列的极限函数是什么. 但是, 如果使用下面的柯西准则, 那么我们就无需事先知道极限函数.

定理 (一致收敛的柯西准则): 定义在 D 上的函数序列 $\{f_n\}$ 一致收敛的充要条件为对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n,m>N$ 时, 对任意的 $x\in D$, 有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

($\Longrightarrow$) 设一致收敛的极限函数为 f. 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n,m>N$ 时, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $|f_m(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

($\Longleftarrow$) 由数列的柯西准则知所给条件确定了一个 D 上的函数 f, 且 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 在

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

中让 $m \to \infty$, 得到

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad x \in D.$$

因此 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

例 设函数序列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛, 函数 φ 在 D 上有界, 则 $\{\varphi f_n\}$ 在 D 上也一致收敛.

证明 设 $|\varphi(x)| \leqslant M$, $x \in D$, 则

$$|\varphi(x) f_n(x) - \varphi(x) f_m(x)| = |\varphi(x)||f_n(x) - f_m(x)| \leqslant M|f_n(x) - f_m(x)|.$$

由柯西准则知 $\{\varphi f_n\}$ 在 D 上一致收敛.

8.3 极限函数的分析性质

本节考察一致收敛函数序列的极限函数的分析性质, 这问题的实质是交换两个极限运算的次序.

定理 (极限函数的连续性) : 设函数序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 若每个 f_n 在区间 I 上连续, 则 f 也在区间 I 上连续.

思路

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

证明 对任意的 n, 由于 f_n 在 x_0 处连续, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in I$ 且 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

因为 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 因此对上述 ε, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

取定一个 $n > N$, 则

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

注: 上述定理的结论可以写为

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

注: 上述定理的逆命题一般不成立, 也就是说, 一列连续的函数逐点收敛于一个连续函数, 我们不能得到该收敛是一致的. 但是, 若加强一些条件, 则有下面的 Dini 定理, 它是上述定理的部分逆命题.

定理 (Dini 定理) : 设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 f, 且

(1) $\{f_n\}$ 连续.

(2) f 连续.

(3) $\{f_n\}$ 单调.

那么 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

下面我们看看一致收敛序列是如何与积分相互作用的.

定理 (极限与积分交换次序) : 设黎曼可积函数序列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\{f_n\}$ 的极限函数也在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明　设极限函数为 f, 我们先证 f 是黎曼可积的, 也即证明 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in[a,b]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

也即

$$f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon.$$

上式两端在 $[a,b]$ 上求积分得

$$\underline{\int_a^b}[f_n(x)-\varepsilon]\mathrm{d}x\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b}[f_n(x)+\varepsilon]\mathrm{d}x.$$

因为 f_n 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的, 因此

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\varepsilon(b-a)\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x+\varepsilon(b-a).$$

从而

$$0\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2\varepsilon(b-a).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

因此 f 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的.

下面我们证明 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$. 由上面的论述可知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\varepsilon(b-a).$$

因此

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们已经看到一致收敛可以很好地与连续性、极限、以及积分相互作用, 现在我们来考察一致收敛与导数是如何相互作用的.

首先我们要问的是, 如果 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 并且每一个 f_n 都是可微的, 那么这是否意味着 f 也是可微的呢? f_n' 是否也收敛于 f' 呢?

非常遗憾, 两个问题的答案都是否定的. 先看第二个问题的反例. 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上考虑函数 $f(x)=0$ 与函数序列

$$f_n(x) = n^{-\frac{1}{2}}\sin nx.$$

由 $d(f_n,f)\leqslant n^{-\frac{1}{2}}\to 0(n\to\infty)$ 我们得到 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f. 直接计算得

$$f_n'(x) = n^{\frac{1}{2}}\cos nx.$$

从而

$$|f_n'(0)-f'(0)| = n^{\frac{1}{2}} \to +\infty(n\to\infty).$$

因此 $\{f_n'\}$ 不逐点收敛于 f', 当然更不一致收敛于 f' 了. 即是说

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

下面我们再看第一个问题的反例. 考虑区间 $[-1,1]$ 上的函数序列

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}$$

与函数 $f(x)=|x|$. 因为

$$d(f_n,f) = \sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2} - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}+\sqrt{x^2}} \leqslant \frac{1}{n} \to 0(n\to\infty),$$

