目录

1　极值的必要条件——欧拉方程

1.1　欧拉方程

变分学基本引理　设 $f(x) \in C^2[a,b]$. $\eta(x)$ 是在 $[a,b]$ 上适当高阶可微的任意函数, 且 $\eta(a) = \eta(b) = 0$. 若对任意满足条件的 $\eta(x)$, 都有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则

$$f(x) \equiv 0,\ x \in [a,b].$$

基本定理　设泛函

$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

其中 F 是三个独立变量的已知函数, 且具有二阶连续偏导. 可取函数集合为

$$A = \left\{y(x) \in C^2[a,b]\,|y(a) = y_0, y(b) = y_1\right\}.$$

若 $Y(x) \in A$ 使得泛函 $I(y)$ 取到极值, 则 $Y(x)$ 满足

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0.$$

上述微分方程称为**欧拉方程**, 它是泛函取得极小的必要条件. 需要注意的是, F_x 表示 $F(x,y,y')$ 对第一个变量的偏导, $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ 表示 $F(x,y,y')$ 关于 x 的全导数.

1.2　欧拉方程的积分法

欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0.$$

(1) F 中不显含 y, 即 $F = F(x,y')$, 此时 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$, 积分得

$$F_{y'}(x,y') = c_1.$$

(2) F 中不显含 x, 即 $F = F(y,y')$, 此时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'F_{y'}\right) = F_x + y'F_y + y''F_{y'} - \left(y''F_{y'} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right) = y'\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right) = 0,$$

故

$$F - y'F_{y'} = c_1.$$

1.3　变分的概念及其性质

定义: 设 x 取固定值, 若一元函数 $y(x)$ 从 $Y(x)$ 变成 $Y(x) + \alpha\eta(x)$, 则称

$$\delta y = \alpha\eta(x)$$

为一元函数 $y(x)$ 的变分.

由上述定义知 $\delta y' = \alpha\eta'$.

定义: 设泛函 $I(y) = \varPhi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y + \alpha\eta, Y' + \alpha\eta')\mathrm{d}x$. 称

$$\delta I|_{y=Y(x)} = \varPhi'(0)\alpha$$

为泛函 $I(y)$ 在 $y = Y(x)$ 上的变分 (一阶变分).

直接计算得

$$\delta I = \varPhi'(0)\alpha = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}.$$

由函数的 Taylor 展开知

$$F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha\eta' + \cdots,$$

从而

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha\eta' + \cdots.$$

定义: 设函数 $F(x, y(x), y'(x))$, 简记为 $F(x, y, y')$, 称

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

为函数 $F(x, y, y')$ 的变分.

变分的性质:

(1) 变分与求导可交换顺序: $(\delta y)' = \delta y'$, 也即

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y).$$

(2) 变分与积分可交换顺序:

$$\delta\int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x = \int_a^b \delta F(x, y, y')\mathrm{d}x.$$

变分的运算: 设 F_1, F_2 为 x, y, y' 的可微函数, 则

(1) $\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2$;

(2) $\delta(F_1F_2)=(\delta F_1)F_2+F_1(\delta F_2)$;

(3) $\delta\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)=\dfrac{(\delta F_1)F_2-F_1(\delta F_2)}{F_2^2}$.

定理: 泛函 $I(y)=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 取得极值的必要条件为 $\delta I=0$, 即

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x=0.$$

证明 设泛函 $I(y)$ 在 $Y(x)$ 处取到极值, 令

$$I(y)=\Phi(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,Y+\alpha\eta,Y'+\alpha\eta')\mathrm{d}x,$$

其中 $\eta(x)$ 满足在区间端点处函数值为 0. 直接计算可知

$$0=\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\mathrm{d}x.$$

上式乘以 α 得

$$\int_{x_1}^{x_2}(F_y\alpha\eta+F_{y'}\alpha\eta')\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_{x_1}^{x_2}\delta F(x,Y,Y')\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,Y,Y')\mathrm{d}x=0.$$

1.4 含有多个函数的情形

定理: 设泛函

$$I(y_1,y_2)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,y_1',y_2')\mathrm{d}x,$$

可取函数集合为

$$A=\left\{\ (y_1,y_2)\ \middle|\ \begin{array}{l} y_i\in C^2[x_1,x_2],\ i=1,2 \\ y_i(x_j)=y_{ij},\ i,j=1,2\end{array}\right\},$$

则 $I(y_1,y_2)$ 取到极值的必要条件为

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}=0,\quad i=1,2.$$

证明 设 $I(y_1, y_2)$ 在 (Y_1, Y_2) 处取到极值, 并令

$$I(y_1, y_2) = \Phi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y_1 + \alpha\eta_1, Y_2 + \alpha\eta_2, Y_1' + \alpha\eta_1', Y_2' + \alpha\eta_2')\mathrm{d}x,$$

其中 $\eta_i(x), i = 1, 2$ 满足在区间端点处函数值为 0. 直接计算得

$$0 = \Phi'(0) = \int_{x_1}^{x_2} (F_{y_1}\eta_1 + F_{y_2}\eta_2 + F_{y_1'}\eta_1' + F_{y_2'}\eta_2')\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(F_{y_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_1'}\right)\eta_1 + \left(F_{y_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_2'}\right)\eta_2\right]\mathrm{d}x = 0.$$

分别取 $\eta_1(x) \equiv 0$ 与 $\eta_2(x) \equiv 0$, 由变分学基本引理知

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'} = 0, \quad i = 1, 2.$$

不难将上述结论推广到含有多个函数的情形.

