

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DORTMUND

FORTGESCHRITTENPRAKTIKUM PHYSIK
SOMMERSEMESTER
2015

V21
Optisches Pumpen

01.02.2016

1. ABGABE

Leonard Wollenberg

leonard.wollenberg@tu-dortmund.de

Joshua Luckey

joshua.luckey@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Theorie	3
2.1 Energieaufspaltung	3
2.2 Optisches Pumpen	5
2.3 Resonanzstellen	7
2.4 Verallgemeinerung für nicht verschwindenden Kernspin	8
2.5 Quadratischer Zeeman-Effekt	9
2.6 Transiente Effekte	9
3 Durchführung	10
3.1 Versuchsaufbau	10
3.2 Messprogramm	11
3.2.1 Kompensation des Erdmagnetfeldes	11
3.3 Messung der Resonanzstellen	11
3.4 Relaxation zur Bestimmung des Mischungsverhältnisses	12
3.5 Angaben zur Apparatur	13
4 Fehlerrechnung	14
5 Auswertung	15
6 Diskussion	23

1 Einleitung

Mit dem Verfahren des Optischen Pumpen lässt sich eine Abweichung in den Besetzungszahlen erzeugen. Damit können mit hoher Präzision, die Energieaufspaltungen der Hyperfeinstruktur oder der Zeeman-Aufspaltung gemessen werden. Mithilfe dieses Verfahrens wird in diesem Versuch die Aufspaltung eines Rubidium-Isotops gemessen.

2 Theorie

2.1 Energieaufspaltung

Ein Atom besitzt verschiedene Möglichkeiten wie sich deren Energieniveaus aufteilen. Dazu wird zunächst der Fall eines Atoms mit verschwindenden Kernspins behandelt. Der Gesamtdrehimpuls der freien Elektronen eines Atoms \vec{J} erzeugt ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_J$ deren Zusammenhang gegeben ist durch

$$\vec{\mu}_J = -g_J \cdot \mu_B \cdot \vec{J} \quad (1)$$

$$\Rightarrow |\vec{\mu}_J| = g_J \cdot \mu_B \cdot \sqrt{J \cdot (J + 1)}. \quad (2)$$

Darin ist g_J der Landé-Faktor und μ_B das Bohrsche Magneton. Mithilfe des Landé-Faktors wird berücksichtigt das sich der Gesamtdrehimpuls aus dem Bahndrehimpuls \vec{L} und dem Spin \vec{S} zusammen setzt. Für deren magnetischen Momente $\vec{\mu}_{L/S}$ gilt

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L \cdot (L + 1)} \quad (3)$$

und

$$|\vec{\mu}_S| = g_S \cdot \mu_B \sqrt{S \cdot (S + 1)}. \quad (4)$$

Mithilfe der vektoriellen Gleichung

$$\vec{\mu}_L = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \quad (5)$$

$$\Rightarrow |\vec{\mu}_J| = |\vec{\mu}_L| \cos(\beta) + |\vec{\mu}_S| \cos(\alpha) \quad (6)$$

lässt sich unter zu Hilfe nahme des Kosinussatzes und dem aufgespannten Dreieck von \vec{J} , \vec{L} und \vec{S} eine Formel für g_J herleiten.

$$g_J = \frac{(g_s + 1) \cdot J \cdot (J + 1) + (g_s - 1) \cdot [S \cdot (S + 1) - L \cdot (L + 1)]}{2 \cdot J \cdot (J + 1)} \quad (7)$$

Wird nun ein äußeres Magnetfeld B angelegt, so tritt eine Aufspaltung der Energieniveaus auf. Dabei ist die Energie der magnetischen Wechselwirkung gegeben als

$$U_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B} = M_J \cdot g_J \cdot \mu_B \cdot B. \quad (8)$$

Darin ist $M_J \in [-J, -J+1, \dots, J-1, J]$, dies Folgt aus der Richtungsquantelung. Dieser Effekt wird Zeeman-Effekt genannt. Bis jetzt wurde angenommen das der Kern einen Kernspin von Null hat. Nun wird der Fall betrachtet das der Kernspin von Null verschieden ist. Der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle \vec{J} und der Kernspin \vec{I} koppeln bei hinreichend schwachen Magnetfeld vektoriell aneinander zum Gesamtdrehimpuls der Systems \vec{F} .

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad (9)$$

Die Energieniveaus spalten sich jetzt in die Hyperfeinstruktur auf und bilden $2J+1$ oder $2I+1$ Niveaus, je nach dem ob I größer ist als J oder anders herum. Die Aufspaltung eines einzelnen Niveaus kann mithilfe der Quantenzahl F bestimmt werden, die von $|I-J|$ bis $|I+J|$ läuft. Durchs anlegen eines externen kleinen Magnetfeldes wird die Hyperfeinstruktur in $2F+1$ Zeeman-Niveaus aufgespalten. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 Dargestellt.

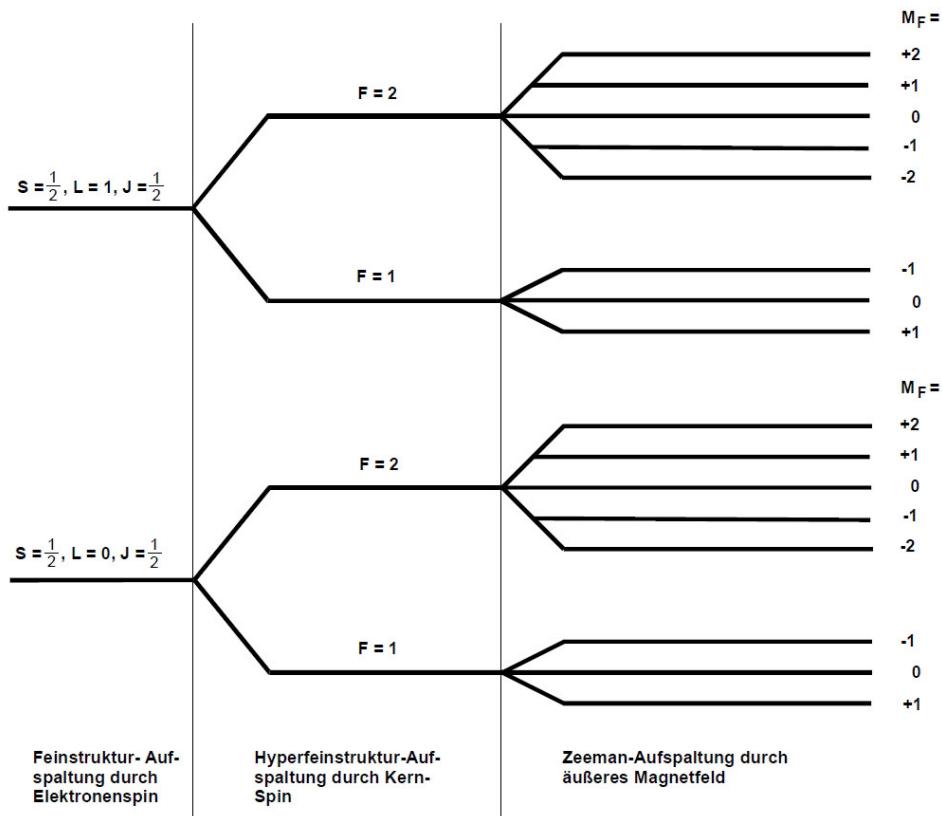


Abbildung 1: Beispiel für die Aufspaltungen durch Elektronenspin, Kernspin und äußeren Magnetfeld anhand eines Alkali-Atoms mit $I = \frac{3}{2}$ und $J = \frac{1}{2}$.[1]

Die Differenz von zwei benachbarten Energieniveaus ist gegeben durch

$$U_{\text{HF}} = g_F \mu_B B. \quad (10)$$

Der Landé-Faktor für die Zeeman-Aufspaltung, lässt sich mithilfe von

$$\begin{aligned} |\vec{\mu}_B| &= g_F \cdot \mu_B \sqrt{F \cdot (F + 1)} \\ &= g_J \cdot \mu_B \sqrt{J \cdot (J + 1)} \cdot \cos(\angle(\vec{J}, \vec{F})) + g_I \cdot \mu_K \sqrt{I \cdot (I + 1)} \cdot \cos(\angle(I, \vec{F})) \end{aligned} \quad (11)$$

bestimmen. Dabei ist μ_K das magnetische Moment des Kerns, allerdings ist die Masse des Kerns viel größer, weshalb $\mu_K \ll \mu_B$ gilt. Dadurch lässt sich der Landé-Faktor bestimmen zu

$$g_F \approx g_J \frac{F \cdot (F + 1) + J \cdot (J + 1) - I(I + 1)}{2F \cdot (F + 1)}, \quad (12)$$

wobei wieder der Kosinussatz verwendet wurde.

