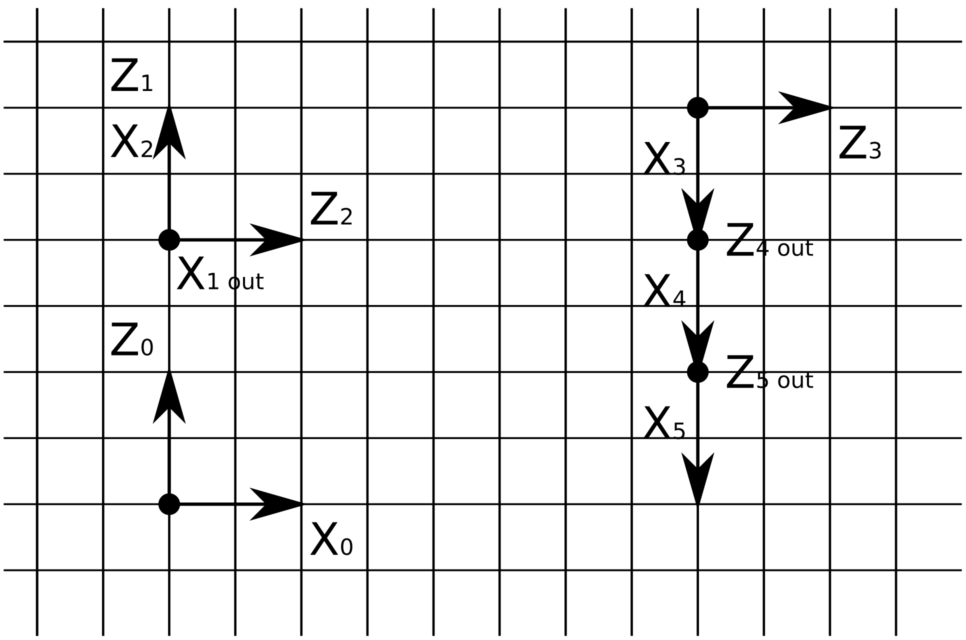
Aufgabe 1

a)

Gegeben ist die Beschreibung eines Roboters durch Denavit-Hartenberg-Parameter (nach Craig) durch folgende Größen:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i	Wert des Gelenkparameters
1	$0°$	0	$-90°$	d_1	$d_1 = 4$
2	$-90°$	0	Θ_2	0	$\Theta_2 = -90°$
3	$0°$	2	$180°$	d_3	$d_3 = 8$
4	$90°$	2	Θ_4	0	$\Theta_4 = 0°$
(5)	$0°$	2	0	0	

Der Roboter hat 4 Gelenke, die letzte Transformation führt zum Endeffektorsystem. Tragen Sie alle Koordinatensysteme in das unten vorgegebene Raster ein. Die Kästchen haben eine Größe von 1×1. Wählen Sie dabei die Werte der Gelenkparameter so, dass der Roboter vollständig in der Zeichenebene liegt. Zeichnen Sie nur die x und z-Achsen der Koordinatensysteme ein, und tragen Sie Ihre Wahl der Gelenkparameter in obige Tabelle ein.



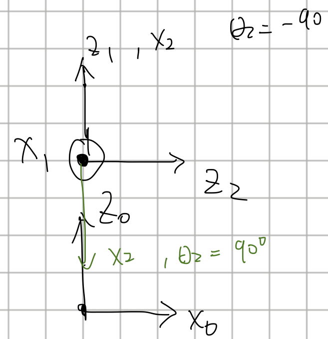
Man beachte, dass die Lösung hier nicht eindeutig ist: $\Theta_2 = +90°$ kann ebenfalls gewählt werden. Ausserdem ist Θ_4 beliebig.

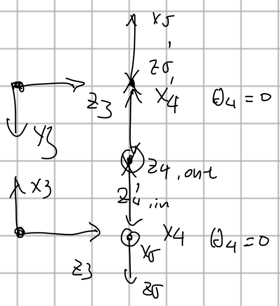
b)

