Lehrstuhl für Fahrzeugtechnik
School of Engineering and Design
Technische Universität München

Fahrerassistenzsysteme im Kraftfahrzeug

Prof. Dr.-Ing. Markus Lienkamp

Vorlesungsübersicht

01 Einführung 28.04.2022 – Prof. Lienkamp	**01 Einführung** 28.04.2022 – Prof. Lienkamp	**01 Übung Einführung** 28.04.2022 – Hoffmann
02 Sensorik / Wahrnehmung I 05.05.2022 – Prof. Lienkamp	**02 Sensorik / Wahrnehmung I** 05.05.2022 – Prof. Lienkamp	**02 Sensorik / Wahrnehmung I** 05.05.2022 – Prof. Lienkamp
03 Sensorik / Wahrnehmung II 12.05.2022 – Dr.-Ing. Diermeyer	**03 Sensorik / Wahrnehmung II** 12.05.2022 – Dr.-Ing. Diermeyer	**03 Übung Sensorik / Wahrnehmung II** 12.05.2022 – Schimpe
04 Sensorik / Wahrnehmung III 19.05.2022 – Schimpe	**04 Sensorik / Wahrnehmung III** 19.05.2022 – Schimpe	**04 Übung Sensorik / Wahrnehmung III** 19.05.2022 – Schimpe
05 Funktionslogik / Regelung 02.06.2022 – Dr.-Ing. Winkler	**05 Funktionslogik / Regelung** 02.06.2022 – Dr.-Ing. Winkler	**05 Funktionslogik / Regelung** 02.06.2022 – Dr.-Ing. Winkler
06 Übung Funktionslogik / Regelung 09.06.2022 – Dr.-Ing. Winkler	**06 Funktionale Systemarchitektur** 09.06.2022 – Prof. Lienkamp	**06 Aktorik** 09.06.2022 – Prof. Lienkamp
07 Deep Learning 23.06.2022 – Majstorovic	**07 Deep Learning** 23.06.2022 – Majstorovic	**07 Übung Deep Learning** 23.06.2022 – Majstorovic
08 MMI 30.06.2022 – Prof. Bengler	**08 MMI** 30.06.2022 – Prof. Bengler	**08 MMI Übung** 30.06.2022 – Prof. Bengler
09 Controllability 07.07.2022 – Prof. Bengler	**09 Controllability** 07.07.2022 – Prof. Bengler	**09 Übung Controllability** 07.07.2022 – Winkle
10 Entwicklungsprozess 14.07.2022 – Dr.-Ing. Diermeyer	**10 Entwicklungsprozess** 14.07.2022 – Dr.-Ing. Diermeyer	**10 Übung Entwicklungsprozess** 14.07.2022 – Hoffmann
11 Analyse und Bewertung FAS 21.07.2022 – Dr.-Ing. Feig	**11 Analyse und Bewertung FAS** 21.07.2022 – Dr.-Ing. Feig	**11 Übung Analyse und Bewertung FAS** 21.07.2022 – Dr.-Ing. Feig
12 Aktuelle und künftige Systeme 28.07.2022 – Prof. Lienkamp	**12 Aktuelle und künftige Systeme** 28.07.2022 – Prof. Lienkamp	**12 Aktuelle und künftige Systeme** 28.07.2022 – Prof. Lienkamp

Übung Kalman Filter
Andreas Schimpe, M.Sc.

Agenda

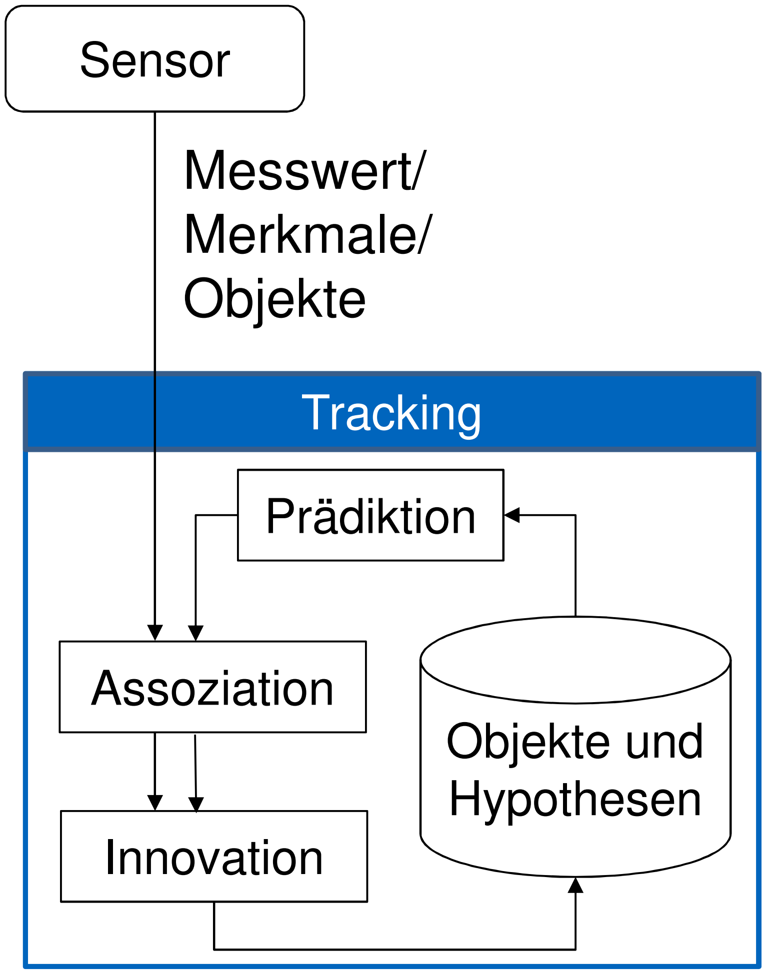
- Rekursiver Bayesschätzer
- Zustandsraummodell des Beispiels
- Normalverteilung
- Kalmanfilter
- Rechenbeispiel

