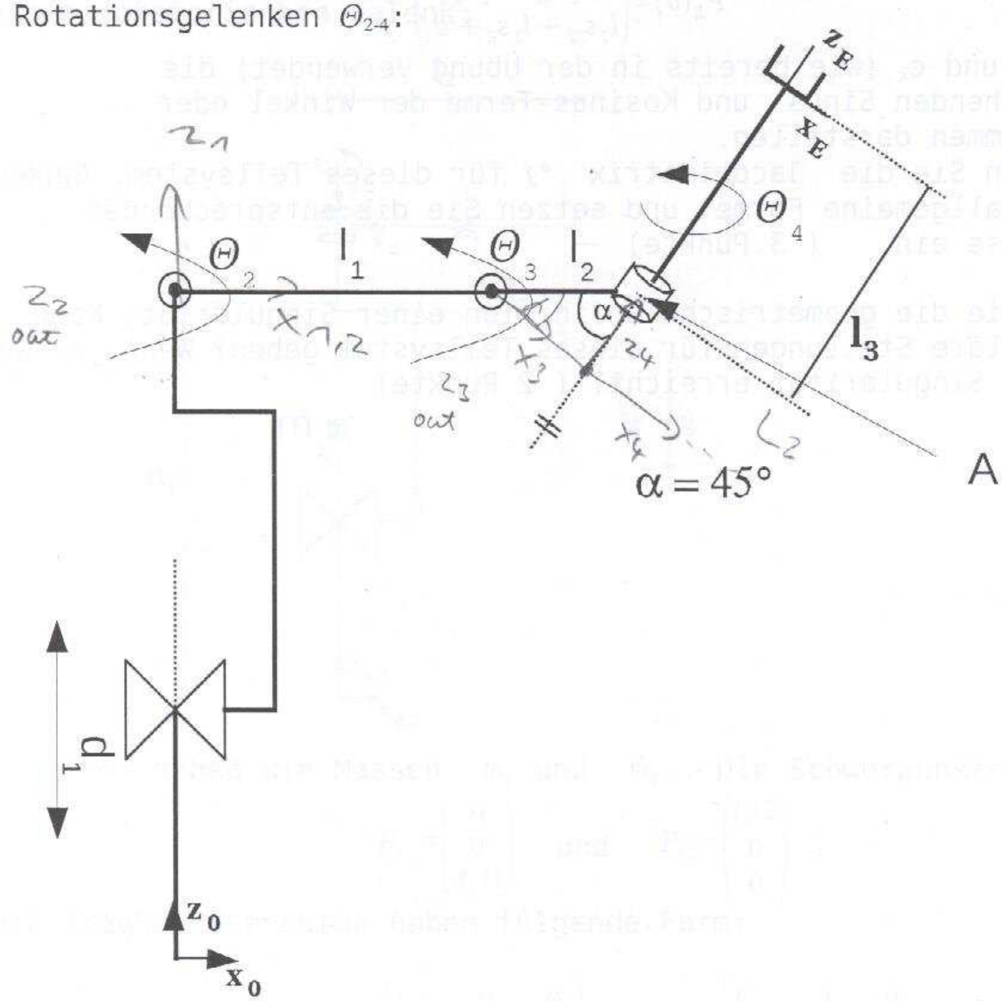
Aufgabe 1: (18 Punkte)

Gegeben sei folgender Manipulator mit einem Teleskop-Gelenk d_1 und 3 Rotationsgelenken $\Theta_{2\text{-}4}$:

