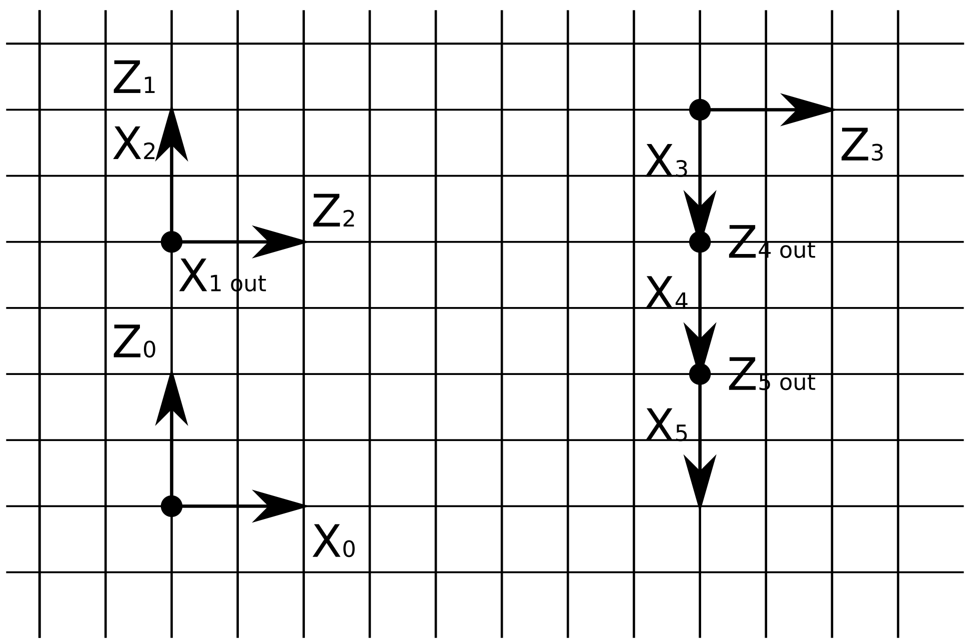
Aufgabe 1

a)

Gegeben ist die Beschreibung eines Roboters durch Denavit-Hartenberg-Parameter (nach Craig) durch folgende Größen:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i	Wert des Gelenkparameters
1	$0°$	0	$-90°$	d_1	$d_1 = 4$
2	$-90°$	0	Θ_2	0	$\Theta_2 = -90°$
3	$0°$	2	$180°$	d_3	$d_3 = 8$
4	$90°$	2	Θ_4	0	$\Theta_4 = 0°$
(5)	$0°$	2	0	0	

Der Roboter hat 4 Gelenke, die letzte Transformation führt zum Endeffektorsystem. Tragen Sie alle Koordinatensysteme in das unten vorgegebene Raster ein. Die Kästchen haben eine Größe von 1×1. Wählen Sie dabei die Werte der Gelenkparameter so, dass der Roboter vollständig in der Zeichenebene liegt. Zeichnen Sie nur die x und z-Achsen der Koordinatensysteme ein, und tragen Sie Ihre Wahl der Gelenkparameter in obige Tabelle ein.



Man beachte, dass die Lösung hier nicht eindeutig ist: $\Theta_2 = +90°$ kann ebenfalls gewählt werden. Ausserdem ist Θ_4 beliebig.

b)

Die kartesischen Koordinaten des Endeffektors sind für obigen Roboter gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2\,\sin\Theta_4 + d_3 \\ 2\,\cos\Theta_2\,\cos\Theta_4 \\ 2\,\sin\Theta_2\,\cos\Theta_4 + d_1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die vollständige 6×4 Jacobi-Matrix des Manipulators. Beachten Sie, dass der Roboter in Teilaufgabe a) nicht in Nulllage ist. Wie viele Freiheitsgrade hat der Roboter?

