目录

1 命题演算

1.1 命题、联结词与真值表

数理逻辑的一个最基本概念就是命题.

定义 (命题) : 我们把满足以下条件的语句称为命题:

(1) 是陈述句.

(2) 非假即真, 非真即假.

习惯上我们使用 p, q, r 等字母来表示命题. 下面的例子向你展示了如何判断一个语句究竟是不是命题, 而我们使用的工具就是上面给出的定义.

例 1 (命题的判定)

(1) "$2 > 1$" 是真命题.

(2) "$3 < -1$" 是假命题.

(3) "$x < y$" 不是命题. (没有确定的真假值)

(4) "P=NP" 是命题. (真假性是确定的, 只是目前无法判定)

(5) "我在说假话" 不是命题. (悖论不是命题)

为了研究的方便, 我们对命题引入真值这一概念. 你会在后面的学习中看到这种规定的合理性与优越性.

定义 (真值) : 若一个命题为真, 则称该命题的真值为 1; 若一个命题为假, 则称该命题的真值为 0.

为了建立命题演算形式系统, 我们需要先定义所谓的 "命题的运算". 在这一过程中, 我们需要使用以下 5 种命题联结词:

(1) 否定 ($\neg$) .

(2) 合取 ($\wedge$) .

(3) 析取 ($\vee$) .

(4) 蕴含 ($\rightarrow$) .

(5) 等价 ($\leftrightarrow$) .

上面的 5 个联结词可以将原始命题 (又叫支命题) 通过逻辑关系组成复合命题, 因此它们的重要性不言而喻. 下面我们一起来具体地来看一下这 5 个联结词.

(1) **否定**

否定用符号 $\neg$ 表示, 它的意思相当于中文中的 "非"、"不是" . 我们用 $\neg p$ 表示命题 p 的否定, 它对应的真值表为

p	$\neg p$
1	0
0	1

(2) **合取**

合取用符号 $\wedge$ 表示, 它的意思相当于中文中的 “且”. 当 p 与 q 均为真时, $p \wedge q$ 才为真. 只要 p 与 q 中有一个为假, $p \wedge q$ 就为假. 简单来说就是 “全真才真”. 合取对应的真值表为

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(3) **析取**

析取用符号 $\vee$ 表示, 它的意思相当于中文中的 “或”. 只要 p 与 q 有一个为真, $p \vee q$ 就为真. 只有当 p 与 q 均为假的时候, $p \vee q$ 才为假. 简单来说就是 “全假才假”. 析取对应的真值表为

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(4) **蕴含**

蕴含用符号 $\to$ 表示, 它的意思相当于中文的 “如果 $\cdots$, 那么 $\cdots$”. 只要 q 为真, 那么 $p \to q$ 必为真. 只要 p 为假, 那么 $p \to q$ 也必定为真. 只有当 p 为真且 q 为假时, $p \to q$ 才为假. 用一句话来概括就是 “前真后假才假”. 用符号的语言来描述, 就是

$$p \to q \quad \Longleftrightarrow \quad \neg p \vee q.$$

蕴含对应的真值表为

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

需要注意的是, 我们是纯粹地从形式上考察 $p \to q$, 因此这里的 p 与 q 是可以没有因果关系的 (其他几个联结词也是这样).

(5) **等价**

等价用符号 $\leftrightarrow$ 来表示, 它的意思相当于中文的 “当且仅当”. 当 p 与 q 同时为真或同时为假时, $p \leftrightarrow q$ 为真. 当 p 与 q 的真假性不同时, $p \leftrightarrow q$ 为假. 和你所想的一样, 等价其实就相当于双向的蕴

含, 即

$$p \leftrightarrow q \quad \Longleftrightarrow \quad (p \to q) \wedge (q \to p).$$

等价对应的真值表为

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

我们已经介绍完了 5 种基本的命题联结词, 现在我们对它们的运算顺序作如下规定: 一元运算优先于二元运算 (即 $\neg$ 优先于另外四种运算), 有括号的先算括号内的.

例 2 $\neg p \wedge q$ 表示先对 p 作否定运算得到 $\neg p$, 再将 $\neg p$ 与 q 作合取运算.

例 3 $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$ 表示对命题 $p \vee q$ 与 $\neg p \to q$ 作等价运算.

利用前面的 5 种联结词, 我们可以将命题形式化.

例 4 设命题 p 为 "小红正在 302 教室上课", 命题 q 为 "小红正在 405 教室上课", 则 "小红正在 302 或 405 教室上课" 就是命题 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

注: 由于上面例题中的 p、q 不可能同时发生, 因此 "小红正在 302 或 405 教室上课" 不能用 $p \vee q$ 表示.

我们常用真值表来判断由支命题构成的复合命题的真假性.

例 5 (真值表的画法) 作出 $\neg p \wedge q$ 的真值表.

解 将 $\neg p \wedge q$ 分为 4 列: "$\neg$"、"p"、"$\wedge$"、"q", 然后

(1) 写出 p 列与 q 列的全部真值组合: $(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)$.

(2) 根据 p 列在 $\neg$ 列写出 $\neg p$ 的真值.

(3) 根据 $\neg$ 列与 q 列在 $\wedge$ 列写出 $\neg p \wedge q$ 的真值.

最终结果为

$\neg$	p	$\wedge$	q
0	1	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0

其中 $\wedge$ 所在的列就是 $\neg p \wedge q$ 最终的真值情况. (前面罗列的那些步骤只是为了向你展示真值表的画法, 实际作答过程中不必写出.)

不难看出, 若一个复合命题有 n 个支命题, 那么相应的真值组合就有 2^n 种情况. 例如

$$(p \vee q) \to (\neg r \wedge q)$$

有三个支命题 p, q, r, 那么它的真值组合就有 8 种情况.

定义 (成真指派) : 我们把使得复合命题的真值为 1 的由各个支命题的真值组成的有序数组叫做该复合命题的成真指派, 其余的则称为成假指派.

例 6 写出 $\neg p \wedge q$ 的成真指派与成假指派.

解 由 $\neg p \wedge q$ 的真值表

$\neg$	p	$\wedge$	q
0	1	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0

即得 $\neg p \wedge q$ 的成真指派为 $(0, 1)$, 其余三种指派 $(1, 1), (1, 0), (0, 0)$ 均为成假指派.

定义 (永真式) : 只有成真指派, 没有成假指派的命题称为永真式.

通过直接画真值表, 我们能够得到 $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$ 是永真式, 因此 $\vee$ 可用 $\neg$ 与 $\to$ 表示. 同样的, $p \wedge q \leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$ 与 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$ 也都是永真式, 因此 $\wedge$ 与 $\leftrightarrow$ 也都可以用 $\neg$ 与 $\to$ 来表示. 换句话说, 我们得到了下面的结果.

引理: 在五个联结词中, 合取 $\wedge$、析取 $\vee$ 与等价 $\leftrightarrow$ 均可用否定 $\neg$ 与蕴含 $\to$ 来表示.

1.2 命题演算公式集

我们已经知道了合取 $\wedge$、析取 $\vee$ 与等价 $\leftrightarrow$ 均可用否定 $\neg$ 与蕴含 $\to$ 来表示. 因此为了方便起见, 在建立命题演算的时候, 我们只采用 $\neg$ 与 $\to$ 这两个联结词. 当然, 除了这两个联结词之外, 我们还需要命题变元 $x_1, x_2, \cdots$. 这样一来, 我们就得到了构成公式所需的全部材料:

$$\underbrace{\neg\,,\,\to}_{\text{运算符}},\ \underbrace{x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_n\,,\,\cdots}_{\text{命题变元}}$$

定义 (公式) : 我们采用如下的递归方式来定义公式:

(1) 命题变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是公式.

(2) 若 p 是公式, 那么 $\neg p$ 是公式. 若 p, q 是公式, 那么 $p \to q$ 是公式.

对于一个给定的命题变元集 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$(有限或者可数), 我们用记号 $L(X)$ 来表示 X 中的所有命题变元生成的全体公式所成的集合. 此外, 我们将命题变元经过 i 次运算得到的全体公式所成集合记为 L_i, 那么

$$L(X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n \cup \cdots .$$

可以证明, 上述并集是一个无交并. 换句话说, 我们有下面的结论.

定理 ($L(X)$ 的分层性) : 对任意的 $i \neq j$, 都有 $L_i \cap L_j = \varnothing$.

例 1 ($\star$) 设 $X = \{x_1, x_2\}$, 写出 $L(X)$ 的 L_0, L_1.

解 L_0, L_1 如下:

$$L_0 = \{x_1, x_2\},$$
$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \to x_1, x_1 \to x_2, x_2 \to x_1, x_2 \to x_2\}.$$

1.3 字母串与权重

从字母表

$$\neg\, ,\to ,\, x_1\, ,\, x_2\, ,\, \cdots\, ,\, x_n\, ,\, \cdots$$

中选出有限个字母形成的字母串有各种各样的组合方式, 比如

$$x_1 \to\to x_2, \quad x_1x_2x_3\neg, \quad \neg\, x_1 \to x_2.$$

它们之中到底哪些是公式, 哪些不是公式呢? 要解决这一问题, 我们首先可以想到的是利用公式的定义. 没错, 这确实是一个方法. 但是如果对遇见的每一个字母串都去验证定义的话, 未免过于繁琐. 为了能够更为方便地进行判断, 我们对每一个字母引入了所谓的"权重".

定义 (字母的权重): 对于字母表 $\{\neg, \to, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 中的每一个字母, 我们定义它们的权重分别为

$$w(\neg) = 0, \quad w(\to) = -1, \quad w(x_i) = 1.$$

有了每个字母的权重, 下面我们就能定义字母串的权重了.

定义 (字母串的权重): 对字母串 $u_1u_2\cdots u_n$, 我们定义它的权重为

$$w(u_1u_2\cdots u_n) = w(u_1) + w(u_2) + \cdots + w(u_n).$$

此外, 我们规定空串的权重为 0.

为了避免使用括号, 我们在考察字母串的权重时一律将 $p \to q$ 写为 $\to pq$. 下面来看一些例子, 它们会帮助你理解如何计算字母串的权重.

例 1 (字母串权重的计算) ($\star$)

(1) $w(x_1x_2x_3 \to) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$.

(2) $w(\to \neg\, x_1x_2) = -1 + 0 + 1 + 1 = 1$.

