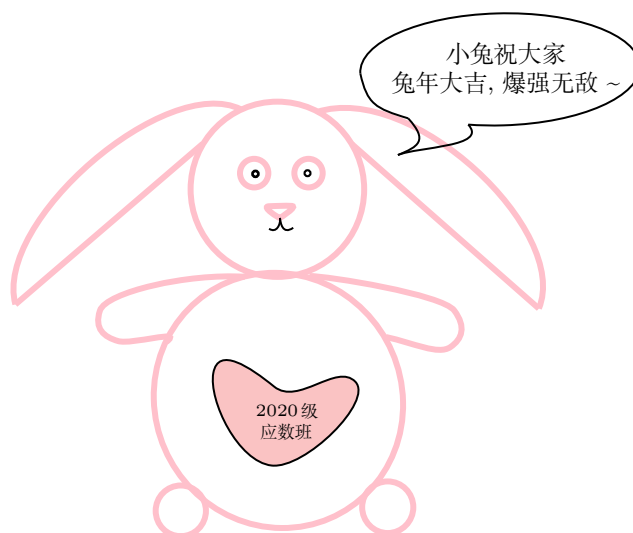


目录

1 欧氏空间与向量	3
1.1 向量空间	3
1.2 欧氏空间	4
2 曲线论	5
2.1 基本概念	5
2.2 平面曲线	5
2.3 E^3 中的曲线	6
2.4 曲线论基本定理	7
3 曲面的局部理论	7
3.1 基本概念	7
3.2 第一基本形式	9
3.3 第二基本形式	10
3.4 法曲率与 Weingarten 变换	10
3.5 主曲率与 Gauss 曲率	12
3.6 曲面的一些例子	13
4 标架与曲面论基本定理	15
4.1 基本概念	15
4.2 自然标架	15
4.3 曲面的结构方程	16
4.4 曲面的存在惟一性定理	17
4.5 正交标架	17
4.6 外微分法	18
5 曲面的内蕴几何学	20
5.1 等距变换	20
5.2 曲面的协变微分	22
5.3 测地曲率	23
5.4 Gauss-Bonnet 公式	25
6 总结	26

新年快乐

天道几何，
万品流形先自守



变分无限，
孤心测度有同伦

蝉鸣是窗外渐渐倒数的钟声，考卷的分数是往上爬的树藤 …

1 欧氏空间与向量

1.1 向量空间

一、内积

对 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义它们的内积为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 两两单位正交, 则称它们为 \mathbb{R}^n 中的一组标准正交基. 利用标准正交基, \mathbb{R}^n 中的任意向量 \mathbf{x} 均可表示为 $\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n$.

二、外积

下面我们只在 \mathbb{R}^3 中讨论. 我们规定向量 \mathbf{a} 与向量 \mathbf{b} 的外积 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 的方向与 \mathbf{a}, \mathbf{b} 均垂直, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 成右手系, 模长 $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, 其中 θ 为 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角. 易知 $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$ 就是 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 张成的平行四边形的面积.

记 $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, 则它们的外积为

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

外积具有以下性质:

(1) 分配律: $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = a\mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + b\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$;

(2) 反交换律: $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$;

需要注意的是, 向量之间的外积不满足结合律.

三、混合积

三个向量之间的混合积定义为 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \rangle$, 写成坐标形式即为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3), \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$.

混合积具有以下性质:

(1) 轮换不变, 即 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$;

(2) 对调反号, 即 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

混合积的几何意义是三个向量张成的平行六面体的有向体积.

四、相关性质

直接利用内积、外积、混合积的几何意义, 容易得到

- (1) 两个向量正交 \Leftrightarrow 内积为 0 ;
- (2) 两个向量线性相关 \Leftrightarrow 外积为 $\mathbf{0}$;
- (3) 三个向量线性相关 \Leftrightarrow 混合积为 0 ;

下面是有关向量计算的公式.

- (1) $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3$;
- (2) $\langle \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ (Lagrange 恒等式);

五、向量分析

设向量函数 $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$, 定义其导数为 $\mathbf{a}'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t))$. 类似地, 如无特别说明, 后文所提到的对向量的运算都视为对该向量的每个分量分别进行该运算.

设 $\lambda = \lambda(t)$ 为数值函数, $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)$ 为向量值函数. 则有以下微分公式:

- (1) $\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{a}) = \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{a} + \lambda \frac{d\mathbf{a}}{dt}$;
- (2) $\frac{d}{dt} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right\rangle + \left\langle \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right\rangle$;
- (3) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \frac{d\mathbf{b}}{dt}$;
- (4) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \right) + \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \mathbf{c} \right) + \left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right)$.

1.2 欧氏空间

n 维欧氏空间与 \mathbb{R}^n 同构. 对于 E^3 中的两点 $P = (x_1, x_2, x_3), Q = (y_1, y_2, y_3)$, 定义它们之间的距离为

$$d(P, Q) = \left[\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

空间中点之间的一一对应称为**变换**.

定义: 设 \mathcal{T} 为 E^3 中的一个变换. 若 \mathcal{T} 保持空间中任意两点的距离, 即对 E^3 中的任意两点 P, Q , 均有

$$d(P, Q) = d(\mathcal{T}(P), \mathcal{T}(Q)),$$

则称 \mathcal{T} 为 E^3 中的**合同变换 (欧氏变换)**.

记 $O(3)$ 为三阶实正交阵全体, 则

定理: 若 \mathcal{T} 为 E^3 中的合同变换, 则存在正交阵 $\mathbf{T} \in O(3)$ 以及 $P_0 \in E^3$, 使得对任意的 $X \in E^3$, 有

$$\mathcal{T}(X) = X\mathbf{T} + P_0.$$

当 $\det \mathbf{T} = 1$ 时, 对应的合同变换称为**刚体运动**; 当 $\det \mathbf{T} = -1$ 时, 对应的合同变换称为**反向刚体运动**. 从几何角度来看, 合同变换是做平移、旋转、反射的变换, 刚体运动则排除了反射的情形.

关于合同变换与向量的外积, 有如下结论:

(1) 对没有平移的合同变换 $\mathcal{T}X = X\mathbf{T}$, 有 $(\mathcal{T}\mathbf{v}) \wedge (\mathcal{T}\mathbf{w}) = |\mathbf{T}|\mathcal{T}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;

(2) 对刚体运动 \mathcal{T} , 有 $(\mathcal{T}\mathbf{v}) \wedge (\mathcal{T}\mathbf{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.

2 曲线论

2.1 基本概念

定义: 若映射 $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow E^2(E^3)$ 满足:

(1) 每个分量都是 C^∞ 的;

(2) $|\mathbf{r}'(t)| > 0$, 对任意的 $t \in (a, b)$.

则称 \mathbf{r} 为 $E^2(E^3)$ 中的**正则曲线**.

由数学分析知, $\mathbf{r}'(t)$ 是正则曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的切向量, 且指向 t 增加的方向.

定理: 设正则曲线 $\mathbf{r}(t), t \in (a, b)$. 对任意的 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

2.2 平面曲线

考虑平面正则曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in (a, b)$. 固定初始时间 c , 让 t 变动, 则曲线 \mathbf{r} 从时间 c 到 t 的弧长为

$$s(t) = \int_c^t |\mathbf{r}'(u)| du,$$

对 t 求导得

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0.$$

因此 s 与 t 可以互相表示. 取弧长 s 为曲线的参数, 则 $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$. 此时

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = 1,$$

即在弧长参数 s 下, 曲线 \mathbf{r} 的切向量为单位切向量. 我们用 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 表示 $\mathbf{r}(s)$ 对弧长参数 s 求导.