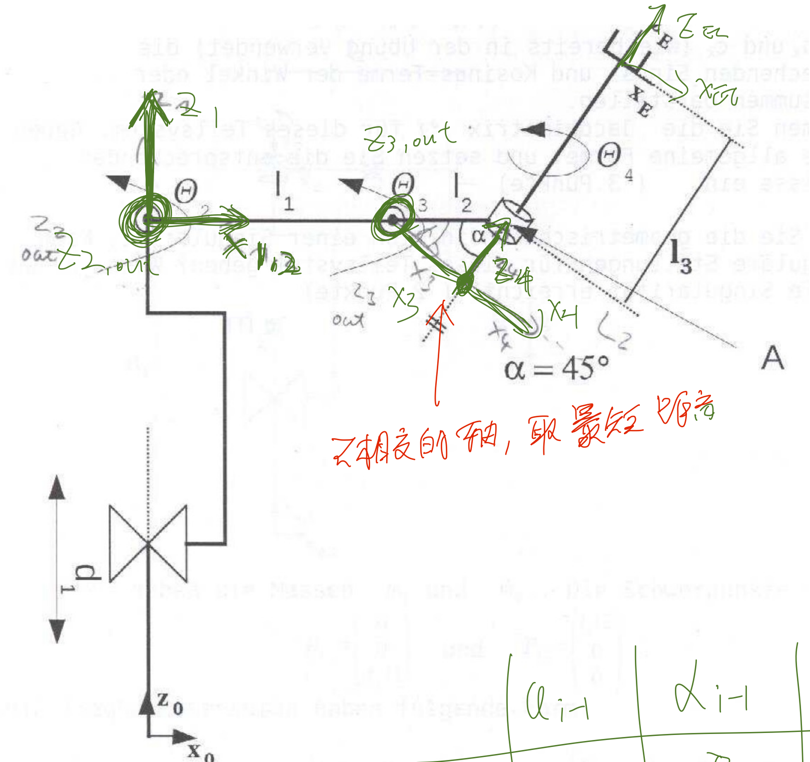


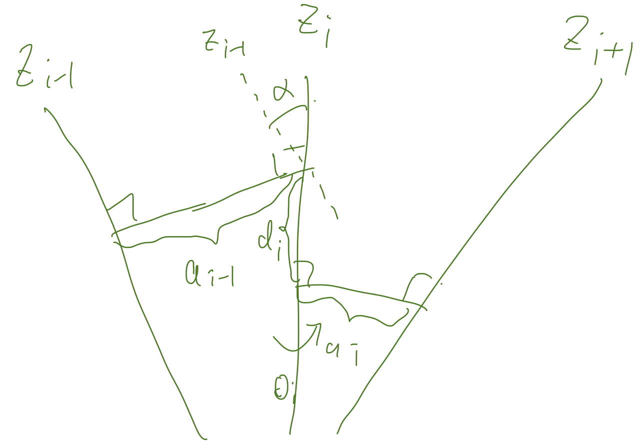
a) Zeichnen Sie in die obige Zeichnung die Richtung der z- und x-Achsen der Koordinatensysteme nach den Denavit-Hartenberg-Regeln (DH-Regeln) ein. (4 Punkte)

b) Erklären Sie anhand einer Skizze eines geeigneten Teilsystems die Bedeutung der DH-Parameter. (3 Punkte)

c) Beschreiben Sie die DH-Parameter des obigen Systems mit Hilfe einer Tabelle unter der Nutzung der Parameter aus der Zeichnung. (4 Punkte)

d) Wie viele Dimensionen hat der Konfigurationsraum, wie viele Freiheitsgrade werden im Arbeitsraum erreicht? (2 Punkte)





$2x^2 = L_2^2$

$x^2 =$

	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i	
1	0	0	d_1	0	
2	0	$90°$	0	θ_2	0
3	l_1	0	0	θ_3	$-45°$
4	$\frac{l_2}{\sqrt{2}}$	$-90°$	0	θ_4	0

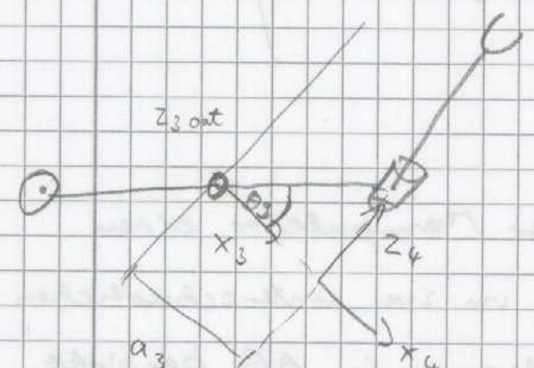
3

b) a_i = Distanz zw. z_i u. z_{i+1} entlang x_i

α_i = Winkel zw. " " bzgl. Rechtsdrehung um x_i

d_i = Distanz zw. x_{i-1} zu x_i gemessen entlang z_i

θ_i = Winkel zw. x_{i-1} u. x_i gemessen bzgl. Rechtsdrehung um z_i



$\alpha_3 = -90°$

$d_4 = 0$

c)

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0°	0	d_1	0°
2	90°	0	0	θ_2
3	0	l_1	0	θ_3
4	-90°	l_2	0	θ_4
5	0	0	l_3	0

