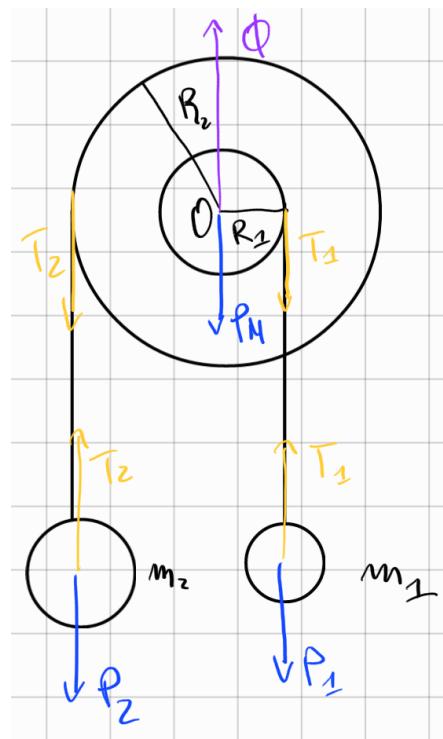


Appunti di Fisica Generale

Sezione di teoria

di Alessandro Galantini



Approvato dai docenti del corso:
Gianlorenzo Bussetti, Paolo Carrozzo, Andrea Marcello Morandi

Prefazione

I docenti

Il corso di Fisica Generale (meccanica e termodinamica) di 12 crediti complessivi e che viene svolto al II semestre del primo anno di Ingegneria rappresenta solitamente un ostacolo per i nuovi iscritti alla facoltà. Assieme ad Analisi, Fisica fornisce alcuni concetti chiave di base nella formazione del futuro ingegnere che devono essere assimilati e saputi applicare nella risoluzione di problemi. Gli studenti che provengono da scuole superiori nelle quali è previsto un corso di fisica elementare in parte possono essere facilitati nel superamento del corso di fisica universitario ma non sempre è così. In questi casi, capita che vengano studiati con una certa leggerezza argomenti apparentemente semplici che in realtà nascondono insidie nel momento in cui i concetti vengono generalizzati, formalizzati correttamente ed applicati.

Il corso di Fisica prevede lezioni di teoria ed esercitazioni da svolgere all'interno di circa 3 mesi e per questo motivo si chiede agli studenti un certo impegno ed assiduità nello studio ed applicazione della materia. Lezioni ed esercitazioni sono oggigiorno molto spesso registrate ma è fondamentale l'uso di un manuale di fisica affinché lo studente possa riflettere per proprio conto sui diversi argomenti coadiuvato dalla ricchezza di materiale che ogni manuale può offrire: spiegazioni, esempi, complementi, tabelle, appendici, quesiti ed esercizi. Per questi motivi, nel corso degli anni abbiamo sempre suggerito agli studenti del nostro corso di sfruttare al meglio il materiale offerto dal manuale di fisica tralasciando (o quanto meno posticipando) la visione di materiale ausiliario che molto spesso porta ad una maggiore confusione quando i concetti base non sono stati opportunamente assimilati. Fra questo materiale, abbiamo sempre annoverato anche gli appunti del corso. Negli anni, i nostri appunti sono stati corretti, revisionati, annotati e certamente possono essere letti facilmente da noi ma non dagli studenti.

Gli studenti hanno però sempre commentato negativamente questa scelta. Per loro, gli appunti servono per capire il taglio che il docente ha scelto su quel particolare argomento. Avere gli esercizi del corso sottomano, permette

di circoscrivere l’ambito di applicazione richiesto nell’immensa offerta di eserciziari disponibili in commercio. Abbiamo così deciso di venire incontro alle richieste degli studenti. L’occasione si è presentata durante l’a.a. 2020-2021, quando ci è capitato di osservare gli appunti raccolti da Giacomo Fortunato ed Alessandro Galantini durante le nostre lezioni. Fortunato e Galantini hanno seguito e superato l’esame di fisica con ottimo profitto, partecipando attivamente alle lezioni con domande, osservazioni e riflessioni personali. I loro appunti sintetizzano questo studio attento della materia. In un primo tempo, avevamo deciso di revisionare puntualmente il materiale ma questa scelta avrebbe stravolto la vividezza della presa diretta degli appunti. Abbiamo così deciso di proporre agli studenti gli appunti di teoria così come scritti di proprio pugno da Galantini, mentre sono stati riscritti gli esercizi raccolti da Fortunato per maggiore chiarezza nei dati e nelle soluzioni proposte. Ci potranno quindi essere alcune imprecisioni o qualche errore, che chiediamo gentilmente al lettore di segnalarci, ma alla fine il materiale così presentato non perde la freschezza della lezione seguita dal vivo.

Vogliamo quindi sperare che il materiale offerto possa essere di aiuto e supporto per gli studenti del nostro corso ed anche a tutti coloro che vorranno usufruirne.

Politecnico di Milano, 27 maggio 2022

I docenti

Gianlorenzo Bussetti, Paolo Carrozzo, Andrea Morandi

Ringraziamenti

Alessandro Galantini

A mio avviso il corso di Fisica I è il più impegnativo del primo anno, ma al tempo stesso quello che mi ha procurato più soddisfazione. Per questo voglio ringraziare i professori Bussetti e Morandi, che nonostante il semestre molto particolare, tra lockdown e lezioni online, sono riusciti a trasmettermi tutta la loro passione e interesse per la materia insegnata. Mi hanno fatto innamorare della fisica, e hanno sviluppato in me la curiosità di approfondire gli argomenti trattati.

Ringrazio poi Giacomo, co-autore di queste dispense, con il quale ho studiato il corso di fisica fin dai primi giorni, per poi preparare con lui tutti i successivi esami, fino ad adesso. Questo percorso è iniziato con lui, e con il completamento di queste dispense, con lui si conclude.

Infine un grande grazie a Sofia, che dal primo giorni di università fino ad adesso è stata il mio supporto morale ed è riuscita a spronarmi affinché dessi sempre il meglio di me.

Alex

Giacomo Fortunato

Il corso di Fisica I per gli ingegneri informatici, elettronici, dell'automazione ed elettrici è un corso fondamentale nella cultura accademica e di una straordinaria potenza rivelatrice: può apparire che il corso tratti pochi argomenti, ma è la SUPERBIA di queste teorie della fisica a renderle così formidabili.
(R. Penrose)

Le teorie di cinematica, meccanica, termodinamica, gravitazione, fluidostatica possono, agli occhi ingenui ed inesperti, apparire leggere e semplici rappresentazioni della realtà: queste invece conservano i primi pilastri necessari

per affrontare qualunque altra scienza. La elegante semplicità dei risultati è abbagliante, e la potenza di questi ancor più sorprendenti.

Siamo due studenti del corso di Laurea di Ingegneria Elettronica, e abbiamo frequentato il corso di Fisica I con i docenti Gianlorenzo Bussetti, Paolo Carrozzo e Andrea Marcello Morandi: non possiamo nascondere la bellezza intrinseca del corso, ma tanto meno la premura e l'abilità con la quale ci è stato insegnato. Per questo motivo i primi ringraziamenti non possono non andare ai nostri docenti, con i quali siamo rimasti connessi, e che ci hanno offerto questa grandiosa opportunità.

Una nota per tutti coloro che leggerano questi ringraziamenti in tempi più lontani: il nostro corso è stato erogato in modalità mista (causa COVID-19), con molte lezioni tenute in videoconferenza (non senza problemi tecnici) e solo alcune in presenza, cionostante i docenti sono stati abilissimi nel catturare la nostra curiosità, attenzione e passione. Per questa difficoltà affrontata e superata, ancor di più, meritano la nostra gratitudine.

Inizio a ringraziare i miei genitori Fulvia e Nicola, che mi hanno permesso di iniziare gli studi presso il Politecnico di Milano, senza alcuna loro influenza sulla mia personalissima scelta: gliene sarò grato per tutta la vita, e mi auguro di fare lo stesso quando arriverà il mio turno.

Quindi devo ringraziare i miei grand-genitori, che mi hanno sempre accompagnato durante l'infanzia e hanno piantato in me i semi della curiosità, dell'immaginazione e della fiducia verso gli altri e verso me stesso.

Infine, sono entusiasta di ringraziare mia sorella Marta e, insieme a lei, tutti gli amici che mi hanno s(u/o)pportato lungo tantissima strada percorsa insieme, in particolare Carlotta e Giulio, ed immancabilmente Alessandro, che (auspicabilmente) avrà già raccontato la prima parte della nostra avventura.

Lucky Jack

Indice

1 Teoria	1
1.1 Cinematica	1
1.1.1 Velocità instantanea	1
1.1.2 Moto rettilineo uniforme	1
1.1.3 Moto uniformemente accelerato	2
1.1.4 Caduta grave	2
1.1.5 Moto armonico	2
1.1.6 Moto esponenzialmente smorzato	3
1.1.7 Cinematica 2D	3
1.1.8 Lancio balistico	6
1.1.9 Gittata	6
1.1.10 Cinematica relativa	7
1.1.11 Complementi di cinematica relativa	9
1.2 Dinamica	11
1.2.1 Primo principio della dinamica	11
1.2.2 Secondo principio della dinamica	12
1.2.3 Terzo principio della dinamica	12
1.2.4 Fune	15
1.2.5 Pendolo	16
1.2.6 Molla	17
1.2.7 Forza elastica	18
1.2.8 Attrito viscoso	18
1.2.9 Dinamica relativa	19
1.2.10 Foucalt	20
1.3 Lavoro ed energia	21
1.3.1 Forze conservative	24
1.3.2 Forze centrali	27
1.4 Gravitazione	28
1.4.1 Primo teorema di Keplero	28
1.4.2 Secondo teorema di Keplero	28

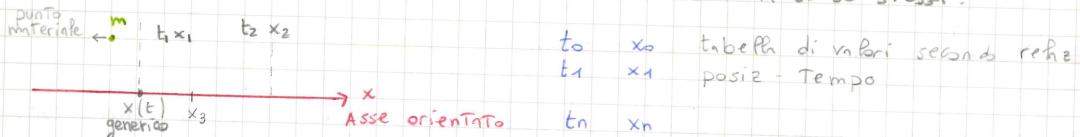
1.4.3	Terzo teorema di Keplero	28
1.4.4	Pendolo di Kavendish	29
1.4.5	Studio orbite non circolari	31
1.4.6	Teorema di Gauss	33
1.4.7	Applicazioni del teorema di Gauss	35
1.5	Sistemi di punti materiali	37
1.5.1	Centro di massa	38
1.5.2	Prima equazione cardinale	38
1.5.3	Seconda equazione cardinale	39
1.5.4	Sistema di punti materiali con polo arbitrario	41
1.5.5	Teorema di König	42
1.5.6	Interazione tra 2 punti materiali	43
1.5.7	Problema della massa variabile	44
1.6	Urti	45
1.6.1	Forze impulsive	45
1.6.2	Regole di Cartesio	47
1.6.3	Pendolo balistico	48
1.6.4	Oscillatore armonico	49
1.7	Corpo rigido	55
1.7.1	Proprietà del corpo rigido	57
1.7.2	Teorema movimento assiale	58
1.7.3	Momento d'inerzia dell'anello	58
1.7.4	Momento d'inerzia dell'anello spesso	58
1.7.5	Momento d'inerzia in generale	59
1.7.6	Teorema di Huygens-Steiner	61
1.7.7	Dinamica del corpo rigido	63
1.7.8	Moto di puro rotolamento	66
1.7.9	Energia meccanica (nel corpo rigido)	69
1.7.10	Urti (con corpi rigidi)	70
1.8	Fluidi	74
1.8.1	Paradosso idrostatico	74
1.8.2	Esperimento di Torricelli	75
1.8.3	Principio di Archimede	76
1.9	Termodinamica	79
1.9.1	Principio zero della termodinamica	79
1.9.2	Primo esperimento di Joule	80
1.9.3	Calorimetria	81
1.9.4	Gas ideali	83
1.9.5	Legge di Avogadro	84
1.9.6	Relazione di Mayer	86
1.9.7	Secondo esperimento di Joule	87

1.9.8	Trasformazioni notevoli	88
1.9.9	Trasformazione adiabatica	88
1.9.10	Trasformazione isoterna	89
1.9.11	Trasformazione isocora	90
1.9.12	Trasformazione isobara	90
1.9.13	Secondo principio della termodinamica	91
1.9.14	Enunciato di Kelvin-Plank	91
1.9.15	Enunciato di Clausius	91
1.9.16	Macchina di Carnot	93
1.9.17	Teorema di Carnot	94
1.9.18	Integrale di Clausius	97
1.9.19	Ripasso esteso	99
1.9.20	Entropia gas ideale	101
1.9.21	Osservazione(i) di Maxwell	102
1.9.22	Equazione di Boltzman	103
1.9.23	Teoria cinetica dei gas	104
1.9.24	Equazione di Joule-Clausius	105
1.9.25	Gas biatomico	106
1.9.26	Generalizzazione teoria cinetica dei gas	107

Lezione del 23/02 ①

CINEMATICA: studio del moto di un oggetto indipendentemente dalla causa

Sistema mobile: punto materiale (dotato di massa x lo studio meccanico) posso usirlo quando il suo moto avviene in uno spazio più grande rispetto alle sue dimensioni terra nell'una orbita vs Terra che ruota su sé stessa.



$$v_{21} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \neq \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} v_{31}$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{VELOCITÀ MEDIA} \quad \frac{m}{s}$$

è una caratteristica del corpo, mi grosshina per la descrizione puntuale

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{è detta VELOCITÀ ISTANTANEA anche definibile}$$

come $v_i = \frac{dx}{dt}$; se ho nota $x(t)$ (legge oraria del moto) posso

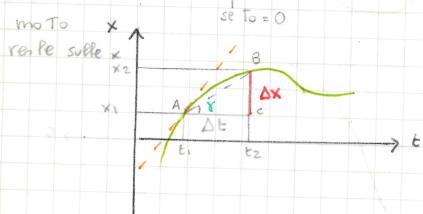
sapere la velocità istante per istante: $\frac{dx}{dt} \times (t)$ calcolo la derivata istante per istante derivando

posso poi passare ad una formulazione "generale": $\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v dt \quad \text{integro x calcolare delle quantità finite misurabili}$$

se v è costante si parla di moto rettilineo uniforme: $x(t) = v(t-t_0) + x_0$

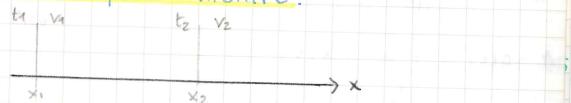
$$x(t) = vt + x_0 \quad \leftarrow x_0 \text{ serve per sapere la posizione esatta del punto.}$$



$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La vel. media rappresenta la pendenza data da r
È UN'APPROXIMAZIONE

In genere $v_m \neq v_i$ perché nel tempo la velocità può cambiare.



se considerassi un t_3 a metà t_m tra t_1 e t_2 la pendenza cambierebbe

v_i = tangente nel punto esatto
che mi interessa (x ex in A)

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \text{ACCELERAZIONE MEDIA}$$

$$\text{Come con la velocità } a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \begin{aligned} a &= \frac{d^2x}{dt^2} & a &= \frac{d(dx)}{dt} \\ &\text{a=costante} & & \frac{d(dx)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\text{Come prima: } \int dv = \int a dt \Rightarrow v(t) - v_0 = \int_{t_0}^t a dt \Rightarrow v(t-t_0) = at \quad \text{se } t_0 = 0$$

nel caso in cui a è costante abbiamo un moto uniformemente accelerato:

$$at + v_0 = \frac{dx}{dt} \quad \text{guardando i membri esterni e molt. per } dt$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$$\begin{aligned} \int dx &= \int at \, dt + \int v_0 \, dt \\ x(t) - x_0 &\quad \text{integro} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v(t) = at + v_0 \end{cases} \end{aligned}$$

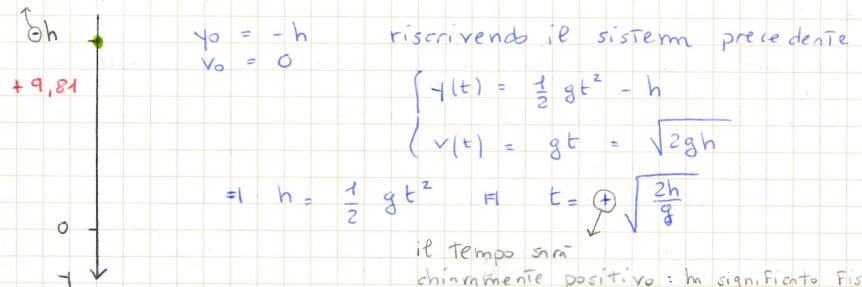
devo conoscere posiz e vel iniziali

NB: quando ci sono le derivate parziali di istantanee.

Per misurazioni supponiamo che $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ ACCELERAZ. DI GRAVITÀ.

Caduta di un grane:

coerenza con il sistema scelto



Moto armonico:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$A = \text{magg. ampiezza}$

derivo x la vel.

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

derivo ancora x l'acc.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

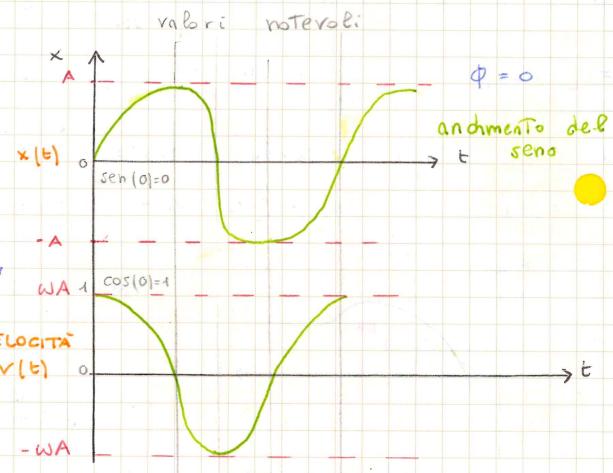
$$\text{dunque } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

questa equaz differenziale di II ordine (di cui $x(t)$ è una sol) è l'equaz che descrive il MOTO ARMONICO SEMPLICE. OSS: $+\omega^2 x$ ha segno posit (ω è alqund);

se trovassi $\frac{d^2z}{dt^2} + kz = 0$ e $k > 0$ ⇒ moto armonico e già sappiamo una sol:

$$z(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

se $k < 0$ non è più moto armonico.



funz. coseno CORRETTAMENTE SFASATA rispetto a quella seno

Moto esponenzialmente smorzato: maggiore è la vol., maggiore è l'effetto dell'accelerazione

$$\frac{dv}{dt} = a = -kv \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -kt dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt \quad \text{se } v=0 \Rightarrow a=0; \text{ se } v > v_0 \text{ aumenta, l'h si oppone} \\ \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$$

$\Rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$ $\frac{dx}{dt}$ def di vel. allora se $v(0) = v_0 \leftarrow t=0$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt \rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt \quad v(t) \rightarrow 0 \leftarrow t \rightarrow +\infty$$

Interessante in quanto rehtiri nph descrizione dinmica di situazioni/machine importanti.

Comprano due costanti, x_0 e v_0 , perché l'accelerazione è la deriva II dello spazio rispetto al tempo.

Noi fino ad ndesso abbiamo descritto tutto su un moto rettilineo con un punto iniziale x_0 con $t=0$



Potrei avere due punti intermedi x_1, x_2 che mi siano muovendo; potrei diminuirmi quanto

viagno v ed a di x_2 MA RISPETTO AD x_1 (moto rettivo ad x_1 e non all'origine 0) x rimane ben definita.

$$x = x_2 - x_1 = x(t) \quad (\text{di } x_2) \quad \text{diventando peggi ommis rispetto a } x_1 \quad (\text{di } x_2);$$

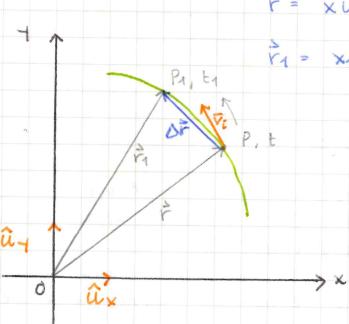
$$\text{dunque } v_{21} = \frac{dx}{dt}; \text{ velocità di } x_2 \text{ rispetto a } x_1 \quad a_{21} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Lezione del 26/02 (2)

Cinematica 2D: dobbiamo confrontarci con i vettori ora.



→ 3 punti non allineati = PIANO (2D)



$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y \quad \begin{cases} \text{dipende da} \\ \text{TEMPO} \end{cases}$$

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{u}_x + y_1\hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{u}_x + (y_2 - y_1)\hat{u}_y \quad \text{spostamento}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \bar{v}_x \hat{u}_x + \bar{v}_y \hat{u}_y \quad \text{di ora } \ddot{a} = \bar{a} \text{ vett.}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \bar{r} = \bar{r}(t) = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$$

sist. di rif. fisso: punto sempre nella stessa direzione (fisso nel tempo)

$$\text{affiori } \ddot{\mathbf{v}}_x = \frac{d}{dt} (\dot{x}\hat{\mathbf{u}}_x + \dot{y}\hat{\mathbf{u}}_y) = \frac{d\dot{x}}{dt}\hat{\mathbf{u}}_x + \dot{x}\frac{d\hat{\mathbf{u}}_x}{dt} + \frac{d\dot{y}}{dt}\hat{\mathbf{u}}_y + \dot{y}\frac{d\hat{\mathbf{u}}_y}{dt}$$

deriv di un
versore in
versore è
costante

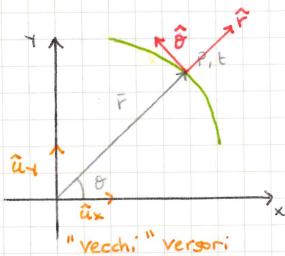
$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{v}}_x = \ddot{x}\hat{\mathbf{u}}_x + 0 + \ddot{y}\hat{\mathbf{u}}_y + 0$$

versore è Fisso nel Tempo! = 0

Il vettore $\ddot{\mathbf{v}}_x$ nel grfico lo posso leggere come composizione delle sue proiezioni sull'asse delle x e delle y .

NB: $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{u}}_x$ mi chiede come cambia il versore $\hat{\mathbf{u}}_x$ nel tempo, ma esso è fisso, è dunque una costante e il risultato sarà zero (derivando).

Ci possono però essere dei moti che non è conveniente scrivere in questo modo.



cambio versori, che però CAMBIANO NEL TEMPO
non posso semplificare come prima (ortog.)

Lo faccio perché, siccome i nuovi versori sono sempre ortog., la proiet del motu mi dice se il punto mt. si allontana o avvicina a me
 \Rightarrow contributo radiale

$d\hat{\mathbf{r}}$ è arco di cfr; la diff tra le corda e l'arco sotto è un infin di ordine sup \Rightarrow sostitu. l'arco alla corda è uso la formula

$$L = B \cdot r$$

$$\hat{\mathbf{r}} = r \cdot \hat{\mathbf{r}} \rightarrow \text{direz} = x\hat{\mathbf{u}}_x + y\hat{\mathbf{u}}_y \quad \text{nn } \hat{\mathbf{r}} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{u}}_x + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{u}}_y$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

vel radiale vel trasversal vel radiale

$$\ddot{\mathbf{r}} = V_r \hat{\mathbf{r}} + r\omega \hat{\theta}$$

* $\hat{\mathbf{r}} \neq \hat{\mathbf{r}}$ ∇ nn è un versore

siccome θ è piccolo, il mio

$$d\hat{\mathbf{r}} \approx \hat{\mathbf{r}} \cdot d\theta$$

nn questo è la parte scritta, mi serve quell'ettore perché $d\hat{\mathbf{r}}$ è vettore $\hat{\theta}$ si confonde con l'arco

$$* d\hat{\mathbf{r}} = |\hat{\mathbf{r}}| \cdot d\theta \rightarrow \text{modulo quadrato}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{r}})^2 = 1 \quad \text{differenzio} \quad d(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 0$$

$$2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{sse } \hat{\mathbf{r}} \perp \hat{\mathbf{r}} \quad \text{H} \quad d\hat{\mathbf{r}} = \hat{\theta}$$

$$* \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \quad \text{esclusivamente a l'ev dimostrativo, x far vedere che sono ortogonali:}$$

$$(|\hat{\mathbf{r}}|=1) \quad w: \quad \rightarrow d\theta = \sqrt{1 - d\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta}} \text{ e divido per la scissore } dt$$

* questo ci fa capire che il versore di $d\hat{\mathbf{r}}$ (CHE NON È VERSORE!) dovrà essere $L \cdot \hat{\theta}$ per costr sul grfico è $\hat{\theta}$

TRAETTORIA: è il luogo dei punti occupati dal corpo in movimento

allo scorrere del tempo. (luogo geometrico in cui il vettore rel è tangente punto per punto allo spostamento).

*: $\hat{\mathbf{r}}$ è il mio versore iniziale a t, al scorrere il tempo $\hat{\mathbf{r}}$ cambia e al

tempo t₁ è $\hat{\mathbf{r}}$, che crea una variaz. $d\theta$; $d\hat{\mathbf{r}}$ è la distanza che si crea.

tutto infinitesimo

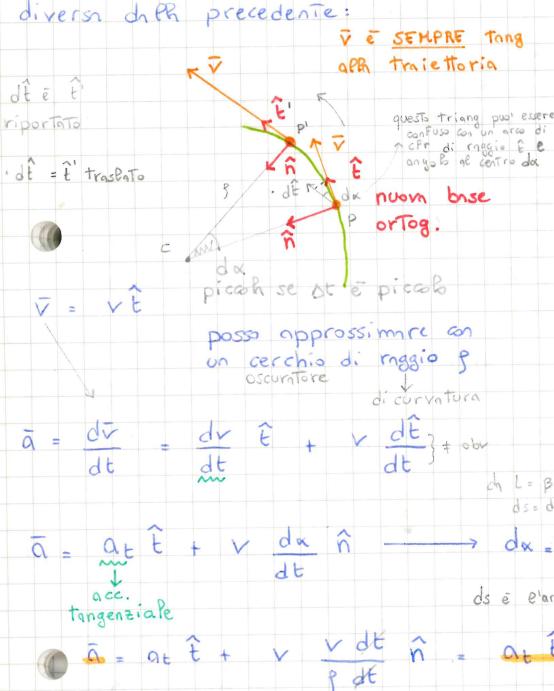
Usiamo lo stesso approccio con l'accelerazione.

$$\bar{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y) =$$

$$= \frac{d\hat{v}_x}{dt} \hat{u}_x + v_x \frac{d\hat{u}_x}{dt} + \frac{d\hat{v}_y}{dt} \hat{u}_y + v_y \frac{d\hat{u}_y}{dt} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y$$

Usando ovviamente i versori fissi.

Affrontiamo ora l'analisi con vettori mobili. Ci avviciniamo però di un passo diverso da Ph precedente:



$\parallel \hat{v}$ è un vettore; essendo sempre tangente può cambiare modulo e direz. Voglio dunque un'espressione che metta in evidenza la variazione del Ph parte scolare e quella del Ph direzione (in somma direz).

$= \hat{t}$ parte scolare

\hat{n} cambio di direzione

versore naturale per \hat{n}

$$d\hat{t} = |\hat{t}| \cdot dx = 1 \cdot dx \cdot \hat{n}$$

da $L = B \cdot r$
 $ds = dx \cdot \hat{s}$

dist infinitesima tra le tangenti, variazione tra i due \hat{t}

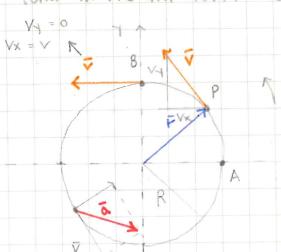
ds è l'arco da P a P'

$$ds = \frac{v dt}{\hat{t}} \quad ds = \text{spazio percorso in } dt$$

a velocità v

acc. centripeta: punto verso l'interno del cerchio osculatore

Ex: Luna attorno alla Terra / bambina su giostra



cerchio osculatore = traiettoria

$$|\bar{v}| = \text{costante} \quad \bar{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y = \frac{v^2}{R} \hat{n}$$

per vedere che a_x e a_y cambino la direz. ma non il modulo, m x e y continuano a variare.

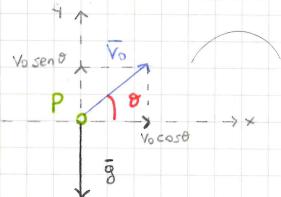
$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R} \text{ verso l'interno}$$

con i vettori fissi è difficile capire cosa succede, con quelli mobili è più semplice.

Vogliamo lavorare con condizioni che riguardano noi e semplificano il sistema.

$R = r$ poiché il cerchio osculatore coincide con la traiettoria.

Lancio balistico:



$$F = -m \bar{g} = m \bar{g} \hat{y}$$

Il moto "vero" avviene sul PIANO

Ho due moti: $x(t)$ e $y(t)$:

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x$$

TRAETTORIA
ovvero un parabola che passa per l'origine verso il basso.

$$GITTATA: x = \left(-\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x \right) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta} x = \frac{\tan \theta}{x}$$

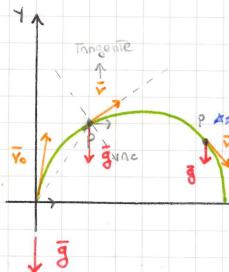
$$x_g = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad (\text{maggiore è la velocità } V_0, \text{ maggiore è } x_g)$$

$\sin \max: \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \sin \theta = 1$ ed è la GITTATA MAX con $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

il sen è per angoli complessi.

Con $\theta = \frac{\pi}{3} \approx \frac{\pi}{6}$ abbiamo la medesima gittata, in genere è meglio $\frac{\pi}{6}$ per ridurre i problemi dell'altroto dell'aria perché sta meno in volo.

Fino ad ora abbiamo lavorato con versori fissi.



$$|\vec{v}| + |\vec{v}_t|; \text{ in } \vec{v} \text{ si oppone } \bar{g};$$

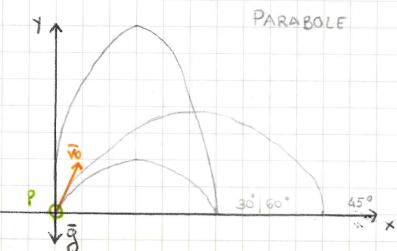
sulla base delle x abbiamo un moto rett. unit: la proiez si deve mantenere per "tutte le velocità" si cambia il modus e la direz; \bar{g} resta sempre lo stesso *

* se fatto che ci sia da far cambiare la direzione; $a_c = \frac{V^2}{r} \Rightarrow r = \frac{V^2}{a_c}$,

il raggio di curvatura r cambia continuamente

dal inizio il raggio di curvatura è minimo, va poi aumentando

$$r = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

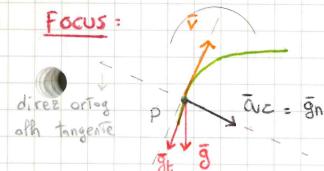


* \bar{g} in la componente super \vec{v} opposta a \vec{v} : decel. per

** La \bar{g} si somma a \vec{v} si aumenta la velocità complessiva

GITTATA: è il punto di impatto del quale rispetto al quale è partito i proiettili.

Focus:



\bar{a}_c = acceleraz. centripeta normale proiezione di \bar{g} sull'orizzontale, in sintonia che esiste \Rightarrow la curva è il punto materiale *

Il maggiore di curvatura è più piccolo nel vertice

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \quad \text{dove } v_0 \text{ è minima} \Rightarrow \rho \text{ è il più piccolo possibile}$$



[ρ è maggiore di tutto alle basi delle parabole = v_{max} e a_c minima]; è vel d'impatto
la PvL di modul. del vettore) è esattamente = a quello di partenza (in queste condizioni)
= a PvL vettoriale

$$\text{TEMPO DI VOLO: } \begin{cases} x_0 \\ x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \end{cases} = t = \frac{2 v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{il tempo di volo all'ingresso} \\ \frac{\pi}{3} \text{ è } > \text{ di } \frac{\pi}{6} !$$

Lezione del 2/03

(3)

CINEMATICA RELATIVA:

$$\begin{aligned} S_0 (\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, t_0) \\ S (x, y, z, t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = t_0 \text{ nell'mecc} \\ \text{classica} \end{array} \right.$$

In Termine S_0 è Fisso, S è mobile.

$$\bar{r}_0 = \bar{r} + \bar{r} \quad \text{è la condiz. fondamentale!}$$

$$S_0 \text{ che } \bar{r}_0 = x_0 \hat{x}_0 + y_0 \hat{y}_0 + z_0 \hat{z}_0$$

$$\bar{r} = \alpha \hat{x}_0 + \beta \hat{y}_0 + \gamma \hat{z}_0 \text{ proiez su } S_0$$

$$\bar{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

* derivo ogni termine

$$\bar{v}_0 = \frac{d \bar{r}_0}{dt} = \frac{dx_0}{dt} \hat{x}_0 + \frac{dy_0}{dt} \hat{y}_0 + \frac{dz_0}{dt} \hat{z}_0 \quad \text{salvo passaggi x lez prec visto da } S_0$$

considero ora come si comportano gli altri 2 vettori:

$$\frac{d \bar{r}}{dt} = \frac{da}{dt} \hat{x}_0 + \frac{db}{dt} \hat{y}_0 + \frac{dc}{dt} \hat{z}_0 \quad \text{stesso ragionamento}$$

$$\frac{d \bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} + x \frac{d \hat{x}}{dt} + y \frac{d \hat{y}}{dt} + z \frac{d \hat{z}}{dt} \quad \text{qui ho i versori mobili}$$

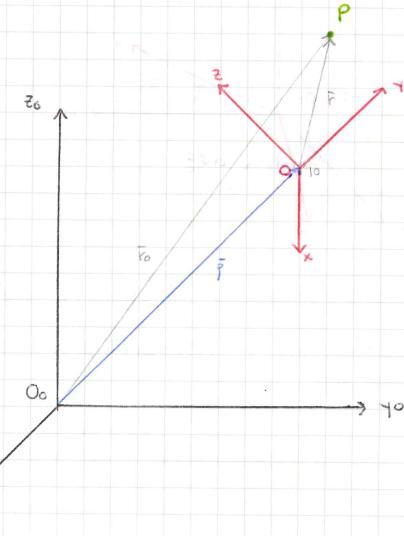
4! $\bar{v}_{\text{relativo}}$

$$\bar{v} = \frac{d \bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} \quad \text{voglio la } \bar{v} \text{ di } P$$

se io osservo da 0 (Fisso) per me che osservo da 0 di xyz

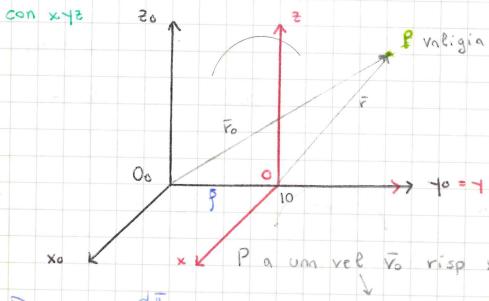
vel mis. del punto 0 nel sist S

$$\text{dunque } \bar{v}_0 = \bar{v}_{\text{free}} + \left(\frac{d \hat{x}}{dt} + x \frac{d \hat{x}}{dt} + y \frac{d \hat{y}}{dt} + z \frac{d \hat{z}}{dt} \right) \text{ e dobbiamo dirle significato!}$$



SUPPONIAMO: stessa situ di prima: Oo sintz, Organe, P valigia
P solidale

P solidae



Pé in moto risp xz ma Pissò risp xz

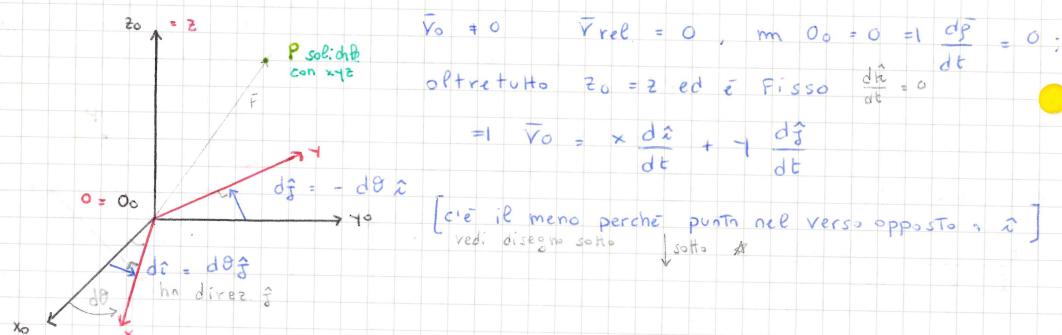
$$V_0 \neq 0 \quad V_{\text{ref}} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{V}_0 = \frac{d\bar{f}}{dt} \quad \text{perché i versori}$$

mobili in realtà non cambiano, (i \hat{x} e \hat{z}) nel tempo non cambiano direzione
Sono nella stessa direzione e così gli altri)

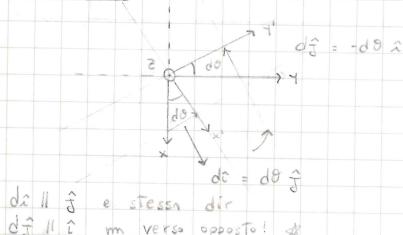
$$\text{TRASLAZIONALE} \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{d\hat{z}}{dt} = 0$$

Ora consideriamo: io fuori che guarda un bambino su uno sgabello



[dunque possiamo concludere che $\bar{V}_0 = \bar{V}_{\text{free}} + \bar{V}_{\text{transc}} + \bar{V}_{\text{rota}}$.]