记 $\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$. 将 $\mathbf{t}(s)$ 逆时针旋转 90° 得到的向量 $\mathbf{n}(s)$ 称为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的单位 (正) 法向量并将 $\{\mathbf{r}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ 称为曲线 \mathbf{r} 的 **Frenet 标架**, 它满足:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix}.$$

上式称为 Frenet 标架的**运动方程**. 式中的 $\kappa(s)$ 称为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的**曲率**.

关于常见曲线的曲率有如下结论:

- (1) $\kappa \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(s)$ 是直线;
- (2) $\kappa \equiv a \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(s)$ 是半径为 $\left|\frac{1}{a}\right|$ 的圆 (或其一部分).

定义: 设 S^1 为平面上的单位圆周. 对平面曲线 $\mathbf{r}(s)$, 称映射

$$\begin{aligned} g: \mathbf{r} &\rightarrow S^1 \\ s &\mapsto \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的 **Gauss 映射**.

通过 Gauss 映射, 我们可以利用单位法向量 $\mathbf{n}(s)$ 的变化来研究曲线的弯曲.

2.3 E^3 中的曲线

设 E^3 中的正则曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in (a, b)$. 与平面曲线同理, t 与弧长 s 仍能互相表示, 且 $\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$ 仍为单位切向量.

定义: 称 $\dot{\mathbf{t}}(s)$ 为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的**曲率向量**, 其模长 $\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|$ 称为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的**曲率**.

定义: 若 $\kappa(s) > 0$, 则称 $\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \dot{\mathbf{t}}(s)$ 为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的**主法向量**, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ 为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的**副法向量**. 由此得到的正交标架 $\{\mathbf{r}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ 称为空间曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的 **Frenet 标架**.

我们称 $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ 所在直线分别为曲线 \mathbf{r} 的切线, 主法线, 副法线; 以它们为法向量的平面分别称为曲线 \mathbf{r} 的法平面, 从切平面, 密切平面.

空间曲线的 Frenet 标架的**运动方程**为

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix},$$

其中的函数 τ 称为曲线 \mathbf{r} 的**挠率**.

定理: 设空间曲线 \mathbf{r} 的曲率 $\kappa > 0$, 则曲线 \mathbf{r} 落在某平面上的充要条件为 $\tau \equiv 0$.

2.4 曲线论基本定理

设 $t = t(u), u \in (\alpha, \beta)$. 若 $\frac{dt}{du} \neq 0$, 则称其为一个**参数变换**. 当 $\frac{dt}{du} > 0$ 时, 称参数变换 $t = t(u)$ 是**保持定向**的. 在所有同定向参数中, 弧长参数 s 是惟一的 (至多相差一个曲线上的位移). 因此曲线的曲率和挠率由曲线自身决定, 与容许的参数选取无关.

性质: 空间曲线的弧长, 曲率, 挠率在刚体运动下不变.

定理 (惟一性): 设空间弧长参数曲线 $\mathbf{r}_1(s), \mathbf{r}_2(s), s \in (a, b)$. 若 $\kappa_1(s) \equiv \kappa_2(s) > 0, \tau_1(s) \equiv \tau_2(s)$, 则存在 E^3 中的刚体运动 \mathcal{T} , 使得 $\mathbf{r}_2 = \mathcal{T} \circ \mathbf{r}_1$.

定理 (存在性): 若函数 $\kappa(s), \tau(s)$ 在 (a, b) 上连续可微, 且 $\kappa(s) > 0$, 则存在 E^3 中的弧长参数曲线 $\mathbf{r}(s), s \in (a, b)$, 使得 $\kappa(s), \tau(s)$ 分别为其曲率和挠率.

3 曲面的局部理论

3.1 基本概念

定义: 若从平面区域 D 到 E^3 的映射 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 满足

(1) 每个分量都是 C^∞ 的;

(2) $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$;

则称 \mathbf{r} 为 E^3 中的 (正则) **曲面**, (u, v) 称为曲面的坐标参数.

定义: 设参数曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, 称 uv 平面中的直线 $v = v_0$ 与 $u = u_0$ 在 \mathbf{r} 下的像分别为曲面的 **u 线**与 **v 线**, 称 u 曲线族与 v 曲线族构成的图形为曲面的坐标网.

易知 u 线与 v 线的方程分别为 $\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u, v_0), \mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(u_0, v)$; u 线与 v 线的切向量分别为 $\mathbf{r}_u(u, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v)$.

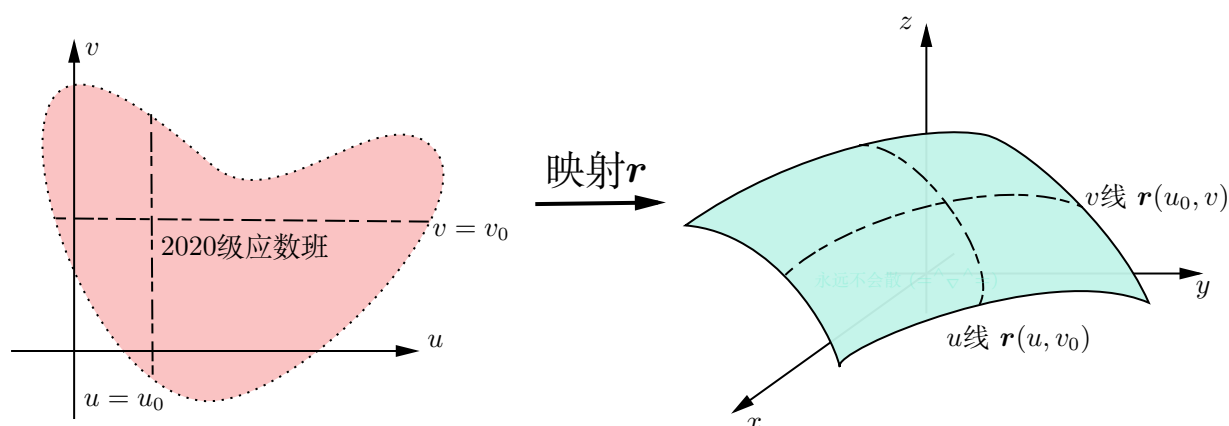
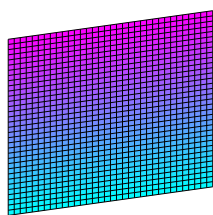


图 1: 曲面的 u 线与 v 线

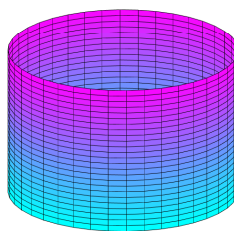
下面给出常见曲面及其常用的参数表示.

曲面	常用参数表示	参数域
平面	$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, c)$	$(u, v) \in \mathbb{R}^2$
圆柱面	$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$	$0 < u < 2\pi, -\infty < v < +\infty$
球面	$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$	$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi$
正螺面	$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$	$(u, v) \in \mathbb{R}^2$

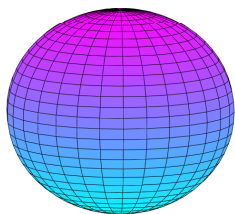
直接计算, 可以发现在上表给出的参数表示下, 曲面的 u 线与 v 线处处正交, 我们称这样的坐标网为正交网.



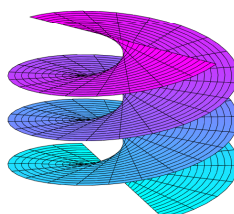
(a) 平面



(b) 圆柱面



(c) 球面



(d) 正螺面

图 2: 常见曲面及其超级漂亮的坐标网!