2.2 Optisches Pumpen

In einem isolierten Atom, sind die Zustände niedrigster Energie, aufgrund des Pauliprinzips vollständig besetzt. In höheren Zuständen kann das Verhältnis zweier Besetzungszahlen $N_{1/2}$ mithilfe der Boltzmannstatistik beschrieben werden

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{\exp(-W_2/k_B T)}{\exp(-W_1/k_B T)}. \quad (13)$$

Dabei ist W_i die Energie zur Besetzungsanzahl N_i , T die Gleichgewichtstemperatur und k_B die Boltzmannkonstante. Die g_i sind die statistischen Gewichte. Weil $W_2 > W_1$ ist, kann daraus abgelesen werden, dass die Zustandszahl N_1 mehr besetzt ist als die Zustandszahl N_2 . Mithilfe des optischen Pumpens, kann eine Abweichung von Gleichung (13) erzeugt werden. Es kann sogar der Zustand der Besetzungsinversion auftreten $N_2 > N_1$. Die Energie die ein Lichtquant haben muss um von dem Atom absorbiert zu werden muss

$$hf = W_2 - W_1 \quad (14)$$

sein. Das ist die gleiche Energie wie die eines emittierten Photons.

Es wird zunächst das Beispiel des Alkali-Atoms behandelt, weil dieses ein freies Elektron besitzt und keinen Kernspin. Dadurch hat es den Grundzustand $^2S_{1/2}$ und die zwei erst angeregten Zustände $^2P_{1/2}$ und $^2S_{3/2}$. Es sind 2 optische Übergänge möglich, D_1 und D_2 . Die Zustände $^2S_{1/2}$ und $^2P_{1/2}$ haben $J = 1/2$. Daraus folgt, dass die Aufspaltung $M_J = \pm 1/2$ ist und die daraus folgende Differenz $\Delta M_J = 0, \pm 1$. Diese Übergänge sind in Abbildung 2

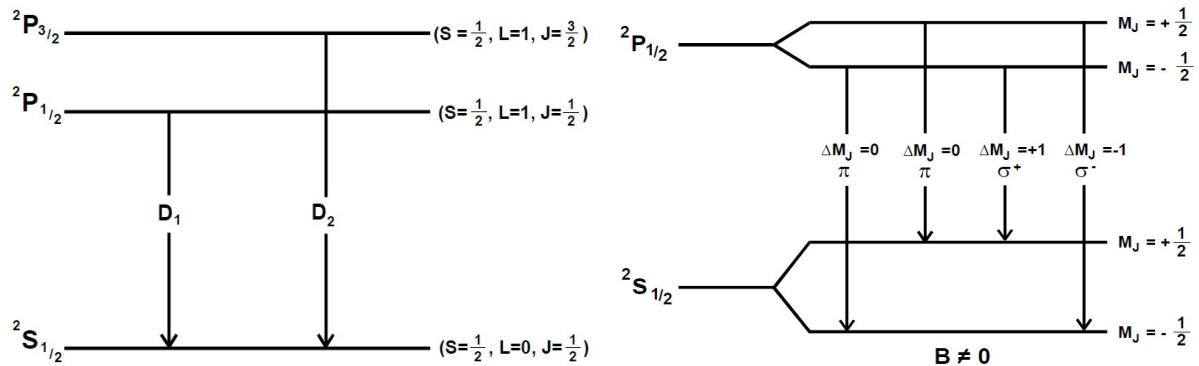


Abbildung 2: Hier ist die Dublettstruktur des Alkali-Spektrums dargestellt und die Dazugehörigen Quantenzahlen, sowie die Zeeman-Aufspaltung des Grundniveaus und des ersten angeregten Zustandes und deren Übergänge.[1]

dargestellt.

Der Übergang σ^+ ($\Delta M_J = +1$) entspricht rechtszirkular-polarisiertes Licht, das bedeutet das der Spin der Lichtquanten antiparallel zur Ausbreitungsrichtung ist und bei dem σ^- -Übergang ($\Delta M_J = -1$) steht der Spin parallel. Die Lichtquanten sind bei dem π -Übergang ($\Delta M_J = 0$) hingegen linear polarisiert. Dabei werden die σ -Übergänge entlang des Magnetfeldes abgestrahlt und die π -Übergänge senkrecht dazu. Wird nun Gas aus diesem Alkali-Atom im thermischen Gleichgewicht durch zirkularpolarisiertes D_1 -Licht angeregt, entlang des Magnetfeldes ($\Delta M_J = \pm 1$), tritt nur der Übergang von $^2S_{1/2}, M_J = -\frac{1}{2}$ nach $^2P_{1/2}, M_J = +\frac{1}{2}$ auf. Durch spontane Emission tritt der Übergang von $^2P_{1/2}, M_J = +\frac{1}{2}$ sowohl nach $^2S_{1/2}, M_J = -\frac{1}{2}$ als aber auch nach $^2S_{1/2}, M_J = +\frac{1}{2}$. Dies sorgt dafür das der höhere Zustand $^2S_{1/2}, M_J = +\frac{1}{2}$ mehr besetzt ist als Zustand $^2S_{1/2}, M_J = -\frac{1}{2}$. Wenn der energetisch niedrigere Zustand $^2S_{1/2}, M_J = -\frac{1}{2}$ weniger besetzt ist, wird das D_1 -Licht nicht mehr absorbiert und kann somit mit vollständig gemessen werden. Im Energiebereich des Zeeman-Niveaus, tritt spontane Emission praktisch nicht auf, dies bedeutet das überwiegend induzierte Emission eine Rolle spielen.

2.3 Resonanzstellen

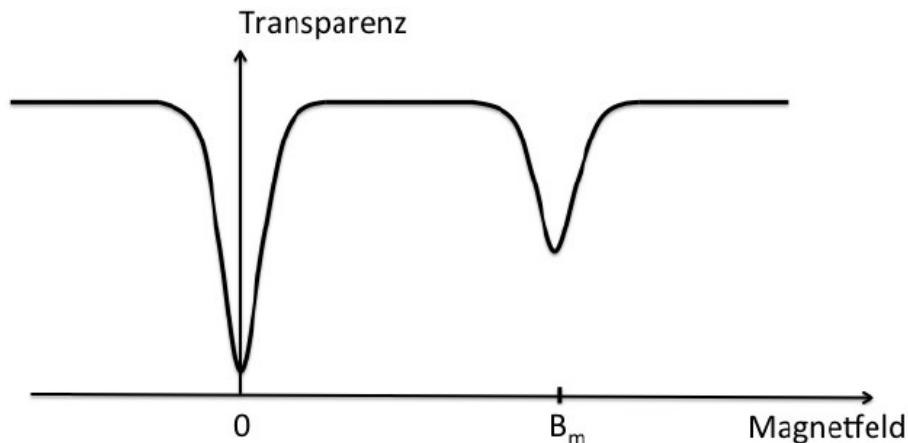


Abbildung 3: Die Darstellung der Transparenz eines Alkaliatoms in Abhängigkeit des angelegten Magnetenfelds.[1]

Es gibt für ein Alkali-Atom 2 Resonanzstellen. Als erstes gibt es eine bei $B = 0$, dies kann dadurch erklärt werden, dass keine Zeeman-Aufspaltung stattfindet und somit auch kein optisches Pumpen möglich ist. Hier mit können die Einflüsse des Erdmagnetfeldes bestimmt und ausgeglichen werden. Durch angeschalteten Magnetfeld wird das Pumpen begonnen und somit die Besetzungsinvolution herbeigeführt. Wenn nun die Energie eines Photons gleich der Energiedifferenz der Zeeman-Aufspaltung ist, tritt wieder induzierte Emission auf, dass zur Folge hat das sich das $^2S_{1/2}, M = -1/2$ Niveau füllt. Die Magnetfeldstärke der Resonanzstelle ist dabei durch

$$\begin{aligned} hf &= U_{\text{HF}} = \mu_B \cdot g_J \cdot B_{\text{Res}} \\ \Rightarrow B_{\text{Res}} &= \frac{4\pi m_0}{e_0 g_J} f \end{aligned} \quad (15)$$

gegeben.