Grundprinzip

Filterung einer zeitlichen Abfolge von Messwerten

Aktualisierung von gespeicherten Tracks mit neuen Messwerten

- Prädiktion des Objektzustands
- Assoziation von gemessenem und prädiziertem Zustand
- Innovation: Aktualisierung des Objektzustands



Kalmanfilter

- **Rekursiver Bayesfilter**
- Minimiert mittleren quadratischen Fehler
- Optimale Lösung für **normalverteilte** Zustandsgrößen unter den Annahmen:
  - **Lineare Modelle**
  - Prozess- und Mess-Störungen sind **normalverteilt**, **mittelwertfrei** und **zeitlich unkorreliert**

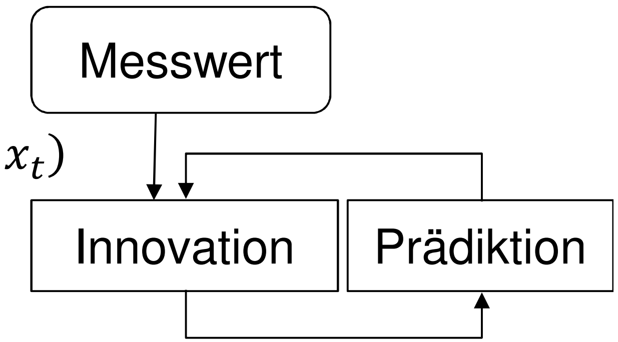
Schätztheorie als Grundlage des Trackings

Rekursiver Bayesfilter

- Bayes-Schätzung: stochastische Schätzung auf Basis des Satzes von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- Gesucht ist die beste Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zustands x auf Basis von Beobachtungen z

$$P(x_t|z_{1:t}) = \frac{P(z_{1:t}|x_t)\,P(x_t)}{P(z_{1:t})}$$

- Rekursiver Bayesschätzer:
  - Prädiktion: $P(x_t)$ als geschätzter Wert
  - Innovation: Update mit gemessenem Wert $P(z_t|x_t)$



- Nomenklatur
  - Zustand zum Zeitpunkt *t* x_t
  - Messwert vom Zeitpunkt *t* z_t
  - Schätzwert $\hat{x}_t$

Grundlagen für objektbasiertes Tracking

Zustandsbeschreibung

- Für Tracking ist Modellierung der Objektbewegung notwendig (Prädiktion)
- Modellierung durch Zustandsraummodelle effizient möglich
- Markov-Eigenschaft 1. Ordnung: nächster Zustand hängt nur vom aktuellen Zustand ab

Anwendungsbeispiel

Aufgabe 1: Ein Fahrzeug mit einem im Frontbereich integrierten Laserscanner folgt einem Vorderfahrzeug. Welche Merkmale können gemessen werden?

Vereinfachend wird im Folgenden nur noch die eindimensionale Bewegung entlang der x-Achse betrachtet.

Anwendungsbeispiel

Aufgabe 1: Ein Fahrzeug mit einem im Frontbereich integrierten Laserscanner folgt einem Vorderfahrzeug. Welche Merkmale können gemessen werden?

- Abstand
- Abmessungen (Breite)
- Evtl. Orientierung

Vereinfachend wird im Folgenden nur noch die eindimensionale Bewegung entlang der x-Achse betrachtet.

Anwendungsbeispiel

Aufgabe 2: Mit welchem diskreten Zustandsraummodell kann die relative Bewegung des Vorderfahrzeugs unter der Annahme konstanter Relativgeschwindigkeit modelliert werden?

Anwendungsbeispiel

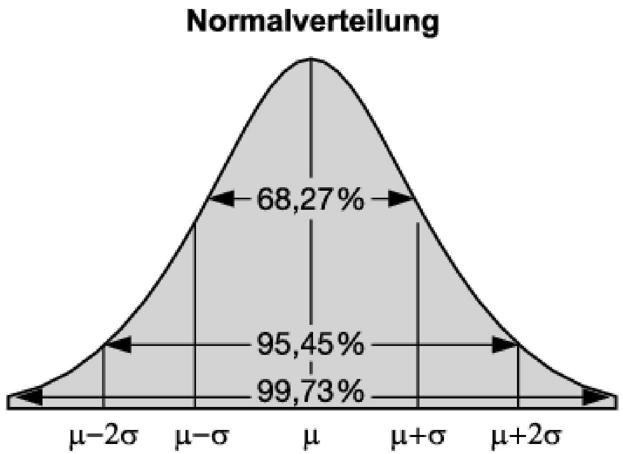
Aufgabe 2: Mit welchem diskreten Zustandsraummodell kann die relative Bewegung des Vorderfahrzeugs unter der Annahme konstanter Relativgeschwindigkeit modelliert werden?

$$d_1 = d_0 + v_{\text{rel},0} \cdot \Delta T,$$

$$\rightarrow \qquad \begin{bmatrix} d \\ v_{\text{rel}} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v_{\text{rel}} \end{bmatrix}_{k-1}$$