故 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f. 注意到每个 f_n 都是可微的, 但是 f 在 $x=0$ 处不可微. 由此可见, 可微函数的一致收敛极限不一定可微.

总之, 函数序列 $\{f_n\}$ 的一致收敛不能给出任何有关导函数序列 $\{f_n'\}$ 收敛的信息. 但是, 只要 $\{f_n\}$ 在至少一点处收敛, 反过来的结论就是成立的.

定理 (极限与求导交换次序) : 设定义在 $[a,b]$ 上的函数序列 $\{f_n\}$ 满足:

(1) $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上连续可微.

(2) $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g.

(3) $\{f_n\}$ 至少有一个收敛点 x_0.

那么 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某可微函数 f, 且 $f'=g$.

注: 上述结论可以表述为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x).$$

注: 实际上, 当我们不假定导函数 f_n' 连续时, 上述定理仍然成立, 但是证明难度会增大.

8.4 函数项级数的逐点收敛与一致收敛

数项级数的收敛性是通过部分和数列来定义的. 与之类似, 我们通过部分和函数列来定义函数项级数的逐点收敛性与一致收敛性.

对于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 我们称 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和函数.

定义 (逐点收敛) : 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上逐点收敛于 $S(x)$, 则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上**逐点收敛**于 $S(x)$, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad x\in D.$$

定义 (一致收敛) : 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$, 则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上**一致收敛**于 $S(x)$, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad x\in D.$$

8.5 函数项级数一致收敛的判定

前面我们已经研究过函数序列的性质, 而函数项级数的收敛性就是利用函数序列的收敛性来定义的. 因此, 关于函数项级数的许多结论都可以由函数序列的相应结论给出.

定理 (柯西准则)：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的充要条件为对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意的正整数 p, 对任意的 $x\in D$, 有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

推论: 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛, 则序列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0.

证明　令柯西准则中的 $p=1$ 即可.

推论: 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.

证明　利用 $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|$ 即可.

定理 (魏尔斯特拉斯判别法, 优级数判别法)：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为 D 上的函数项级数, 若存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$, 使得

$$|u_n(x)|\leqslant M_n,\quad x\in D,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

证明　由级数收敛的柯西准则知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意的正整数 p, 有

$$\sum_{i=n+1}^{n+p}|u_i(x)|\leqslant\sum_{i=n+1}^{n+p}M_i=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}M_i\right|<\varepsilon.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 一致收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也一致收敛.

例　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则由魏尔斯特拉斯判别法判别法知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\quad\text{与}\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

在任何 $D\subseteq\mathbb{R}$ 上一致收敛.

魏尔斯特拉斯判别法只适用于判断绝对一致收敛的函数项级数. 对于条件收敛的函数项级数, 我们需要其他的判别方法.

定义: 若函数序列 $\{u_n(x)\}$ 满足

$$|u_n(x)|\leqslant M,\quad\forall x\in D,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上**一致有界**. 若函数项级数的部分和函数序列满足

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant M,\quad\forall x\in D,\quad n=1,2,\cdots$$

则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上**一致有界**.