2.4 Verallgemeinerung für nicht verschwindenden Kernspin

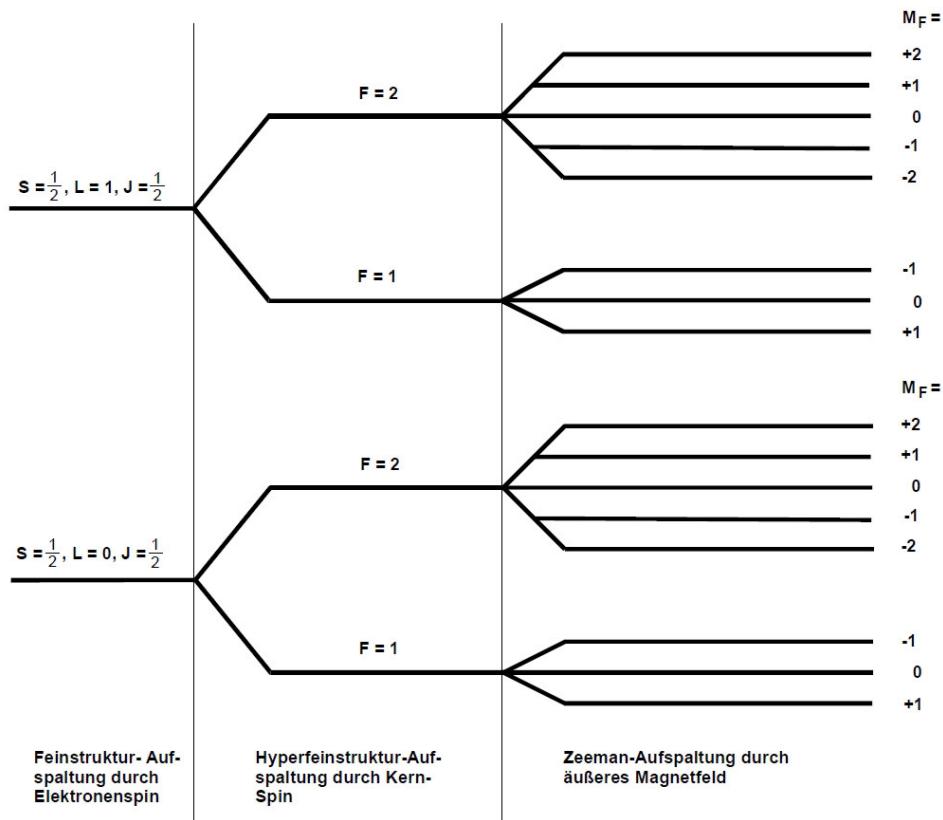


Abbildung 4: Energieaufspaltung für ein Atom mit Kernspin ungleich null.[1]

Durch den von null verschiedenen Kernspin wird die Aufspaltung in den Zeeman-Niveaus umfangreicher, wie in Abbildung 4 für $I = 3/2$ dargestellt. Wird auf das System zirkularpolarisiertes Licht gestrahlt, sind nur Übergänge mit $\Delta M_F = +1$ möglich. Dies sorgt dafür, dass keine Übergänge von $F = 2, M_F = +2$ möglich sind, weil kein $M_F = +3$ existiert. Dies hat zur Folge, dass mit der Zeit die Besetzungszahl zunehmen wird, weil durch spontane Emission der Zustand weiter besetzt werden kann. Das sorgt dafür, dass das Grundniveau leer gepumpt wird. Wird nun ein Magnetfeld mit der Magnetfeldstärke der Resonanzstelle angelegt, wird auch hier das Niveau sich leeren und der Grundzustand kann wieder leer gepumpt werden.

2.5 Quadratischer Zeeman-Effekt

Bei höheren Magnetfeldern müssen Terme höherer Ordnung mit berücksichtigt werden für U_{HF} . Durch lösen der Eigenwertgleichung

$$H\psi = U\psi \quad (16)$$

unter Berücksichtigung der magnetischen Momente $\vec{\mu}_J$ und $\vec{\mu}_I$, wird die Energie abhängig von der Quantenzahl M_F . Die Energie lässt sich schreiben als

$$U_{\text{HF}} = g_F \mu_B + g_F^2 \mu_B^2 B^2 \frac{1 - 2M_F}{\Delta E_{\text{Hy}}} - \dots, \quad (17)$$

wobei ΔE_{Hy} die Energiedifferenz der Niveaus F und $F + 1$ ist.

2.6 Transiente Effekte

Bis jetzt wurden nur konstante Magnetfelder betrachtet. Nun wird der Fall für sich periodisch ändernde Magnetfelder behandelt. Das Magnetfeld und die Frequenz seien auf die Resonanzstelle eingestellt. Dann ist die Frequenz gegeben als

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = g_F \frac{\mu_B}{h} B_0 = \gamma B_0 \quad (18)$$

wobei γ das gyromagnetische Verhältnis ist und als

$$\gamma = g_F \frac{\mu_B}{h} \quad (19)$$

definiert ist. Durch lösen einer klassischen Differentialgleichung für ein stationäres Magnetfeld B und einem senkrecht dazu rotierenden Magnetfeld B_{RF} , lässt sich zeigen dass sich das Problem als Summe von einem konstanten Magnetfeld und dem Magnetfeld ω/γ auffassen lässt, dadurch kann

$$B_{\text{eff}} = B + \frac{\omega}{\gamma} \quad (20)$$

definieren. Es lässt sich für den Resonanzfall zeigen, dass $|B_{\text{eff}}| = B_{RF}$ ist. Daraus folgt, dass es sich mit der Larmor-Frequenz $f = \gamma_{RF}$ rotiert. Die resultierende Periode ist somit $T = 1/\gamma B_{RF}$. Für zwei Isotope bei resonanten Magnetfeld gilt somit

$$\frac{T_{87}}{T_{85}} = \frac{\gamma_{85}}{\gamma_{87}}. \quad (21)$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

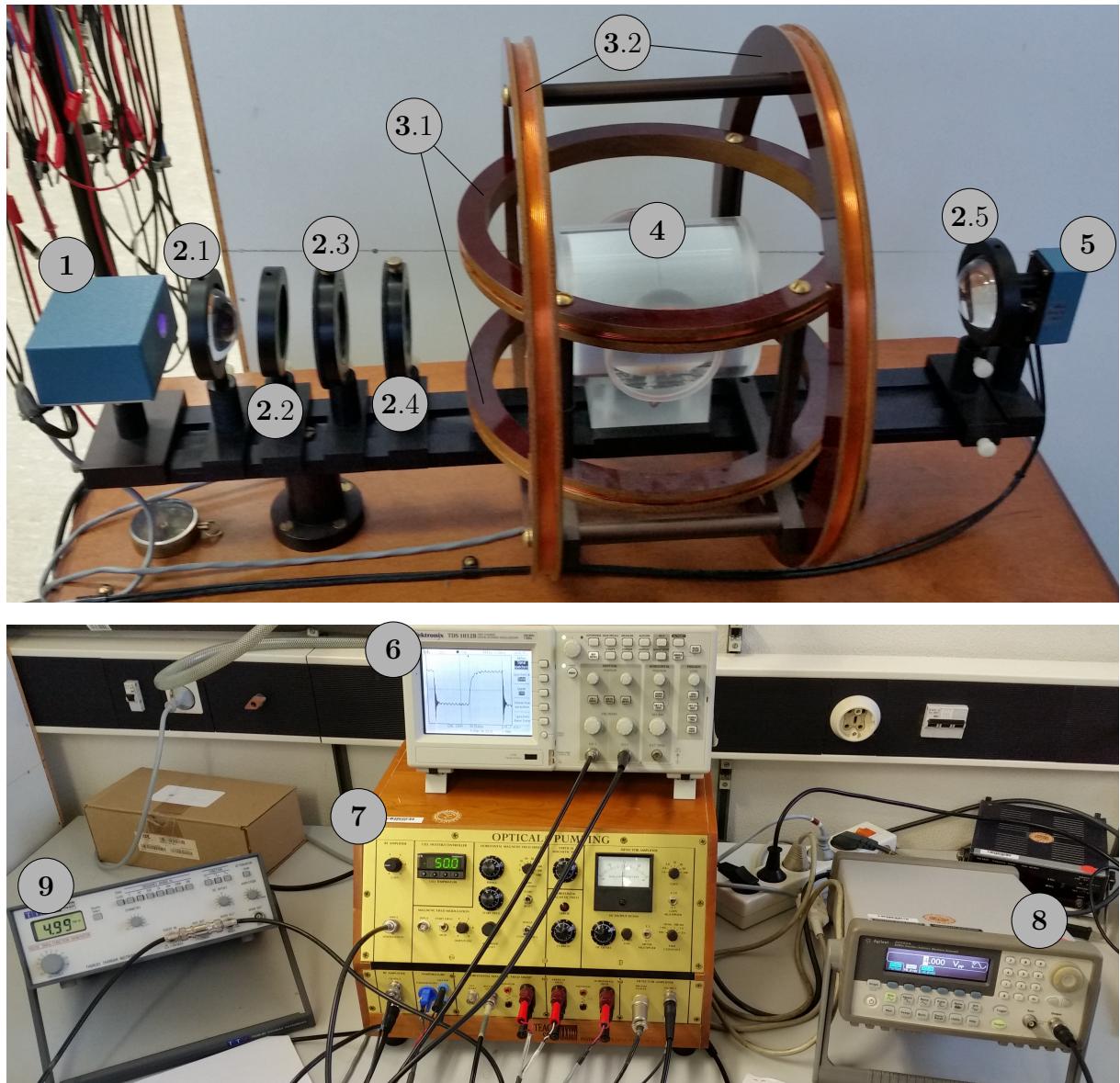


Abbildung 5: Oben: Der Verwendete Versuchsaufbau der optischen Pumpe.

Unten: Das Kontrollgerät mit dem die optische Pumpe gesteuert wird, die nötigen Generatoren, sowie das Oszilloskop für die auslese.