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\cos(\Theta_4) \\ 0 & -2\sin(\Theta_2)\cos(\Theta_4) & 0 & -2\cos(\Theta_2)\sin(\Theta_4) \\ 1 & 2\cos(\Theta_2)\cos(\Theta_4) & 0 & -2\sin(\Theta_2)\sin(\Theta_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\Theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\Theta_2) \end{pmatrix}$$

Der Roboter hat 4 Freiheitsgrade.

c)

Gehen Sie im Weiteren von folgender minimalen Jacobi-Matrix aus:

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\Theta_2\cos\Theta_4 & 0 & -2\sin\Theta_2\sin\Theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\Theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie: Diese Jacobi-Matrix beruht auf einer anderen, minimalen Darstellung der Position, und stimmt deswegen nicht mit der in Teilaufgabe b) berechneten Matrix überein. Gibt es singuläre Konfigurationen? Erklären Sie, was das Besondere an solch einer singulären Konfiguration ist.

$$\det J' = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\cos(\Theta_4) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Der Roboter hat daher keine Singularitäten. Das sieht man auch an der Matrix aus Aufgabe b): Ihr Rang ist immer 4.
In einer singulären Konfiguration verliert der Roboter einen Freiheitsgrad, d.h. es gibt eine Richtung, in die er sich nicht bewegen kann.

Aufgabe 2

Gegeben sei folgender Roboter mit 4 Gelenken:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	Θ_i	d_i
1	0	0	Θ_1	1
2	0	2	0	d_2
3	0	0	Θ_3	1
4	0	2	0	d_4
(5)	0	0	0	1

Um die Berechnung zu vereinfachen gilt $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ für die Massen der Roboterarme. Die Trägheitstensoren haben folgende Form:

$$I_i = \begin{pmatrix} Ixx_i & 0 & 0 \\ 0 & Iyy_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desweiteren sind die Positionen der Ursprünge der Gelenkkoordinatensysteme gegeben durch

$${}^0P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, {}^1P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix}, {}^2P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, {}^3P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

und die Massenschwerpunkte liegen bei

$${}^1P_{C1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_2}{2} \end{pmatrix}, {}^2P_{C2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, {}^3P_{C3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix}, {}^4P_{C4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Um die Schwerkraft zu berücksichtigen, gilt ${}^0\dot{v}_0 = (g, 0, 0)$.

a)

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ${}^i\omega_i$, ${}^i\dot{\omega}_i$, ${}^i\dot{v}_i$ sowie ${}^i\dot{v}_{Ci}$, die für den ersten Schritt des Newton-Euler-Verfahrens benötigt werden, für $i = 1, 2, 3$.

$${}^1\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix},$$

$${}^1\dot{v}_1 = {}^1_0R(g, 0, 0)^T = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1)g \\ -\sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^1v_{C1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1)g \\ -\sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\Theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\Theta_1)g \\ -\sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\Theta}_1^2 + \cos(\Theta_1)g \\ \ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus obigen Gleichungen sollte man sich auch merken:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b\\0\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ba\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b\\0\\c\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-ba^2\\0\\0\end{pmatrix}$$

Diese Struktur von Kreuzprodukten kommt in der Berechnung ständig vor. Das zweite Gelenk ist ein Schiebegelenk, und es gilt ${}^2_1R = I$. Die Rotationsgeschwindigkeiten sind daher einfach:

$${}^2\omega_2 = {}^1\omega_1, {}^2\dot{\omega}_2 = {}^1\dot{\omega}_1$$

Für die Translationskomponenten hat man:

$${}^2\dot{v}_2 = I\left(\begin{pmatrix}0\\2\ddot{\Theta}_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\dot{\Theta}_1^2\\0\\0\end{pmatrix} + {}^1\dot{v}_1\right) + \vec{0} + \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{d}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\dot{\Theta}_1^2 + \cos(\Theta_1)g\\2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g\\\ddot{d}_2\end{pmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_{C2} = \vec{0} + \vec{0} + {}^2\dot{v}_2 = {}^2\dot{v}_2$$

Für $i = 3$ hat man:

$${}^3\omega_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_3\end{pmatrix}, {}^3\dot{\omega}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\end{pmatrix}$$