Mit *d* Abstand zum Vorderfahrzeug, v_{rel} Relativgeschwindigkeit

Normalverteilte Prozess und Messgrößen

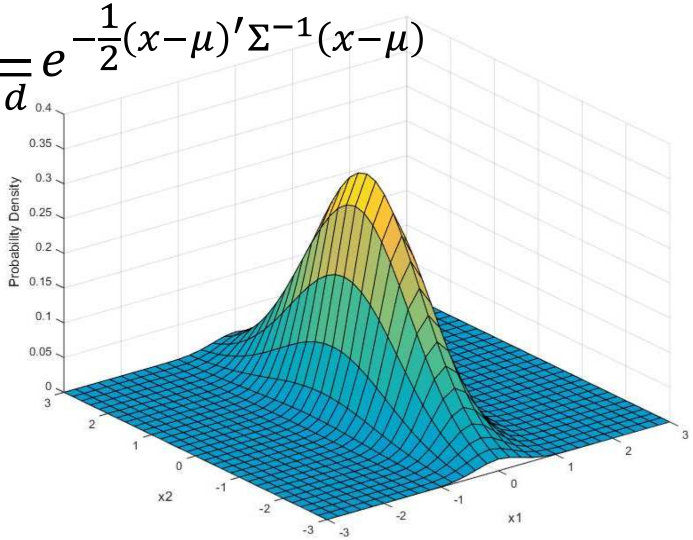


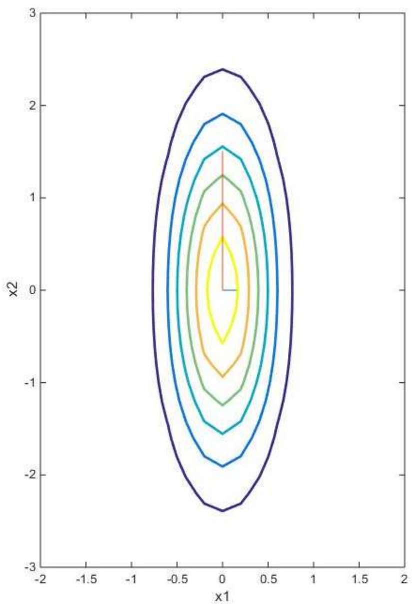
- Eindimensionale Normalverteilung

$$y = f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

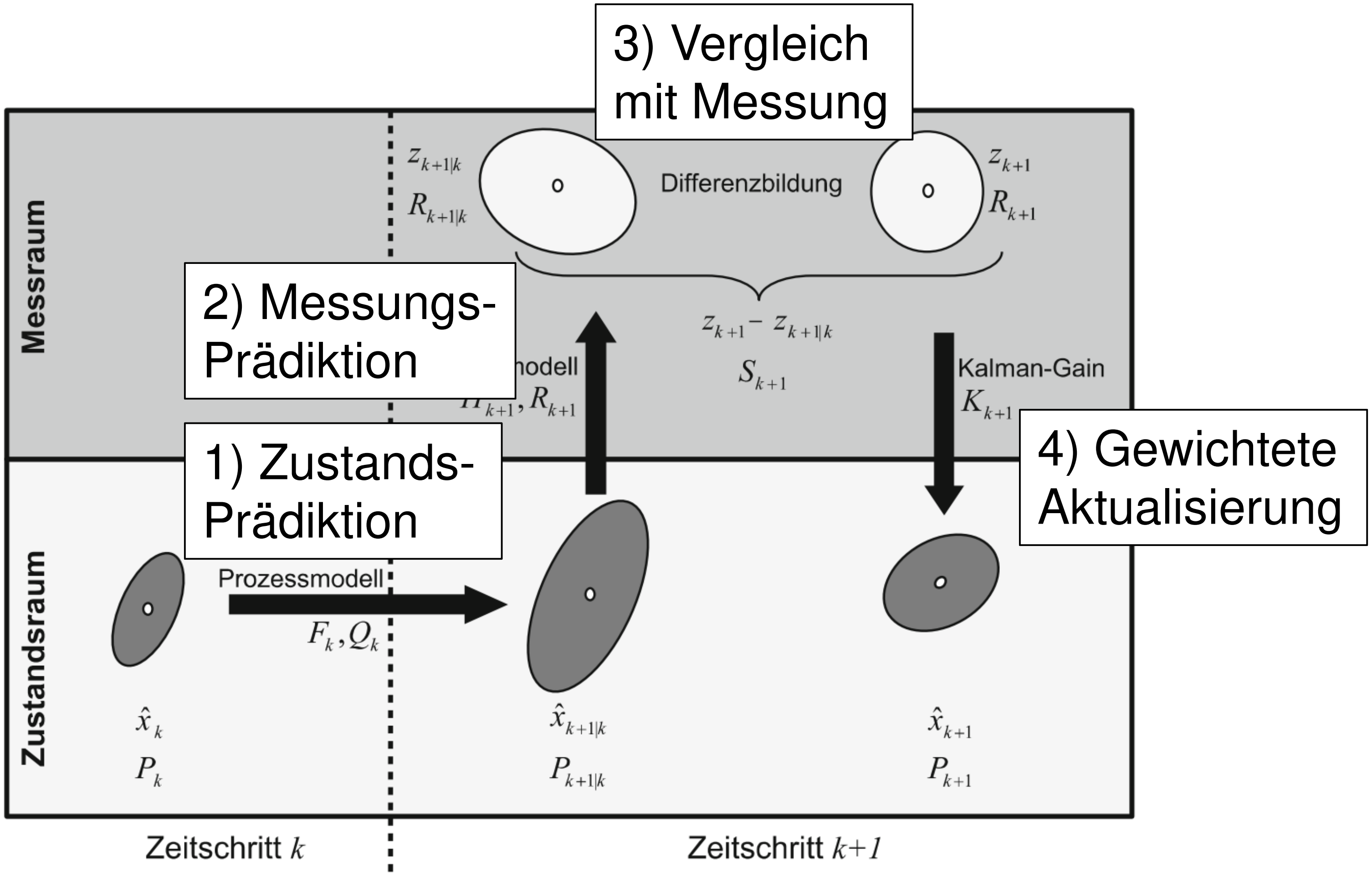
- Mehrdimensionale Normalverteilung

$$y = f(x,\mu,\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|(2\pi)^d}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$