$\theta_2 = 0°$

$\theta_3 = -45°$

$\theta_4 = 0°$

d) KR-Dim. = 4 , AR-Dim = ~~4~~ 3

AR-Dim. ergibt sich durch X/Y-Koordinate + Z Winkel, da der Endeffektor um z_4 rotiert werden kann sowie um z_3 und z_2.

e)

$$^0J = \begin{pmatrix} 0 & -l_2 s_{32} - l_1 s_2 & -l_2 s_{32} & 0 \\ 1 & l_2 c_{32} + l_1 c_2 & l_2 c_{32} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^0J \cdot \dot{\Theta} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2 \cdot \cdots - \dot{\theta}_3 \cdot \cdots \\ \dot{d}_1 + \dot{\theta}_2 \cdot \cdots + \dot{\theta}_3 \cdot \cdots \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}$$

f) In einer singulären Stellung verliert der Manipulator einen Freiheitsgrad, d.h. dass die Änderung von zwei unterschiedlichen Gelenkparametern die gleiche Änderung im AR bewirkt.

$$\det {}^0J = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & -l_2 s_{32} - l_1 s_2 & -l_2 s_{32} \\ 1 & l_2 c_{32} + l_1 c_2 & l_2 c_{32} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} 0 & -l_1 s_2 & -l_2 s_{32} \\ 1 & l_1 c_2 & l_2 c_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff l_1 s_2 = 0$$

$$\iff l_1 s_2 = 0$$

z.B. Singularität bei $\theta_2 \in \{0°; 180°\}$

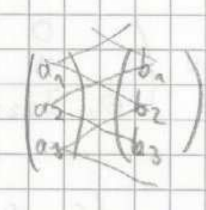
A2

a) $\quad {}^0\omega_0 = \vec{0} \qquad {}^0\dot{\omega}_0 = \vec{0} \qquad {}^0\dot{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$

$${}^1\omega_1 = {}^1_0R \cdot {}^0\omega_0 = \vec{0} \quad , \quad {}^1\dot{\omega}_1 = \vec{0}$$

$${}^1\dot{v}_1 = {}^1_0R\left(\vec{0} + \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}\right) + 2 \cdot \vec{0} + \ddot{d}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_{c_1} = \vec{0} + \vec{0} + {}^1\dot{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$



$${}^2\omega_2 = \underbrace{{}^2_1R \cdot {}^1\omega_1}_{0} + \dot{\theta}_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} ,$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \underbrace{{}^2_1R \cdot {}^1\dot{\omega}_1}_{0} + {}^2_1R \cdot \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = {}^2_1R \cdot \left(\vec{0} + \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_{c_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{L_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{L_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2^2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2^2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ \ddot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$^1F_1 = m_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix} \quad , \quad ^2F_2 = m_2 \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2^2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ \ddot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \\ g + \ddot{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$^1N_1 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad , \quad ^2N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \, I_{zz2} \end{pmatrix}$$

b) $$^2f_2 = {}^2F_2 \quad , \quad ^2n_2 = {}^2N_2 + \begin{pmatrix} \frac{L_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times {}^2F_2 + \vec{0}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \, I_{zz2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L_2}{2} \cdot (g + \ddot{d}_1) \cdot m_2 \\ \frac{L_2^2}{4} \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot m_2 \end{pmatrix}$$

$$^1f_1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot {}^2f_2 + {}^1F_1$$

$$= \begin{pmatrix} -m_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \frac{L_2}{2} \cdot c_2 + m_2 \ddot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \cdot s_2 \\ -m_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \frac{L_2}{2} \cdot s_2 + m_2 \ddot{\theta}_2 \cdot \frac{L_2}{2} \cdot c_2 \\ m_2 (g + \ddot{d}_1) + m_1 \cdot (g + \ddot{d}_1) \end{pmatrix}$$