Die kartesischen Koordinaten des Endeffektors sind für obigen Roboter gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2\sin\Theta_4 + d_3 \\ 2\cos\Theta_2\cos\Theta_4 \\ 2\sin\Theta_2\cos\Theta_4 + d_1 \end{pmatrix}$$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i	Wert des Gelenkparameters
1	$0°$	0	$-90°$	d_1	$d_1 = 4$
2	$-90°$	0	Θ_2	0	$\Theta_2 = -90°$
3	$0°$	2	$180°$	d_3	$d_3 = 8$
4	$90°$	2	Θ_4	0	$\Theta_4 = 0°$
(5)	$0°$	2	0	0	





i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i	Wert des Gelenkparameters
1	$0°$	0	$-90°$	d_1	$d_1 = 4$
2	$-90°$	0	Θ_2	0	$\Theta_2 = -90°$
3	$0°$	2	$180°$	d_3	$d_3 = 8$
4	$90°$	2	Θ_4	0	$\Theta_4 = 0°$
(5)	$0°$	2	0	0	

$c_1 = 0$ $\quad s_1 = -1$

$c_3 = -1$ $\quad s_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2\sin\Theta_4 + d_3 \\ 2\cos\Theta_2\cos\Theta_4 \\ 2\sin\Theta_2\cos\Theta_4 + d_1 \end{pmatrix}$$

$d_1 \quad \Theta_2 \quad d_3 \quad \Theta_4$

$${}^0_1R = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^0_1R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1_2R = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^1_2R = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^2_3R = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2_3R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3_4R = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^3_4R = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0J_v = {}^0\dot{P}_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2c_4 \\ 0 & -2s_2c_4 & 0 & -2c_2s_4 \\ 1 & 2c_2c_4 & 0 & -2s_2s_4 \end{pmatrix}$$

$${}^0J_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2 \end{pmatrix}$$

$${}^0_2R \begin{pmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^0_2R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0_3R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0_3R \begin{pmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2c_3 & -c_1c_2s_3 + c_1s_2s_3 & -s_1 \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^0_4R = \begin{pmatrix} s_4 & c_4 & 0 \\ c_2c_4 & -c_2s_4 & s_2 \\ s_2c_4 & -s_2s_4 & -c_2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\cos(\Theta_4) \\ 0 & -2\sin(\Theta_2)\cos(\Theta_4) & 0 & -2\cos(\Theta_2)\sin(\Theta_4) \\ 1 & 2\cos(\Theta_2)\cos(\Theta_4) & 0 & -2\sin(\Theta_2)\sin(\Theta_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\Theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\Theta_2) \end{pmatrix}$$

$${}^0_4R \begin{pmatrix} c_1c_2c_3c_4 - c_1s_2c_3c_4 - s_1s_4 \\ s_1c_2c_3s_4 - s_1s_2s_3s_4 + c_1s_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_1c_2s_3 - c_1s_2s_3 \\ s_1c_2s_3 + s_1s_2c_3 \\ 0 \end{matrix}$$

4自由度

Berechnen Sie die vollständige 6×4 Jacobi-Matrix des Manipulators. Beachten Sie, dass der Roboter in Teilaufgabe a) nicht in Nulllage ist. Wie viele Freiheitsgrade hat der Roboter?

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\cos(\Theta_4) \\ 0 & -2\sin(\Theta_2)\cos(\Theta_4) & 0 & -2\cos(\Theta_2)\sin(\Theta_4) \\ 1 & 2\cos(\Theta_2)\cos(\Theta_4) & 0 & -2\sin(\Theta_2)\sin(\Theta_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\Theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\Theta_2) \end{pmatrix}$$

Der Roboter hat 4 Freiheitsgrade.

c)

Gehen Sie im Weiteren von folgender minimalen Jacobi-Matrix aus:

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\Theta_2\cos\Theta_4 & 0 & -2\sin\Theta_2\sin\Theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\Theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie: Diese Jacobi-Matrix beruht auf einer anderen, minimalen Darstellung der Position, und stimmt deswegen nicht mit der in Teilaufgabe b) berechneten Matrix überein. Gibt es singuläre Konfigurationen? Erklären Sie, was das Besondere an solch einer singulären Konfiguration ist.

$$\det J' = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\cos(\Theta_4) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Der Roboter hat daher keine Singularitäten. Das sieht man auch an der Matrix aus Aufgabe b): Ihr Rang ist immer 4.
In einer singulären Konfiguration verliert der Roboter einen Freiheitsgrad, d.h. es gibt eine Richtung, in die er sich nicht bewegen kann.