Schritte des Kalmanfilters



Ablauf des Kalman-Filters in einem Zeitschritt k→k+1

Winner 2015, S.454

Schritte im Beispiel: qualitativ

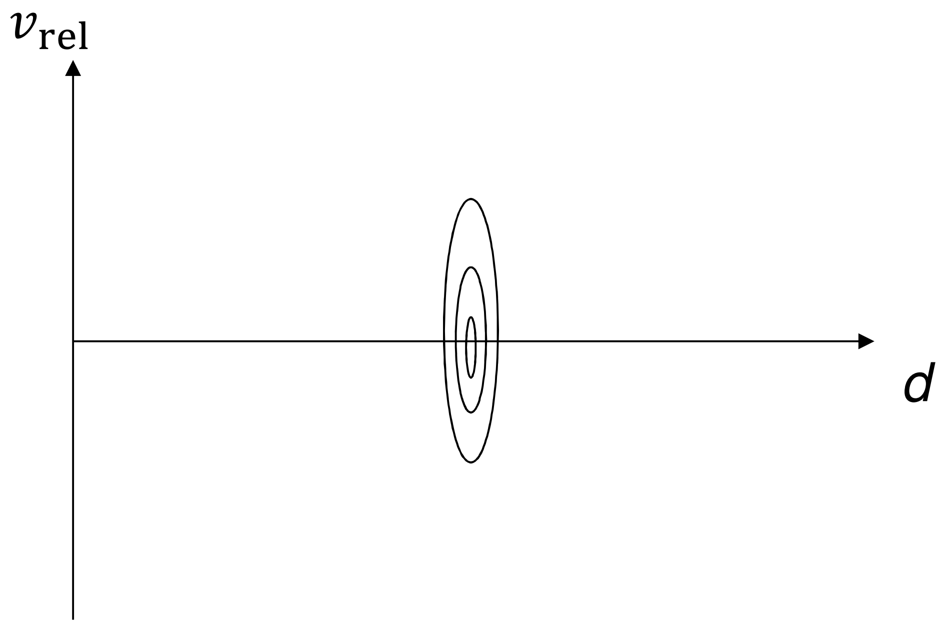
Initialisierung

- Initialisierung des Zustands $x_0 = \begin{bmatrix} d \\ v_{\text{rel}} \end{bmatrix}$ mit erstem Messwert $z_0 = d_0$
- v_0: sinnvoller Initialwert
- Messunsicherheit $\mathbf{v}_0$

Schritte im Beispiel: qualitativ

Initialisierung

- Initialisierung des Zustands $x_0 = \begin{bmatrix} d \\ v_{\mathrm{rel}} \end{bmatrix}$ mit erstem Messwert $z_0 = d_0$
- v_0: sinnvoller Initialwert.
- Messunsicherheit $\mathbf{v}_0$

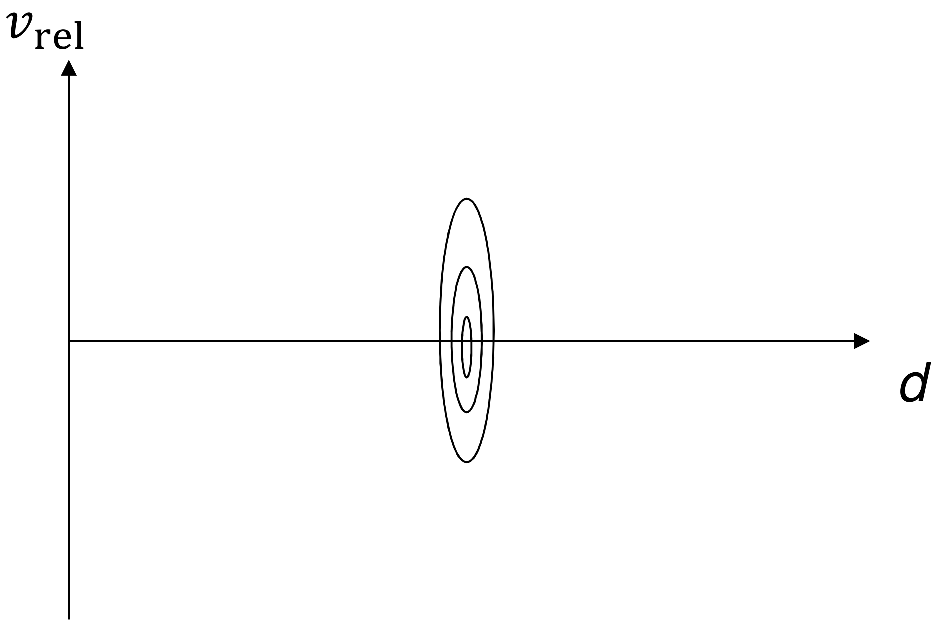


Schritte im Beispiel: qualitativ

Prädiktion

- Prädiktion des Zustands $\hat{x}_1$ auf Basis des Bewegungsmodells

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} d \\ v_{\mathrm{rel}} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v_{\mathrm{rel}} \end{bmatrix}_{k-1}$$