Vogliamo dare un'interpretazione a $x \frac{ds}{dt} + y \frac{d\hat{s}}{dt} = x w_s^x - y w_s^y = \mu$



\vec{F} è la dist.
delle asse di rotaz.

$$\star = \bar{\omega} \times \vec{r}$$

$$\bar{\omega} =: \omega \hat{k} \rightarrow \text{versore asse di rotazione}$$

$$\det \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\gamma w \hat{x} + x \omega \hat{y}$$

$$\text{Dunque } \bar{V}_0 = \bar{V}_{\text{real}} + \bar{V}_T \quad \text{dove} \quad \bar{V}_T = \frac{d\bar{P}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Possiamo dunque ragionare sull'accezione:

$$\vec{v}_0 = \left(\frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \right) + \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \hat{i} + x \frac{dx}{dt} \hat{i} + y \frac{dx}{dt} \hat{j} + z \frac{dx}{dt} \hat{k} \right)$$

$$\bar{q}_0 = : \frac{d\bar{V}_0}{dE} :$$

chi ragionamenti precedenti: $\ddot{\alpha}_r = \frac{d^2\hat{x}}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2\hat{y}}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2\hat{z}}{dt^2} \hat{k}$ + * manca questo con i versori der.

$$\ddot{\alpha}_T = \frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + \star \text{ manca lo der. dei versori}$$

$$+ x \frac{d^2\hat{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\hat{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\hat{k}}{dt^2}$$

componiamo le vel rel v_x, v_y

$$* \left(\frac{dx}{dt} \frac{dc}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\hat{k}}{dt} \right) \star \text{ manca ad entrambe} \Rightarrow R \text{ considero due volte} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ v_x \quad \omega_i \quad v_y \quad -\omega_j \quad \text{tutto questo è l'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS}$$

$$\text{Dunque } \ddot{\alpha}_a = \ddot{\alpha}_r + \ddot{\alpha}_T + 2 \bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{rel}}$$

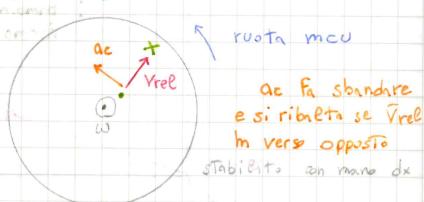
$\ddot{\alpha}_c \text{ CORIOLIS}$

ma quando non c'è ω ?

- sistema traslazionale: $\omega = 0$

- quando sono fermo nel sist: $v_{\text{rel}} = 0$

- se $\bar{\omega} \parallel \bar{v}_{\text{rel}}$ se mi muovo lungo l'asse di rotazione

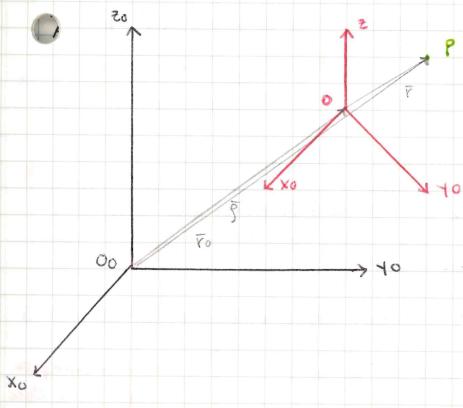


a_c fa sbandare
e si ribalta se v_{rel}
in verso opposto

stabilità con mano dx

Lezione del 4/03 (4)

COMPLEMENTI DI CINEMATICA RELATIVA:



$$I \bar{F}_0 = \bar{F} + \bar{g}$$

se cambio quale sistema è fisso

$$\bar{F} = \bar{F}_0 - \bar{g} \quad e \quad -\bar{g} = \bar{g}'$$

$$II \bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{g}'$$

SPECULARE { I in i versori fissi $\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0$

II in i versori fissi $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

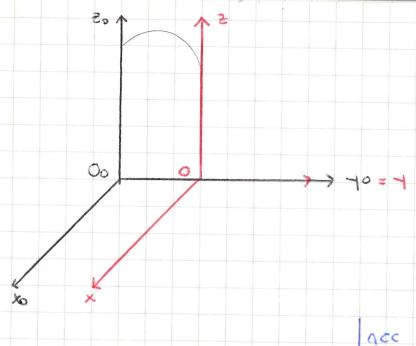
↓

posso tranquillamente intercambiare,

il risultato sarà sempre lo

stesso a p.v. di moto relativo

Questo è la prima osservazione. Passiamo agli secondi.



$$\bar{v}_T = \frac{d\hat{s}}{dt}$$

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_{\text{free}} + \bar{v}_T$$

caso particolare

si considera costante, dunque \dot{s}

si muove di moto rettilineo uniforme
rispetto a S_0 .

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_{\text{free}} + \bar{a}_T + \bar{a}_c$$

acc in S_0 = acc
misurati da un osservatore in S !

Non si riesce dunque a capire la posizione dei due osservatori che siano in moto!

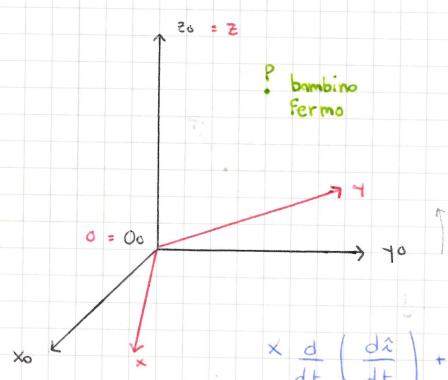
$$2\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{free}}$$

in questo caso $\bar{\omega} = 0$

$$\frac{d^2\hat{s}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_T}{dt} = 0 \quad \text{avr non c'è rotazione}$$

per il moto retto unif.
 \Rightarrow no accelerazione

Giostra



$$\bar{v}_0 = \bar{v}_{\text{free}} + \bar{v}_T, \quad \bar{v}_{\text{free}} = 0$$

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{v}_0 = \bar{\omega} \times \hat{r}, \quad \text{dove } \bar{\omega} = \omega \hat{z}$$

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_{\text{rel}} + \bar{a}_T + \bar{a}_c$$

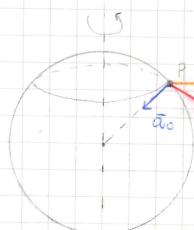
$$\frac{d^2\hat{s}}{dt^2} = 0 \Rightarrow 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{rel}} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{a}_0 = \times \frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d^2\hat{y}}{dt^2} = \bar{a}_c \text{ centripeta}$$

$$\times \frac{d}{dt} \left(\frac{d\hat{x}}{dt} \right) + \gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{d\hat{y}}{dt} \right) = \times \frac{d}{dt} (\omega \hat{z}) + \gamma \frac{d}{dt} (-\omega \hat{z})$$

$$= x\omega \frac{d\hat{x}}{dt} - \gamma \omega \frac{d\hat{y}}{dt} = x\omega(-\omega \hat{z}) - \gamma \omega(+\omega \hat{z}) = -\omega^2(x\hat{i} + \gamma \hat{j})$$

$$= -\omega^2 \hat{r} = -\omega^2 r \cdot \hat{r} \quad \text{! acc centripeta}$$



$$\bar{a}_0 = \bar{a}_r + \bar{a}_T + \bar{a}_c$$

P è in quiete risp al 1^o Term.
 $\Rightarrow \bar{v}_{\text{rel}} = 0$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_c - \bar{a}_T \quad \bar{a}_c : \text{interazione tra P e centro della Terra}$$

\bar{g} è l'acc per noi che siamo solidi con la Terra

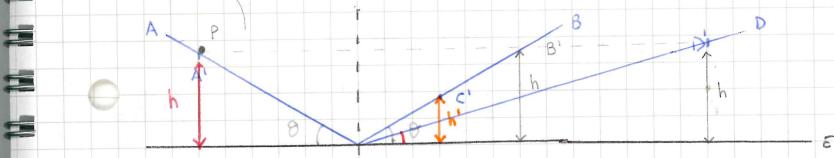
a_T = termine centripeto negativo; è l'acc di trascinamento

Nel disegno \bar{g} è ovviamente scorretta, perché abbina esigenza con \bar{a}_T ,

per far vedere come \bar{g} subisse una leggera depressione o causa di \bar{a}_T .

Questo era l'ultimo osservazione riguardante la cinematica.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE:



non importa
 $OD' > OB'$! la lunghezza

Il punto materialmente teso di raggiungere sempre la stessa quota, indipendentemente dalla lunghezza scelta. Così accade sul piano OE? Il punto materialmente cercano di raggiungere la quota h , ma è impossibile = moto perpetuo.

Dimostra che il moto perpetuo è possibile, non ci devono essere forze che lo causano.

I PRINCIPIO: (DI INERZIA) se si somma di tutte le forze esterne è nulla, un corpo permane nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Un sistema in cui tale principio è valido è detto SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

COSTRUZIONE DI NHCH:

Sistema isolato, sono presenti solo due punti materiali:



$$\text{se } m_A = 1 \text{ Kg} \Rightarrow k_{BA} = m_B$$

fattore K che rappres. la parte scalare

$$1 \quad \bar{a}_{AB} \text{ (acc. del corpo A dovuto a B)} = -k_{BA} \bar{a}_{BA} \text{ (acc. di B dovuto ad A)}$$

Prendiamo un corpo C nel posto di B

ora faccio interagire B e C

$$2 \quad \bar{a}_{AC} = -k_{CA} \bar{a}_{CA} \rightarrow k_{CA} = m_C \Rightarrow \bar{a}_{BC} = -k_{CB} \bar{a}_{CB} \quad k_{CB} = \frac{m_C}{m_B}$$

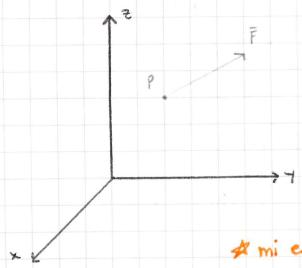
$$\bar{F}_{BC} = -\bar{F}_{CB}$$

* $m_B \bar{a}_{BC} = -m_C \bar{a}_{CB}$ l'accelerazione dipende da chi presenta dell'altro corpo
ci siamo svincolati da A la massa è una caratteristica intrinseca dell'oggetto

$$\bar{F} = m\bar{a} \quad [N] = [m][kg][s]^{-2}$$

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ Kg}$$

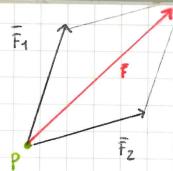
è una relazione vettoriale



$$\bar{F} = m\bar{a}$$

$$\begin{cases} F_x = m a_x \\ F_y = m a_y \\ F_z = m a_z \end{cases}$$

* mi esprimono l'interazione che sta avvenendo



$$\bar{F}_{12} \stackrel{O}{=} \bar{F} = m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}$$

$\Rightarrow \bar{v} = \text{cost}$

o quiete o mru
m è un caratteristica intrinseca
= non cambia

\bar{F}_3 NECESSARIA (questo si dimostra sperimentalmente)

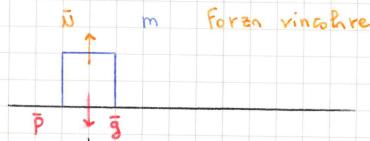
II PRINCIPIO: in un sistema di riferimento inerziale, l'accelerazione di un corpo è sempre dovuta all'azione di forze; tra forze risultante e accelerazione sussiste in ogni istante la relazione $\bar{F}(t) = m\bar{a}(t)$

III PRINCIPIO: (azione e reazione). Le forze si manifestano sempre tra coppie di oggetti. Se un oggetto A esercita una forza su B, anche B esercita una forza su A, di ugual intensità ma verso opposto

Posizione del 5/03

(5)

DINAMICA:



$$\bar{F} = m\bar{g} \quad (\text{forza peso})$$

O' tavolo d'appoggio

$-\bar{N}$ dovrebbe essere il punto di contatto

Oggetto di massa m su un piano di appoggio. Voglio studiarlo alla luce dei principi della dinamica.

$$m\bar{a} = \bar{F} = \bar{P} + \bar{N} = 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$$

$$\bar{v} = \text{cost.} = 0$$

In reazione a \bar{P} deve essere applicata all'netto oggetto = la Terra (NON È \bar{N})

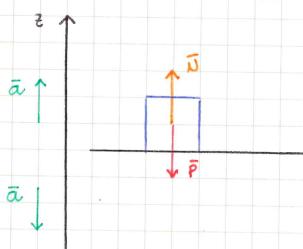
$+\bar{N}$ è la reazione del Tavolo sul corpo, $-\bar{N}$ del corpo sul tavolo

$+\bar{P}$ è l'intenz del corpo con la Terra, $+\bar{P}$ la reazione.

centro della Terra

In queste condizioni il sistema permette nell'istante di quiete. Ci sono 4 forze (puri) perché x il III principio sono 2 coppie, ma solo 2 intenzioni.

Amplizziamo ora l'oggetto in un ascensore:



$$m\bar{g} + \bar{N} = \bar{P} + \bar{N} = \bar{F} = m\bar{a}$$

$$\bar{N} = m(\bar{a} - \bar{g}) \quad \text{tenendo conto del sistema scelto}$$

$$\text{calcare } N = m(a + g) \quad \text{a in modulo}$$

se $a > 0$, l'ascensore accelera verso l'alto = positivo

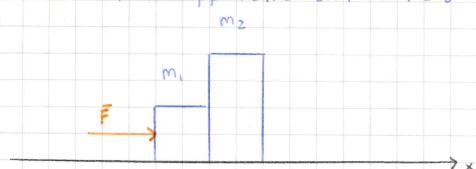
dunque $N > mg = P$ e DEVE essere così

se $a < 0$ l'ascensore sta accelerando verso il basso $\Rightarrow N < mg = P$, corretto.

In questo caso potrebbe essere $N=0$, quando $a = -g$ (caduta libera).

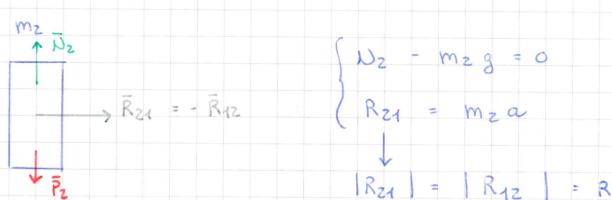
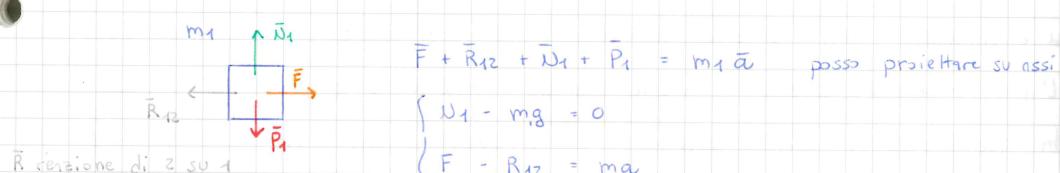
Un bilancio misura le forze e non le ricette in massa; se sono ferme esse misurano (reagiscono su di noi); la situazione non cambia se l'ascensore è veloce costante; se invece $a > 0$, $N > P$ è l'indicatore della bilancia aumentata; se $a < 0$, $N < P$ è l'indicatore di diminuzione.

Proviamo ora ad applicare una forza:



Studio i diagrammi "in corpo libero"

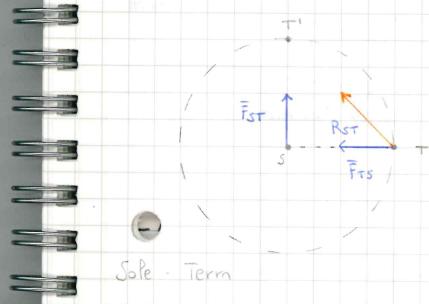
dei corpi presi singolarmente:



SOST.
 $F - m_2 a = m_2 a \Rightarrow F = (m_1 + m_2) a$; SOST. $R = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$ nota
dunque che l'effetto è minore.

F non viene trasferita.

Questa azione-reazione è Istantanea.



$$\bar{F}_{ST} = -\bar{F}_{TS}; \text{ in questo caso } \bar{F}_{ST} + \bar{F}_{TS} \neq 0,$$

la somma dei vettori direbbe origine a un vettore risultante

Abbiamo considerato il caso in cui passi un notevole passo di tempo tra azione e reazione.

Perché la somma di tali forze sia 0, deve avvenire istantaneamente.

II PRINCIPIO: $\bar{F} = m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$ posso farlo perché la massa di un corpo è COSTANTE

$$\bar{p} = m\bar{v} \quad \bar{p} \text{ è il vettore QUANTITÀ DI MOTO}$$

posso riscrivere come: $\int \bar{F} dt = d(m\bar{v}) = \int d\bar{p}$

$$\Rightarrow \int_0^t \bar{F} dt = \Delta \bar{p} = \bar{p}_{f(t)} - \bar{p}_{i(t)} = \bar{I} \quad \text{impu} \underline{\text{s}} \quad d\bar{I} = d\bar{p}$$

Atrito:



$$(\bar{p} + \bar{N}) + \bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} \rightarrow \text{non succede sempre}$$

$$\bar{F} + \bar{F}_A = 0$$

posso misurare le forze di attrito mx:

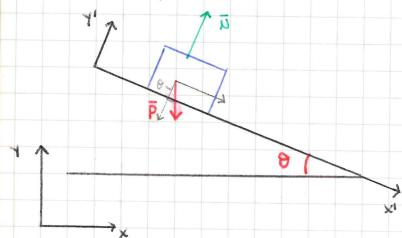
$$|\bar{F}_A| \leq F_A = \mu_s N.$$

μ è chiamato coefficiente di attrito, ed è \neq da misurare a misurare.

L'attrito è poi presente anche quando l'oggetto è già in moto.

In questo caso $F_A = \mu D N$, dove spesso $\mu D < \mu_s$, è formalmente uguale ma diverso fondamentalmente.

Abbiamo visto che $|\bar{F}_A| = \mu N$:



$$y': N - mg \cos \theta = 0 \quad \text{quieta su } y'$$

$$x': mg \sin \theta = ma \Rightarrow a = g \sin \theta$$

considero ora un piano scabro

$$x': mg \sin \theta - F_A = ma$$

$$F_A = m(g \sin \theta - a)$$

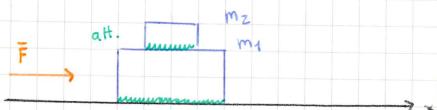
$$\Rightarrow \bar{F}_A = mg \sin \theta \Rightarrow \text{segue l'inc del piano} \quad s \mu N = \mu mg \cos \theta$$

m non conta

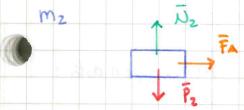
$\Rightarrow \mu \approx \tan \theta$ metodo elegante per misurare il coeff d'attrito!

se $F_A = mg \sin \theta_m = \mu N = \mu mg \cos \theta_m \Rightarrow \mu = \tan \theta_m$ posso trovare il μ_s in questo modo per ogni materiale.

Se $\theta = 90^\circ$, $F_A = 0$ perché l'inc del corpo è $= \bar{g}$.

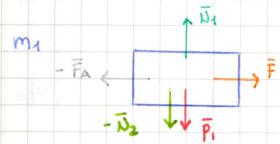


Se fosse un blocco unico, $\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m_1 + m_2}$



m_2 si muove per le forze di attrito, \bar{F} non è applicata direttamente ad esso.

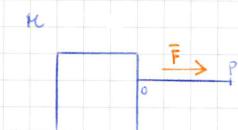
$$\begin{cases} N_2 - mg = 0 \\ F_A = m_2 a \end{cases}$$



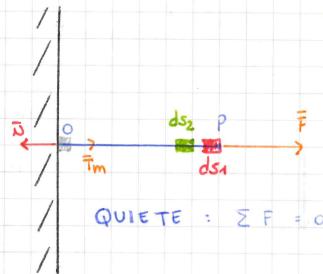
$$\begin{cases} N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \\ F - F_A = m_1 a \Rightarrow F - m_2 a = m_1 a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)a \end{cases}$$

Lezione del 8/03

ESEMPI NOTEVOLI:



⑥



QUIETE: $\sum F = 0$

FUNE:

- inestensibile
- non ha massa
- in punto di rottura

elemento infinitesimo della fune

posso generalizzare perché è ripetitivo

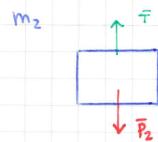
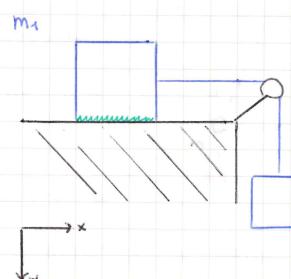
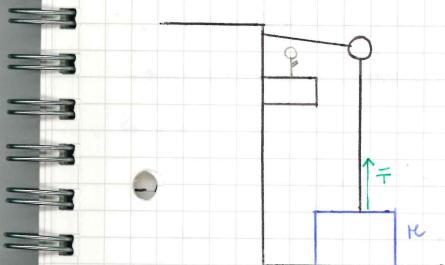
\bar{T}_n	$-\bar{T}_{n+1}$	EQUILIBRIO DINAMICO	dove le reazioni di T ? III principio
ds_n			$\bar{ds}_2 = \bar{ds}_1$ anche lui è in quiete

Consideriamo allora il pezzettino attaccato al muro; possiamo concludere che, per mantenere l'equilibrio dinamico

$$|\bar{F}| = |\bar{T}_1| ; |\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| ; \dots ; |\bar{T}_n| = |\bar{T}_{n+1}| ;$$

$$|\bar{T}_m| = |\bar{N}|$$

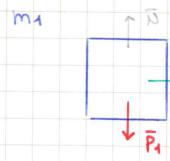
Introduciamo ora LA CARRUOLA:



$$x: 0 = m_2 a_x$$

$$y: m_2 g - T = m_2 a_y$$

NB: se la fune avesse massa m avrei $\bar{F} = (m + M)\bar{a}$, ovvero influenzerebbe il sistema!



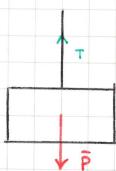
$$y: m_1 g - N = 0$$

$$x: T = m_1 a_x$$

Tutto il sistema però si muove insieme

$$\Rightarrow a_x = a_y = a$$

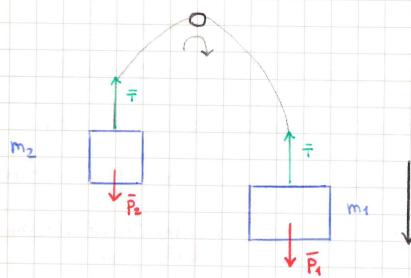
Abbiamo appena ampliato un modello senza attrito.



$$\text{se in quiete: } T + P = 0$$

$$-T + mg = 0 \Rightarrow T = mg \Rightarrow m = \frac{T}{g}$$

Ma se consideriamo un sistema dinamico: **MACHINA DI ATWOOD**



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a_2 = -m_2 a \end{cases}$$

$$T = m_1 (g - a)$$

$$T = m_2 (g + a)$$

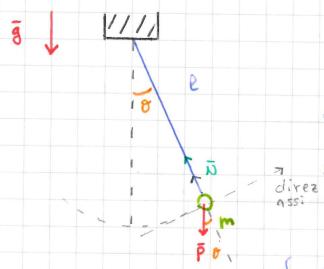
$$\Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Se $m_1 = m_2$ e il sist è in quiete e si muove di moto rett unif.

$$\text{Possiamo trovare la tensione semplicemente sostituendo: } T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = m_1 g$$

Siamo in un' situazione simile a quella dell' ascensore (ed è ≠ del sistema statico considerato prima). Mette in evidenza le differenze tra peso e massa.

Ampliando quindi un altro uso della fune: **IL PENDOLO**



Siamo su un moto circolare: avremo una accelerazione centripeta e una tangenziale;

sceglieremo dunque un opportuno sist. di coord.

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = mac = m \frac{v^2}{l} \\ -mg \sin \theta = mat \end{cases}$$

non dipende dalla massa

Dalla lez. 2 supponiamo che (su x) $v = wr$
e che w è abbinato tramite come $\frac{dy}{dt} = w$

$$\leftarrow a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(wr) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\theta \cdot r\right)$$

$$= \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \\ -g \sin \theta = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

dunque $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin \theta = 0$; da Tylor $\sin \theta \approx \theta$ e $\theta \approx \phi$

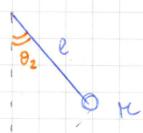
$$= \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad \underset{\theta \approx 14^\circ \text{ per l'appross.}}{\longrightarrow} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{che è l'eq del moto armonico semplice!}$$

$\theta > 0$ e lo chiamiamo ω^2

$$\text{allora } g = \theta_{\max} \sin(\omega t + \phi), \quad \frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

considera $g = x$

nota che il periodo T non dipende dalla massa, dipende SOLO dalla lunghezza del pendolo l



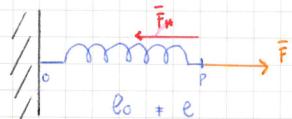
$$\theta_1 = 2^\circ$$

$$\theta_2 = 20^\circ \text{ da } 14^\circ \text{ a } 20^\circ \text{ incremento} \\ m \neq m_2$$

Il periodo T dei due pendoli è ESATTAMENTE LO STESSO!

Possiamo confondere il seno con l'angolo espresso in minuti.

Vediamo ora la MOLLA:



$$\text{per il II princ } |\bar{F}| = |\bar{F}_H|$$

$$|\bar{F}| \propto \Delta x$$

$$\bar{F}_H = -k \Delta x \rightarrow [k] = [N][m]^{-1}$$

è opposto a \bar{F} dipende dal materiale

\bar{F}_H è la forza di Hooke, che entro certi limiti approssima sistemi reali. (come nelle strutture atomiche: il legame di legami intomi è animabile)

una molle per certi aspetti)

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{sic. } > 0 \Rightarrow \omega^2$$

dunque $x = A \sin(\omega t + \phi)$ è sicuramente soluzione!

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \text{ ora il periodo } T$$

DIPENDE DALLA MASSA (\neq pendolo).

$$l_0 = 0$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Lezione del 9/03

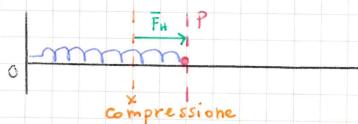
⑦

FORZA ELASTICA:

$$\bar{F}_E = -k \Delta x$$

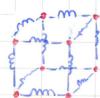
\downarrow
 $x - x_0$

può avere un sistema che va in compressione:



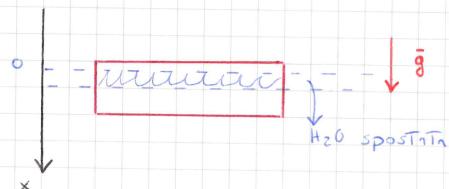
\bar{F}_E vuole riportare la molla alla sua posizione iniziale.

Questa legge può essere estesa ad altre situazioni:



Questo è il reticolo di un materiale, dove le interazioni tra gli atomi, per certi versi fino ad un certo punto, possono essere proporzionali a delle molle, uscite in un certo limite da forze elastiche.

Consideriamo ora un bar:



$$\begin{aligned}\bar{F}_A &= -mg \quad \text{forza di Archimede} \\ &\downarrow \\ &= -\rho \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{V} g = \\ &= -(\rho S g) \Delta x \quad \text{se chiamiamo } k = \rho S g\end{aligned}$$

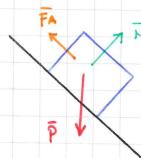
Formalmente la formula è uguale alla formula della forza elastica: moto armonico semplice di oscillazione.

ATTRITO VISCOSO:

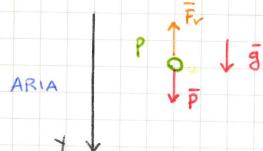
è più fastidioso complesso (fluidi dinamici, problemi di idraulica dinamica). Ma se il moto non è più di qualche metro al secondo, possiamo abbassarci generalizzando:

$$\bar{F}_v = -b\bar{v}, \quad (\text{si oppone al moto})$$

dipende da \bar{v} , senza \bar{F}_v non c'è,
è molto più difficile attrito statico.



\bar{F}_A c'è anche quando il
sist è statico.



$$mg - b\bar{v} = m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow g - \frac{b}{m} \bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{può scrivere } b = m\kappa$$

$$\Rightarrow g - \kappa\bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$= \int \frac{dv}{g - kv} = dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \Rightarrow \left[-\frac{1}{k} \ln(g - kv) \right]_0^v = t$$

$$\Rightarrow \ln \frac{g - kv}{g} = -kt \Rightarrow \frac{g - kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

annullizziamo: $t=0 \rightarrow v_0 = 0$

$t \rightarrow +\infty \rightarrow v(\infty) = \frac{g}{k}$, che è una costante = VELOCITÀ LIMITE,
direttamente proporzionale a g e inversamente a k , k può dipendere dalla sezione del corpo (tubo
maggiora k , più andrà piano).

DINAMICA RELATIVA:

$$\bar{r}_o = \bar{g} + \bar{r}_r$$

$$\bar{v}_o = \bar{v}_r + \bar{v}_T$$

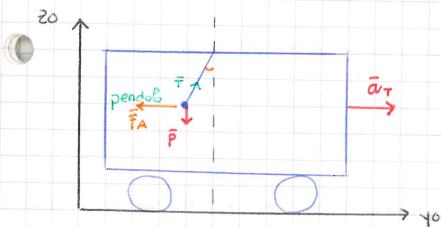
$$\bar{a}_o = \bar{a}_r + \bar{a}_T + \bar{a}_e$$

Con un esperimento meccanico (Mich) non posso dire se sono in quiete o in moto rett. uniforme.



possiamo dire che $\bar{a}_o = \bar{a}_r$, ma l'accelerazione dipende dalle forze

Supponiamo ora di considerare un moto accelerato; c'è dunque accelerazione.



In quiete tutti e 3 i principi si rispettano, sia per l'oss. in So che in S.

Siamo ora in movimento con \bar{a}_T :

$$\text{per } So: \bar{P} + \bar{T} = m\bar{a}_T \Rightarrow \begin{cases} T \cos \theta - mg = 0 & \text{tutto bene, valgono i 3 principi!} \\ T \sin \theta = ma_T \end{cases}$$

per S (dentro al vagone): lui non sa che c'è \bar{a}_T , ma il pendolo si inclina di θ ;
unico sist di riferimento conclude che vi sia un forza F_A che mi permette di ottenere la sinistra (senza non avrebbe senso)

Tale Forza \bar{F}_A è apparente per l'osservatore in S0 ma non per quelli in S.

Sembra dunque che vi siano due tipi di sistemi di riferimento (quegli "classici" $x_0y_0z_0$ e quelli in cui per spiegare la storia devo aggiungere una Forza, x_0y_0z).

In S0 valgono i 3 principi della dinamica.

In S il III principio è un problema: dove è la reazione a \bar{F}_A ? Non c'è, non so individuarla, il III principio viene meno, sembra non valere. In generale pare che \bar{F}_A (nel mezzo) agisca su tutti i punti materiali a questi sistemi sono detti NON INERZIALI.

Un osservatore in S scriverebbe $\begin{cases} T \cos\theta - mg = 0 \\ T \sin\theta - F_A = 0 \end{cases}$

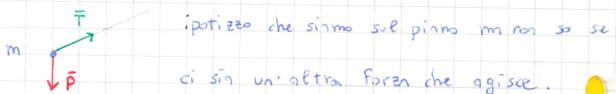
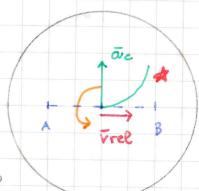
Il discorso è riconducibile nell'analisi dell'ascensore: avremmo concluso che $m(g+\alpha) = mg + m$ e di queste conclusioni posso dire che $+m = F_A$

Esperimento di Foucault:

Cerchiamo di studiare la Terra come sistema in rotazione rispetto ad un sistema inerziale quelli le stelle

$$\bar{a}_T + \bar{a}_C$$

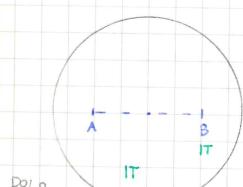
PENDOLO :



Ipotizzo che sinistro sul piano non so se ci sia un'altra forza che agisce.

$$\text{Ipotizzo un moto della Terra } \omega \Rightarrow \bar{a}_C = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \neq 0$$

La traiettoria inizierà a curvarsi, ci sarà una forza che mi fa curvare ma non trovo la sua reazione \Rightarrow Terra è in movimento



Dunque per un osservatore esterno c'è sub una pialta forza che si muove sotto al pendolo $\bar{P} + \bar{T} = m\bar{a}$

POLO NORD, io sono dentro

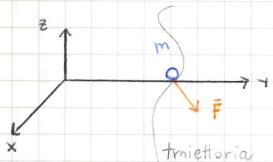
NORD, io sono fuori e osservo

*NB: La traiettoria del pendolo ormai non è più AB ma curva per la presenza di \bar{a}_C ; per un esterno è ovvio, è sub la Terra che si muove; per noi meno ovvio e CONCLUDIAMO che la Terra si muove

Dunque, dico che con il tempo il pendolo cambia traiettoria e noi NON CI ACCORGIAVIAMO che lo stava muovendo, dobbiamo per forza ipotizzare un pseudo forza che lo faccia curvare.
 Poiché abbiamo considerato questo pseudo forza, concludiamo che il nostro sistema è particolare: è accelerato, ovvero in movimento!