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\Theta_2\cos\Theta_4 & 0 & -2\sin\Theta_2\sin\Theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\Theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J') = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2C_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1)$$

No singularity

If $\det(J) = 0$ that means Robot has singularity

it will loss at least one freedom

can't move in one direction

when achieve singularity

Aufgabe 2

Gegeben sei folgender Roboter mit 4 Gelenken:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i
1	0	0	Θ_1	1
2	0	2	0	d_2
3	0	0	Θ_3	1
4	0	2	0	d_4
(5)	0	0	0	1

Um die Berechnung zu vereinfachen gilt $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ für die Massen der Roboterarme. Die Trägheitstensoren haben folgende Form:

$$I_i = \begin{pmatrix} Ixx_i & 0 & 0 \\ 0 & Iyy_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desweiteren sind die Positionen der Ursprünge der Gelenkkoordinatensysteme gegeben durch

$$^0P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, {}^1P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix}, {}^2P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, {}^3P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

und die Massenschwerpunkte liegen bei

$$^1P_{C1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_2}{2} \end{pmatrix}, {}^2P_{C2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, {}^3P_{C3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix}, {}^4P_{C4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Um die Schwerkraft zu berücksichtigen, gilt $^0\dot{v}_0 = (g, 0, 0)$.

a)

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen $^i\omega_i$, $^i\dot{\omega}_i$, $^i\dot{v}_i$ sowie $^i\dot{v}_{Ci}$, die für den ersten Schritt des Newton-Euler-Verfahrens benötigt werden, für $i = 1, 2, 3$.

$$^1\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix},$$

$$^1\dot{v}_1 = {}^1_0R(g,0,0)^T = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1)g \\ -\sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^1v_{C1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1)g \\ -\sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\Theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1)g \\ -\sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\Theta}_1^2 + \cos(\Theta_1)g \\ \ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix}$$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i
1	0	0	Θ_1	1
2	0	2	0	d_2
3	0	0	Θ_3	1
4	0	2	0	d_4
(5)	0	0	0	1

$$ {}^0_1R = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^0_2R = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1_2R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^0_4R = \begin{pmatrix} c_1c_3 - s_1s_3 & -c_1s_3 - s_1c_3 & 0 \\ s_1c_3 + c_1s_3 & -s_1s_3 + c_1c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2_3R = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$\theta_1 \quad d_2 \quad \theta_3 \quad d_4 .$