定义: 设曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上 P 点的参数坐标为 (a, b) , 称 $\mathbf{r}_u(a, b)$ 与 $\mathbf{r}_v(a, b)$ 张成的平面为曲面 S 在 P 点的**切平面**, 记为 $T_P S$. 过 P 点且与 $T_P S$ 垂直的直线称为曲面 S 在 P 点的**法线**.

设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{u}, \bar{v})$ 为曲面 S 的另一参数表示, 参数域为 \bar{D} . 由链式法则知

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\bar{u}} \\ \mathbf{r}_{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix},$$

从而切平面及法线与参数选取无关.

直接计算可得

$$\mathbf{r}_{\bar{u}} \wedge \mathbf{r}_{\bar{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v.$$

由此可知当 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$ 时, $\mathbf{r}_{\bar{u}} \wedge \mathbf{r}_{\bar{v}}$ 与 $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ 方向相同, 对应的参数变换为**同向参数变换**; 当 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} < 0$ 时, $\mathbf{r}_{\bar{u}} \wedge \mathbf{r}_{\bar{v}}$ 与 $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$ 方向相反, 对应的参数变换为**反向参数变换**.

3.2 第一基本形式

记 $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$. 设 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ 为曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上的一条曲线, s 为其弧长参数. 由链式法则知 $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_u u'(t) + \mathbf{r}_v v'(t)$. 又因为 $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$, 从而

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

由此得到的二次微分式

$$I = ds^2 = E du du + 2F du dv + G dv dv$$

称为曲面 S 的**第一基本形式**, 其中的 E, F, G 称为曲面 S 的**第一基本量**.

第一基本形式是曲面上曲线弧长微元的平方, 表示曲面的度量. 事实上, 它可以表示为 $I = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle$. 除此以外, 还可以写成关于 du, dv 的二次型

$$I = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

据此我们可以定义运算

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{r}_u + x_2 \mathbf{r}_v, \mathbf{y} = y_1 \mathbf{r}_u + y_2 \mathbf{r}_v \in T_P S$.

按照上述定义, 第一基本形式 I 其实就是 $I(d\mathbf{r}, d\mathbf{r})$. 同时由高等代数易知 $I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

第一基本形式是曲面的一个基本且重要的几何量, 它具有以下性质:

- (1) 第一基本形式与参数选取无关;
- (2) 第一基本形式在合同变换下不变.

下面的表格列出了常见曲面的第一基本形式.

曲面	参数表示	第一基本形式
平面	$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, c)$	$I = du^2 + dv^2$
圆柱面	$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$	$I = a^2 du^2 + dv^2$
球面	$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$	$I = a^2 du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$

3.3 第二基本形式

因为 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$ 为单位法向量, 从而将 $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n} \rangle = 0, \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n} \rangle = 0$ 对 u, v 求偏导得

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle &= 0, \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u \rangle &= 0, \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle = 0.\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}L &= \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle, \\ M &= \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u \rangle, \\ N &= \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle,\end{aligned}$$

称 $\Pi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ 为曲面的**第二基本形式**, 它反映了曲面的形状. 容易验证 $\Pi = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n} \rangle$, 并且也可以写成关于 du, dv 的二次型

$$\Pi = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

与第一基本形式类似, 我们可以用第二基本形式定义切向量之间的运算

$$\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{r}_u + x_2 \mathbf{r}_v, \mathbf{y} = y_1 \mathbf{r}_u + y_2 \mathbf{r}_v \in T_P S$.

第二基本形式具有以下性质:

- (1) 第二基本形式在同向参数变换下不变, 反向参数变换下变号;
- (2) 第二基本形式在刚体运动下不变, 反向刚体运动下变号.

3.4 法曲率与 Weingarten 变换

设 E^3 中的参数曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

定义: 曲面 S 在点 P 处沿非零切向量 $\mathbf{w} = \xi \mathbf{r}_u + \eta \mathbf{r}_v \in T_P S$ 的**法曲率**为

$$k_n(\mathbf{w}) = \frac{\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{I(\mathbf{w}, \mathbf{w})} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

由第一、第二基本形式的性质可知, 法曲率在同向参数变换与刚体运动下不变, 在反向参数变换与反向刚体运动下变号. 且由定义易知 $k_n(\mathbf{w}) = k_n(-\mathbf{w})$.

设 $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ 为曲面 S 上过点 P 的一条弧长参数曲线. $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 为其单位切向量, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ 为其曲率向量. 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \mathbf{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} + \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \end{aligned}$$

设曲面 S 在 P 处的法向量为 \mathbf{n} . 按照定义, 由上面两式直接验证可知 S 在点 P 处沿单位切向量 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 的法曲率恰为

$$k_n = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle.$$

由上式可以看出, 法曲率就是曲面上曲线的曲率向量在曲面法向量上的投影. 因此, 曲面上一点处沿各个切向的法曲率的符号可以反映曲面在这一点附近的形状. 具体如下:

- (1) $LN - M^2 > 0$, 此时曲面在 P 点沿任意切向的法曲率同正或同负, 从而沿各个切向的弯曲同向, 曲面在 P 点附近是凹或凸的. 这样的点称为曲面的**椭圆点**.
- (2) $LN - M^2 < 0$, 此时关于切方向的方程 $k_n(\mathbf{w}) = 0$ 有两个线性无关的解, 对应的切方向称为曲面在 P 点的**渐进方向**, 曲面在这点附近是马鞍型的. 这样的点称为曲面的**双曲点**.
- (3) $LN - M^2 = 0$, 这样的点称为曲面的**抛物点**. 此时又分为两种情况:
 - (a) $L = M = N = 0$, 此时在 P 点沿任意切向的法曲率均为 0. 这样的点称为曲面的**平点**;
 - (b) L, M, N 不全为 0, 此时 $k_n(\mathbf{w}) = 0$ 有一个线性无关的解, 也称为曲面在该点的渐进方向.

定义: 曲面上沿任意切方向的法曲率均相等的点称为曲面的**脐点**.

由定义知曲面在脐点处满足

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = k.$$

若常数 $k \neq 0$, 则称该脐点为**圆点**. 当 $k = 0$ 时, 脐点就是平点.

定义: 设曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$ 为其单位法向量. S^2 为 E^3 中的单位球面. 称映射

$$\begin{aligned} g: \quad S &\rightarrow S^2 \\ \mathbf{r}(u, v) &\mapsto \mathbf{n}(u, v) \end{aligned}$$

为曲面 S 的 **Gauss 映射**.

与曲线的 Gauss 映射类似, 我们可以利用曲面的 Gauss 映射, 通过法向量的变化来刻画曲面的弯曲程度.

定义: 设曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, 称线性变换

$$\begin{aligned}\mathcal{W}: T_P S &\rightarrow T_P S \\ \lambda \mathbf{r}_u + \mu \mathbf{r}_v &\mapsto -(\lambda \mathbf{n}_u + \mu \mathbf{n}_v)\end{aligned}$$

为曲面 S 的 **Weingarten 变换**.

容易发现, 上述定义等价于 $\mathcal{W}(d\mathbf{r}) = -d\mathbf{n}$. Weingarten 变换 \mathcal{W} 具有以下性质:

- (1) \mathcal{W} 在同向参数变换下不变, 在反向参数变换下变号;
- (2) \mathcal{W} 是对称变换, 即对任意的 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P S$, 有 $\langle \mathcal{W}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathcal{W}(\mathbf{w}) \rangle$.