Lezione del 12/03 (8)

LAVORO:

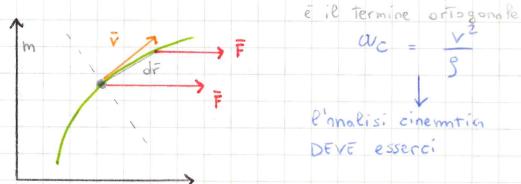


$$\bar{F} = m\bar{v} = m \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$r(t) \quad \bar{r}_0 = \bar{r}(t=t_0)$$

quello che voglio
sperare

Il problema è abbastanza complesso visto che lavoriamo con vettori, che hanno bisogno di moduli, direzioni e versi.



$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

è il termine orizzontale
l'analisi cinematica
DEVE essere



Voglio cercare di lavorare il meno possibile con quantità vettoriali e più con quantità scalari (magari sacrificando qualche informazione) e dunque usare quantità più "maneggevoli".

Voglio cercare QUANTITÀ NON VETTORIALI.

lungo la direzione di spost.

Questa voglio proiettare \bar{F} sulla componente spostamento: $\bar{F} \cdot d\bar{r} = \text{scopre}$;

\bar{F} rimane sempre una quantità ben definita

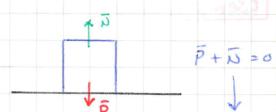
$$[N][m] = [J]$$

Per definizione $dW = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ LAVORO INFINITESIMO, quantità scalare!

JOULE: lavoro compiuto dalla forza di 1 N per spostare un corpo di 1 m lungo la sua linea d'azione

OSS: il lavoro complessivo svolto dipende dal percorso $W = \int_{\text{linea}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ integ di linea (2)

OSS: il lavoro è nullo quando $\bar{F} = 0$ o $\sum \bar{F} = 0$; se $d\bar{r} = 0$



$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r} \cos \theta \quad (\text{prod scal tra due vett})$$

↓

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow dW = 0$$

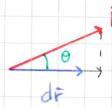
\bar{v} costante

sempre $\bar{F}_c \perp$ spostamento

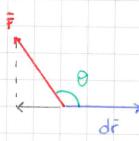
non si muove
 $\Rightarrow W=0$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow dW = 0$$

non c'è bisogno di un lavoro per mantenere questo moto, virtuale può essere perpetuo



$dW > 0$ se la proiez di \vec{F} è sulla stessa direz lungo lo spostamento
è detto LAVORO MOTORE = l aiuta nel moto



$dW < 0$ LAVORO RESISTENTE, direz. opposta al vettore spostamento
= si oppone nel moto

Sembrerebbe però di aver compiuto più situazioni introducendo l'integrale (che non so risolvere).

$$\text{So che } \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Rightarrow dW = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt =$$

Oss: abbiamo tolto il tempo = perdita di info accennata prima

$$\cancel{\star} d(v \cdot v) = d(v^2) = 2 \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} := dW = \frac{1}{2} m d(v^2) \Rightarrow dW = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} dt$$

questo è il TEOREMA DELLE FORZE VIVE; nel primo termine dev'essere la proiez

$$\text{di } \vec{F} \text{ su } d\vec{r}; \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int dW + W = \int \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt$$

vi ↓ =

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \text{ENERGIA CINETICA} = K$$

Questo discorso è valido $\forall \vec{F}$, a prescindere di quale esso sia!

se $W < 0 \Rightarrow v_f > v_i \rightarrow$ la proiez delle forze ha la stessa direz delle spaz = l'acceleraz.

se $W > 0 \Rightarrow v_f > v_i \rightarrow$ intermittemente ha DEVO inserire, tanto poi si elimina in ΔK , non inf. Fisicamente, È LA DIFF che conta \star

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \alpha \rightarrow \text{nella sua massima generalità deve mettere questa costante detta "FORZA VIVA"}$$

Infine definiamo il lavoro con tale teorema: $W = \Delta K = K_f - K_i$

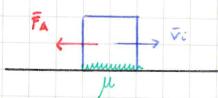
Esempio:



$$W = \Delta K = K_f - K_i \text{ perche parte da fermo,}$$

solo in seguito applico F

Esempio:

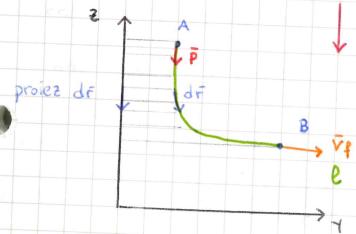


$$W = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 < 0$$

$$\Rightarrow W = -\frac{1}{2} m v_i^2 \Rightarrow \text{il lavoro si oppone}$$

\star se un corpo ha $v=0$, tutto male potre $\alpha=0$ e avere dunque $K=0$

= l'entrata provoca un lavoro resistente



A: quiete

Il lavoro dipende dal percorso è

$$W = \int_E \bar{P} \cdot d\bar{r} = \Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2} m V_f^2 > 0$$

noto che è un lavoro motore, m B voglio

calcolare usando l'integrale

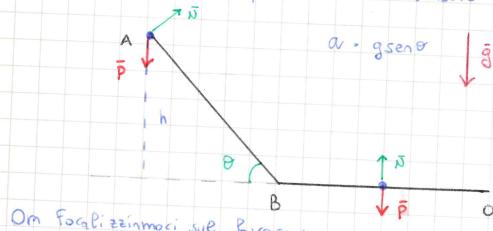
$$\Rightarrow \int_E (-mg) \hat{k} \cdot d\bar{r} \quad \text{dunque tutto lo spost. da A a B ha sempre} \\ \text{considerato le prod. scalari } d\bar{r} \cdot \hat{k} = \text{PROIEZIONE}$$

questo mi dice che lo spost lungo \hat{k} non conta nulla, mi interessa quello lungo \hat{x}

\Rightarrow non ha più senso considerare l'integrale di linea (E)

$$\Rightarrow \int_A^B (-mg) dz = +mg z_A - mg z_B = -mg \Delta z \rightarrow \Delta z \text{ differenza} \\ \text{di quota}$$

Aggiungo il meno per avere il classico $\Delta(\hat{p} - i)$



Or foralizziamoci sul lavoro:

$$W_{AB} = W_N + W_P = W_P = \int \bar{P} \cdot d\bar{r}$$

$\Rightarrow N \perp \text{spost}$

$$= \Delta E = E_f - E_i \quad (\text{parte da Fermo}) = \frac{1}{2} m V_f^2$$

$$\text{ma} \int \bar{P} \cdot d\bar{r} = - (0 - mgh) = mgh \rightarrow \frac{1}{2} m V_f^2 = mgh$$

Questo analisi è molto più rapida, non perdo l'info del tempo.

noto che $V_f^2 = 2gh$ non compire la missa, ed è un risultato già visto. Questo analisi vale ad ogni quota.

Prossimo ad inserire la forza d'attrito: $W_{AB} = W_N + W_P + W_{FA}$

coso

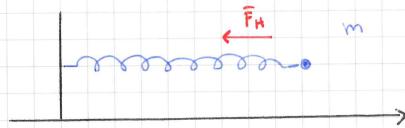
$$\bullet W_P = mgh \text{ come prima}; \quad W_{FA} = - \mu mg \int_E dr = - \mu mg \frac{h}{\sin \theta} \cos \theta$$

$$\Rightarrow mgh - \mu mg \frac{h \cos \theta}{\sin \theta} = \Delta E = \frac{1}{2} m V_f^2 \Rightarrow V_f^2 = 2gh \left(1 - \frac{\mu \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

No tempo
(dobbiamo andare
sopra e giù diminuire)
ragisce durante una variazione
di quota

Sul percorso BO resterà solo W_{FA} , lavoro resistente: il corpo prima e poi si ferma. Ci accorgiamo in generale di avere più potenze di calcolo, ma dobbiamo comunque stare più attenti; avremo scritto:

$$0 \leq v_f^2 = 2gh(1 - \mu \text{tg} \theta) \quad \mu \text{ tg} \theta \text{ è in reazione}$$



$$W = \int_E^B \bar{F}_H \cdot d\bar{x} = \int_E^B -kx \cdot dx \sim \int_E^B -kx \cdot de \text{ (ho generalizzato)}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_E^B = \frac{1}{2} kE^2 - \frac{1}{2} kB^2 = -\left(\frac{1}{2} kB^2 - \frac{1}{2} kE^2 \right)$$

Tiene sub conto dell'allungamento della molla rispetto al piano.

Nota che è un lavoro resistente.

Lezione del 15/03 ⑨

FORZE CONSERVATIVE:

$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ (proiez di \bar{F} lungo uno spostamento; quantità scalare).

$$W = \int_E^B \bar{F} \cdot d\bar{r} \Rightarrow \text{DIPENDE DAL PERCORSO COMPIUTO} : W = \int_E^B \bar{F}_A \cdot d\bar{r}$$

In considerando $W = \int_E^B \bar{F} \cdot d\bar{r} \rightarrow \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r}$ z^2

e dipende dalla quota, non dal percorso compiuto.

Indipendentemente dalla \bar{F} considerata, $W = \Delta E : z_B$

il lavoro produce un cambiamento di energia cinetica E .

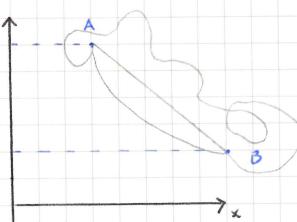
Ora ci concentriamo sulle forze per le quali sembra che il lavoro non dipenda dal percorso svolto. Ricorda che $W = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = mgz_A - mgz_B = 0$ ($mgz_B - mgz_A$)

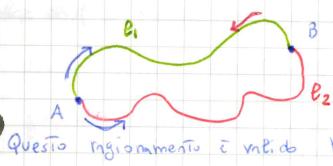
* $W = \int_A^B -dU = -[U(B) - U(A)]$ se sost $\bar{F} \cdot d\bar{r} = -dU$, è integrabile di linea

diventà un integrale tra due estremi. Ho generalizzato il caso delle forze peso. IN MODO ASTRATTO

non dipende dalla traiettoria fin quando vi compare un differenziale esatto.

* Voglio scrivere $\int_E^B \bar{F} \cdot d\bar{r}$ come differenziabile entro (come quello del peso), allora chiamo $\bar{F} \cdot d\bar{r} = -dU$





se percorro al contrario \vec{F} il percorso devo invertire gli estremi : $W_{(AB)} > 0 \Rightarrow W_{(BA)} < 0$ ma = moduli

LE FORZE CONSERVATIVE DIPENDONO SOLO DAGLI ESTREMI DEL PERCORSO

$W_{E_1}(AB) > 0$ anche $W_{E_2}(AB) > 0$; oltretutto $W_{E_2}(BA) < 0$ con moduli uguali.

$W = \oint_{\text{ciclo}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ possiamo usare questa espressione come def. di forze conservative. Essa è valida per ogni percorso chiuso. \vec{P} lo è!

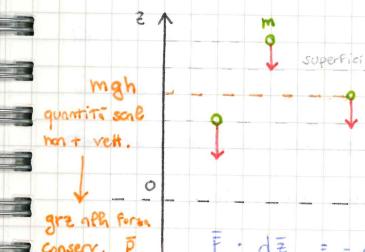
Ma se $\oint_{\text{cyc}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}$ non è conservativa. Affinché sia così necessaria e

SUFF. devo trovare la funzione U t.c. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$, come abbiamo fatto per \vec{P}

Prendiamo la forza elastica: essa dipende dalla posiz. x dell'oggetto, siamo

discorsi per la forza peso \Rightarrow LA POSIZIONE DEGLI OGGETTI È FONDAMENTALE.

OSS: $W = -\Delta U = -(U_f - U_i)$, $U(z) = mgz + \beta$ cose matematiche, tutto nella diffi annata



CAMPION VETTORIALE: regione di spazio in cui in ogni punto può essere associata questa vettore

\vec{P} sempre ortog. alle sup. di energia potenziale. La lunghezza della freccia dipende dalla massa considerata.

$$U = \alpha (P_0 \text{ impongo } z_0) \Rightarrow \beta = \alpha$$

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \rightarrow$ in quanto forze conservative *

Riconosco un \vec{F} che non è quota: posso passare ad una visione scalare del mio campo vett.

La variazione è legata al cambio di quota: $F \cdot dz = -dU \Rightarrow F = -\frac{dU}{dz} = -mg\hat{k}$ *

La variazione di quota è direttamente legata al cambiamento di quota.

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \text{dove} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \nabla \text{ è l'operatore inverso: da scalare a vettore}$$

SOLO LE CONSERVATIVE!

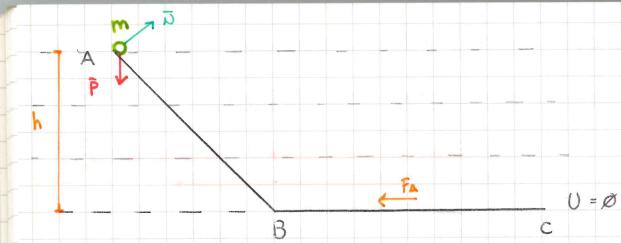
$$\Delta K = K_f - K_i = W \ominus -\Delta U = -(U_f - U_i) = U_i - U_f$$

$$\Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i \Rightarrow K + U = E \quad (\text{energia meccanica}) \text{ SI CONSERVA}$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_f - E_i = 0 \quad \text{CONSERVATIVA!}$$

* Con questo ragionamento sono passato dalle frecce (campo vettoriale) alle superfici (scalare)

* il $-$ è rimasto ed è fondamentale: \vec{P} è in verso opposto rispetto al versore \hat{k} , torna tutto!



$$w(N) = \emptyset \quad (\text{sempre } \perp \text{ al P SPOST})$$

so che $\Delta E = \emptyset$

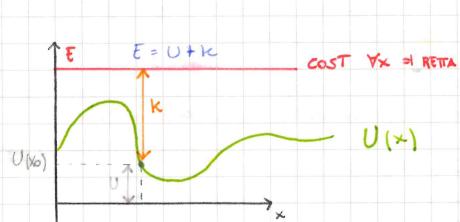
$$w(F_A) < 0 \Rightarrow \Delta E \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} E_i = k_i + U_i = U_i = mgh \\ E_f = k_f + U_f = k_f = \frac{1}{2} m v^2 \end{array} \right\} AB$$

Ipotizziamo ora la presenza di un frictivo su BC:

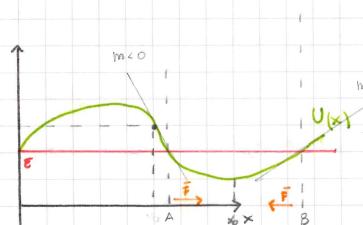
$$\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i & W_{\text{tot}} &= W_p + W_{\vec{n}} + W_{F_A} \Rightarrow \Delta K = W_p + W_{F_A} \\ && &= -\Delta U + W_{F_A} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = W_{F_A} \Rightarrow \Delta E = W_{F_A} \neq 0 \\ &\Rightarrow 0 \neq \Delta E = W_{F_A} < 0 \Rightarrow E_f < E_i & \text{e } W_{F_A} \text{ è forza resist.} \end{aligned}$$

$$E_f = mgh - \mu mg L$$



$$F = -\frac{dU}{dx} \hat{i}$$

Il punto minimo dell'energia per percorrere il suo moto
Abbiamo una visione completa del sistema



K è min in A e B e se si vuole superare la soglia E: il moto è confinato tra A e B, punti di inversione del moto.

Come posso sapere modulo e verso di F? $F = -\frac{dU}{dx} \hat{i}$: la direzione obliqua, la derivata

in A è neg. $\Rightarrow F > 0$; in B è l'esatto opposto. AB è una BUCA DI POTENZIALE

$$\text{Quanto vale } U \text{ in } x_0? \quad U(x) \Big|_{x=x_0} = U(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 \Rightarrow \text{Trigono}$$

Ho approssimato localmente questa funzione con una parabola; essa è $\sim \frac{1}{2} k \Delta x^2 \Rightarrow$ ELASTICA

\Rightarrow in x_0 il moto è approssimabile con un moto armonico semplice.

FORZA
è formalmente

$$x_0 = \min \Rightarrow d'(x_0) = 0$$

$x_0 = \text{PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE}$

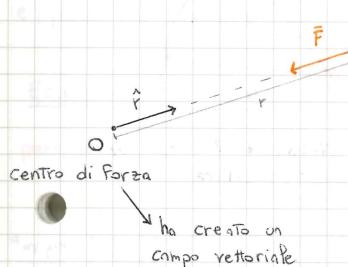
Al contrario nel max avrei un punto di equilibrio instabile.

Lo studio tramite energie è uno strumento molto potente che ci fornisce una grande quantità di informazioni.

Lezione del 19/03

(10)

FORZE CENTRALI:



dove $\bar{F} = F(r) \hat{r}$ → FORZA CENTRALE

dipende da PPA DISTANZA r

$F(r)$ è senpore, può essere > 0 , ovvero va in verso opposto a quello disegnato ed è di

attrito REPULSIVO; $F(r) = \text{cost}$; $F(r) = \frac{1}{r^2}$
 $F(r) < 0$ ATTRATTIVO. $F(r) = e^{-kr}$ possibili dipendenze

Dato il centro di forza, tutto lo spazio intorno è modificato.

Gi colpisce P in dipendenza diretta dal versore \hat{r} .

Consideriamo la quantità di moto $\bar{p} = m\bar{v}$:

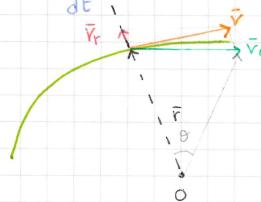
$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{r} \times \bar{p} \\ \bar{F} &= r\hat{r} \end{aligned}$$

where L è il MOMENTO ANGOLARE
della quantità di moto

per il II principio supponiamo che $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = r\hat{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = r\hat{r} \times \hat{r} \frac{d\bar{p}}{dt} = 0$

ho ricavato che $\frac{d\bar{L}}{dt} = r\hat{r} \times F(r)\hat{r} = rF(r)\hat{r} \times \hat{r} = 0$ SEMPRE e RIGOROSAMENTE

dunque $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{costante}$



$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times m(\bar{v}_r + \bar{v}_\theta) \\ &= |\bar{L}| = rm\bar{v}_\theta \quad \text{sen } 90^\circ = 1 \\ &\quad \text{massimizz.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{L}| &= (mr^2)w \\ |\bar{p}| &= m\bar{v} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Confronto} \\ \text{versore} \end{array} \right\}$$

Dato che $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{costante} \Rightarrow r^2w = r^2 \frac{d\theta}{dt} \text{ è costante, } r \text{ cambia}$

Così come cambia θ , ma il loro prodotto resterà costante.

Dal disegno precedente vediamo che \vec{r} , spostandosi di un angolo infinitesimo

$$d\theta, \text{ spazzando un'area } dA = \frac{r d\theta r}{2} = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{dr}{dt}$$

triang infinit.: con fondo è' area con la corda

$$= \frac{1}{2} \frac{|F|}{m} \quad \text{che è costante (una costante del moto).}$$

$d\tau = \text{proiet d}\vec{s} \text{ su } \hat{r}$

Proviamo ora a calcolare il lavoro di queste forze:

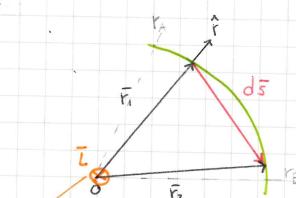
$$\int_e \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_e F(r) \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{dr} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr =$$

dove r_A e r_B sono le dist. dal centro di forza O
all'inizio e all'fine (su F)

$$= * \left[F(r_B) - f(r_A) \right]$$

cerca un primitivo $F \cdot ds = -du$

non cambia inclinaz;
lavoriamo in 2D



perché totalmente è inf. dello spostamento angolare

$$[L] = [e][p] = [e]^2 [m][t]^{-1} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Abbiamo dunque individuato III proprietà:

I. $L = \text{costante}$

II. $\frac{dA}{dt} = \text{costante}$

III. conservative

e questo vale per TUTTE LE FORZE CENTRALI.

* $F \cdot ds = -du = du = -F \cdot ds$

$= U_i - U_f = f(r_A) - f(r_B) =$

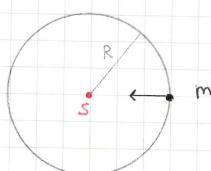
$= -[F(r_B) - F(r_A)]$

GRAVITAZIONE UNIVERSALE:

Peggi di Keplero:

I. Le orbite sono ellissi che

e il sole occupa un fuoco



Appross. l'ellisse è una cir. dunque il sole è stn al centro

II. $\frac{dA}{dt} = \text{costante} \Rightarrow \text{moto circolare uniforme}$

III. $T^2 = K R^3$

Aveva un moto non rettilineo avrà un'acceleraz. centripeta e dunque una forza cent.

$$F_c = mac = m \omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = 4\pi^2 \frac{mr}{T^2 r^3} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{K_{TS}} \frac{m_T}{r^2} = F_{TS} \quad m_T \text{ e } r \text{ devono essere uguali per il principio di dinamica}$$

Il principio della dinamica devono essere uguali ed opposti, dunque vale

$$m_S K_{TS} = m_T K_{TS}$$

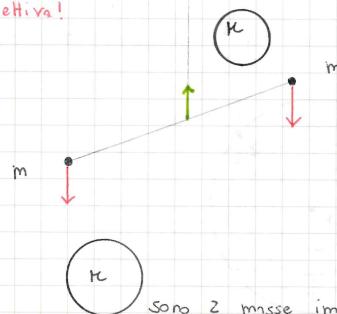
$$\text{posso definire } \gamma = \frac{4\pi^2}{m_S K_{TS}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

molto PICCOLO

$$\text{e possiamo dunque scrivere } F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2} \approx \bar{F} = -\gamma \frac{m_S m_T}{r^2} \hat{r}$$

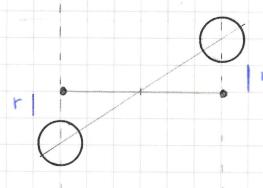
Esperimento di Cavendish:

prospettiva!



non c'è motivo perché possa muoversi

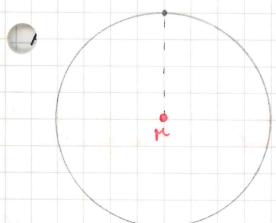
vista dall'alto



Sono 2 masse importanti

Aggiungendo queste 2 masse importanti notiamo un'azione \Rightarrow dimostriamo che
attrazione gravitazionale.

Sono così riusciti a misurare F e dunque ricavare γ .



prendo il modulo di $F = \gamma \frac{M m_S}{R^2} ! = mg \Rightarrow g = \gamma \frac{M}{R^2}$

sopraleviamo ora di un'altezza h

$$g(h) = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} = \gamma \frac{M}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \sim g(1 - \frac{2h}{R}) \quad \text{Taylor}$$

dove ϵ è molto piccolo (R è molto grande) \Rightarrow si perde di quota g diminuisce.

! è concettualmente sbagliato $Mg \neq m_g$: ovvero massa gravitazionale \neq massa inerziale

però per poter giustificare tale passaggio consideriamo $m_a = m_i$

$$\bar{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{r} \right) m_2$$

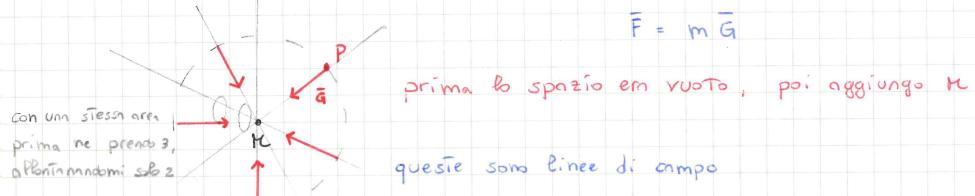
definiamo allora il vettore campo

$$\bar{G} = \frac{\bar{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \hat{r}$$



\hat{r}

Apprendo passo immaginare:

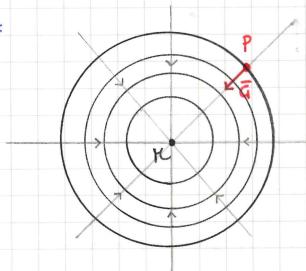


Per la presenza di M, si è modificato lo spazio intorno.

$$m \bar{G} = \bar{F} = -\bar{\nabla} U \quad \text{può scriverlo in quanto conservativa}$$

$$\Rightarrow \bar{G} = -\frac{\bar{\nabla} U}{m} = -\bar{\nabla} V \quad \text{dove } V \text{ è il POTENZIALE GRAVITAZIONALE}$$

Possiamo disegnare una serie di cerchi concentrici a cui \bar{G} è sempre ortogonale.
sono delle superficie di equipotenziale:



$$W = \int_{r_A}^{r_B} -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{dr}{r} = \kappa m_1 m_2 \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r_B} - \kappa \frac{m_1 m_2}{r_A}$$

$$\text{Pfam} \quad V = -\kappa \frac{M}{r}$$

$$\text{dove } W = -\Delta U \quad e \quad U = -\kappa \frac{M m}{r}$$

$$-(U_B - U_A)$$

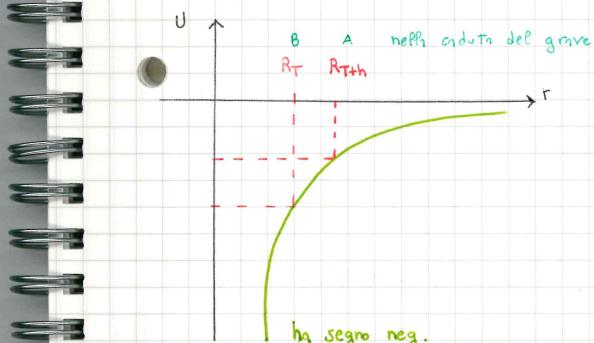
può scriverlo così in
maniera del tutto generale

Lezione del 22/03

(1)

$$U(r) = -\frac{\gamma m \kappa}{r} \quad V(r) = \frac{U}{m} = -\frac{\gamma \kappa}{r}$$

entrambi per $\kappa > 0$ sono neg.



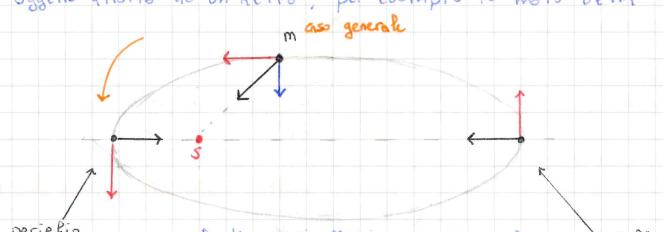
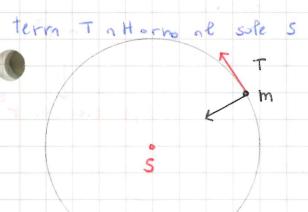
$$W = \left[-\frac{\gamma m \kappa}{R_T} + \frac{\gamma m \kappa}{R_T(1+\frac{h}{R_T})} \right] = \frac{h}{R_T} \ll 1$$

$$= \gamma \frac{m \kappa}{R_T} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R_T}} \right] \approx \frac{\gamma m \kappa}{R_T} \left[1 - \left(1 - \frac{h}{R_T} \right) \right]$$

$$\approx \gamma \frac{m \kappa}{R_T} \left[\frac{h}{R_T} \right] \text{ dove } \frac{r \kappa}{R_T^2} = g$$

$$= mgh$$

Consideriamo ora il moto di un oggetto nello spazio ad un altro, per esempio il moto della Terra attorno al Sole S:



$$F_c = m \omega^2 r = \gamma \frac{m \kappa}{r^2} = F_{ar}$$

Così come le orbite ellittiche, notiamo la presenza di un'accelerazione centripeta (blu) che punta in una direzione dal centro di gravità

Valida unicamente per un moto CIRCOLARE

$$\frac{m v^2}{r} = \gamma \frac{m \kappa}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{m \kappa}{r} \text{ sono forze centrali e CONSERVATIVE}$$

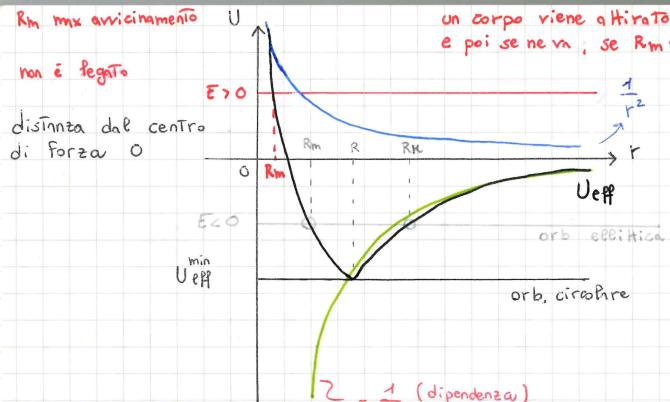
$$E = \kappa + U = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m \kappa}{r} \quad m \text{ per la precedente uguaglianza}$$

$$\frac{1}{2} \gamma \frac{m \kappa}{r} - \gamma \frac{m \kappa}{r} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{m \kappa}{r} = E < 0 \quad \begin{matrix} \text{ORBITA STABILE} \\ \text{l'energia è legata} \end{matrix}$$

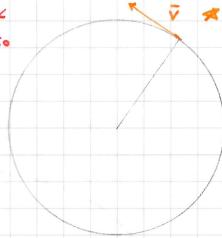
È interessante notare come l'unica vera vincolante sia il raggio $r \neq$ se cambio orbita avrò un'energia diversa

$\Delta E = E_f - E_i \neq 0$ (per cambiare orbita devo avere un lavoro di \neq conservazione, per esempio un motore).

Forze non



un corpo viene attratto
e poi se ne va; se $R_m > R_T$; se c'è l'impatto



$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2)$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 r^2$$

$$\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$$

$$L^2 = mr^2\omega^2$$

dipendente su r^2

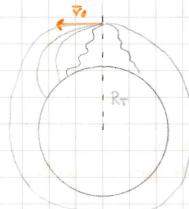
$$\text{Energia meccanica} = E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GM}{r}$$

$U_{\text{eff}} = \text{energia potenziale effettiva}$

$$E = U_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GM}{r} \quad \text{il sistema ruoterà su un'orbita circolare } \frac{1}{2}mv_r^2 = 0$$

se nel caso rosso $E > 0$ è minore del raggio d'apogeo R_T ⇒ l'oggetto esce nella terza.

Il sistema è LEGATO SSE $E < 0$; più E è → 0, più l'orbita è eccentrica.



quanto dovo fornire ad un corpo perché lui percorra l'orbita terrestre?

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\text{energia dell'orbita} = E = -\frac{1}{2}\frac{GM}{R} \quad \begin{matrix} \text{dove} \\ \text{calcolo} \\ \text{diretta} \end{matrix} \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{GM}{R}$$

$$v_0 = \sqrt{gR} \approx 7.8 \text{ km/s} \quad \text{velocità tangenziale oraria } 28000 \text{ km/h}$$

solo ancora sotto posto n° 2 altraz.

è P dovo che dovo fornire al corpo per fargli percorrere tal' orbita.

Supponiamo ora che tale oggetto voglia andare via radialmente: voglio P minima velocità di fuga ⇒ P minima E necessaria; dal grafico sopra poniamo dedurre che sin E = 0

K_{TOT} (P solita)

$$\frac{1}{2}\frac{mv^2}{R} - \frac{GM}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11 \text{ km/s} \quad \text{è P}$$

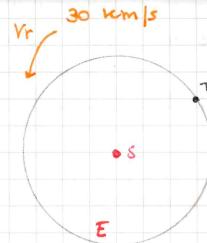
velocità necessaria per uscire dall'orbita Terrestre.

Possiamo fare lo stesso ragionamento per uscire dal sistema solare:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \sigma \frac{m k}{r} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2 \sigma k}{r} =$$

$$v^2 = v_t^2 + v_r^2$$

Velocità aggiuntiva
di 12 km/s



quest'orbita ha un'unica Energia, è LEGATA

$$E = -\frac{1}{2} \frac{m k}{r} \cdot r$$

Come abbiamo visto prima

Problema: Fino ad ora abbiamo considerato P. Terra come un oggetto niente tutta la massa concentrata nel suo centro: mi è capitato?

Teorema di Gauss

$$\bar{F}_g = -\sigma \frac{m k}{r^2} \hat{r} : \text{ vale per TUTTI i PUNTI MATERIALI}$$

dipendenza da $\frac{1}{r^2}$, anche la superficie di una sfera scatta con r^2 (esattamente $4\pi r^2$)

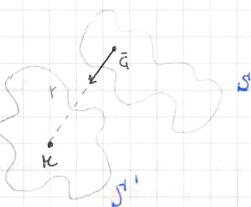
Vorrei dunque trovare una formula che leggi queste due dipendenze in modo tale che si compensino a vicenda.