$$ {}^3_4R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^0V_0 = {}^0w_0 = {}^0\dot{w}_0 = 0 . \qquad {}^0\dot{v}_0 = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1w_1 = \cancel{{}^1_0R\,{}^0w_0} + \dot{\theta}_1 {}^1\hat{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1\dot{w}_1 = \cancel{{}^1_0R\,{}^0\dot{w}_0} + \cancel{{}^1_0R\,{}^0w_0 \times \dot{\theta}_1 \cdot {}^1\hat{z}_1} + \ddot{\theta}_1 \cdot {}^1\hat{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1\dot{v}_1 = {}^1_0R(\cancel{{}^0\dot{w}_0 \times {}^0P_1} + \cancel{{}^0w_0 \times ({}^0w_0 \times {}^0P_1)} + {}^0\dot{v}_0) = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1\dot{v}_{c_1} = {}^1\dot{w}_1 \times {}^1P_{c_1} + {}^1w_1 \times ({}^1w_1 \times {}^1P_{c_1}) + {}^1\dot{v}_1 $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_2}{2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1^2 + c_1 g \\ \ddot{\theta}_1 - s_1 g \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2w_2 = {}^2_1R\,{}^1w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2\dot{w}_2 = {}^2_1R\,{}^1\dot{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2\dot{v}_2 = {}^2_1R({}^1\dot{w}_1 \times {}^1P_2 + {}^1w_1 \times ({}^1w_1 \times {}^1P_2) + {}^1\dot{v}_1) + 2\,{}^2w_2 \times \dot{d}_2\,{}^2\hat{z}_2 + \ddot{d}_2\,{}^2\hat{z}_2 $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} -2\dot{\theta}_1^2 + c_1 g \\ 2\ddot{\theta}_1 - s_1 g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2\dot{v}_{c_2} = {}^2\dot{w}_2 \times {}^2P_{c_2} + {}^2w_2 \times ({}^2w_2 \times {}^2P_{c_2}) + {}^2\dot{v}_2 $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -2\dot{\theta}_1^2 + c_1 g \\ 2\ddot{\theta}_1 - s_1 g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} -2\dot{\theta}_1^2 + c_1 g \\ 2\ddot{\theta}_1 - s_1 g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3\omega_3 = {}^3_2R\,{}^2\omega_2 + \dot\theta_3\,{}^3\hat Z_3 $$
$$ = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_3 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_3 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3\dot\omega_3 = {}^3_2R\cdot{}^2\dot\omega_2 + {}^3_2R\,{}^2\omega_2 \times \dot\theta_3\,{}^3\hat Z_3 + \ddot\theta_3\,{}^3\hat Z_3 $$
$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_3 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3\dot v_3 = {}^3_2R\left({}^2\omega_2 \times {}^2P_3 + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2P_3) + {}^2\dot v_2\right) $$
$$ = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -2\dot\theta_1^2 + c_1 g \\ 2\ddot\theta_1 - s_1 g \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} \right] $$
$$ = \begin{pmatrix} (-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot c_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\cdot s_3 \\ -(-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot s_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\, c_3 \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3\dot v_{C3} = {}^3\dot\omega_3 \times {}^3P_{C3} + {}^3\omega_3 \times ({}^3\omega_3 \times {}^3P_{C3}) + {}^3\dot v_3 $$
$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} (-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot c_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\cdot s_3 \\ -(-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot s_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\, c_3 \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\theta_1 + \dot\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot c_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\cdot s_3 \\ -(-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot s_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\, c_3 \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} -(\dot\theta_1 + \dot\theta_3)^2 + (-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot c_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\cdot s_3 \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 - (-2\dot\theta_1^2 + c_1 g)\cdot s_3 + (2\ddot\theta_1 - s_1 g)\, c_3 \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3\dot v_3 = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_3) & \sin(\Theta_3) & 0 \\ -\sin(\Theta_3) & \cos(\Theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec 0 + \vec 0 + {}^2\dot v_2\right) $$
$$ = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot\Theta_1^2) + \sin(\Theta_3)(2\ddot\Theta_1 - \sin(\Theta_1)g) \\ -\sin(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot\Theta_1^2) + \cos(\Theta_3)(2\ddot\Theta_1 - \sin(\Theta_1)g) \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} $$
$$ {}^3\dot v_{C3} = \begin{pmatrix} -(\dot\Theta_1 + \dot\Theta_3)^2 \\ \ddot\Theta_1 + \ddot\Theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + {}^3\dot v_3 $$
$$ = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot\Theta_1^2) + \sin(\Theta_3)(2\ddot\Theta_1 - \sin(\Theta_1)g) - (\dot\Theta_1 + \dot\Theta_3)^2 \\ -\sin(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot\Theta_1^2) + \cos(\Theta_3)(2\ddot\Theta_1 - \sin(\Theta_1)g) + \ddot\Theta_1 + \ddot\Theta_3 \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} $$

b)

$${}^1F_1 = m_1 \cdot {}^1\dot{v}_{c_1} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1^2 + c_1 g \\ \ddot{\theta}_1 - s_1 g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^1N_1 = {}^{C_1}I_1 \cdot {}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times {}^{C_1}I_1 \cdot {}^1\omega_1 = \begin{pmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$${}^2F_2 = {}^2\dot{v}_{c2} = \begin{pmatrix} -2\dot{\theta}_1^2 + C_1 g \\ 2\ddot{\theta}_1 - S_1 g \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}$$

$${}^2N_2 = {}^{C_2}I_2 \cdot {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times {}^{C_2}I_2 \cdot {}^2\omega_2$$

$$= \begin{pmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$${}^3F_3 = {}^3\dot{V}_{C_3} = \begin{pmatrix} (-2\dot{\theta}_1^2 + C_1 g) \cdot C_3 + (2\ddot{\theta}_1 - S_1 g) \cdot S_3 \\ -(-2\dot{\theta}_1^2 + C_1 g) \cdot S_3 + (2\ddot{\theta}_1 - S_1 g) C_3 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}$$

$${}^3N_3 = {}^{C_3}I_3 \cdot {}^3\dot{\omega}_3 + {}^3\omega_3 \times {}^{C_3}I_3 \cdot {}^3\omega_3$$

$$= \begin{pmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

Aus obigen Gleichungen sollte man sich auch merken:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b\\0\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ba\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b\\0\\c\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-ba^2\\0\\0\end{pmatrix}$$