定理: 设泛函

$$I(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_m, y_1', y_2', \cdots, y_m')\mathrm{d}x,$$

可取函数集合为

$$A = \left\{ (y_1, y_2, \cdots, y_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} y_i \in C^2[x_1, x_2],\ i = 1, 2, \cdots, m \\ y_i(x_j) = y_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2 \end{array} \right\},$$

则 $I(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 取到极值的必要条件为

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

若 F 不显含 x, 即 $F = F(y_1, \cdots, y_m, y_1', \cdots, y_m')$, 则欧拉方程有首次积分

$$F - \sum_{i=1}^{m} y_i' F_{y_i'} = c_1.$$

1.5 含有高阶导数的情形

定理: 设泛函

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\mathrm{d}x,$$

可取函数集合为

$$A=\left\{y(x)\in C^n[x_1,x_2]\mid y^{(i)}(x_j)=y_{ij},\ i=0,1,\cdots,n-1,\ j=1,2\right\},$$

则 $I(y)$ 取到极值的必要条件为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

上述方程称为**欧拉-泊松方程**.

证明 设泛函 $I(y)$ 在 $Y(x)$ 处取到极值, 令

$$I(y)=\Phi(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,Y+\alpha\eta,Y'+\alpha\eta',\cdots,Y^{(n)}+\alpha\eta^{(n)})\mathrm{d}x,$$

其中 $\eta(x)$ 满足在区间端点处的各阶导数值 $\eta^{(i)}(x_j)=0,i=0,1,\cdots,n-1,j=1,2$. 直接计算得

$$0=\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\eta+F_{y'}\eta'+\cdots+F_{y^{(n)}}\eta^{(n)})\mathrm{d}x.$$

对 $\int_{x_1}^{x_2}F_{y^{(i)}}\eta^{(i)}\mathrm{d}x$ 多次使用分部积分法, 得

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}\right)\eta\mathrm{d}x=0.$$

由变分学基本引理知

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

1.6 含有多个独立变量的情形

下面我们考虑含有两个独立变量的泛函极值问题.

定理: 设 D 为平面上的有界区域, $f(x,y)$ 为定义在 ∂D 上的已知函数. 泛函

$$I(u)=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

可取函数集合为

$$A=\left\{\ u(x,y)\ \middle|\ \begin{array}{l}u(x,y)\in C^2(D)\\ u(x,y)|_{\partial D}=f(x,y)\end{array}\right\},$$

则 $I(u)$ 在 $U(x,y)$ 处取到极值的必要条件为 $U(x,y)$ 满足

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0.$$

证明　令

$$I(u)=\Phi(\alpha)=\iint_D F(x,y,U+\alpha\eta,U_x+\alpha\eta_x,U_y+\alpha\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\eta(x,y)\in C^2(D)$ 满足 $\eta(x,y)|_{\partial D}=0$. 直接计算可得

$$0=\Phi'(0)=\iint_D (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在二重分部积分公式

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}uv\mathrm{d}y-\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中取 $u=F_{u_x},v=\eta$, 得

$$\iint_D F_{u_x}\eta_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}F_{u_x}\eta\mathrm{d}y-\iint_D \eta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

类似地, 在二重分部积分公式

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\partial D}uv\mathrm{d}x-\iint_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中取 $u=F_{u_y},v=\eta$, 则有

$$\iint_D F_{u_y}\eta_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\partial D}F_{u_y}\eta\mathrm{d}x-\iint_D \eta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

(1)+(2) 得

$$\iint_D (F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}F_{u_x}\eta\mathrm{d}y-F_{u_y}\eta\mathrm{d}x-\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 $\eta(x,y)|_{\partial D}=0$, 故

$$\int_{\partial D}F_{u_x}\eta\mathrm{d}y-F_{u_y}\eta\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$\Phi'(0)=\iint_D\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由 $\eta(x,y)$ 的任意性与变分学基本引理[1]得

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0.$$

[1]变分学基本引理: 设 D 为平面上的一个有界区域, $f(x,y)$ 在 D 内连续, $\eta(x,y)\in C^2(D)$ 且 $\eta(x,y)|_{\partial D}=0$. 若对任意满足条件的 $\eta(x,y)$, 都有 $\iint_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 则 $f(x,y)\equiv 0,(x,y)\in D$.

一般地, 设泛函

$$I(z) = \int \cdots \int_{\Omega} F(x_1, \cdots, x_n, z, z_{x_1}, \cdots, z_{x_n}) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

可取函数集合

$$A = \left\{ z(x_1, \cdots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} z(x_1, \cdots, x_n) \in C^2(\Omega) \\ z(x_1, \cdots, x_n)|_{\partial\Omega} = f(x_1, \cdots, x_n) \end{array} \right\},$$

则 $I(z)$ 在 A 中取极值的必要条件为

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{z_{x_i}} = 0.$$

对于含有高阶偏导的情形, 我们可以类似讨论. 例如泛函

$$I(z) = \iint_D F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的欧拉方程为

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{z_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{z_{yy}} = 0.$$

1.7 参数表示的泛函

设泛函

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \mathrm{d}x, \tag{$*$}$$

若可取函数不是用显式 $y = y(x)$ 表示, 而是由参数表达式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

给出, 则泛函 $(*)$ 可改写为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) \mathrm{d}t \\ &\triangleq \int_{t_0}^{t_1} G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{$**$}$$

定义: 我们称满足

$$G(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kG(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

的代数式 $G(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 为关于 $\dot{x}, \dot{y}$ 的**一次齐次式**.

例如 $G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = x^3\dot{y} + y^2\dfrac{\dot{x}^2}{\dot{y}}$ 是关于 $\dot{x}, \dot{y}$ 的一次齐次式.

定理: 若泛函

$$I(x,y)=\int_{t_0}^{t_1} G(x,y,\dot{x},\dot{y})\mathrm{d}t$$

的被积式不显含 t, 且是关于 $\dot{x},\dot{y}$ 的一次齐次式, 则该泛函的值仅依赖于由参数表达式

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[t_0,t_1]$$

给出的曲线本身, 而与曲线的参数表示形式无关.

