随机微分方程的轨道讨论

2022 年 12 月 7 日

1 问题 1

问题 1

电脑生成多条布朗运动 (BM) 轨道。

如果随机过程 $\boldsymbol{X} = \{X(t); t \geq 0\}$ 是**布朗运动**，则

- $\boldsymbol{X}$ 是独立增量过程；
- $\forall s, t > 0, X(s+t) - X(t)\ N(0, c^2 t)$;
- 轨道连续。

特别的，如果 $\boldsymbol{X}$ 是**标准布朗运动（BM）**，则 $X(0) = 0, c = 1$。
基于以上对标准布朗运动的定义，电脑生成布朗运动轨道的算法如下：

- $\widehat{X}_0 = x_0$（此处 $x_0 = 0$）；
- 确定一个极小的时间间隔 h 以及迭代次数 m;
- 迭代方程：$\forall k \in \mathbb{N}, k < m$, 有

$$\widehat{X}_{(m+1)h} = \widehat{X}_{mh} + \sqrt{h} Z_k$$

其中 $\{Z_k; k \in \mathbb{N}\}$ 为一系列的满足正态分布的随机变量。

实际运行算法时，取 $m = 10000, h = 0.001$, 生成 10 条轨道，最后算法生成的轨道如图1所示。

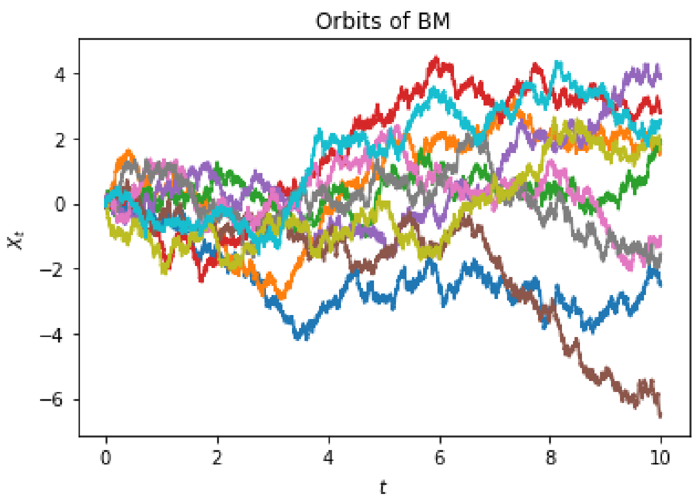


图 1: 标准布朗运动轨道

2 问题 2

问题 2

设 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{B}_t;\boldsymbol{t}\geq\mathbf{0}\}$ 为标准布朗运动, $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X_t};\boldsymbol{t}\geq\mathbf{0}\}$ 为如下随机微分方程的解:

$$\begin{cases} dX_t=\alpha\left(v-X_t\right)dt+\sigma dB_t \\ X_0=x_0 \end{cases}$$

其中 α,v,σ,x_0 为常数。

(1) 用电脑生成 X 的多条轨道;

(2) 探究不同的参数对轨道的影响;

(3) 用 Monte Caro 方法计算 $\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}_1\right),\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{X}_1\right)$

2.1 第 1 小问

类似问题 1 的算法，生成满足问题 2 的随机微分方程的轨道的算法如下：

- $\widehat{X}_0=x_0$;
- 确定一个极小的时间间隔 h 以及迭代次数 m;
- 迭代方程：$\forall k\in\mathbb{N},k<m$, 有

$$\widehat{X}_{(m+1)h}=\widehat{X}_{mh}+\alpha h(v-\widehat{X}_{mh})+\sigma\sqrt{h}Z_k$$

其中 $\{Z_k;k\in\mathbb{N}\}$ 为一系列的满足正态分布的随机变量。

在本小问中, 实际运行算法时, 取 $m=10000,h=0.001$, 同时取 $x_0=0,\alpha=2.0,v=0.5,\sigma=0.2$，生成 10 条轨道，最后算法生成的轨道如图2所示。

