Robotics formular sheet

Robotics (Technische Universität München)

Robotik

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Taylorentwicklung

$$Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n$$

$$Tf(x;x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-h)^n$$
$$= f(z) - \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f'(x) + \frac{(-h)^k}{k!}f^{(k)}(\xi)$$

$$Tf(x;x-h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f'(x) + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(\xi)$$

1.2 Trigonometrische Beziehungen

$$\sin\theta = -\sin(-\theta) = -\cos(\theta + 90^\circ) = \cos(\theta - 90^\circ)$$
$$\cos\theta = \cos(-\theta) = \sin(\theta + 90^\circ) = -\sin(\theta - 90^\circ)$$

Identitäten

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1 \pm \theta_2) &= c_{12} = c_1c_2 \mp s_1s_2 \\
\sin(\theta_1 \pm \theta_2) &= s_{12} = s_1c_2 \pm c_1s_2 \\
s_{2\theta} &= 2s_\theta c_\theta \\
c_{2\theta} &= c_\theta^2 - s_\theta^2 = 2c_\theta^2 - 1 = 1 - 2s_\theta^2 \\
s_1c_2 &= \frac{1}{2}(s_{1-2} + s_{12}) \\
s_{12}c_1 &= \frac{1}{2}[s_2 + \sin(2\theta_1 + \theta_2)] \\
s_1c_{12} &= \frac{1}{2}[s_{-2} + \sin(2\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

2 Grundlagen der linearen Algebra

2.1 Adjunkte

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \operatorname{Cof}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

mit den Kofaktoren

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$
$$= (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

2.2 Inverse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2.3 Determinante

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\det\mathbf{A} = \sum_{(i\vee j)=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \text{wobei } i,j = 1,2,\dots,n$$

Bsp. Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det\mathbf{A} = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Eigenschaften:

$$\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$$
$$\det\mathbf{A}^k = (\det\mathbf{A})^k$$
$$\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n\mathbf{A}$$

3 Kinematik

Vorwärts- und Rückwärtskinematik:

$$\underline{x} = f(\underline{\Theta}) \qquad \text{"Vorwärtskinematik"}$$
$$\underline{\Theta} = f^{-1}(\underline{x}) \qquad \text{"Rückwärtskinematik"}$$

Verallgemeinerte Koordinaten

$$\underline{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\Theta} \end{bmatrix}, \qquad \text{Pose}$$
$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} {}^i\underline{v}_i \\ {}^i\underline{\omega}_i \end{bmatrix}, \qquad \text{verall. Geschwindigkeit}$$
$$\underline{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{N} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} {}^i\underline{f}_i \\ {}^i\underline{n}_i \end{bmatrix}, \qquad \text{verall. Kräfte}$$

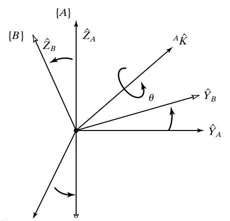
3.1 Eigentliche Eulerwinkel

3.2 Rotationsmatrizen

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{Y}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{Z}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Achsen-Winkel-Darstellung – Rodrigues Formel

Ausgehend von deckungsgleichen Koordinatensystemen $\{A\}$ und $\{B\}$, rotiere $\{B\}$ entlang dem Vektor ${}^A\hat{K}$ mit dem Winkel θ entsprechend der Rechten-Hand-Regel.