In Abbildung 5 ist der verwendete Versuchsaufbau dargestellt. Das Licht für die Anregung kommt von einer Spektrallampe (1), das Licht wird mithilfe einer Sammellinse (2.1) gebündelt und danach mithilfe eines D_1 -Filters (2.2) auf die Nötige Anregungswellenlänge gefiltert. Danach wird mit einem Linearpolarisator (2.3) und einer $\lambda/4$ -Platte (2.4) zirkular-polarisiertes Licht welches auf die Dampfzelle (4) fällt. Nach der Dampfzelle steht eine Sammellinse (2.5) die das Licht in eine Photodiode (5) Fokussiert, die Diode ist an einem Oszilloskop (6) angeschlossen.

Im Aufbau befinden sich zwei Helmholtz-Spulenpaare , eine Vertikale (3.1) und eine Horizontale (3.2), dabei ist über die Horizontale Helmholtz-Spule eine Sweep-Spule gewickelt. Die Spulen können über das Kontrollgerät (7) einzeln eingestellt werden.

Weiter wird ein Hochfrequenzgenerator (8) zum betrieb der Spule benötigt und ein Generator (9) für niedrigere Frequenzen um eine Modulation des Magnetfeldes zu erzeugen. Die Heizung der Dampfzelle wird eine halbe Stunde bevor der Messung angestellt, um einen optimalen Dampfdruck zu erzeugen. Der fertige Versuchsaufbau muss abgedunkelt werden.

3.2 Messprogramm

3.2.1 Kompensation des Erdmagnetfeldes

Zunächst muss der Aufbau so gedreht werden das er parallel beziehungsweise antiparallel zu der Horizontalkomponente des Erdmagnetfelds steht. Als nächstes wird die Vertikal-komponente ausgeglichen. Dazu wird zunächst die Diode auf Kanal 2 des Oszilloskops gegeben und auf Kanal 1 wird der Recorder-Ausgang der Sweepspule gelegt und das Oszilloskop wird auf XY Betrieb gestellt. Auf dem Oszilloskop sollte ein breiter nach unten gerichteter Peak zusehen sein, dieser wird mithilfe der Vertikalspule auf minimale Breite gebracht.

3.3 Messung der Resonanzstellen

In dieser Messung wird von 100 kHz bis 1 MHz , in 100 kHz schritten durch geführt. Dabei wird für jeden schritt der Strom gemessen an dem die Resonanzstelle des Magnetfeldes liegt, ein mal für das Magnetfeld bei $B = 0$ und für die beiden Isotope. Die Sweep-Spule wird mithilfe des Schalters Start/Reset auf Reset gestellt, wodurch ein konstantes Magnetfeld in der Apparatur vorliegt. Dabei ist der Strom der angelegt wird Proportional zu den Umdrehungen an dem Potentiometer. Ab einer Frequenz von 200-300 kHz, muss mithilfe der zusätzlichen Horizontalenspule der Sweep-Bereich auf die Resonanzstelle erweitert werden.

3.4 Relaxation zur Bestimmung des Mischungsverhältnisses

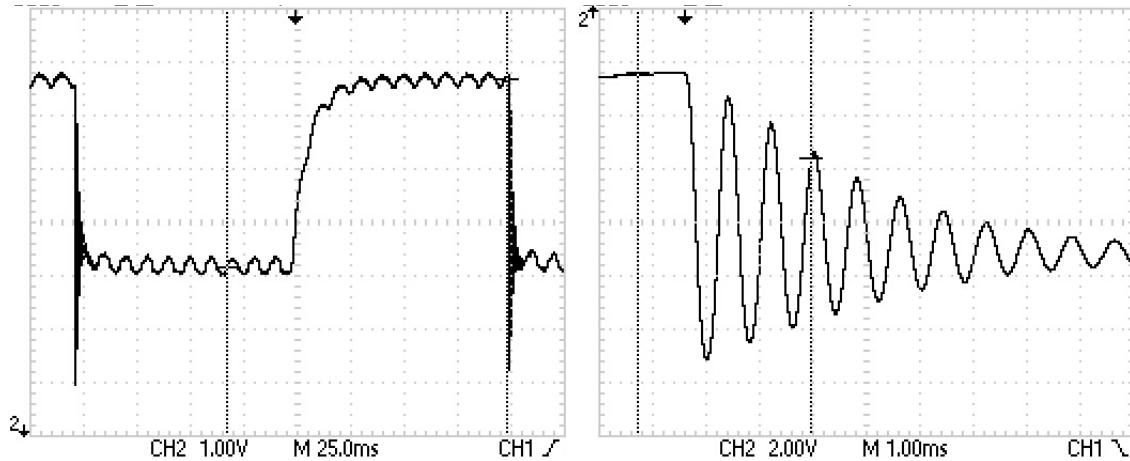


Abbildung 6: Links: der Fall wo sich das Magnetfeld aufbaut.
Rechts: Der Relaxationsfall.

An den Input RF Modulation-Anschluss des Kontrollgeräts wird der zweite Generator angeschlossen. Dieser wird mit einer Rechteckspannung, auf 5 Hz und 0-5V eingestellt. Die Rechteckspannung sorgt dafür das im Wechsel ein Schwingfall beziehungsweise der Relaxationsfall vorliegt und eine Phase in der sich das Magnetfeld im System wieder aufbaut. Diese beiden Fälle sind in Abbildung 6 dargestellt. Der Generator wird weiter noch auf Kanal 1 des Oszilloskops gestellt. Dieses wird auf den YT-Betrieb umgestellt und der Trigger wird auf die positive Flanke von Kanal 1 gestellt. Hier wird die Aufsteigende Flanke wie links in Abbildung 6 dargestellt aufgenommen, mithilfe des Oszilloskops. Der Trigger wird auf die negativen Flanke umgestellt. Und es wird in den Relaxationsbereich der Nach der aufsteigenden Flanke hinein gezoomt, dieser ist Rechts in Abbildung 6 dargestellt. Dies wird für Spannungen von 1-10 V in 1 V Schritten wiederholt und ebenfalls für beide Isotope durchgeführt.

3.5 Angaben zur Apparatur

Spule	Radius R/cm	Windungszahl N	Maximalstrom I_{\max}/A	Potentiometer Umdrehung/A
Sweep-Spule	16,39	11	1	0,1
Horizontale-Spule	15,79	154	3	0,3
Vertikale-Spule	11,735	20	1	0,1

Tabelle 1: Die angaben zu den Spulen die für die Bestimmung der des angelegten Magnetfeldes Relevant sind.[1]

In Tabelle 1 sind die Angaben zu den Einzelnen Spulen gegeben. Um daraus das nötige herrschende Magnetfeld zu bestimmen wird die Formel für die Helmholtz-Spule benötigt:

$$B = \mu_0 \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{N \cdot I}{R} \quad (22)$$

4 Fehlerrechnung

Im folgenden Abschnitt werden die, für die Auswertung der aufgenommenen Daten verwendeten Gleichungen aufgezeigt und erläutert.

Der Mittelwert aus mehreren Ergebnissen einer Messung wurde mit Hilfe von

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i \quad (23)$$

berechnet. Für die Berechnung der statistischen Abweichung wurde die folgende Gleichung verwendet:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (24)$$

Für die Ungenauigkeit der aufgenommenen Messwerte wurde im allgemeinen die kleinste Skaleneinheit des verwendeten Messgeräts angenommen. Für die Fehlerfortpflanzung dieser Unsicherheiten wurde die gaußsche Fehlerfortpflanzung verwendet. Damit berechnet sich der Fehler σ_y einer Größe $y = y(\vec{x})$, mit den Messgrößen $\dim \vec{x} = n$, wie folgt:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}. \quad (25)$$

Die relative Abweichung eines Messergebnisses x vom gegebenen Theoriewert x_{theo} wurde mit folgender Gleichung berechnet:

$$\Delta_{\text{rel}} x = \frac{|x - x_{\text{theo}}|}{x_{\text{theo}}}. \quad (26)$$

Die in der Auswertung angefertigten Regressionskurven wurden mit Hilfe der *Python*-Bibliothek *scipy* [2] durchgeführt.

5 Auswertung

In Abbildung 7 ist ein typisches Signalbild dargestellt, welches bei einer Frequenz von 100 kHz aufgenommen wurde. Die x -Achse der Abbildung ist proportional zum angelegten Magnetfeld B und die y -Achse ist proportional zur Transparenz des Rubidiumdampfes für das eingestrahlte σ_+ -Licht. Zu sehen sind drei Minima, diese entsprechen von links nach rechts dem Nulldurchgang, der Resonanzstelle des ersten Isotops und der Resonanzstelle des zweiten Isotops. Das Nulldurchgang-Minimum ist das größte, da an diesem Punkt kein Magnetfeld anliegt und somit keine Zeeman-Aufspaltung auftritt und die Transparenz gegen Null geht, da kein optisches Pumpen möglich ist. Die Minima der beiden Rubidium-Isotope werden im Folgenden der Reihenfolge nach als 1 und 2 bezeichnet, da erst nach Bestimmung des Kernspins eine Identifikation des jeweiligen Isotops möglich ist.