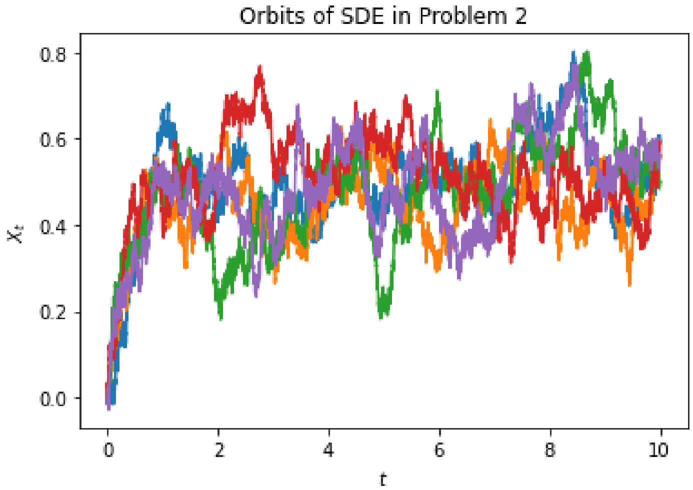
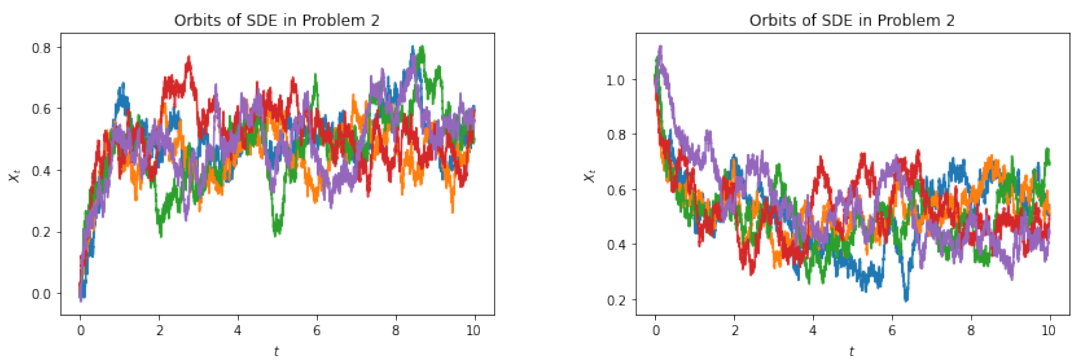


图 2: 问题二 SDE 轨道（$\alpha = 2.0, v = 0.5, \sigma = 0.2, x_0 = 0$）

2.2 第 2 小问

2.2.1 探究 x_0 对轨道的影响

下面探究 x_0 对轨道的影响，这里固定 $\alpha = 2.0, v = 0.5, \sigma = 0.2$，选择 $x_0 = 0$ 和 $x_0 = 1$ 对轨道进行观察，具体的轨道如图3所示。



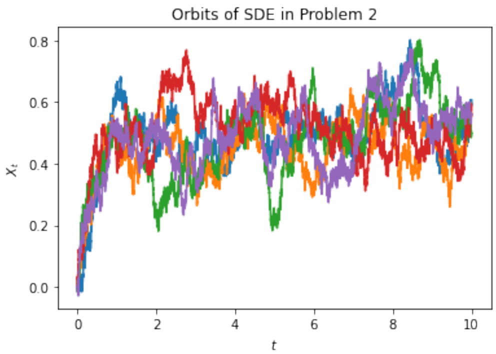
(a) $x_0 = 0$ (b) $x_0 = 1$

图 3: 探究 x_0 对轨道的影响（$\alpha = 2.0, v = 0.5, \sigma = 0.2$）

由图3可知，x_0 只影响了初始点的位置。

2.2.2 探究 v 对轨道的影响

下面探究 v 对轨道的影响，这里固定 $x_0 = 0, \alpha = 2.0, \sigma = 0.2$，选择 $v = 0.5$ 和 $v = -0.5$ 对轨道进行观察，具体的轨道如图4所示。