定义 (真前段): 设有字母串 $u_1u_2\cdots u_n$, 我们称

$$u_1u_2\cdots u_k(\text{其中 } k < n)$$

为 $u_1u_2\cdots u_n$ 的真前段. 换言之, 真前段就是去掉尾部若干字母 (至少去掉 1 个) 得到的新字母串. 此外, 我们允许真前段为空串.

例 2 空串, $\neg$, $\neg x_1$, $\neg x_1 x_2$ 均为字母串 $\neg x_1 x_2 \neg$ 的真前段.

下面是本节的一个重要结果, 注意我们在前面画横线处所作的规定 "将 $p \to q$ 写为 $\to pq$" 是不可或缺的.

命题 (字母串是公式的必要条件) : 若一个字母串是公式, 那么它的权重必定为 1, 且它所有真前段的权重均小于 1.

例 3 字母串 $x_1 \neg$ 不是公式, 因为它的真前段 x_1 的权重 $w(x_1) = 1$, 不满足小于 1 这一条件.

1.4 命题演算 L

定义 (命题演算) : 我们把带有如下 "公理" 与 "证明" 的公式集 $L(X)$ 称为命题演算 L :

1° 取 $L(X)$ 中以下形状的公式作为命题演算的 "公理" :

(L1) $p \to (q \to p)$, (肯定后件律)

(L2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$, (蕴含词分配律)

(L3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ 或 $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$. (换位律)

2° 设 p 是某个公式, Γ 是某公式集, 我们把符合下述条件的序列 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 Γ 中的证明: 若存在一个有限的公式序列 $p_1, \cdots, p_n$, 使得最后一个公式 p_n 是要证明的公式 p, 且这个序列中的每个公式来自以下几种情况:

(1) 来自 Γ ;

(2) 来自 $L(X)$ 中的公理;

(3) 由 p_i 与 $p_i \to p_k$ 得到 p_k. 此时我们称由假言推理 (Modus Ponens, 简称 MP) 得到了 p_k.

定义 (语法推论) : 我们将 "公式 p 从公式集 Γ 可证" 记为 $\Gamma \vdash p$, 这里的 Γ 叫做 "假定" , p 称为 Γ 的语法推论. 此外, 若 $\varnothing \vdash p$, 则称 p 是命题演算 L 的 "定理" , 记为 $\vdash p$.

下面我们通过一个具体的例子看一下证明的基本流程以及 MP 规则的使用方法.

例 1 证明 $\{p\} \vdash q \to p$.

证明 以下是 $q \to p$ 在 L 中的一个证明.

(1) p 假定

(2) $p \to (q \to p)$ (L1)

(3) $q \to p$ (1), (2), MP

定义 (无矛盾公式集) : 如果对任意公式 p, $\Gamma \vdash p$ 与 $\Gamma \vdash \neg p$ 都不同时成立, 则称 Γ 是无矛盾公式集, 否则称为有矛盾公式集.

命题 (有矛盾公式集的任意可证性) : 若 Γ 是有矛盾公式集, 则任一公式 p 都从 Γ 中可证.

现在我们在命题演算 L 中定义三个新的运算析取 $\vee$、合取 $\wedge$ 与等价 $\leftrightarrow$ 为:

$$
\begin{aligned}
&p \vee q = \neg p \to q, \\
&p \wedge q = \neg (p \to \neg q), \\
&p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p).
\end{aligned}
$$

1.5 命题演算中的常用结论

我们将证明过程中常用的结论总结如下, 它们都可以直接使用.

1. $p \to (q \to p)$ (肯定后件律, L1)
2. $\neg p \to (p \to q)$ (否定前件律)
3. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (蕴含词分配律, L2)
4. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ 或 $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ (换位律, L3)
5. $p \to p$ (同一律)
6. $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$ (假设三段论, HS)
7. $\{p, p \to q\} \vdash q$ (假言推理, MP)
8. $(\neg p \to p) \to p$ (否定肯定律)
9. $\neg\neg p \to p$ (第一双重否定律)
10. $p \to \neg\neg p$ (第二双重否定律)
11. $\Gamma \vdash p \to q \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{p\} \vdash q$ (演绎定理)
12. $\left.\begin{array}{l} \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma \vdash p$ (反证律)
13. $\left.\begin{array}{l} \Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma \vdash \neg p$ (归谬律)

注: (1) 演绎定理说明: 如果要从 Γ 中证得 $p \to q$, 我们可以把 p 当做已知条件, 从 $\Gamma \cup \{p\}$ 中证得 q 即可. (显然, 多了一个已知条件 p, 证明的难度一般来说会小一些.)

(2) 反证律说明: 如果我们想要从 Γ 中证得 p, 我们可以先假设 p 不成立 (即把 $\neg p$ 当做已知条件), 然后从 $\Gamma \cup \{\neg p\}$ 中得到两个相互矛盾的结论 q 与 $\neg q$. 这说明原假设是错误的, 从而 $\Gamma \vdash p$.

(3) 归谬律与反证律类似.

例 1 证明 $\vdash (\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$.

证明 使用两次演绎定理我们只需证明 $\{\neg p \to \neg q, \neg p \to q\} \vdash p$, 下面我们使用反证律进行证明. 将 $\neg p$ 作为新的假定, 以下是一个证明.

(1) $\neg p \to \neg q$ 假定

(2) $\neg p \to q$ 假定

(3) $\neg p$ 新假定

(4) $\neg q$ (1), (3), MP

(5) q (2), (3), MP

由 (4), (5) 与反证律即得结论.

1.6 真值函数、赋值、永真式与语义推论

定义 (真值函数) : 我们把映射 $f : \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n\text{个}} \to \mathbb{Z}_2$ 称为 n 元真值函数, 其中 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

将正整数 n 取定, 那么 n 元真值函数的定义域有 $X = 2^n$ 个元素, 而每个点的取值为 0 或 1, 因此一共有 $2^X = 2^{2^n}$ 个不同的 n 元真值函数.

定义 (否运算) : 我们把一元真值函数

$$\begin{aligned} f_{\text{非}} : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ 0 &\longmapsto 1 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

称为 "非" 运算或 "否" 运算, 并将 $f_{\text{非}}(v)$ 记为 $\neg v$.

定义 (蕴含运算) : 我们把二元真值函数

$$\begin{aligned} f_{\text{蕴含}} : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ (1,1) &\longmapsto 1 \\ (1,0) &\longmapsto 0 \\ (0,1) &\longmapsto 1 \\ (0,0) &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

称为 "蕴含" 运算, 并将 $f_{\text{蕴含}}(v_1, v_2)$ 记为 $v_1 \to v_2$.

定义 (析取、合取、等价运算) : 我们把由

$$\begin{aligned} &v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2, \\ &v_1 \wedge v_2 = \neg (v_1 \to \neg v_2), \\ &v_1 \leftrightarrow v_2 = (v_1 \to v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \end{aligned}$$

确定的二元真值函数 $\vee$、$\wedge$、$\leftrightarrow$ 分别称为析取、合取、等价运算.

命题: 任一 n 元真值函数均可由非运算 $\neg$ 与蕴含运算 $\to$ 表示出来.

由定义可以直接验证下面的结论成立.

命题: 设 $v, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, 那么 (下面这些等式的意思是不论变量如何取值, 等号两边的值一定相等)

(1) $\neg\neg v = v$.

(2) $1 \to v = v$.

(3) $v \to 1 = 1$.

(4) $v \to 0 = \neg v$.

(5) $0 \to v = 1$.

不难发现这些性质与我们的直观是完全一致的.

定义 (赋值) : 若映射 $v : L(X) \to \mathbb{Z}_2$ 具有保运算性, 即对任意的 $p, q \in L(X)$, 有

(1) $v(\neg p) = \neg v(p)$;

(2) $v(p \to q) = v(p) \to v(q)$;

则称 v 是 $L(X)$ 的一个赋值.

由于任一 n 元真值函数均可由非运算 $\neg$ 与蕴含运算 $\to$ 表示出来, 因此我们有下面的结论.

命题: $L(X)$ 的赋值 v 对 $\vee$、$\wedge$ 与 $\leftrightarrow$ 也具有保运算性.

定义 (真值指派) : 我们称映射 $\bar{v} : X \to \mathbb{Z}_2$ 为命题变元的真值指派. 换言之, 真值指派就是为每个命题变元 x_i 指定 0 与 1 中的一个数.

例 1 公式 $(x_1 \vee x_2) \to x_1$ 的真值表为

$(x_1$	$\vee$	$x_2)$	$\to$	x_1
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

由此可以看出 $(1,1), (1,0), (0,0)$ 是该公式的成真指派, $(0,1)$ 是该公式的成假指派.

定义 (永真式) : 若公式 p 的真值函数取常值 1, 则称 p 为永真式, 记为 $\vDash p$. 换言之, 永真式就是只有成真指派, 没有成假指派的公式, 即

$$p\text{为永真式} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{对任意赋值 } v, \text{都有 } v(p) = 1.$$

设 p, q, r 是 L 的任意公式, 以下是一些常用的永真式.

1. $\vDash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ (交换律)

2. $\vDash (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ (交换律)

3. $\vDash ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (结合律)

4. $\vDash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (结合律)

5. $\vDash (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (分配律)

6. $\vDash (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (分配律)

7. $\vDash \neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (德摩根律)

8. $\vDash \neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (德摩根律)

定义 (永假式) : 若 $\neg p$ 是永真式, 则称 p 为永假式. 非永假式称为可满足公式.

定义 (语义推论) : 若公式集 $\Gamma \subseteq L(X)$ 中所有公式的任一公共成真指派都是 p 的成真指派, 则称 p 是公式集 Γ 的语义推论, 记作 $\Gamma \vDash p$.

当 Γ 是空集时, 上述定义就变成了对 $L(X)$ 的任意赋值 v, 都有 $v(p) = 1$, 即 p 为永真式, 也即 $\vDash p$, 因此 $\varnothing \vDash p$ 其实就是 $\vDash p$. 这说明了我们所采用的记号是合理的.

例 2 证明 $\{\neg p\} \vDash p \to q$.

证明 设 v 为 $L(X)$ 中任一满足 $v(\neg p) = 1$ 的赋值, 则 $\neg v(p) = 1$, $v(p) = 0$, 从而

$$\begin{aligned} v(p \to q) &= v(p) \to v(q) \\ &= 0 \to v(q) \\ &= 1. \end{aligned}$$

因此 $\{\neg p\} \vDash p \to q$.