证明 作参数变换

$$t=\varphi(\tau), \quad \tau\in[\tau_0,\tau_1], \quad \varphi'(\tau)\neq 0,$$

则

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} G(x,y,\dot{x},\dot{y})\mathrm{d}t &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} G\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1} G\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1} G\left(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

其中第二个等号利用了 G 关于第三、第四个分量的一次齐次性. 因此泛函的值与参数选取无关, 结论得证.

显然泛函 $(**)$ 的被积式不显含 t. 并且由于

$$G(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=F\left(x(t),y(t),\frac{k\dot{y}(t)}{k\dot{x}(t)}\right)k\dot{x}(t)=kF\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)=kG(x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

故泛函 $(**)$ 的被积式是关于 $\dot{x},\dot{y}$ 的一次齐次式. 因此由上述定理知泛函 $(**)$ 的值与参数选取无关.

如果泛函借助于曲线的某个参数表示变为如下形式

$$\int_{t_0}^{t_1} F\left(x,y,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dot{x}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1} G(x,y,\dot{x},\dot{y})\mathrm{d}t,$$

则它有两个欧拉方程

$$G_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\dot{x}}=0, \quad G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\dot{y}}=0.$$

这两个欧拉方程不是独立的, 它们具有如下的关系式

$$\dot{x}\left(G_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\dot{x}}\right)+\dot{y}\left(G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\dot{y}}\right)=0.$$

1.8 欧拉方程的不变性

首先我们研究具有固定端点的最简单泛函

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

它的欧拉方程为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0. \tag{1}$$

作变量替换 $x=x(\xi)$, 其中 $\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_1, x'(\xi)\neq0$, 则 $y=y(x)=y(x(\xi))=y(\xi)$. 令

$$F\left(x(\xi),y(\xi),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)=G\left(\xi,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right),$$

则原泛函变为

$$\tilde{I}(y)=\int_{\xi_0}^{\xi_1}G\left(\xi,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi,$$

容易求得此时的欧拉方程为

$$\left(G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}}=0. \tag{2}$$

显然方程 (2) 与方程 (1) 没有本质区别, 这就是欧拉方程的不变性. 由此我们可以判定, 若 $y=y(x)$ 满足欧拉方程 (1), 则 $y=y(x(\xi))$ 满足欧拉方程 (2).

我们可以将上述变量替换加以推广. 设变换

$$\begin{cases} x=x(u,v), & \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq0 \\ y=y(u,v), & \end{cases}$$

将 xOy 平面上的曲线 $y=y(x)$ 对应为 uOv 平面上的曲线 $v=v(u)$. 此时泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 变为

$$J(v)=\int_{u_0}^{u_1}F\left(x(u,v),y(u,v),\frac{y_u+y_vv'}{x_u+x_vv'}\right)(x_u+x_vv')\mathrm{d}u\triangleq\int_{u_0}^{u_1}F_1(u,v,v')\mathrm{d}u.$$

我们同样可以断定, 若曲线 $y=y(x)$ 满足欧拉方程 $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$, 则曲线 $v=v(u)$ 满足对应的欧拉方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial v}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial F_1}{\partial v'}=0.$$

当求解原欧拉方程比较困难时, 我们可以考虑进行变量替换, 求解关于新变量的欧拉方程, 这种方法在某些时候是非常有用的,

例 泛函

$$I=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi$$

对应的欧拉方程为

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}=0,$$

其中 $\rho=\rho(\varphi)$. 利用欧拉方程的不变性, 作变量替换

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}\,, \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\rho=\rho_x\mathrm{d}x+\rho_y\mathrm{d}y=(\rho_x+\rho_y y')\mathrm{d}x=\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,, \\ \mathrm{d}\varphi=\varphi_x\mathrm{d}x+\varphi_y\mathrm{d}y=(\varphi_x+\varphi_y y')\mathrm{d}x=\frac{-y+xy'}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

故

$$I=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{(\rho\mathrm{d}\varphi)^2+(\mathrm{d}\rho)^2}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\triangleq\tilde{I},$$

从而欧拉方程变为

$$y''=0,$$

其通解为

$$y=c_1x+c_2,$$

从而原欧拉方程的通解为

$$\rho\sin\varphi=c_1\rho\cos\varphi+c_2.$$

2 条件变分

2.1 等周问题 (积分约束)

$$\begin{cases} \min\quad I(y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \\ \text{s.t.}\quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1 \\ \qquad\quad \displaystyle\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=C \end{cases} \tag{$*$}$$

定理: 若函数 $y=y(x)$ 是问题 $(*)$ 的极小点, 则存在常数 λ, 使得 $y(x)$ 是泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda G)\mathrm{d}x$$

的驻点曲线, 即满足

$$H_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y'}=0,\quad \text{其中} H=F+\lambda G.$$

上述定理可直接推广到一般情形. 对于问题

$$\begin{cases} \min \quad I(y_1,\cdots y_n)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad y_i(x_0)=y_{i0},\ y_i(x_1)=y_{i1},\quad i=1,\cdots,n \\ \qquad \int_{x_0}^{x_1}G_i(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x=C_i,\quad i=1,\cdots,m \end{cases}$$

求解方法类似, 先构造泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_iG_i)\mathrm{d}x\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H\mathrm{d}x,$$

然后解微分方程组

$$H_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y_i'}=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

2.2 短程线问题 (隐函数约束)

