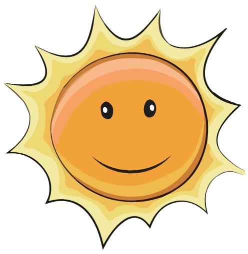
目录



雄关漫道真如铁, 而今迈步从头越!

1 相邻列

定义 (相邻列): 设有数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 互为相邻列.
容易知道相邻列具有相同的敛散性, 且一旦收敛, 它们就具有相同的极限.

例 1 (利用相邻列求极限) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$.

解析 利用相邻列将分母中的 $\dfrac{1}{k}$ 扔掉, 再将和式极限转化为积分即可.

解 记 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}, b_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n}$. 因为

$$|a_n - b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n}\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{k}2^{\frac{k}{n}}}{n\left(n+\frac{1}{k}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

故 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为相邻列, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1=\frac{1}{\ln 2}.$$

命题 (用相邻列刻画一致连续): 函数 f 一致连续当且仅当对定义域中任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

换言之, 一致连续当且仅当相邻列的函数值序列仍然是相邻列.

例 2 (利用相邻列证明函数不一致连续) 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上不一致连续.

证明 取 $x_n=\dfrac{1}{2n}, y_n=\dfrac{1}{n}\ (n=2,3,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, 但

$$f(x_n)-f(y_n)=2n-n=n\nrightarrow 0\quad(n\to\infty),$$

故 f 在开区间 $(0,1)$ 上不一致连续.

例 3 (利用相邻列证明函数不一致连续) 证明 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致连续.

证明 取 $x_n=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}, y_n=\sqrt{n\pi}$. 因为

$$x_n-y_n=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{n\pi}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{n\pi}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 互为相邻列. 但是

$$f(x_n)-f(y_n)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(n\pi)=(-1)^n-0=(-1)^n\nrightarrow 0\quad(n\to\infty),$$

故 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致连续.

2 积分的不等式性质

命题 (积分的保不等式性): 设 f,g 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 且对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

上式结论可以推广到二元 (或者更高元) 的情形. 此外, 对于在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上的积分,

如果被积函数可以分离变量, 则该二重积分可以拆成两个一元积分, 即

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

例 1 设 f 在 $[a,b]$ 连续, 且对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)>0$, $D=[a,b]\times[a,b]$. 证明

$$\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2.$$

证明 易知

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\geqslant \iint\limits_D 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\frac{f(y)}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 2(b-a)^2.\end{aligned}$$

其中的不等号利用了基本不等式. 又由对称性知 $\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 故结论得证.

命题 (施瓦茨不等式) : 设函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证明 易知对任意的 $x\in[a,b]$ 与 $y\in[a,b]$, 有 $\big(f(x)g(y)-f(y)g(x)\big)^2\geqslant 0$, 即

$$0\leqslant f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)g(x)f(y)g(y).$$

上式两端在 $D=[a,b]\times[a,b]$ 上积分得

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint\limits_D f(x)g(x)f(y)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y\right)+\left(\int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)-2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b f(y)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\\ &= 2\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)-2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

因此结论得证.

例 2（利用施瓦茨不等式证明积分不等式） 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 证明: 对任意的正整数 k, 有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1.$$

证明　由施瓦茨不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\left(\sqrt{f(x)}\cos kx\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \left(\int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\right)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\cos kx\right)^2\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b f(x)\cos^2 kx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int_a^b f(x)\cos^2 kx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理可得

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)\sin^2 kx\,\mathrm{d}x.$$

将前面两式相加即得

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant \int_a^b f(x)\cos^2 kx\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\sin^2 kx\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.\end{aligned}$$

例 3（利用同向差证明积分不等式） 设函数 f 与 g 均在区间 $[0,1]$ 上单调递增, 证明

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

解析　由于已知条件是单调性, 因此我们考虑同向差 $\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)$.

证明　由于 f 与 g 均在 $[0,1]$ 上单调递增, 因此对任意的 $x \in [0,1]$ 与 $y \in [0,1]$, 同向差 $\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big) \geqslant 0$, 即

$$f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) \geqslant 0.$$

将上式两端在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上积分得

$$\iint\limits_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D f(y)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0.$$

因此

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\,\mathrm{d}y-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y-\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)g(y)\,\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

即

$$2\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

结论得证.

3 反常积分

一般来说, 由反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛我们是得不到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的, 但如果再加上一些条件, 我们就能够得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

例 1 设反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

解析 利用反证法, 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 导出矛盾.

证明 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$. 不妨设 $A>0$, 那么对 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$, 存在 $M>a$, 当 $x>M$ 时有 $f(x)\geqslant\dfrac{A}{2}$, 从而对任意的 $u>M$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+\int_M^u f(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+(u-M)\frac{A}{2}.\end{aligned}$$

从而

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty,$$

与 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛矛盾. $A<0$ 的情况类似可得出矛盾, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

4 黎曼 Zeta 函数

实数域上的黎曼 Zeta 函数指的是 $\xi(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, 其中 $x>1$.

例 1 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上收敛但不一致收敛.