Notation:

$$\mathbf{R} := \mathbf{R}_K(\theta)$$

Definitionen:

$${}^A\underline{\hat{K}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}, \qquad \left\| {}^A\underline{\hat{K}} \right\| = 1$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^A_B\mathbf{R} = \mathbf{1} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2 + \sin\theta\,\mathbf{K}$$
$$= \begin{bmatrix} k_1^2 v\theta + c\theta & k_1k_2v\theta - k_3s\theta & k_1k_3v\theta + k_2s\theta \\ k_1k_2v\theta + k_3s\theta & k_2^2v\theta + c\theta & k_2k_3v\theta - k_1s\theta \\ k_1k_3v\theta - k_2s\theta & k_2k_3v\theta + k_1s\theta & k_3^2v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

mit $\quad v\theta = 1 - \cos\theta, c\theta = \cos\theta, s\theta = \sin\theta$

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$$

Inverse Problemstellung – $\mathbf{R}$ gegeben, finde ${}^A\underline{\hat{K}}$ und θ:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{spur}\mathbf{R} - 1}{2}\right)$$
$${}^A\underline{\hat{K}} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

3.4 Homogene Transformation

$$\begin{bmatrix} {}^A\underline{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A\underline{P}_{\mathrm{BORG}} \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix}}_{:= {}^A_B\mathbf{T}} \begin{bmatrix} {}^B\underline{P} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A\underline{p} = {}^A_B\mathbf{T}\,{}^B\underline{p}$$

Verknüpfung von Transformationen:

$${}^A_C\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\hat{\mathbf{R}}\,{}^B_C\hat{\mathbf{R}} & {}^A_B\hat{\mathbf{R}}\,{}^B\underline{P}_{\mathrm{CORG}} + {}^A\underline{P}_{\mathrm{BORG}} \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Inversion:

$${}^B_A\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\hat{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}} & -{}^A_B\hat{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\,{}^A\underline{P}_{\mathrm{BORG}} \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix}$$
$${}^B_A\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T}^{-1}$$

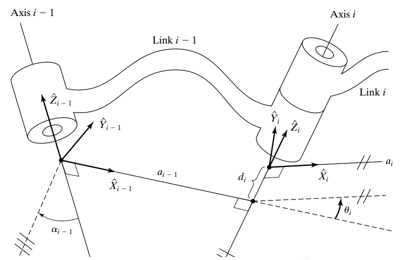
Operatoren

$$\mathbf{D}_Q(q) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_i(\alpha) := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_i & \underline{0} \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 Denavit-Hartenberg-Transformation

Verwendung der *distalen* Beschreibung, d.h. Transformation von dem Koordinatensystem $i-1$ nach dem System i.



Regeln – Distal:

1. α_{i-1} = Winkel zwischen $\hat{Z}_{i-1}$ und $\hat{Z}_i$ um $\hat{X}_{i-1}$
2. a_{i-1} = Abstand von $\hat{Z}_{i-1}$ nach $\hat{Z}_i$ gemessen entlang $\hat{X}_{i-1}$
3. θ_i = Winkel zwischen $\hat{X}_{i-1}$ und $\hat{X}_i$ um $\hat{Z}_i$
4. d_i = Abstand von $\hat{X}_{i-1}$ nach $\hat{X}_i$ gemessen entlang $\hat{Z}_i$

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	a_0	α_0	d_1	θ_1
2	a_1	α_1	d_2	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Proximale Transformationsmatrix:

$${}^{i-1}_{\ \ i}\mathbf{T} = \mathbf{R}_{\mathrm{X}}(\alpha_{i-1})\mathbf{D}_{\mathrm{X}}(a_{i-1})\mathbf{R}_{\mathrm{Z}}(\theta_i)\mathbf{D}_{\mathrm{Z}}(d_i)$$
$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiele? Sonderfälle?

Arbeitsraumattribute

1. Design Effizienz (möglichst gering)

$$L = \sum_{i=1}(a_{i-1} + d_i)$$
$$Q_L = \frac{L}{\sqrt[3]{W}}$$

mit W Arbeitsraumvolumen.