定理: 设 $M_0(x_0,y_0,z_0),M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为曲面 $G(x,y,z)=0$ 上的两点, 且 G_y,G_z 不同时为 0. 若曲线

$$C:\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$

是该曲面上连接 M_0 与 M_1 两点的所有曲线中使得泛函

$$I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$$

取极值的曲线, 则存在函数 $\lambda(x)$, 使得曲线 C 是泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}[F+\lambda(x)G]\mathrm{d}x\triangleq\int_{x_0}^{x_1}H\mathrm{d}x$$

的极值曲线, 即满足微分方程组

$$H_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y'}=0,\quad H_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{z'}=0.$$

2.3 微分方程作约束

设泛函 $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$, 可取函数满足固定边界条件

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1, z(x_0)=z_0, z(x_1)=z_1$$

与不可积分的微分方程约束

$$G(x,y,z,y',z')=0,$$

则对于极值曲线 $y(x), z(x)$, 存在乘子函数 $\lambda(x)$, 使得极值曲线满足泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}[F+\lambda(x)G]\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}H\mathrm{d}x$$

的欧拉方程

$$H_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{y'}=0,\quad H_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_{z'}=0.$$

2.4 自由边界与自然边界条件

一、泛函 $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的自然边界条件

设有泛函

$$I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

其中 x_0 与 x_1 给定, 可取函数的端点 $y(x_0)$ 与 $y(x_1)$ 可以在直线 $x=x_0$ 与 $x=x_1$ 上移动, 对函数值没有要求.

泛函 $I(y)$ 取极值的必要条件是一阶变分为 0, 即

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}=0,$$

因为极值曲线满足欧拉方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,$$

故有

$$F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}=0,$$

由于 $\delta y|_{x=x_0}$ 与 $\delta y|_{x=x_1}$ 是任意的, 从而得到泛函 $I(y)$ 的**自然边界条件**

$$F_{y'}=0,\quad 当\,x=x_0与\,x=x_1时.$$

二、泛函 $\iint\limits_D F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的自然边界条件

设有泛函

$$I(u) = \iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

它的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta I &= \iint\limits_D \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} \delta u \left(F_{u_x}\mathrm{d}y - F_{u_y}\mathrm{d}x\right)\\ &= \iint\limits_D \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} \delta u \left(F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因为极值曲线满足欧拉方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0,$$

且由于 δu 的任意性, 我们得到泛函 $I(u)$ 的**自然边界条件**

$$\left.\left(F_{u_x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - F_{u_y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\right|_{\partial D} = 0.$$

又因为 $\int_{\partial D} F_{u_x}\mathrm{d}y - F_{u_y}\mathrm{d}x = \int_{\partial D}(F_{u_x}\cos\alpha + F_{u_y}\cos\beta)\mathrm{d}s$, 其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 分别为 ∂D 的单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴, y 轴正向夹角的方向余弦, 从而自然边界条件可改写为

$$\left.\left(F_{u_x}\cos\alpha + F_{u_y}\cos\beta\right)\right|_{\partial D} = 0.$$

3 极值的充分条件

3.1 基本概念

记 $[x_0, x_1]$ 上的全体分段光滑函数为 $D'[x_0, x_1]$. 这一章中, 对于泛函

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x,$$

我们的可取函数集合为

$$S = \left\{ y(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} y(x) \in D'[x_0, x_1] \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{array} \right\}.$$

定义: 设 $Y(x)$ 为一已知函数, 称集合

$$N_{\text{强}}(Y(x), \delta) = \left\{ y(x) \;\middle|\; \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y(x) - Y(x)| < \delta \right\}$$

为 $Y(x)$ 的**强邻域**.

定义: 设 $Y(x)$ 为一已知函数, 称集合

$$N_{弱}(Y(x),\delta)=\left\{\ y(x)\ \middle|\ \begin{array}{l}\max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y(x)-Y(x)|<\delta\\ \max\limits_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y'(x)-Y'(x)|<\delta\end{array}\ \right\}$$

为 $Y(x)$ 的**弱邻域**.

由定义易知 $N_{弱}(Y(x),\delta)\subseteq N_{强}(Y(x),\delta)$.

定义: 设泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$. 若对任意的 $y(x)\in N_{强}(Y(x))$, 有 $I(y)\geqslant I(Y)$, 则称 $Y(x)$ 为泛函 $I(y)$ 的**强极小点**.

定义: 设泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$. 若对任意的 $y(x)\in N_{弱}(Y(x))$, 有 $I(y)\geqslant I(Y)$, 则称 $Y(x)$ 为泛函 $I(y)$ 的**弱极小点**.

易知强极小点一定是弱极小点, 但弱极小点不一定是强极小点.

3.2 魏尔斯特拉斯函数与勒让德条件

定义: 称

$$E(x,y,z,\xi)=F(x,y,\xi)-F(x,y,z)-F_z(x,y,z)(\xi-z)$$

为函数 $F(x,y,z)$ 关于 z 的**魏尔斯特拉斯函数**.

实际上, 将 $F(x,y,\xi)$ 在 $\xi=z$ 处泰勒展开, 我们有

$$F(x,y,\xi)=F(x,y,z)+F_z(x,y,z)(\xi-z)+\frac{1}{2}F_{zz}(x,y,k)(\xi-z)^2$$

因此 $E(x,y,z,\xi)$ 实际上就是 $F(x,y,\xi)$ 自身与其在 $\xi=z$ 处的泰勒展开的前两项之差.

由定义可知, 函数 $F(x,y,y')$ 关于 y' 的魏尔斯特拉斯函数为

$$E(x,y,y',\xi)=F(x,y,\xi)-F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')(\xi-y').$$

此外, 一般的 n 元函数都有其对应的魏尔斯特拉斯函数, 下面给出一些常见的例子.