$$^1n_1 = \vec{0} + \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot {}^2n_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 (g + \ddot{d}_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{pmatrix} \times ({}^1_2R \cdot {}^2F_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{L_2}{2} \cdot (g + \ddot{d}_1) \cdot m_2 \cdot s_2 \\ -\frac{L_2}{2} \cdot (g + \ddot{d}_1) \cdot m_2 \cdot c_2 \\ \ddot{\theta}_2 \, I_{zz2} + \frac{L_2^2}{4} \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot m_2 \end{pmatrix} + \vec{0} + \begin{pmatrix} -d_1 \cdot m_2 \cdot \frac{L_2}{2} \cdot (\ddot{\theta}_2 \cdot c_2 - \dot{\theta}_2^2 \cdot s_2) \\ d_1 \cdot m_2 \cdot \frac{L_2}{2} \, (\ddot{\theta}_2 \cdot s_2 - \dot{\theta}_2^2 \cdot c_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\tau = \begin{pmatrix} (m_2 + m_1)(g + \ddot{d}_1) \\ \ddot{\theta}_2 \cdot I_{zz2} + \frac{L_2^2}{4} \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot m_2 \end{pmatrix}$$

d) M-V-G-Form:

$$M = \begin{pmatrix} m_2 + m_1 & 0 \\ 0 & I_{zz2} + \frac{L_2^2}{4} \cdot m_2 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \vec{0} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} (m_2 + m_1) g \\ 0 \end{pmatrix}$$

M beschreibt die Massen des Systems, V die Zentrifugal- und Corioliskräfte, und G die Gewichtskraft.

A3

a) $I_{ges} = I_{Stick} + m_{Stick} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + I_{Kugel} + m_{Kugel} \cdot (L)^2$

$$= \frac{1}{3} L_2 \cdot m_{Stick} + m_{Kugel} \cdot \frac{2}{5} r^2 + m_{Kugel} \cdot L^2$$

b) $F = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$

Eulergleichung:

$N = I \cdot \ddot{\Theta}$

Reibungskraft:

$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r_{Kugel} \cdot \dot{\Theta} \cdot L$

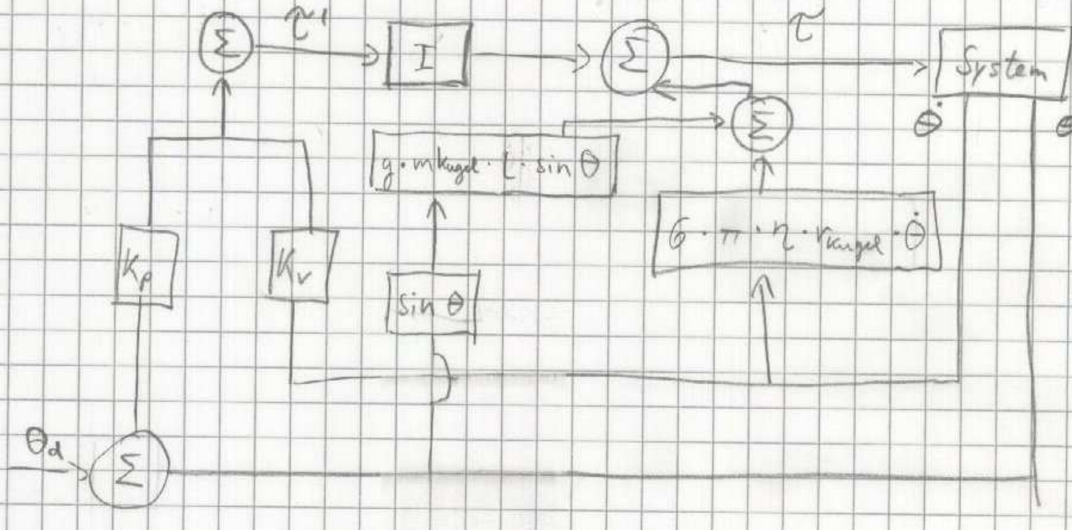
Gewichtskraft:

$G = g \cdot \sin\Theta \cdot m_{Kugel} \cdot L$ (g ist der Ortsfaktor)

Gesamt:

$\tau = \underline{I} \cdot \ddot{\Theta} + 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r_{Kugel} \cdot \dot{\Theta} \cdot L + g \cdot \sin\Theta \cdot m_{Kugel} \cdot L$

c)



d) Prinzip der Partitionierung:

$$\tau = \alpha \cdot \tau' + \beta,$$

wobei α die Massenmatrix der MVG-Form ist, und β den G- und V-Anteilen entspricht. Das System erscheint bzgl. τ' als ein System aus Einheitsmassen und ist unabhängig von den Parametern M, V, G.

In unserem Spezialfall können wir das System weiter aufteilen, so daß der nichtlineare Anteil $\sin\Theta$ entkoppelt wird.