Diese Struktur von Kreuzprodukten kommt in der Berechnung ständig vor. Das zweite Gelenk ist ein Schiebegelenk, und es gilt ${}^2_1R = I$. Die Rotationsgeschwindigkeiten sind daher einfach:

$${}^2\omega_2 = {}^1\omega_1, {}^2\dot{\omega}_2 = {}^1\dot{\omega}_1$$

Für die Translationskomponenten hat man:

$${}^2\dot{v}_2 = I\left(\begin{pmatrix}0\\2\ddot{\Theta}_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\dot{\Theta}_1^2\\0\\0\end{pmatrix} + {}^1\dot{v}_1\right) + \vec{0} + \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{d}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\dot{\Theta}_1^2 + \cos(\Theta_1)g\\2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g\\\ddot{d}_2\end{pmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_{C2} = \vec{0} + \vec{0} + {}^2\dot{v}_2 = {}^2\dot{v}_2$$

Für $i = 3$ hat man:

$${}^3\omega_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_3\end{pmatrix}, {}^3\dot{\omega}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\end{pmatrix}$$

Und für die Translationen:

$$\begin{aligned}
{}^3\dot{v}_3 &= \begin{pmatrix}\cos(\Theta_3) & \sin(\Theta_3) & 0\\-\sin(\Theta_3) & \cos(\Theta_3) & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{0} + \vec{0} + {}^2v_2\right)\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \sin(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g)\\-\sin(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \cos(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g)\\\ddot{d}_2\end{pmatrix}\\
{}^3\dot{v}_{C3} &= \begin{pmatrix}-(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_3)^2\\\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\\0\end{pmatrix} + {}^3\dot{v}_3\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \sin(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g) - (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_3)^2\\-\sin(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \cos(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g) + \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\\\ddot{d}_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

Berechnen Sie die Momente und Kräfte ${}^iN_i$ und ${}^iF_i$, die auf die Massenschwerpunkte der Roboterarme wirken, für $i = 1, 2, 3$.

$${}^1F_1 = {}^1\dot{v}_{C1}, {}^2F_2 = {}^2\dot{v}_{C2}, {}^3F_3 = {}^3\dot{v}_{C3}$$

$${}^1N_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1\end{pmatrix}, {}^2N_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1\end{pmatrix}, {}^3N_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\end{pmatrix}$$

c)

Nehmen Sie für die weitere Berechnung nun an, dass folgende Gelenkkonfiguration vorliegt:

$$\Theta_1 = \Theta_3 = 0, d_2 = 2, d_4 = 1$$

Damit gilt für die Kräfte und Momente, die auf die Massenschwerpunkte der Roboterarme wirken:

$$
\begin{aligned}
{}^1F_1 &= \begin{pmatrix} g - \dot{\Theta}_1^2 \\ \ddot{\Theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^1N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, \\
{}^2F_2 &= \begin{pmatrix} g - 2\,\dot{\Theta}_1^2 \\ 2\,\ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}, {}^2N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, \\
{}^3F_3 &= \begin{pmatrix} g - \dot{\Theta}_3^2 - 2\,\dot{\Theta}_1\,\dot{\Theta}_3 - 3\,\dot{\Theta}_1^2 \\ \ddot{\Theta}_3 + 3\,\ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}, {}^3N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_3 + \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, \\
{}^4F_4 &= \begin{pmatrix} g - 2\,\dot{\Theta}_3^2 - 4\,\dot{\Theta}_1\,\dot{\Theta}_3 - 4\,\dot{\Theta}_1^2 \\ 2\,\ddot{\Theta}_3 + 4\,\ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{d}_4 + \ddot{d}_2 \end{pmatrix}, {}^4N_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_3 + \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie die Gelenkmomente τ_i für $i = 4, 3$.