函数	魏尔斯特拉斯函数
$F(x)$	$E(x,\xi)=F(\xi)-F(x)-F'(x)(\xi-x)$
$F(x,y)$	$E(x,y,\xi)=F(x,\xi)-F(x,y)-F_y(x,y)(\xi-y)$
$F(x,y,z)$	$E(x,y,z,\xi)=F(x,y,\xi)-F(x,y,z)-F_z(x,y,z)(\xi-z)$

定理: 若 $Y(x)$ 是泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的强极小点, 则对任意的 $x\in[x_0,x_1]$ 与 $u\in\mathbb{R}$, 有

$$E(x,Y(x),Y'(x),Y'(x)+u)\geqslant 0.$$

定理: 若 $Y(x)$ 是泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的弱极小点, 则对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 有

$$F_{y'y'}(x,Y(x),Y'(x))\geqslant 0.$$

定义: 设泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$, 若对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 曲线 $y(x)$ 满足

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\geqslant 0,$$

则称 $y(x)$ 满足泛函 $I(y)$ 的**勒让德条件**; 若对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 有

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))>0,$$

则称 $y(x)$ 满足泛函 $I(y)$ 的**勒让德强条件**; 若对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 有

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))\neq 0,$$

则称 $y(x)$ 为泛函 $I(y)$ 的**非奇异曲线**.

由此定义, 前述定理可改述为: 若 $Y(x)$ 是泛函 $I(y)$ 的极小点, 则 $Y(x)$ 满足 $I(y)$ 的勒让德条件.

3.3 二阶变分与雅克比条件

设 $Y(x)$ 使泛函 $I(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 取得极值, $\eta(x)\in D'[x_0,x_1],\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, 且

$$\Phi(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,Y+\alpha\eta,Y'+\alpha\eta')\mathrm{d}x.$$

为符号简便, 我们记 $F_{yy}=F_{yy}(x,Y,Y')$, $F_{yy'},F_{y'y'}$ 同理.

定义: 称

$$\delta^2 I=\frac{\alpha^2}{2}\Phi''(0)=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)\mathrm{d}x$$

为泛函 $I(y)$ 在 $y=Y(x)$ 处的**二阶变分**.

因为

$$\Phi(\alpha)-\Phi(0)=\Phi'(0)\alpha+\frac{\Phi''(0)}{2}\alpha^2+o(\alpha^2),$$

从而当 $\alpha>0$ 充分小时, $\Phi(\alpha)-\Phi(0)$ 与 $\Phi''(0)$ 有相同的符号, 故 $\Phi''(0)\geqslant 0$.

定理: 若 $Y(x)$ 是泛函 $I(y)$ 的弱极小点, 则 $I(y)$ 在 $Y(x)$ 处的二阶变分 $\delta^2 I\geqslant 0$.

记二阶变分中的被积函数为 $\omega(x,\eta,\eta')$, 称泛函

$$K(\eta)=\int_{x_0}^{x_1}\omega(x,\eta,\eta')\mathrm{d}x$$

为 $I(y)$ 的相应于 $Y(x)$ 的附属泛函. 由前述讨论容易知道, 若 $Y(x)$ 是泛函 $I(y)$ 的弱极小点, 则必有 $K(\eta)\geqslant 0$.

定义: 称泛函 $K(\eta)=\int_{x_0}^{x_1}\omega(x,\eta,\eta')\mathrm{d}x$ 的欧拉方程

$$\omega_\eta-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega_{\eta'}=0$$

为极值曲线 $Y(x)$ 的**雅可比方程**.

定理: 若 $Y(x)$ 满足勒让德强条件, 且是泛函 $I(y)$ 的弱极小点, 则 $Y(x)$ 的雅可比方程的满足

$$\eta(x_0)=0,\quad \eta'(x_0)=1$$

的解在区间 (x_0,x_1) 上无零点.

推论: 若非奇异极值曲线 $Y(x)$ 的雅可比方程的满足

$$\eta(x_0)=0,\quad \eta'(x_0)=1$$

的解在区间 (x_0,x_1) 上有零点, 则 $Y(x)$ 不是泛函 $I(y)$ 的极小点.

定义: 若极值曲线 $Y(x)$ 的雅可比方程的解在区间 (x_0,x_1) 上无零点, 则称 $Y(x)$ 满足**雅可比条件**; 若 $Y(x)$ 的雅可比方程的解在区间 $(x_0,x_1]$ 上无零点, 则称 $Y(x)$ 满足**雅可比强条件**.

定理: 设有极值曲线族 $y(x,\mu)$, 且 $y(x,\mu_0)=Y(x)$. 又设 $y(x,\mu),y'(x,\mu)$ 均二阶连续可微, 则

$$u(x)=\frac{\partial}{\partial\mu}y(x,\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0}$$

就是 $Y(x)$ 的雅可比方程的解.

若极值曲线族 $y(x,\mu)$ 中的 μ 是极值曲线在点 (x_0,y_0) 处的斜率, 即是说

$$y(x_0,\mu)=y_0,\quad y'(x_0,\mu)=\mu,$$

则 $u(x)$ 满足

$$u(x_0)=0,\quad u'(x_0)=1.$$

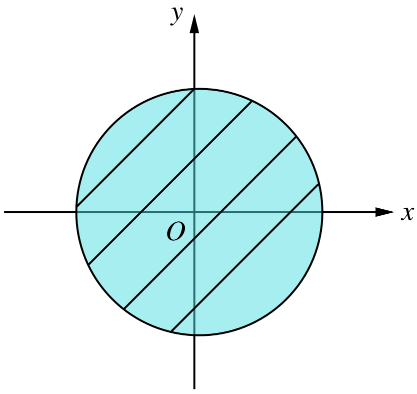
由上可知, 考察 $Y(x)$ 是否满足雅可比条件, 就转化为考察 $u(x)=\dfrac{\partial}{\partial\mu}y(x,\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0}$ 的根在区间 $[x_0,x_1]$ 上的分布了.