2. Manipulator Maß – Yoshikawa (möglichst hoch)

$$w = \sqrt{\det\mathbf{J}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}}$$
$$= |\det\mathbf{J}| \qquad \text{(nicht-redundant)}$$

3.6 Jacobimatrix

Definition:

$$\mathbf{J}_f = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Anwendung:

$${}^B\underline{\nu} := \begin{bmatrix} {}^B\underline{v} \\ {}^B\underline{\omega} \end{bmatrix} = {}^B\mathbf{J}_{\underline{f}}(\underline{\Theta})\dot{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{J}_{\underline{v}}(\underline{\Theta}) \\ {}^B\mathbf{J}_{\underline{\omega}}(\underline{\Theta}) \end{bmatrix}\dot{\underline{\Theta}}$$

wobei gilt:

$${}^A\mathbf{J}_{\underline{f}}(\underline{\Theta}) = \begin{bmatrix} {}^A_B\hat{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^A_B\hat{\mathbf{R}} \end{bmatrix} {}^B\mathbf{J}_{\underline{f}}(\underline{\Theta})$$

Singuläre, isotrope Positionen:

$$\det\mathbf{J}_{\underline{f}}(\underline{\Theta}) \stackrel{!}{=} 0$$

Bestimmung:

1. Geometrische Methode – Vorwärtskinematik

$$^{0}\underline{p} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}\,{}^{1}_{2}\mathbf{T}\cdots{}^{i}_{n}\mathbf{T}\begin{bmatrix}\underline{0}\\1\end{bmatrix}$$

$$^{0}\mathbf{J}_{\underline{p}} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\,{}^{0}p_i}{\partial\Theta_j}\\ {}^{0}\underline{\hat{Z}}_j\end{bmatrix}$$

$$^{n}\mathbf{J}_{\underline{p}} = \begin{bmatrix}{}^{n}_{0}\hat{\mathbf{R}} & \underline{0}\\ \underline{0} & {}^{n}_{0}\hat{\mathbf{R}}\end{bmatrix}{}^{0}\mathbf{J}_{\underline{p}}$$

2. Winkel- und Lineargeschwindigkeiten

$$^{n}\underline{\nu} = {}^{n}\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix}{}^{n}\underline{v}_n\\ {}^{n}\underline{\omega}_n\end{bmatrix} \overset{\text{Prop.}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix}[\ldots]\\ [\ldots]\end{bmatrix}}_{^{n}\mathbf{J}}\underline{\dot{\Theta}}$$

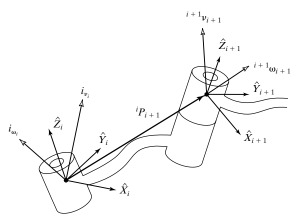
3. Kräfte und Momente

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix}\tau_1 = \begin{cases}{}^{1}\underline{n}_1^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\underline{\hat{Z}}_1, & \text{rot.}\\ {}^{1}\underline{f}_1^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\underline{\hat{Z}}_1, & \text{prism.}\end{cases}\\ \tau_2 = \begin{cases}{}^{2}\underline{n}_2^{\mathrm{T}}\,{}^{2}\underline{\hat{Z}}_2, & \text{rot.}\\ {}^{2}\underline{f}_2^{\mathrm{T}}\,{}^{2}\underline{\hat{Z}}_2, & \text{prism.}\end{cases}\\ \vdots\\ \tau_i = \begin{cases}{}^{i}\underline{n}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\underline{\hat{Z}}_i, & \text{rot.}\\ {}^{i}\underline{f}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\underline{\hat{Z}}_i, & \text{prism.}\end{cases}\end{bmatrix} \overset{\text{Prop.}}{=} \underbrace{\begin{bmatrix}[\ldots] & [\ldots]\end{bmatrix}}_{^{n}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}\underline{F}\\ \underline{N}\end{bmatrix}$$

Pseudoinverse – nicht quadratische Jacobimatrix

$$\mathbf{J}^{-*} = \left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\right)^{-1}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$$