定理 (狄利克雷判别法)：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数序列一致有界, $\{v_n(x)\}$ 单调且一致收敛于 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

证明 设 $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M$, 则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant 2M.$$

又因为 $\{v_n(x)\}$ 单调, 从而由阿贝尔引理知

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant 2M(|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|).$$

因为 $\{v_n(x)\}$ 一致收敛于 0, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意的 $x \in D$, 有

$$|v_n(x)| < \varepsilon.$$

因此对任意的正整数 p, 对任意的 $x \in D$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant 6M\varepsilon.$$

由柯西准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

定理 (阿贝尔判别法)：若 $\{u_n(x)\}$ 单调一致有界, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

证明 设 $|u_n(x)| \leqslant M$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 一致收敛, 由柯西准则知对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 对任意的 $n > N$ 与任意的正整数 p, 对任意的 $x \in D$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)\right| < \varepsilon.$$

由阿贝尔引理知

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \varepsilon(|u_{n+1}(x)| + 2|u_{n+p}(x)|) \leqslant 3M\varepsilon.$$

因此由柯西准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

8.6 一致收敛和函数的分析性质

定理 (连续性)：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$, 若每个 $u_n(x)$ 在 D 上连续, 则和函数 $S(x)$ 也在 D 上连续.

定理 (逐项积分)：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 若每个 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则和函数也在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 (逐项求导)：设有 $[a,b]$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足:

(1) 每个 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $T(x)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在至少一点 x_0 处收敛.

那么 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且其和函数 $S(x)$ 的导数为 $S'(x)=T(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

以上这些定理都只是充分条件, 不是充要条件.

定理 (Dini 定理)：设 $[a,b]$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 逐点收敛于 $S(x)$, 且

(1) 每个 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(3) 部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上单调.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

8.7 用多项式一致逼近连续函数

下面我们给出一个函数的例子, 这个函数处处连续但处处不可微, 它是由魏尔斯特拉斯首先发现的.

例 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}\cos(32^n\pi x).$$

由优级数判别法知左边的函数项级数是一致收敛的, 又因为每一项都是连续的, 因此 f 是一个连续函数. 但是, f 是一个处处不可微的函数.

正如我们所看到的那样, 连续函数有许多非常不好的性质, 比如它们可能处处不可微. 但是, 像多项式这样的函数, 性状却总是好的, 尤其是它们总是可微的. 幸运的是, 虽然大部分连续函数的性状没有多项式这么好, 但它们总可以用多项式一致逼近.

定义: 设有定义在 $[a,b]$ 上的函数 f. 若存在多项式序列 $\{P_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 一致收敛于 f, 则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可被多项式一致逼近.

注: 容易看出, 函数 f 能被多项式逼近的充要条件为: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得 $d(P,f) < \varepsilon$. 即是说, 对任意的 $x \in [a,b]$, 有

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

定理 (魏尔斯特拉斯逼近定理) : 闭区间 $[a,b]$ 上的任一连续函数 f 都可以用多项式一致逼近. 即是说, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 上的多项式 P 使得

$$d(P,f) < \varepsilon.$$

(也即对任意的 $x \in [a,b]$, 有 $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$.)

回忆一下, 多项式空间 $P[a,b]$ 是连续函数空间 $C[a,b]$ 的子空间. 于是, 魏尔斯特拉斯逼近定理断定了每一个连续函数都是 $P[a,b]$ 的一个附着点. 换言之, 多项式空间的闭包就是连续函数空间, 即

$$\overline{P[a,b]} = C[a,b].$$

此外, 魏尔斯特拉斯逼近定理还可以推广到更高维度的情形.

定理 (高维情形的魏尔斯特拉斯逼近定理) : 设 f 是紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 则 f 可用多项式一致逼近. 即是说, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 K 上的 n 元多项式 P 使得

$$d(P,f) < \varepsilon.$$

注: 事实上, 该定理还有一个更一般的形式, 被称为斯通-魏尔斯特拉斯定理, 这个定理适用于任何度量空间.

9 幂级数

现在我们来讨论一类重要的函数项级数——幂级数. 我们首先引入形式幂级数的概念, 然后在后面几节中, 集中研究幂级数何时收敛于一个有意义的函数, 以及该函数具有什么样的特征.