Gelenk 4 ist ein Translationsgelenk, uns interessiert also $\tau_4 = (0,0,1)^4 f_4$. Es gilt:

$$^4f_4 = {}^4F_4 \Rightarrow \tau_4 = \ddot{d}_4 + \ddot{d}_2$$

Um τ_3 zu berechnen benötigen wir im Weiteren $^4n_4$:

$$^4n_4 = {}^4N_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times {}^4F_4 = \begin{pmatrix} -\ddot{\Theta}_3 - 2\ddot{\Theta}_1 \\ \frac{g}{2} - \dot{\Theta}_3^2 - 2\dot{\Theta}_1\Theta_3 - 2\dot{\Theta}_1^2 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3 \end{pmatrix}$$

Für τ_3 müssen wir von $^3n_3$ die dritte Komponente berechnen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
{}^3n_3 &= {}^3N_3 + I \cdot {}^4n_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix} \times {}^3F_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix} \times {}^4F_4 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \ddot{\Theta}_3 + 3\ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 4\ddot{\Theta}_3 + 8\ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die $\bullet$-Symbole stehen für unbekannte Größen, die uns hier nicht interessieren. Insgesamt erhalten wir $\tau_3 = 7\ddot{\Theta}_3 + 13\ddot{\Theta}_1$.

$\theta_1 \; d_2 \; \theta_3 \cdot d_4$

$${}^4f_4 = \cancel{{}^4_5R\,{}^5f_5} + {}^4F_4 = \begin{pmatrix} g - 2\dot\theta_3^2 - 4\dot\theta_1\dot\theta_3 - 4\dot\theta_1^2 \\ 2\ddot\theta_3 + 4\ddot\theta_1 \\ \ddot d_4 + \ddot d_2 \end{pmatrix}$$

$${}^4n_4 = {}^4N_4 + \cancel{{}^4_5R\,{}^5n_5} + {}^4P_{C4} \times {}^4F_4 + \cancel{{}^4P_5 \times {}^4_5R\,{}^5f_5}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g - 2\dot\theta_3^2 - 4\dot\theta_1\dot\theta_3 - 4\dot\theta_1^2 \\ 2\ddot\theta_3 + 4\ddot\theta_1 \\ \ddot d_4 + \ddot d_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\ddot\theta_1 - \ddot\theta_3 \\ -2\dot\theta_1^2 - 2\dot\theta_1\dot\theta_3 - \dot\theta_3^2 + \frac{1}{2}g \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \end{pmatrix}$$

$${}^3f_3 = {}^3_4R\,{}^4f_4 + {}^3F_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2g - 3\dot\theta_3^2 - 6\dot\theta_1\dot\theta_3 - 7\dot\theta_1^2 \\ 3\ddot\theta_3 + 7\ddot\theta_1 \\ \ddot d_4 + 2\ddot d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g - 2\dot\theta_3^2 - 4\dot\theta_1\dot\theta_3 - 4\dot\theta_1^2 \\ 2\ddot\theta_3 + 4\ddot\theta_1 \\ \ddot d_4 + \ddot d_2 \end{pmatrix}$$

$${}^3n_3 = {}^3N_3 + {}^3_4R\,{}^4n_4 + {}^3P_{C3} \times {}^3F_3 + {}^3P_4 \times {}^3_4R\,{}^4f_4$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ * \\ \ddot\theta_1 + \ddot\theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g - \dot\theta_3^2 - 2\dot\theta_1\dot\theta_3 - 3\dot\theta_1^2 \\ \ddot\theta_3 + 3\ddot\theta_1 \\ \ddot d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix} \times$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ * \\ 5\ddot\theta_1 + 3\ddot\theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ * \\ 4\ddot\theta_3 + 8\ddot\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ * \\ 13\ddot\theta_1 + 7\ddot\theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = {}^3n_3^T\,{}^3\hat Z_3 = 7\ddot\theta_3 + 13\ddot\theta_1$$

$$\tau_4 = {}^4f_4^T\,{}^4\hat Z_4 = \ddot d_4 + \ddot d_2$$

d)

Nehmen Sie an, dass

$$\tau_2 = \ddot{d}_4 + 3\,\ddot{d}_2$$
$$\tau_1 = 9\,\ddot{\Theta}_3 + 22\,\ddot{\Theta}_1$$

gilt. Bringen Sie die Dynamikgleichungen in M-V-G-Form.
Die M-V-G-Form wäre:

$$M = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 13 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(\Theta, \dot{\Theta}) = 0, \quad G(\Theta) = 0$$

$$\tau_1 = 9\,\ddot{\Theta}_3 + 22\,\ddot{\Theta}_1$$
$$\tau_2 = \ddot{d}_4 + 3\,\ddot{d}_2$$
$$\tau_3 = 7\,\ddot{\Theta}_3 + 13\,\ddot{\Theta}_1$$
$$\tau_4 = \ddot{d}_4 + \ddot{d}_2$$