3.7 Winkel- und Lineargeschwindigkeiten

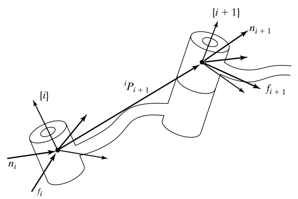


Propagation

$$^{i+1}\underline{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i}\underline{\omega}_i + \begin{cases}\dot{\Theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1}, & \text{rot.}\\ 0 & \text{prism.}\end{cases}$$

$$^{i+1}\underline{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\hat{\mathbf{R}}\left({}^{i}\underline{v}_i + {}^{i}\underline{\omega}_i \times {}^{i}\underline{P}_{i+1}\right) + \begin{cases}0, & \text{rot}\\ \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1}, & \text{prism.}\end{cases}$$

3.8 Kräfte und Momente



Propagation

$$^{i}\underline{f}_i = {}^{i}_{i+1}\mathbf{R}\,{}^{i+1}\underline{f}_{i+1}$$

$$^{i}\underline{n}_i = {}^{i}_{i+1}\mathbf{R}\,{}^{i+1}\underline{n}_{i+1} + {}^{i}\underline{P}_{i+1} \times {}^{i}\underline{f}_i$$

Rotations-Gelenk:

$$\tau_i = {}^{i}\underline{n}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\underline{Z}_i = {}^{i}\underline{n}_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Prismatisches-Gelenk:

$$\tau_i = {}^{i}\underline{f}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\underline{Z}_i = {}^{i}\underline{f}_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\underline{\mathcal{F}}\cdot\delta\underline{\chi} = \underline{\tau}\cdot\delta\underline{\Theta}$$

mit

$$\delta\underline{\chi} = \mathbf{J}\delta\underline{\Theta} \tag{1}$$

gilt

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \vdots\\ \tau_n\end{bmatrix} = \underline{\tau} = {}^{A}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\,{}^{A}\underline{\mathcal{F}} = {}^{A}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}{}^{A}\underline{f}\\ {}^{A}\underline{n}\end{bmatrix}$$

4 Kinetik

Newton- und Eulergleichung

$$F = m\dot{v}_C$$

$$N = {}^{C}\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}\mathbf{I}\omega$$

4.1 Trägheitstensor

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix}I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz}\end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_K (y^2+z^2)\,\mathrm{d}m \qquad I_{xy} = -\int_K xy\,\mathrm{d}m$$

$$I_{yy} = \int_K (x^2+z^2)\,\mathrm{d}m \qquad I_{xz} = -\int_K xz\,\mathrm{d}m$$

$$I_{zz} = \int_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m \qquad I_{yz} = -\int_K yz\,\mathrm{d}m$$

Verschiebung Massenmittelpunkt: ${}^{A}\underline{d} = (a,b,c)^{\mathrm{T}}$

$$^{A}\mathbf{I} = {}^{C}\mathbf{I} + m\left[{}^{A}\underline{d}\cdot{}^{A}\underline{d}\,\mathbf{1} - {}^{A}\underline{d}\otimes{}^{A}\underline{d}\right]$$

$$= \begin{bmatrix}I^C_{xx} & I^C_{xy} & I^C_{xz}\\ I^C_{xy} & I^C_{yy} & I^C_{yz}\\ I^C_{xz} & I^C_{yz} & I^C_{zz}\end{bmatrix} + m\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{bmatrix}$$

$$I^A_{xx} = I^C_{xx} + (b^2+c^2)m \qquad I^A_{xy} = I^C_{xy} - abm$$

$$I^A_{yy} = I^C_{yy} + (a^2+c^2)m \qquad I^A_{xz} = I^C_{xz} - acm$$

$$I^A_{zz} = I^C_{zz} + (a^2+b^2)m \qquad I^A_{yz} = I^C_{yz} - bcm$$

4.2 Newton-Euler-Methode

Notation:

$$\star = \begin{cases}[\ldots], & i+1 = \text{rot.}\\ [\ldots], & i+1 = \text{prism.}\end{cases}$$