不难发现上面的例子其实是否定前件律 $\neg p \to (p \to q)$ 的语义版. 类似地, 我们有语义版的 MP 规则与演绎定理.

命题 (语义版 MP 规则) : $\Gamma \vDash p$ 且 $\Gamma \vDash p \to q \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vDash q$.

命题 (语义版演绎定理) : $\Gamma \vDash p \to q \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \cup \{p\} \vDash q$.

下面给出命题演算 L 的一个重要性质, 它将 L 的语法和语义联系了起来.

定理 (命题演算 L 的可靠性与完全性) : $\Gamma \vdash p \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash p$.

注: 上述定理包含两个方向, 其中

(1) 方向 $\Gamma \vdash p \implies \Gamma \vDash p$ 代表 L 的可靠性, 它说明在 L 中一切可被证明的都是对的;

(2) 方向 $\Gamma \vDash p \implies \Gamma \vdash p$ 代表 L 的完全性, 它说明在 L 中一切对的都是可被证明的.

1.7 等值公式与对偶公式

不同的公式可能有相同的真值函数. 例如 $\neg x_1 \wedge \neg x_2$, $\neg (x_1 \vee x_2)$ 与 $\neg (\neg x_1 \to x_2)$ 这三个公式的真值函数是相同的:

$$\neg v_1 \wedge \neg v_2 = \neg (v_1 \vee v_2) = \neg (\neg v_1 \to v_2).$$

定义 (等值公式): 若 $p \leftrightarrow q$ 是永真式, 则称 p 与 q 是等值的.

易知

$$p \text{ 与 } q \text{ 是等值的} \iff \text{对任意赋值 } v \text{ 都有 } v(p) = v(q).$$

不难验证公式的等值具有 (1) 自反性: p 与 p 等值; (2) 对称性: 若 p 与 q 等值, 则 q 与 p 等值; (3) 传递性: 若 p 与 q 等值, q 与 r 等值, 则 p 与 r 等值. 因此等值是 $L(X)$ 上的一个等价关系, 从而给出了 $L(X)$ 的一个分类——互相等值的公式属于同一等价类, 且具有相同的真值函数.

前面我们说过, 不同的 n 元真值函数有 2^{2^n} 个, 因此对于 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 而言, 尽管 $L(X)$ 有无穷多个公式, 但本质上语义不同的只有 2^{2^n} 种.

我们用 $p = \cdots q \cdots$ 表示 q 是 p 的子公式.

命题 (子公式的等值可替换性): 若 q 与 q' 等值, 则 $\cdots q \cdots$ 与 $\cdots q' \cdots$ 等值.

例 1 因为 $\neg\neg x_2$ 与 x_2 等值, 因此 $\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2 \wedge \neg x_3$ 与 $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$ 等值.

定义 (公式的对偶): 设公式 p 已经被写为了只含有命题变元和运算 $\neg, \vee, \wedge$ 的形式. 将每个命题变元改为各自的否定, $\vee$ 改为 $\wedge$, $\wedge$ 改为 $\vee$, 我们把这样得到的公式称为 p 的对偶, 记作 p^*.

例 2 (⋆) 公式 $p = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge x_3$ 的对偶是 $p^* = (\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2) \vee \neg x_3$.

注: 如果公式中含有 $\rightarrow$ 或 $\leftrightarrow$, 我们需要先将其化为只含 $\neg, \vee, \wedge$ 的形式, 再求它的对偶.

命题 (对偶律): p^* 与 $\neg p$ 是等值的.

1.8 析取范式与合取范式

定义 (基本析取式与基本合取式): 我们把形如 $y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_n$ 的公式称为基本析取式, 把形如 $y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_n$ 的公式称为基本合取式, 其中每个 y_i 是命题变元或命题变元的否定.

任给一个基本析取式, 我们很容易判断它是否为永真式, 这只需要看公式中是否有某个 x_k 与 $\neg x_k$ 同时出现. 同样, 任给一个基本合取式, 我们很容易判断它是否为永假式, 这仍然只需要看公式中是否有某个 x_k 与 $\neg x_k$ 同时出现.

例 1 基本析取式 $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_1$ 是永真式.

例 2 基本合取式 $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2$ 是永假式.

容易发现基本析取式最多有一个成假指派, 基本合取式最多有一个成真指派.

例 3 基本析取式 $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ 有唯一的成假指派 $(0, 1, 0)$.

例 4 基本合取式 $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ 有唯一的成真指派 $(0, 1, 1)$.

定义 (析取范式与合取范式): 形如 $\bigvee_{i=1}^{s}\left(\bigwedge_{j=1}^{t} y_{ij}\right)$ 的公式叫做析取范式, 形如 $\bigwedge_{i=1}^{s}\left(\bigvee_{j=1}^{t} y_{ij}\right)$ 的公式叫做合取范式.

例 5 $(x_1 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_5 \wedge x_4 \wedge \neg x_1)$ 是析取范式.

例 6 $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_5 \vee x_4 \vee \neg x_1)$ 是合取范式.

例 7 (⋆) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$ 既是析取范式又是合取范式. 作为析取范式, 它只有唯一的一个析取支 $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$; 作为合取范式, 它有三个合取支 $x_1, \neg x_2$ 与 x_3.

定义 (主析取范式与主合取范式) : 若在析取范式的每个析取支中, 每个命题变元按下标由小到大的顺序都出现且只出现一次, 则称该析取范式为主析取范式. 主合取范式类似定义, 只需要把 “每个析取支” 改为 “每个合取支” .

例 8 $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$ 是主析取范式.

例 9 $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ 是主合取范式.

下面我们通过例题来看一下如何求出与给定的公式等值的主析取范式与主合取范式.

例 10 ($\star$) 求 $p = (x_1 \to x_2) \to x_3$ 的等值主析取范式与等值主合取范式.

解 p 的成真指派是

$$(1,1,1), \quad (1,0,1), \quad (1,0,0), \quad (0,1,1), \quad (0,0,1).$$

由此得 p 的等值主析取范式为 (1 对应 x_i 自身, 0 对应 $\neg x_i$. 例如成真指派 $(1,0,1)$ 对应 $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$)

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3).$$

$\neg p$ 的成真指派是

$$(1,1,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,0),$$

因此 $\neg p$ 的等值主析取范式为

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3).$$

将上式取对偶即得 p 的等值主合取范式

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

2 谓词演算

2.1 谓词演算的建立

个体变元集 $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$, 个体常元集 $C = \{c_1, c_2, \cdots\}$.

运算集 $F = \{f_1^1, f_2^1, \cdots, f_1^2, f_2^2, \cdots, f_i^n, \cdots\}$, 这里 f_i^n 表示第 i 个 n 元运算.

谓词集 $R = \{R_1^1, R_2^1, \cdots, R_1^2, R_2^2, \cdots, R_i^n, \cdots\}$, 这里 R_i^n 表示第 i 个 n 元关系. 注意谓词集不能是空集.

定义 (项) : 我们采用递归的方式定义项:

(1) 个体变元 x_i 与个体常元 c_i 都是项;

(2) 若 $t_1, \cdots, t_n$ 是项, 则 $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是项;

(3) 任意项皆由规则 (1) (2) 的有限次使用形成.

此外, 我们把项的全体所成集合称为项集, 记为 T.

当运算符集 $F=\varnothing$ 时, $T=X\cup C$. 当 $F\neq\varnothing$ 时, 项集 T 可以分层:

$$T=T_0\cup T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k\cup\cdots,$$

其中 T_k 中的项是 T_0 中的项经过 k 次运算而得到的.

例 1 x_1, c_1 是 T_0 中的项, $f_1^1(x_1), f_1^2(c_1,x_2)$ 是 T_1 中的项, $f_1^1(f_1^1(x_1)), f_1^2(c_1,f_1^1(x_2))$ 是 T_2 中的项.

定义 (原子公式): 我们把

$$Y=\bigcup_{i,n}\Big(\{R_i^n\}\times\underbrace{T\times\cdots\times T}_{n\text{ 个}}\Big)=\{(R_i^n,t_1,\cdots,t_n)\mid R_i^n\in R, t_1,\cdots,t_n\in T\}$$

称为原子公式集, 里面的元素称为原子公式. 以后我们把原子公式 $(R_i^n,t_1,\cdots,t_n)$ 记为 $R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$.

我们使用以下材料构成谓词演算中的公式:

(1) 原子公式: $R_i^n(t_1,\cdots,t_n),\cdots$; (2) 联结词: $\neg,\rightarrow$; (3) 全称量词: $\forall$.

定义 (公式): 我们按如下递归的方式形成谓词演算的公式:

(1) 每个原子公式 $R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 是公式;

(2) 若 p,q 是公式, 则 $\neg p$, $p\rightarrow q$, $\forall xp$ 也是公式;

(3) 任一公式皆由 (1) (2) 两条规则经有限次使用得到.

我们用 $K(Y)$ 表示全体公式所成的集合. 此外不难发现原子公式类似于命题变元, $K(Y)$ 类似于 $L(X)$, 它们都具有分层性. 注意公式中必须含有谓词 R_i^n.

例 2 ($\star$) $R_1^2(x_1,f_1^2(x_2,c_1))$ 与 $\forall x_1R_1^1(x_1)\rightarrow R_1^2(x_1,x_2)$ 是公式, 而 $f_2^2(c_1,f_1^1(x_1))$ 不是公式, 因为它不含有谓词 R_i^n.

除了 $\neg,\rightarrow$ 与 $\forall x$ 之外, 我们还可以在 $K(Y)$ 上定义新运算 $\vee,\wedge,\leftrightarrow$ 与 $\exists x$(存在量词运算) 为

$$\begin{aligned}
&p\vee q=\neg p\rightarrow q,\\
&p\wedge q=\neg(p\rightarrow\neg q),\\
&p\leftrightarrow q=(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p),\\
&\exists x\,p=\neg\forall x\neg p.
\end{aligned}$$

当然我们需要注意量词运算的作用范围, 例如 $\forall x(p\rightarrow q)$ 中 $\forall x$ 的作用范围是 $p\rightarrow q$, 而 $\forall x\,p\rightarrow q$ 中 $\forall x$ 的作用范围是 p.