Und für die Translationen:

$$\begin{aligned}
{}^3\dot{v}_3 &= \begin{pmatrix}\cos(\Theta_3) & \sin(\Theta_3) & 0\\-\sin(\Theta_3) & \cos(\Theta_3) & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{0} + \vec{0} + {}^2v_2\right)\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \sin(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g)\\-\sin(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \cos(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g)\\\ddot{d}_2\end{pmatrix}\\
{}^3\dot{v}_{C3} &= \begin{pmatrix}-(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_3)^2\\\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\\0\end{pmatrix} + {}^3\dot{v}_3\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \sin(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g) - (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_3)^2\\-\sin(\Theta_3)(\cos(\Theta_1)g - 2\dot{\Theta}_1^2) + \cos(\Theta_3)(2\ddot{\Theta}_1 - \sin(\Theta_1)g) + \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\\\ddot{d}_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

Berechnen Sie die Momente und Kräfte ${}^iN_i$ und ${}^iF_i$, die auf die Massenschwerpunkte der Roboterarme wirken, für $i = 1, 2, 3$.

$${}^1F_1 = {}^1\dot{v}_{C1}, {}^2F_2 = {}^2\dot{v}_{C2}, {}^3F_3 = {}^3\dot{v}_{C3}$$

$${}^1N_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1\end{pmatrix}, {}^2N_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1\end{pmatrix}, {}^3N_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3\end{pmatrix}$$

c)

Nehmen Sie für die weitere Berechnung nun an, dass folgende Gelenkkonfiguration vorliegt:

$$\Theta_1 = \Theta_3 = 0, d_2 = 2, d_4 = 1$$

Damit gilt für die Kräfte und Momente, die auf die Massenschwerpunkte der Roboterarme wirken:

$$
\begin{aligned}
{}^1F_1 &= \begin{pmatrix} g - \dot{\Theta}_1^2 \\ \ddot{\Theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^1N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, \\
{}^2F_2 &= \begin{pmatrix} g - 2\,\dot{\Theta}_1^2 \\ 2\,\ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}, {}^2N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, \\
{}^3F_3 &= \begin{pmatrix} g - \dot{\Theta}_3^2 - 2\,\dot{\Theta}_1\,\dot{\Theta}_3 - 3\,\dot{\Theta}_1^2 \\ \ddot{\Theta}_3 + 3\,\ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{pmatrix}, {}^3N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_3 + \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}, \\
{}^4F_4 &= \begin{pmatrix} g - 2\,\dot{\Theta}_3^2 - 4\,\dot{\Theta}_1\,\dot{\Theta}_3 - 4\,\dot{\Theta}_1^2 \\ 2\,\ddot{\Theta}_3 + 4\,\ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{d}_4 + \ddot{d}_2 \end{pmatrix}, {}^4N_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_3 + \ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie die Gelenkmomente τ_i für $i = 4, 3$.

Gelenk 4 ist ein Translationsgelenk, uns interessiert also $\tau_4 = (0, 0, 1)^4 f_4$. Es gilt:

$$^4f_4 = {}^4F_4 \Rightarrow \tau_4 = \ddot{d}_4 + \ddot{d}_2$$

Um τ_3 zu berechnen benötigen wir im Weiteren $^4n_4$:

$$^4n_4 = {}^4N_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times {}^4F_4 = \begin{pmatrix} -\ddot{\Theta}_3 - 2\ddot{\Theta}_1 \\ \frac{g}{2} - \dot{\Theta}_3^2 - 2\dot{\Theta}_1\Theta_3 - 2\dot{\Theta}_1^2 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3 \end{pmatrix}$$

Für τ_3 müssen wir von $^3n_3$ die dritte Komponente berechnen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
^3n_3 &= {}^3N_3 + I \cdot {}^4n_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d_4}{2} \end{pmatrix} \times {}^3F_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ d_4 \end{pmatrix} \times {}^4F_4 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \ddot{\Theta}_3 + 3\ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 4\ddot{\Theta}_3 + 8\ddot{\Theta}_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die $\bullet$-Symbole stehen für unbekannte Größen, die uns hier nicht interessieren. Insgesamt erhalten wir $\tau_3 = 7\ddot{\Theta}_3 + 13\ddot{\Theta}_1$.