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 13 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V(\Theta) = 0$$
$$G(\Theta) = 0$$

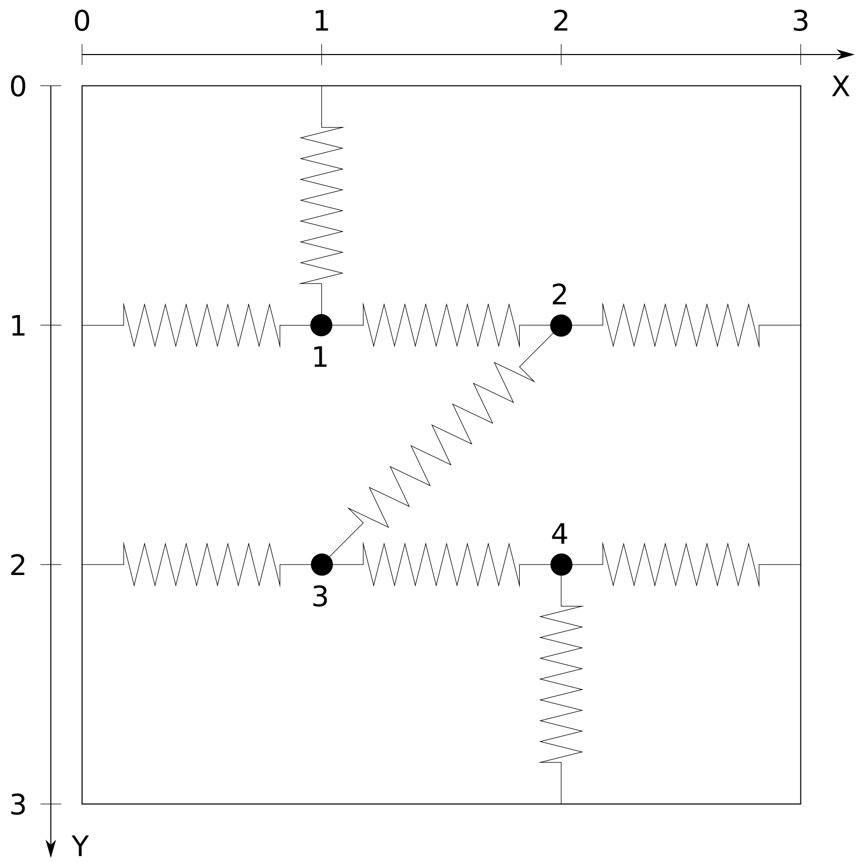


Abbildung 1: Ein Masse-Feder-System mit 4 punktförmigen Massen.

Aufgabe 3

Gegeben sei das System in Abbildung 1. Zu sehen sind dort 4 punktförmige Massen, die über Federn miteinander verbunden sind. Die Massen können sich frei in X- und Y-Richtung bewegen. Die Federn haben alle die gleiche Federkonstante k und die gleiche Ruhelage s, die Massen sind alle gleich und werden mit m bezeichnet. Die Federn, die mit dem Rand in Verbindung stehen, sind dort fixiert. Man beachte, dass die gezeigte Konfiguration nicht der Ruhelage entspricht. Es wirkt keinerlei Reibung auf die beweglichen Objekte.

图1是一个系统，可以看到4个点状质量，它们通过弹簧相互连接。质量可以在X和Y方向上自由移动。弹簧都有相同的弹簧常数k和相同的静止位置s，质量都是相同的，并被指定为m.连接到边缘的弹簧有相同的弹簧常数。连接到边缘的弹簧被固定在那里。请注意，所显示的配置并不对应于休息位置。没有摩擦力作用于运动物体。

a)

Hier soll zunächst folgender vereinfachter Fall betrachtet werden: Zwei punktförmige Objekte a, b mit Koordinaten (x_a, y_a) und (x_b, y_b), die über eine Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge s verbunden sind. Berechnen Sie, welche Kraft $F_a \in \mathbb{R}^2$ durch die Feder auf a ausgeübt wird, und welche Kraft $F_b \in \mathbb{R}^2$ auf b wirkt.