Flusso max se $\hat{n} \perp \bar{v}$; = 0 se $\hat{n} \parallel \bar{v}$



Possiamo definire il flusso: $d\phi = \bar{v} \cdot \hat{n} ds$ se $\bar{v} = 0 \vee ds = 0 \Rightarrow d\phi = 0$

è una quantità scalare che mette in relazione vettori e superfici. Lo dimostriamo per la prossima lezione

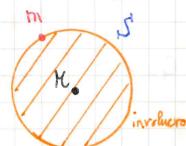


$$\phi_s(\bar{a}) = 0 \quad [\text{flusso di } \bar{a} \text{ su } S, con } M \text{ esterno}]$$

$$\phi_{S'}(\bar{a}) \neq 0 = 4\pi \sigma k \rightarrow \text{compare } M \text{ e non c'è più dipendenza dalle direzioni}$$

$$\text{se } M = (m_1 + m_2) \Rightarrow \phi = 4\pi \sigma (m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \phi_{S'}(\bar{a}) = 4\pi \sigma \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{indipend. da dove si trova}$$



Il centro di forza il flusso su M dipende da tutto ciò che dentro la sfera $\approx M_T$

1 Lezione del 23/03

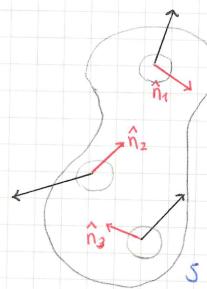
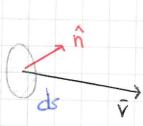
(12)

Teorema di Gauss e applicazioni:

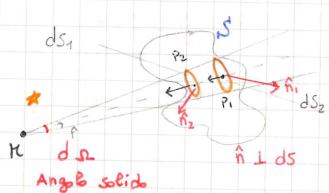
$$\Phi = \int d\phi = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

flusso complessivo

$$\Rightarrow \Phi = \int d\phi = \int_S \bar{G} \cdot \hat{n} ds$$



$$\Phi_S (\bar{G}) = 0 \quad (\text{M esterno})$$



Questo è una situazione del tutto generale.

so che $\bar{G} = -\sigma \frac{\mu}{r^2} \hat{r}$ risce che μ suff direz trateg.

consideriamo due aree ds_1 e ds_2 , sezioni di S (3D)

$$d\phi \Big|_{ds_1} = \bar{G} \cdot \hat{n}_1 ds_1 = -\sigma \frac{\mu}{r_1^2} \hat{r} \cdot \hat{n}_1 ds_1 \quad \text{ma } ds_1 = r_1^2 d\Omega$$

equiv. del 2D: $d\Omega = \frac{ds}{R^2}$

$$= -\sigma \frac{\mu \hat{r}}{r_1} \cdot \hat{n}_1 r_1^2 d\Omega \quad \text{c'è la compensazione di } r^2 \text{ che da } \Phi \text{ la posizione prec. cercavamo!}$$

Avendo il centro di massa M esterno ad S , con un angolo solido $d\Omega$ intercettato α (o un multiplo α) superfici ds_i . $\hat{r} \cdot \hat{n}$ dà prima un angolo $< 90^\circ$, poi $> 90^\circ$ = il sommo contributi pos e neg.

$$\Phi = \int d\phi = \int_{>0} d\phi + \int_{<0} d\phi = 0$$

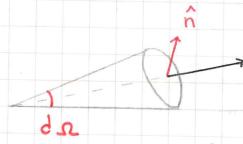
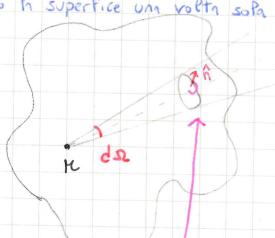
$\theta < 90^\circ \quad \cos \theta > 0$

$\theta > 90^\circ \quad \cos \theta < 0$

Ora consideriamo M interno:

$$\Phi = \int_S \bar{G} \cdot \hat{n} ds = \int_S -\sigma \frac{\mu \hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} ds$$

La compensazione di r^2 c'è sempre, come $\hat{r} \cdot \hat{n}$



se $\hat{n} \parallel \hat{r}$, $n \cdot r \cdot \cos 0^\circ$

ma se considerassi $\alpha > 90^\circ$, $\cos \alpha < 0$

$$\therefore \Phi = \int_{4\pi} \sigma \mu d\Sigma \quad \text{che è un integrale immediato} \quad \Phi = 4\pi \sigma \mu$$

Quindi $\Phi \Big|_{S \text{ est}} (\bar{G}) = 0$ oppure se interno $\Phi \Big|_S (\bar{G}) = 4\pi \sigma \mu$

Applicazioni del Teorema di Gauss:



M lungo tutto il perimetro

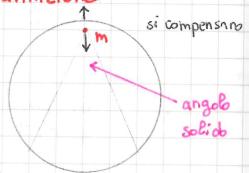
$$\Phi = \int_S \bar{G} \cdot \hat{n} dS = 4\pi \times M = 0$$

\bar{G} è esterna a S allora $\bar{G} = 0$

$$\Rightarrow \bar{G} = 0 \text{ ma ricordo } \bar{G} = -\bar{\nabla}V \neq -\bar{\nabla}V = \text{costante}, \neq 0$$

Le mie mie masse esplicative m non subiscono attrazione

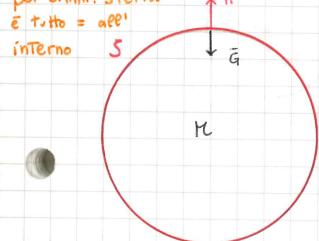
All'interno di una sfera curva $\bar{G} = 0$!



si compenso
angolo solido

Supponiamo ora di prendere una sfera PIENA

per simm. sferica
è tutto = alle!



$$\Phi|_S = \int_S \bar{G} \cdot \hat{n} dS = 4\pi \times M$$

per Gauss

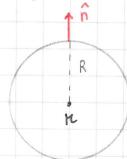
\bar{G} è la min. incognita

\hat{n} non lo considero per simm. sferica

$$-\bar{G} \int_S dS = 4\pi \times M \Rightarrow G = -\gamma \frac{M}{R^2}$$

$$\star -G\hat{n}\cdot\hat{n} = -G\cos 0^\circ = -G \cdot 1$$

In questo risultato non cambierebbe se la massa M fosse concentrata in un punto al centro (e non più piena dunque) a distanza R dalla superficie



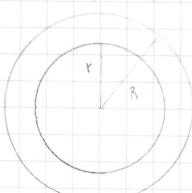
\Rightarrow HO DIMOSTRATO CHE POSSO APPROSSIMARE LA

MASSA DELLA TERRA IN QUESTO MODO

Se invece ipotizzassi di avere dentro la terra con una distanza dal centro di

massi pari a $r < R$

sappiamo che la parte esterna non conta nulla.



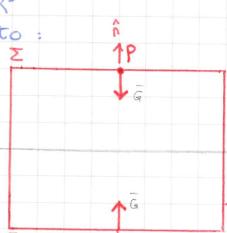
$$G = -\gamma \frac{m(r)}{r^2} = -\frac{\gamma}{r^2} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3$$

costante

$$m(r) = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ se la sfera è omogenea} \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$G(r) = -\gamma \frac{M}{R^3} r \Rightarrow r \text{ cresce LINEARMENTE.}$$

Piano infinito:



densità di massa del piano

costruisco un cilindro

$S \perp \hat{n} \Rightarrow S \parallel G \Rightarrow \Phi(S) = 0$

la sezione che considero

$$\bar{\Phi}_{\Sigma_1} + \bar{\Phi}_{\Sigma_2} + \bar{\Phi}_S = \bar{\Phi}(\bar{G}) = 4\pi \times \rho \frac{\alpha \Sigma}{M}$$

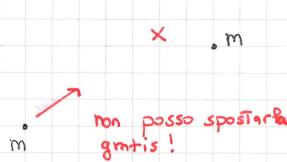
$$2\bar{\Phi}_{\Sigma} = 4\pi \times \rho \alpha \Sigma$$

$$-G\Sigma = -G \int d\Sigma = \int \bar{G} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Ma allora $\vec{G} = -2\pi G \rho \hat{r}$ NON DIPENDE DALLA DISTANZA

è un campo che rimane dunque costante \sim al campo di gravità, che è costante vicino alla superficie terrestre.

Se metto una massa m nello spazio, modifica lo spazio intorno ad essa.



Voglio costruire un sfero di raggio R . Sono a r .

Per questa costruzione devo partire delle masse dm da una distanza infinita, ma il percorso non conta.

$$dW = -dU = - \left[U(r) - U(\infty) \right] / \text{non interagisce}$$

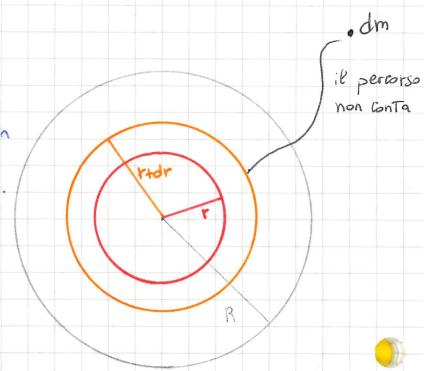
$$\Rightarrow dW = - \left[-\gamma \frac{m(r) dm}{r} \right]$$

$$\text{dove } m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\kappa}{4\pi R^3} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\kappa r^3}{R^3}$$

$$dm = \frac{\kappa}{R^3} 3r^2 dr \quad \leftarrow \text{essendo } dm \text{ derivo } m(r)$$

$$\Rightarrow \int dW = \frac{\kappa}{r} \frac{\kappa}{R^3} r^3 \frac{\kappa}{R^3} 3r^2 dr = \int_0^R \frac{3\kappa}{R^6} r^4 dr = \frac{R^5}{5} dm \int r^4 dr$$

$$\Rightarrow W = \frac{3}{5} \kappa \frac{\kappa^2}{R} = -U \quad \Rightarrow U = -\frac{3}{5} \kappa \frac{\kappa^2}{R} \quad \text{UN CORPO HA UNA SUA ENERGIA POTENZ.}$$



Lezione del 26/03

(13)

SISTEMA DEI PUNTI MATERIALI:

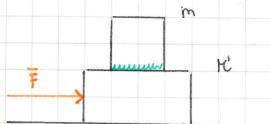


se aumenta il # di punti devo avere sott'occhio

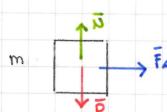
numerose info per ognuno

$$\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i), \bar{v}_i, \bar{r}_i, \bar{F}_i \dots$$

Vorrei vedere se fosse possibile avere degli strumenti fisici che mi diano una visione d'insieme di ciò che sta succedendo.



possiamo vedere questo problema come sistema di punti materiali



Se si muove tutta insieme, F è applicata su m e m' ; se lo guardo nello insieme, le varie forze di reazione e reazione sono spesso collegate. Vorrei trovare delle grandezze rappresentative per questi punti materiali. Potrei arbitrariamente scegliere di considerare un sistema di punti, per esempio m e m' insieme (magari perdendo certe informazioni).

Procediamo ora con il generalizzare questo pensiero:

$$i = 1, \dots, N$$



$$\bar{F} := \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{F}_i}{\sum_{i=1}^N m_i = M}$$

POSIZIONE
DEL CENTRO
DI MASSA

tutti questi punti rappresentano il mio SISTEMA e sono tutti liberi da vincoli (possono fare quello che vogliono)

se considerassi solo un m sull'asse x , il suo $\bar{r} = x_0$, ovvero ha un'esatta posiz.

Prendiamo ora un altro m posto nell'origine:

$$\bar{r}_{CM} = \frac{m_0 + Mx_0}{2m} = \frac{x_0}{2}$$

Ho ricordato subito che in generale \bar{r}_{CM} non coincide con nessuno dei punti considerati.

Se $m \neq m'$, CM si sposta verso il massimo più grande, ma non vi coincide; questa definizione individua dunque un punto fittizio che risente della massa dei punti considerati (tieni conto della dist. spaziale).

Io vorrei sfruttare la DINAMICA di questo punto fittizio (CM) legato agli altri.

ma che non coincide con nessuno \Rightarrow MEDIA PESATA $M = \sum_{i=1}^N m_i$ dove
 m_i è la massa complessiva del mio sistema.

$$m_1 \cdot \vec{v}_1$$

$$, m_2$$

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \text{ e in generale } \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$, m_i$$

la quantità di moto complessiva del mio sistema

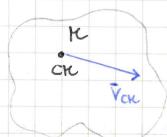
$$\text{e } \vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

E se volessi trovare la velocità del mio CM?

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \vec{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i}{M} = \vec{P}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M \vec{v}_{CM}$$

Siamo dunque passati da una definizione puramente matematica ad una fisica.



consideriamo tutta la massa del sistema concentrata in CM = M.

Mi permette di rappresentare in maniera efficace il moto del mio sistema.

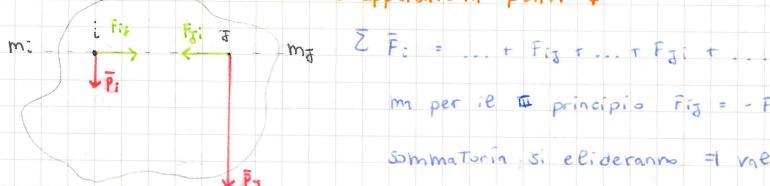
(però effett. in corrispondenza di M non c'è nessuna massa vera e propria)

nube formata da tutti i punti materiali del sist.

$$\text{A questo punto posso definire } \vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$\Rightarrow M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i; \text{ vorrei dare un significato a quest'espressione.}$$

$$\Rightarrow M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \rightarrow \text{è la somma di tutte le forze su un punto per tutti i punti ovvero la somma di TUTTE le FORZE, che però sono di tipo e applicate in punti!}$$



m_i per il III principio $F_{ext} = -F_{ext}$ dunque nella

sommatoria si elideranno \Rightarrow uguale per tutti i punti

$$\text{Potrei allora riscrivere } M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{est.}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int.}} \rightarrow = 0 \text{ per l'ex sopra}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{est.}} = \vec{F}^{\text{est.}} = M \vec{a}_{CM} \text{ I EQUAZIONE CARDINALE per la meccanica}$$

tutte le forze la cui reazione ricade su un corpo esterno al sistema considerato

Immaginiamo un fuoco d'artificio:

$$+ h$$



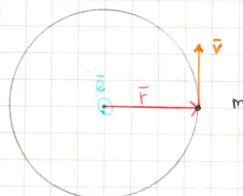
$$\bar{P}_i = m\bar{v} \quad m \text{ è sottoposta ad una forza esterna } \bar{F} = mg$$

Raggiungerà una quota h ed esploderà: ogni scintilla avrà le proprie forze, ma il C.M. rimane sempre al centro di h , e sarà sempre sottoposto all'unica forza esterna \bar{F} dove $\bar{F} = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t}$; il centro di massa è stabile e sicuro, nulla di più.



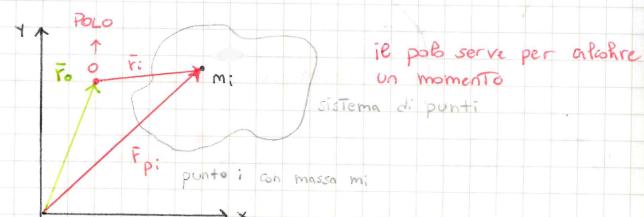
sistema inizialmente in quiete $\Rightarrow \bar{a} = 0$ perché $\bar{F}^{\text{est}} = 0$

se taglio il filo $\bar{P}_{\text{tot}} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = 0$: se ne studia solo uno, m_1 , so tutto per l'altro m_2 .



derivo il momento angolare

$$\bar{L}_i := \bar{r}_i \times m\bar{v}_i \quad \Rightarrow \quad \bar{L} = \sum_{i=1}^N \bar{L}_i = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m\bar{v}_i$$



$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\bar{r}_i \times m\bar{v}_i) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m\bar{v}_i + \bar{r}_i \times m\bar{a}_i \right] = *$$

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r}_{pi} - \bar{r}_o) = \bar{v}_{pi} - \bar{v}_o = \bar{v}_i - \bar{v}_o$$

$$\bar{v}_i \times m\bar{v}_i = \emptyset \Rightarrow \bar{v}_i \parallel \bar{v}_o$$

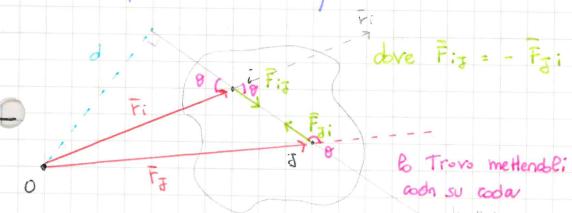
vel del polo

$\bar{v}_{pi} = \bar{v}_i$ perché è la vel rispetto al mio S.R. di riferimento, e non risp al polo

$$\bar{F}_i$$

$$* = \sum_{i=1}^N \left[-\bar{v}_o \times m\bar{v}_i + \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i \right] = \frac{d\bar{L}}{dt} = -\bar{v}_o \times \bar{P} + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \times m_i \bar{a}_i$$

$$= \dots \times \left(\bar{F}_i^{\text{est}} + \bar{F}_i^{\text{int}} \right)$$



$$\text{dove } \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}$$

$$|\bar{F} \times \bar{F}| = rF \sin \theta$$

\bar{F} ed \bar{F} CODA-CODA!

$$r \sin \theta = d$$

vedi \bar{F}_i

* stessa distanza dalla direttrice, m hanno verso opposto
= a 2 a 2 si elidono

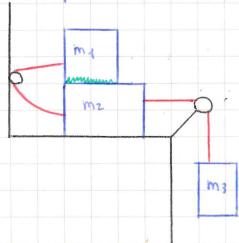
Le forze hanno stesso modulo e stesso braccio d , si ANNULLANO a due a due

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = -\bar{v}_0 \times \bar{P} + \sum_{i=1}^N \frac{\bar{F}_i \times \bar{F}_i^{\text{est}}}{\bar{F}_i^{\text{est}}} + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \times \bar{F}_i^{\text{int}} \rightarrow = 0 \text{ appena dimostrato}$$

\bar{F}_i momento complessivo forze esterne

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = -\bar{v}_0 \times \bar{P} + \bar{F}_{\text{est}} \quad \text{II EQUAZIONE CARDINALE della meccanica}$$

Un caso particolare è quando il polo si muove alla stessa vel del centro di massa ($-\bar{v}_0 \times \bar{P} = 0$) \Rightarrow sono in quiete relativa tra loro \Rightarrow coincidono $\Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{F}_{\text{est}}$ ma il prezzo è che il sist di rifer.



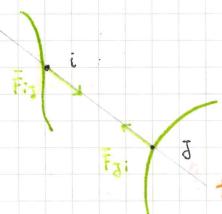
solidale con il centro di massa. NON È INERZIALE ma accelerato.

Per chiudere il discorso basta l'implicazione le energie:

\rightarrow passa notare che nel mio sistema le forze di attrito (forze interne) giocano un ruolo importante \Rightarrow sono a priori che $\bar{F}_{\text{int}} \neq 0$!

$$dW_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i = (\bar{F}_i^{\text{est}} + \bar{F}_i^{\text{int}}) \cdot d\bar{r}_i = \bar{F}_i^{\text{est}} \cdot d\bar{r}_i + \bar{F}_i^{\text{int}} \cdot d\bar{r}_i$$

non riesco a fare le proiez sulle traiettorie (prod scolare).



Le forze interne non sono semplici abiliti!

$$\Rightarrow dW_i = dW_i^{\text{est}} + dW_i^{\text{int}} = \sum (\int dW_i^{\text{est}} + \int dW_i^{\text{int}})$$

traiettoria \neq proiezioni \neq non si semplificano

$$W^{\text{tot}} = W^{\text{est}} + W^{\text{int}} = \Delta K^* \text{ ovvero } K_f - K_i$$

FORZE VIVE

$$dW_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i = m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot \bar{v}_i dt = m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = d\left(\frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right)$$

Le lavoro esatto fatto sui punti i lo posso scrivere come differenze esatta * dimostrato

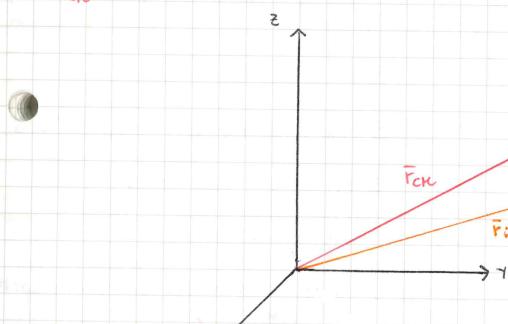
questa sequenza di ugualanze vale punto matematico, poi devo solo sommare.

SISTEMA DI PUNTI MATERIALI:

Abbiamo visto che $\bar{F}_{ext} = M\bar{a}_{cm} = \frac{d\bar{P}}{dt}$; successivamente $\frac{d\bar{L}}{dt} = -\bar{v}_0 \times \bar{P} + \bar{F}_{ext}$. Vorrei avere un'analoga tra I e II eqnz cardinale, ma per farlo dovrei avere
* se $\bar{v}_0 \parallel \bar{v}_{cm}$
 $\bar{v}_0 \times \bar{P} = 0$, e voglio considerare anche i casi non binari: voglio essere sol. anche con CTC ($\neq \bar{p}B$);
in un SI $\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$ mentre nel sist. del CTC $\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{L}}{dt}$, mi spesso questi
ultimo sistema non è inerziale (vedi Fuoco d'artificio, è accelerato).

Consideriamo un sist. inerziale e uno del CTC:

* $\bar{P} = M\bar{v}_{cm}$



nel sist. del CTC $-\bar{v}_0 \times \bar{P}$ è sempre = 0.

$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$

La quantità di moto $\bar{p}' = 0$, ovvero quella nel sist. $x'y'z'$.

Voglio che $x'y'z'$ si limiti a traspare!
Può compiere un moto traslatorio accelerato.

SEGUI I NUMERI!

* 1 $\bar{r}_i = \bar{F}_{cm} + \bar{r}_i^*$; $\sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i^* = 0$ $\Rightarrow \bar{v}^* = \bar{p}'$ * 5 $\Rightarrow \bar{v}_0 = \bar{v}_{cm} + \bar{v}_i^*$

* 2 $\bar{F}_{cm} = 0$ ovvero è netta origine
Considero come "riservata" queste
2 espressioni in rosso

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i^* = \sum_{i=1}^N m_i (\bar{v}_i - \bar{v}_{cm}) =$

$= \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_{cm} =$

che è \bar{p}'
 $\sum_{i=1}^N m_i \ddot{a}_i^* = (\bar{F}_{ext} + \bar{F}_{int} - m_i \bar{a}_{cm})$ se è accelerato, cosa probabile

QUESTO PERCHÉ SIA MO IN UN SISTEMA NON INERZIALE $x'y'z'$ (sono in CTC)

Perché come sappiamo che in dinamica relativistica, dobbiamo tener conto delle acc. con il segno *

Combinto. è come se fosse un forza apparente (appartenente al SI) che agisse su tutti i punti e sul CTC \Rightarrow di trascinamento

Possiamo allora concludere che $\frac{d\bar{L}'}{dt} = \bar{F}'_{ext} \Rightarrow$ IL POLO È IL CENTRO DI MASSA
Bo dimostro dietro

* $\frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\bar{r}_i - \bar{r}_{cm})}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{M} - \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_{cm}}{M} = \bar{r}_{cm} - \bar{r}_{cm} = 0$
 $\bar{F}'_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{F}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (\bar{F}_i - \bar{F}_{cm})}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{F}_i}{M} - \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{F}_{cm}}{M} = \bar{F}_{cm} - \bar{F}_{cm} = 0$
 $\bar{F}_{cm} = const$
 $\Rightarrow \frac{M}{m} \bar{F}_{cm}$

$$\bar{L}_i^1 = \bar{r}_i^1 \times m_i \bar{v}_i^1 \Rightarrow \bar{L}^1 = \sum_{i=1}^n \bar{L}_i^1 = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i^1 \times m_i \bar{v}_i^1) \text{ derivo}$$

$$\frac{d\bar{L}^1}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\bar{r}_i^1}{dt} \times m_i \bar{v}_i^1 + \bar{r}_i^1 \times m_i \ddot{\bar{v}}_i^1 \right) \xrightarrow{\text{dunque resta } \bar{F}_{ext}^i} \bar{F}_{ext}^i + \bar{F}_{int}^i - m_i \ddot{\bar{v}}_{cm}^1$$

$$= \left[-\sum_{i=1}^n m_i \bar{F}_i^1 \right] \times \ddot{\bar{v}}_{cm}^1 \quad \nabla \frac{d\bar{L}^1}{dt} = \bar{F}_{ext}^1 \text{ VERIFICATO!}$$

perché $\sum_{i=1}^n m_i \bar{F}_i^1 = \bar{F}_{cm}^1$ che di primi supponiamo essere = 0

Il sig. König ci fornisce due Teoremi importanti:

I Momento angolare:

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i^1 \times m_i \bar{v}_i^1) = \sum_{i=1}^n [(\bar{r}_{cm} + \bar{r}_i^1) \times m_i (\bar{v}_{cm} + \bar{v}_i^1)] = \\ &\stackrel{\bar{P}}{=} \bar{L} = \bar{L}^1 + \bar{F}_{cm} \times M \bar{v}_{cm} & \cdot \sum m_i \bar{v}_i^1 = \bar{L}^1 \\ &\stackrel{\bar{P}}{=} \bar{L} = \bar{L}^1 + \bar{F}_{cm} \times \bar{P} \quad \stackrel{\bar{P}}{=} \bar{L} = \bar{L}^1 + \bar{L}_{cm} & \cdot \bar{F}_{cm} \times \sum m_i \bar{v}_i^1 = \bar{F}_{cm} \times \bar{P}^1 = 0 \\ &\quad \cdot (\sum m_i \bar{r}_i^1) \times \bar{v}_{cm} = 0 \end{aligned}$$

\bar{L}_{cm} mi permette di calcolare un eventuale rotazione del C.R. su sé stesso.

Notevole è la somma diretta di questi due vettori. L^1 è il moto del sistema rispetto al C.R. *

II Energia:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_{cm} + \bar{v}_i^1)^2 (\bar{v}_{cm} + \bar{v}_i^1) \\ &= \frac{1}{2} M \bar{v}_{cm}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 \quad \nabla \\ &\stackrel{\star}{=} K = \frac{1}{2} M \bar{v}_{cm}^2 + K^1 \quad (\text{ancora somma diretta}) & \cdot \sum m_i \bar{v}_{cm} \cdot \bar{v}_i^1 = \\ &&= \left(\sum m_i \bar{v}_i^1 \right) \bar{v}_{cm} = \\ &&= \bar{P}^1 \cdot \bar{v}_{cm} = 0 \end{aligned}$$

Uso K in quanto valido per ogni tipo di forza.

Tutto ciò conferma la correttezza della scelta di usare C.R. come sistema di riferimento.

K_{cm} è l'energia di traslazione del C.R., K^1 è l'energia cinetica rispetto ad un riferimento con origine nel baricentro e assi invariabili rispetto al riferimento.

* L^1 : caratteristiche rotazionali; L_{cm} : caratteristiche traslazionali.

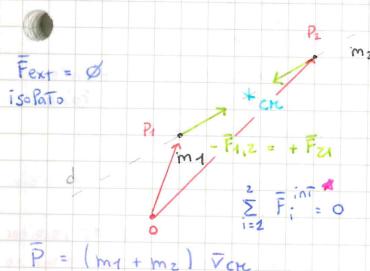
↓ del sistema rispetto a C.R.



Lezione del 30/03

(15)

INTERAZIONI TRA 2 PUNTI m:



$$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

$$*\ddot{v}_1 - \ddot{v}_2 = \frac{d}{dt}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{F}_{12} \Rightarrow \ddot{v}_{rel} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{F}_{12} \quad \text{Forza di interazione tra } m_1 \text{ e } m_2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \ddot{v}_{rel} \approx \frac{1}{m_2} \bar{F}_{12} \quad \text{sse } m_1 \gg m_2 : \text{ la massa ridotta}$$

massa ridotta quasi a coincidere con quella più piccola. Possiamo fare l'esempio su $m_1 = \text{Sole}$

e $m_2 = \text{Terra}$, l'ucc. rel dipende dal corpo di massa più piccola. Questo corpo di

massa ridotta è sotto l'effetto di una forza di interazione \bar{F} rispettivamente presente.

$$\begin{cases} \bar{F} = \bar{OP}_2 - \bar{OP}_1 \\ \bar{F}_{rel} = \frac{m_1 \bar{OP}_1 + m_2 \bar{OP}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\bar{OP}_1 = \bar{r}_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{F}$$

$$\bar{OP}_2 = \bar{r}_{cm} - \frac{m_1}{m_2 + m_1} \bar{F}$$

Abbiamo trovato \bar{OP}_1 e \bar{OP}_2 che sono le leggi orarie rispettivamente

m_1 e m_2 (in funzione del tempo).

Ovviamente \bar{F} è il vettore che va da P_1 a P_2 .

⊕ → cm

$$\begin{cases} m_1 \ddot{v}_1 = \bar{F}_{12} \\ m_2 \ddot{v}_2 = \bar{F}_{21} \end{cases} \Rightarrow \ddot{v}_1 = \frac{d}{dt} \bar{v}_1 = \frac{\bar{F}_{12}}{m_1} \quad \ddot{v}_2 = \frac{d}{dt} \bar{v}_2 = \frac{\bar{F}_{21}}{m_2}$$

$$m_1 \ddot{v}_1 + m_2 \ddot{v}_2 = \emptyset$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2) = \emptyset \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{P} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \text{costante}$$

$$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

$$*\ddot{v}_1 - \ddot{v}_2 = \frac{d}{dt}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{F}_{12} \Rightarrow \ddot{v}_{rel} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \bar{F}_{12}$$

Forza di

interazione

tra m_1 e m_2

massa ridotta quasi a coincidere con quella più piccola. Possiamo fare l'esempio su $m_1 = \text{Sole}$

e $m_2 = \text{Terra}$, l'ucc. rel dipende dal corpo di massa più piccola. Questo corpo di

massa ridotta è sotto l'effetto di una forza di interazione \bar{F} rispettivamente presente.

Aggiungo ora il polo O.

$$\bar{F} = \bar{OP}_2 - \bar{OP}_1$$

$$\bar{OP}_1 = \bar{r}_{cm} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{F}$$

$$\bar{OP}_2 = \bar{r}_{cm} - \frac{m_1}{m_2 + m_1} \bar{F}$$

Abbiamo trovato \bar{OP}_1 e \bar{OP}_2 che sono le leggi orarie rispettivamente

m_1 e m_2 (in funzione del tempo).

Ovviamente \bar{F} è il vettore che va da P_1 a P_2 .

- problema della massa variabile:

$$\frac{dm}{dt} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{d}{dt} \bar{P} = \frac{d}{dt} (m\bar{v}) = m \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \bar{v}$$

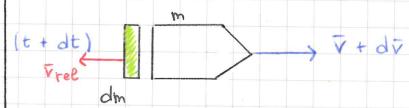
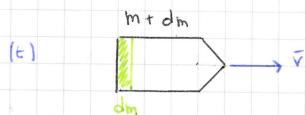
$$\bar{P}(t) \quad \bar{P}(t+dt)$$

$$\bar{P}(t) = (m+dm)\bar{v}$$

$$= m\bar{v} + dm\bar{v}$$

$$\bar{P}(t+dt) = m(\bar{v} + d\bar{v}) +$$

$$+ dm(\bar{v} - \bar{v}_{rel})$$



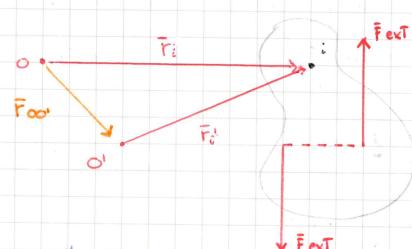
richiede necessariamente
la presenza di una forza
per mantenere \bar{v} .

$d\bar{v}$ è provocato dalla reazione
al distacco di dm (come se
ci fosse un molla in mezzo).

\bar{v}_{rel} = vel della massa dm rispetto al razzo

$$\Rightarrow d\bar{P} = \bar{P}(t+dt) - \bar{P}(t) = m\bar{v} + md\bar{v} + dm\bar{v} - dm\bar{v}_{free} + (-m\bar{v}) - dm\bar{v} =$$

$$= md\bar{v} - \frac{dm}{dt}\bar{v}_{free} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{P}}{dt} = m\ddot{v} + \frac{dm}{dt}(-\bar{v}_{free}) = \bar{F}$$



$$\textcircled{2} \quad \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{M}_{O'}(\bar{F}) + \bar{F}_{int} \times \sum_i^n \bar{F}_i$$

COPPIA stesso modulo ma verso opp.

$$\textcircled{1} \quad \bar{M}_O(\bar{F}) = \sum_i^n \bar{F}_i \times \bar{r}_i \quad \text{che succede se cambia pos da } O \text{ a } O'?$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = ? = \sum_i^n (\bar{F}_{O'i} + \bar{r}_i) \times \bar{r}_i = \sum_i^n \bar{F}_{O'i} \times \bar{r}_i + \sum_i^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \quad \textcircled{2}$$

\(\textcircled{2} \) Analizziamo ora una forza costante lungo un versore.

$$\text{Supponiamo } \bar{F}_i = F_i \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{F} = \sum_i^n \bar{F}_i = \left(\sum_i^n F_i \right) \hat{k}$$

si annulla il II Termine

$$\bar{M}(\bar{F}) = \sum_i^n \bar{F}_i \times \bar{r}_i = \left(\sum_i^n F_i \bar{r}_i \right) \hat{k} = \bar{o}c \times \bar{F} \hat{k} =$$

cercasi un punto c

in modo che $\bar{o}c \times \bar{F}$ è $\perp \bar{M}(\bar{F})$

$$\Rightarrow \bar{o}c = \frac{\sum_i^n F_i \bar{r}_i}{\sum_i^n F_i} \quad \text{(ho diviso per la scrittura); quegli che ho trovato è un centro di forze. Se sostituisco } F_i = mg \text{ trovo: e}$$

centro di massa = baricentro (coincidono in prossimità della sup. Terrestre).

$$\bar{M}(\bar{F}) \perp \hat{k} = \bar{M}(\bar{F}) \perp \bar{F} \text{ per come l'abbiamo definito}$$

Lezione del 9/4 (16)

URTI:

$$\bar{F} = m\ddot{x} = \frac{d\bar{p}}{dt} \Rightarrow d\bar{p} = \bar{F} dt = d\bar{I}$$

\bar{p} è tanto maggiore quanto più grande è τ

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_f - \bar{p}_i = \int \bar{F} dt; \text{ se } \bar{F} \text{ è costante} = \bar{F} \int_{t_i}^{t_f} dt = \bar{F} \tau$$

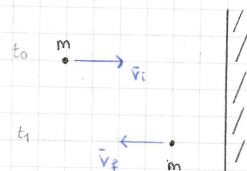
se è molto piccolo
 $\bar{F}\tau$ è trascurabile

Consideriamo ora \bar{F} non costante $\int \bar{F} dt$ per il Teo del valor medio di Lagrange

$$= \bar{F}(\xi) \tau$$

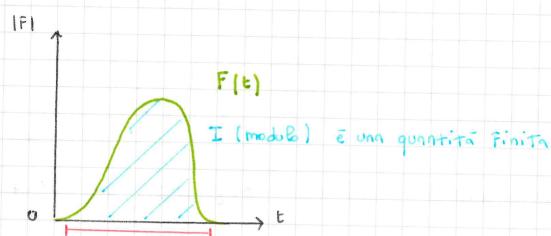
$$\bar{F}(\xi) = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_f} \bar{F} dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \bar{F} dt = \bar{F}(\xi) \tau$$



è avvenuto un urto

Visualizzo nel Tempo e' intensità della Forza:



Sappiamo che $\tau \sim 1\text{ms}$ = intervallo davvero molto piccolo;

$s \sim \bar{v}\tau \sim 0$ in quanto τ molto piccolo. s = spostamento

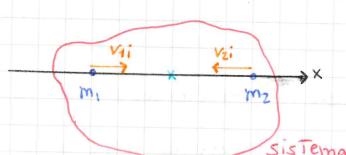
FORZE IMPULSIVE: Sono forze che agiscono in un intervallo di tempo estremamente piccolo;

grazie ad esse posso avere una variazione finita di quantità di moto; per non essere trascurabili.

Tali forze devono essere molto grandi. Sono insomma quelle che devo tenere in considerazione per avere un andamento di questo genere e dunque un I (area sotto la curva) non trascurabile.

Per affrontare un problema complesso in cui agiscono molte forze esterne, cerco

di renderle interne e inserirle in un sistema di punti:



Rendi le forze impulsive INTERNE

pallina da tennis vs racch.