d)

Nehmen Sie an, dass

$$\tau_2 = \ddot{d}_4 + 3\,\ddot{d}_2$$
$$\tau_1 = 9\,\ddot{\Theta}_3 + 22\,\ddot{\Theta}_1$$

gilt. Bringen Sie die Dynamikgleichungen in M-V-G-Form.
Die M-V-G-Form wäre:

$$M = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 13 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(\Theta, \dot{\Theta}) = 0, \quad G(\Theta) = 0$$

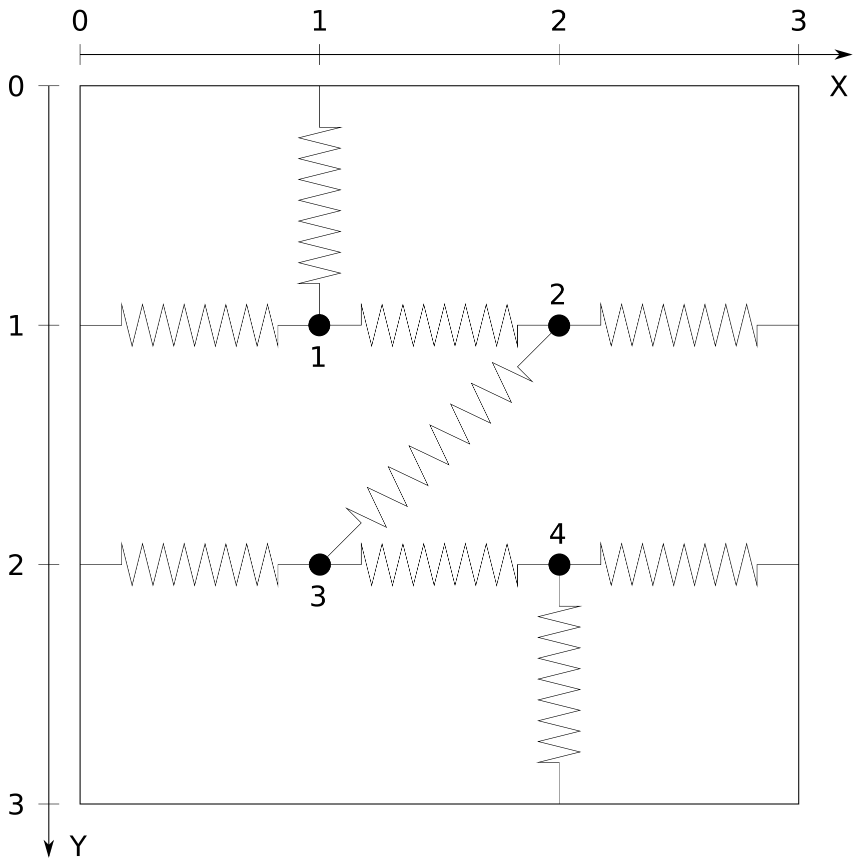


Abbildung 1: Ein Masse-Feder-System mit 4 punktförmigen Massen.

Aufgabe 3

Gegeben sei das System in Abbildung 1. Zu sehen sind dort 4 punktförmige Massen, die über Federn miteinander verbunden sind. Die Massen können sich frei in X- und Y-Richtung bewegen. Die Federn haben alle die gleiche Federkonstante k und die gleiche Ruhelage s, die Massen sind alle gleich und werden mit m bezeichnet. Die Federn, die mit dem Rand in Verbindung stehen, sind dort fixiert. Man beachte, dass die gezeigte Konfiguration nicht der Ruhelage entspricht. Es wirkt keinerlei Reibung auf die beweglichen Objekte.

a)

Hier soll zunächst folgender vereinfachter Fall betrachtet werden: Zwei punktförmige Objekte a, b mit Koordinaten (x_a, y_a) und (x_b, y_b), die über eine Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge s verbunden sind. Berechnen Sie, welche Kraft $F_a \in \mathbb{R}^2$ durch die Feder auf a ausgeübt wird, und welche Kraft $F_b \in \mathbb{R}^2$ auf b wirkt.