(a) $v = 0.5$

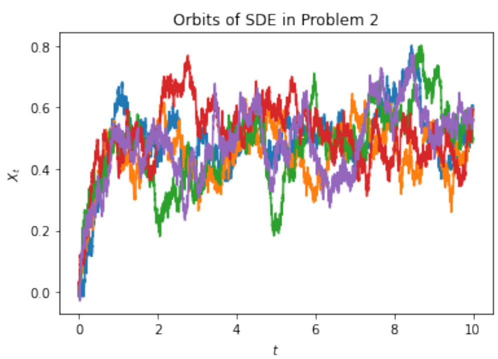
(b) $v = -0.5$

图 4: 探究 x_0 对轨道的影响（$x_0 = 0, \alpha = 2.0, \sigma = 0.2$）

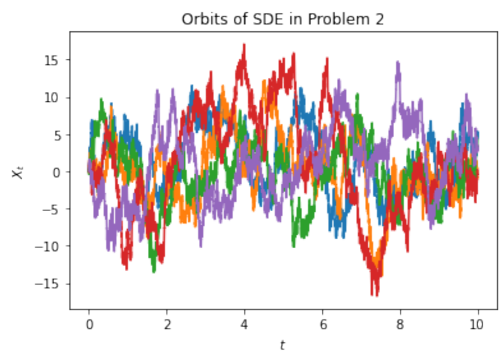
由图4可知，v 影响了轨道经过一段时间后收敛的区域范围（在 v 周围上下有少许浮动）。

2.2.3 探究 α, σ 对轨道的影响

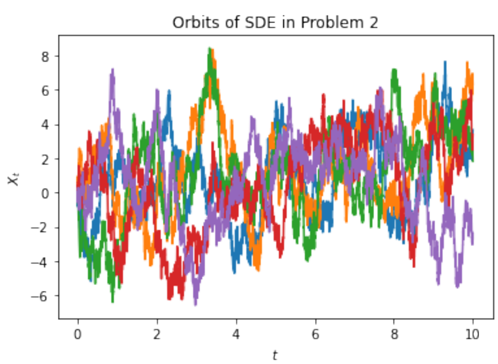
下面探究 α, σ 对轨道的影响，这里固定 $x_0 = 0, v = 0.5$，选择 $(\alpha, \sigma) = (2.0, 0.2)$, $(\alpha, \sigma) = (2.0, 2.0)$，$(\alpha, \sigma) = (2.0, 5.0)$ 和 $(\alpha, \sigma) = (-2.0, 0.2)$ 对轨道进行观察，具体的轨道如图5所示。



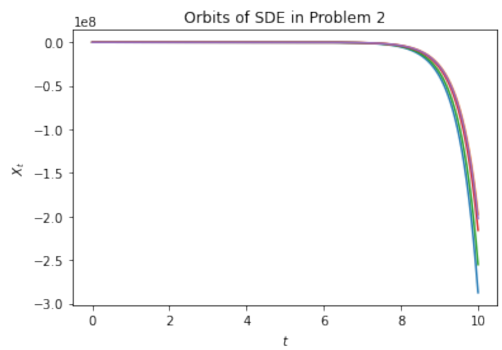
(a) $\alpha = 2.0, \sigma = 0.2$



(b) $\alpha = 2.0, \sigma = 2.0$



(c) $\alpha = 2.0, \sigma = 5.0$



(d) $\alpha = -2.0, \sigma = 0.2$

图 5: 探究 α, σ 对轨道的影响（$x_0 = 0, v = 0.5$）

由图5可知，α 和 σ 的相对大小会影响轨道是否可以在一段时间内收敛。
如图5a所示，当 $\alpha > 0$ 且 $\alpha >> \sigma$ 时，轨道逐渐稳定，可以在一段时间内收敛至 v 附近。

如图5b和图5c所示，当 $\alpha = \sigma$ 或 $\alpha < \sigma$ 时，轨道难以收敛，不断波动，且差值越大，上下波动的现象越明显。

如图5d所示，当 $\alpha < 0$ 时，轨道无法收敛。

2.3 第 3 小问

在这一小问中，设定参数 $\alpha = 2.0, \sigma = 0.2, v = 1.0, x_0 = 0$。

利用 Monte Caro 方法，模拟 10000 次轨道得到 $\boldsymbol{E}(X_1)$ 和 $\boldsymbol{E}(X_1^2)$，在设定参数情况下，$\boldsymbol{E}(X_1) = 0.433, \boldsymbol{E}(X_1^2) = 0.197$，详细代码见附录。

利用 $\boldsymbol{D}(X_1) = \boldsymbol{E}(X_1^2) - \boldsymbol{E}^2(X_1)$，可得 $\boldsymbol{D}(X_1) = 0.0095$

