群的初步认识

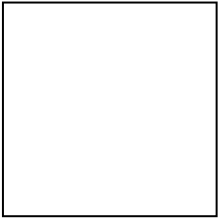
陈璐

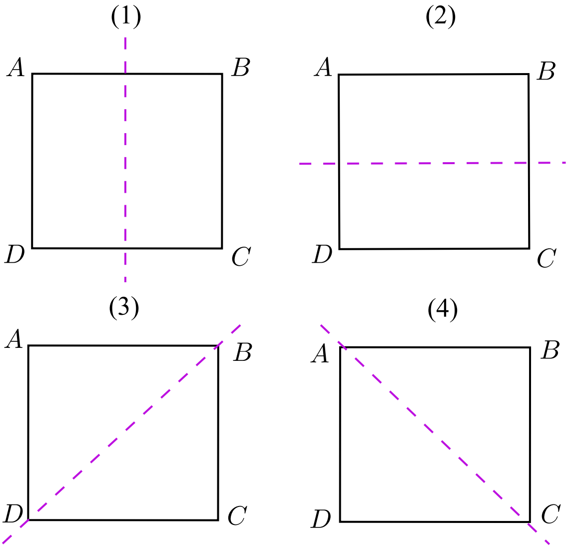
西南大学
数学与统计学院

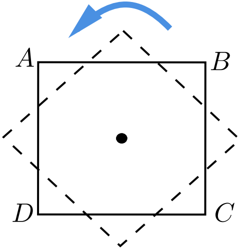
2023 年 3 月 21 日

思考

对于一个给定的正方形, 有多少种不同的基本操作使得变换后的正方形与原正方形重合?







4 种旋转对称变换

(逆时针旋转 $0°, 90°, 180°, 270°$)

4 种轴对称变换

发现

- 任意两种操作合成以后仍是这 8 种操作之一
- 旋转 0° 与任意一种操作的合成仍然是该操作本身
- 任一操作都可被某一操作抵消 (即是说合成以后等于旋转 0°)

发现

- 任意两种操作合成以后仍是这 8 种操作之一
- 旋转 0° 与任意一种操作的合成仍然是该操作本身
- 任一操作都可被某一操作抵消 (即是说合成以后等于旋转 0°)

结论

以上 8 种变换刻画了正方形所具有的全部对称性质!

定义

若非空集合 G 上有代数运算 $\circ$ 满足

(1) 结合律成立, 即对任意的 $a, b, c \in G$, 都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

(2) G 中有元素 e, 对任意的 $a \in G$, 都有

$$e \circ a = a;$$

(3) 对 G 中的任意元素 a, 都存在 $a^{-1} \in G$, 使得

$$a^{-1} \circ a = e,$$

则称 G 关于代数运算 $\circ$ 作成一个群.

定义

若非空集合 G 上有代数运算 $\circ$ 满足

(1) 结合律成立, 即对任意的 $a, b, c \in G$, 都有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

(2) G 中有元素 e, 对任意的 $a \in G$, 都有

$$e \circ a = a;$$

(3) 对 G 中的任意元素 a, 都存在 $a^{-1} \in G$, 使得

$$a^{-1} \circ a = e,$$

则称 G 关于代数运算 $\circ$ 作成一个群.

说明

我们把上述定义中的 e 称为群 G 的左单位元, a^{-1} 称为 a 的左逆元.

例

设 $\mathbb{Z}$ 为整数集, 试问 $\mathbb{Z}$ 关于数的普通加法是否作成群?

例

设 $\mathbb{Z}$ 为整数集, 试问 $\mathbb{Z}$ 关于数的普通加法是否作成群?

思路

(1) 验证普通加法是 $\mathbb{Z}$ 的代数运算;
(2) 验证结合律;
(3) 验证左单位元存在;
(4) 验证任意元素的左逆元存在.

例

设 $\mathbb{Z}$ 为整数集, 试问 $\mathbb{Z}$ 关于数的普通加法是否作成群?

思路

(1) 验证普通加法是 $\mathbb{Z}$ 的代数运算;

(2) 验证结合律;

(3) 验证左单位元存在;

(4) 验证任意元素的左逆元存在.

注意

一定不要忘记验证普通加法是 $\mathbb{Z}$ 的代数运算!

常见的群

- 全体正有理数关于数的普通乘法作成群
- 数域 F 上的全体 n 阶可逆矩阵关于矩阵的普通乘法作成群
- 全体 n 次单位根关于数的普通乘法作成群
- $\cdots$

定理

群 G 的左单位元 e 也是右单位元, 并且是唯一的.

定理

群 G 的左单位元 e 也是右单位元, 并且是唯一的.

定理

群 G 中元素 a 的左逆元 a^{-1} 也是 a 的右逆元, 并且是唯一的.

定理

群 G 的左单位元 e 也是右单位元, 并且是唯一的.

定理

群 G 中元素 a 的左逆元 a^{-1} 也是 a 的右逆元, 并且是唯一的.

说明

以后我们直接称 e 为群 G 的单位元, a^{-1} 为 a 的逆元, 不再区分左右.

总结

对于单位元与逆元:

① 在验证群的定义时, 我们只需验证左边即可.

② 在利用群的性质时, 我们可以不区分左右.

关于群论

群论开辟了全新的数学领域, 是 19 世纪最杰出的数学成就之一. 它被认为是数学中最美的理论之一, 影响着几乎所有数学领域的发展, 以至于 20 世纪最伟大的数学家、物理学家之一外尔赞言: 群论已经扩展到整个数学中, 没有群就不可能理解现代数学. 我相信, 每一个学习数学的同学, 都会震撼于群论那无与伦比的美丽!

关于群论

群论开辟了全新的数学领域, 是 19 世纪最杰出的数学成就之一. 它被认为是数学中最美的理论之一, 影响着几乎所有数学领域的发展, 以至于 20 世纪最伟大的数学家、物理学家之一外尔赞言: 群论已经扩展到整个数学中, 没有群就不可能理解现代数学. 我相信, 每一个学习数学的同学, 都会震撼于群论那无与伦比的美丽!

谢谢大家 ~