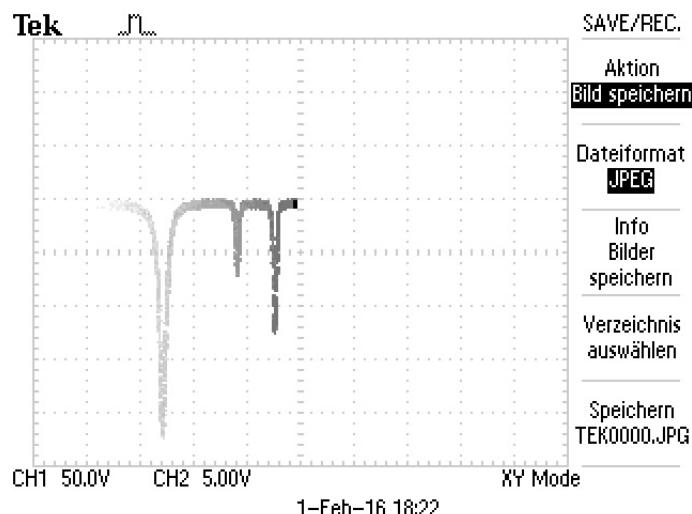


Abbildung 7: Typisches Signalbild des durchgeföhrten Versuchs, aufgenommen bei einer Frequenz von 100 kHz. Die Achsen sind Proportional zum anliegenden Magnetfeld (x) und der Transparenz des Rubidiumdampfes (y). Zusehen sind die Minima für den Nulldurchgang des Magnetfeldes und die Resonanzstellen für die beiden Rubidium-Isotope.

Die eingestellten Spulenstromstärken der Sweep-Spule und der Horizontalfeld-Spule sind in Tabelle 2 in Abhängigkeit der eingestellten Frequenz für die Resonanzstellen beider Isotope angegeben. Das Gesamtmagnetfeld in horizontaler Richtung, welches aus den Stromstärken und den gegebenen Abmessungen der Spulen Tabelle 1 mit Gleichung (22) berechnet wurde ist ebenfalls angegeben. Die berechneten Magnetfeld für beide Isotope sind in Abbildung 8 gegen die jeweiligen Frequenzen aufgetragen.

Frequenz f/kHz	Stromstärke $I_{1,S}/\text{mA}$	Stromstärke $I_{1,H}/\text{mA}$	Magnetfeld B_1/mT	Stromstärke $I_{2,S}/\text{mA}$	Stromstärke $I_{2,H}/\text{mA}$	Magnetfeld $B_2/\mu\text{T}$
100	561 ± 1	0 ± 3	$0,034 \pm 0,003$	680 ± 1	0 ± 3	41 ± 3
200	579 ± 1	15 ± 3	$0,048 \pm 0,003$	814 ± 1	15 ± 3	62 ± 3
300	281 ± 1	51 ± 3	$0,062 \pm 0,003$	639 ± 1	51 ± 3	83 ± 3
400	174 ± 1	75 ± 3	$0,076 \pm 0,003$	649 ± 1	75 ± 3	104 ± 3
500	199 ± 1	90 ± 3	$0,091 \pm 0,003$	787 ± 1	90 ± 3	126 ± 3
600	130 ± 1	111 ± 3	$0,105 \pm 0,003$	839 ± 1	111 ± 3	147 ± 3
700	237 ± 1	120 ± 3	$0,120 \pm 0,003$	671 ± 1	150 ± 3	172 ± 3
800	401 ± 1	126 ± 3	$0,135 \pm 0,003$	615 ± 1	177 ± 3	192 ± 3
900	438 ± 1	138 ± 3	$0,147 \pm 0,003$	753 ± 1	192 ± 3	213 ± 3
1000	650 ± 1	141 ± 3	$0,163 \pm 0,003$	836 ± 1	210 ± 3	234 ± 3

Tabelle 2: In Abhängigkeit der eingestellten Frequenz aufgenommenen Stromstärken durch die beiden horizontalen Spulen. Die Messwerte der Sweep-Spule sind dabei mit (S) und die der Horizontal-Feld-Spule mit (H) gekennzeichnet. Aufgenommen wurden die Stromstärken an den Resonanzstellen für beide Isotope (1) und (2). Mit den gegebenen Maßen der Spulen wurde das horizontale Gesamtmagnetfeld aus den Stromstärken bestimmt.

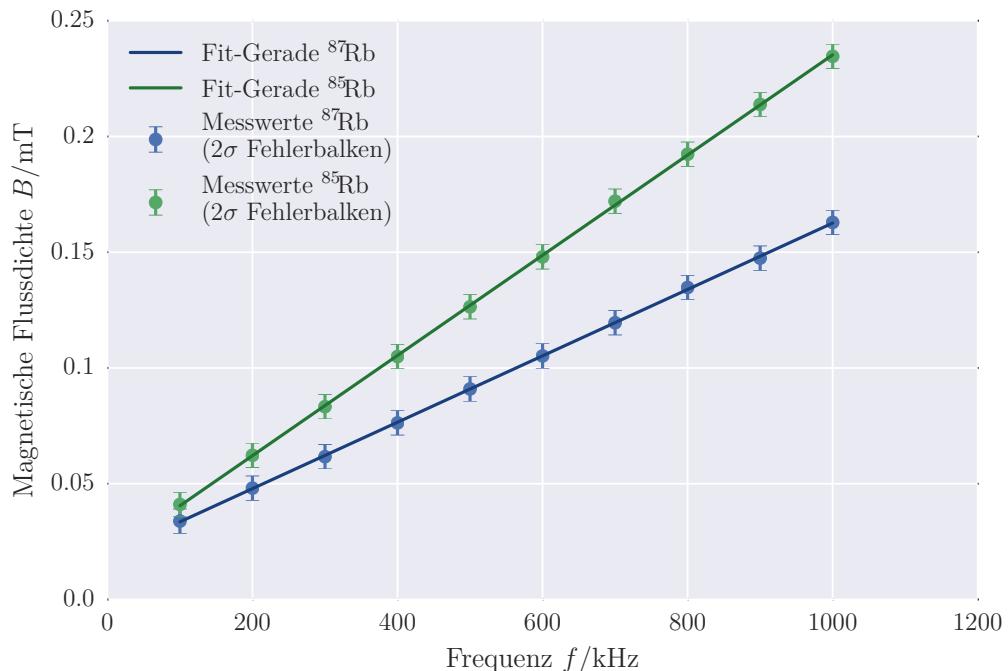


Abbildung 8: Darstellung der berechneten Magnetfelder für beide Isotope in Abhängigkeit der jeweils eingestellten Frequenz. Die Fehlerbalken der Messwerte wurden verdoppelt um sichtbar zu sein. Neben den Messwerten sind auch die Ausgleichsgeraden für beide Isotope dargestellt.

Die Ausgleichsgraden sind Funktionen der Form

$$B(f) = a \cdot f + b \quad (27)$$

und die entsprechenden Parameter für beide Geraden ergeben sich zu:

$$a_1 = (1,434 \pm 0,005) \cdot 10^{-10} \text{ T Hz}^{-1} \quad a_2 = (2,164 \pm 0,009) \cdot 10^{-10} \text{ T Hz}^{-1} \quad (27\text{a})$$

$$b_1 = (1,92 \pm 0,03) \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad b_2 = (1,88 \pm 0,05) \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (27\text{b})$$

Die theoretische Funktion dieser Geraden entspricht Gleichung (15). Da der Versuchsaufbau parallel respektive antiparallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet wurde, führt dieses zu einem Verschiebung entlang der y -Achse. Die theoretische Gerade besitzt eine y -Achsenabschnitt bei Null, sodass daraus geschlossen werden, dass die berechneten Parameter b_i der horizontalen Komponente Erdmagnetfeld entsprechen. Einen Mittlung der beiden Werte ergibt

$$B_{\text{Erde,hor}} = (19,0 \pm 0,3) \mu\text{T}. \quad (28)$$

Die Steigung der Geraden ist inversproportional zum gesuchten Lande-Faktor g_F der beiden Isotope. Durch Division des konstanten Ausdrucks $\frac{\hbar}{\mu_B}$ durch die bestimmten Steigungen a_i ergibt sich g_F für jedes der Isotope zu

$$g_{F,1} = 0,498 \pm 0,002 \quad (29)$$

$$g_{F,2} = 0,330 \pm 0,001 \quad (30)$$

Mit der Kenntnis der Lande-Faktors kann der Kernspin I der beiden Isotope aus Gleichung (12) bestimmte werden. Für die Berechnung werden zusätzlich der Lande-Faktor des Elektrons g_J benötigt. Dieser lässt sich unter Kenntnis der Quantenzahlen S , L und J aus Gleichung Gleichung (7) bestimmen. Für die Quantenzahlen ergeben sich für diesen Versuch die folgenden Werte.

$$S = \frac{1}{2}, \quad L = 0, \quad J = \frac{1}{2}, \quad F = I + J \quad (31)$$

Für F kommt nur der höchst mögliche Wert in Frage, da nur für das Niveau mit dem höchst möglichen m_F kein Übergang mit Δm_f mehr möglich ist. Einsetzen in Gleichung (12) liefert für die Relation