2.2 自由出现与自由替换

定义 (变元的自由出现): 在一个公式中, 若个体变元 x 的出现不在 $\forall x$、$\exists x$ 或者 $\forall x$、$\exists x$ 的作用范围中, 则称 x 是自由出现的, 否则称为约束出现的.

例 1 在公式

$$\forall x_1\left(R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_2\,R_1^1(x_2)\right)$$

中, 两个 x_1 都是约束出现, 第一个 x_2 是自由出现, 第二、第三个 x_2 是约束出现.

定义 (项 t 对变元 x 在公式 p 中可自由代换): 如果对项 t 中的任一变元 y, 公式 p 中 x 的任意自由出现都不在 $\forall y$ 或 $\exists y$ 的作用范围内, 则称项 t 对 x 在公式 p 中可自由代换.

例 2 (⋆) 项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对 x_2 在公式 $\forall x_1 R_1^1(x_2)$ 中是不自由的, 而项 $f_1^2(x_4, x_3)$ 对 x_2 在公式 $\forall x_1 R_1^1(x_2)$ 中是自由的.

例 3 (⋆) 项 $f_1^2(x_1, x_4)$ 对 x_2 在 $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 R_2^2(x_3, x_1)$ 中是不自由的, 而 $f_2^2(x_2, x_3)$ 对 x_2 在 $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 R_2^2(x_3, x_1)$ 中是自由的.

2.3 谓词演算 K

定义 (谓词演算): 我们把带有如下"公理"与"证明"的公式集 $K(Y)$ 称为谓词演算 K:

1° 我们取 $K(Y)$ 中以下形状的公式作为谓词演算 K 的"公理":

(K1) $p \to (q \to p)$.

(K2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

(K3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$.

(K4) $\forall x\, p(x) \to p(t)$, 其中项 t 对变元 x 在 $p(x)$ 中是自由的.

(K5) $\forall x\,(p \to q) \to (p \to \forall x\, q)$, 其中 x 不在 p 中自由出现.

2° 设 p 是某个公式, Γ 是某公式集, 我们把符合下述条件的序列 $p_1, \cdots, p_n$ 叫做 p 从 Γ 中的证明: 若存在一个有限的公式序列 $p_1, \cdots, p_n$, 使得最后一个公式 p_n 是要证明的公式 p, 且这个序列中的每个公式来自以下几种情况:

(1) 来自 Γ;

(2) 来自 $K(Y)$ 中的公理;

(3) 使用 MP 规则;

(4) 由 p_i 得到 $\forall x\, p_i$, 此时我们称由 p_i 使用"Gen"这条推理规则得到了 $\forall x\, p_i$. 这里的 Gen 是英语单词"Generalization"(推广) 的缩写.

注意公理 (K4) 中"项 t 对变元 x 在 $p(x)$ 中是自由的"这一条件是不可或缺的. 如果某公式具有 (K4) 型公理的形式, 但不满足这一条件, 那它就不是 (K4) 型公理.

例 1 (⋆) 公式

$$\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_3, x_2)$$

是 (K4) 型公理. 这是因为取 $p(x_1) = \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$, 项 $t = x_3$, 则上述公式变为 $\forall x_1\, p(x_1) \to p(t)$, 它具有 (K4) 型公理的形式. 此外, 由于项 $t = x_3$ 对变元 x_1 在 $p(x_1) = \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ 中是自由的, 因此上述公式确实是 (K4) 型公理.

例 2 (⋆) 公式

$$\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_2, x_2)$$

不是 (K4) 型公理. 事实上, 如果我们取 $p(x_1) = \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$, 项 $t = x_2$, 则上述公式变为 $\forall x_1\, p(x_1) \to$

$p(t)$, 它的确具有 (K4) 型公理的形式. 但是, 由于项 $t = x_2$ 对变元 x_1 在 $p(x_1) = \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$ 中是不自由的, 因此上述公式并不是 (K4) 型公理.

我们在以前所学的各种结论都可以在 K 中继续使用, 现在把我们常用的结果罗列如下.

1. $p \to (q \to p)$ (肯定后件律)
2. $\neg p \to (p \to q)$ (否定前件律)
3. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (蕴含词分配律)
4. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ 以及 $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ (换位律)
5. $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$ (假设三段论, HS)
6. $\{p, p \to q\} \vdash q$ (假言推理, MP)
7. $(\neg p \to p) \to p$ (否定肯定律)
8. $\neg\neg p \to p$ (第一双重否定律)
9. $p \to \neg\neg p$ (第二双重否定律)

命题 (演绎定理) :

(1) 若 $\Gamma \vdash p \to q$, 则 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$.

(2) 若 $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$, 且证明中所用的 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元就能得到 $\Gamma \vdash p \to q$.

命题 (反证律) : 若

$$\begin{cases} \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q \end{cases}$$

且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元就可以得到 $\Gamma \vdash p$.

命题 (归谬律) : 若

$$\begin{cases} \Gamma \cup \{p\} \vdash q \\ \Gamma \cup \{p\} \vdash \neg q \end{cases}$$

且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现, 则不增加新的 Gen 变元就可以得到 $\Gamma \vdash \neg p$.

注: 一般情况下上面的三个结论所需要的条件都是满足的, 因此我们可以放心大胆地使用它们.

最后需要提醒一点的是, 如果你忘记了结论的具体名称 (例如肯定后件律、第一双重否定律等), 可以在证明过程中写成“永真式”. 此外, 在某些时候我们需要自行构造永真式, 由于它没有特别的名字, 因此推理的理由也可以直接写为“永真式”.

例 3 (⋆) 设 x 不在 q 中自由出现, 证明 $\vdash \exists x (p \to q) \to (\forall x\, p \to q)$.

证明　先证 $\{\exists x\,(p \to q), \forall x\, p\} \vdash q$, 即证明 $\{\neg \forall x \neg (p \to q), \forall x\, p\} \vdash q$. 将 $\neg q$ 作为新的假定, 下面是一个证明.

(1) $\forall x\, p$ 假定

(2) $\forall x\, p \to p$ (K4)

(3) p (1), (2), MP

(4) $\neg q$ 新假定

(5) $p \to (\neg q \to \neg (p \to q))$ 永真式

(6) $\neg q \to \neg (p \to q)$ (3), (5), MP

(7) $\neg (p \to q)$ (4), (6), MP

(8) $\forall x \neg (p \to q)$ (7), Gen

(9) $\neg \forall x \neg (p \to q)$ 假定

因为 Gen 变元 x 不在 q 中自由出现, 故由 (8) (9) 以及反证律得 $\{\neg \forall x \neg (p \to q), \forall x\, p\} \vdash q$, 再由演绎定理即得结论.

2.4　对偶公式

我们用 $p = \cdots q \cdots$ 表示 q 是 p 的子公式.

命题 (子公式的等价可替换性) : 若 q 与 q' 等价, 则 $\cdots q \cdots$ 与 $\cdots q' \cdots$ 等价.

定义 (公式的对偶) : 设公式 p 已被表示为了只含原子公式及 $\vee, \wedge, \forall, \exists$ 的形式. 将 p 中所有的原子公式都改为它们的否定, $\vee$ 与 $\wedge$ 互换, $\forall$ 与 $\exists$ 互换, 我们把这样得到的公式称为 p 的对偶, 记作 p^*.

例 1 写出公式 $p = \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_4, x_3)$ 的对偶.

解　原公式等价于 $p' = \neg \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \vee \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_4, x_3)$. 由子公式的等价可替换性知下面的公式都与 p' 等价:

$$\begin{aligned}
&\neg \forall x_1 \neg\neg \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \vee \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_4, x_3), && (\text{因为 } p \leftrightarrow \neg\neg p)\\
&\exists x_1 \neg \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \vee \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_4, x_3), && (\text{因为 } \exists x\, p = \neg \forall x \neg p)\\
&\exists x_1 \neg\neg \forall x_2 \neg R_1^2(x_1, x_2) \vee \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_4, x_3), && (\text{因为 } \exists x\, p = \neg \forall x \neg p)\\
&\exists x_1 \forall x_2 \neg R_1^2(x_1, x_2) \vee \forall x_3 \exists x_4 R_1^2(x_4, x_3). && (\text{因为 } p \leftrightarrow \neg\neg p)
\end{aligned}$$

因此 p 的对偶公式为

$$\forall x_1 \exists x_2 \neg\neg R_1^2(x_1, x_2) \wedge \exists x_3 \forall x_4 \neg R_1^2(x_4, x_3).$$

命题 (对偶律) : p^* 与 $\neg p$ 是等价的.

2.5　前束范式

定义 (前束范式) : 我们把形如

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, p$$

的公式称为前述范式, 其中 $Q_1, \cdots, Q_n$ 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 且尾部的公式 p 不含量词.

命题: 用 Q 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 用 Q^* 表示 Q 的对偶符号 (即当 Q 为 $\forall$ 时, Q^* 为 $\exists$; 当 Q 为 $\exists$ 时, Q^* 为 $\forall$), 那么

(1) 若 y 不在 $p(x)$ 中自由出现, 则

$$\vdash Qx\, p(x) \leftrightarrow Qy\, p(y).$$

(2) 若 x 不在 p 中自由出现, 则

$$\vdash (p \to Qx\, q) \leftrightarrow Qx\, (p \to q).$$

(3) 若 x 不在 q 中自由出现, 则

$$\vdash (Qx\, p \to q) \leftrightarrow Q^* x\, (p \to q).$$

(4) $\vdash \neg\, Qx\, p \leftrightarrow Q^* x \neg\, p$.

例 1 ($\star$) 找出与公式

$$p = \exists\, x_1\, R_1^2\, (x_1, x_2) \to \Big(R_1^1\, (x_1) \to \neg\, \exists\, x_3\, R_1^2\, (x_1, x_3)\Big)$$

等价的前束范式.