1. Phase – Äußere Iteration: $0 \to n$

Kinematik:

$$^{i+1}\underline{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i}\underline{\omega}_i + \begin{cases}\dot{\Theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1}\\ 0\end{cases}$$

$$^{i+1}\underline{\dot{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i}\underline{\dot{\omega}}_i + \begin{cases}{}^{i+1}_{i}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\Theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1}\\ \quad + \ddot{\Theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1}\\ 0\end{cases}$$

$$^{i+1}\underline{\dot{v}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\hat{\mathbf{R}}\left({}^{i}\underline{\dot{\omega}}_i \times {}^{i}\underline{P}_{i+1} + {}^{i}\underline{\omega}_i \times \left({}^{i}\underline{\omega}_i \times {}^{i}\underline{P}_{i+1}\right) + {}^{i}\underline{\dot{v}}_i\right) + \begin{cases}0\\ 2\cdot{}^{i+1}\underline{\omega}_{i+1} \times \underline{\dot{d}}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1} + \underline{\ddot{d}}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\hat{Z}}_{i+1}\end{cases}$$

$$^{i+1}\underline{\dot{v}}_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\underline{\dot{\omega}}_{i+1} \times {}^{i+1}\underline{P}_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\underline{\omega}_{i+1} \times \left({}^{i+1}\underline{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\underline{P}_{C_{i+1}}\right) + {}^{i+1}\underline{\dot{v}}_{i+1}$$

Kinetik:

$$^{i+1}\underline{F}_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\dot{v}}_{C_{i+1}}$$

$$^{i+1}\underline{N}_{i+1} = {}^{C_{i+1}}\mathbf{I}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\dot{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1}\underline{\omega}_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}\mathbf{I}_{i+1}\,{}^{i+1}\underline{\omega}_{i+1}$$

2. Phase – Innere Iteration: $n \to 1$

$$^{i}\underline{f}_i = {}^{i}_{i+1}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i+1}\underline{f}_{i+1} + {}^{i}\underline{F}_i$$

$$^{i}\underline{n}_i = {}^{i}_{i+1}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i+1}\underline{n}_{i+1} + {}^{i}\underline{N}_i + {}^{i}\underline{P}_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}\hat{\mathbf{R}}\,{}^{i+1}\underline{f}_{i+1} + {}^{i}\underline{P}_{C_i} \times {}^{i}\underline{F}_i$$

Gravition:

$$\underline{G} \overset{\text{O.b.d.A}}{=} \begin{bmatrix}0\\-g\\0\end{bmatrix}$$

$$^{0}\underline{\dot{v}}_0 = -\underline{G}$$

M-V-G und M-B-C-G Form

$$\underline{\tau} = \tau_i = \begin{cases}{}^{i}\underline{n}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\underline{\hat{Z}}_i, & \text{rot.}\\ {}^{i}\underline{f}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\underline{\hat{Z}}_i, & \text{prism.}\end{cases}$$

$$= \mathbf{M}(\underline{\Theta})\underline{\ddot{\Theta}} + \underline{V}(\underline{\Theta},\underline{\dot{\Theta}}) + \underline{G}(\underline{\Theta})$$

$$= \mathbf{M}(\underline{\Theta})\underline{\ddot{\Theta}} + \mathbf{B}(\underline{\Theta})\left[\underline{\dot{\Theta}}\underline{\dot{\Theta}}\right] + \mathbf{C}(\underline{\Theta})\left[\underline{\dot{\Theta}}^2\right] + \underline{G}(\underline{\Theta})$$

mit

$$\left[\underline{\dot{\Theta}}\underline{\dot{\Theta}}\right] = \begin{bmatrix}\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2\\ \dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_3\\ \vdots\\ \dot{\Theta}_{n-1}\dot{\Theta}_n\end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{\dot{\Theta}}^2\right] = \begin{bmatrix}\dot{\Theta}_1^2\\ \dot{\Theta}_2^2\\ \vdots\\ \dot{\Theta}_n^2\end{bmatrix}$$