在这里，我们首先考虑以下简化的情况。两个点状物体a，b的坐标为（x a ， y a ）和（x b ， y b ）， 它们由一个弹簧连接，弹簧常数为k，静止时长度为s。计算弹簧对a施加了哪个力F a∈R 2，哪个力F b∈R 2作用于b。

ⓐ

$$F_a = k\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - s\right)\frac{\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix} x_b - x_a \\ y_B - y_A \end{matrix}\right|}$$

单e/l0

$$F_b = -F_a$$

ⓑ

现在计算作用在图1中右上方元件上的总力F 2∈R 2。计算要保持一般性，即取决于物体的位置。物体坐标用（x i , y i ）表示。

$$F_{2x} = k\left(\sqrt{(x_2-3)^2+(y_2-1)^2} - s\right)\frac{\begin{pmatrix} x_2 - 3 \\ y_2 - 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix} x_2 - 3 \\ y_2 - 1 \end{matrix}\right|}$$

$$+$$

$$F_{23} = k\left(\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} - s\right)\frac{\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix} x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \end{matrix}\right|}$$

$$+$$

$$F_{21} = k\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - s\right)\frac{\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{matrix}\right|}$$

$$\|$$

$$F_2$$

Es gilt

$$F_a = k \cdot \left(\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{vmatrix}}$$

Und ausserdem $F_b = -F_a$.

b)

Berechnen Sie nun exemplarisch, für das Element rechts oben in Abbildung 1, welche Gesamtkraft $F_2 \in \mathbb{R}^2$ darauf wirkt. Die Berechnung soll allgemein gehalten werden, d.h. in Abhängigkeit der Positionen der Objekte. Die Objektkoordinaten werden mit (x_i, y_i) bezeichnet.

$$\begin{aligned} F_2 = {} & k \cdot \left(\sqrt{(3 - x_2)^2 + (1 - y_2)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 3 - x_2 \\ 1 - y_2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 - x_2 \\ 1 - y_2 \end{vmatrix}} \\ & + k \cdot \left(\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{vmatrix}} \\ & + k \cdot \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

c)

Gehen Sie nun davon aus, dass die Gesamtkraft, die auf Objekt i wirkt, mit F_i bezeichnet wird. Die Kraft F_2 wurde ja explizit berechnet, für die anderen Kräfte können Sie einfach davon ausgehen, dass sie bereits bekannt sind. Die aktuelle Konfiguration des Systems kann durch einen 8-dimensionalen Vektor $q \in \mathbb{R}^8$ beschrieben werden, wobei

$$q = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$$

gilt. Die Kräfte F_i hängen ab von der aktuellen Konfiguration, d.h. es handelt sich um Abbildungen der Art $\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^2$. Die Bewegungsgleichung für das System kann nun folgendermassen formuliert werden:

$$M\ddot{q} = F$$

wobei M eine diagonale 8×8-Matrix mit Diagonaleinträgen m ist, und F ein Vektor der Kräfte, die wirken.

- Wie ist F zusammengesetzt? Beschreiben Sie F unter Verwendung der F_i-Funktionen genauer.
- Wenn das System initial nicht in Ruhelage ist, wird es dann von sich aus einen Ruhezustand erreichen? Wie erklären Sie das anhand obiger Differentialgleichung?

Man könnte z.B. schreiben:

$$F = (F_1^T, F_2^T, F_3^T, F_4^T)^T$$

Damit wäre die Bewegungsgleichung

$$M\ddot{q} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

An dieser Gleichung sieht man auch, dass das System von sich aus nicht den Ruhezustand erreichen kann: Es gibt kein dämpfendes Element, welches in dem System zu einer stetigen Abnahme der Geschwindigkeiten führen könnte. In einem einfachen Masse-Feder-Modell hätte man dafür etwa die Reibungskraft $-b\dot{x}$.

d)

Wenn es die Möglichkeit gibt, auf die Massenelemente zusätzliche Kräfte auszuüben, und wenn Sensoren im System vorhanden sind, mit denen man die Objektpositionen sowie -geschwindigkeiten abfragen kann, wie könnte man die Verfolgung einer vorgegebenen Trajektorie erreichen? Erklären sie kurz und allgemein das Prinzip eines entsprechenden Reglers.
Man könnte einen PD-Regler, so wie in der Übung besprochen, einsetzen. Dazu partitioniert man das System folgendermassen:

$$\tau = \alpha\tau' + \beta$$

mit

$$\tau' = \ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)$$

Ein derartiger Aufbau führt dazu, dass das System die Fehlergleichung

$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = 0$$

einhält, und sich daher auf den gewünschten Wert einpendelt.