3 问题 3

问题 3

设 $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{B_t}; \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\}$ 与 $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{W_t}; \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}\}$ 为标准布朗运动, $\boldsymbol{X} = (X_t, S_t)$ 为如下随机微分方程的解:

$$\begin{cases} dX_t = \alpha\left(v - X_t\right)dt + \sigma dB_t, \\ dS_t = \theta\left(X_t - S_t\right)dt + \hat{\sigma}_1 dB_t + \hat{\sigma}_2 dW_t \\ X_0 = x_0, S_0 = s_0 \end{cases}$$

其中 $\alpha, v, \sigma, \theta, \widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, x_0, s_0$ 为常数。

(1) 用电脑生成 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S})$ 的多条轨道;

(2) 探究不同的参数对轨道的影响;

(3) 用 Monte Caro 方法计算 $\boldsymbol{E}\left(S_1\right), \boldsymbol{D}\left(S_1\right)$

3.1 第 1 小问

类似问题 1 的算法，生成满足问题 3 的随机微分方程的轨道的算法如下：

- $\widehat{X}_0 = x_0$， $\widehat{S}_0 = s_0$；
- 确定一个极小的时间间隔 h 以及迭代次数 m;
- 迭代方程：$\forall k \in \mathbb{N}, k < m$，有

$$\widehat{X}_{(m+1)h} = \widehat{X}_{mh} + \alpha(v - X_t) + \sigma\sqrt{h}Z_k$$

$$\widehat{S}_{(m+1)h} = \widehat{S}_{mh} + \theta h(\widehat{X}_{mh} - \widehat{S}_{mh}) + \hat{\sigma}_1\sqrt{h}Z_k + \hat{\sigma}_2\sqrt{h}W_k$$

其中 $\{Z_k; k \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{W_k; k \in \mathbb{N}\}$ 为系列的满足标准正态分布的随机变量。

在本小问中，实际运行算法时，取 $m = 10000, h = 0.001$，同时取 $x_0 = 10, s_0 = 12, \alpha = 2.0, v = 14.0, \sigma = 2.0, \theta = 2.0, \sigma_1 = 2.0, \sigma_2 = 2.0$，最后算法生成的轨道如图6所示。