Kartesische Zustandsraumgleichung

$$\underline{\mathcal{F}} = \mathbf{M}_x(\underline{\Theta})\underline{\ddot{\chi}} + \underline{V}_x(\underline{\Theta},\underline{\dot{\Theta}}) + \underline{G}_x(\underline{\Theta})$$

mit Gleichung (1)

$$\mathbf{M}_x(\underline{\Theta}) = \mathbf{J}^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}(\underline{\Theta})\mathbf{J}^{-1}$$

$$\underline{V}_x(\underline{\Theta}) = \mathbf{J}^{-\mathrm{T}}\left(\underline{V}(\underline{\Theta},\underline{\dot{\Theta}}) - \mathbf{M}(\Theta)\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\underline{\dot{\Theta}}\right)$$

$$\underline{G}_x(\underline{\Theta}) = \mathbf{J}^{-\mathrm{T}}\underline{G}(\Theta)$$

mit elementweiser Zeitdifferentiation

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

4.3 Lagrange-Formalismus

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\underline{v}_{C_i}^{\mathrm{T}}\underline{v}_{C_i} + \frac{1}{2}\,{}^{i}\underline{\omega}_i^{\mathrm{T}}\,{}^{C_i}\mathbf{I}_i\,{}^{i}\underline{\omega}_i$$

$$k = \begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i\\ \dfrac{1}{2}\underline{\dot{\Theta}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\underline{\Theta})\underline{\dot{\Theta}}\end{cases}$$

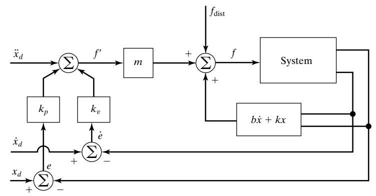
$$u_i = -m_i\,{}^{0}\underline{g}^{\mathrm{T}}\,{}^{0}\underline{P}_{C_i} + u_{\mathrm{ref}}$$

Lagrange-Gleichung 2. Art

$$\underline{\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial k}{\partial\underline{\dot{\Theta}}} - \frac{\partial k}{\partial\underline{\Theta}} + \frac{\partial u}{\partial\underline{\Theta}}$$

$$\tau_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial k}{\partial\underline{\dot{\Theta}}_i} - \frac{\partial k}{\partial\underline{\Theta}_i} + \frac{\partial u}{\partial\underline{\Theta}_i}$$

5 Lineare Regelung



Modellproblem

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Fallunterscheidung

$$\text{Verhalten} = \begin{cases}b^2 > 4mk & \text{Überdämpfung}\\ b^2 < 4mk & \text{Unterdämpfung – Oszillation}\\ b^2 = 4mk & \text{Aperiodischer Grenzfall}\end{cases}$$

Dämpfungsverhältnis und Resonanzfrequenz

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}}, \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

$\leftarrow \sqrt{k_P}$

5.1 Kontrollgesetz Ansätze

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

Position-Regulierung

$$f = -k_p x - k_v\dot{x}$$

Regelungsparameter

$$b' = b + k_v \overset{!}{=} 2\sqrt{mk'}, \quad k' = k + k_p$$

Closed-Loop Dynamik

$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0$$

Partionierung

Aufteilung des Reglers in Modellierung- und Steuerungsanteil

$$
\begin{aligned}
f &= \alpha f' + \beta \\
\alpha &= m, \quad \beta = b\dot{x} + kx \\
\Rightarrow \ddot{x} &= f' \quad \text{(Systemgleichung)} \\
f' &= -k_p x - k_v \dot{x} \quad \text{(Regelgesetz)}
\end{aligned}
$$

Regelungsparameter – *Unabhängigkeit von Systemparametern*

$$k_v = 2\sqrt{k_p}$$

Closed-Loop Dynamik

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$$

Bahnkurvenverfolgung

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

mit $e = x_d - x$ gilt

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0$$

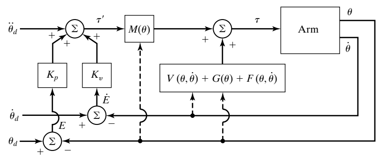
Störunterdrückung – Steady-State-Error

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e \mathrm{d}t$$

5.2 Nichtlineare Regelung

[lokale Linearisierung]