9.1 形式幂级数

定义 (形式幂级数)：设 $a \in \mathbb{R}$, $\{c_n\}_0^\infty \subseteq \mathbb{R}$, 我们称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

的级数为以 a 为中心的**形式幂级数**, 其中系数 c_n 与 x 无关.

例 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$ 是以 2 为中心的形式幂级数. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^x (x-3)^n$ 不是形式幂级数, 因为系数 2^x 与 x 有关.

之所以说这些幂级数是形式的, 是因为我们还未曾假设这些级数在任何一个 x 处收敛. 但是, 当 $x=a$ 时, 这些级数一定是收敛的. 在通常的情况下, x 离 a 越近, 级数就越容易收敛. 为了更精确的描述此事, 我们需要下面这个概念.

定义 (收敛半径)：设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 为形式幂级数, 我们称

$$R \triangleq \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

为该级数的**收敛半径**. 此处我们约定 $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

注: 上极限 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 一定是存在的, 并且一定介于 0 到 $+\infty$ 之间 (可以取到 0 与 $+\infty$).

例 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(-2)^n (x-3)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^n$ 的收敛半径是 0. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} (x+2)^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

收敛半径的重要性如下:

定理: 设形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 的收敛半径为 $R(\geqslant 0)$, 则

(1) (在收敛半径之内收敛) 对任意满足 $|x-a| < R$ 的 x, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 收敛 (因此也绝对收敛).

(2) (在收敛半径之外发散) 对任意满足 $|x-a| > R$ 的 x, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 发散.

对于下面的 (3)~(5), 我们假定 $R > 0$, 并记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R)$ 上逐点收敛的极限函数为 $f(x)$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ 在 $(a-R, a+R)$ 上内闭一致收敛于 $f(x)$(于是 f 在 $(a-R, a+R)$ 上连续).

(4) f 在 $(a-R, a+R)$ 上可微, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}$ 内闭一致收敛于 f'(因此可以逐项微分).

(5) f 在任意一个闭区间 $[b,c] \subseteq (a-R, a+R)$ 上可积 (因此由内闭一致收敛知可以在 $[b,c]$ 上逐项求积).

注: (1) 不难验证, 逐项求导得到的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R.

(2) 当 $|x-a|=R$, 也即 $x=a\pm R$ 时, 上述定理没有给出任何信息. 事实上, 在这些点处, 收敛与发散都是有可能的.

上述定理的 (1)(2) 给出了另一种求收敛半径的方法.

例 考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$. 当 $|x-1|<1$ 时, 该级数收敛; 当 $|x-1|>1$ 时, 该级数发散. 因此, 该级数的收敛半径为 1.

尽管形式幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $|x-a|=R$ 处既可能收敛, 也可能发散. 但是, 一旦它在这一边界点处收敛, 那么该幂级数就在这一点连续.

定理 (阿贝尔定理) : 设幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 的收敛半径为 R $(0<R<+\infty)$, 且在 $x=a+R$ 处收敛, 那么和函数 f 就在 $a+R$ 处连续:

$$\lim_{x\to a+R,\, x\in(a-R,a+R)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

类似地, 若该幂级数在 $x=a-R$ 处收敛, 那么和函数 f 就在 $a-R$ 处连续:

$$\lim_{x\to a-R,\, x\in(a-R,a+R)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-R)^n.$$

下面给出阿贝尔定理的一个简单应用.

例

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1-(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n,\quad x\in(0,2).$$

两边从 1 到 x 积分得

$$(\ln t)|_1^x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^x (1-t)^n \mathrm{d}t.$$

也即

$$\ln x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}.$$

注意到上式右端的级数在 $(0,2]$ 上是收敛的, 因此由阿贝尔定理知

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots.$$

9.2 实解析函数

能够表示成幂级数的函数有一个特殊的名字——实解析函数.