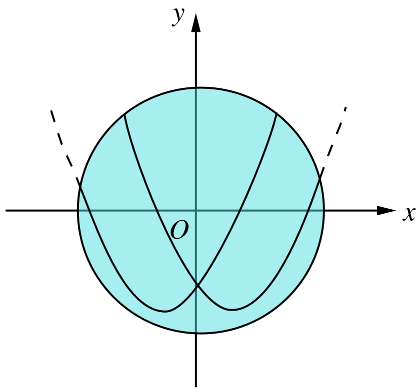
3.4 极值曲线场与极值曲线的嵌入

定义: 设 D 为 xOy 平面上的单连通区域. 若对 D 中的任意一点 (x,y), 有且仅有极值曲线族 $y=y(x,\mu)$ 中的一条曲线通过, 且极值曲线的切线斜率 $p(x,y)$ 是连续可微的, 则称该极值曲线族

在 D 中形成了一个**极值曲线场**, 简称为极值曲线场 D.

例 在圆 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 内的平行直线族 $y=x+c$ 形成了一个场, 且斜率函数为 $p(x,y)=1$. 但是, 抛物线族 $y=(x-c)^2-1$ 并不形成一个场, 因为圆内任意一点有两条抛物线通过.





如果极值曲线族是由通过某一点 (称为束心) 的一束曲线所构成, 并且除去束心后, 这族曲线在某区域 D 上形成一个场, 我们也称该极值曲线族在 D 中构成了一个极值曲线场.

定义: 设极值曲线场 D 由极值曲线族 $y(x,\mu)$ 构成. 若过点 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 的极值曲线 $Y(x)$ 满足 $y(x,\mu_0)=Y(x)$, 且 $Y(x)$ 不在区域 D 的边界上, 则称极值曲线 $Y(x)$ 被嵌入到极值曲线场中.

若极值曲线族为过束心 A 的曲线束, 则上述定义中的条件 "$Y(x)$ 不在区域 D 的边界上" 相应的改为 "除束心 A 外, $Y(x)$ 不在区域 D 的边界上".

定理: 若极值曲线 $Y(x)$ 满足雅可比强条件, 则它一定能被嵌入到某个极值曲线场中去.

3.5 希尔伯特积分与极值充分条件

设有极值曲线场 D, 斜率函数为 $p(x,y)$. 曲线 $\gamma: y=Y(x)\in D'[x_0,x_1]$ 为泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值曲线, 满足固定边界条件 $Y(x_0)=y_0, Y(x_1)=y_1$.

定义: 设 $\tilde{\gamma}: y=y(x)\in D'[x_0,x_1]$ 为极值曲线场 D 内的任意一条曲线, 称曲线积分

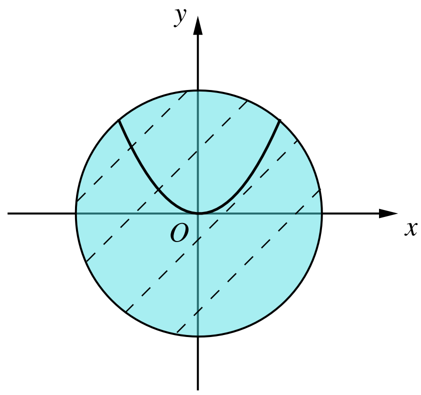
$$\begin{aligned}H(\tilde{\gamma}) &= \int_{\tilde{\gamma}} \left[F(x,y,p(x,y))-p(x,y)F_{y'}(x,y,p(x,y))\right]\mathrm{d}x+F_{y'}(x,y,p(x,y))\mathrm{d}y\\ &= \int_{\tilde{\gamma}} \left[F(x,y,p(x,y))+(y'-p)F_{y'}(x,y,p(x,y))\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

为泛函 $J(y)$ 沿曲线 $\tilde{\gamma}$ 的**希尔伯特积分**.

需要注意的是, 上述积分中 $p(x,y)$ 是极值曲线场 D 的斜率函数, 它描述的是 D 中过点 (x,y) 的那条极值曲线在该点的切线斜率, 而 y' 是曲线 $\tilde{\gamma}: y=y(x)$ 的切线斜率, 因此二者是不同的.

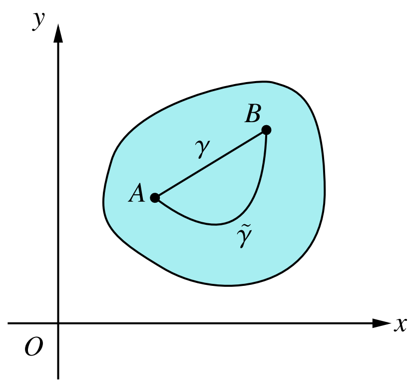
例如, 平行曲线族 $y=x+c$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 上形成的场的斜率函数为 $p(x,y)\equiv 1$.

设曲线 $\tilde{\gamma}: y = x^2$, 则 $\tilde{\gamma}$ 上每一点处的场斜率为 $p(x,y) = 1$, 而 $\tilde{\gamma}$ 自身的斜率为 $y' = 2x$, 二者显然不同.



显然, 当 $\tilde{\gamma}$ 就是极值曲线 $\gamma: y = Y(x)$ 时, 有 $y' = p(x,y)$, 从而

$$H(\gamma) = \int_{\gamma} F(x,y,p(x,y))\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} F(x,Y(x),Y'(x))\mathrm{d}x = J(Y).$$



定理 (**希尔伯特**): 在单连通的极值曲线场 D 内, 希尔伯特积分与积分路径无关. 换言之, 若极值曲线场 D 中的曲线 $\tilde{\gamma}$ 与 γ 具有相同端点, 则 $H(\tilde{\gamma}) = H(\gamma)$.