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{g_J}{g_F} - 1 \right) \quad (32)$$

für den Kernspin. Die Kernspins der beiden Isotope ergeben sich damit zu

$$I_1 = 1,509 \pm 0,008 \quad (33)$$

$$I_2 = 2,53 \pm 0,01 \quad (34)$$

Ein Vergleich mit den Literatur-Werten für die Kernspins der Rubidium-Isotope

$I_{\text{Rb85,lit}} = 5/2$ und $I_{\text{Rb87,lit}} = 3/2$ lieferte die Zuordnung der untersuchten Isotope

$$I_1 = I_{\text{Rb87}}, \quad I_2 = I_{\text{Rb85}}.$$

Die Anteile der beiden Isotope P_{Rb85} und P_{Rb87} am gesamten können aus dem Verhältnis der Größen der beiden Minima in Abbildung 7 und der Bedingung $P_{\text{Rb85}} + P_{\text{Rb87}} = 1$ berechnet werden. Durch Ausmessen der Pixel beider Minima ergibt sich das Verhältnis der Größen zu

$$R = 0,57 \pm 0,02. \quad (35)$$

Dieses Verhältnis R entspricht dem Verhältnis $\frac{P_{\text{Rb87}}}{P_{\text{Rb85}}}$ woraus,

$$P_{\text{Rb87}} = \frac{R}{1+R} = (36,4 \pm 0,7)\% \quad (36)$$

$$P_{\text{Rb85}} = 1 - P_{\text{Rb87}} = (63,6 \pm 0,7)\% \quad (37)$$

folgt.

In der zweite Messung wurden durch Modulation der RF-Spannung zunächst exponentiell Ansteigende und anschließend relaxierende Kurven beobachte. In Abbildung 9 und Abbildung 10 ist für jedes der Isotope jeweils ein exponentieller Anstieg für eine eingestellte Spannung zusammen mit einer entsprechenden Ausgleichskurve dargestellt.

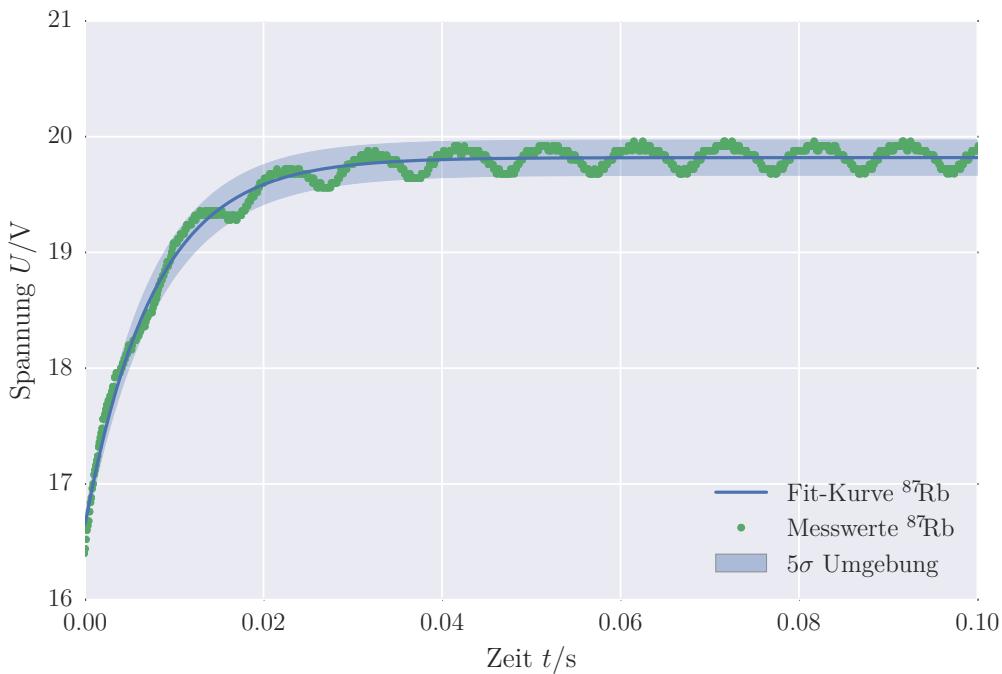


Abbildung 9: Darstellung des Exponentiellen Anstiegs der Kurve für ^{87}Rb bei einer eingestellten RF-Spannung von 5 V. Zusätzlich ist ein exponentielle Ausgleichskurve der Messwerte dargestellt.

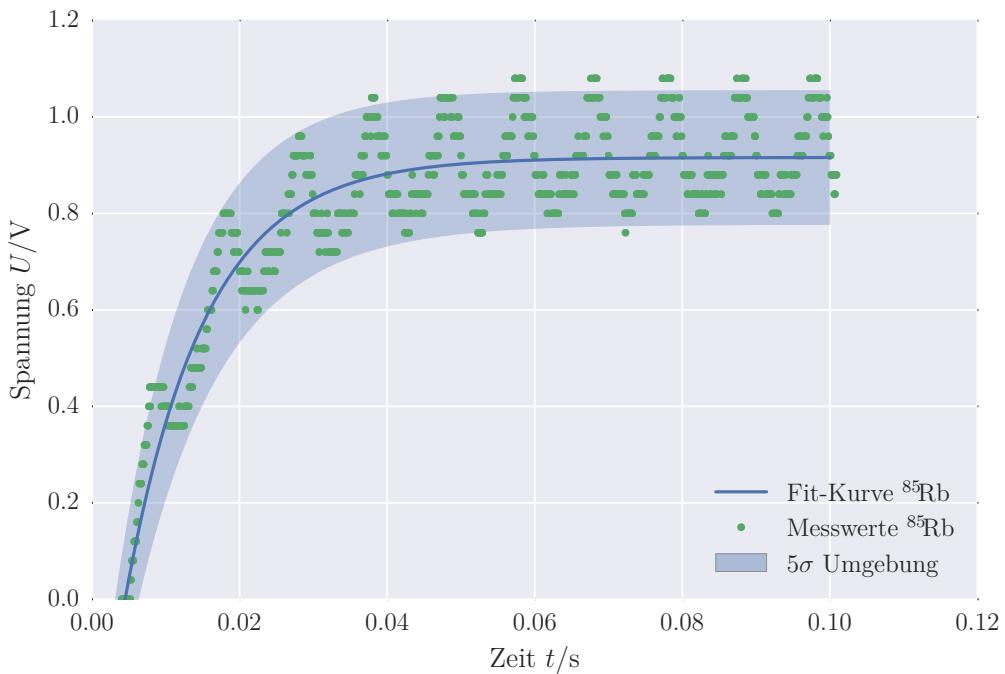


Abbildung 10: Darstellung des Exponentiellen Anstiegs der Kurve für ^{85}Rb bei einer eingestellten RF-Spannung von 6 V. Zusätzlich ist ein exponentielle Ausgleichskurve der Messwerte dargestellt.

Die abgebildeten Ausgleichskurven haben die Form

$$U(t) = a \cdot (1 - \exp(-b \cdot t)) + c \quad (38)$$

Die Parameter der beiden Ausgleichskurven ergeben sich zu:

$$a_{\text{Rb}87} = (3,16 \pm 0,02) \text{ V} \quad a_{\text{Rb}85} = (1,39 \pm 0,01) \text{ V} \quad (38a)$$

$$b_{\text{Rb}87} = (131 \pm 1) \text{ s} \quad b_{\text{Rb}85} = (93 \pm 2) \text{ s} \quad (38b)$$

$$c_{\text{Rb}87} = (16,66 \pm 0,02) \text{ V} \quad c_{\text{Rb}85} = (-0,47 \pm 0,01) \text{ V} \quad (38c)$$

Für die Relaxationen wurden in Abhängigkeit der RF-Spannung die Periodendauer der dargestellten gedämpften Schwingung bestimmt. Die dafür aufgenommenen Messwerte, die Zeitdifferenz und Anzahl der Perioden sind in Tabelle 3 für beide Isotope angegeben. Die bestimmten Periodendauern sind in Abbildung 11 und Abbildung 12 gegen die RF-Spannung aufgetragen dargestellt. Zusätzlich zu den Messwerten sind noch die hyperbolischen Ausgleichsgeraden abgebildet.