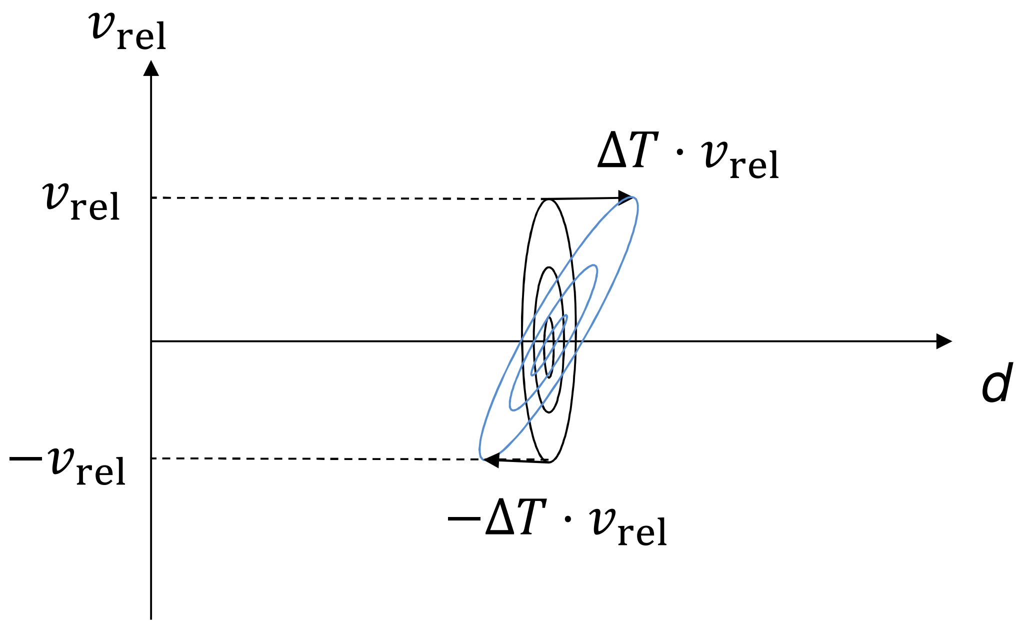


Schritte im Beispiel: qualitativ

Prädiktion

- Prädiktion des Zustands $\hat{x}_1$ auf Basis des Bewegungsmodells

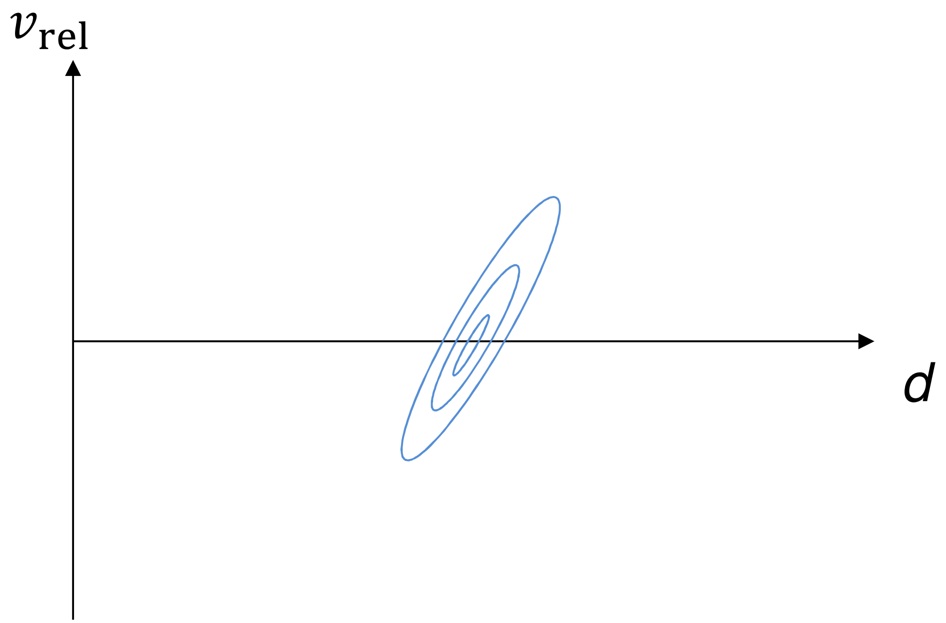
$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} d \\ v_{\text{rel}} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v_{\text{rel}} \end{bmatrix}_{k-1}$$