解 由于前置 $\exists\, x_1$ 会影响到后面原本不受其约束的 x_1, 因此我们适当改变 p 中的变元得到等价的 p_1:

$$p_1 = \exists\, x_4\, R_1^2\, (x_4, x_2) \to \Big(R_1^1\, (x_1) \to \neg\, \exists\, x_3\, R_1^2\, (x_1, x_3)\Big).$$

然后反复将量词前置, 得到下列与 p 等价的公式:

$$\begin{aligned}
p_2 &= \exists\, x_4\, R_1^2\, (x_4, x_2) \to \Big(R_1^1\, (x_1) \to \forall x_3 \neg\, R_1^2\, (x_1, x_3)\Big),\\
p_3 &= \exists x_4\, R_1^2\, (x_4, x_2) \to \forall x_3\, \Big(R_1^1\, (x_1) \to \neg\, R_1^2\, (x_1, x_3)\Big),\\
p_4 &= \forall x_4 \left(R_1^2\, (x_4, x_2) \to \forall x_3\, \Big(R_1^1\, (x_1) \to \neg\, R_1^2\, (x_1, x_3)\Big)\right),\\
p_5 &= \forall x_4 \forall x_3 \left(R_1^2\, (x_4, x_2) \to \Big(R_1^1\, (x_1) \to \neg\, R_1^2\, (x_1, x_3)\Big)\right).
\end{aligned}$$

因此与原公式等价的一个前束范式为

$$p_5 = \forall x_4 \forall x_3 \left(R_1^2(x_4, x_2) \to \Big(R_1^1(x_1) \to \neg\, R_1^2(x_1, x_3)\Big)\right).$$

对于上面的例题而言, 我们也可以在 p_3 中先前置 $\forall x_3$ 再前置 $\exists\, x_4$, 因此一般来说等价的前束范

式是不唯一的.

定义 (Π_n 型前束范式与 Σ_n 型前束范式) : 设 $n > 0$,

(1) 若前束范式是由全称量词 $\forall$ 开始, 从左到右改变 $n-1$ 次词性, 则称其为 Π_n 型前束范式.

(2) 若前束范式是由存在量词 $\exists$ 开始, 从左到右改变 $n-1$ 次词性, 则称其为 Σ_n 型前束范式.

例 2 ($\star$) 设 $p = \forall x_1 \forall x_2\, R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 \exists x_4\, R_1^2(x_3, x_4)$, 则 p 等价于

$$p_1 = \exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \left(R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, x_4)\right),$$

又等价于

$$p_2 = \forall x_3 \exists x_4 \exists x_1 \exists x_2 \left(R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, x_4)\right),$$

这里的 p_1 是 Σ_3 型前束范式, 而 p_2 是 Π_2 型前束范式.

2.6 解释域与项解释

定义 (解释域) : 若非空集合 M 满足

(1) 对 K 的每个个体常元 c_i, 集合 M 中都有元素 $\overline{c_i}$ 与之对应;

(2) 对 K 的每个 n 元运算 f_i^n, 集合 M 中都有 n 元运算 $\overline{f_i^n}$ 与之对应;

(3) 对 K 的每个 n 元关系 R_i^n, 集合 M 中都有 n 元关系 $\overline{R_i^n}$ 与之对应;

那么我们就把带有上述三种对应的非空集合 M 称为 K 的解释域.

例 1 设 K 中 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^1, f_2^1, f_2^2\}, R = \{R_1^2\}$. 考虑公式

$$p = R_1^2\Big(f_1^2(f_1^1(c_1), c_1), f_2^2(f_1^1(c_1), c_1)\Big).$$

(1) 解释域为 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\overline{c_1} = 0$, $\overline{f_1^1}$ 为后继函数, 即 $\overline{f_1^1}(n) = n+1$, $\overline{f_1^2}$ 为加法, $\overline{f_2^2}$ 为乘法, $\overline{R_1^2}$ 为相等, 则公式 p 被解释为

$$(0+1)+0 = (0+1)\times 0,$$

这是一个假命题.

(2) 解释域为正有理数集 $\mathbb{Q}^+$, $\overline{c_1} = 1$, $\overline{f_1^1}$ 为倒数函数, $\overline{f_1^2}$ 为乘法, $\overline{f_2^2}$ 为除法, $\overline{R_1^2}$ 为相等, 则公式 p 被解释为

$$\frac{1}{1}\times 1 = \frac{1}{1} \div 1,$$

这是一个真命题.

定义 (项解释) : 设 M 为解释域, 我们把满足保运算性:

(1) $\varphi(c_i) = \overline{c_i}$,

(2) $\varphi(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_n))$

的映射 $\varphi : T \to M$ 称为 M 中的项解释. M 中的全体项解释所成集合记为 Φ_M.

定义 (变元变通): 设 $\varphi,\varphi'\in\Phi_M$ 是两个项解释. 如果 φ 与 φ' 只在变元 x 处的取值可能不同, 在其他任意变元 y 处的取值均相同, 则称 φ' 为 φ 关于 x 的变元变通.

项解释与变元变通的作用将在下一节体现.

2.7 赋值函数

定义 (赋值函数): 我们把公式 p 按以下方式归纳定义的函数 $|p|:\Phi_M\to\mathbb{Z}_2$ 叫做公式 p 的赋值函数: 设 $\varphi\in\Phi_M$ 为一个项解释,

(1) 当 p 为原子公式 $R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 时, 定义

$$|p|(\varphi)=|R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{如果}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\in\overline{R_i^n},\\ 0, & \text{如果}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\notin\overline{R_i^n},\end{cases}$$

这里 $(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))\in\overline{R_i^n}$ 表示 $\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n)$ 满足 n 元关系 $\overline{R_i^n}$.

(2)

$$|\neg p|(\varphi)=\neg|p|(\varphi),$$
$$|p\to q|(\varphi)=|p|(\varphi)\to|q|(\varphi).$$

(3)

$$|\forall xp|(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{如果对 }\varphi\text{ 的任意 }x\text{ 变通 }\varphi'\text{, 都有 }|p|(\varphi')=1,\\ 0, & \text{如果存在 }\varphi\text{ 的 }x\text{ 变通 }\varphi'\text{, 使得 }|p|(\varphi')=0.\end{cases}$$

为方便起见, 我们把 $(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))$ 简记为 $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$.

例 1 ($\star$) 设 K 中 $C=\{c_1\},F=\{f_1^1,f_2^1,f_2^2\},R=\{R_1^2\}$, 解释域为 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^1}$ 为后继函数, 即 $\overline{f_1^1}(n)=n+1$, $\overline{f_1^2}$ 为加法, $\overline{f_2^2}$ 为乘法, $\overline{R_1^2}$ 为相等. 设

(1) $p_1=R_1^2(f_2^2(x_1,x_2),f_2^2(x_3,x_4))$,

(2) $p_2=\forall x_1R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_1))$,

(3) $p_3=\forall x_1R_1^2(x_1,f_1^1(f_1^1(c_1)))$.

取项解释 φ 满足

$$\begin{array}{cccccc} x_i: & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots\\ \varphi(x_i)=\overline{x_i}: & 2 & 6 & 3 & 4 & \cdots\end{array}$$

请计算 $|p_1|(\varphi),|p_2|(\varphi),|p_3|(\varphi)$.

解析 计算前最好从直观上把公式的含义弄清楚. 例如 (1) 说的是 $\overline{x_1}$ 与 $\overline{x_2}$ 的乘积等于 $\overline{x_3}$ 与 $\overline{x_4}$ 的乘积; (2) 说的是对任意的 x_1, 有 $\overline{x_1}+\overline{x_2}=\overline{x_2}+\overline{x_1}$; (3) 说的是对任意的 x_1, 有 $\overline{x_1}=\overline{c_1}+1+1=0+1+1=2$. 因此显然有 $|p_1|(\varphi)=1,|p_2|(\varphi)=1,|p_3|(\varphi)=0$.

解 (1) 因为 $\overline{x_1}\times\overline{x_2}=2\times6$, $\overline{x_3}\times\overline{x_4}=3\times4$, 故 $\overline{x_1}\times\overline{x_2}=\overline{x_3}\times\overline{x_4}$, 因此

$$\varphi(f_2^2(x_1,x_2),f_2^2(x_3,x_4))\in\overline{R_1^2}.$$

从而 $|p_1|(\varphi)=1$.

(2) 设 $q=R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_1))$, 则 $p_2=\forall x_1 q$. 任取 φ 的 x_1 变通 φ', 则

$$\begin{aligned}\varphi'(f_1^2(x_1,x_2))&=\varphi'(x_1)+\varphi'(x_2)\\&=\varphi'(x_2)+\varphi'(x_1)\\&=\varphi'(f_1^2(x_2,x_1)),\end{aligned}$$

因此

$$\varphi'(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_1))\in\overline{R_1^2},$$

故 $|q|(\varphi')=1$. 由变通 φ' 的任意性知 $|p_2|(\varphi)=|\forall x_1 q|(\varphi)=1$.

(3) 记 $q=R_1^2(x_1,f_1^1(f_1^1(c_1)))$, 则 $p_3=\forall x_1 q$. 设 φ' 为 φ 的满足 $\varphi'(x_1)=3$ 的 x_1 变通, 则

$$\varphi'(x_1)=3\neq 2=\varphi'(x_1,f_1^1(f_1^1(c_1))),$$

从而

$$\varphi'(x_1,f_1^1(f_1^1(c_1)))\notin\overline{R_1^2},$$

故 $|q|(\varphi')=0$, 因此 $|p_3|(\varphi)=|\forall x_1 q|(\varphi)=0$.

2.8 公式的恒真与恒假

定义 (公式恒真或恒假): 若对任意的 $\varphi\in\Phi_M$ 均有 $|p|(\varphi)=1$, 则称公式 p 在解释域 M 中恒真, 记为 $|p|_M=1$. 若对任意的 $\varphi\in\Phi_M$ 均有 $|p|(\varphi)=0$, 则称公式 p 在解释域 M 中恒假, 记为 $|p|_M=0$.

需要注意的是, 并非所有公式都是恒真或恒假, 有些公式既非恒真也非恒假.

定义 (闭式): 我们把不含自由变元的公式称为闭式.

命题: 闭式要么恒真, 要么恒假.

正因为有这一结论, 我们通常只考虑闭式的恒真或恒假性.

例 1 ($\star$) 已知 K 中 $C=\{c_1\}, F=\{f_1^2\}, R=\{R_1^2\}$, 解释域为 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^2}$ 是乘法, $\overline{R_1^2}$ 是相等, $p=\forall x_1\, R_1^2\,(f_1^2(x_1,c_1),x_1)$, 计算 $|p|_{\mathbb{N}}$.