Quando entrano in contatto si deformano entrambi.

$\bar{P}_{tot} = \text{costante}$ se le forze impulsive sono tutte interne!
diff I ordine

Orvintamente possiamo avere così : $m_1 \neq m_2$, direz. \neq di \vec{v} ...

NB: La quantità di moto è VETORIALE \Rightarrow non possiamo guardare gli urti solo dal punto di vista
scopre, potremmo perdere delle informazioni.

$$0 = \bar{F}_{ex} = \frac{d\bar{P}_{cm}}{dt} \Rightarrow \bar{P}_{cm} = \text{costante}, \text{ come abbiamo visto prima.}$$

$$\text{ovvero } \Delta \bar{P}_{tot} = 0 = \bar{P}_{tot}^F - \bar{P}_{tot}^i \Rightarrow \underline{\bar{P}_{tot}^i = \bar{P}_{tot}^F} \text{ rispetto agli urti}$$

$$m_1 \bar{v}_1^i + m_2 \bar{v}_2^i = m_1 \bar{v}_1^F + m_2 \bar{v}_2^F$$

$$\Rightarrow m_1 \bar{v}_1^F - m_1 \bar{v}_1^i = \Delta \bar{p}_1 = \bar{I}_1 \text{ che per ovvie ragioni} = -\Delta \bar{p}_2 = -\bar{I}_2$$

Possiamo avere 3 diversi casi di urti :

I. elastico

II. anelastico + comune

III. completamente anelastico

Nel I l'energia meccanica si conserva perfettamente : $\Delta E = 0$; negli altri due $\Delta E \neq 0$

ma sappiamo che in tutti e 3 $\Delta U = 0 \Rightarrow I: \Delta h = 0; II, III \Delta h \neq 0$

$$\begin{cases} m_1 \bar{v}_1^i + m_2 \bar{v}_2^i = m_1 \bar{v}_1^F + m_2 \bar{v}_2^F & \text{se elastico} \\ \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^{i2} + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^{i2} = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^{F2} + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^{F2} & \end{cases}$$

Incognite: v_1^F, v_2^F

questo problema ci porta alle regole di Cartesio :

$$m_1 (v_1^F - v_1^i) = m_2 (v_2^F - v_2^i)$$

$$m_1 (v_1^{i2} - v_1^{F2}) = m_2 (v_2^{i2} - v_2^{F2})$$

$$\Rightarrow m_1 (v_1^F - v_1^i)(v_1^F + v_1^i) = m_2 (v_2^F - v_2^i)(v_2^F + v_2^i)$$

$$\begin{cases} v_1^F = \frac{(m_1 - m_2)v_1^i + 2(m_2 v_2^i)}{m_1 + m_2} & \text{ci colpisce il fatto che sembrando 2 e 1} \\ v_2^F = \frac{(m_2 - m_1)v_2^i + 2(m_1 v_1^i)}{m_1 + m_2} & \text{passa da un formula all'altra} \end{cases}$$

Regole di Cartesio:

$$V_2^i = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_1^F = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_i \\ V_2^F = 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_i \end{cases}$$

se $m_1 = m_2$ il primo si ferma e il secondo parte con la stessa V del primo

Per quanto riguarda un urto completamente anelastico:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_{CM} + \bar{V}_1' & v_{\text{relativa}} \\ \bar{V}_2 = \bar{V}_{CM} + \bar{V}_2' & \text{rispetto a CM} \end{cases} \quad \begin{matrix} p_i \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2 = m_1 \bar{V}_{CM} + m_1 V_1' + m_2 \bar{V}_{CM} + m_2 V_2' =$$

$$\begin{matrix} 4 \\ \bar{V}_{CM} = \frac{m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2}{m_1 + m_2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2 = m_1 \bar{V}_1 + m_2 \bar{V}_2 + m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

$$\begin{matrix} 6 \\ m_1 \bar{V}_1' + m_2 \bar{V}_2' = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{dopo urto} \\ m_1 \bar{V}_1' + m_2 \bar{V}_2' \\ \bar{P}_1^{ii} + \bar{P}_2^{ii} = \bar{P}_1^{F1} + \bar{P}_2^{F1} \\ \bar{P}_1^{ii} = -\bar{P}_2^{ii} \quad \text{e} \quad \bar{P}_1^{F1} = +\bar{P}_2^{F1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} (\text{guardando le due eq} = 0) \\ \text{sappiamo che} \Delta K \neq 0 \end{matrix}$$

$$\text{posso considerare } \frac{P_1^{F1}}{P_1^{ii}} = e : \text{coefficiente di restituzione} = \frac{P_2^{F1}}{P_2^{ii}}$$

$$\Rightarrow V_1^F = e V_i \quad \text{e più di questo non posso fare.}$$

$$K_F^i = \frac{1}{2} m_1 V_1^{F2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^{F2} = e^2 K_i^i \quad \text{Ripetendo le Teo di Koenig:}$$

$$K_i^i = K_{CM} + K_i^i \quad K_F^i = K_{CM} + K_F^i = K_{CM} + e^2 K_i^i$$

Nell'urto completamente anelastico i 2 corpi restano attaccati

$$\star \bar{V}_1 = \bar{V}_{CM} + \bar{V}_1' \quad \text{guarda dal}$$

punto di vista del CM, libera

\bar{V}_{CM} = vel di trascimento e

\bar{V}_1' è la vel di m_1

rispetto al CM.

$$m_1 V_i + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1 V_i + m_2 V_2}{m_1 + m_2} = \bar{V}_{CM}$$

si sono uniti

$$\cdot \text{ se } e=0 \Rightarrow e^2=0 \Rightarrow K_F^i = 0$$

$$\cdot \text{ se } e=1 \Rightarrow e^2=1 \Rightarrow K_F^i = K_i^i$$

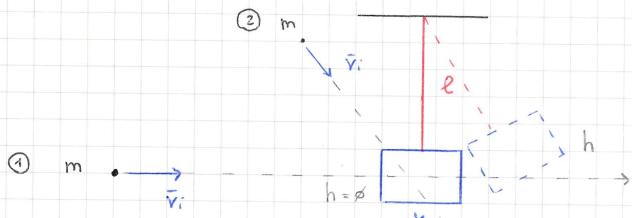
$\left. \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 0 \leq e \leq 1 \end{matrix} \right\}$

Caso ANELASTICO generico

$$\text{allora } K_F^i = e^2 K_i^i \quad \text{è il termine per trattare il caso generico}$$

PENDOLO BALISTICO

Serve a misurare quanto è veloce un proiettile.



$$\text{se realizzassi un sistema completam. anelastico} \quad v = \frac{m_1 v_i}{m + m_2}$$

Una volta avvenuto l'urto, se che valgono tutte le leggi di conservazione

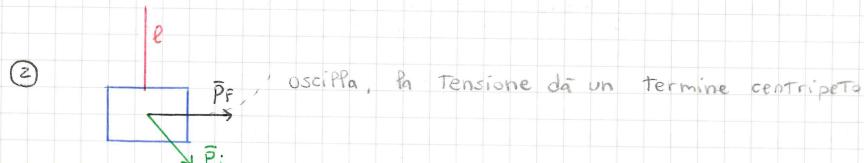
$$K = \frac{1}{2} (m + m_2) v^2 = E \quad \text{perché } U = 0 \quad (\text{B pongo io})$$

$$\text{allora} \quad \Delta E = \frac{1}{2} (m + m_2) v^2 = (m + m_2) gh \quad h = \text{quota finale}$$

Riesco dunque a misurare v , dovrò solo trovare l'altezza.

So anche che, per le precedenti osservazioni, $\bar{\Delta P}_{\text{tot}} = 0$.

Provo ora ad analizzare il caso ②: ora $\bar{\Delta P}_{\text{tot}} \neq 0$



vediamo che c'è un $\Delta P \neq 0$ cioè una forza impulsiva esterna, concludiamo che non è vero che $\Delta P_{\text{tot}} = 0$ sempre!

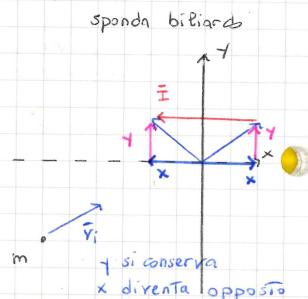
In questo caso la forza impulsiva è data dal vincolo e.

Vediamo che $\Delta P_{\text{tot}}^x = 0$

$$\frac{\Delta P_{\text{tot}}^y \neq 0 \Rightarrow \text{c'è } \bar{I}_y}{\Delta P_{\text{tot}} \neq 0!}$$

Nel caso del biliardo: $\Delta P_x = 0$ e $\Delta P_y \neq 0$

Il moto si conserva in una sola direzione: y



Lezione del 13/04

(17)

OSCILLATORE ARMONICO:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{e si puo' scrivere come} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

e supponiamo che $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ è soluzione particolare;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad x(t+T) = A \sin[\omega(t+T) + \phi] = A \sin(\omega t + \phi + 2\pi).$$

Abbiamo lo stesso termine di fine $+ 2\pi$ \Rightarrow confermato che T è il periodo.

$$\alpha x(t) = y \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \alpha \ddot{x} + \alpha \omega^2 x = \alpha (\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$$

dove α è una costante.

$$(x_1(t)) \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$(x_2(t)) \quad \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega^2(x_1 + x_2) =$$

$$(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1) + (\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2) = 0$$

$$\text{Allora in generale: } x(t) = \alpha x_1(t) + b x_2(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{a \sin \omega t}_{\text{che è equivalente}} + \underbrace{b \cos \omega t}$$

che è equivalente a $x(t) = \underbrace{A \sin(\omega t + \phi)}_{\text{ha sempre 2 condizioni da conoscere}}$

$$= A \sin \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \sin \phi \quad \Rightarrow \quad a = A \cos \phi \quad \text{e} \quad b = A \sin \phi$$

Ipotizziamo ora di avere $\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = f_1 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = f_2 \end{cases}$, f_1 e f_2 per linearità possono essere combinanti tra loro. Sono

2 costanti.

Guardiamo ora le forze elastiche:

$$F = -kx \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2} kx^2 \quad \text{conserv.} \quad E = U + K \quad K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{A^2}{m} \frac{k}{m} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m A^2$$

Vediamo che E è legata nell'ampiezza al quadrato. Quanto vale E media nel tempo?

Passo definire una funzione media $\bar{F} = \frac{1}{x_B - x_A} \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx = \bar{x} = ?$ su un

$$\text{periodo} \quad \text{dove calcolare} \quad \bar{x} = \frac{1}{T} \int_T^T x(t) dt = 0$$

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ -A \\ | \\ 0 \\ | \\ A \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ x \\ | \\ \geq x \end{array} \quad \text{anche} \quad \bar{x} = 0$$

Sappiamo che U è in relazione con $\sin^2 \theta$ e KC con $\cos^2 \theta$; sappiamo che non saranno negative, non si annulleranno.

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{T} \int_T^{E/2} U dt + \frac{1}{T} \int_T^{E/2} KC dt = E = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} \left[= \frac{1}{T} \int_T^{E/2} (U + KC) dt = \frac{E}{T} \int_T^{E/2} dt = E \right]$$

U e KC cambiano nel tempo ma le loro valori medi avrà sempre un valore ben preciso = PROPRIETÀ IMPORTANTE.

Supponiamo di avere due oscillatori sullo stesso asse e con pulsazione uguali

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad i = 1, 2 \Rightarrow \ddot{x}_i + \omega^2 x_i = 0$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

somma: $x(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$ (perchè anche x deve essere soluzione $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ (l'ho dimostrato prima che posso scrivere così))

$$\begin{aligned} [A \sin \omega t \cos \phi] &= [A \cos \phi] \sin \omega t + A (\sin \phi) \cos \omega t = (A_1 \cos \phi_1) \sin \omega t + \dots \\ &+ (A_2 \cos \phi_2) \sin \omega t + \dots \text{ e deve valere } \forall t \end{aligned}$$

$$A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad \& \quad A \sin \phi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2$$

da cui:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta \phi} \quad \& \quad \tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

e le metto a sistema.

$$\text{se } \Delta \phi = 0 + 2\pi n \quad A = A_1 + A_2$$

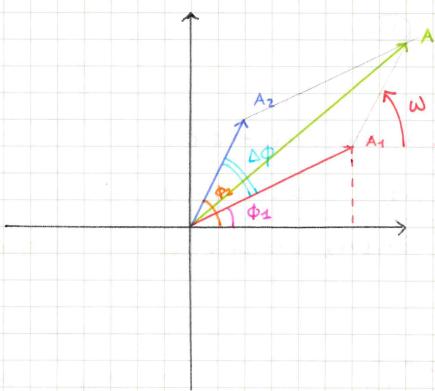
$$\text{se } \Delta \phi = \pi + 2\pi n \Rightarrow A = A_2 - A_1$$

$$\text{se } \Delta \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Il risultato non è scorretto.

Possiamo notare che A ricorda Carnot.

Vediamo ora le cose sotto una luce diversa: come somma di vettori in un piano.



Così succede se ho $x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ e $x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$?

I calcoli saranno più complicati ma le proprie. finiranno restano.

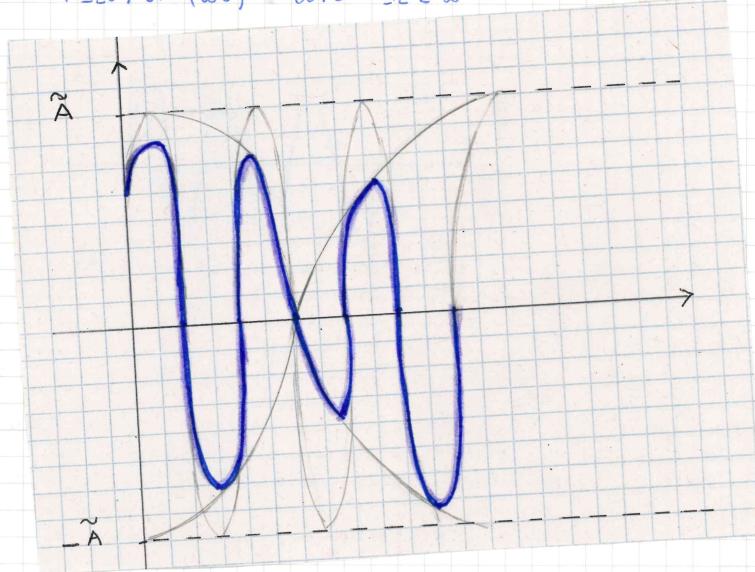
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\phi_2 - \phi_1)]} \quad \text{è corretta per } \omega_1 = \omega_2 !$$

Consideriamo un caso più semplice: $x_1 = \tilde{A} \sin \omega_1 t$ e $x_2 = \tilde{A} \sin \omega_2 t$ $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$\star \quad A = \sqrt{2\tilde{A}^2 (1 + \cos \Delta \omega t)} = \tilde{A} \sqrt{2(1 + \cos \Delta \omega t)}$$

$$x(t) = x_1 + x_2 = \tilde{A} (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = \tilde{A} \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

$$= \tilde{A} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad \text{dove } \omega < \omega$$



$$\star \text{ deriva da } \sqrt{\tilde{A}^2 + \tilde{A}^2 + 2\tilde{A}\tilde{A} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t]}$$

Lezione del 15/04 (18)

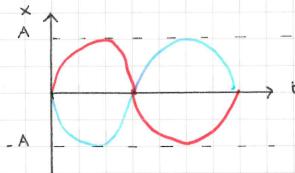
OSCILLATORE ARMONICO:

$$\text{Avevamo trovato } x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$\text{e } A_{\text{TOT}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta \phi} \text{ si gioca su questo}$$

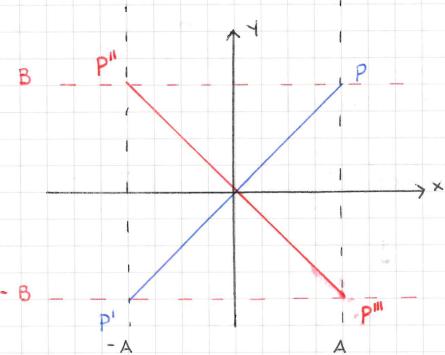
$$\text{se } A_1 = A_2$$



$$A_{\text{TOT}} = A_1 + A_2 = 0$$

si sottraggono punto per punto

Supponiamo ora: $x(t) = A \sin \omega t$ e $y(t) = B \sin(\omega t + \phi)$:



$\phi = 0$ in fase

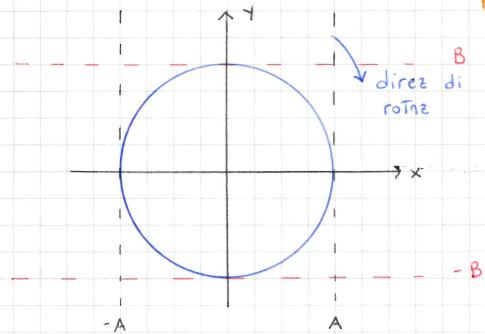
$\phi = \pi$ opposiz. di fase

$$\begin{cases} x(t) = A \sin \omega t \\ y(t) = B \sin \omega t \end{cases} \quad \frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow y = \frac{B}{A} x \quad \text{Ho fatto il rapporto}$$

$$\begin{cases} x(t) = A \sin \omega t \\ y(t) = -B \sin \omega t \end{cases} \quad \frac{y}{x} = -\frac{B}{A} \Rightarrow y = -\frac{B}{A} x \quad \phi = \pi$$

Questi che antizitano sono oscillatori armonici meccanici, puoi ad esempio rappresentare anche una polarizzazione lineare. Oppure l'oscillazione di una massa attaccata ad una molla.

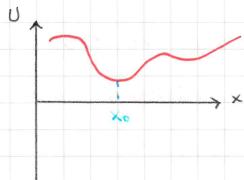
Voglio ora che siamo in quadratura: quando uno sta nel punto di inversione del moto, l'altro sta in posiz. di equilibrio



$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

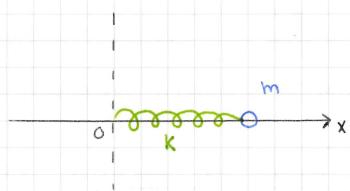
$$\begin{cases} x(t) = A \sin \omega t & \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1 \\ y(t) = B \cos \omega t \end{cases} \text{ ellisse (che qua è un cfr)}$$

$$\text{Energia elastica} = -Kx \rightarrow \frac{1}{2} K \Delta x^2 \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



gli intorni delle posizioni di equilibrio
possono essere approssimate ad un moto
armonico (come già abbiamo visto).

Oscillazione meccanica:



per semplificare

$$-Kx = m\ddot{x} \text{ introduciamo ora l'attrito } -b\dot{x} - Kx = 0, \text{ quelb viscoso}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad \text{chiamiamo } \frac{K}{m} = \omega_0^2 \quad \text{e } \frac{b}{m} = 2\zeta$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mi aspetto che si fermi causa attrito, è destinato a morire. } x \sim e^{xt}, \dot{x} = x e^{xt}, \ddot{x} = x^2 e^{xt}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\zeta\alpha + \omega_0^2 = 0; \text{ risolvendo in } \alpha = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \omega_0^2}$$

posso togliere
è esponenziale
perché è ovunque

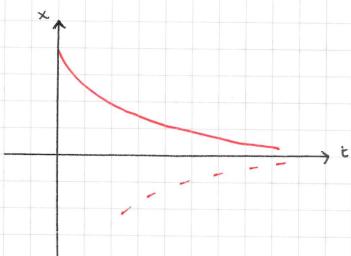
causa attrito
viscoso

Ho scelto $x \sim e^{xt}$ come sol particolare perché mi aspetto un decadimento esponenziale.

notiamo che c'è un discriminante: $\delta^2 - \omega_0^2$, può essere nullo o negativo;

- $\delta > \omega_0$ smorzamento forte
- $\delta = \omega_0$ smorzamento critico
- $\delta < \omega_0$ smorzamento debole

$x \sim e^{\alpha t} \sim e^{-\delta t}$ perché α è la somma di 2 termini = il prodotto di esponenti.



mi dice che deve necessariamente morire.

* La prima parte basta per studiare questo decadimento

se il moto è smorzato forte avremo una soluzione del tipo

$A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$ non ci sono oscillazioni (no sin/cos)

vediamo che non oscillatori mai, si fermerà subito.

Se analizziamo il moto smorzato debole:

$$\alpha = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{sappiamo che } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

vediamo che $\theta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Chiamiamo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 1$ $\alpha = -\delta + i\omega$

dunque $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, dunque la soluz vna come $\cos\omega t$, e vedo che sta oscillando.

Ha perso la pulsazione propria.

[con l'attrito radente era lineare e non exp].

$$m\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F \sin\omega t \quad \text{termine di forza periodica } \omega \neq \omega_0$$

La soluzione $x(t) \sim A \sin(\omega t + \phi)$ è quella generale.

Si trova che $\tan\phi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ se $\omega = \omega_0$ allora $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ovvero va in quadratura

$$A = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

se va in quadratura ($\omega = \omega_0$) ho θ/A max.

Energicamente ci sono condizioni migliori e peggiori.

CORPO RIGIDO:

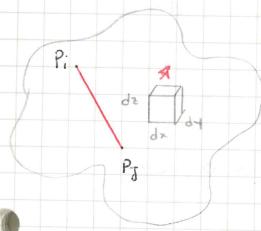
Per corpo rigido intendiamo:
(Per def. può essere 1 vero in base anche alle deformazioni)



B definisce corpo rigido se comunque scelti P_i e P_j , la loro distanza r_{ij} resta costante.

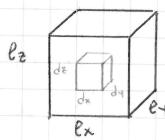
Un corpo che sembra rigido sotto certe condizioni può non esserlo sotto altre.

Per il nostro modello impongo dunque la condizione $r_{ij} = \text{costante}$.



Riesco a fare il passaggio $\sum^n (...) \rightarrow \int \dots ?$

CUBO



materiale: w (tungsteno)

posso calcolare V e M

$$\rho := \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V \quad \rho = \text{densità}$$

Il cubo piccolo (infinit.) ha $dm = \rho(w) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ e posso integrarlo.
massa inf. \sim punto materiale

posso considerare questi volumetti come punti materiali (per usare tutte le proprietà trovate fin'ora) ma che conservi le proprietà macroscopiche dell'oggetto, come la densità del materiale?

Gli elementi infinitesimi che considero sono abbastanza piccoli che effettivamente possono essere considerati punti materiali.

La densità potrebbe non essere costante: $\rho(x, y, z, t)$ nella sua massima generalità (non vedremo mai la dipendenza dal tempo).

Stiamo parlando tutta la fisica visto fin'ora ai corpi estesi.

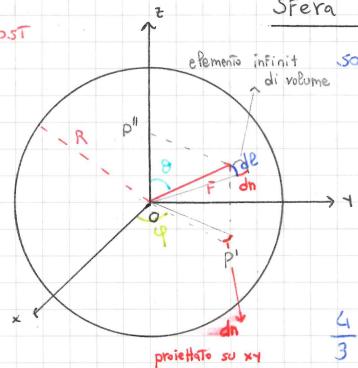
Se magari prendemmo un disco, il cui spessore è trascurabile rispetto alle altre 2 dim, ha $\frac{dM}{ds} = \sigma(x, y)$.

Stesso discorso per una barra sottile: $\frac{dM}{dl} = \lambda(x) \frac{l}{L}$ sbarra sottile

* è una porzione del nostro corpo rigido e posso assimilarla ad un punto materiale te dalle somme possiamo integrare.

Abbiamo capito che ci scontreremo con $\iiint f(x,y,z) dx dy dz$ ovvero un meraviglioso integrale triplo. Voglio renderlo se più semplice possibile = sfrutto la SIMMETRIA.

$$g = \text{cost}$$



Sfera di massa omogenea:

$$\text{so che } g = \frac{\mu}{V} \text{ e } V = \frac{4}{3} \pi R^3 ;$$

$$\text{considero un infinitesimo } g = \frac{d\mu}{dV}$$

$$\mu = \int_{\text{corp}} d\mu = \int_V g dV$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \int dV = \int_x \int_y \int_z dx dy dz$$

Usando quest'ultimo integrale triplo mi complicherei la vita, perché non sfrutto la simmetria ai bordi. Voglio integrare 3 variabili dove non ci sia un mix di queste quantità.

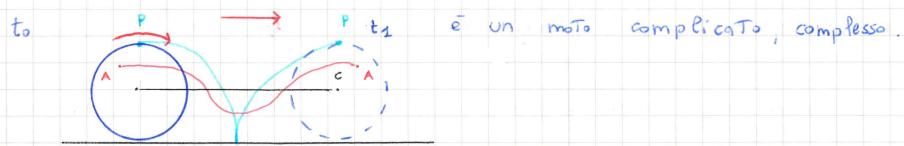
$d\ell = r d\theta$: ho costruito un arco di un cerchio spostando r di un $d\theta$. [Usa coord. sferiche]

$dn = (r \sin \theta) d\varphi$: stesso ragionamento di sopra, ma proiettando r su xy

$$\Rightarrow \iiint dr d\ell dn = \iiint_{\text{corp}} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3} \frac{R^3}{3} 2 = \frac{4}{3} \pi R^3 !$$

Variab. indipendenti

Un corpo rigido, se si muove, può essere soggetto ad una rototraslazione



vediamo le traiettorie di 3 punti C, A, P ; C (sopra lui) si muove di moto rett. uniforme. Notiamo che il punto O è un punto di inversione del moto (mentre A non ce l'ha).

Supponiamo un corpo che trasci soltanto:

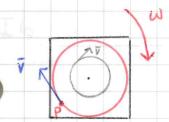


$$\bar{v}_{ch} = \bar{v}_P \text{ per come ho impostato il tutto}$$

La distanza tra P e C NON CAMBIA

$$\Rightarrow \bar{F}_E = \frac{d\bar{P}}{dt} \quad \text{I coordinate} \left(= \bar{v}_{ch} = \mu \frac{d\bar{v}}{dt} \right)$$

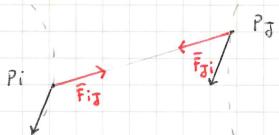
Consideriamo invece una rotazione :



$$\bar{F}_E = \frac{d\bar{L}}{dt} \quad \text{II cardinale}$$

Dato questo esempio, le due \bar{v} sono \neq ma $\bar{\omega}$ è uguale per entrambi ;

Da un precedente analisi, $\omega_i \neq 0$, il lavoro delle Forze interne non si può annullare. Però, se amplifichiamo il caso particolare di corpo rigido :

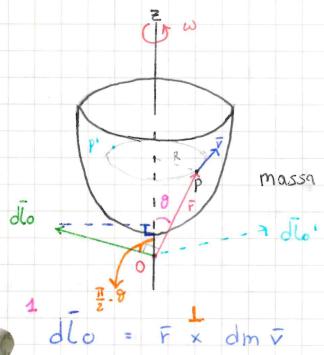


nel corpo rigido $|r_{ij}| = \text{cost}$; in virtù di ciò, se P_i ha una direzione, P_j deve seguirlo per forza \Rightarrow stessa proiezione sulla Traiettoria.

Lavoro Forze interne

Concludiamo dunque che ω_i di un corpo rigido è = 0.

Proviamo ad ampliare alcune proprietà :



massa di $P : dm$

il corpo ruota attorno al proprio asse fisso di rotazione
considero un pb 0 (a caso).

Ragioniamo sul momento angolare :

$$1 \quad \text{ho preso il modulo e l'ho proiettato} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ z \end{matrix} \quad \text{componente di } dL \text{ su } z$$

$$2 \quad dL = F \times dm \bar{v} \quad \Rightarrow \quad dL = (dm) r v \quad \Rightarrow \quad dL|_z = dm r v \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$3 \quad dL \perp F$$

La direzione di dL non è assolutamente \parallel a $\bar{\omega}$ \Rightarrow se non c'è parallelismo, non posso sperare che su un corpo generico in rotazione il momento angolare complessivo sia \parallel ad $\bar{\omega}$.

Guardando questo disegno e sapendo che per il momento angolare complessivo devo integrare, affinché il \bar{L} complessivo sia \parallel $\bar{\omega}$, $\forall dm$ che scelgo ho trovo un altro dinamicamente opposto \Rightarrow si elidono $\neq dm$ è valido sse il corpo È SIMMETRICO rispetto all'proprio asse di rotazione! Non è valido in generale dunque. Cerco dunque di rinunciare alle info repetitive a $\bar{\omega}$ in favore della sua proiezione lungo z : $5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \Rightarrow dL|_z = dm R v$ perché $R = r \sin\theta$

\Rightarrow non ho più dipendenza dalla scelta del pb 0; altrettanto $v = R\omega \Rightarrow dL|_z = dm R^2 \omega$.

NB: Tutto questo ragionamento finito è valido sse il corpo è generico (su quelli simmetrici abbiamo ragionato prima).

Stiamo vedendo che la somma di tutti i momenti ne dà uno che punta a caso \Rightarrow fondamentale per la II cardinale

Sappiamo che $dp = dm v$, nell'analisi del corpo rigido; il suo equivalente è $dl \omega_z = dm R^2 \omega$; $dm R^2$ viene chiamato momento di inerzia d'I

$$\Rightarrow I = \int dm R^2 = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz R^2(x, y, z)$$

$$\Rightarrow I_0|_z = I_z \bar{\omega} : \text{momento angolare complessivo proiettato lungo } z.$$

Notiamo che R pesa al quadrato \Rightarrow se siamo molto vicini all'asse di rotaz, non conta.

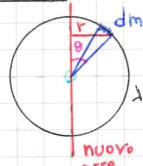
Se il corpo è simmetrico $\Rightarrow I_0 = I_z \bar{\omega}$ $\bar{\omega}$ asse di simmetria

Teorema del momento assiale: $I_0|_z = I_z \bar{\omega}$

è valido \forall corpo, simmetrico o meno. Bisogna però sapere come è distribuita la massa! è questo che "paghiamo"

Analizziamo dei casi semplici:

anello:



$$I = \int_{\text{corpo}} dm R^2 = R^2 M \quad R \text{ è costante in questo caso}$$

ma è valido sse l'asse di rotaz. è il centro.

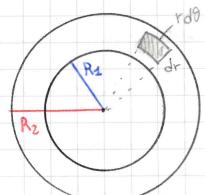
$$\text{cambiando l'asse di rotazione: } I = \int_{\text{corpo}} dm r^2$$

$$\text{vedo che } r = R \sin \theta = \int R^2 \sin^2 \theta \lambda R d\theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \\ \Rightarrow I = \pi \lambda R^3 \quad \text{ma } M = \lambda 2\pi R \quad \text{così } I = \frac{1}{2} M R^2 \quad \lambda = \text{densità lineare} \\ \lambda = \frac{dm}{dl} \quad dl = d\theta \cdot R$$

notiamo che I è la metà di prima \Rightarrow se un anello ruota per il centro, tutte le masse sono equidistanti dall'asse di rotaz.; se invece ruota per l'asse verticale, alcune hanno v. minima sopra e hanno momento nullo \Rightarrow devo considerare tutti i contributi sommati tra loro.

anello spesso:

$$dm = \sigma dr r d\theta$$



$$I = \int_S dm r^2 = \iint \sigma dr r d\theta r^2$$

$$I = \sigma \int_{R1}^{R2} \int_0^{2\pi} dr d\theta r^3 = 2\pi \sigma \frac{r^4}{4} \Big|_{R1}^{R2}$$

asse di rotazione al centro

$$I = \frac{\pi}{2} \sigma (R_2^4 - R_1^4) \rightarrow (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) \quad \text{ma posso vedere che}$$

πR_2^2 è l'aria di tutto il disco pieno, se quindi sottraggo $\pi R_1^2 \Rightarrow$ area di cui che sto considerando

(ovvero la corona circolare) $\Rightarrow I = \frac{1}{2} K (R_1^2 + R_2^2)$

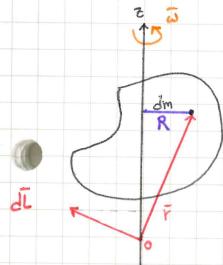
se $R_2 = 0$ abbiamo un disco, in cui $I = \frac{1}{2} K R^2$.

Ora non ci resta che studiare la cinematica e la dinamica di questi corpi.

Lezione del 3/05

②

MOMENTO DI INERZIA:

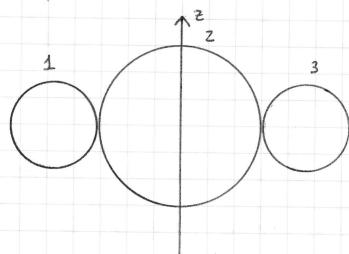


In generale \bar{I} non è $\parallel \bar{\omega}$: ma se consideriamo la proiezione $\bar{I}_z = I_z \bar{\omega}$ (Teorema del momento assiale). In qualche modo \bar{I} fa le veci della quantità di moto, dunque I fa le veci di m : $I_z = \int_{\text{corpo}} dm R^2 = \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz (x^2 + y^2)$; $I = [kg][m]^2$ perché l'asse di rot. è z *

Come abbiamo visto nei due esempi di ieri, nella maggioranza, $I = K m R^2$.

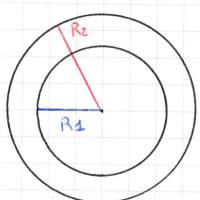
Il momento di inerzia è definito da un integrale: somma i vari elementi mediante l'integrale ($\int dm$).

Anche in questo corpo deve valere l'additività, data dalla somma di 3 integrali.



Vediamo che in 1 e 3 c'è un'asse di rotazione esterno al punto "mettere insieme le parti" per studiare il corpo nella sua interezza.

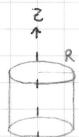
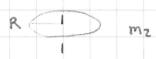
In questo abbiamo visto che $I_z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$
ma se $R_1 = 0 \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} m R_2^2$.



momento d'inerzia
di un disco pieno

* $R = \sqrt{dm} \parallel z$; proiettando R ,

(tramite una semplice traslazione) su xy , applico pitagora per trovarlo: $R^2 = x^2 + y^2$.



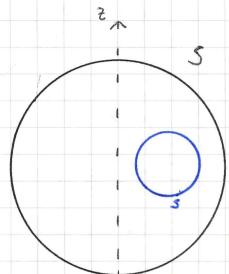
$$I_{\text{TOT}} = I_1 + I_2 = m_1 R^2 + m_2 R^2 = \\ = R^2 (m_1 + m_2) = K R^2.$$

Se considerassi una serie di anelli otterrei un cilindro cavo $I = K R^2$;

se invece il cilindro fosse pieno $I = \frac{1}{2} K R^2$, questo A PARITÀ DI MASSA totale dei 2 cilindri.

Moralmente: un corpo complesso lo posso vedere scomposto in parti più semplici.

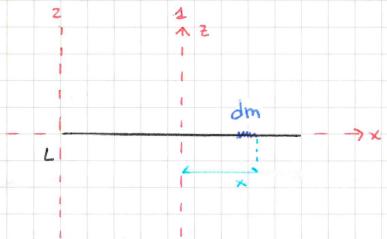
Prendiamo una sfera con un pezzo mancante:



$$I_S|_z = I_s|_z + I?|_z$$

e posso dunque trovare $I?|_z$.