Spannung U/V	Zeitdifferenz $\Delta t_1/\text{s}$	# Perioden N_1	Periodendauer T_1/s	Zeitdifferenz $\Delta t_2/\text{s}$	# Perioden N_2	Periodendauer T_2/s
1	$9,0 \pm 0,1$	3	$3,00 \pm 0,03$	$1,0 \pm 0,1$	1	$1,0 \pm 0,1$
2	$6,4 \pm 0,1$	4	$1,60 \pm 0,03$	$2,5 \pm 0,1$	2	$1,26 \pm 0,05$
3	$6,4 \pm 0,1$	6	$1,07 \pm 0,02$	$4,3 \pm 0,1$	4	$1,07 \pm 0,03$
4	$5,0 \pm 0,1$	7	$0,71 \pm 0,01$	$2,0 \pm 0,1$	3	$0,68 \pm 0,03$
5	$5,2 \pm 0,1$	8	$0,65 \pm 0,01$	$4,5 \pm 0,1$	7	$0,65 \pm 0,01$
6	$3,2 \pm 0,1$	6	$0,54 \pm 0,02$	$4,4 \pm 0,1$	9	$0,49 \pm 0,01$
7	$2,3 \pm 0,1$	8	$0,28 \pm 0,01$	$4,6 \pm 0,1$	12	$0,387 \pm 0,008$
8	$2,2 \pm 0,1$	8	$0,27 \pm 0,01$	$4,6 \pm 0,1$	13	$0,351 \pm 0,008$
9	$2,2 \pm 0,1$	8	$0,27 \pm 0,01$	$3,1 \pm 0,1$	10	$0,31 \pm 0,01$
10	$2,1 \pm 0,1$	8	$0,27 \pm 0,01$	$3,1 \pm 0,1$	11	$0,280 \pm 0,009$

Tabelle 3: In Abhängigkeit der eingestellten Spannung aufgenommene Zeitdifferenzen für die jeweilige Anzahl an Perioden. Durchgeführt wurde die Messung an den Resonanzstellen beider Isotope bei einer Frequenz von 100 kHz. Aus den aufgenommenen Messwerten wurden die Periodendauern der Relaxation bestimmt.

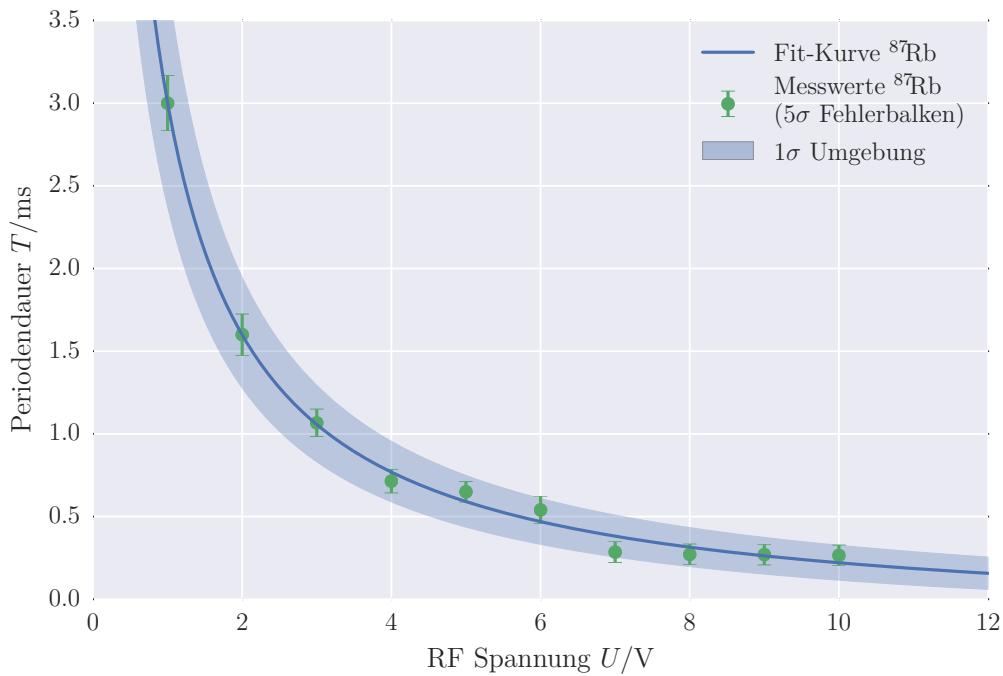


Abbildung 11: In Abhängigkeit der RF-Spannung dargestellte Periodendauern der Relaxation für das Isotop ^{87}Rb . Die Fehlerbalken der Messwerte wurden verfünfacht, um sichtbar zu sein. Zusätzlich ist die hyperbolische Ausgleichskurve für die Messwerte dargestellt.

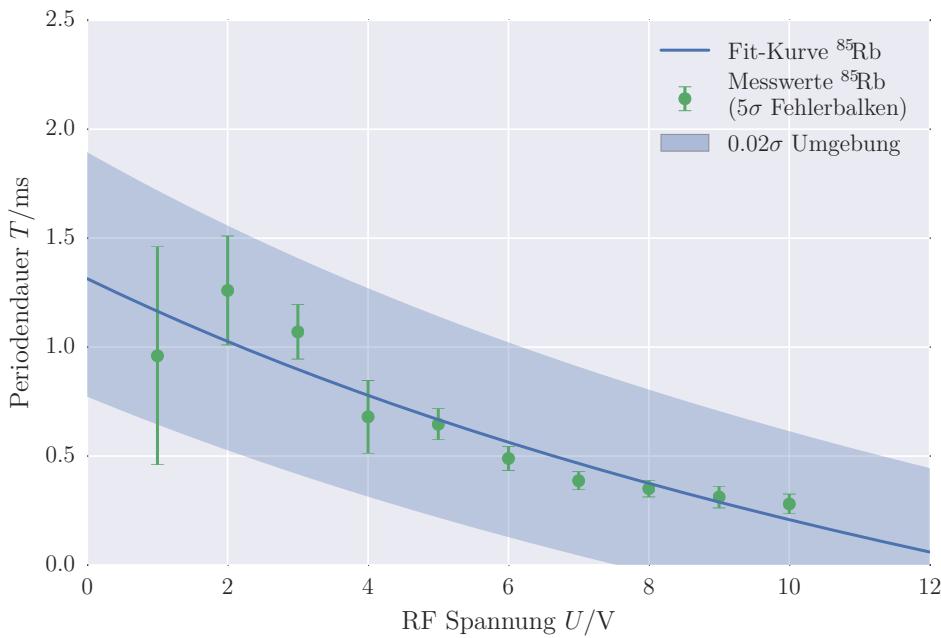


Abbildung 12: In Abhängigkeit der RF-Spannung dargestellte Periodendauern der Relaxation für das Isotop ^{85}Rb . Die Fehlerbalken der Messwerte wurden verfünfacht, um sichtbar zu sein. Zusätzlich ist die hyperbolische Ausgleichskurve für die Messwerte dargestellt. Bei dem abgebildeten Fehlerbereich der Ausgleichskurve handelt es sich nur um einen Bereich mit $1/50$ der eigentlichen Größe. Dieser große Fehler ist durch den ersten Messwert bedingt.

Für die Ausgleichskurve wurde eine Funktion der Form

$$T(U) = a + \frac{b}{U - c} \quad (39)$$

verwendet.

Die Parameter für die beiden dargestellten Ausgleichskurven ergeben sich zu:

$$a_{\text{Rb}87} = (-0,000\,17 \pm 0,000\,06) \text{ s} \quad a_{\text{Rb}85} = (-0,002 \pm 0,006) \text{ s} \quad (39a)$$

$$b_{\text{Rb}87} = (0,0040 \pm 0,0004) \text{ V s} \quad b_{\text{Rb}85} = (0,1 \pm 0,3) \text{ V s} \quad (39b)$$

$$c_{\text{Rb}87} = (-0,3 \pm 0,1) \text{ V} \quad c_{\text{Rb}85} = (-24 \pm 50) \text{ V} \quad (39c)$$

Der Fehlerbereich der Ausgleichskurve für die Messwerte des Isotops ^{85}Rb zeigt sehr große Ungenauigkeiten der Ausgleichskurve. Dies Beobachtung wird auch durch die Fehler der Parameter selbst bestätigt. Der Fehler jedes Parameters ist dabei größer als der bestimmte Parameter selbst. Der Grund für diese großen Ungenauigkeiten lässt sich im Vergleich mit der anderen Ausgleichskurve oder mit einer allgemeinen hyperbolischen Funktion ausfindig machen. Der Messwert $T(1 \text{ V})$ liegt unter dem $T(2 \text{ V})$, obwohl dieser wesentlich größer sein müsste, um einen hyperbolischen Verlauf der Messwerte darzustellen. Diese Vermutung lässt sich bestätigen indem eine weiterer Ausgleichskurve an die Messwerte

angelegt wird, diesmal wird jedoch der Messwert $T(1\text{ V})$ nicht berücksichtigt. Die sich so ergebene Ausgleichskurve ist in Abbildung 13 dargestellt.