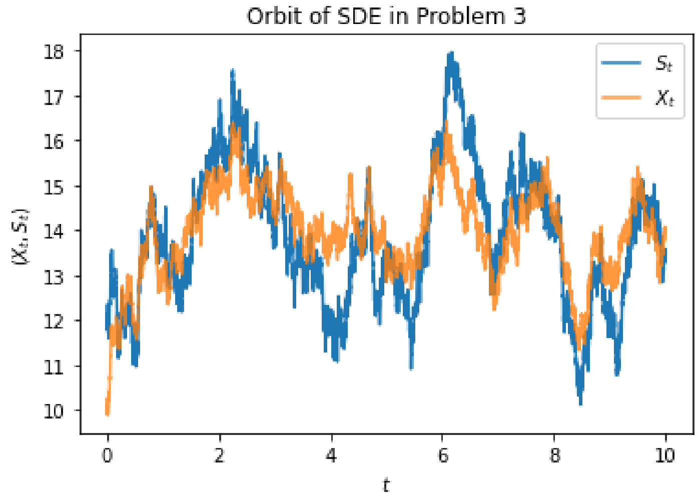


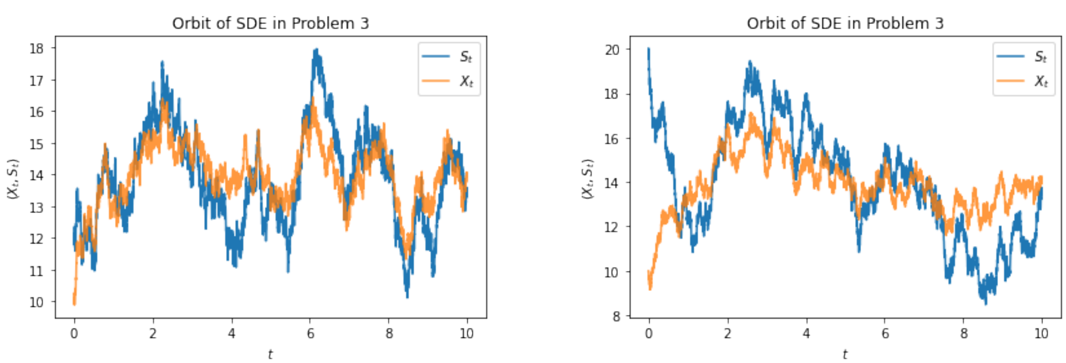
图 6: 问题三 SDE 轨道（第 1 小问给定条件下）

3.2 第 2 小问

由于在第二题中已经讨论过 x_0, v, α, σ 对于轨道 $\boldsymbol{X}_t$ 的影响，所以在此小问中不做赘述，下面主要探究 $s_0, \theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 对于轨道 $\boldsymbol{S}_t$ 的影响。

3.2.1 探究 s_0 对轨道的影响

下面探究 s_0 对轨道的影响，这里固定 $x_0 = 10, \alpha = 2.0, v = 14.0, \sigma = 2.0, \theta = 2.0, \sigma_1 = 2.0, \sigma_2 = 2.0$，选择 $s_0 = 10$ 和 $x_0 = 20$ 对轨道进行观察，具体的轨道如图7所示。



(a) $s_0 = 12$

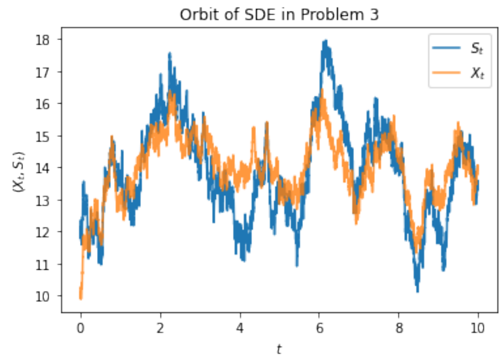
(b) $s_0 = 20$

图 7: 探究 s_0 对轨道的影响（除 s_0 其他条件固定情况下）

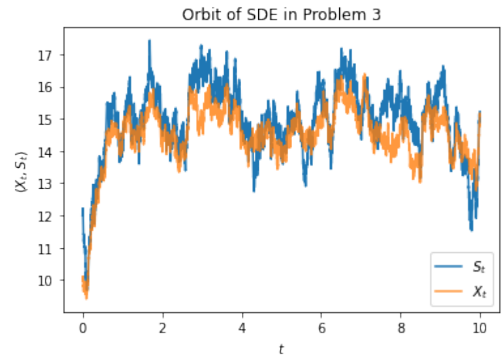
由图7可知，s_0 只影响了初始点的位置。

3.2.2 探究 $\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 对轨道的影响

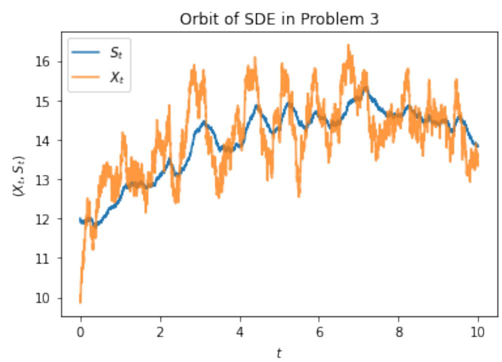
下面探究 $\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 对轨道的影响，这里固定 $x_0 = 10, s_0 = 12, \alpha = 2.0, v = 14.0, \sigma = 2.0$，选择 $(\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = (2.0, 2.0, 2.0)$，$(\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = (5.0, 2.0, 2.0)$，$(\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = (2.0, 0.2, 0.2)$ 和 $(\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = (-2.0, 2.0, 2.0)$ 对轨道进行观察，具体的轨道如图8所示。



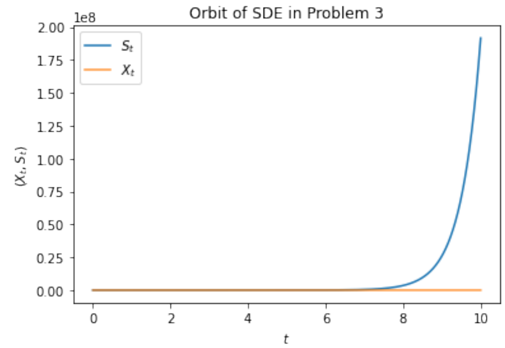
(a) $\theta = 2.0, \hat{\sigma}_1 = 2.0, \hat{\sigma}_2 = 2.0$



