

E Neural Networks XOR:

Es wurde zusätzlich zu der Lösung aus der Vorlesung (Abbildung 1) eine weitere Lösung (Abbildung 2) gefunden:

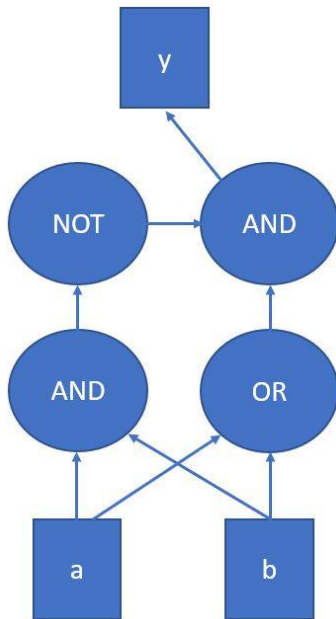


Abbildung 1: Lösung aus der Vorlesung

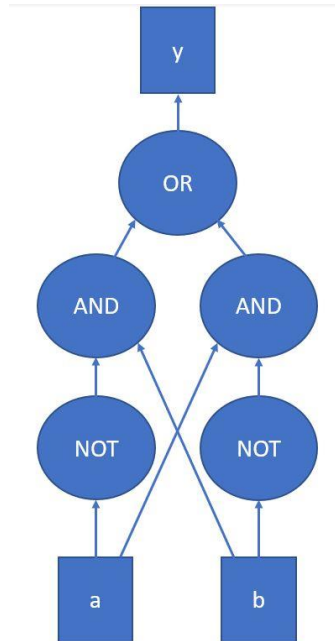


Abbildung 2: Alternativlösung

Gegeben: $\text{AND}(a, b) = a * b$
 $\text{OR}(a, b) = a + b - a * b$
 $\text{NOT}(a) = 1 - a$

Zu zeigen: $\text{XOR}(a, b) = a + b - 2a * b$

Herleitung der XOR - Funktion aus AND, OR und NOT:

Für Lösung 1:

$a = \{0; 1\}$ $b = \{0; 1\}$

$$\begin{aligned} \text{XOR}(a, b) &= \text{AND}(\text{NOT}(\text{AND}(a, b)), \text{OR}(a, b)) \\ &= \text{AND}(\text{NOT}(a * b), a + b - a * b) \\ &= \text{AND}(1 - a * b, a + b - a * b) \\ &= (1 - a * b) * (a + b - a * b) \\ &= a + b - a * b - a^2 * b - a * b^2 + a^2 * b^2 \\ &= a + b - 2a * b \end{aligned}$$

Da $a = \{0;1\}$ und $b = \{0;1\}$ kann man an dieser Stelle zur weiteren Vereinfachung rechnen mit: $a^2 = a$ und $b^2 = b$

Für Lösung 2:

$a = \{0; 1\}$ $b = \{0; 1\}$

$$\begin{aligned} \text{XOR}(a, b) &= \text{OR}(\text{AND}(a, \text{NOT}(b)), \text{AND}(b, \text{NOT}(a))) \\ &= \text{OR}(\text{AND}(a, 1 - b), \text{AND}(b, 1 - a)) \\ &= \text{OR}(a * (1 - b), b * (1 - a)) \\ &= \text{OR}(a - a * b, b - a * b) \\ &= a - a * b + b - a * b - ((a - a * b) * (b - a * b)) \end{aligned}$$

$$= a - 2a*b + b - (a*b - a^2*b - a*b^2 + a^2b^2)$$

$$= \mathbf{a + b - 2a*b}$$

Da $a = \{0;1\}$ und $b = \{0;1\}$ kann man an dieser Stelle zur weiteren Vereinfachung rechnen mit: $a^2 = a$ und $b^2 = b$

Überprüfen der XOR-Funktion:

$$\text{XOR}(a, b) = a + b - 2a*b$$

$$\text{XOR}(0, 0) = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\text{XOR}(1, 0) = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$\text{XOR}(0, 1) = 0 + 1 - 0 = 1$$

$$\text{XOR}(1, 1) = 1 + 1 - 2 = 0$$