Supponiamo di prendere una sbarra sottile:



$$1 \quad I_{\text{cm}} = 2 \int_0^{L/2} dm x^2 = 2 \int_0^{L/2} \lambda x^2 dx = \\ = 2 \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L/2} = \frac{2}{3} \lambda \frac{L^3}{8} = \frac{1}{12} m L^2$$

perché $\lambda L = m$; $\lambda = \frac{dm}{dx}$.

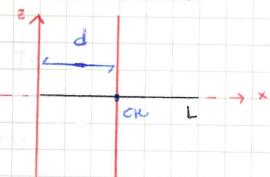
2 Se ora l'asse di rotazione fosse sul bordo su che I sarà maggior, perché ci è più massa distante da esso:

$$I_z = \int_0^L dm x^2 = \int_0^L \lambda x^2 dx = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \\ = \frac{1}{3} m L^2; \text{ da cui } K = \frac{1}{12}, \text{ diventando } K = \frac{1}{3} = \text{ molto maggiore!}$$

Vedo che ogni volta che cambio l'asse devo rifare il calcolo.

NB: se prendo l'asse di rot. sul cerchio ho un asse "banale", ma se ne prendo un altro, l'adesso, ora che compie un traiettoria: quando non lo tengo fisso, uno deve in qualche modo "aggiungersi" (vedi I' nella pagina dopo).

TEOREMA DI H-S:



(Huygens - Steiner)

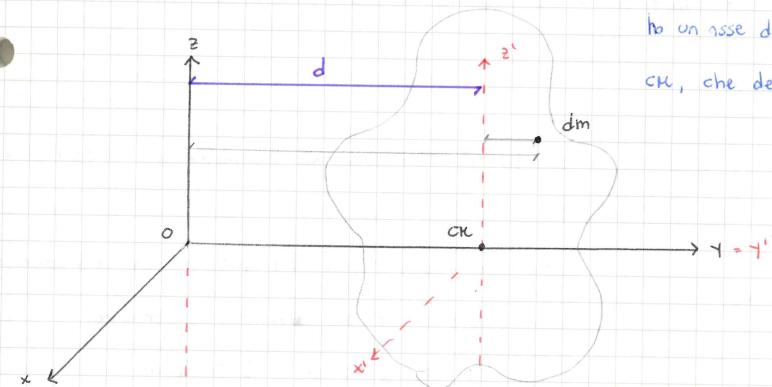
Vediamo che se consideriamo quest'asse, il CM descrive una traiettoria.

$$I_z = I_{CM} + m d^2 : \text{dove dimostrarlo.}$$

dove I' è il momento con l'asse passante per il centro. $\star I' = KmR^2$

$$\frac{1}{12}mL^2 + m \frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}mL^2 \Rightarrow \text{la prec. relazione è valida,}$$

dove in questo caso $d = \frac{L}{2}$, ma potevo prenderlo ovunque, ora l'ha preso così per ricondurmi al caso di prima. Dimostriamolo:



Ho un asse di rotazione su z' , passante per CM, che devo comparare con uno su z .

coord di dm :

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + d \\ z = z' \end{cases}$$

Dobbiamo costruire il momento di inerzia:

$$\begin{aligned} ^1dI_z &= dm(x^2 + y^2) = dm[x'^2 + (y' + d)^2] = \star \\ ^2dI'_z &= dm(x'^2 + y'^2) \end{aligned}$$

$$\star = dm(x'^2 + y'^2 + d^2 + 2dy') \Rightarrow dI_z = dI'_z + dm(d^2) + 2dm(dy')$$

procediamo ad integrare: $I_z = I'_z + md^2 + \left[\int (dm)y' \right] 2d$

e questo è il risultato che volevamo!

Riesco dunque a calcolare I di ogni corpo esteso e tubolare.

è una media pesata da integr. su tutto il corpo, ma $y'(CM) = 0$ per come abbiamo impostato il sistema.

\star dunque ora CM fa le veci di un "qualsiasi" punto materiale a una certa distanza d dall'asse di rotazione z .

Io so che vale $\bar{L}_z = I_z \bar{\omega}$ e suppongo di conservare I_z .

Possi ora considerare la II cardinale proiettata su z:

$$\bar{F}_z = \frac{d\bar{L}_z}{dt} \Rightarrow \text{se } \bar{F}_z = 0, \bar{L}_z \text{ si deve conservare:}$$

$\omega = 0$ oppure $\omega = \text{costante}$

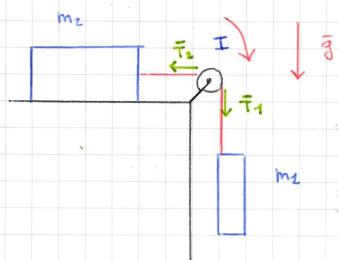
se è così $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$.

Ora, se $\bar{F}_z \neq 0$, obr \bar{L}_z può variare $\Rightarrow \frac{d\bar{L}_z}{dt} = I_z \alpha$
(che è l'equivalente di $\bar{F} = m\bar{a}$);

$$\text{se } \alpha = \text{costante} \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0.$$

Possono avere variazioni nel modulo di ω lungo l'asse di rotazione.

Vediamo come funziona:



so che la carriola mi permette di definire
la forza.

Una carriola reale ha un masso, ed avendo
incernierata al suo che non si muove.

$$\text{Passa per la II card: } \bar{L} = I \bar{\omega}$$

Supponiamo che la carriola stia ruotando e che la fune non stia slittando (se

lo facesse non ci sarebbe alcuna relazione particolare con le masse).

All'inizio è in quiete: $\omega_0 = 0$, poi ci sarà un momento K .

Affinché $K \neq 0 \Rightarrow |T_2| \neq |T_1|$ (molto diverso da ciò che abbiamo visto finora).

Come lo risolvo? Diagramma di corpo libero:



$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

NB: con $K=0$ la carriola non potrebbe ruotare, ho bisogno di un momento.

$$\text{da II cardinale: } \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{I \bar{\omega}}{dt} \Rightarrow K = I \alpha \text{ dove } K = \sum \text{M}$$



$$\bar{T}_2 = m_2 a_2$$



$$T_2 R - T_1 R = I \alpha$$

momento assiale

(non considero \bar{P} ed \bar{N})

ω non è costante

$R = \text{raggio carriola}$

$$\text{Allora } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\alpha}{R}$$

α e ω sono in relazione non
c'è slittamento della corda

$$\Rightarrow (T_1 - T_2)R^2 = I\alpha \quad \Rightarrow \quad I\alpha = R^2(m_1g - m_2a - m_2\omega)$$

$$\Rightarrow m_1gR^2 - (m_1 + m_2)\alpha R^2 = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{m_2g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}}$$

Vediamo che se $I = 0$ troviamo il risultato ricavato precedentemente in dinamica. Vedo che faccio necessariamente uso del Teo assiale.

Lezione del 4/10/3 (21)

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO:

Occupiamoci ora dell'energia:

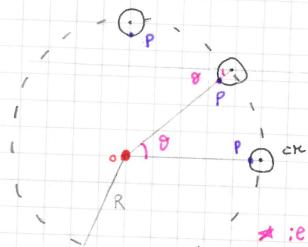
$$K = \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + K' \quad (\text{da Koenig}) = \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_iV_i^2 \quad \begin{matrix} \text{risp al sist. di rif del CM} \\ \text{Termine di rotaz attorno al CM} \\ \uparrow \\ \text{in un sistema} \\ \text{di punti mobili} \end{matrix}$$

$$m_iV_i = r_i\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2 \quad \text{quando considero un corpo}$$

$$\text{esteso il II termine diventa } \frac{1}{2} \int_{\text{corpo}} dm r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

è un sist. continuo,
la sommatoria diventa
integrale = sommatoria
delle masse infinitesime.

$$\text{così } K = \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 !$$



→ il CM sta ruotando e P ruota attorno ad esso (cioè il termine K' dovuta a P).

* se disco si è spostato di θ in un tempo t , B stesso ha fatto P risp. a CM

Però so che vale anche il Teo di HS = devo poter riscrivere le cose in un altro modo. Se P ruota a velocità ω , anche O farà lo stesso. Allora $V_{CM}^2 = (WR)^2$ dunque $\frac{1}{2}(mR^2)\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ = vedo che c'è accordo con il Teo di HS.

$$\text{Allora } K = \frac{1}{2}I_z\omega^2 \quad \text{dove } I_z = I_{CM} + md^2$$

passante x il CM.)

K' = energia cinetica rispetto al CM (energia di rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione ↑)

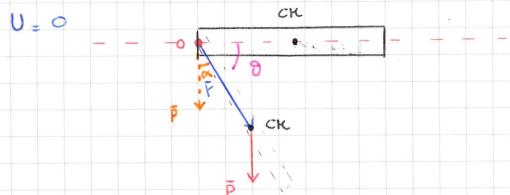
Analizziamo ora l'energia potenziale:

$$dU = dm g z \Rightarrow U = \int_{\text{corpo}} dm g z = m \bar{z} c_m g$$

Vediamo una bacchetta di lunghezza L , incernierata ad un polo O , senza attriti:

? = α , ω , $\phi(\theta)$ dove $\phi(\theta)$ è la renz. vincolare in funzione dell'angolo θ .

$\downarrow \bar{g}$ sotto posta al campo gravitaz.



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}^E = m \bar{a}_{cm} = m \bar{g} + \bar{\phi} \\ \bar{K}_z^E = I_z \bar{\alpha} \end{array} \right. \quad \text{dove } \bar{\phi} \text{ è la forza di reazione al vincolo;} \\ \text{so che } I_z = \frac{1}{3} mL^2$$

Possiamo vedere che il momento di ϕ è 0, perché $\bar{r} = \bar{F} \times \bar{F}$, ma F è 0 perché l'asta è attaccata al polo. Dunque abbiamo solo il momento dato da \bar{P} . $\bar{F} \times \bar{F} = r F \sin \alpha =$ metto \bar{P} e F con contro coda e trovo $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\bar{r}(P) = \frac{L}{2} mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{3} mL^2 \alpha \quad \text{vediamo che } m \text{ scompare ed}$$

$$\text{è naturale; } \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \frac{\cos \theta}{L} g. \quad \text{se } \theta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L} (\text{è max})$$

Notiamo che se lo sbarramento è infinitamente grande $L \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$.

Poi, ovviamente, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$.

Faccio un'analisi sul cm

$$\bar{E} = 0 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 - \frac{L}{2} \sin \theta mg = \frac{1}{3} mL^2 \omega^2 - L \sin \theta mg$$

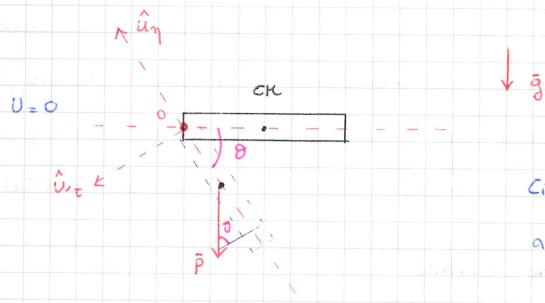
è tutto conservato

$$\omega^2 = \frac{3}{L} g \sin \theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{L} g \sin \theta}$$

$$\text{se } \theta = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$$\text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{L} g} \quad (\text{è max})$$

Consideriamo ora un esempio esatto:



Ci concentriamo su ciò che succede
a CR per la I cardinale.

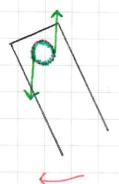
ovvero tutto il corpo è un
unico punto materiale

$$\begin{cases} -mg \sin\theta + \phi_n = m a_c = m \omega^2 \frac{L}{2} = R \\ mg \cos\theta + \phi_t = m a_T = m \frac{L}{2} \alpha \end{cases}$$

Note che abbiamo bisogno di
un Termine centripeto ed uno
Tangenziale.

Possiamo allora calcolare $\bar{\phi}$

Consideriamo ora la Forza di attrito:



nella II cardinale devo tener conto di un momento rispetto!

→ Coppia di Forze: dà un momento ma non una traslazione.

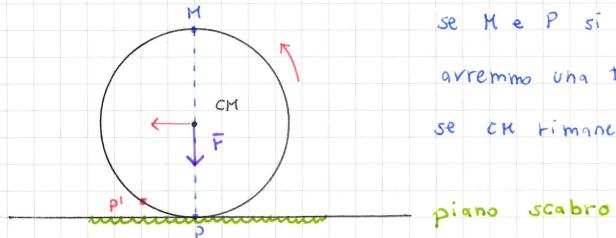
Per il Teorema delle Forze riceve: $d\omega = d\kappa = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} I_z 2\omega d\omega = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = \\ &= M_z d\theta. \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Così ho trovato che $\omega = \int d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z d\theta$!

$$A \quad \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right) = \frac{1}{2} I_z 2\omega \Rightarrow d \left(\frac{1}{2} I_z \omega^2 \right) = I_z \omega d\omega$$

MOTO PURO ROTOLAMENTO:

se M e P si muovessero nello stesso v di CM,
avremmo una traslazione = trascinamento;
se CM rimanesse fermo, avremmo solo una rotazione;

piano scabro

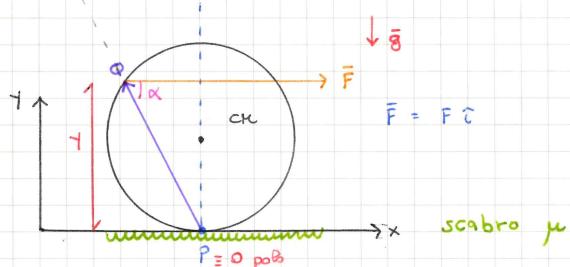
sperimentalmente, un punto P può trovarsi istantaneamente fermo; la ruota ha delle proprietà notevolissime: se rota senza strisciare allora possiamo concludere che $\bar{v}_P = 0$; dopo un po' anche P' godrà della stessa condizione = il punto di appoggio ha velocità nulla, e sperimentalmente lo osserviamo.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{CM} + \bar{v}' = \text{vel di trasc. + vel relativa con centro di rif CM.}$$

$$\bar{v}' = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_{CM} + \bar{\omega} \times \bar{r} = 0 \star$$

trovo dunque che $\bar{v}_{CM} = -\bar{\omega} \times \bar{r}$, condizione fondamentale per avere rotolamento senza strisciamento.

$$\bar{a}_{CM} = \frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = -\bar{\alpha} \times \bar{r}$$



potremmo usare la ruota per trasportare o trascinare qualcosa.

ho rotazione e traslazione = userò le I e II coordinate.

$$\bar{F} + \bar{\Phi} + m\bar{g} = m\bar{a}_{CM} \quad \text{I card}$$

dove Φ è la reazione vincolare \perp al piano, comprende anche la forza di attrito.

Fisso un polo in O per far rimanere solo \bar{F} come forza avente
braccio non nPB: *

$$\bar{PQ} \times \bar{F} = I_p \alpha \quad \text{II card}$$

$$\text{dove } I_p = \frac{1}{2} KR^2 + KR^2 \text{ da HS} = \frac{3}{2} KR^2$$

le 2 equazioni che abbiamo scritto rappresentano il mio sistema.

Quest'ultima posso anche scrivere PA come:

$$F\gamma = \frac{3}{2} m R^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \gamma \frac{F}{m R^2}$$

$$\downarrow \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \text{ mettendoli coda coda}$$

perché $\bar{QP} \times \bar{F} = QP F \sin \alpha$, ma $QP \sin \alpha = \gamma$, ovvero il braccio.

Torniamo a ragionare sulla prima equazione:

$$\gamma: N - mg = 0, \text{ proiettando su } \gamma$$

$$x: F + \underbrace{F_A}_{\text{è scritta SCALARMENTE: lascia il segno implicito}} = m \underbrace{\frac{2}{3} \gamma \frac{F}{m R^2} R}_{\alpha \perp r} \quad \text{perché } \bar{a}_{cr} = \bar{\alpha} \times \bar{F}$$

$$\text{dunque troviamo che } F_A = \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma}{R} - 1 \right) F \quad \downarrow \quad a_{cr} = \alpha r$$

posso notare che in via Teorica, se $\gamma = \frac{3}{2} R$, ovvero PA forza di attrito $F_A = 0$, è scioccante!

Se considero $0 \leq \gamma \leq \frac{3}{2} R$, la parentesi è negativa $\Rightarrow F_A < 0$, e

in direzione opposta a F; ma se $\frac{3}{2} R \leq \gamma \leq 2R \Rightarrow F_A > 0$, diretta nPB stesso verso di F.

Questo vuol dire che la ruota puo' rotolare anche in assenza di attrito.

Sappiamo poi che $F_A \leq \mu s N = \mu s mg$, ha un valore max come sappiamo.

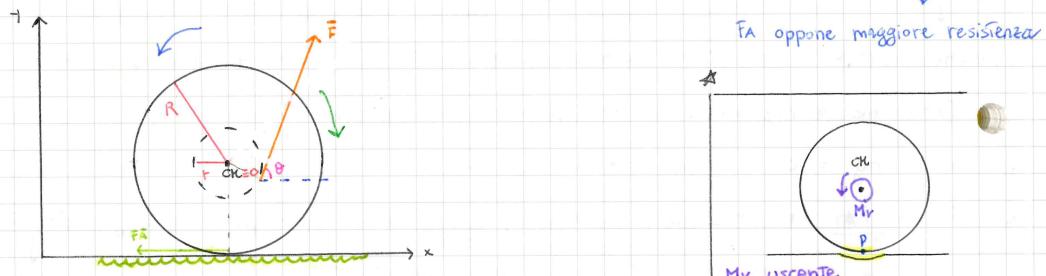
Allora ottengo una condizione sulle forze di trazione: $F \leq \frac{mg}{\frac{2}{3} \frac{\gamma}{R} - 1} \mu s$

se io supero questa condizione, la forza di trazione è troppo grande $\Rightarrow P$ non sarebbe più istantaneamente fermo e skitterebbe (perché F_A ha un valore massimo e non riesce a compensare F di trazione facendo sì che P sia istantaneamente fermo).

* il momento della \bar{F}_{att} è 0 perché è applicata sul punto P $\Rightarrow r=0$; P invece perché $\sin 0 = 0$, sono lì al raggio del polo. N per lo stesso motivo di \bar{F}_{att}

Considerando solo ed esclusivamente il punto P come generico punto d'appoggio, la sua $\Delta E = 0$ perché $W = \int F_A dx = 0$ per le riflessioni precedenti. Però c'è un problema: noi abbiamo schematizzato tutto attorno al punto P, ma fisicamente non accade, è più complesso. Attorno a P abbiamo una superficie d'appoggio, si "deforma" leggermente in pianta d'appoggio e ciò fa cambiare le condizioni: in condizioni sperimentali $\Delta E \neq 0$. Il corpo in rotolamento è sotto posta ad un'area di attrito rovente $M_r = \mu_r mg$ dove μ_r è il suo coeff ed è $\mu_r \approx 10^{-5}$ è molto piccolo ⇒ conviene muovere gli oggetti facendoli rotolare più presto che trascinarli, perché trascinando avremmo l'attrito radente $F_A = \mu_r mg$, dove $0 < \mu_r < 1 \approx \mu_r \gg \mu_r$

ROCCETTO DI FILO:



$$\begin{cases} x: F \cos \theta - F_A = m a_{CR} \\ y: N - mg + (F \sin \theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{F sin } \theta \text{ potrei tranquillamente considerarlo trascurabile})$$

$$F \times F + R \times F_A = I_{CR} \alpha = r F - R F_A = I_{CR} \alpha$$

Il polo C ha scelto coincidente con CR.

↓
solo entrambi a 90°

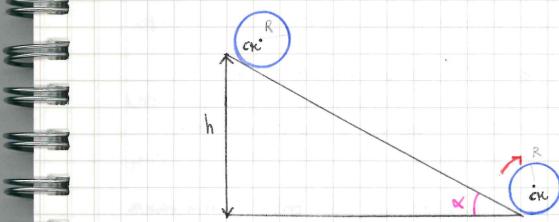
possiamo scrivere $F_A = -m a_{CR} + F \cos \theta$.

$$r F + R [+ m a_{CR} - F \cos \theta] = I_{CR} \alpha$$

$$F(r - R \cos \theta) = I_{CR} \alpha - m R a_{CR}; \text{ devo fare lo studio in } \alpha \Rightarrow a_{CR} = -\alpha R$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{F}{I + mR^2} (r - R \cos \theta) \rightarrow r - R \cos \theta > 0 \Rightarrow \frac{F}{R} > \cos \theta \cdot \text{ si rotola} \\ \rightarrow r - R \cos \theta < 0 \Rightarrow \frac{F}{R} < \cos \theta \Rightarrow \theta \text{ deve essere piccolo} \cdot \text{ sto riavvolgendo il filo}$$

Tutto ciò è dovuto alla condizione iniziale per cui P deve essere istantaneamente fermo per avere solo la condizione di rotolamento.

ENERGIA MECCANICA:

$$\frac{1}{2} I_p \omega^2 = mgh$$

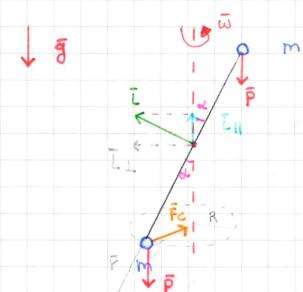
dato che $I_p^A > I_p^c > I_p^s$

$$\Rightarrow \omega_A < \omega_c < \omega_s$$

L'inerzia gioca un ruolo importante; Pn sez. circolare in Figura puo' essere un anello, una sfera o un cilindro (a parita di m e h) \Rightarrow hanno inerzia diversa \Rightarrow dunque anche ω deve essere diverso.

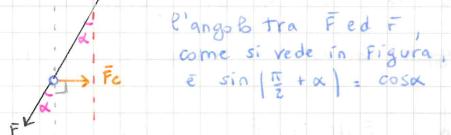
 \bar{L} e $\bar{\omega}$:

mi avvapro di un manubrio lungo L :



corpo rigido: Pn distanza tra m e m si mantiene costante

NB: $F \times \bar{F}$, metto \bar{F} ed \bar{F} coda-coda



Per m descrivono delle circonferenze di raggio $R = \frac{L}{2} \sin\alpha$.

Dato che le masse sono uguali, il momento torcente di entrambe è uguale ma opposto \Rightarrow i 2 momenti sono all'equilibrio.

Dato che m sta ruotando, ci deve essere una forza centripeta.*

[Abbiamo prima detto che \bar{P} non influenza in alcun modo nella rotazione.]

* se non ci fosse \bar{P} le 2 m non potrebbero stare su quegli itinerari!

Oltre tutto il corpo non è simmetrico.

Ovviamente anche \bar{I} ruota con il manubrio: ha un momento di PRECESSIONE.

Ma se \bar{F}_c da cosa sono date? È ovvio che si sviluppano per come è vincolato il manubrio.

\bar{F}_c influenza solo \bar{I}_{\perp} ; possa capire il loro momento

$$\bar{R} = \bar{r} \times \bar{F}_c = \frac{L}{2} m \omega^2 R \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

avendo però 2 contributi

$$\text{che vanno nella stessa direzione } M = L m \omega^2 R \cos \alpha = \frac{L^2}{2} m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

e notiamo la presenza del termine $m L^2$, necessario per l'unità di mis.

Il momento è 0 quando $\alpha = 0$ o $\alpha = \frac{\pi}{2}$; se $\alpha = 0 \Rightarrow I = 0$,

se $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I \neq 0$. → è questo max

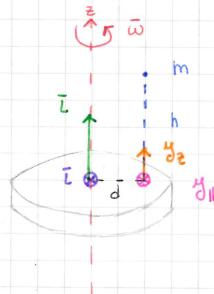
In un corpo rigido ci sono sempre degli assi preferenziali per cui $\bar{I} \parallel \bar{\omega}$ quando svincola il manubrio, il corpo si porta naturalmente lungo uno di questi assi, quelli di I .

$$\begin{cases} I_2 \alpha = \bar{R}_{\parallel} = \frac{d\bar{I}_{\parallel}}{dt} \\ \bar{R}_{\perp} = \frac{d\bar{I}_{\perp}}{dt} \end{cases} \quad \text{dove } \bar{R} = \frac{d\bar{I}}{dt}$$

URTI:

se $\Delta E = 0 \Rightarrow$ urto elastico, se $\Delta E \neq 0 \Rightarrow$ inelastico; se i due oggetti coinvolti rimangono uniti \Rightarrow completamente inelastico.

$$dp = \bar{F} dt = d\bar{p}, \text{ simile è } d\bar{I} = \bar{R} dt \Rightarrow \Delta \bar{I} = \int_t \bar{R} dt$$



il disco avrà una certa inerzia I ;

I disco I di m che ruota risp
al disco

quando atterra, il disco dovrebbe ricevere un momento entrante

$$\text{disco non fissato} \rightarrow \frac{m}{I} \frac{dx}{dt}$$

I vettori rappresentati da \otimes sono entranti, ovvero poggianti (||) sul piano del disco

$\bar{p} =$ impulso per differenziarli da $I =$ momento di inerzia.

Ragionando "normalmente" entreremmo in crisi, è complesso.

Prima dell'urto il momento angolare complessivo è dato dalla somma dei I_z (disco ed m); dopo l'urto, se il disco regge, \bar{I}_{tot} sarà quello del disco, ma sarà cambiata l'inerzia.

Nel processo di urto, voglio che la componente \bar{I} entrante si annulli, la pallina atterra e comincia a ruotare con tutto il sistema = lungo z se momento delle forze esterne $\bar{\tau}_{\text{ext}}^{\text{tot}} = 0 \Rightarrow L_z = \text{cost} \Rightarrow \Delta L_z = 0$
 $\Rightarrow L_z = L_F z \star \Rightarrow I^i w_i = I^F w_F \Rightarrow w_F = \frac{I^i}{I^F} w_i$ ma le

problemi è che $I^i = \frac{1}{2} \mu R^2$, I^F è cambiato per l'atterraggio

di m: $I^F = \frac{1}{2} \mu R^2 + m d^2$ dunque è aumentato $\Rightarrow w_F < w_i$: il sistema risulta raffreddato.

m arriva con $v = \sqrt{2gh}$ ma nell'istante dell'urto scompare $\Rightarrow M_z = m \sqrt{2gh} \hat{k}$
con esso mi spiego la "scarsa" della quantità di moto di m.

$$\tilde{J}_\parallel = m d w_F \hat{u}.$$

Calcoliamo ora il momento complessivo: $\bar{J}_\perp = \Delta \bar{L} = L_F^\parallel - L_\perp^\parallel = -dm \sqrt{2gh}$

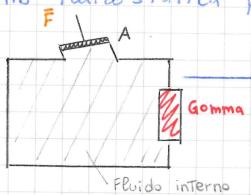
(dove ormai \bar{J} è il momento dell'impulso).

* NB: $\bar{L} \hat{u}_z$ è sempre COSTANTE! cambiano I e \bar{w} prima e dopo l'urto, ma il loro prodotto sarà sempre $\bar{L} \hat{u}_z$, costante in modulo, direzione e verso.

FLUIDI:

Per Fluidi intendiamo sia liquidi che gas, ma ci concentriamo sui primi.

Studiamo Fluidostatica per introdurre il concetto di pressione.



→ Contenitore a pareti rigide con una sezione in gomma e un pistone nel soffietto ⇒ può inclinare come voglio il sistema pistone.

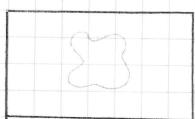
Se si preme il pistone con una certa forza si deforma la parete di gomma.

La combinazione tra A e F definisce la deformazione della parete in mm:

$$p = \frac{F}{A} \quad \frac{[N]}{[L]^2} = \frac{N}{m^2} = [Pa] \quad (\text{la forza di } 1 \text{ N su } 1 \text{ m}^2)$$

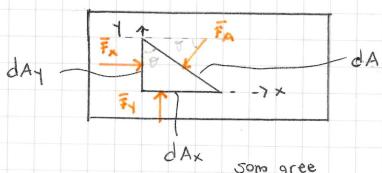
La pressione atmosferica è $\approx 10^5 \text{ Pa}$ che per comodità chiamiamo 1 atm (considerate in condizioni standard). Famosa è anche 1 atm = 760 Torr oppure = 1 bar = 10^3 mbar .

Consideriamo le condizioni di Fluidostatica:



non vedo spostarsi questo volumetto di liquido nel tempo (se un mucchio entra, un'altra DEVE uscire).

N.B.: La pressione è una quantità SCALARE: in un tempo infinitesimo non ha "dipendenza" da direzione e verso! Dimostriamolo:



considero un prisma di liquido piccolo;
 $dm = \rho dv$

$\sigma_{\text{PA}} \text{ superficie}$

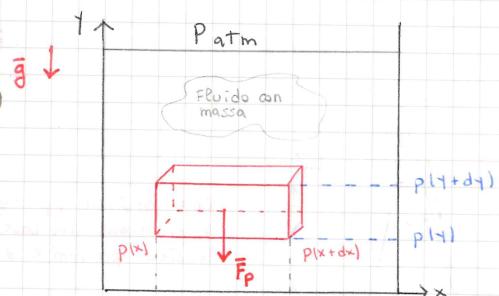
dal primo esempio ho visto che è la componente L che conta (della forza)

$$F_x - F \cos \theta = 0 \Rightarrow \text{no spostamento lungo } x$$

$$P_x dA_y - P dA \cos \theta = 0 \quad \text{ma } dA_y = dy \ell, \quad dA = dL \ell$$

Vedo che ℓ = profondità non mi interessa. Vedo anche che dL caso $= dy$ \Rightarrow vedo che per avere statica $P_x = P = P_y$
se faccio lo stesso ragionamento. Abbiamo lavorato correttamente.
Questo risultato formalizza quanto detto da Pascal: la pressione in
quella zona è in tutte le direzioni, non dipende da come è esposta la superficie.
posso dunque concludere che p non è un vettore.

Questo non è un discorso faltibile se questo prisma di liquido si
estende tanto in un volume di liquido:



Sopra questo volumetto c'è un
quantitativo di massa che agisce
da forza peso.

Dunque tutto questo che abbiamo detto è studiato LOCALMENTE.

Per avere statica, alla medesima quota: $p(x) = p(x+dx)$, lo stesso
vale per z; su y dobbiamo valutare altro:

$$p(y)dxdz - F_p - p(y+dy)dxdz = 0$$

Forza agisce verso il basso

Asse y preferenziale per la direzione della forza peso

avrò $F_p = dm g$ e posso scrivere come $\frac{F_p}{dm} dx dz dy g$
 $\Rightarrow dx, dz$ vanno via \Rightarrow scopro che $\Delta P = p(y+dy) - p(y)$
 $= -\rho g dy$: il campo gravitazionale F_g si che ci sia un cambio
di pressione dovuto al cambiamento di quota.

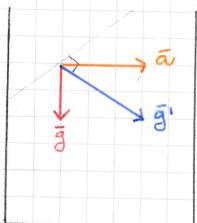
Questa formulazione prende il nome di LEGGE DI STEVINO.

Devo stare attento al fatto che sopra tutto ci sia la P_{atm} , che
deve essere sommato.

g ha creato la simmetria tra gli assi ed è la causa del cambio di pressione.

NB: il $-$ indica che salendo la p diminuisce, in accordo con gli assi presi.

Se il sistema non è inerziale cioè un termine di trascinamento:

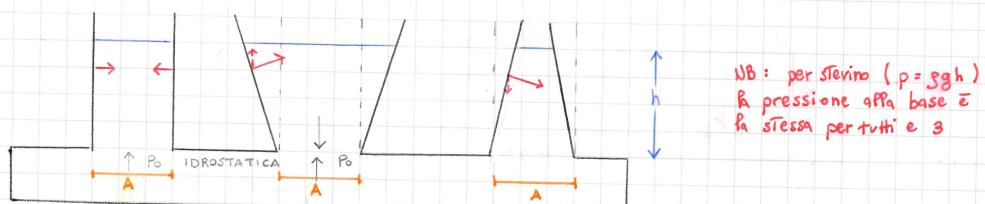


La legge di Stevino vale "normalmente" lungo \bar{g}' , perché è lungo la direz. di \bar{g}' che si mantiene la simmetria studiata prima.

Il liquido si inclina in modo tale che il peso del liquido sia $\perp \bar{g}'$. Vediamo che la differenza di pressione dipende "solo" dalla variazione di quota dy .

PARADOSSO IDROSTATICO:

P_{atm}



NB: per Stevino ($p = \rho gh$) la pressione alla base è la stessa per tutti e 3

Abbiamo la stessa base per tutti e 3; affinché il principio dei vasi comunicanti funzioni è diretta conseguenza della legge di Stevino.

Possiamo dire che i 3 sono in equilibrio idrostatico, ma posseggono masse \neq , non stanno in equilibrio sulla bilancia \rightarrow PARADOSSO.

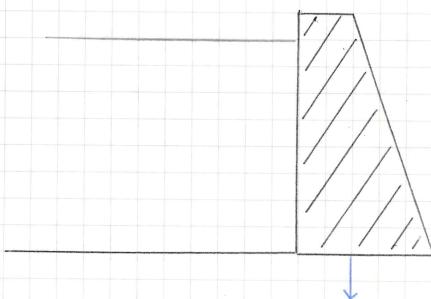
Dobbiamo considerare la reazione vincolare: nel I è \perp alle pareti verticali del vaso; nel II vede che la reaz. vincolare è sempre \perp alle pareti, ma è "storta" rispetto al sistema di riferimento \Rightarrow ha una componente verticale che aiuta a sorreggere il peso dovuto alla massa maggiore. Di segno inverso per il III. Queste reazioni sono proporzionalmente alla profondità. Risulta dunque a compenso perfettamente la perdita o l'aggiunta di massa \Rightarrow equilibrio perfetto!

NB: sia i solidi che i liquidi sono incompressibili, ma i solidi resistono agli sforzi di taglio, a differenza dei liquidi (liquidi, NON FLUIDI IN GENERALE).

La legge di Stevino è utile anche per misurare le pressioni o in

Prendiamo una diga :

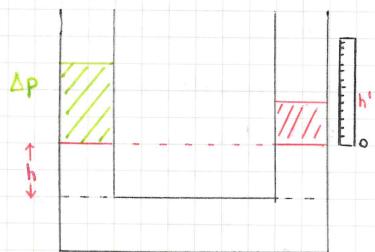
ambito di costruzioni.



sezione di una diga : costruita così per Stevino : aumentando la profondità aumentano le spinte orizzontali proporzionalmente.

Corpo rigido : tengo conto dei momenti , dove un F_{ext} è dato dall'acqua .

Potrei misurare le pressioni :



que PB che conta è h del livello comune.

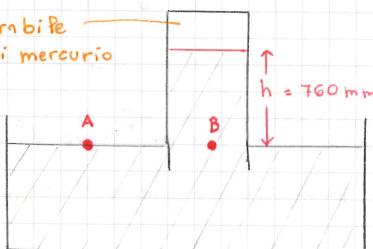
Metto a sx del liquido immiscibile (ex H_2O e olio)

Allora il liquido che era presente , a causa del Δp , a sx si abbasserà e a dx arriverà ad un'altezza h' = potrò misurare p .

