

E Neural Networks XOR:

Es wurde zusätzlich zu der Lösung aus der Vorlesung (Abbildung 1) eine weitere Lösung (Abbildung 2) gefunden:

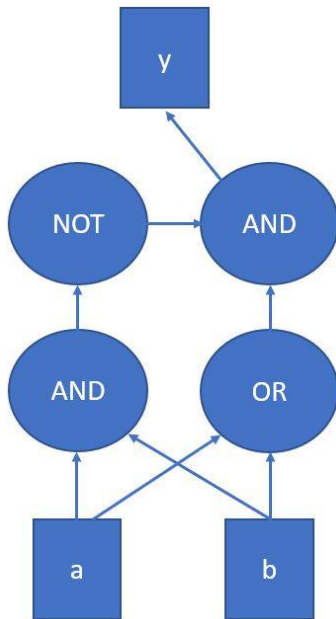


Abbildung 1: Lösung aus der Vorlesung

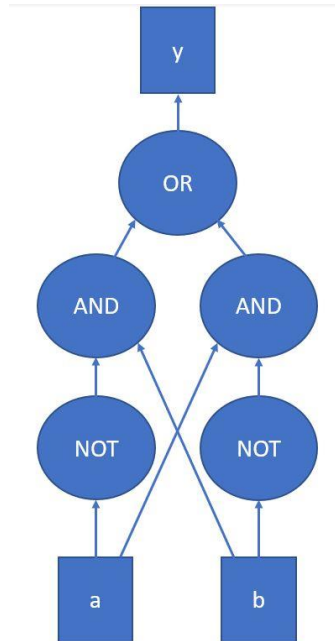


Abbildung 2: Alternativlösung

Gegeben: $\text{AND}(a, b) = a \cdot b$
 $\text{OR}(a, b) = a + b - a \cdot b$
 $\text{NOT}(a) = 1 - a$

Zu zeigen: $\text{XOR}(a, b) = a + b - 2a \cdot b$

Herleitung der XOR - Funktion aus AND, OR und NOT:

Für Lösung 1:

$a = \{0; 1\}$ $b = \{0; 1\}$

$$\begin{aligned}\text{XOR}(a, b) &= \text{AND}(\text{NOT}(\text{AND}(a, b)), \text{OR}(a, b)) \\ &= \text{AND}(\text{NOT}(a \cdot b), a + b - a \cdot b) \\ &= \text{AND}(1 - a \cdot b, a + b - a \cdot b) \\ &= (1 - a \cdot b) \cdot (a + b - a \cdot b) \\ &= a + b - a \cdot b - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 + a^2 \cdot b^2 \\ &= a + b - 2a \cdot b\end{aligned}$$

Für Lösung 2:

$a = \{0; 1\}$ $b = \{0; 1\}$

$$\begin{aligned}\text{XOR}(a, b) &= \text{OR}(\text{AND}(a, \text{NOT}(b)), \text{AND}(b, \text{NOT}(a))) \\ &= \text{OR}(\text{AND}(a, 1 - b), \text{AND}(b, 1 - a)) \\ &= \text{OR}(a \cdot (1 - b), b \cdot (1 - a)) \\ &= \text{OR}(a - a \cdot b, b - a \cdot b) \\ &= a - a \cdot b + b - a \cdot b - ((a - a \cdot b) \cdot (b - a \cdot b))\end{aligned}$$

Da $a = \{0;1\}$ und $b = \{0;1\}$ kann man an dieser Stelle zur weiteren Vereinfachung rechnen mit: $a^2 = a$ und $b^2 = b$

$$\begin{aligned}
 &= a - 2a*b + b - (a*b - a^2*b - a*b^2 + a^2b^2) \\
 &= \mathbf{a + b - 2a*b}
 \end{aligned}$$

Da $a = \{0;1\}$ und $b = \{0;1\}$ kann man an dieser Stelle zur weiteren Vereinfachung rechnen mit: $a^2 = a$ und $b^2 = b$

Überprüfen der gefundenen XOR-Funktion:

$$\text{XOR}(a, b) = a + b - 2a*b$$

Einsetzen von $a = 0$ und $b = 0$:

$$\text{XOR}(0, 0) = 0 + 0 - 0 = 0$$

Einsetzen von $a = 1$ und $b = 0$:

$$\text{XOR}(1, 0) = 1 + 0 - 0 = 1$$

Einsetzen von $a = 0$ und $b = 1$:

$$\text{XOR}(0, 1) = 0 + 1 - 0 = 1$$

Einsetzen von $a = 1$ und $b = 1$:

$$\text{XOR}(1, 1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

q.e.d.