证明 对任意的 $x>1$, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上收敛. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in(1,+\infty)$, 对任意的正整数 p, 有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^x}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^x}\right|<\varepsilon.$$

令 $x\to 1^+$, 则

$$\left|\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right|\leqslant\varepsilon,$$

这与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散相矛盾. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

例 2 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

证明 任意取定 $x_0\in(1,+\infty)$, 则对任意的 $x\in[x_0,+\infty)$, 有 $\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^{x_0}}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$ 收敛, 故由优级数判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上一致收敛. 由于每一项 $\frac{1}{n^x}$ 均连续, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上连续. 由 $x_0>1$ 的任意性知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

5 试卷

1. 请正面叙述概念: 数列 $\{x_n\}$ 不收敛于实数 A.

解 存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意的正整数 N, 存在 $n_0>N$, 使得 $|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$.

2. 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内不一致连续.

证明 取 $x_n=\frac{1}{2n}, y_n=\frac{1}{n}\ (n=2,3,\cdots)$, 则 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, 但

$$f(x_n)-f(y_n)=2n-n=n\nrightarrow 0\quad(n\to\infty),$$

故 f 在开区间 $(0,1)$ 内不一致连续.

3. 设 S 是非空有上界的数集, 且 M 是它的一个上界. 证明 M 是 S 的上确界当且仅当存在各项皆属于 S 且收敛于 M 的数列.

证明 $(\Longrightarrow)$ 由 M 是 S 的上确界知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $x\in S$ 使得 $M-\varepsilon<x\leqslant M$.

取 $\varepsilon_1=1$, 则存在 $x_1\in S$ 使得 $M-1<x_1\leqslant M$.

取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$, 则存在 $x_2\in S$ 使得 $M-\frac{1}{2}<x_2\leqslant M$.

...

取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$, 则存在 $x_n\in S$ 使得 $M-\frac{1}{n}<x_n\leqslant M$.

由此得到的数列 $\{x_n\}$ 的各项皆属于 S, 且收敛于 M.

($\Longleftarrow$) 设 $\{x_n\}$ 的各项皆属于 S 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$. 由极限的定义知对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon.$$

取 $x' = x_{N+1} \in S$, 则 $M - \varepsilon < x'$. 至此我们证明了: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x' \in S$ 使得 $M - \varepsilon < x'$. 又因为 M 是 S 的上界, 故 M 是 S 的上确界.

4. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(b).$$

证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 由积分中值定理知存在 $\eta \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, 使得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta)\frac{b-a}{2},$$

因此

$$f(\eta) = \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(b).$$

在 $[\eta, b]$ 上对函数 f 使用罗尔中值定理知存在 $\xi \in (\eta, b) \subset (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

5. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且对任意的 $x \in (-\infty,+\infty)$ 有 $|f'(x)| \leqslant r$, 其中 $r \in (0,1)$ 是与 x 无关的常数. 任取 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$, 令 $x_n = f(x_{n-1}), n = 1,2,\cdots$. 证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

证明 由 $x_n = f(x_{n-1})$ 以及拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \\
&= |f'(\xi_n)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \\
&\leqslant r\,|x_n - x_{n-1}|.
\end{aligned}$$

从而

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant r\,|x_n - x_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant r^n\,|x_1 - x_0|.$$

注意到 $0 < r < 1$, 故由比较判别法知级数 $x_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而数列 $\{x_n\}$ 收敛.

6. 设 $a > 0$, 函数 f 在 $[0,a]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \geqslant 0$. 证明

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant af\left(\frac{a}{2}\right).$$

证明　由泰勒公式知存在 $\xi \in (0, a)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \\ &\geqslant f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

上述不等式两边对 x 在 0 到 a 上积分得

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant f\left(\frac{a}{2}\right)\int_0^a \mathrm{d}x + f'\left(\frac{a}{2}\right)\int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= af\left(\frac{a}{2}\right) + 0 \\ &= af\left(\frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

7. 证明对任意正整数 n, 有不等式

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \ln 2.$$

证明　记 $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$, 则

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}.$$

从而

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$

故 $\{S_n\}$ 严格递增. 又因为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

所以

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \ln 2.$$

8. 求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+\dfrac{i}{n}}.$$

解　因为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+\dfrac{i}{n}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{i}{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n\left(n+\dfrac{i}{n}\right)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\dfrac{i}{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n\left(n+\dfrac{i}{n}\right)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\cos(\pi x)}{-\pi}\right|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

9. 当 a 取何值时, 直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切, 切点在哪里?

解 设切点为 (x_0,x_0). 由于 $f(x)=\log_a x$ 的导数为 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$, 故在切点处有
$$f'(x_0)=\frac{1}{x_0\ln a}=1. \tag{1}$$
又因为切点是两曲线的公共点, 故
$$x_0=\log_a x_0=\frac{\ln x_0}{\ln a}, \tag{2}$$
其中第二个等号利用了对数的性质. 由 (1) (2) 两式解得 $x_0=\mathrm{e}, a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 切点为 (e,e).

10. 求二重积分 $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=0, x=1$ 所围成的三角形区域.

解 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$, 从而
$$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(x^2).$$
令 $t=x^2$, 则
$$\text{原积分}=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$