直接计算可以发现 $\text{II}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathcal{W}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$, 又因为 $\text{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, 故法曲率

$$k_n(\mathbf{w}) = \frac{\text{II}(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{\text{I}(\mathbf{w}, \mathbf{w})} = \frac{\langle \mathcal{W}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}.$$

特别地, 当 \mathbf{w} 为单位切向量时, $k_n(\mathbf{w}) = \langle \mathcal{W}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$.

3.5 主曲率与 Gauss 曲率

定义: Weingarten 变换在 P 点的两个特征值 k_1, k_2 称为曲面在 P 点的**主曲率**. 与 k_1, k_2 对应的特征方向称为曲面在 P 点的**主方向**.

因 Weingarten 变换是对称变换, 因此它的特征值必为实数. 若 $k_1 \neq k_2$, 则对应的主方向相互正交; 若 $k_1 = k_2$, 则任意切向均为主方向. 总而言之, 我们总能取到单位正交主方向.

性质 (Euler 公式): 设 k_1, k_2 为曲面 S 在 P 点的主曲率, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为对应的单位正交主方向, 单位切向量 \mathbf{v} 与 \mathbf{e}_1 的夹角为 θ , 则

$$k_n(\mathbf{v}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

由上述公式知, 若 $k_1 \neq k_2$, 则法曲率在主方向上取极大或极小值; 若 $k_1 = k_2$, 则在该点沿任意切向的法曲率均相等.

定义: 设 S 为 E^3 中的曲面, S 上点 P 处的主曲率为 k_1, k_2 . 称 $K = k_1 k_2$ 为曲面 S 在对应点处的 **Gauss 曲率**, $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ 为曲面 S 在对应点处的**平均曲率**.

容易发现, 上述定义等价于 $K = \det \mathcal{W}, H = \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{W}$. 利用 Gauss 曲率与平均曲率, Weingarten 变换的特征方程可以写为

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

主曲率 k_1, k_2 就是该方程的两个根.

设主曲率 k_1, k_2 对应的单位正交主方向分别为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 那么

$$\mathcal{W} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}.$$

下面我们来求 \mathcal{W} 在基 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 下的矩阵.

设 Weingarten 变换 \mathcal{W} 在基 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 下的矩阵为 \mathbf{W} , 即

$$\mathcal{W} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix},$$

也即

$$- \begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix},$$

因为 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 线性无关, 两边同时右乘 $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ 得

$$- \begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v),$$

即

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

从而

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

因此

$$K = \det \mathbf{W} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{W} = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}.$$

3.6 曲面的一些例子

一、旋转曲面

设 xz 平面上的曲线 $(f(u), g(u)), f > 0$. 将其绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

定义: 平均曲率 $H \equiv 0$ 的曲面称为**极小曲面**.

二、直纹面与可展曲面

直纹面的参数表达式为

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u).$$

当固定 u 时, 就是一条过 $\mathbf{a}(u)$, 沿方向 $\mathbf{b}(u)$ 的直线, 称为直纹面的直母线. 由直纹面的参数表示易知 $N = 0$, 从而 Gauss 曲率 $K = \frac{-M^2}{EG - F^2} \leq 0$.

定义: Gauss 曲率 $K \equiv 0$ 的直纹面称为**可展曲面**.

定理: 直纹面 $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$ 为可展曲面当且仅当它满足下列条件之一:

- (1) $(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 0$;
- (2) 沿着直母线, 直纹面的法向量不变, 即 $\mathbf{n}(u, v_1) = \mathbf{n}(u, v_2) (v_1 \neq v_2)$.

可展曲面只有以下三类:

曲面	参数表示	特点
柱面	$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$, 其中 \mathbf{b} 的方向与 u 无关	直母线平行的直纹面
锥面	$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}_0 + v\mathbf{b}(u)$, 其中 \mathbf{a}_0 为常向量	直母线过定点的直纹面
切线面	$\mathbf{r}(v, t) = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{r}'(t)$	空间曲线的切线全体所成的曲面

三、全脐点曲面

定义: 若曲面 S 上的每一点都是脐点, 则称 S 为全脐点曲面.

由定义知全脐点曲面的第一、第二基本形式满足

$$\Pi = kI,$$

其中 k 为曲面上的函数, 下面我们证明 k 为常值函数.

因为脐点处主曲率 $k_1 = k_2 = k$, 任意方向均为主方向, 从而

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) = -\mathbf{n}_u = k\mathbf{r}_u,$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}_v) = -\mathbf{n}_v = k\mathbf{r}_v.$$

即

$$\mathbf{n}_u + k\mathbf{r}_u = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{n}_v + k\mathbf{r}_v = \mathbf{0}.$$

上面两式分别对 v 与 u 求偏导得

$$\mathbf{n}_{uv} + k_v\mathbf{r}_u + k\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{n}_{vu} + k_u\mathbf{r}_v + k\mathbf{r}_{vu} = \mathbf{0}.$$

两式相减, 得

$$k_v\mathbf{r}_u - k_u\mathbf{r}_v = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 线性无关, 故 $k_u = k_v = 0$, 即 k 是常值函数.

定理: 曲面是全脐点曲面当且仅当它是平面或球面.

4 标架与曲面论基本定理

4.1 基本概念

设 E^3 中的曲面 S 的参数表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

定义: 参数曲面 S 上的**向量场** $\mathbf{x}(u, v)$ 是指对于 S 上任意一点 $\mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{x}(u, v)$ 是从点 $\mathbf{r}(u, v)$ 出发的一个向量. 对任何的 (u, v) , 当 $\mathbf{x}(u, v)$ 是曲面 S 在点 $\mathbf{r}(u, v)$ 的切向量时, $\mathbf{x}(u, v)$ 称为曲面 S 的**切向量场**; 当 $\mathbf{x}(u, v)$ 是曲面 S 在点 $\mathbf{r}(u, v)$ 的法向量时, $\mathbf{x}(u, v)$ 称为曲面 S 的**法向量场**.

例如 \mathbf{r}_u 与 \mathbf{r}_v 就是曲面 S 上切向量场的两个自然的例子, 而 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$ 则是曲面 S 的 (单位) 法向量场.

定义: 若 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 是曲面 S 上处处线性无关的向量场, 则称 $\{\mathbf{r}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ 是曲面 S 上的 (活动) **标架**. 简单来说, 就是在曲面上的每一点给了一组标架. 一般来说要求 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) > 0$, 保证标架均为正定向. 若 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 两两单位正交, 则称 $\{\mathbf{r}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ 为曲面 S 的**正交标架**. 我们把 $\{\mathbf{r}; \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ 称为曲面 S 的**自然标架**.

4.2 自然标架

设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 为 E^3 中的参数曲面. 记 $u^1 = u, u^2 = v, \mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$. 又记 $g_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle, b_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle$.

下面我们将使用 Einstein 求和约定: 在一个单项式中, 若同一个指标成对出现, 则这个单项式表示对该指标的求和式. 例如 $I = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, II = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.

定义: 求和式中被求和的指标称为**哑指标**, 其余指标称为**自由指标**.

求和式的结果只与自由指标有关, 与哑指标无关. 在不与自由指标的字母重复的情况下, 哑指标可以换成任意其他符号来表示. 例如在

$$A_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = a_{ij} x_j$$

中, 哑指标为 k (或 j), 自由指标为 i . 该求和式所得结果 A_i 只与 i 有关, 与哑指标无关. 自由指标可以把多个方程缩写成一个方程, 哑指标可以把多项缩写成一项.