ESPERIMENTO DI TORICELLI :

Per trascurabile
dei vapori di mercurio

ha tutti gli effetti un manometro.

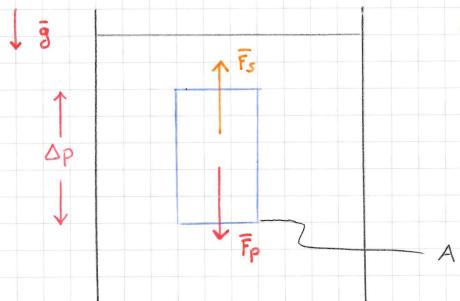


All'inizio rischetta e tubo sono completamente riempiti dello stesso liquido .

Scoperta : il liquido nel tubo scende a 760 mm , e avendo usato il mercurio , $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$. Uso Hg perché è il liquido più denso che abbiamo = utile per l'esperimento .

Allora stessa pressione dell'atmosfera (punti A e B) per cui ci deve essere = pressione . Su A agisce P_{atm} = su B deve agire un'identica pressione $\Rightarrow P_{atm} = g \rho Hg \cdot h = \text{scoperta !}$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE:



contenitore con del liquido;

risunfizzo un elemento di volume del liquido in equilibrio

$$m = \rho_F dV$$

F_s contrabilancia perfettamente F_p

$$F_s = \Delta P A = \rho g V.$$

Se sostituisco quel volume con un oggetto uguale, posso avere

$$F_p - F_s \geq 0, \text{ dove } = 0 \text{ è il caso di equilibrio}.$$

Se $F_p > F_s$ = Forza netta verso il basso = affondamento;

Se $F_p < F_s$ = Forza netta verso l'alto = galleggiamento.

quando l'oggetto esce dall'acqua, $F_s = \rho_{\text{liquid}} V$ e non salirà più (orriamente).

Posso vedere $F_p - F_s$ come mg e $\rho_F V g$

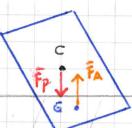
è per questo che il ghiaccio galleggia sull'acqua: $\rho_F > \rho_{\text{gh}}$.

ovvero quando il ρ del corpo è minore del ρ del fluido.

Posso dunque semplificare tutto questo ragionamento con un confronto tra densità.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE: ogni corpo immerso in un fluido riceve da esso una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume del liquido spostato.

situazione :



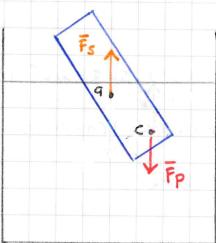
Bottiglia con dell'acqua dentro.

G = centro di galleggiamento : baricentro del volume di fluido spostato .

C = baricentro (cm) del corpo considerato .

Abbiamo dunque un paio di forze (F_s su G e F_p su C) che tende a far "storcere" il sistema e porta orizzontale .

Quando metto del liquido nella bottiglia tende ad abbassare C :



In questo caso la bottiglia tende a mettersi verticalmente .

Sistemi galleggianti particolarmente stabili sono quelli in cui C è esattamente sotto G = le due forze tendono a mantenere verticale il mio corpo .

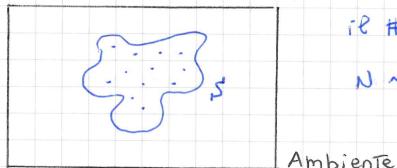
TERMODINAMICA:

Ci focalizziamo su fenomeni considerabili quotidiani. Alcuni aspetti sono modellizzabili con la meccanica vista fin'ora.

Abbiamo sempre considerato un punto materiale:

$$\begin{array}{l} m \\ \text{---} \\ P(x, y, z) \\ \text{---} \\ \bar{v}_0 (v_x^0, v_y^0, v_z^0) \end{array}$$

Siamo poi passati al sistema di punti materiali, in cui avevamo individuato un punto che poteva partecipare: ecco. Possiamo inserire questo sistema in un ambiente:



il # di particelle in s è

$$N \sim 6 \cdot 10^{23}$$

Ambiente

Problema: nella modellizzazione vista fin'ora \bar{P} agiva sul sistema di punti, ora no = il suo effetto, rispetto ad altri, può essere trascurato; ovviamente le masse dei singoli punti materiali sono estremamente ridotte.

Il sistema principale che studieremo saranno i gns; per risupplire il comportamento macroscopico delle particelle in continuo movimento servono nuove grandezze:

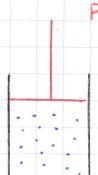
P = pressione [Pa] intensiva

V = volume [L^3] estensiva

T = temperatura [K] intensiva

ciascuna funzione $F(P, V, T)$ = funzioni termodinamiche con cui possiamo studiare un sistema. Ho introdotto variabili termodinamiche.

COORDINATE TERMODINAMICHE



PISTONE

uso un sistema MECCANICO = il pistone.

Quando questo sistema è in equilibrio meccanico?

$\sum F / \sum K = 0$, ma esiste anche l'eq chimica

e termodinamica. Tutti e 3 danno l'EQUILIBRIO TOTALE.

Nel punto interiore, p mi definisce lo stato meccanico del punto interiore.

In un sistema termo., analogamente, posso definire uno STATO TERMODINAMICO, in cui se conosco P, V, T , conosco il suo stato.

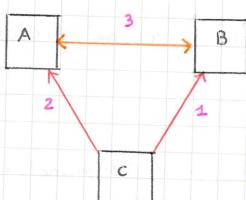
Dobbiamo definire una nuova grandezza fisica: LA TEMPERATURA.

Prima cerchiamo di capire come misurarla partendo da un fatto sperimentale:



A = caldo, B = freddo; se li porto in contatto dopo un po' saranno "caldi" uguali.

Necessito di contatto diretto, ma non è sempre possibile. Sfrutto allora un Terzo corpo:



$$T_A \stackrel{?}{=} T_B$$

Sono in equilibrio termodinamico?

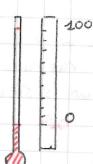
Metto in contatto diretto B e C e aspetto l'equilibrio; prendo poi C e lo metto in contatto con A, se sono già in equilibrio termico \Rightarrow A e B hanno la stessa temperatura e se potessi metterli in contatto noterei che sono in equilibrio termico. *

Devo però avere un modo per misurare questa grandezza fisica. ci dà un numero

Un termometro è un dispositivo che contiene una sostanza termometrica X :

$$\theta(x) = ax \quad \text{vorrei che } \theta_0 = x_0 \quad \text{tc se } \theta_1 = 2\theta_0 \sim 2x_0 = x_1$$

Scala Celsius: $t = 0^\circ\text{C}$ ovvero la temperatura a cui esiste il



ghiaccio fondente; H_2O solida e liquida coesistono

$t = 100^\circ\text{C}$ ovvero la temperatura a cui evapora l'acqua; ha definito questi 2 punti fissi (facilmente riproducibili) e ha definito la scala attorno ad essi. Tra questi 2 punti ha diviso la scala in 100 "punti".



Due sistemi si dicono in equilibrio termico se hanno la stessa temperatura T .

PRINCIPIO ZERO: due sistemi, separatamente in equilibrio termico con un terzo sistema, sono in equilibrio termico tra loro.

Scarpa Kelvin: prendiamo come riferimento il punto triplo dell' H_2O ,

in cui $P = 0,01 \text{ kPa}$, e $\theta_3(x) = av X_3 \Rightarrow av = \frac{\theta_3}{X_3} = \frac{273,16}{X_3}$

(dove $273,16$ è un numero a cassa per ora); così posso ricavare che:

$$\theta = 273,16 \frac{x}{X_3}$$

T del punto triplo dell' $H_2O = 0,01^\circ\text{C}$

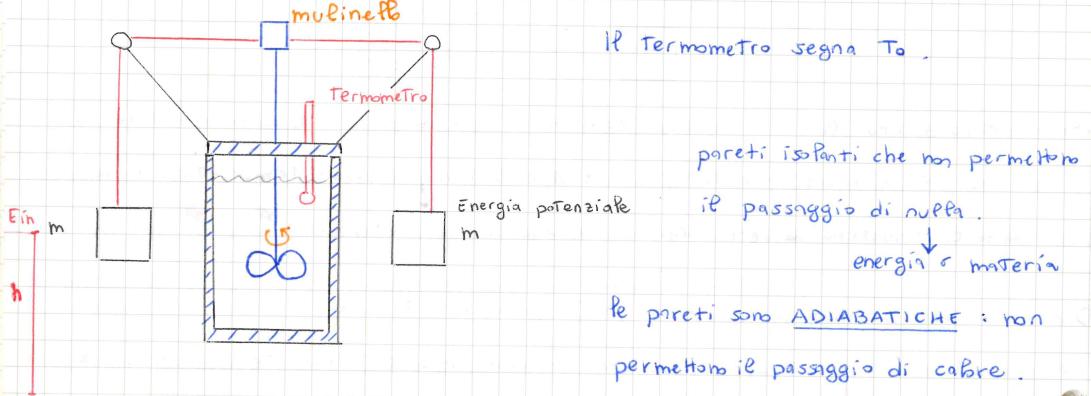
A B

 $T_A > T_B$

[cal] sembra che qualsiasi sia fluita da un corpo all'altro.

Osservazione: quando si producevano i tubi dei cannoni, diventavano incandescenti e per raffreddarli metteva dell'acqua che bolliva ed evaporava. Perché accade?

ESPERIMENTO DI JOULE: mulinello



Vediamo che mettendo in moto questo sistema la temperatura sale al valore T .

Ma non ho fornito calore, solo lavoro meccanico. Posso dunque ottenere un aumento di T in 2 modi ≠: W [J] ✓ NB: Q e W sono MEZZI per variare l'E di un sistema
 Q [cal] ✓

usando una Fiamma e ex

$Q = \Delta U$ (l'energia interna del sistema);

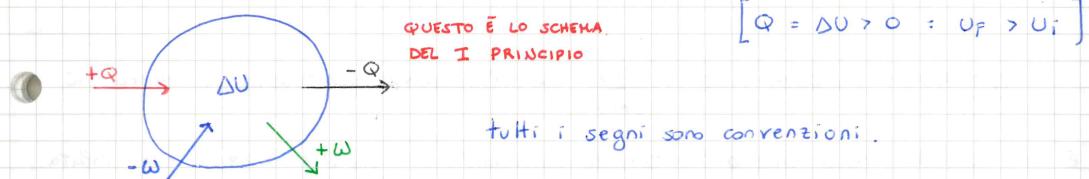
$W = \Delta U$ (in realtà, come vediamo dopo, è $-W = \Delta U$).

Q e W sono forme ≠ su cui vede la stessa grandezza fisica.

Posso cambiare l'energia interna ΔU del sistema sia fornendo calore che lavoro meccanico.

Q e W sono 2 modi per fornire calore!

Consideriamo un sistema con un'energia interna U :



Dunque in generale $\Delta U = Q - W$; si puo' vedere anche in differenziale
 $dU = dQ - dW \rightarrow Q e W$ dipendono dal percorso scelto, U no (ecco perchē d e δ).

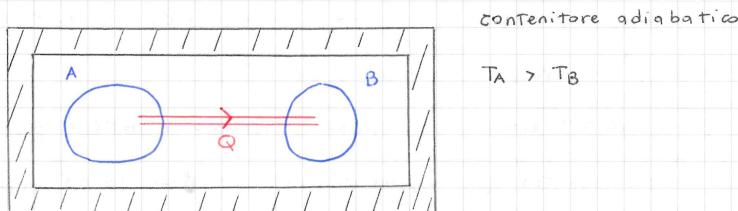
U è UNA FUNZIONE DI STATO.

$$\int_A^B dU = \Delta U ; \text{ se } \oint dU = \Delta U = 0 \stackrel{\text{I princ}}{=} Q - W \Rightarrow Q = W \text{ dove}$$

NON DIPENDE DAL PERCORSO

Q è il calore complessivo scambiato.

CALORIMETRIA:



non c'è nulla che possa compiere lavoro

$W_A = 0 = W_B$.

non puo' assorbire calore con l'esterno

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0 \Rightarrow \Delta U_A = -\Delta U_B$$

$\Delta U = Q \rightarrow$ possono sub scambiare calore internamente al sistema.

Il calore Q ceduto crea una $\Delta T = T_f - T_i$ in B $T_f > T_i$; dunque

però scrivere che $Q \sim \Delta T$ ma $Q \neq \Delta T$, non sono esattamente uguali.

In fatti $Q = C \Delta T$ dove C è la capacità termica dell'oggetto

e $C = mc$, c = calore specifico (dipende dal materiale).

$$\Rightarrow Q_A = m_A c_A (T_f^A - T_i^A) \quad \text{e} \quad Q_B = m_B c_B (T_f^B - T_i^B)$$

dove $T_i^A > T_f > T_i^B$

$$\Rightarrow m_A c_A (T_f^A - T_f) = m_B c_B (T_f - T_i^B) \text{ ovvero uno cede, l'altro assorbe calore.}$$

$$Q = C \Delta T \quad \left. \begin{array}{l} \xrightarrow{C \rightarrow +\infty} \text{serbatoio} \\ \xrightarrow{C \rightarrow 0} \text{termometro} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{caso limite: idealmente un serbatoio non cambia} \\ \text{la propria } T; \text{ il term. non fa cambiare la } T \text{ del corpo.} \end{array}$$

In questo schema non mi permette di trattare le Transizioni di Fase.

$Q \sim \lambda m \Delta T$ dove λ è il CALORE LATENTE, ovvero

è una costante che dipende dal materiale considerato e dalla transizione di fase voluta.

I processi inversi hanno lo stesso λ ma con segno opposto (Fusione - solidific.).
↓
mi permette di analizzare le TRANSIZIONI DI FASE.

Sappiamo poi che $1 \text{ cal}^{\star} = 4,18 \text{ J}$.

Consideriamo una sbarretta di metallo:

se fornisco infine nota una DILATAZIONE:
 $\epsilon (T_0)$

$$\Delta \epsilon = \lambda \epsilon \Delta T \quad \text{e} \quad \epsilon + \Delta \epsilon = \epsilon (1 + \lambda \Delta T)$$

Considerando un volume: $V = P_1 P_2 P_3 \xrightarrow{\Delta T} V = \epsilon'_1 \epsilon'_2 \epsilon'_3 = P_1 P_2 P_3 (1 + \lambda \Delta T)^3$
 $= V_0 (1 + \lambda \Delta T)^3 \sim V_0 (1 + 3 \lambda \Delta T)$ per Taylor

questo perché le dilatazioni sono spesso piuttosto ridotte e si può approssimare.

DILATAZIONE: se distanzio tra ogni coppia di punti qualsiasi (è aff'oggetto in questione) viene moltiplicata per lo stesso fattore λ .

\star CALORIA: è il calore che dev'essere scambiato da 1g di H₂O per variare la sua temperatura da 14,5 °C a 15,5 °C.

GAS IDEALI:

Sono un utile modello per rappresentare gas sufficientemente rarefatti.



pistone: sistema fondamentale per capire come il mio

sistema termodinamico scambia energia con l'esterno.

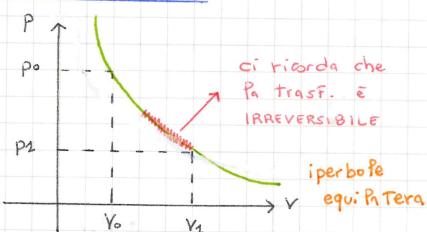
→ consideriamo pareti adiabatiche

ho ormai applicato
una pressione

Imprimendo una Forza F sul pistone esercito un lavoro e ho abbassato di h .

Sappiamo che esercitando un lavoro scambia energia. Con questo ho diminuito il volume.

Questo sistema è ben rappresentato dalla coppia $p - V$. La pressione è una quantità intensiva, il volume estensiva. Ragioniamo sul piano di Clapeyron.

LEGGE DI BOYLE (isoTerma, $T = \text{cost}$):

$f(p, V, T)$: se definisco un punto con una certa p e V = ho anche T definita.

Un sist. evolve sempre così:

EQUIL. → VARIAZ DI EQUIL. → NUOVO EQUILIB.

Boyle si accorgé che $pV = \text{costante!}$ (ma T deve essere costante)

NB: puoi variare solo l'Energia, la massa deve restare costante.

Possiamo immaginare che $V_p = p_0 \rightarrow p_0 + \Delta p$ ovvero cambio di pochissima p

pressione, la nuova pressione è un caratteristica di tutto il mio sistema.*

Se invece abbiamo violentemente il mio pistone, potrebbe invece esserci un gradiente di pressione. Se cambiassi repentinamente la pressione all'esterno, da un punto di equilibrio all'altro, nei punti intermedi la pressione non è più caratteristica del sistema termodinamico. Si rappresenta nel grafico una linea a zig-zag per far vedere che non ha un valore preciso.

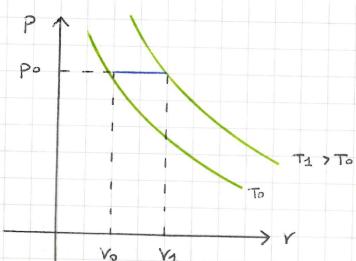
* per avere un grafico perfettamente lineare, ho bisogno che il sistema differisca, istante per istante, di una quantità infinitesima Δ rispetto a quella dell'ambiente circostante.

→ siamo di fronte ad una TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA

sarebbe REVERISIBILE

Consideriamo ora un caso ISOBARO ($p = \text{cost}$) I LEGGE DI GAY-LUSSAC:

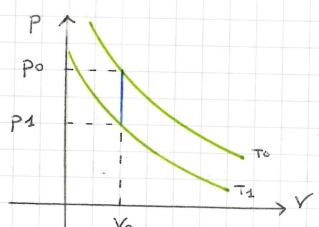
$$V_t = V_0 (1 + \alpha t)$$



In questo caso, affinché questa trasformazione sia reversibile, avrei bisogno di α serbatoi perché p resti caratteristica del sistema.

Se invece la trasformazione è ISOCORA ($V = \text{cost}$) II LEGGE DI GAY-LUSSAC:

$$P_t = p_0 (1 + \beta t)$$



Anche qui dovrei usare un numero infinito di serbatoi per avere una trasformazione reversibile.

$$\text{Sappiamo poi che } \alpha = \frac{1}{273,15} = \beta : T = 273,15 + t$$

Dunque $V_t = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T$ e $P_t = p_0 \alpha T$ per lo stesso ragionamento.

PATOLOGIA

Notiamo che a 0K : $P = 0$ e $V = 0$, questo però è "impossibile" dal III principio della Termodinamica.

LEGGE DI AVOGADRO : volumi uguali di gas diversi con comportamento ideale, a parità di p e T , contengono lo stesso numero di particelle.

Questo numero è $N_A \approx 6 \cdot 10^{23} = 1 \text{ mole} = n$

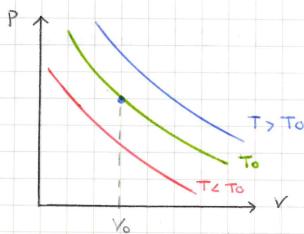
a P_{atm} e $T = 273,15 \text{ K}$ occupa $V = 22,4 \text{ L}$.

* uno degli enunciati del III principio della Termodinamica asserisce che lo zero assoluto non sia raggiungibile con un numero finito di trasformazioni.

Consideriamo n mole di un gns :

$$V_0 = n V_m \text{ a } p_0 T_0 \text{ e } T_0 = 273,15 \text{ K}$$

$V_m = \text{volume molare}$



ora $T_0 \rightarrow T$ e so che

$$\text{Gay-L.} \leftarrow pT = p_0 \alpha T \text{ e posso fare}$$

$$V_0 pT = p_0 \alpha T V_0 \text{ mn } \alpha T V_0 = V_T$$

$$\text{e } p_0 V_T = \frac{pV}{L} \text{ Gay-L. in generale}$$

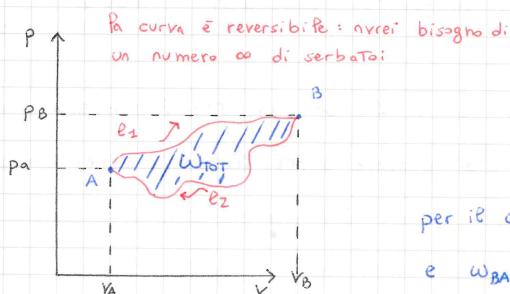
$$\Rightarrow pV = p_0 V_0 \alpha T \text{ ma } V_0 = n V_m \text{ e } p_0 \alpha V_m = R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

da cui si conclude che $pV = nRT$

LEGGE DEI GAS PERFETTI

intervengono sempre da questo p_0 a prescindere

Consideriamo 2 punti di equilibrio A e B :



La curva è reversibile: avrei bisogno di

un numero ∞ di serbatoi

so per certo che $T_B > T_A$: per

compiere il percorso p_1 sto all'indietro

un fascio di iperbole equilatero;

per il calcolo integrale sappiamo che $W_{AB} p_2 > 0$

e $W_{BA} p_1 < 0$ (nella sintesi ai due percorsi)

$$\delta W = p dV \Rightarrow W = \int_p^{p_2} p dV ; \quad W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV \quad \delta = \text{differenziale non esatto}$$

procede in senso

chiaramente $w_1 \neq w_2$ e $W_{TOT} = w_1 + w_2 > 0$ in quanto ∇ .

Se $w_1 > 0$ in quanto sintesi a p_2 e $w_2 < 0$ perché sintesi a p_1 , ma l'area di w_2 è parte di quella di w_1 $\Rightarrow w_1 + w_2$ è l'area interna al ciclo.

Consideriamo $\delta Q = n c_V dT$, dove $c_V = \text{calore specifico a V costante}$

ma posso anche avere $\delta Q = n c_p dT$, $c_p = \text{calore specifico a pressione costante}$.

Mi aspetto che $c_V \neq c_p$ perché il calore dipende da come viene eseguito lo scambio

di calore, ma mi aspetto anche una relazione tra i due: voglio considerare in

maniera più dettagliata delle reazioni allo stadio del I principio.

* $W > 0$ se fatto DAL sistema, < 0 se fatto SUL sistema

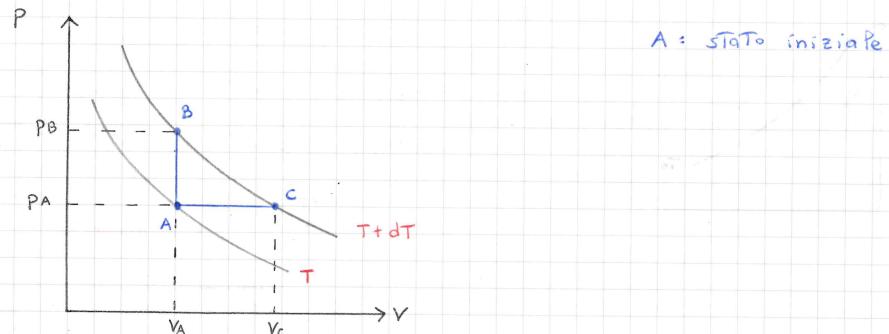
* CICLO TERMODINAMICO: quando stato

iniziale e finale coincidono

FINE
LEZ.

$$W = \int F dx = \int p Adx = \int p dV$$

Prendiamo due isoterme, una a Temperatura T e l'altra a $T + dT$



A: stato iniziale

Per il I principio: $dU = \delta Q - \delta W$. Il mio sistema ha un certo stato di energia. Supponiamo di compiere una trasformazione isocora che da A mi porta a B \rightarrow posso scrivere $dU_{(AB)} = nC_V dt$ perché $\delta W = 0$ (perché $V = \text{cost}$).

Posso anche supporre di passare da A a C con una trasformazione isobara. B e C sono accumunti che soffrono di giacere sulla stessa isoterma.

$$dU_{(AC)} = nC_P dT - p dV$$

Abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} dU_{(AB)} = nC_V dT \\ dU_{(AC)} = nC_P dT - p dV \end{cases} \rightarrow \text{sembra il massimo che posso fare.}$$

So che la variazione di energia interna dU è una funzione di stato e $U(p, V, T)$; A, B, C sembrerebbero legati tra loro;

IPOTEZZIAMO (nessuno ce lo dice) che l'energia interna U dipenda SOLO dalla temperatura T e visto che B e C hanno la stessa T allora avrebbero la stessa energia interna U! Allora potrei scrivere:

$$nC_V dT = nC_P dT - p dV$$

$$d(pV) = dp \cancel{V} + p dV \rightarrow dp \text{ in AC} = 0 \\ \text{in quanto ISOBARA}$$

$$nRT = nR dT$$

$$\cancel{nC_V dT} + \cancel{p dV} = \cancel{nC_V dT} + \cancel{nR dT} = \cancel{nC_P dT}$$

$$\underline{\text{RELAZIONE DI MAYER}}: C_P - C_V = R$$

Sperimentalmente trovo che C_V dipende dal gas:

MONOATOMICO
(He, Xe, Ne...)

$$C_V = \frac{3}{2} R$$

$$C_P = \frac{5}{2} R \text{ da Mayer}$$

BIATOMICO
(H₂, N₂, O₂...)

$$C_V = \frac{5}{2} R$$

$$C_P = \frac{7}{2} R$$

è importante introdurre il loro rapporto $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, ci servirà più avanti.

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

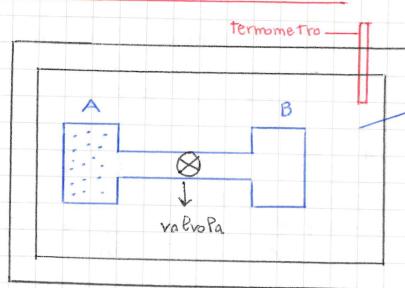
* il fatto che in un ciclo il lavoro non sia nullo ci dice che le forze associate alla pressione non sono macroscopicamente conservative \Rightarrow scriviamo δL e sappiamo dunque che non è una funzione di stato.

Esercitazione del 20/05

(27)

Dobbiamo verificare l'ipotesi secondo la quale $U = U(T)$, ovvero l'energia interna dipende solo dalla temperatura T .

SECONDO ESPERIMENTO DI JOULE:



pareti adiabatiche e rigide

Liquido calorimetrico (mi permette sempre di misurare un variaz di T)

NB: è un trasformazione IRREVERSIBILE

$$P_i = P_A \quad \delta Q = 0, \text{ e poiché le pareti sono rigide } \delta W = 0.$$

$$V_i = V_A \quad \text{Appena apro la valvola, infatti, abbiamo UN'ESPANSIONE LIBERA}$$

$$T_i = T_A \quad \Rightarrow \delta U = \delta Q - \delta W = 0;$$

Appena apro la valvola $P_f \neq p_i$ e $V_f \neq V_i$, ma si osserva che

$T_f = T_i$! \Rightarrow un gas ideale è un gas per cui l'espansione libera avviene a temperatura costante: $U = U(T)$

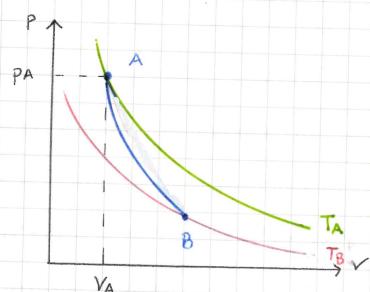
Appena (lez. prec) B e C, poiché giacciono sulla stessa isoterma, posseggono UGUALE energia interna.

Sempre da PPA lazione precedente: $dU_{AC} = nCr dT$, perché
 $\underline{U_B = U_C}$ e tra A e B, nel passaggio, poiché isocoro, $V = \text{cost}$
 $\Rightarrow \delta W = 0$: è molto più comodo. Dunque io, dopo questo ragionamento, posso sempre applicare questa formula. Integrando:

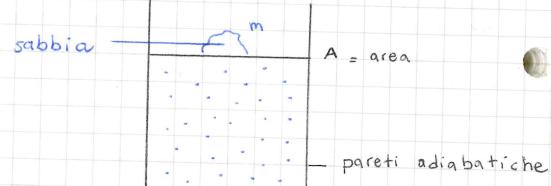
$$\Delta U = nCr \Delta T$$

TRASFORMAZIONI NOTEVOLI:

ADIABATICA:



$$P_A = \frac{mg}{A} + p_{\text{atm}}$$



$$\delta Q = 0$$

posso affermare che $P_A V_A = nRT_A$. Se la massa m è un mucchio di sabbia e tolgo un granello alla volta, posso attraverso stati di equilibrio (infiniti) dunque posso scrivere $nCr dT = dU = -p dV = p = \frac{nRT}{V}$
 $= -nRT \frac{dV}{V} = -(c_p - c_v)T \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$

$$\text{e posso integrare: } \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \int_{V_A}^{V_B} -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \Rightarrow R \frac{T_B}{T_A} = -(\gamma - 1) P_A \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \quad \text{dove B è uno stato generico} \neq A;$$

abbiamo scoperto che, in una trasformazione ADIBATICA REVERSIBILE

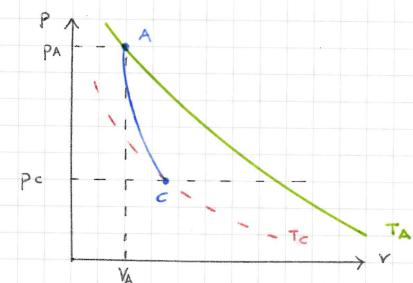
$$TV^{\gamma-1} = \text{cost.} \quad \Rightarrow PV^{\gamma} = \text{cost.} \quad \Rightarrow Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost.}$$

* È UNA trasf. adibatica: $\delta Q = 0$ ma $\delta W \neq 0 = -p dV$.

in PV^γ , sia in un gas monoatomico che biaTomico, $\gamma = 1$
sempre: $PV = \text{cost}$!

In generale, nel campo reversibile, $PV^\alpha = \text{cost}$ è una
Trasformazione poli tropica, dove se $\alpha = \gamma \Rightarrow$ adiabatica
 $\alpha = 1 \Rightarrow$ isoTerma

Ora potrei ipotizzare di togliere P_A mIsso tutta assieme: ora $\delta Q = 0$
ma $\Delta U = -\Delta W$ e ancora $\Delta U = ncv\Delta T = ncv(T_C - T_A)$ e
 $\Delta W = ncv(T_A - T_C)$

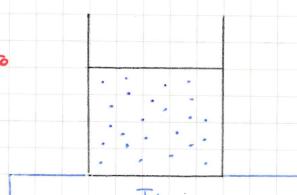
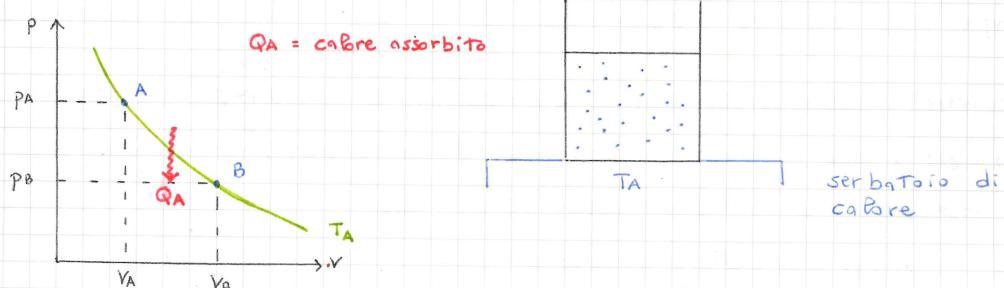


non passo più da stati di
equilibrio infinitesimi \Rightarrow non
sono più autorizzato ad usare gli
infinitesimi!

$$\Rightarrow \Delta W = ncv \left(\frac{P_C V_C}{nR} - \frac{P_A V_A}{nR} \right) = \frac{1}{\gamma-1} (P_A V_A - P_C V_C)$$

ma questa è sempre una Trasformazione adiabatica ma IRREVERSIBILE.

ISOTERMA:

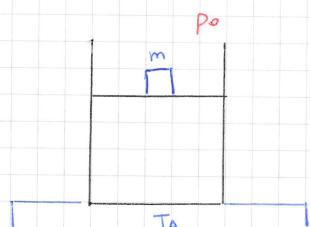


serbatoio di calore

$$\Delta U = \delta Q - \delta W \quad \text{ma essendo isoterma } \delta Q = \delta W \Rightarrow \Delta Q = \Delta W$$

ovvero trasfOrma in lavoro tutto il calore scambiato, ma questo è
corretto perché è una singola trasformazione isoTerma (e non siamo
in un ciclo: non parliamo di macchine termiche ecc.).

$$\Delta Q = \int_{V_A}^{V_B} p dV = - \int_{V_A}^{V_B} nRT \frac{dV}{V} = \Delta Q = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

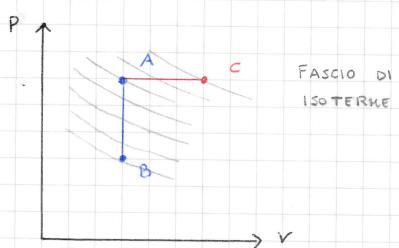


se togliessi repentinamente p_A massa m
avrei un'espansione isoTermica irreversibile.

$$W = p_0 \Delta V$$

NB: come visto prima, le isoterme, come le adiabatiche, fanno entrambe parte delle POLITROPICHE

ISOCORA e ISOBARA:



$$dU = \delta Q \quad (\text{isocora})$$

$$\Delta Q = n c_V \Delta T$$

Per passare da A a B o da A a C

necessitiamo di un numero infinito

di serbatoi di calore SE REVERSIBILE,

SE mi venissero forniti un numero FINITO di serbatoi, sarebbe irreversibile.

Abbiamo visto che $U = U(T)$ è una funzione di stato, e $dU = n c_V dT$,

$$\text{dunque posso definire } c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}.$$

Un'altra funzione di stato è l'entalpia $H := U + pV$. differenzio

$$dH = dU + dpV + p dV = dU + d(pV) =$$

$$= dU + d(nRT) = n c_V dT + n R dT =$$

$$= n(c_V + R) dT = n c_p dT$$

$$\Rightarrow c_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}$$

in chimica è infatti utile parametrare a pressione costante: molte reazioni hanno questa proprietà.

II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

I: $dU = \delta Q - \delta W$ (dove ovviamente $\delta = \oint$: differenziale non esatto)



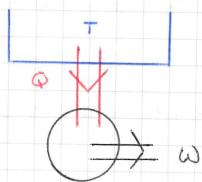
consideriamo $T_1 > T_2$; sappiamo cosa accade:

$$-\Delta Q + \Delta Q \quad \text{Finché } T_1^F = T_2^F, \text{ ovvero } \underbrace{T_1}_{T_{eq}} > T_{eq} > T_2.$$

Ma per il I principio è fallibile anche il contrario. (Freccia arretrata).

Vorrei capire quando un processo è spontaneo o meno. Un fatto sperimentale è il fatto che un corpo più caldo cede calore ad uno più freddo, arrivando ad una temperatura comune di equilibrio.

ENUNCIATO DI KELVIN-PLANK (K-P): è impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione il cui unico risultato sia quello di convertire completamente in lavoro il calore prelevato da un solo serbatoio.