解析 直观上看, 对解释域 $\mathbb{N}$ 中的任一项解释 φ, 公式 p 说的是: 对任意的 x_1, 有 $\overline{x_1}\times\overline{c_1}=\overline{x_1}$. 因为 $\overline{c_1}=0$, 故前面的陈述显然是不成立的, 因此 $|p|(\varphi)=0$, 从而由 φ 的任意性知 $|p|_{\mathbb{N}}=0$.

解 令 $q=R_1^2(f_1^2(x_1,c_1),x_1)$, 则 $p=\forall x_1\, q$. 设 $\varphi\in\Phi_{\mathbb{N}}$, 取 φ 的 x_1 变通 φ' 满足 $\varphi'(x_1)=1$, 则

$$\varphi'(x_1)\times\varphi'(c_1)=1\times 0=0\neq 1=\varphi'(x_1),$$

因此

$$\varphi'(f_1^2(x_1,c_1),x_1)\notin\overline{R_1^2},$$

故 $|q|(\varphi') = 0$, 从而 $|p|(\varphi) = |\forall x_1\, q|(\varphi) = 0$. 由 φ 的任意性知 $|p|_{\mathbb{N}} = 0$.

命题: 设 x 为 p 中自由出现的唯一变元, 则

$$|p|_M = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |\forall x p|_M = 1.$$

例如, 设 p 为 $\forall x_1\big(R_1^1(x_1) \to R_1^1(f_1^1(x_1))\big)$, q 为 $R_1^1(x_1) \to R_1^1(f_1^1(x_1))$, 则 $p = \forall x_1 q$, 于是如果要证 $|p|_M = 1$, 我们只需证明 $|q|_M = 1$.

定义 (全称闭式) : 设 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$ 是 p 中自由出现的全部变元, 那么我们把

$$\forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} p$$

称为 p 的全称闭式.

利用 n 次前述命题的结论, 我们能够得到下面这个有用的结果.

命题: 设 $p' = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} p$ 是 p 的全称闭式, 则

$$|p|_M = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |p'|_M = 1.$$

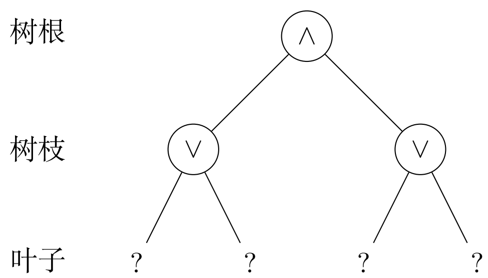
注: 我们没有结论 “$|p|_M = 0 \Longleftrightarrow |p'|_M = 0$” , 这是因为当 $|p'|_M = 0$ 时, $|p|_M$ 有两种可能: 为 0 或者不存在. 尽管如此, 我们有下面的命题作为替补.

命题: 设 $p' = \forall x_{i_1} \cdots \forall x_{i_n} p$ 是 p 的全称闭式, 则

$$|p|_M = 0 \quad\Longrightarrow\quad |p'|_M = 0.$$

3 补充知识

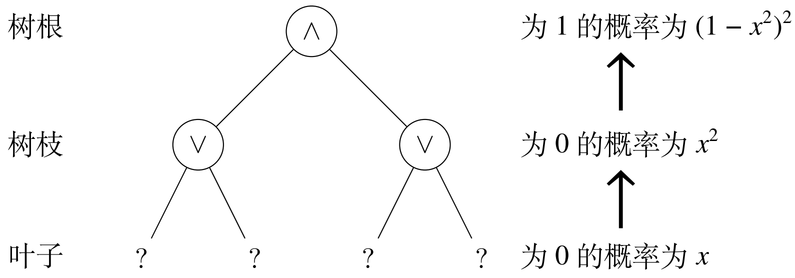
3.1 与或树 (AND–OR tree)



例 1 ($\star$) 对于高度为 2 的与或树, 它每片叶子为 0 的概率均为 x, 求树根为 0 概率.

解 因为 $p \vee q$ 为 0 当且仅当 p, q 均为 0, 因此树枝 $\vee$ 节点为 0 的概率是 x^2, 为 1 的概率是 $1 - x^2$. 又因为 $p \wedge q$ 为 1 当且仅当 p, q 均为 1, 因此树根 $\wedge$ 节点为 1 的概率是 $(1 - x^2)^2$, 为 0 的概率是

$1-(1-x^2)^2$.



3.2 趣味问题

本节内容老师没有讲过, 写在这里仅供大家娱乐消遣 ~

故事一: 死刑前的陈述

古时候有个国王, 在他的王国里死刑只有两种, 一是砍头, 二是绞刑. 国王对死刑有个特殊的规定: 执行死刑前让囚犯做一个陈述, 如果他的陈述是真的, 那么他将被绞死; 如果他的陈述是假的, 那么他将被砍头. 有一天, 一个囚犯被带到法场, 并照例给了他的陈述. 国王左思右想不知该如何处死这个囚犯, 最后只得放了他.

> Q1: 囚犯作怎样的陈述能使国王放了他?

故事二: 珠宝还是老虎

古时候还有个国王, 他有一个奇怪的法庭. 法庭里有两扇门, 一扇门后是大量珠宝, 另一扇门后是只老虎. 法庭每天审判一个囚犯, 由囚犯任选一门打开. 如果门后是珠宝, 法庭判囚犯无罪并将这些珠宝全部赠予囚犯; 如果门后是老虎, 法庭判囚犯有罪, 并任由老虎把他吃掉.

一天, 国王突发奇想, 要把判决结果从"运气使然"改为"智力使然". 他在两扇门前各派了一个极聪明的卫兵, 又给囚犯一次机会: 在开门之前, 他可以向其中一个卫兵提一个问题, 并且问题可以很复杂 (卫兵极聪明, 一定能明白), 但囚犯能得到的回答只有"是"或"不是". 两个卫兵中一个说真话且只说真话, 另一个说假话且只说假话, 但囚犯不知道究竟谁说真话谁说假话. 在思索片刻后, 聪明的囚犯向一个卫兵提了他的问题, 在得到答复后, 他马上知道了哪扇门后是珠宝, 最终得以生还.

> Q2: 问什么问题能使囚犯得知哪扇门后是珠宝?

参考答案:

Q1. "我将被砍头".

Q2. 这个问题有多种解法, 但关键总是要在提问中设法把卫兵和门联系起来. 设两个门被标以 X 和 Y, 两个卫兵被称为 a 和 b. 问法之一是问卫兵 a :

"卫兵 b 是说真话的当且仅当 X 门后是珠宝, 是不是? "

若 a 回答"是"，则 X 门后不是珠宝; 若 a 回答"不是"，则 X 门后是珠宝.

4 作业及参考答案

4.1 第一次作业

1. 画出下面复合命题的真值表, 并写出所有的成真指派与成假指派.

1) (⋆) $(p \wedge q) \to r$;　　2) $(p \to q) \to (p \to r)$.

解 1)

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\to$	r
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

由真值表可知成假指派为 $(1, 1, 0)$，其余 7 个指派为成真指派. 第 2) 问同理可得.

2. 写出由 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 生成的 $L(X)$ 中的 L_1.

解 $L_0 = X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 从而

$$
\begin{aligned}
L_1 = \{ & \neg x_1,\ \neg x_2,\ \neg x_3, \\
& x_1 \to x_1,\ x_1 \to x_2,\ x_1 \to x_3, \\
& x_2 \to x_1,\ x_2 \to x_2,\ x_2 \to x_3, \\
& x_3 \to x_1,\ x_3 \to x_2,\ x_3 \to x_3 \}
\end{aligned}
$$

3. (⋆) 证明:　1) $\{\neg p \to \neg q, q\} \vdash p$;　　2) $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$.

1) **证明** 以下是 p 在 $\{\neg p \to \neg q, q\}$ 中的一个证明.

(1) $\neg p \to \neg q$　　假定

(2) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$　　换位律

(3) $q \to p$ (1), (2), MP

(4) q 假定

(5) p (3), (4), MP

2) **证明** 以下是 $p \to r$ 在 $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\}$ 中的一个证明.

(1) $\neg(q \to r) \to \neg p$ 假定

(2) $(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (p \to (q \to r))$ 换位律

(3) $p \to (q \to r)$ (1), (2), MP

(4) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ 蕴含词分配律

(5) $(p \to q) \to (p \to r)$ (3), (4), MP

(6) $p \to q$ 假定

(7) $p \to r$ (5), (6), MP

4.2 第二次作业

1. 证明 $\vdash p \to (\neg p \to q)$.

证明 用两次演绎定理, 即证 $\{p, \neg p\} \vdash q$. 注意到 $\{p, \neg p\}$ 是有矛盾公式集, 故结论成立.

2. (教材 28 页练习 5 第 1 题 (3)) ($\star$) 证明 $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

证明 由演绎定理只需证 $\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$. 我们使用归谬律进行证明. 将 q 作为新的假定, 以下是一个证明.

(1) $\neg(p \to q)$ 假定

(2) q 新假定

(3) $q \to (p \to q)$ 肯定后件律

(4) $p \to q$ (2), (3), MP

由 (1) (4) 运用归谬律即得结论.

3. (教材 28 页练习 5 第 1 题 (5)) ($\star$) 证明 $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$.

证明 使用两次演绎定理即证 $\{p \to q, \neg p \to q\} \vdash q$. 下面我们使用反证律. 将 $\neg q$ 作为新的假定, 以下是一个证明.

(1) $\neg q$ 新假定

(2) $p \to q$ 假定

(3) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ 换位律

(4) $\neg q \to \neg p$ (2), (3), MP

(5) $\neg p$ (1), (4), MP

(6) $\neg p \to q$ 假定

(7) q (5), (6), MP

由 (1) (7) 以及反证律即得结论.

4.3 第三次作业

1. 不使用有矛盾公式集的性质, 证明 $\{\neg p\} \vdash p \to q$.

证明 下面是 $p \to q$ 在 $\{\neg p\}$ 中的一个证明.

(1) $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律

(2) $\neg p$ 假定

(3) $p \to q$ (1), (2), MP

2. 不使用归谬律, 证明 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$.

证明 即证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$. 由换位律只需证明 $\vdash (q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$. 又由演绎定理, 只需证明 $\{q \to \neg p\} \vdash p \to \neg q$. 下面是所要的一个证明.