又记 $(g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1}, g = \det(g_{\alpha\beta}), b = \det(b_{\alpha\beta})$, 则 $(g^{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta}) = (\delta_\beta^\alpha)$, 写成分量形式即为 $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$.

自然标架的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta. \end{cases}$$

其中 $\alpha, \beta = 1, 2$. 第二式中的 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (\partial_\beta g_{\alpha\xi} + \partial_\alpha g_{\beta\xi} - \partial_\xi g_{\alpha\beta})$ 称为曲面的 **Christoffel 符号**. 易知 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 具有对称性, 即 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$. 第三式中的 $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$, 且 (b_α^β) 恰好是 Weingarten 变换 \mathcal{W} 在基 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 下的矩阵.

我们把 $\Gamma_{\xi\alpha\beta} = g_{\gamma\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\alpha\xi} + \partial_\alpha g_{\beta\xi} - \partial_\xi g_{\alpha\beta})$ 称为曲面的第二类 Christoffel 符号. 除此之外, 可用 $\langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\xi \rangle = g_{\gamma\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 计算第一基本量 E, F, G 的一阶偏导数. 例如

$$\frac{\partial E}{\partial u^\alpha} = \partial_\alpha \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 \rangle = 2 \langle \mathbf{r}_{1\alpha}, \mathbf{r}_1 \rangle = 2g_{\gamma 1} \Gamma_{1\alpha}^\gamma = 2\Gamma_{1\alpha}^1 E + 2\Gamma_{1\alpha}^2 F.$$

4.3 曲面的结构方程

由光滑函数的二阶偏导可以交换求导次序, 我们得到 Gauss 方程

$$\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\xi - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi = b_{\alpha\beta} b_\gamma^\xi - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\xi$$

以及 Codazzi 方程

$$\partial_\gamma b_{\alpha\beta} - \partial_\beta b_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\xi b_{\xi\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi b_{\xi\beta} = 0.$$

它们合称为 Gauss-Codazzi 方程, 也叫做曲面的**结构方程**.

由于 $\alpha, \beta, \gamma, \xi = 1, 2$, 所以 Gauss 方程与 Codazzi 方程包含了很多个方程. 但实质上, Gauss 方程仅有一个独立的方程, Codazzi 方程仅有两个独立的方程.

引进如下的 Riemann 记号:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\delta\xi} \left(\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\xi - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi \right).$$

我们可以发现它具有对称性

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\delta\alpha} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta}.$$

由此可以推出 Gauss 方程只有一个独立方程

$$R_{1212} = - (b_{11} b_{22} - b_{12}^2).$$

同样, Codazzi 方程只有两个独立的方程.

4.4 曲面的存在惟一性定理

定理 (惟一性): 设 $S_1 : \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, v), S_2 : \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u, v)$ 是定义在同一个参数域 D 上的两个曲面. 若 S_1, S_2 在 D 上有相同的第一、第二基本形式, 则存在刚体运动 \mathcal{T} 使得 $\mathbf{r}_2 = \mathcal{T} \circ \mathbf{r}_1$.

设有二次微分式 $\varphi = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \psi = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. 其中 $(g_{\alpha\beta})$ 对称正定, $(b_{\alpha\beta})$ 对称, $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (\partial_\beta g_{\alpha\xi} + \partial_\alpha g_{\beta\xi} - \partial_\xi g_{\alpha\beta})$.

定理 (存在性): 若 $b_{\alpha\beta}, b_\alpha^\beta, \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 满足 Gauss-Codazzi 方程, 则对任意的 $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in D$, 存在 u_0 的一个邻域 $U \subset D$ 与 U 上曲面 $\mathbf{r}(u^1, u^2) : U \rightarrow E^3$, 使得 φ, ψ 分别为其第一、第二基本形式.

4.5 正交标架

给定 E^3 中的曲面 S 及 S 的一个参数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. 在曲面 S 的各点上取切向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 使得 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 单位正交, 且关于 (u, v) 光滑. 令 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ 为曲面的单位法向量场, 则 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 构成了沿曲面的一个正交标架.

由于 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 E^3 中的一组标准正交基, 从而由高等代数知 E^3 中的任一向量 \mathbf{x} 均可表示为 $\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3$.

记 $\omega_i = \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_i \rangle, \omega_{ij} = \langle d\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. 对 $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ 两边微分得 $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, 从而 $\omega_{ii} = 0, i = 1, 2, 3$. 因为 $\langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$, 从而得到正交标架的运动方程

$$\begin{cases} d\mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{23} \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2. \end{cases}$$

又因为 $I = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle, II = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n} \rangle = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3 \rangle$, 故

$$\begin{cases} I = \omega_1 \omega_1 + \omega_2 \omega_2, \\ II = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}. \end{cases}$$

设 $\{\mathbf{r}; \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ 为曲面的另一组正交标架, 其中 $\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$. 设 $\bar{\mathbf{e}}_1$ 与 \mathbf{e}_1 的夹角为 $\theta = \theta(u, v)$, 则由

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2. \end{cases}$$

直接计算可得

性质: 曲面的第一基本形式 I 与正交标架的选取无关, 第二基本形式 II 与同法向的正交标架选取无关.

设切平面中基 e_1, e_2 到基 r_u, r_v 的过渡矩阵为 A , 即

$$\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

其中矩阵 A 的元素均为曲面上的函数. 直接计算可得

$$(\omega_1, \omega_2) = (du, dv) A.$$

又因为

$$I = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2 = (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = (du, dv) A A^T \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

所以

$$A A^T = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

由于 A 可逆, 从而一阶微分形式均能表示成 ω_1, ω_2 的线性组合. 故可设

$$(\omega_{13}, \omega_{23}) = (\omega_1, \omega_2) B.$$

类似地, 由

$$II = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = (\omega_{13}, \omega_{23}) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = (du, dv) A B A^T \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

可知

$$A B A^T = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

同时我们得到了 B 是对称矩阵这一结论.

事实上, 矩阵 B 就是 Weingarten 变换在基 e_1, e_2 下的矩阵. 由线性变换在不同基下的矩阵相似可知曲面的 Gauss 曲率 $K = \det B$, 平均曲率 $H = \frac{1}{2} \text{tr} B$.

4.6 外微分法

定义: 称函数 f 为零阶**外微分形式**, $f du + g dv$ 为一阶外微分形式, $f du \wedge dv$ 为二阶外微分形式. 其中 \wedge 是两个一阶外微分形式之间的**外积**, 它满足

$$(1) \text{ 线性性: } (\lambda\theta_1 + \mu\theta_2) \wedge \varphi = \lambda(\theta_1 \wedge \varphi) + \mu(\theta_2 \wedge \varphi);$$

$$(2) \text{ 反交换性: } \theta \wedge \varphi = -\varphi \wedge \theta \text{ (从而 } \theta \wedge \theta = 0).$$

定义: 作用外微分形式上的**外微分算子** d 定义为

(1) 对零阶外微分形式 f : $df = f_u du + f_v dv$;

(2) 对一阶外微分形式 $fdu + gdv$: $d(fdu + gdv) = df \wedge du + dg \wedge dv$;

(3) 对二阶外微分形式 $fdu \wedge dv$: $d(fdu \wedge dv) = df \wedge du \wedge dv$.

由定义可以看出, 外微分算子 d 将外微分形式升高了一阶. 并且由于 $du \wedge du = 0$ 及 $dv \wedge dv = 0$, 所以 $d(fdu \wedge dv)$ 必定为 0, 因此没有非零的三阶及以上外微分形式.