5.3 MIMO Systeme



Bewegungsgleichung

$$\underline{\tau} = \mathbf{M}(\underline{\Theta})\underline{\ddot{\Theta}} + \underline{V}(\underline{\Theta}, \underline{\dot{\Theta}}) + \underline{G}(\underline{\Theta}) + \underline{F}(\Theta, \dot{\Theta})$$

Partionierung

$$
\begin{aligned}
\underline{\tau} &= \boldsymbol{\alpha}\underline{\tau}' + \underline{\beta} \\
\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{M} \\
\underline{\beta} &= \underline{V} + \underline{G} + \underline{F}
\end{aligned}
$$

Regelgesetz

$$\underline{\tau}' = \underline{\ddot{\Theta}}_d + \mathbf{K}_v \underline{\dot{E}} + \mathbf{K}_p \underline{E}$$

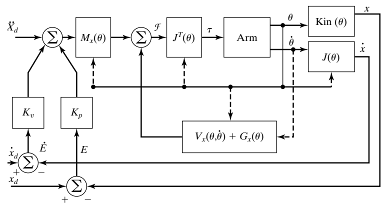
mit $E = \underline{\Theta}_d - \underline{\Theta}$ gilt (entkoppelt)

$$\underline{\ddot{E}} + \mathbf{K}_v \underline{\dot{E}} + \mathbf{K}_p \underline{E} = 0$$

Praktische Überlegungen

1. Rechenzeit – Samplingzeit
2. Entkoppelte Implementierung (M-B-C-G)
3. Unbekannte Parameter

Kartesische Regelung



6 Kraftregelung

Kraftregelung bezeichnet die Regelung der Kraft, mit welcher eine Maschine oder der Manipulator eines Roboters auf ein Objekt oder sein Umfeld einwirkt. Durch Regelung der Kontaktkraft können Beschädigungen an der Maschine sowie der zu bearbeitenden Objekte und Verletzungen beim Umgang mit Menschen verhindert werden.

Wirkende Kraft (Federannahme) auf die Umgebung f_e soll geregelt werden

$$f_e = k_e x$$

Bewegungsgleichung

$$
\begin{aligned}
f &= m\ddot{x} + k_e x + f_{\text{dist}} \\
&= m k_e^{-1} \ddot{f}_e + f_e + f_{\text{dist}}
\end{aligned}
$$

Partionierung

$$
\begin{aligned}
\alpha &= m k_e^{-1} \\
\beta &= f_e + f_{\text{dist}}
\end{aligned}
$$

Regelgesetz mit $e_f = f_d - f_e$

$$f = m k_e^{-1} \left[\ddot{f}_d + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f\right] + f_e + f_{\text{dist}}$$

Closed-Loop Dynamik

$$\ddot{e}_f + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f = 0$$

Kenntnis von f_{dist} unwahrscheinlich – Steady-State Analysis ohne f_{dist} führt auf

$$e_f = \frac{f_{\text{dist}}}{m k_e^{-1} k_{pf}} = \frac{f_{\text{dist}}}{\alpha}$$

Substitution $f_d = f_e + f_{\text{dist}}$

$$e_f = \frac{f_{\text{dist}}}{1 + \alpha}$$

Wenn k_e groß ist beschreibt folgendes Regelgesetz hinreichend genau das Verhalten

$$f = m k_e^{-1} \left[\ddot{f}_d + k_{vf} \dot{e}_f + k_{pf} e_f\right] + f_d$$

Praktische Überlegungen

1. Gemessene Kräfte sind verrauscht
2. Funktionaler Zusammenhang der Kontaktkräfte meist nicht gegeben

Modifiziertes Regelgesetz

$$f = m\left[k_{pf} k_e^{-1} e_f - k_{vf} \dot{x}\right] + f_d$$