定义 (实解析函数) : 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的开子集, 函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 点 $a\in E$. 若存在 E 中的开区间 $(a-r,a+r)$(其中 $r>0$), 使得某个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 在 $(a-r,a+r)$ 上收敛于 f, 那么我们就称

f 在 a 处是实解析的. 若 f 在 E 中的每一点处都是实解析的, 则称 f 在 E 上是实解析的.

例 考虑定义在 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

(1) 该函数在 0 处是实解析的, 因为存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛于 f.

(2) 该函数在 2 处是实解析的, 因为存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$ 在 $(1,3)$ 上收敛于 f.

(3) 实际上, 该函数在整个 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 上都是实解析的, 即 f 是 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 上的实解析函数. 任取 $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, 则当 $|x-a|<|1-a|$ 时, 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}}.$$

注: 实解析与另一个概念——复解析有密切的联系. 但是复解析是复分析研究的内容, 在此不做讨论.

定理 (实解析函数是无限次可微的) : 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的开子集, 函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 是实解析函数, 则 f 在 E 上是无限可微的, 并且 f 的各阶导函数也都是 E 上的实解析函数.

思路 f 在每一点的邻域内都可展开为幂级数, 而幂级数在收敛半径内可以逐项求导任意有限多次, 因而是无限次可微的.

例 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可微, 从而在此处不可能实解析, 但是在其他任意一点 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 处都是实解析的.

需要注意的, 上述定理的逆命题是不成立的. 有一些函数是无限次可微的, 但并不是实解析的. 下面给出一个例子来满足你的好奇心, 但你现在不必深究它.

例 函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处无穷次可微, 且在 $x=0$ 处的各阶导数都为 0, 但 f 在 $x=0$ 处却不是实解析的.

推论 (泰勒公式) : 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的开子集, 函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 点 $a\in E$. 若 f 在 a 处实解析, 则存在 $r>0$, 对任意的 $x\in(a-r,a+r)$, 都有幂级数展式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n,$$

那么

$$f^{(k)}(a)=k!c_k,\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

进而

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

被称为 f 在 a 附近的泰勒级数. 因此, 泰勒公式断言了实解析函数等于自身的泰勒级数.

注: 泰勒公式仅适用于实解析函数. 有一些函数是无限次可微的, 但泰勒公式对它不成立.

定理 (幂级数的唯一性) : 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的开子集, 函数 $f: E\to\mathbb{R}$, $a\in E$. 若 f 在 a 处实解析, 且 f 有两个以 a 为中心的幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \quad 与 \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-a)^n,$$

并且它们的收敛半径都大于 0, 那么

$$c_n=d_n \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证明 因为

$$k!c_k=f^{(k)}(a)=k!d_k,$$

又 $k!\neq 0$, 因此 $c_k=d_k$.

一个实解析函数在给定点的附近只有唯一的幂级数, 但它在不同点的附近却一定会有不同的幂级数.

例 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 是 $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 上的实解析函数. 在 $x=0$ 附近, 它有幂级数展式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad x\in(-1,1).$$

在 $x=\dfrac{1}{2}$ 附近, $f(x)$ 有幂级数展式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n, \quad x\in(0,1).$$

9.3 幂级数的乘法

现在, 我们来证明两个实解析函数的乘积仍然是实解析函数.

定理 (幂级数的乘法) : 设 f 与 g 都是 $(a-r,a+r)$ 上的实解析函数, 且

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n,$$
$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-a)^n.$$

那么 $fg:(a-r,a+r)\to\mathbb{R}$ 也是实解析的, 并且

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e_n(x-a)^n,$$

其中

$$e_n=\sum_{k=0}^{n}c_kd_{n-k}.$$

注: 序列 $\{e_n\}_0^\infty$ 也被叫做序列 $\{c_n\}_0^\infty$ 与 $\{d_n\}_0^\infty$ 的卷积, 它与 §0.6 中的卷积概念有密切的联系, 但不完全相同.