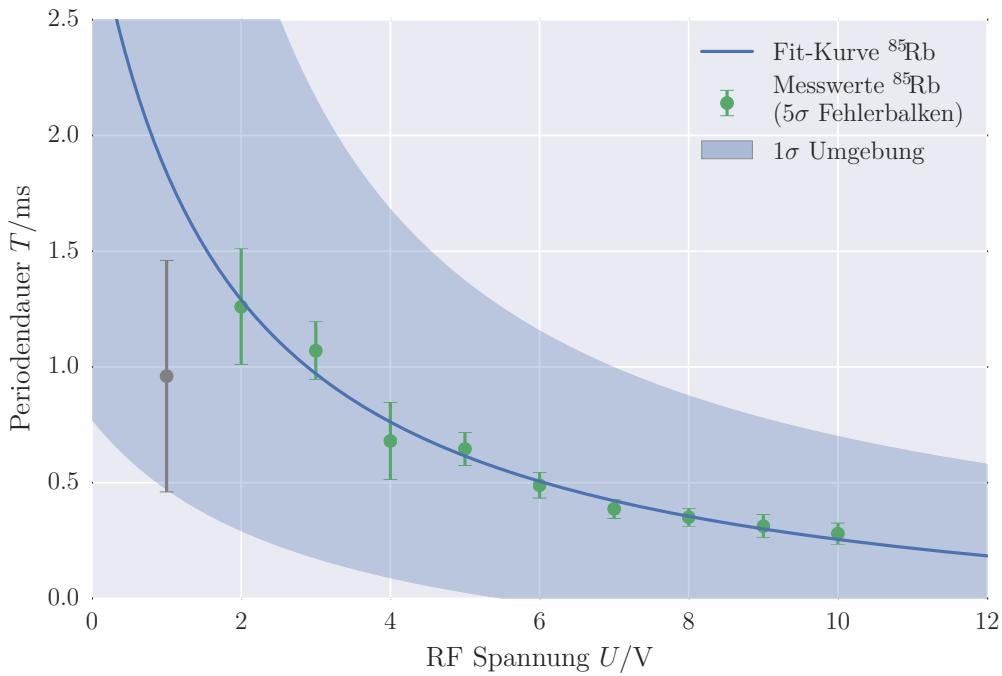


Abbildung 13: In Abhängigkeit der RF-Spannung dargestellte Periodendauern der Relaxation für das Isotop ^{85}Rb . Die Fehlerbalken der Messwerte wurden verfünfacht, um sichtbar zu sein. Zusätzlich ist die hyperbolische Ausgleichskurve für die Messwerte dargestellt, wobei der grau dargestellte Messwert ausgelassen wurde.

Die Parameter der dritten Ausgleichskurve ergeben sich zu:

$$a'_{\text{Rb}85} = (-0,0002 \pm 0,0002) \text{ s} \quad (39\text{a})$$

$$b'_{\text{Rb}85} = (0,006 \pm 0,002) \text{ V s} \quad (39\text{b})$$

$$c'_{\text{Rb}85} = (-2 \pm 1) \text{ V} \quad (39\text{c})$$

Auch an den Parametern und dem Fehlerbereich dieser Ausgleichskurve sind größere Ungenauigkeiten zu erkennen als bei der Ausgleichskurve für ^{87}Rb . Diese sind jedoch wesentlich geringer als die vorherigen Ungenauigkeiten.

Der Quotient der Parameter b_i ergibt für beide Ausgleichskurven einzeln:

$$r = \frac{b_{\text{Rb}85}}{b_{\text{Rb}87}} = 23 \pm 85 \quad (40)$$

$$r' = \frac{b'_{\text{Rb}85}}{b_{\text{Rb}87}} = 1,4 \pm 0,6 \quad (41)$$

6 Diskussion

Die im ersten Versuchsteil beobachteten Signalbilder wie in Abbildung 7 entsprechen der erwarteten Gestalt. Die aus dem Verhältnis der Größen der Minima bestimmten Anteile der beiden Isotope weichen mit

$$P_{\text{Rb87}} = (36,4 \pm 0,7) \% \quad P_{\text{Rb85}} = (63,6 \pm 0,7) \%$$

leicht von der natürlich vorkommenden Verteilung

$$P_{\text{Rb87,lit}} = 27,8 \% \quad P_{\text{Rb85,lit}} = 72,2 \%$$

ab. Zu vermuten ist, dass ein größerer Anteil von ^{87}Rb vorliegt, um das entsprechenden Minimums im Signal zu vergrößern. Die bestimmten Lande-Faktoren

$$g_{F,\text{Rb87}} = 0,498 \pm 0,002 \quad g_{F,\text{Rb85}} = 0,330 \pm 0,001$$

entsprechen im Rahmen der Messfehler und mit nur geringen Abweichungen den Literaturwerten

$$g_{F,\text{Rb87,lit}} = \frac{1}{2} \quad g_{F,\text{Rb85,lit}} = \frac{1}{3}.$$

In gleicher Weise sind auch die Abweichungen der bestimmten Kernspins

$$I_{\text{Rb87}} = 1,509 \pm 0,008 \quad I_{\text{Rb85}} = 2,53 \pm 0,01$$

von den Literaturwerten nur sehr gering

$$I_{\text{Rb87,lit}} = \frac{3}{2} \quad I_{\text{Rb85,lit}} = \frac{5}{2}$$

und es war eine eindeutige Identifikation der Minima im Signalbild mit den Isotopen möglich.

Die in diesem Versuch bestimmte horizontale Komponente des Erdmagnetfelds wurde zu

$$B_{\text{Erde,hor}} = (19,0 \pm 0,3) \mu\text{T} \tag{42}$$

bestimmt. Da sich die Horizontalkomponente $B_{\text{Erde,hor}}$ aus dem Gesamtmagnetfeld $B_{\text{Erde}} = 47 \mu\text{T}$ [3] durch die Gleichung $B_{\text{Erde,hor}} = B_{\text{Erde}} \cdot \cos(\varphi)$, mit dem Inklinationswinkel φ , ergibt erhält man für diesen den Wert

$$\varphi = (66,1 \pm 0,4)^\circ. \tag{43}$$

Dieser Wert entspricht mit guter Genauigkeit dem in Dortmund auf dem Breitengrad $51,5^{\circ}\text{N}$ vorliegenden, wie in der Grafik in [4] zu erkennen ist. Damit stellt dieser Versuch auch eine sehr genaue Möglichkeit zur Verfügung, um das Erdmagnetfeld zu bestimmen. Die Beobachtungen im zweiten Versuchsteil decken sich ebenfalls mit den Erwartungen. Die Anpassung der Ausgleichskurven an den ansteigenden Teil des Signalbildes bestätigt das theoretisch vorhergesagte exponentielle Anwachsen. Der Quotient der Parameter b_i der hyperbolischen Ausgleichskurven, die an die Messwerte der Periodendauer in Abhängigkeit der RF-Spannung angepasst wurden liefern für die erste Anpassung bei der alle Messwerte verwendet wurden den Wert 23 ± 85 und für die Anpassung in der der erste Messwert ausgelassen wurde den Wert $1,4 \pm 0,6$. An diesen Ergebnissen wird noch einmal deutlich, dass der erste Messwert eine Fehlmessung darstellt und nur durch aus lassen dieses Messwertes ein Ergebnis erzielt werden kann, welches im Rahmen des Fehlers dem theoretischen Wert 1,5 entspricht.

Die Größe des quadratischen Zeeman-Effekts lässt sich mit Hilfe von Gleichung (17) und den in diesem Versuch aufgenommenen Messwerten schätzen. Da der quadratische Zeeman-Effekt für große Magnetfelder B relevant wird, wird für die Schätzung der Wert $B = 0,25\text{ mT}$ gewählt, welcher größer ist als alle in diesem Versuch erzeugten Magnetfelder, sich jedoch noch in der selben Größenordnung befindet. Für die Lande-Faktoren der beiden Rubidium-Isotope werden die Literaturwerte verwendet. Für die Quantenzahl m_F wird wiederum jeweils das die größtmögliche gewählt, $m_{F,\text{Rb}85} = 3$ und $m_{F,\text{Rb}87} = 2$. Die Hyperfein-Aufspaltung ist mit $\Delta E_{\text{Hy,Rb}87} = 4,53 \cdot 10^{-24}\text{ J}$ und $\Delta E_{\text{Hy,Rb}85} = 2,01 \cdot 10^{-24}\text{ J}$ angegeben [1]. Aus diesen Werten ergibt sich der quadratische Zeeman-Effekt zu $U_{\text{HF,Rb}87} = -8,9 \cdot 10^{-31}\text{ J}$ und $U_{\text{HF,Rb}85} = -1,5 \cdot 10^{-30}\text{ J}$. Für beide Isotope liegt der quadratische Zeeman-Effekt damit mehr als zwei Größenordnungen unter dem linearen Term und ist damit in diesem Versuch vernachlässigbar.

Literatur

- [1] Bärbel Sigmann. *Versuchsanleitung. Optisches Pumpen.* URL: http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/MASTER/SKRIPT/V21n_TeachSpin_new.pdf (besucht am 16.02.2016).
- [2] SciPy developers. *SciPy.* URL: <http://docs.scipy.org/doc/> (besucht am 16.02.2015).
- [3] *Die Geomagnetik.* URL: http://www.ggukarlsruhe.de/Messverfahren_Geophysik_zersto/Geomagnetik_Magnetik_Erdmagnet/hauptteil_geomagnetik_magnetik_erdmagnet.html (besucht am 22.02.2016).
- [4] *Magnetische Inklination.* URL: <http://www.gfz-potsdam.de/sektion/erdmagnetfeld/infrastruktur/deutsche-saekularpunktmessungen/inklination/> (besucht am 22.02.2016).