Es gilt

$$F_a = k \cdot \left(\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}}{\left| \begin{matrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{matrix} \right|}$$

Und ausserdem $F_b = -F_a$.

b)

Berechnen Sie nun exemplarisch, für das Element rechts oben in Abbildung 1, welche Gesamtkraft $F_2 \in \mathbb{R}^2$ darauf wirkt. Die Berechnung soll allgemein gehalten werden, d.h. in Abhängigkeit der Positionen der Objekte. Die Objektkoordinaten werden mit (x_i, y_i) bezeichnet.

$$\begin{aligned} F_2 = k \cdot \left(\sqrt{(3 - x_2)^2 + (1 - y_2)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 3 - x_2 \\ 1 - y_2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{matrix} 3 - x_2 \\ 1 - y_2 \end{matrix} \right|} \\ + k \cdot \left(\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{matrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{matrix} \right|} \\ + k \cdot \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - s \right) \cdot \frac{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{matrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{matrix} \right|} \end{aligned}$$

c)

Gehen Sie nun davon aus, dass die Gesamtkraft, die auf Objekt i wirkt, mit F_i bezeichnet wird. Die Kraft F_2 wurde ja explizit berechnet, für die anderen Kräfte können Sie einfach davon ausgehen, dass sie bereits bekannt sind. Die aktuelle Konfiguration des Systems kann durch einen 8-dimensionalen Vektor $q \in \mathbb{R}^8$ beschrieben werden, wobei

$$q = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$$

gilt. Die Kräfte F_i hängen ab von der aktuellen Konfiguration, d.h. es handelt sich um Abbildungen der Art $\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^2$. Die Bewegungsgleichung für das System kann nun folgendermassen formuliert werden:

$$M\ddot{q} = F$$

wobei M eine diagonale 8×8-Matrix mit Diagonaleinträgen m ist, und F ein Vektor der Kräfte, die wirken.

- Wie ist F zusammengesetzt? Beschreiben Sie F unter Verwendung der F_i-Funktionen genauer.

- Wenn das System initial nicht in Ruhelage ist, wird es dann von sich aus einen Ruhezustand erreichen? Wie erklären Sie das anhand obiger Differentialgleichung?

Man könnte z.B. schreiben:

$$F = (F_1^T, F_2^T, F_3^T, F_4^T)^T$$

Damit wäre die Bewegungsgleichung

$$M\ddot{q} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

An dieser Gleichung sieht man auch, dass das System von sich aus nicht den Ruhezustand erreichen kann: Es gibt kein dämpfendes Element, welches in dem System zu einer stetigen Abnahme der Geschwindigkeiten führen könnte. In einem einfachen Masse-Feder-Modell hätte man dafür etwa die Reibungskraft $-b\dot{x}$.

d)

Wenn es die Möglichkeit gibt, auf die Massenelemente zusätzliche Kräfte auszuüben, und wenn Sensoren im System vorhanden sind, mit denen man die Objektpositionen sowie -geschwindigkeiten abfragen kann, wie könnte man die Verfolgung einer vorgegebenen Trajektorie erreichen? Erklären sie kurz und allgemein das Prinzip eines entsprechenden Reglers.

Man könnte einen PD-Regler, so wie in der Übung besprochen, einsetzen. Dazu partitioniert man das System folgendermassen:

$$\tau = \alpha\tau' + \beta$$

mit

$$\tau' = \ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)$$

Ein derartiger Aufbau führt dazu, dass das System die Fehlergleichung

$$\ddot{E} + K_v\dot{E} + K_pE = 0$$

einhält, und sich daher auf den gewünschten Wert einpendelt.