设 f, g 为函数, φ 为一阶外微分形式, 直接计算可得以下性质:

(1) $d(fg) = (df)g + f(dg)$;

(2) $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi$;

(3) $d(df) = 0$.

设 E^3 中参数曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, 取正交标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. 由 $d(d\mathbf{r}) = 0$ 得

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}. \end{cases}$$

由 $d(d\mathbf{e}_i) = 0$ 得

$$\begin{cases} d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \\ d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \end{cases}$$

以上两组方程通称为曲面正交标架的结构方程.

实际上, 第二组的第一个方程就是曲面的 Gauss 方程, 后两个方程就是曲面的 Codazzi 方程.

为了说明这一事实, 设 (u, v) 为曲面 S 的正交参数, 其第一基本形式为 $I = Edu + Gdv$.

取 $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$, 直接计算可得

$$\begin{cases} \omega_{12} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv, \\ \omega_{13} = \frac{L}{\sqrt{E}} du + \frac{M}{\sqrt{E}} dv, \\ \omega_{23} = \frac{M}{\sqrt{G}} du + \frac{N}{\sqrt{G}} dv. \end{cases}$$

将上述结果带入方程 $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$ 得

$$-\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG}}.$$

此即正交参数下的 Gauss 方程. 类似可得后两个方程就是正交参数下的 Codazzi 方程.

利用 $(\omega_{13}, \omega_{23}) = (\omega_1, \omega_2) \mathbf{B}$ 与 Gauss 曲率 $K = \det \mathbf{B}$, 我们可将 Gauss 方程 $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$ 进一步化简为 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$.

5 曲面的内蕴几何学

5.1 等距变换

定义: 曲面由第一基本形式决定的几何称为**内蕴几何**.

定义: 设 σ 为曲面 S 到曲面 \tilde{S} 的一一对应. 如果 S 上的任意曲线 γ 与其在 \tilde{S} 上的像曲线 $\sigma(\gamma)$ 长度相等, 则称 σ 为 S 到 \tilde{S} 的**等距变换**, 且称曲面 S 与 \tilde{S} 等距.

例如, 将一张纸卷成圆筒, 则圆筒与铺平的纸是等距的. 显然, E^3 中的合同变换是等距变换.

定理: E^3 中的两个曲面等距当且仅当经过适当的参数选取, 它们有相同的第一基本形式.

例 考察特殊螺旋面

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \text{ 参数域 } D = \{(u, v) \mid u > 0, 0 < v < 2\pi\},$$

与悬链面

$$\tilde{\mathbf{r}}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \operatorname{arcosh} \rho), \text{ 参数域 } \tilde{D} = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 1, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

它们的第一基本形式分别为

$$I(u, v) = du du + (1 + u^2) dv dv,$$

$$\tilde{I}(\rho, \theta) = \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} d\rho d\rho + \rho^2 d\theta d\theta.$$

一一对应 $(u, v) \rightarrow (\rho, \theta) = (\sqrt{1 + u^2}, v)$ 是两个曲面间的一个等距变换, 这是因为将

$$d\rho = \frac{u du}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad d\theta = dv$$

代入到悬链面的第一基本形式, 有

$$\tilde{I}(\rho, \theta) = \frac{1 + u^2}{1 + u^2 - 1} \cdot \frac{u^2 du^2}{1 + u^2} + (1 + u^2) dv^2 = I(u, v).$$

曲面上曲线的弧长、夹角以及曲面域的面积都由第一基本形式所确定, 而互为等距的曲面在对应点处有相同的第一基本形式, 因此**弧长、夹角、面积在等距变换下都是不变的**. 此外, 我们有

定理: 设曲面 S 与 \tilde{S} 的参数表示分别为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 与 $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{u}, \tilde{v})$, 则 S 与 \tilde{S} 之间的一一对应

$\sigma(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$ 是等距变换的充要条件为

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \mathbf{J}_\sigma \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} \mathbf{J}_\sigma^T, \text{ 其中 } \mathbf{J}_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

设 σ 为曲面 S 到曲面 \tilde{S} 的一个一一对应. S 上的曲线 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ 在映射 σ 下的像为 \tilde{S} 上的曲线 $\tilde{\mathbf{r}}(t)$. 设 $\mathbf{r}(0) = P$, 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 在 P 处切向量为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$. 则曲线 $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ 在 $\sigma(P)$ 处的切向量为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt}(0) = \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{dt}(0) + \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \frac{d\tilde{v}}{dt}(0) \\ &= \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \left(a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \right) \Big|_{t=0} + \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \left(a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} + b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

由此可见, 切向量 $\tilde{\mathbf{v}}$ 只与 \mathbf{v} 以及映射 σ 有关, 由此给出以下定义:

定义: 设映射 $\sigma: S \rightarrow \tilde{S}$. 称映射

$$\begin{aligned} \sigma_*: T_P S &\longrightarrow T_{\sigma(P)} \tilde{S} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

为 σ 的**切映射**.

不难发现, 切映射 σ_* 是线性映射, 且在自然标架下的系数矩阵为 \mathbf{J}_σ , 即

$$\sigma_* \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

我们可以利用切映射来刻画等距变换.

定理: 设 σ 为曲面 S 到曲面 \tilde{S} 的一一对应. 则 σ 为等距变换当且仅当对任意的 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P S$, 有

$$\langle \sigma_*(\mathbf{v}), \sigma_*(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

定义: 设 σ 为曲面 S 到曲面 \tilde{S} 的一一对应. 若 σ 保持任意两相交曲线在交点处的夹角不变, 则称 σ 为 S 到 \tilde{S} 的**保角变换**.

等距变换保持曲面的第一基本形式, 因此也保持两曲线交点处的夹角不变. 故等距变换一定是保角变换. 保角变换也可以用第一基本形式来刻画.

定理: 设 σ 为曲面 S 到曲面 \tilde{S} 的一一对应. 则 σ 为保角变换当且仅当存在正函数 λ , 使得

$$\tilde{\mathbf{I}} = \lambda^2 \mathbf{I}.$$

保角变换的经典例子就是球面的球极投影. 平面的第一基本形式为 $I = du^2 + dv^2$. 球面的球极投影参数表示为

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{2a^2 u}{a^2 + u^2 + v^2}, \frac{2a^2 v}{a^2 + u^2 + v^2}, \frac{a(u^2 + v^2 - a^2)}{a^2 + u^2 + v^2} \right),$$

此时球面的第一基本形式为

$$I(u, v) = \frac{4a^2}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

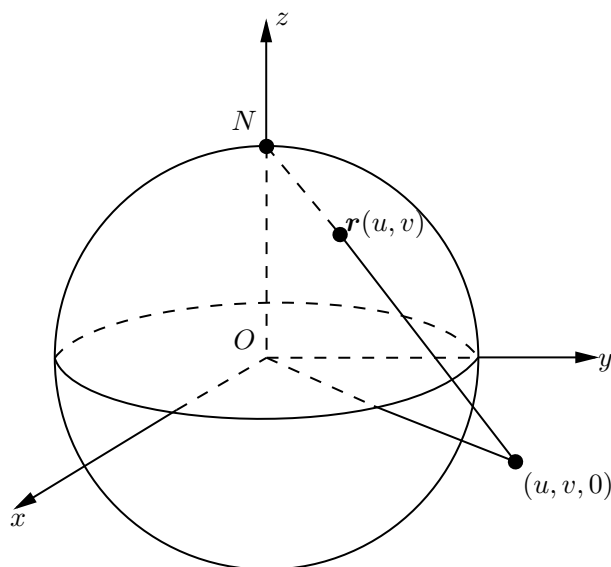


图 3: 球极投影

对于保角变换, 我们有如下重要而深刻的结论:

定理: 曲面上任意一点处都存在一个邻域, 可以和欧氏平面上的一个区域建立保角对应.