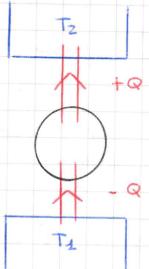


N.B.: $T = \text{costante}$ in quanto è un serbatoio

→ perché una macchina termica funziona servono almeno 2 serbatoi di calore.

Impossibile per K-P

ENUNCIATO DI CLAUSIUS: è impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione il cui unico risultato sia quello di far passare calore da un corpo a temperatura maggiore.

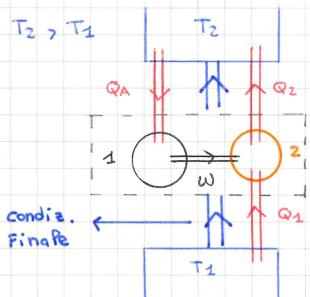


$T_2 > T_1$ inferiore ad uno a temperatura maggiore.

→ macchina frigorifera

Impossibile per Clausius

Questi 2 enunciati sono entrambi dentro il I principio. Sono inoltre EQUIVALENTI tra loro: se ne ammetto uno deve poter avvenire anche l'altro. Sono 2 principi storici che voglio dimostrare essere equivalenti:



riopiamo K-P: la macchina 1 converte tutto

Q_A in lavoro w : $Q_A = w$!

$$Q_2 = w + Q_1 = Q_A + Q_1$$

$$T_2 = -Q_2 \quad T_2 = -Q_A + Q_2 = -Q_A + Q_A + Q_1$$

assorbe e cede Q_1 ! viola Clausius

Entrambe 1 e 2 lavorano ciclicamente.

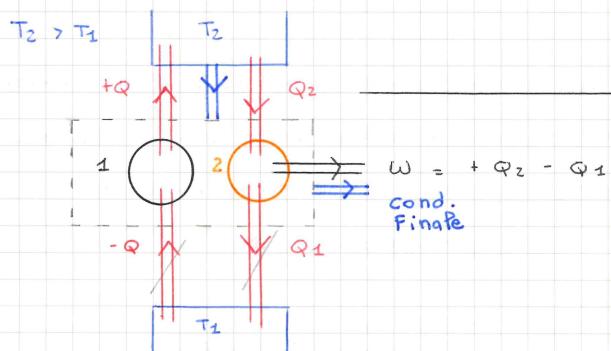
è un processo ciclico $\Rightarrow \Delta U_1 = 0 \Rightarrow Q_A = w, \Delta U_2 = 0$
segno implicito

$$\text{dunque } Q_1 + Q_2 = -w^1.$$

Io posso accoppiare le macchine 1 e 2 to $w^1 = w$.

Possa dunque dire che $w + Q_2 = -Q_1$, ma alla fine posso vedere le 2 macchine come un'unica grande macchina, che assorbe Q_A , dove $w = Q_A = Q_A + Q_2 = -Q_1$: lo scopo di questa macchina è dunque quello di prelevare calore da T_1 e cedere la stessa quantità a T_2 : enunciato di Clausius \Rightarrow lo abbiamo violato; ora dobbiamo fare il contrario per dimostrare l'equivalenza.

Dobbiamo negare K-P violando Clausius:



$$W = +Q_2 - Q_1$$

$$Q = Q_1$$

$$Q_2 = w + Q_1$$

$\left\{ \begin{array}{l} Q_A = w \\ \text{calore assorbito} \\ \text{da } T_2 \end{array} \right.$

assorbe w e lo trasforma in w

$$W = Q_2 - Q = \text{calore assorbito} - \text{ceduto}$$

$$\Rightarrow \text{viola K-P!}$$

Voglio fare in modo che $\underline{Q_1 = Q}$. — lo impongo io. È così

Accoppio questo sistema che lavora ciclicamente: $Q_2 - Q_1 = w$.

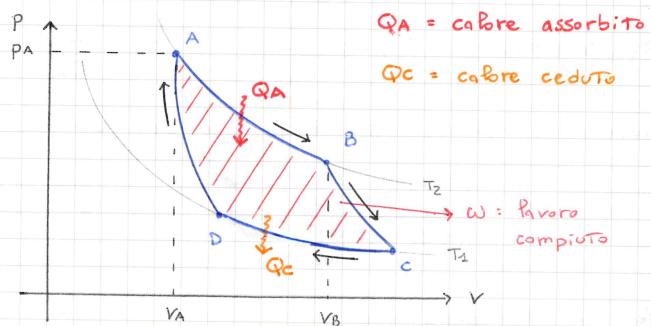
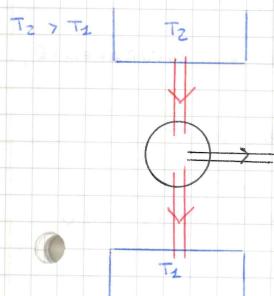
Il sistema sta preferendo cedere e perdendo lavoro $\Rightarrow K-P$, dunque negare uno nega anche l'altro. La macchina ora sta usando $+Q_2 - Q_1$

Ho dimostrato l'equivalenza dei 2 enunciati!

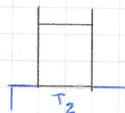
* ma poiché $Q = Q_1 \Rightarrow +Q_2 - Q_1 = W \Rightarrow$ viola K-P!

MACHINA DI CARNOT:

Abbiamo il numero minimo di serbatoi = 2 (non 1 per K-P);



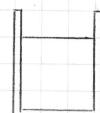
A → B : isoterma



so che $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta Q = \Delta W$ ed è reversibile: $\Delta Q = \int_{V_A}^{V_B} p dV = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$

A questo punto isob il sistema adiabaticamente, cambiando piano:

B → C : adiabatica



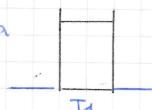
$$\Delta Q = 0 \Rightarrow -\Delta W = \Delta U = nc_V(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \Delta W = nc_V(T_2 - T_1)$$

dunque so che $T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$ perché BC sono sulla stessa

$$\text{adiabatica} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1}$$

C → D : isoterma



$$\Delta Q = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \quad V_D < V_C \Rightarrow Q_C$$

D → A : adiabatica

$$\Delta W = nc_V(T_1 - T_2) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_D}{V_A} \right)^{\gamma-1}$$

Abbiamo ruotato in senso orario \Rightarrow macchina termica, ma se avessi ruotato in senso antiorario \Rightarrow macchina frigorifera.

NB: abbiamo parlato sopra in ambito REVERSIBILE.

Questa macchina è oltre tutto dimensionabile = possa "regolare" la quantità di lavoro che ottengo (area interna).

Visto che da A torna in A, è evidente che $\Delta U|_{\text{ciclo}} = 0$.

$$\text{Dunque } \Sigma Q = \underbrace{Q_A - Q_C}_{= W}$$

RENDIMENTO : $\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$ ovvero $\eta < 1$ SICURAMENTE,

ovvero il rendimento è minore del 100% (non violando K-P).

$$\eta = 1 - \frac{\frac{nRT_1}{nRT_2} \frac{V_C}{V_D}}{\frac{V_D}{V_A}} \neq \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \neq \text{possa considerare solo}$$

le due temperature !

Ma effettivamente, questo rendimento è il massimo che possa ottenere ?

TEOREMA DI CARNOT :

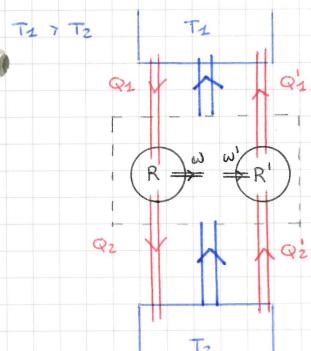
I PARTE : tutte le macchine reversibili che lavorano tra due sorgenti alle medesime Temperature T_1 e T_2 , hanno lo stesso rendimento.

II. PARTE : nessuna macchina irreversibile che lavori tra le stesse temperature può avere un rendimento maggiore della macchina reversibile.

$$\star \text{ da una relaz. prec.: } \left(\frac{V_D}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1}$$

Dimostriamo il Teorema di Carnot:

MACHINA TERMICA



Sono 2 macchine reversibili di cui
R' è Frigorifera.

* I non puo' essere "girata" in quanto
irreversibile, dunque cade l'uguaglianza

per avere un confronto lo tratto come
macchina termica

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \eta' = \frac{w'}{Q'_1} = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}$$

I postizziamo per assurdo che $\eta > \eta'$. Dimensiono le 2 macchine:

$$w = Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2 = w' \text{ ma per l'hp precedente:}$$

$$\frac{w}{Q_1} > \frac{w'}{Q'_1} \Rightarrow \frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q'_1} \text{ ovvero } Q'_1 > Q_1;$$

dunque, portando tutto nell'equaz. precedente $0 > Q_2 - Q'_2 = Q_2 - Q'_2$

dunque anche $Q'_2 > Q_2$. Allora, dato questo set di diseguaglianze: $(Q'_1 > Q_1, Q'_2 > Q_2)$

vedo come la macchina assorbe calore da T_2 e lo cede a T_2 , con $T_2 < T_1$.

Sono dunque arrivato a contraddirre l'enunciato di Clausius e l'assurdo
è stato negato. Faccendo il ragionamento opposto: $\eta' > \eta$ arrivo allo stesso
risultato, ovvero che, necessariamente, $\eta = \eta'$!

Dunque, essendo la macchina di Carnot reversibile, (prima) ho calcolato il
rendimento di una qualsiasi macchina reversibile.

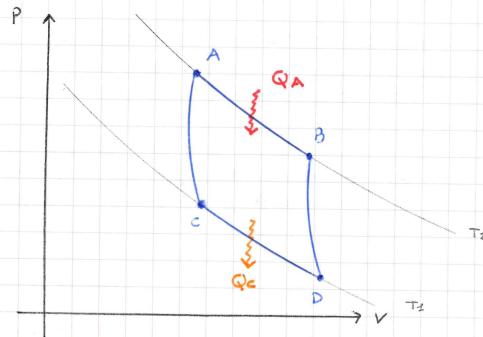
Ora abbiamo dimostrato la I parte dell'enunciato, serve la II.

Usando il disegno precedente, chiamo $R = I$, ovvero un macchina irreversibile.

Ipostizziamo sempre per assurdo che $\frac{w}{Q_1} = \eta_I > \eta_{R'} = \frac{w'}{Q'_1}$ NB: R' è ancora
reversibile
= stessa hp = stessa conclusione = FALSA!

= $\eta_I < \eta_{R'}$; per dimostrare l'uguaglianza dovrei scambiare R' ed I , ma
non posso farlo in quanto $I = \text{irreversibile} \neq \text{cade l'uguaglianza} = \eta_I < \eta_{R'}$!

Vorrei trovare un modo per esprimere la spontaneità della reazione.



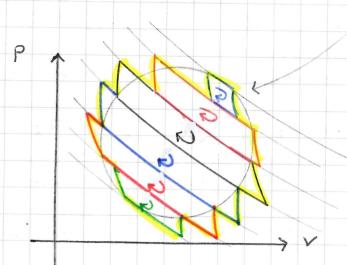
$$\text{Sappiamo che } 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta = 1 - \frac{Q_C}{Q_A} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_C}{Q_A} \Rightarrow \frac{Q_A}{T_2} = \frac{Q_C}{T_1}$$

$$\text{dunque } \frac{Q_A}{T_2} - \frac{Q_C}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_2} = 0 \quad [\text{tenendo implicito il segno}]$$

dove $Q_A = Q_2$ e $Q_C = Q_1$.

Il ciclo di Carnot è un modo per muoversi su PV (piano).

Ipotizziamo un ciclo reversibile qualsiasi:



(sappiamo già che servirebbero infiniti serbatoi.)

Ho diviso il ciclo rev generico in N cicli di Carnot.

→ Fascio di isotermi

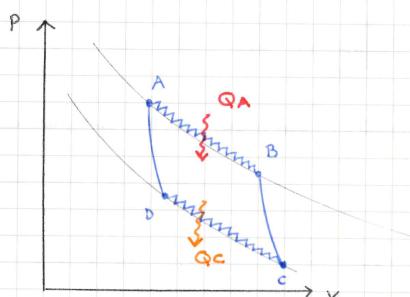
$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0 \rightarrow \text{Tanglio continuo (la parte evidenziata)}$$

↓ dimostrato prima

Tanglio discreto (tutte le singole aree colorate)

È un risultato estremamente interessante: ho la circolazione di un integrale = 0.

Cos'è successo se prendo una macchina irreversibile?



$$\text{sicuramente so che } \eta_I < \eta_R$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{Q'_C}{Q'_A} < 1 - \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow -\frac{Q'_C}{Q'_A} < -\frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{Q'_C}{Q'_A} > \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q'_2}{T_2} + \frac{Q'_1}{T_1} < 0 \Rightarrow \text{posso generalizzare}$$

$$\text{Per le formule precedenti: } \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i}{T_i} < 0 \text{ e } \oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Dunque posso concludere che $\int \frac{dQ}{T} < 0$, $=0$ se reversibile, <0 se irreversibile.

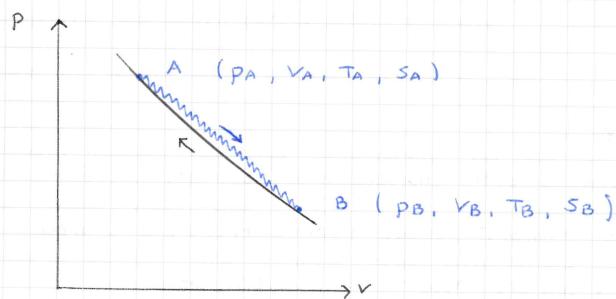
Questo è l'integrale di Clausius.

$\oint \frac{dQ}{T} = 0$ mi ricorda quando parlavamo con le forze conservative, è

formalmente uguale \Rightarrow posso definire una funzione di stato che non dipende dal percorso ($\sim U$). $\frac{dQ}{T} = dS$ ENTROPIA $\Rightarrow \oint dS = 0$.

Questo integrale non è dunque una riFormulazione del II principio, mi permette di definire una nuova funzione di stato. Vorrei cercare di capire se questa nuova entità mi permette di capire la direzione di spontaneità di una trasformazione.

Consideriamo un processo spontaneo: L'ESPANSIONE LIBERA



Sì che $\Delta U = 0$, ma non mi serve a niente. Mi chiede $\Delta S|_{AB} = ?$

Posso pensare di tornare da B ad A in compressione isoTerma reversibile

$$\text{è ceduto} \quad \frac{Q}{T_A} = S_A - S_B < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S \Big|_{A \rightarrow B} = S_B - S_A > 0$$

Osserva dunque che il processo $\Delta S|_{AB}$ porta ad un aumento della Funzione di stato entropia S .

Abbiamo però visto un esempio dove $\Delta U = 0$; vediamo uno dove l'energia interna varia:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline T_1 & T_2 \\ \hline Q & \cancel{\qquad} \\ \hline \end{array}$$

è un processo irreversibile con $\Delta U \neq 0$ ovviamente.

immaginiamo di compiere un'internazione non spontanea, trasferendo

una quantità infinitesima di calore: da T_1 a T_2 perché $T_2 > T_1$

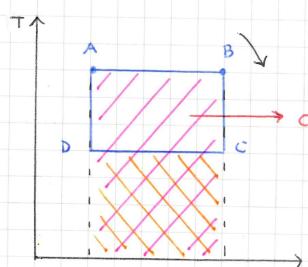
$$-dS = -\frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \nearrow \text{dunque } dS < 0, \text{ sbr fa}$$

reazione opposta (spontanea) sarebbe $= dQ \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$.

Ho trovato una Funzione di stato che, con il suo valore, mi dice se una reazione è spontanea o meno (in circuitazione sarà sempre 0).

$$S = \frac{[d]}{[k]}; \text{ ma } dQ = dST \quad T \text{ è intensiva} \Rightarrow S \text{ è estensiva, poiché}$$

dQ è un'energia, ovvero il prodotto tra una quantità intensiva ed estensiva.



pieno di Gibbs $\approx Cp \rho V$

(V estensivo, p intensivo)

Prendendo come riferimento il grafico della macchina di Carnot: BC e AD sono isentropiche (\Rightarrow non viene scambiato calore (adiabatiche)). L'area sotto ad AB rappresenta il calore assorbito, quella sotto a BC è quello ceduto (isoTerme). Dunque l'area all'interno del ciclo nel piano

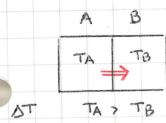
di Gibbs mi dà il calore netto scambiato, che è ovviamente legato al lavoro $\Rightarrow TS$ per certi aspetti è più ricco del piano PV.

Abbiamo dunque appena rappresentato il ciclo di Carnot nel piano di Gibbs.

Lezione del 24/05

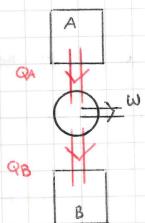
(29)

Ripasso esteso dell'ultima lezione:



$dU = dQ - dW$: La cessione di calore, entro il I principio, è indipendente dalla direzione, mi sperimentalmente osserviamo sempre il flusso procedere da A a B.

Ora potrei pensare di inserire una macchina termica tra A e B:



La macchina funzionerà finché ΔT diventa 0.

Note che nel I esempio ho perso del lavoro, poiché senza la macchina non ho sfruttato la cessione di calore.

Abbiamo visto anche l'esempio della seconda esperienza di Joule:



Averemo visto che $\Delta P = P_A - P_B$

e $dU = 0$



Anche in questo caso avrei potuto sfruttare ΔP e ricavare un lavoro dall'espansione di A.

In entrambi i casi raggiungo situazioni non più utilizzabili per ottenere lavoro.

Averemo anche visto che $\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$ per i cicli reversibili e ciò

ci aveva portato alla formula della circuazione su cicli reversibili: $\oint \frac{dQ}{T} = 0$

Questo integrale potrei scriverlo come $\int_{A, \gamma_1}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B, \gamma_2}^A \frac{dQ}{T} = 0$

$$\Rightarrow \int_{A, \gamma_1}^B \frac{dQ}{T} = - \int_{B, \gamma_2}^A \frac{dQ}{T} = \int_{A, \gamma_1}^B \frac{dQ}{T} \Rightarrow \text{concludiamo che dipende}$$

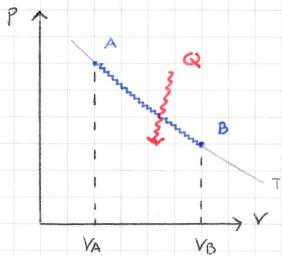
dagli estremi e non dal percorso compiuto, $\gamma_1 \neq \gamma_2$! Abbiamo così introdotto una nuova funzione di stato $dS = \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B dS = S(B) - S(A)$.

Abbiamo anche visto che dS deve essere estensiva $\Rightarrow dS = s dm$ dove s è l'entropia specifica.

anche

dipende solo dagli estremi

$$\int_{A, \gamma_1}^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{irr}} = ? \quad \text{il problema è che dipende dal percorso.}$$



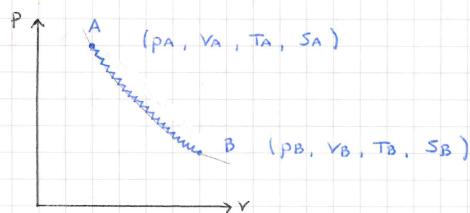
questo è un ciclo irreversibile \Rightarrow non passa attraverso stati di equilibrio.

In queste condizioni non so calcolare S perché lavora con quantità microscopiche.

$$\text{Se però considerassi: } \int_{A, \gamma_1}^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{irr}} + \int_{B, \gamma_2}^A \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}} = \int_B^A \frac{dQ}{T} < 0$$

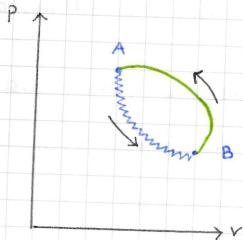
$$\text{ma } \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}} = S(B) - S(A) > \int_{A, \gamma_1}^B \frac{dQ}{T}$$

Trovato la fez.
scorsa



se irreversibile, non posso calcolare S non a causa del percorso (in quanto indipendente da esso) ma poiché non so CALCOLARE $\frac{dQ}{T}$ microscopicamente, in quanto non attraverso stati di equilibrio ben definiti, ma può subire numerose variazioni di cui non sappiamo nulla (dS mi costringe a lavorare con quantità infinitesime precise).

Sono andato da A a B irreversibilmente, e da B ad A reversibilmente.



$$\Delta S = \int_{A, \text{irr}}^B \frac{dQ}{dT} < S(B) - S(A)$$

$\Rightarrow S(A) - S(B) > 0$ DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS

non abbiamo scambio di calore con l'esterno in quanto il sist è ADIABATICO irrevers.

L'universo isolato per eccezione è l'universo stesso : se esistono processi irreversibili l'entropia è destinata ad aumentare !

Entropia di un gas perfetto :

$$\begin{cases} dU = dQ - dW \\ dU = ncv dT \end{cases} \Rightarrow dQ = ncv dT + p dV , \text{ dividendo per } T :$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{T} = ncv \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV \Rightarrow dS = ncv \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

vediamo che l'entropia è legata ad eventuali cambiamenti di T e V ; usando poi la relazione di Mayer : $dS = ncv \left[\frac{dT}{T} + (r-1) \frac{dV}{V} \right]$

$$\Rightarrow S(B) - S(A) = \Delta S = ncv \left[\ln \frac{T_B}{T_A} + (r-1) \ln \frac{V_B}{V_A} \right]$$

$$\Rightarrow S(B) - S(A) = ncv \ln \frac{T_B V_B^{r-1}}{T_A V_A^{r-1}} = ncv \ln \frac{P_B V_B^r}{P_A V_A^r}$$

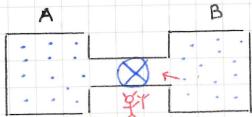
noto che se giungono (A e B) su un'adiabatica reversibile, $\ln 1 = 0$

\Rightarrow non c'è variazione di entropia.

$$P_A V_A^r = P_B V_B^r$$

Viceversa se è adiabatica IRREVERSIBILE $\Delta S \neq 0$!

Ormai, il concetto di irreversibilità è stato introdotto con la Termodinamica, in meccanica non ci sono mai posti il problema ; voglio provare a capire come mi perdo la reversibilità che aveva a livello microscopico.



le gas è già espanso e le 2 camere sono appi' equilibrio.

Osservazione di Maxwell : se ci fosse un piccolo demone (che agisce a PVL microscopico) potrebbe prendere una particelle presente in B e portarla in A \Rightarrow non più in equilibrio.

Ad un certo punto $\Delta p = p(B) - p(A) \neq 0$.

In chiave del

Si inizia a pensare che \forall problema sia usare stati termodynamici e non stati dinamici, dove dovrei considerare F_i e \tilde{F}_i , ma le particelle possono essere N_a . Inizia allora a pensare che ho più stati dinamici che corrispondono al lo stesso stato termodynamico : se posso distinguere gli stati dinamici otterrei la reversibilità che non osservo sperimentalmente su N_a particelle.

Prendo 2 particelle : 1 e 2 ;

A	1,2	1	2	0					
B	0	2	1	1,2					

per $n=2$, la prob. di avere entrambe in un solo contenitore è $p = \frac{1}{4}$;
per esempio A

Proviamo ora con 3 :

A	1,2,3	1,2	1,3	2,3	3	2	1	0	
B	0	3	2	1	1,2	1,3	2,3	1,2,3	Sono MICROSTATI

con $n=3$ ho 8 stati $\Rightarrow p = \frac{1}{8}$ (tutte le particelle in un solo contenitore) ;

se ora $n=N_a$ $\Rightarrow p = \frac{1}{2^{N_a}} \ll 1 \Rightarrow p = \text{pressoché impossibile, ma}$

una minima probabilità c'è.

La probabilità di un evento diminuisce con l'aumentare del numero di configurazioni.

Quando ho una trasf. adiabatica irreversibile ho un aumento dell'entropia

\Rightarrow il # di stati configurazionali dopo è maggiore degli stati dinamici

\Rightarrow il sistema è più stabile.

Per i sistemi isolati, dunque, l'equilibrio corrisponde al MASSIMO DELL'ENTROPIA compatibile con l'energia del sistema.

Dunque Boltzmann riesce a formulare che $S(A) = K \log p(A)$
dove K è una costante (costante di Boltzmann). p = probabilità

Supponiamo due sistemi distinti :

$$\begin{array}{ll} S_1 & p_1 \\ S_2 & p_2 \end{array} \Rightarrow S = F(p) \quad \text{ovvero vorrei una relazione tra probabilità ed entropia.}^*$$

↓

$$S_{\text{TOT}} = S_1 + S_2$$

$$p_{\text{TOT}} = p_1 p_2$$

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \sim F(p_1 p_2) = F(p_1) + F(p_2)$$

Supponiamo $y = 1 + \varepsilon^*$, dunque $F(x+\varepsilon x) = F(x) + F(1+\varepsilon)^*$

$$\approx F(x) + \varepsilon x F'(x) = F(x) + F(1) + \varepsilon F'(1) \quad \text{an TayBr}$$

$F(1)$ è un numero, un valore preciso, per comodità lo pongo = 0,
è anche ottimale perché se pongo $\varepsilon = 0$, $F(x+\varepsilon x) = F(x) + F(1+\varepsilon)$ mi
dà l'identità!

$$\# x F'(x) = F'(1) = h \quad \# f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{h}{x} \quad \# df = h \frac{dx}{x}$$

Tutto questo perché $F'(1)$ è un numero che non sappiamo e chiamiamo h .

A questo punto $df = h \frac{dx}{x}$ è l'espressione di un logaritmo;
ciò spiega anche l'additività dell'entropia.

$$* \left. \begin{array}{l} x_0 = x \\ x = x + \varepsilon x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{TayBr} : F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) = F(x) + F'(x)(x+\varepsilon x - x)$$

$$x_0 = 1 ; x = 1 + \varepsilon \Rightarrow \text{TayBr} : F(1) + F'(1)(1+\varepsilon - 1)$$

NB: maggior entropia = tendenza [di un gas ideale] a portarsi nello stato che ha la maggior probabilità Termodinamica; l'universo evolve in stati termodinamicamente più probabili = l'aumento dell'entropia dell'universo!

* dove 1 è un numero comodo casuale e ε rappresenta i cambiamenti infinitesimi.

* relazione tra l'entropia di un sistema in un dato stato termodinamico e il numero di microstati associati ad esso, ovvero la sua probabilità più.

Lezione del 25/05

(30)

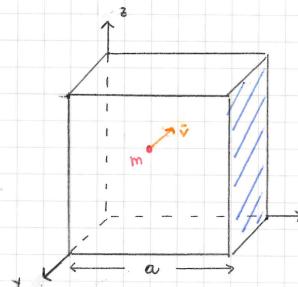
TEORIA CINETICA DEI GAS:

A primo acchito la forma gassosa è più semplice rispetto alle altre.

Vi è un'enorme differenza tra stati dinamici e termodinamici, come abbiamo già visto. Gli stati termodinamici sono individuati da p, T, V .

Definiamo il nostro modello:

- 1 - insieme di particelle identiche;
- 2 - sono in moto disordinato;
- 3 - avvengono urti elastici;
- 4 - non ci sono forze inter-particelle;
- 5 - possiamo considerare le particelle come punti materiali.



$$V = a^3 \quad \text{con } N \text{ particelle;}$$

Considero una particella di massa m e velocità \vec{v}

$$\text{STATO DINAMICO: } m_i(v_x^i, v_y^i, v_z^i) = p$$

vedo che è la componente x che fa muovere ormai a indietro.

Una volta che arriva alla parete, la colpisce con un urto elastico e torna indietro. Sarà definito un tempo τ per il quale colpisce una parete e torna ad essa ($2a$):

$$\tau = \frac{2a}{v_x^i} \Rightarrow \frac{1}{\tau} = V = \frac{v_x^i}{2a}; \quad \text{La parete gli impone un impulso } \Delta p_x = 2mv_x^i$$

$$V \Delta p_x = \frac{v_x^i}{2a} \cdot 2mv_x^i = \frac{m(v_x^i)^2}{a} \quad \text{ma} \quad V \Delta p_x^{\text{TOT}} = \sum_i \frac{m(v_x^i)^2}{a} = F_x$$

ovvero la forza che deve sostenere la parete per reggere i "colpi" delle molecole di gas. Ragioniamo con la pressione: $P_p = \sum_i m_i(v_x^i)^2$
ma devo estendere a tutte le direzioni:

$$\underline{3pV = \sum_i m_i [(v_x^i)^2 + (v_y^i)^2 + (v_z^i)^2]}$$

La molecola, vista come punto materiale, ha 3 gradi di libertà:

può muoversi liberamente lungo x, y, z .

NB: essendo $V = \frac{1}{\tau}$, essa è ovviamente la FREQUENZA

ma per il modello scelto, la massa è uguale per tutte le particelle

$$\Rightarrow m \sum_i v_i^2 = 3pV \Rightarrow pV = \frac{1}{3} m \sum_i v_i^2$$

vedo che al I membro ho qualcosa che mi ricorda gli stati termodinamici,
al II invece mi ricorda gli stati dinamici;

posso poi definire una velocità quadratica media: $\bar{v}^2 = \frac{\sum_i v_i^2}{N_a}$ *

$$\Rightarrow pV = \frac{1}{3} m N_a \bar{v}^2 \quad \text{EQUAZIONE DI JOULE - CLAUSIUS.}$$

↳ lavoro su
1 mole di gas

questa formula è un ponte fra gli stati dinamici e termodinamici, tra lo stato macroscopico e microscopico!

Posso poi "modificare":

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} pV \frac{1}{N_a} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_a} T \quad \text{dove } \frac{R}{N_a} = k_B \text{ orrore}$$

è la costante di Boltzmann visto la lezione scorsa.

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \bar{K} = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow \text{compre la Temperatura: essa}$$

è direttamente proporzionale all'energia cinetica media \bar{K} delle particelle, dunque *

Notò che, data T , il II termine è fissato, allora anche il I deve esserlo.

Se ho 2 gas \neq , mi aspetterei $2 \bar{v} \neq$, a causa della differenza di m .

$$T = 273 K$$

$$H_2 \text{ ha } v \approx 1840 \text{ m/s}$$

$$O_2 \text{ ha } v \approx 461 \text{ m/s}$$

} sperimentale

Il 3 è importante: sono i gradi di libertà delle mie particelle; se chiamo

$$l = 3 \Rightarrow K = l \left(\frac{1}{2} k_B T \right) \text{ (essendo punti materiali).}$$

$$\text{L'energia del mio sistema è } U = N_a l \left(\frac{1}{2} k_B T \right) = \frac{l}{2} RT.$$

Notiamo dunque che U coincide con \bar{K} .

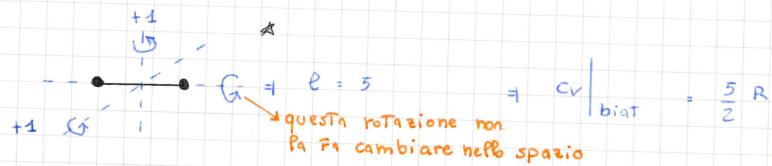
* La velocità quadratica media \bar{v}^2 è una caratteristica di un certo gas ad una certa Temperatura.

* Come vediamo poi, è anche proporzionale a U del sistema \Rightarrow misurare K è un modo per ottenere U , l'energia interna del sistema.

Ricordiamo che $\frac{dU}{dT} = Cv = \frac{e}{2} R \Rightarrow Cv \Big|_{\text{punto mrt.}} = \frac{3}{2} R$

↓
ometto n
in quanto = 1

GAS BIATOMICO:
 O_2, N_2, H_2



il modello è estremamente generalizzabile cambiando solo e.

Se mettessi però in conto gli effetti vibrazionali ormai le aumenta, ma non tenendone conto i dati sperimentali tornano (una molecola è soggetta a vibrazioni!).

Consideriamo ora un punto materiale m al tempo t:

$$t \quad \overset{m}{\bullet} \quad (x, y, z) \quad \frac{d}{dt} \times m \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

(x, y, z) → Forze che agiscono su di esso

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} \frac{mx^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \frac{mx^2}{2} = \frac{d}{dt} mx \frac{dx}{dt} = m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m x \frac{d^2x}{dt^2} \right]$$

easy

$$\frac{d}{dt} mx \frac{dx}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{mx^2}{2} \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \ddot{x}$$

↓ $m \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} = m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{my^2}{2} \right) = \ddot{y} + m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{mz^2}{2} \right) = \ddot{z} + m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$\text{posso sommare: } mv^2 + (x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}) = \frac{d^2}{dt^2} \frac{m}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

questo vale per ogni particella, TEOREMA DEL VIRIALE.

Un gas biatomico è formato da 2 atomi uniti da un legame: si muove lungo x, y, z ma può anche ruotare!

Si può rigorosamente dimostrare che, in un regime stazionario, considerando tutte le particelle, il II Termine è 0;

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = - \frac{1}{2} \sum_i (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i) \text{ VIRIALE}$$

Orvers l'energia cinetica trasformata di tutte le particelle è uguale ed opposta al viriale totale delle forze (ovvero le componenti delle forze pesante per la posizione). Somma la posizione per ogni particella, vedo le variazioni che può avere nel tempo la posizione al quadrato, in un regime stazionario di particelle che si muovono in maniera caotica in tutti i punti e sono indistinguibili tra loro.

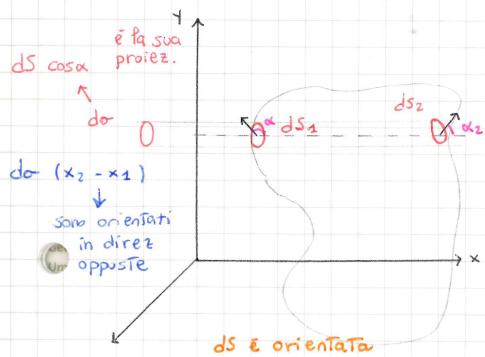
Consideriamo gli urti tra 2 particelle: devo sommare le forze viriali:

$$(x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 + z_1 \dot{z}_1) + (x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2 + z_2 \dot{z}_2) = \text{E' URTO avviene in un punto}$$

$$= x_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + y_1 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + z_1 (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = 0 \text{ per il}$$

III principio $\Rightarrow x_1 = x_2$ etc... non entrano nel cambiamento di K_{tot} legato al viriale.

Immaginiamo la regione che stiamo analizzando:



$$dF = p \, ds$$

Analizzo il caso lungo x, vale poi per gli altri assi; la forza compariva nel viriale; F è opposta a dS_1 perché deve "tenere" le particelle \Rightarrow il segno negativo non c'è più in $-\frac{1}{2} \sum_i (x_i \dot{x}_i + \dots)$

$$\frac{P}{2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, ds \text{ e dovrò poi integrare per considerare la superficie totale:}$$

$$\frac{P}{2} \int_{\text{tot}} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, ds = \frac{3}{2} PV$$

Averemo visto con Gauss cosa succede con dS_1 e dS_2 : sommo tutti i volumetti opposti

Allora $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{3}{2} PV$! Ho generalizzato tutte le osservazioni precedenti in un discorso del tutto generale.

* integrando su tutta la sup è come ricreare l'intero volume, sommando tutti i volumetti

* essendo le particelle puntiformi: $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$

FINE CORSO