Schritte im Beispiel: qualitativ

Innovation

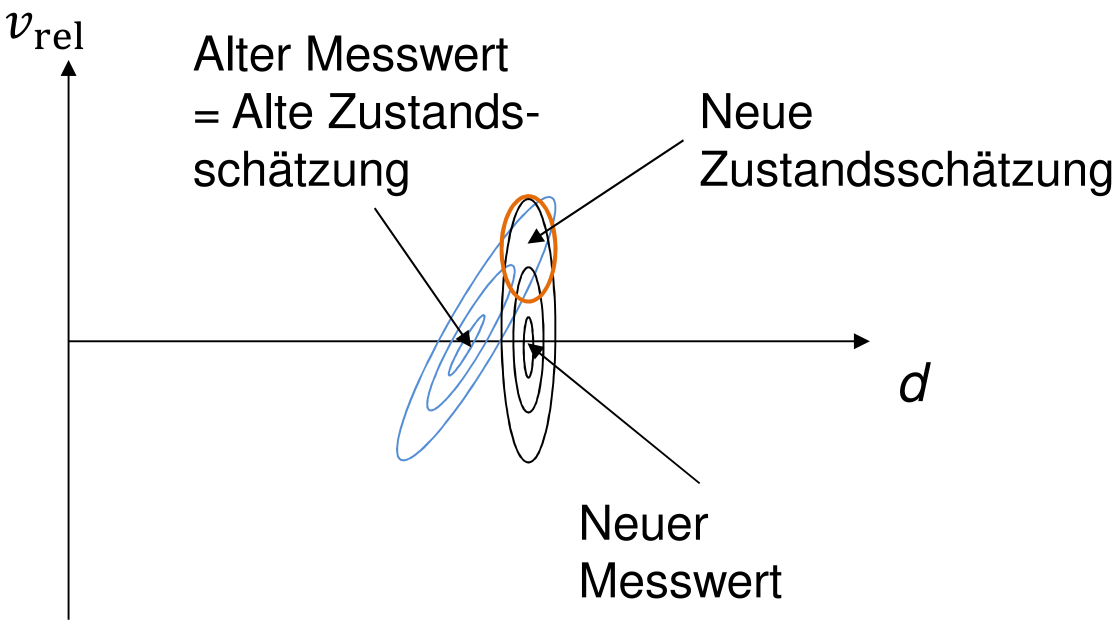
- Korrektur mit aktuellem Messwert



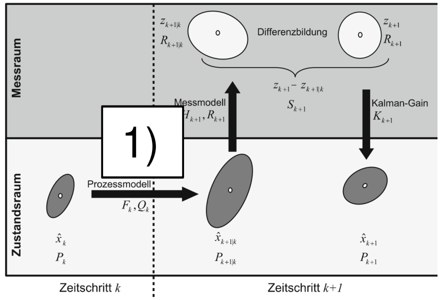
Schritte im Beispiel: qualitativ

Innovation

- Korrektur mit aktuellem Messwert



Kalmanfilter – Rechenschritte (1)



- Diskretes dynamisches System

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\phi}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1} + \overbrace{\boldsymbol{w}_{k-1}}^{\text{Prozessrauschen}}$$
$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k + \underbrace{\boldsymbol{v}_k}_{\text{Messrauschen}}$$

- **Prädiktion** von Schätzwert und Kovarianzmatrix

1) Zustandsprädiktion

$$\overbrace{\hat{\boldsymbol{x}}_k(-) = \boldsymbol{\phi}_{k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}}(+)$$
$$\boldsymbol{P}_k(-) = \boldsymbol{\phi}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}(+)\boldsymbol{\phi}_{k-1}^T + \underbrace{\boldsymbol{Q}_{k-1}}_{\text{Kovarianz Prozessrauschen}}$$

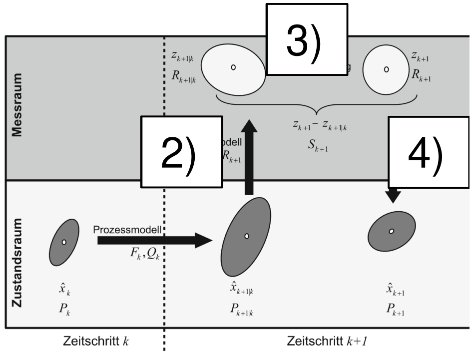
- Anpassung Kalmanfaktor

$$\overline{\boldsymbol{K}}_k = \boldsymbol{P}_k(-)\boldsymbol{H}_k^T\underbrace{\left[\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_k(-)\boldsymbol{H}_k^T + \overbrace{\boldsymbol{R}_k}^{\text{Kovarianz Messrauschen}}\right]}_{}^{-1}$$

Innovationskovarianzmatrix: Vergleich Modellunsicherheit im Messraum und Messunsicherheit

$(-)$	Prädizierte Werte
$(+)$	Aktualisierte Werte

Kalmanfilter – Rechenschritte (2)



Innovation

- mit Kalmanfaktor (K) gewichtete Anpassung der Prädiktion:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k(+) = \underbrace{\hat{\boldsymbol{x}}_k(-) + \bar{\boldsymbol{K}}_k \underbrace{[\boldsymbol{z}_k - \overbrace{\boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{x}}_k(-)]}^{\text{2) Messungsprädiktion}}}_{\text{3)Vergleich mit Messung}}}_{\text{4) Gewichtete Aktualisierung}}$$

- Anpassung Kovarianzmatrix:

$$\boldsymbol{P}_k(+) = [\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{K}}_k \boldsymbol{H}_k] \boldsymbol{P}_k(-)$$

Anwendungsbeispiel

Kalmanfilter Rechenbeispiel

Aufgabe 3: Der Laserscanner (mit einer angegebenen Messunsicherheit $\sigma = 0{,}1$ m) hat ein neues Objekt im Abstand 39,97 m detektiert. Initialisieren Sie den Kalmanfilter mit einem sinnvollen Anfangszustand und Kovarianzmatrix. Prädizieren Sie anschließend den erwarteten Zustand, Messwert sowie die Kovarianzmatrix beim nächsten Zeitschritt (1 s).

Anwendungsbeispiel

Kalmanfilter Rechenbeispiel

Aufgabe 3: Der Laserscanner (mit einer angegebenen Messunsicherheit σ = 0,1 m) hat ein neues Objekt im Abstand 39,97 m detektiert. Initialisieren Sie den Kalmanfilter mit einem sinnvollen Anfangszustand und Kovarianzmatrix. Prädizieren Sie anschließend den erwarteten Zustand, Messwert sowie die Kovarianzmatrix beim nächsten Zeitschritt (1 s).

$$x_0(+) = \begin{bmatrix} d \\ v_{\text{rel}} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 39.97 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_1(-) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39.97 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.97 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{z}_1 = 39.97$$

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1(-) &= \boldsymbol{\phi}_{k-1} \boldsymbol{P}_{k-1}(+) \boldsymbol{\phi}_{k-1}^T + \boldsymbol{Q}_{k-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta T & 1 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel

Kalmanfilter Rechenbeispiel

Aufgabe 4: Die nächste Messung des Laserscanners ergibt einen Abstand von 34,98 m. Berechnen Sie den Kalmanfaktor. Berücksichtigen Sie dabei die Messunsicherheit R mit σ = 0,1 m.