证明 沿 $\tilde{\gamma}: y = y(x)$ 的希尔伯特积分为

$$H(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\gamma}} \left[F(x,y,p(x,y)) - p(x,y)F_{y'}(x,y,p(x,y))\right]\mathrm{d}x + F_{y'}(x,y,p(x,y))\mathrm{d}y.$$

令

$$M(x,y) = F(x,y,p(x,y)) - p(x,y)F_{y'}(x,y,p(x,y)),$$
$$N(x,y) = F_{y'}(x,y,p(x,y)).$$

下面只需证明 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 即可. 直接计算得 (注意到 求的是偏导, 因此不能把 y 视为 x 的函数 $y(x)$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y}&=F_y+F_{y'}\frac{\partial p}{\partial y}-\left[\frac{\partial p}{\partial y}F_{y'}+p\left(F_{y'y}+F_{y'y'}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right]=F_y-pF_{y'y}-pp_yF_{y'y'},\\
\frac{\partial N}{\partial x}&=F_{y'x}+F_{y'y'}\frac{\partial p}{\partial x},
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=F_y-F_{y'x}-pF_{y'y}-F_{y'y'}\left[\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}p(x,y)\right].$$

又因为 (注意到 $p(x,y)$ 是极值曲线在点 (x,y) 处的斜率, 而在极值曲线上有 $y'=p(x,y)$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,y)=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}p(x,y),$$

故

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=F_y(x,y,p(x,y))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y,p(x,y)).$$

因为 $p(x,y)$ 是极值曲线的斜率函数, 因此满足欧拉方程

$$F_y(x,y,p(x,y))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y,p(x,y))=0,$$

从而 $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=0$, 积分与路径无关. □

定理 (**强极小的充分条件**): 设曲线 $\gamma: y=Y(x)\in S$, 其中

$$S=\left\{\, y(x)\ \middle|\ \begin{array}{l} y(x)\in D'[x_0,x_1]\\ y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1\end{array}\right\}.$$

若

(1) γ 为极值曲线;

(2) γ 能被嵌入到某极值曲线场中 (这一条件可换为 "γ 满足雅可比条件");

(3) 存在 γ 的邻域 N, 对任意的 $(x,y)\in N$ 与 $q\in\mathbb{R}$, 有

$$E(x,y,p(x,y),q)\geqslant 0,$$

则 γ 是泛函 $J(y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的强极小点.

证明 不妨设邻域 N 就是 γ 被嵌入的极值曲线场. 任取异于 γ 的曲线 $\tilde{\gamma}: y=y(x)\in S$, 则

$$\begin{aligned} J(\tilde{\gamma})-J(\gamma) &= J(\tilde{\gamma})-H(\gamma)=J(\tilde{\gamma})-H(\tilde{\gamma}) \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} F(x,y,y')\mathrm{d}x-\int_{\tilde{\gamma}}\left[F(x,y,p)+(y'-p)F_{y'}(x,y,p)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1} E(x,y(x),p(x,y(x)),y'(x))\mathrm{d}x \geqslant 0, \end{aligned}$$

因此 γ 为泛函 $J(y)$ 的强极小点. □

上述定理中的条件 (3) 可以换为: 对任意的 $y(x)\in N_{强}(Y(x))$, 对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 都有 $F_{y'y'}(x,y(x),y'(x))>0$ 成立.

定理 (**弱极小的充分条件**): 设曲线 $\gamma: y=Y(x)\in S$, 其中

$$S=\left\{ y(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} y(x)\in D'[x_0,x_1] \\ y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1 \end{array} \right\}.$$

若

(1) γ 为极值曲线;

(2) γ 能被嵌入到某极值曲线场中 (这一条件可换为“γ 满足雅可比条件”);

(3) γ 满足勒让德强条件, 即对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 有

$$F_{y'y'}(x,Y(x),Y'(x))>0,$$

则 γ 是泛函 $J(y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的弱极小点.

上述定理中的条件 (3) 可以换为: 对任意的 $y(x)\in N_{弱}(Y(x))$, 对任意的 $x\in[x_0,x_1]$, 都有 $E(x,Y(x),Y'(x),y'(x))\geqslant 0$ 成立.

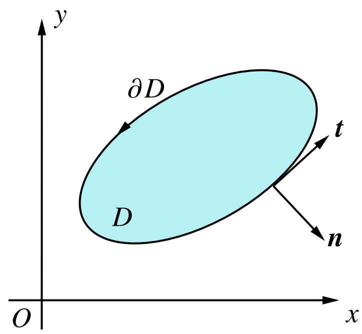
4 附录

4.1 Green 公式与二重分部积分

定理 (Green 公式): 设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的区域. 如果函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数, 那么

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中 ∂D 的方向为: 当人沿 ∂D 行走时, 区域 D 总在他的左边.



设正向 ∂D 的单位切向量为 $\boldsymbol{t}$, 单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则

$$\cos(\boldsymbol{t},x) = -\cos(\boldsymbol{n},y), \quad \cos(\boldsymbol{t},y) = \cos(\boldsymbol{n},x),$$

从而得到 Green 公式的另一种常用表示

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial D} F\mathrm{d}y - G\mathrm{d}x = \int_{\partial D} [F\cos(\boldsymbol{t},y) - G\cos(\boldsymbol{t},x)]\mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial D} [F\cos(\boldsymbol{n},x) + G\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中第一个等号直接利用 Green 公式即可 (P 取为 $-G$, Q 取为 F), 第二个等号利用了第一型曲线积分与第二型曲线积分的关系.