因为欧氏平面的度量为 $I = du^2 + dv^2$, 故由上述两个定理知, 曲面上任意一点都可以在其邻域内取到局部参数 (u, v) , 使得

$$I = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2), \lambda \neq 0.$$

我们把这样的 (u, v) 称为曲面的**等温参数**.

5.2 曲面的协变微分

一、联络形式

我们把 ω_{12} 称为曲面关于标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 的**联络形式**.

性质: 联络形式 ω_{12} 由方程

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}. \end{cases}$$

惟一确定, 从而 ω_{12} 只与 ω_1, ω_2 有关.

性质: 设 $\bar{e}_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \bar{e}_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ 是曲面的另一组正交标架 (即两个标架相差一个角度为 θ 的旋转), 则曲面关于标架 $\{r; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ 的联络形式

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta.$$

利用 Gauss 方程 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ 以及 $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ 只与第一基本形式有关这一事实, 我们得到

Gauss 绝妙定理: 曲面的 Gauss 曲率 K 只与第一基本形式有关.

推论: 互为等距的曲面, 在对应点处的 Gauss 曲率相等 (反之不对).

二、协变微分

定义: 对切向量 v , 称 $Dv = \langle dv, e_1 \rangle e_1 + \langle dv, e_2 \rangle e_2$ 为 v 的**协变微分**.

容易发现 Dv 就是 dv 在切平面上的投影, 因而与标架的选取无关. 此外, 协变微分有以下与普通微分一致的性质:

- (1) $D(v + w) = Dv + Dw$;
- (2) $D(fv) = dfv + fDv$;
- (3) $D\langle v, w \rangle = \langle Dv, w \rangle + \langle v, Dw \rangle$.

定义: 设 $\gamma: r(t) = r(u(t), v(t))$ 为曲面 S 上的一条曲线, $v(t)$ 为沿 γ 的切向量场. 若 $\frac{Dv}{dt} = 0$, 则称 $v(t)$ 沿曲线 γ 平行.

与欧氏空间中的平移不同, 曲面上切向量的平行移动一般而言与路径 (曲线) 的选择有关.

性质 (惟一性): 设 $\gamma: r(t) = r(u(t), v(t))$ 为曲面 S 上的一条曲线, $r(a) = P$. 对任意的 $v_0 \in T_P S$, 存在惟一的沿 γ 的平行切向量场 $v(t)$, 使得 $v(a) = v_0$.

定理: 设 $v(t), w(t)$ 为曲面 S 上沿 γ 的平行切向量场, 则 $\langle v(t), w(t) \rangle = \text{常数}$.

推论: 平行移动不改变切向量的长度与两切向量间的夹角.

5.3 测地曲率

设 $r(s) = r(u(s), v(s))$ 为曲面 S 上的一条弧长参数曲线. n 为曲面 S 的法向量. 沿曲线 $r(s)$ 取正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$, 满足 $e_1 = \frac{dr}{ds}, e_3 = n$, 且 e_1, e_2, e_3 正定向.

定义: 称 $k_g = \left\langle \frac{De_1}{ds}, e_2 \right\rangle$ 为曲面 S 上弧长参数曲线 $r(s)$ 的**测地曲率**. $k_g = k_g e_2 = \frac{De_1}{ds}$ 称为

对应的测地曲率向量.

由定义知

$$k_g = \left\langle \frac{D\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{e}_2 \right\rangle = \frac{\omega_{12}}{ds}.$$

可见, 测地曲率 k_g 只与 ω_1, ω_2 有关, 且

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{e}_2 \right\rangle \mathbf{e}_2 + \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{e}_3 \right\rangle \mathbf{e}_3 = k_g \mathbf{e}_2 + k_n \mathbf{e}_3,$$

由此可以看出曲面上曲线的测地曲率向量是曲线的曲率向量在切平面上的投影, 且

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

设 (u, v) 为曲面 S 的正交参数, $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ 为曲面 S 上的弧长参数曲线. 设 $\mathbf{r}(s)$ 与 u 线的夹角为 θ , 取 $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$, 沿曲线 $\mathbf{r}(s)$ 我们取

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2.$$

从而

$$\mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds} = \cos \theta \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}} + \sin \theta \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}},$$

故

$$\frac{du}{ds} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{E}}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}}.$$

直接计算得

$$\begin{aligned} k_g &= \left\langle \frac{d\bar{\mathbf{e}}_1}{ds}, \bar{\mathbf{e}}_2 \right\rangle = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega_{12}}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \frac{du}{ds} + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}, \end{aligned}$$

从而 $\mathbf{r}(s)$ 的测地曲率为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}} \cos \theta + \frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}} \sin \theta.$$

上式被称为 **Liouville 公式**, 常用于计算曲线的测地曲率. 由此可以看出, 曲线的测地曲率只依赖于曲面的第一基本形式, 因此它是一个内蕴的几何量.

定义: 称曲面上测地曲率 $k_g = 0$ 的曲线为曲面的**测地线**.

测地线是平面直线在曲面的推广, 它具有与之相似的性质.

性质 (惟一性): 设 \mathbf{v} 为曲面 S 上点 P 处的非零切向量, 则曲面 S 上存在惟一过点 P 且与 \mathbf{v} 相切的测地线.

因为测地曲率是内蕴几何量, 因此它在等距变换下不变, 故有

定理: 设 σ 为曲面 S 到 \tilde{S} 的等距变换. 若 γ 为 S 上的测地线, 则 $\sigma(\gamma)$ 为 \tilde{S} 上的测地线.

关于测地线还有以下结论.

定理: 曲线 γ 为曲面 S 上的测地线当且仅当 γ 的主法向量与 S 的法向量平行.

推论: 表面上的直线均为测地线.

定理: 表面上连接两点的最短曲线是测地线, 反之不对.

5.4 Gauss-Bonnet 公式

定理 (Gauss-Bonnet 公式): 设 D 为曲面 S 上的一块单连通区域, 其边界 ∂D 是分段光滑的简单闭曲线, 顶点处的外角为 α_i , 则

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

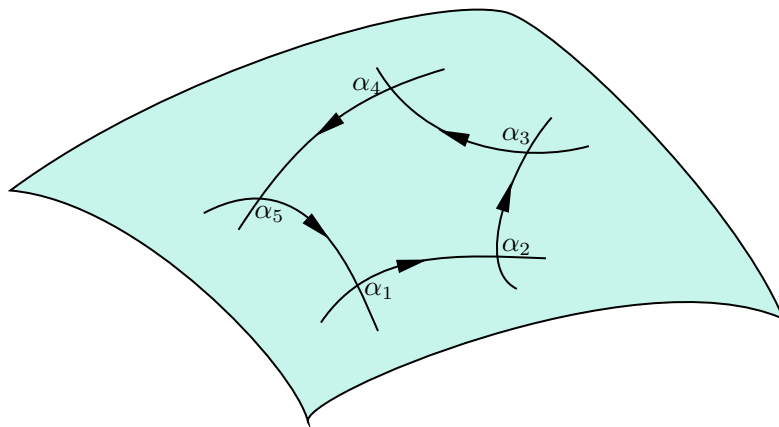


图 4: Gauss-Bonnet 公式示意图

应用:

1. 平面的 Gauss 曲率 $K = 0$, 直线为测地线, $k_g = 0$, 从而由 Gauss-Bonnet 公式知任意平面凸多边形的外角之和均为 2π .
2. 设表面上的测地三角形的外角为 α_i , 内角为 β_i . 因为测地三角形的三边均为测地线, 故 $k_g = 0$, 从而由 Gauss-Bonnet 公式知测地三角形的内角和为 $\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi + \int_D K dA$. 故当曲面的 Gauss 曲率 $K > 0$ 时 (例如球面), 内角和大于 π ; 当 $K = 0$ 时 (例如平面), 内角和等于 π ; 当 $K < 0$ 时 (例如马鞍面), 内角和小于 π .