Wie lautet die dafür notwendige Messmatrix $\boldsymbol{H}_k$ in $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$?

Die prädizierte Kovarianzmatrix ist $\boldsymbol{P}_1(-) = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Anwendungsbeispiel

Kalmanfilter Rechenbeispiel

Aufgabe 4: Die nächste Messung des Laserscanners ergibt einen Abstand von 34,98 m. Berechnen Sie den Kalmanfaktor. Berücksichtigen Sie dabei die Messunsicherheit R mit σ = 0,1 m.

Wie lautet die dafür notwendige Messmatrix $\boldsymbol{H}_k$ in $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$?

$$\boldsymbol{H}_1 = [1\ 0]$$

Die prädizierte Kovarianzmatrix ist $\boldsymbol{P}_1(-) = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\overline{\boldsymbol{K}}_1 = \boldsymbol{P}_1(-)\boldsymbol{H}_1^T[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{P}_1(-)\boldsymbol{H}_1^T + \boldsymbol{R}_1]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[[1\ 0] \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.01 \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.98 \end{bmatrix}$$

Anwendungsbeispiel

Kalmanfilter Rechenbeispiel

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Innovation des Kalmanfilters. (Korrektur des prädizierten Zustands mit der gewichteten Messwertabweichung)

Anwendungsbeispiel

Kalmanfilter Rechenbeispiel

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Innovation des Kalmanfilters. (Korrektur des prädizierten Zustands mit der gewichteten Messwertabweichung)

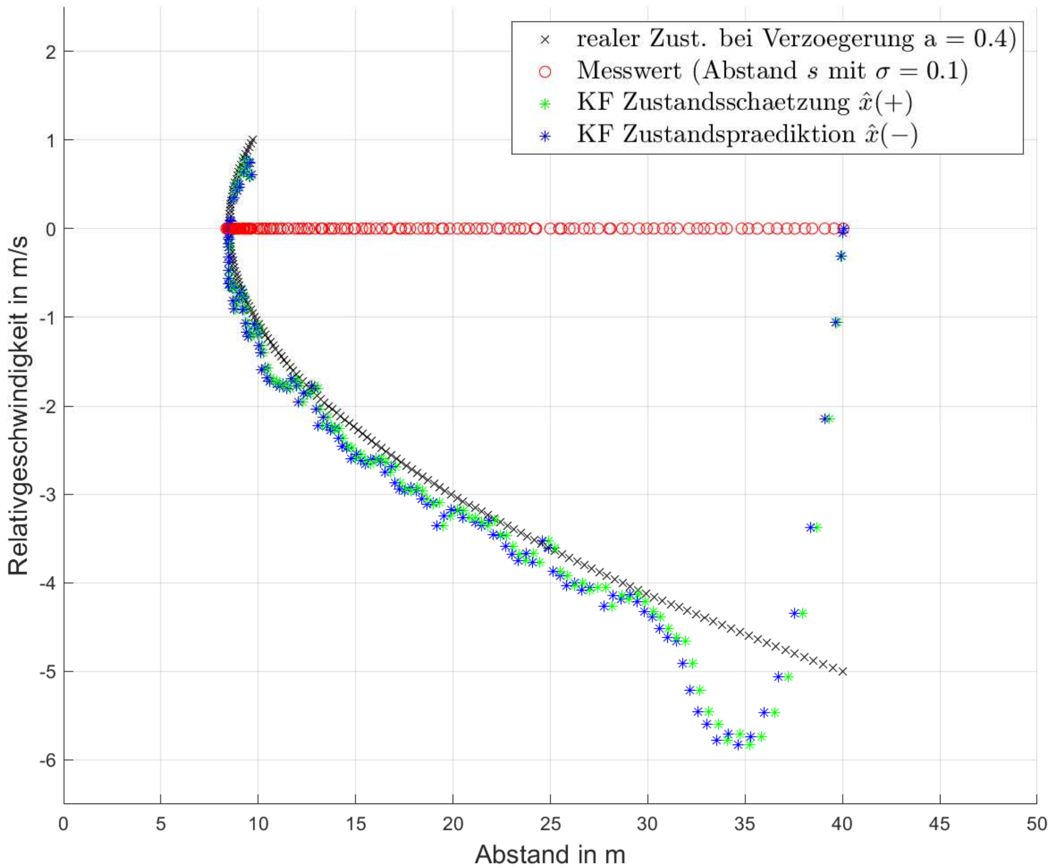
$$\hat{\boldsymbol{x}}_1(+) = \hat{\boldsymbol{x}}_1(-) + \bar{\boldsymbol{K}}_1[\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{H}_1\hat{\boldsymbol{x}}_1(-)]$$

$$= \begin{bmatrix} 39.97 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.98 \end{bmatrix} \left[34.98 - [1\ 0] \begin{bmatrix} 39.97 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 39.97 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.98 \end{bmatrix} [-4.99] = \begin{bmatrix} 35.03 \\ -4.89 \end{bmatrix}$$