应用一、计算平面区域的面积

在 Green 公式中, 令 $P = -y, Q = x$, 可以得到一个计算平面区域 D 的面积 S 的公式:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

特别地, 若区域 D 由封闭参数曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), a \leqslant t \leqslant b$ 围成, $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, 则 D 的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t.$$

应用二、导出二重分部积分公式

设函数 $u = u(x,y), v = v(x,y)$. 由 Green 公式, 我们可以导出二重积分的分部积分公式:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial D} uv\mathrm{d}y - \iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ \iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_{\partial D} uv\mathrm{d}x - \iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{$*$}$$

证明 在 Green 公式

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

中取 $P=0, Q=uv$, 得

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}uv\mathrm{d}y.$$

又取 $P=uv, Q=0$, 得

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\partial D}uv\mathrm{d}x.$$

上面两式移项即可得到所求公式. □

4.2 平方可积函数空间

定义: 设在勒贝格积分意义下 $[a,b]$ 上的平方可积函数全体

$$L^2[a,b]=\left\{f(t)\,\middle|\,\int_a^b|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty\right\}.$$

对函数 $x,y\in L^2[a,b]$, 规定它们的内积与范数为

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t,\quad \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\left(\int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

称 $L^2[a,b]$ 为**平方可积函数空间**.

我们把 $L^2[a,b]$ 中几乎处处相等的函数视为同一元素.

定义: 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\in L^2[a,b]$. 若

$$\|\varphi_i\|=1,\ i=1,2,\cdots,n$$

且

$$\left\langle\varphi_i,\varphi_j\right\rangle=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j,$$

则称 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 为 $L^2[a,b]$ 的**规范正交系**. 该定义可以推广到可数个函数的情形.

定义: 设函数 $x\in L^2[a,b]$, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 为 $L^2[a,b]$ 的规范正交系. 我们称

$$c_k=\langle x,\varphi_k\rangle=\int_a^b x(t)\varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$$

为函数 x 关于该规范正交系的**傅里叶系数**.

定理 (贝塞尔不等式): 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 为 $L^2[a,b]$ 的规范正交系, 则对任意的 $x\in L^2[a,b]$,

有

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|x\|^2, \quad 其中\, c_k = \langle x, \varphi_k \rangle.$$

若贝塞尔不等式中的等号成立, 则称该等式为**帕塞瓦尔等式**.

定义: 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 为 $L^2[a,b]$ 的规范正交系. 若 $L^2[a,b]$ 中与 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 均正交的函数只有 0 (即不能再加入新的函数让其成为更大的规范正交系), 则称 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 为 $L^2[a,b]$ 的**完全规范正交系**.

定理: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 为 $L^2[a,b]$ 的完全规范正交系当且仅当对任意的函数 $x \in L^2[a,b]$, 帕塞瓦尔等式成立.

定理: 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 为 $L^2[a,b]$ 的完全规范正交系, 则 $L^2[a,b]$ 中的任意函数 x 均可展开成广义傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t),$$

其傅里叶系数为

$$c_k = \langle x, \varphi_k \rangle = \int_a^b x(t) \varphi_k(t) \, \mathrm{d}t.$$

注: 实际上, 不论 $L^2[a,b]$ 的规范正交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 完备与否, 我们都能利用函数 x 的傅里叶系数 $c_k = \langle x, \varphi_k \rangle$ 作出相应与 x 的傅里叶级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$, 记为

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t).$$

当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$ 收敛于 $x(t)$ 时, "$\sim$" 可以换为等号.

定义: 设有定义在 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 与函数 $f(x)$, 若

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ **平方平均收敛**于 $f(x)$.

4.3 常微分方程求解

设常系数齐次线性微分方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x^{(1)} + a_n x = 0, \tag{$*$}$$

它的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

情形 (1) $F(\lambda)$ 有 n 个互异根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$:
(a) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数, 则齐次方程的通解为

$$x=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}.$$

(b) 若有复根 $\lambda=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$, 则对应于这两个复根有两个线性无关的解

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\quad \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t.$$

情形 (2) 若 λ_i 为 $F[\lambda]$ 的 k_i 重根, 则相应地有 k_i 个线性无关的解

$$\mathrm{e}^{\lambda_i t},\ t\mathrm{e}^{\lambda_i t},\cdots,\ t^{k_i-1}\mathrm{e}^{\lambda_i t}.$$

相应于方程 $(*)$ 的常系数非齐次线性微分方程为

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x^{(1)}+a_nx=f(t), \tag{$**$}$$

它的通解为

$$x=c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t),$$

其中 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 为对应齐次方程 $(*)$ 的 n 个线性无关解, $\bar{x}(t)$ 为非齐次方程 $(**)$ 的一个特解.

4.4 变限积分求导

设 $F(x)=\displaystyle\int_a^{\varphi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$, 其积分限与被积函数同时含有求导变量, 此时我们采用复合函数求导的方法. 令 $u=\varphi(x)$, 则 $F(x)=H(u,x)=\displaystyle\int_a^u f(x,y)\mathrm{d}y$, 从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)&=\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial H}{\partial x}=f(x,u)u'+\int_a^u f_x(x,y)\mathrm{d}y\\&=f(x,\varphi(x))\varphi'(x)+\int_a^{\varphi(x)}f_x(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

4.5 双曲三角函数

定义: 称 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 为**双曲正弦函数**, $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 为**双曲余弦函数**.
性质:
(1) $\sinh x$ 是奇函数, $\cosh x$ 是偶函数;
(2) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$;
(3) $(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x$;
应用: 若 $y=\sinh x$, 则 $\sqrt{1+y^2}=\cosh x$.

4.6 一些几何计算公式

一、旋转曲面的面积

定理: 设平面光滑曲线 $C: y=f(x), x\in[a,b], f(x)\geqslant 0$, 将其绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

二、曲线弧长

定理: 光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t)), t\in[a,b]$ 的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$