6 总结

1. 第一、第二基本形式

第一基本形式决定曲面的度量 (长度、夹角、面积); 第二基本形式反映曲面的形状.

2. 三种变换

名称	定义	性质
合同变换	保持任意两点距离的变换	平移、旋转、反射的复合
等距变换	保持任意曲线长度的变换	等距曲面有相同的第一基本形式
保角变换	保持任意相交曲线夹角的变换	保角曲面的第一基本形式成正比

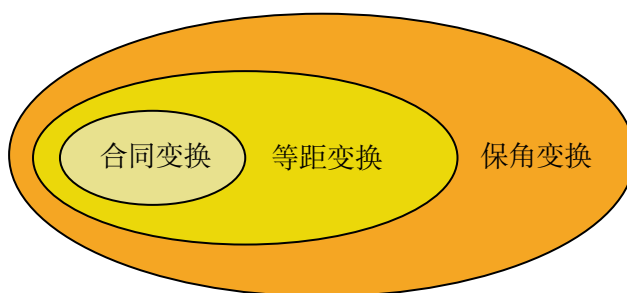


图 5: 三种变换的关系

3. 面积元

曲面 $S: \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$ 的面积为

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

因此我们把 $\sqrt{EG - F^2} du dv$ 称为曲面的面积元, 记为 dA , 且有

$$dA = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

4. 一般参数下曲线的曲率与挠率

平面曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

空间曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的曲率与挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''|^2}.$$

5. 法曲率

曲面上 P 点处沿非零切向量 $\mathbf{w} \in T_P S$ 的法曲率为

$$k_n(\mathbf{w}) = \frac{\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{I(\mathbf{w}, \mathbf{w})} = \frac{\langle \mathcal{W}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}.$$

特别地, 当 \mathbf{w} 为单位切向量时, $k_n(\mathbf{w}) = \langle \mathcal{W}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$.

6. 内蕴几何量

Gauss 曲率与测地曲率是内蕴几何量, 只与第一基本形式有关; 平均曲率是外蕴几何量. 正交参数下的 Gauss 曲率与测地曲率分别为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right],$$

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}} \cos \theta + \frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}} \sin \theta.$$

7. 曲面的三种参数

曲面上任意一点都存在一个邻域, 在其内可以取到正交参数, 更进一步, 可以取到等温参数.

一般参数	$\xrightarrow{F=0}$	正交参数	$\xrightarrow{E=G}$	等温参数
$I = E du du + 2F du dv + G dv dv$		$I = E du du + G dv dv$		$I = \lambda(du du + dv dv)$

8. 内蕴几何

所谓内蕴几何, 就是只与曲面自身有关, 而与曲面嵌入外部空间的方式无关的几何. 为了理解这一点, 我们举个例子. 你在一张铺平的纸上画一个三角形, 然后保持这张纸的形态为一个柱面, 慢慢把它卷成圆筒. 从我们人所在的外部空间来看, 这个三角形无时无刻不在变化, 而你观察到的这种外在形状的变化就是曲面的外蕴性质. 但事实上, 在这个过程中的任何一个时刻, 你所画三角形的边长、夹角、面积都没有改变过, 这些不变的性质就是曲面的内蕴几何.

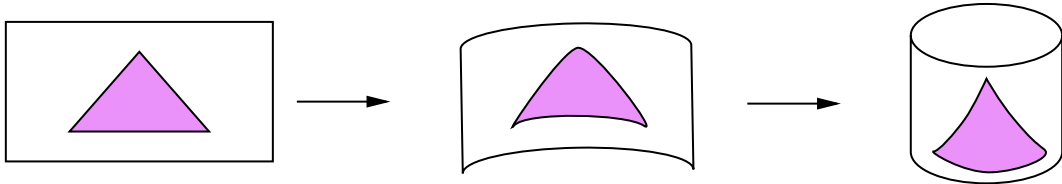


图 6: 等距变换下, 外蕴 (三角形的形状) 在变, 内蕴 (三角形的度量) 没变

9. 法曲率与测地曲率

曲面上曲线的弯曲分为了两部分——曲线自身在曲面上的弯曲 (对应测地曲率 k_g) 与曲面的弯曲 (对应法曲率 k_n), 具体的关系式为 $\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$.

为了理解这一点, 我们在一张铺平的纸上画一条曲线 γ_1 (注意到平面曲线的法曲率为 0), 然后保持纸的形态为一个柱面, 将其卷成圆筒. 最终, 平面曲线 γ_1 就变成了圆筒上的曲线 γ_3 . 在这个等距变换中, 曲线自身的弯曲 (即 k_g) 始终没有改变, 而多出来的这部分弯曲就是来自曲面的弯曲 (即法曲率 k_n).

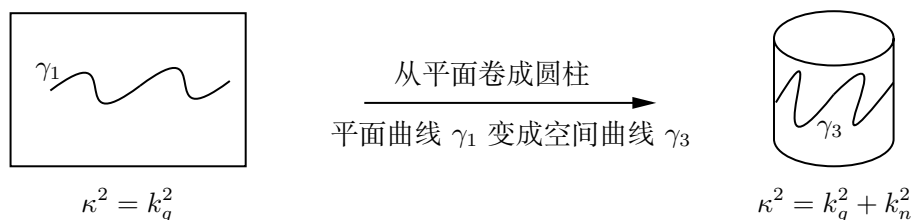
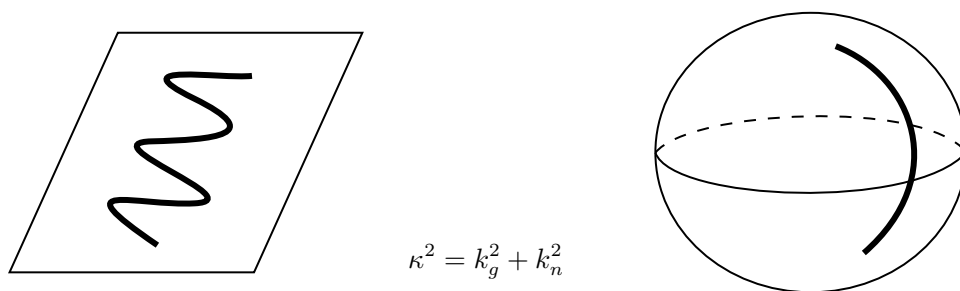


图 7: 从 γ_1 到 γ_3 , 曲线的弯曲越来越厉害

最后我们通过两种情况的对比来更直观地感受测地曲率 k_g 与法曲率 k_n 对曲面上曲线弯曲的影响.



(平面上的曲线, k_n 为 0, 弯曲全靠自身的 k_g) (曲面上的测地线, k_g 为 0, 弯曲全靠曲面的 k_n)

图 8: 两种特殊情况的对比

白云是蓝天正在放的风筝, 青春是操场奔跑的我们 ...