(1) $(q \to \neg p)$ 假定

(2) $(q \to \neg p) \to (\neg\neg p \to \neg q)$ 换位律

(3) $\neg\neg p \to \neg q$ (1), (2), MP

(4) $p \to \neg\neg p$ 第二双重否定律

(5) $p \to \neg q$ (3), (4), HS

3. 证明 $\vdash (p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$.

证明 即证 $\vdash ((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (q \to p)$. 令 $p' = p \to q, q' = q \to p$, 即证 $\vdash p' \wedge q' \to q'$, 也即证明 $\vdash \neg(p' \to \neg q') \to q'$.

(1) $\neg q' \to (p' \to \neg q')$ 肯定后件律

(2) $(\neg q' \to (p' \to \neg q')) \to (\neg(p' \to \neg q') \to \neg\neg q')$ 换位律

(3) $\neg(p' \to \neg q') \to \neg\neg q'$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg q' \to q'$ 第一双重否定律

(5) $\neg(p' \to \neg q') \to q'$ (3), (4), HS

这就是所要的一个证明.

4.4 第四次作业

1. (教材 42 页练习 7 第 2 题) 下面的哪些公式为永真式?

1) $(p \wedge q) \to p$.

2) $(p \wedge q) \to q$.

3) $(q \vee r) \to (\neg r \to q)$.

4) $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$.

5) $(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge \neg q) \vee r)$.

解析 **(方法一)** 利用结论: 公式 p 为永真式当且仅当对任意赋值 v, 都有 $v(p) = 1$. 以 1) 为例, 对任一赋值 v, 有

$$v((p \wedge q) \to p) = (v(p) \wedge v(q)) \to v(p).$$

当 $v(p) = 1$ 时, 等号右端的值为 1 (因为 $v \to 1 = 1$); 当 $v(p) = 0$ 时, 等号右端的值仍然为 1 (因为 $0 \to v = 1$). 综上, $(p \wedge q) \to p$ 为永真式.

(方法二) 直接写出真值表进行验证.

解 1) 2) 3) 是永真式, 4) 5) 不是永真式.

2. (教材 42 页练习 7 第 4 题) 公式 $(\neg x_1 \to x_2) \to (x_1 \to \neg x_2)$ 是永真式吗? 能否找出公式 p 与 q 使得 $(\neg p \to q) \to (p \to \neg q)$ 是永假式?

解 不是永真式, 它有成假指派 $(1,1)$. 取 $p = x_1 \to x_1, q = x_2 \to x_2$, 则 $(\neg p \to q) \to (p \to \neg q)$ 是永假式. (事实上, 因为有成假指派 $(1,1)$, 我们可以将 p, q 取为任意永真式.)

4.5 第五次作业

1. (教材 49 页练习 9 第 1 题第 4 小问) 证明 $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ 和 $(p \to q) \to r$ 是等值的.

证明 只需验证对任意的赋值 v 都有 $v(\neg(\neg p \vee q) \vee r) = v((p \to q) \to r)$ 即可. 设 v 是任一赋值, 由赋值的保运算性知

$$\begin{aligned} v(\neg(\neg p \vee q) \vee r) &= \neg(\neg v(p) \vee v(q)) \vee v(r) \\ &= \neg(v(p) \to v(q)) \vee v(r) \\ &= (v(p) \to v(q)) \to v(r) \\ &= v((p \to q) \to r). \end{aligned}$$

因此 $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ 和 $(p \to q) \to r$ 是等值的.

2. (教材 53 页练习 10 第 1 题第 4 小问) 求公式 $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$ 的等值主析取范式.

解 题中公式的成真指派为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0)$, 因此它的等值主析取范式为

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3).$$

3. (教材 53 页练习 10 第 2 题第 1 小问) 求公式 $(\neg x_1 \vee x_2) \to x_3$ 的等值主合取范式.

解 将题中公式记为 p, 则 $\neg p$ 的成真指派为 $(1,1,0),(0,1,0),(0,0,0)$, 因此 $\neg p$ 的等值主析取范式为

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3).$$

将上式取对偶即得 p 的等值主合取范式

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

4.6 第六次作业

1. (教材 60 页练习 12 第 3 题) 一案案情涉及 a,b,c,d 四人. 根据已有线索可以知道:
(1) 若 a,b 均未作案, 则 c,d 均未作案.
(2) 若 c,d 均未作案, 则 a,b 均未作案.
(3) 若 a 与 b 均作案, 则 c 与 d 有且仅有一人作案.
(4) 若 b 与 c 均作案, 则 a 与 d 均作案或均不作案.
办案人员据此做出判断: a,b,c 三人中至少一人未作案. 请问该判断是否正确?

解析 首先将案情形式化为“{线索} $\vdash$ 判断”, 再根据演绎定理将其转化为“$\vdash$ 线索 $\to$ 判断”. 于是问题就变成了考察“线索 $\to$ 判断”是否为永真式. (注意到 $p \to q$ 只有当 p 真 q 假时才为假, 因此如果要考察 $p \to q$ 是否为永真式, 我们只需要考察是否有赋值 v 满足 $v(p) = 1, v(q) = 0$ 即可. 如果这样的赋值 v 不存在, 那么 $p \to q$ 就是永真式.)

解 用 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示 a,b,c,d 未作案, 于是办案人员的推理可形式化为

$$\{(x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (x_3 \wedge x_4),\ (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to ((x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_3 \wedge x_4)),$$
$$(\neg x_2 \wedge \neg x_3) \to ((x_1 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_4))\} \vdash x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

设 v 为赋值, $v(x_i) = v_i$, 下面解方程组

$$\begin{cases}(v_1 \wedge v_2) \leftrightarrow (v_3 \wedge v_4) = 1, \\ (\neg v_1 \wedge \neg v_2) \to ((v_3 \wedge \neg v_4) \vee (\neg v_3 \wedge v_4)) = 1, \\ (\neg v_2 \wedge \neg v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = 1, \\ v_1 \vee v_2 \vee v_3 = 0.\end{cases}$$

由最后一个方程可知 $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. 经检验, 无论 v_4 取 0 还是 1, 第二、三个方程均无法同时成立, 因此方程组无解, 办案人员的论断是正确的.

2. (教材 66 页练习 14 第 2 题) 在以下公式中, 哪些 x_1 的出现是自由的? 哪些 x_1 的出现是约束的? 项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 对这些公式中的 x_2 是不是自由的?

1) $\forall x_2 \left(R_1^2(x_1, x_2) \to R_2^2(x_2, c_1)\right)$.

2) $R_1^1(x_3) \to \neg \forall x_1 \forall x_2 R_1^3(x_1, x_2, c_1)$.

3) $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$.

4) $\forall x_2 R_1^2\left(f_1^2(x_1, x_2), x_1\right) \to \forall x_1 R_2^2\left(x_3, f_2^2(x_1, x_2)\right)$.

解 直接套用自由出现与自由替换的定义即可.

1) x_1 自由. $f_1^2(x_1, x_3)$ 对 x_2 自由.

2) 两次 x_1 均约束. $f_1^2(x_1, x_3)$ 对 x_2 自由.

3) 前两次 x_1 约束, 第三次 x_1 自由. $f_1^2(x_1, x_3)$ 对 x_2 自由.

4) 前两次 x_1 自由, 后两次 x_1 约束. $f_1^2(x_1, x_3)$ 对 x_2 约束.

4.7 第七次作业

1. (教材 76 页命题 1 (3)) 设 x 不在 q 中自由出现, 证明 $\vdash (\exists x\, p \to q) \to \forall x (p \to q)$.

证明 先证 $\{\exists x\, p \to q\} \vdash \forall x (p \to q)$, 也即 $\{\neg \forall x \neg p \to q\} \vdash \forall x (p \to q)$. 下面是所要的一个证明.

(1) $\neg \forall x \neg p \to q$ 假定

(2) $(\neg \forall x \neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg \forall x \neg p)$ 换位律

(3) $\neg q \to \neg\neg \forall x \neg p$ (1), (2), MP

(4) $\neg\neg \forall x \neg p \to \forall x \neg p$ 第一双重否定律

(5) $\neg q \to \forall x \neg p$ (3), (4), HS

(6) $\forall x \neg p \to \neg p$ (K4)

(7) $\neg q \to \neg p$ (5), (6), HS

(8) $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ 换位律

(9) $p \to q$ (7), (8), MP

(10) $\forall x\,(p \to q)$ (9), Gen

至此, 我们已经证得 $\{\exists x\, p \to q\} \vdash \forall x\,(p \to q)$. 因 Gen 变元 x 不在 $\exists x\, p \to q$ 中自由出现, 故由演绎定理可知 $\vdash (\exists x\, p \to q) \to \forall x\,(p \to q)$.

2. (教材 76 页命题 1 (4)) 设 x 不在 q 中自由出现, 证明 $\vdash \exists x\,(p \to q) \to (\forall x\, p \to q)$.

证明 先证 $\{\exists x\,(p \to q), \forall x\, p\} \vdash q$, 即证明 $\{\neg \forall x \neg (p \to q), \forall x\, p\} \vdash q$. 将 $\neg q$ 作为新的假定, 下面是一个证明.

(1) $\forall x\, p$ 假定

(2) $\forall x\, p \to p$ (K4)

(3) p (1), (2), MP

(4) $\neg q$ 新假定

(5) $p \to (\neg q \to \neg (p \to q))$ 永真式

(6) $\neg q \to \neg (p \to q)$ (3), (5), MP

(7) $\neg (p \to q)$ (4), (6), MP

(8) $\forall x \neg (p \to q)$ (7), Gen

(9) $\neg \forall x \neg (p \to q)$ 假定

因为 Gen 变元 x 不在 q 中自由出现, 故由反证律得 $\{\neg \forall x \neg (p \to q), \forall x\, p\} \vdash q$, 再由演绎定理即得结论.

4.8 第八次作业

1. (教材 81 页练习 16 第 3 题 (3) (4)) 找出与所给公式等价的前束范式.

(1) $\forall x_1 \left(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)\right) \to \left(\exists x_2\, R_1^1(x_2) \to \exists x_3\, R_1^2(x_2, x_3)\right)$.

(2) $\exists x_1\, R_1^2(x_1, x_2) \to \left(R_1^1(x_1) \to \neg \exists x_3\, R_1^2(x_1, x_3)\right)$.