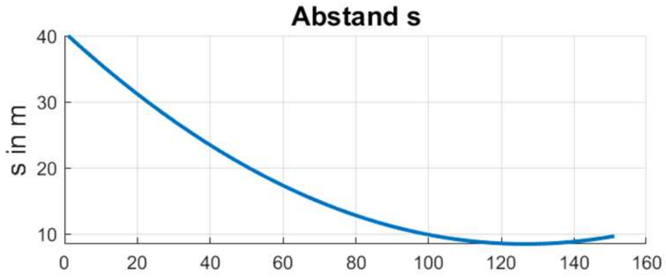
Anwendungsbeispiel

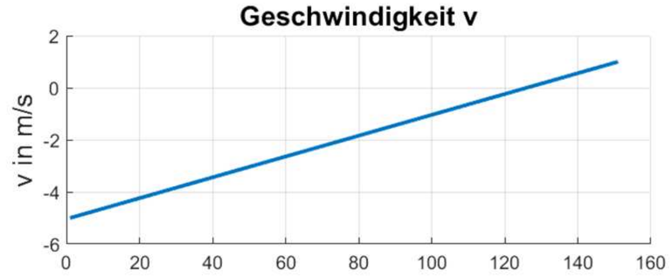
$x_0 = [40m, -5\frac{m}{s}]$; $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.4\frac{m}{s^2}$; Sensorrauschen ; $\sigma = 0.1$; $\mathrm{t_s} = 0.1s$



Anwendungsbeispiel

$x_0 = [40m, -5\frac{m}{s}]$; $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.4\frac{m}{s^2}$; Sensorrauschen ; $\sigma = 0.1$; $\mathrm{t_s} = 0.1s$



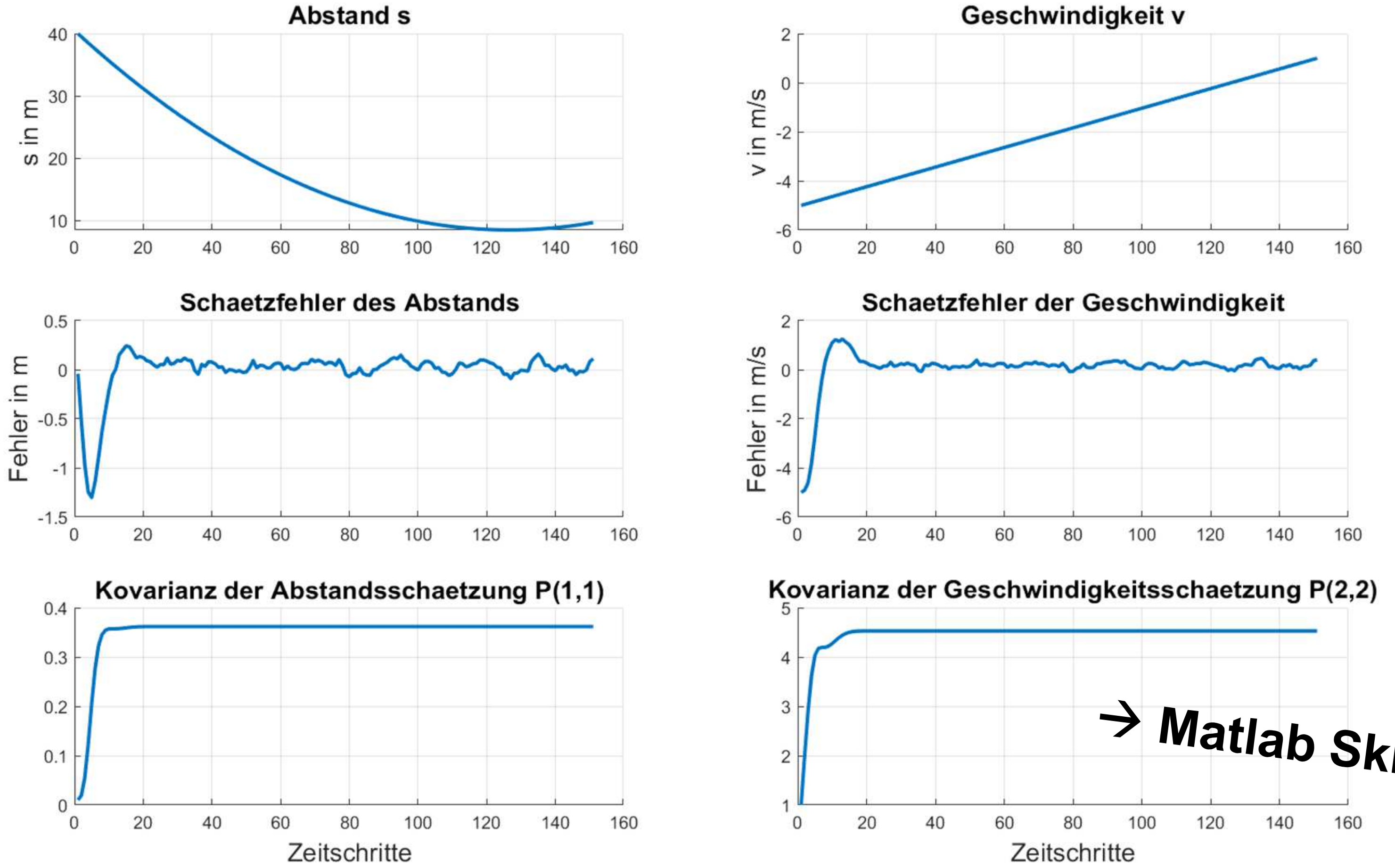


Zeitschritte

Zeitschritte

Anwendungsbeispiel

$x_0 = [40m, -5\frac{m}{s}]$; $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0.4\frac{m}{s^2}$; Sensorrauschen ; $\sigma = 0.1$; $\mathrm{t_s} = 0.1s$



→ **Matlab Skript**