解 (1) 将原公式记为 p, 适当改变约束变元得到与之等价的 p_1:

$$p_1 = \forall x_1 \left(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)\right) \to \left(\exists x_4\, R_1^1(x_4) \to \exists x_3\, R_1^2(x_2, x_3)\right).$$

反复将量词前置, 得到下列与 p 等价的公式: (为方便起见, 下面我们省略谓词后的个体变元, 这不妨

碍我们得到正确结果, 但考试的时候不能偷懒, 应该完整写出)

$$\begin{aligned}
p_2 &= \forall x_1(R_1^1 \to R_1^2) \to \exists x_3 \forall x_4(R_1^1 \to R_1^2),\\
p_3 &= \exists x_1 \left((R_1^1 \to R_1^2) \to \exists x_3 \forall x_4(R_1^1 \to R_1^2)\right),\\
p_4 &= \exists x_1 \exists x_3\left((R_1^1 \to R_1^2) \to \forall x_4(R_1^1 \to R_1^2)\right),\\
p_5 &= \exists x_1 \exists x_3 \forall x_4\left((R_1^1 \to R_1^2) \to (R_1^1 \to R_1^2)\right).
\end{aligned}$$

因此与原公式 p 等价的一个前束范式为

$$p_5 = \exists x_1 \exists x_3 \forall x_4\Big(\big(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1,x_2)\big) \to \big(R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2,x_3)\big)\Big).$$

(2) 将原公式 $\exists x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \left(R_1^1(x_1) \to \neg \exists x_3 R_1^2(x_1,x_3)\right)$ 记为 p. 我们先适当改变变元, 得到与之等价的 p_1:

$$p_1 = \exists x_4 R_1^2(x_4,x_2) \to \left(R_1^1(x_1) \to \neg \exists x_3 R_1^2(x_1,x_3)\right).$$

然后反复将量词前置, 得到下列与 p 等价的公式:

$$\begin{aligned}
p_2 &= \exists x_4 R_1^2(x_4,x_2) \to \left(R_1^1(x_1) \to \forall x_3 \neg R_1^2(x_1,x_3)\right),\\
p_3 &= \exists x_4 R_1^2(x_4,x_2) \to \forall x_3\left(R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3)\right),\\
p_4 &= \forall x_4\Big(R_1^2(x_4,x_2) \to \forall x_3\left(R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3)\right)\Big),\\
p_5 &= \forall x_4 \forall x_3\Big(R_1^2(x_4,x_2) \to \left(R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3)\right)\Big).
\end{aligned}$$

因此与原公式等价的一个前束范式为

$$p_5 = \forall x_4 \forall x_3\Big(R_1^2(x_4,x_2) \to \left(R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1,x_3)\right)\Big).$$

2. (教材 81 页练习 16 第 5 题) 找一个既有 Π_3 型又有 Σ_2 型等价前束范式的公式.

解 $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$ 是 Π_3 型的, 通过将它的量词重排我们可以得到一个 Σ_2 型的 $\exists x_2 \forall x_1 \forall x_3$, 所以我们只需要找一个可以将量词前置为 $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$ 的公式. 容易知道

$$\exists x_1 R_1^1(x_1) \to \exists x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2,x_3)$$

的量词可以前置为 $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$, 因此它就是我们要找的一个公式.

4.9 第九次作业

1. (教材 87 页练习 18 第 2 题 (3) (4) (5)) (⋆) 已知 K 中 $C=\{c_1\}, F=\{f_1^2\}, R=\{R_1^2\}$, 解释域为整数集 $\mathbb{Z}$, $\overline{c_1}=0$, $\overline{f_1^2}$ 是减法, $\overline{R_1^2}$ 是 “<”. 试问对下面的公式 p, 是否存在 $\varphi, \psi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$, 使得 $|p|(\varphi)=1, |p|(\psi)=0$? 若存在的话, 请给出相应的 φ 或 ψ.

(1) $\neg R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$.

(2) $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$.

(3) $\forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)$.

解析 直观上看, (1) 说的是 $\overline{x_1} \geqslant \overline{x_2}$, (2) 说的是对任意的 $x_1 \in \mathbb{Z}$, 都有 $\overline{x_1}-\overline{x_2}<\overline{x_3}$, (3) 说的是如果对任意的 $x_1 \in \mathbb{Z}$ 都有 $\overline{x_1}-0<\overline{x_1}$, 那么 $\overline{x_1}<\overline{x_2}$. 因此 (1) 可真可假, 它的 φ 与 ψ 均能取到; (2) 永假, 它的 φ 不能取到; (3) 永真, 它的 ψ 不能取到.

解 (1) 记 $q=R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$, 则 $p=\neg q$, 从而

$$\begin{aligned}
|p|(\varphi)=1 &\iff |\neg q|(\varphi)=1 \\
&\iff |q|(\varphi)=0 \\
&\iff \varphi(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2))) \notin \overline{R_1^2} \\
&\iff \varphi(x_1)<\varphi(x_2) \text{ 不成立.}
\end{aligned}$$

因此取 φ 满足 $\varphi(x_1)=1, \varphi(x_2)=0$ 就有 $|p|(\varphi)=1$. 类似地,

$$|p|(\psi)=0 \iff \psi(x_1)<\psi(x_2).$$

因此取 ψ 满足 $\psi(x_1)=0, \psi(x_2)=1$ 就有 $|p|(\psi)=0$.

(2) 记 $q=R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$, 则 $p=\forall x_1 q$, 从而

$$\begin{aligned}
|p|(\varphi)=1 &\iff |\forall x_1 q|(\varphi)=1 \\
&\iff \text{对 } \varphi \text{ 的任意 } x_1 \text{ 变通 } \varphi', |q|(\varphi')=1 \\
&\iff \text{对 } \varphi \text{ 的任意 } x_1 \text{ 变通 } \varphi', \text{有 } \varphi'(f_1^2(x_1, x_2), x_3) \in \overline{R_1^2} \\
&\iff \text{对 } \varphi \text{ 的任意 } x_1 \text{ 变通 } \varphi', \text{有 } \varphi'(x_1)-\varphi'(x_2)<\varphi'(x_3) \\
&\iff \text{对 } \varphi \text{ 的任意 } x_1 \text{ 变通 } \varphi', \text{有 } \varphi'(x_1)-\varphi(x_2)<\varphi(x_3).
\end{aligned}$$

而最后一条无法成立, 因此 $|p|(\varphi)=1$ 无法成立, 从而不存在 φ 使得 $|p|(\varphi)=1$.

由上述分析易知任取 $\psi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ 都有 $|p|(\psi)=0$.

(3) 记 $q = R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1)$, $r = R_1^2(x_1, x_2)$, 则 $p = \forall x_1\, q \to r$, 从而

$$\begin{aligned}
|p|(\psi) = 0 &\iff |\forall x_1\, q \to r|(\psi) = 0 \\
&\iff |\forall x_1\, q|(\psi) \to |r|(\psi) = 0 \\
&\iff |\forall x_1\, q|(\psi) = 1 \text{且} |r|(\psi) = 0.
\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}
|\forall x_1\, q|(\psi) = 1 &\iff \text{对 } \psi \text{ 的任意 } x_1 \text{ 变通 } \psi', \text{有 } \psi'(f_1^2(x_1, c_1), x_1) \in \overline{R_1^2} \\
&\iff \text{对 } \psi \text{ 的任意 } x_1 \text{ 变通 } \psi', \text{有 } \psi'(x_1) - 0 < \psi'(x_1),
\end{aligned}$$

而这最后一条无法成立, 因此 $|\forall x_1\, q|(\psi) = 1$ 无法成立, 从而不存在 $\psi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ 使得 $|p|(\psi) = 0$.

由上述分析易知任取 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ 都有 $|p|(\varphi) = 1$.

4.10 第十次作业

1. (教材 91 页练习 19 第 1 题 (3)) 已知 K 中 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^2\}, R = \{R_1^2\}$, 解释域为 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\overline{c_1} = 0$, $\overline{f_1^2}$ 是加法, $\overline{R_1^2}$ 是相等, $p = \forall x_1\, \forall x_2\, \exists x_3\, R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$, 计算 $|p|_{\mathbb{N}}$.

解 易知 $p = \forall x_1\, \forall x_2 \neg \forall x_3 \neg R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$. 令 $q = \forall x_3 \neg R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$, 则 $p = \forall x_1\, \forall x_2 \neg q$. 又令 $r = \neg R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$, 则 $q = \forall x_3\, r$.

任取 $\varphi \in \Phi_{\mathbb{N}}$, 下证 $|q|(\varphi) = |\forall x_3\, r|(\varphi) = 0$. 设 φ' 为 φ 的 x_3 变通, 则

$$\begin{aligned}
|r|(\varphi') = 0 &\iff \varphi'(f_1^2(x_1, x_2), x_3) \in \overline{R_1^2} \\
&\iff \varphi'(x_1) + \varphi'(x_2) = \varphi'(x_3) \\
&\iff \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi'(x_3).
\end{aligned}$$

我们取满足 $\varphi'(x_3) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ 的 φ', 则有 $|r|(\varphi') = 0$, 因此 $|q|(\varphi) = |\forall x_3\, r|(\varphi) = 0$, 故 $|\neg q|(\varphi) = \neg |q|(\varphi) = 1$, 从而由 φ 的任意性知 $|\neg q|_{\mathbb{N}} = 1$, 故 $|p|_{\mathbb{N}} = |\forall x_1 \forall x_2 \neg q|_{\mathbb{N}} = 1$.

2. (教材 91 页练习 19 第 3 题 (1)) 设 K 中 $C = \{c_1\}, F = \{f_1^2\}, R = \{R_1^2\}$. 试给出 K 的两个解释域 M_1 与 M_2, 使得对公式 $p = \forall x_1 \forall x_2 \left(R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), c_1) \to R_1^2(x_1, x_2)\right)$ 有 $|p|_{M_1} = 1$ 且 $|p|_{M_2} = 0$.

解 取解释域 M_1 为整数集 $\mathbb{Z}$, $\overline{f_1^2}$ 为减法, $\overline{R_1^2}$ 为相等, $\overline{c_1} = 0$, 则 $|p|_{M_1} = 1$.

取解释域 M_2 为整数集 $\mathbb{Z}$, $\overline{f_1^2}$ 为加法, $\overline{R_1^2}$ 为相等, $\overline{c_1} = 0$, 则 $|p|_{M_2} = 0$.