(b) $\theta = 5.0, \hat{\sigma}_1 = 2.0, \hat{\sigma}_2 = 2.0$



(c) $\theta = 2.0, \hat{\sigma}_1 = 0.2, \hat{\sigma}_2 = 0.2$



(d) $\theta = -2.0, \hat{\sigma}_1 = 2.0, \hat{\sigma}_2 = 2.0$

图 8: 探究 $\theta, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 对轨道的影响

由图8可知，θ 和 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 的相对大小会影响轨道 $\boldsymbol{S}_t$ 和轨道 $\boldsymbol{X}_t$ 的相似性。

比较图8a和图8b，当 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 固定时，随着 θ 的增大，$\boldsymbol{S}_t$ 逐渐向轨道 $\boldsymbol{X}_t$ 靠拢，相似度越来越高。

比较图8a和图8c，当 θ 固定时，随着 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 的减少，轨道 $\boldsymbol{S}_t$ 的波动越来越小，且与轨道 $\boldsymbol{X}_t$ 的相似性越来越低。

如图8d所示，当 $\theta < 0$ 时，轨道 $\boldsymbol{S}_t$ 无法收敛且与 $\boldsymbol{X}_t$ 的差距随着时间推移越来越大。

3.3 第 3 小问

在这一小问中，设定参数 $x_0 = 10, s_0 = 12, \alpha = 2.0, v = 14.0, \sigma = 2.0, \theta = 2.0, \sigma_1 = 2.0, \sigma_2 = 2.0$。

利用 Monte Caro 方法，模拟 10000 次轨道得到 $\boldsymbol{E}(S_1)$ 和 $\boldsymbol{E}(S_1^2)$，在设定参数情况下，$\boldsymbol{E}(S_1) = 13.780, \boldsymbol{E}(S_1^2) = 258.044$，详细代码见附录。

利用 $\boldsymbol{D}(S_1) = \boldsymbol{E}(S_1^2) - \boldsymbol{E}^2(S_1)$，可得 $\boldsymbol{D}(S_1) = 68.162$

4 感想

在这次大作业中，我通过 Python 软件依照要求绘制了不同的轨道，从一方面来说，这加深了我对随机微分方程（SDE）的理解，从另一方面来说，这也加强了我对 python 编程的理解。在讨论作业之中随机微分方程的轨道时，我认识到要同时考虑趋势项和波动项。对于趋势项，它是确

定性函数，也是历史数据对应的部分，这个部分可以大体展现轨道的总体形状；对于波动项，这个部分则是反映了轨道的随机性。除此之外，在不同的情况下，也需要分析两个部分的大小关系对轨道的影响。随机项参数较大时，轨道的波动较为明显；波动项和趋势项参数持平时，两者都会对最终轨道有一定作用，波动相比于前一种情况有所减缓但依旧明显；而趋势项参数较大时，轨道展现的是相对确定的函数曲线再叠加上小范围的波动。在实际问题中，判断当前随机微分方程所处的“状态”（即趋势明显或波动明显，对应金融中股票市场的牛市熊市和震荡盘）是极为重要的。

最后，我想说，作为一名工科的学生，我在之前只学过概率统计这门与统计相关的课，感谢熊德文老师的授课以及以及助教的无私奉献，使我能够对随机过程的相关理论有所理解。未来我也会努力将所学到的理论知识与自己的专业领域有机结合。再次对您们表示衷心的感谢。

5 附录

5.1 问题 1 代码

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
import random
import datetime
random.seed(datetime.datetime.now())

def BM(T, m, n):
    # n: sample path的数目
    # m: 时间离散的步数
    # T: 仿真的终止时间

    h = T / m # 时间步长

    Z = np.random.normal(0.0, 1.0, (n, m)) # 标准正态分布变量

    X = np.zeros((n, m + 1)) # 存储n条路径的矩阵

    X[:, 0] = x0 # 初始化

    for i in range(m):
        # 迭代：矩阵化实现
        X[:, i + 1] = X[:, i] + np.sqrt(h) * Z[:, i]

    return X

# 实验
x0 = 0
```

```python
T, m, n = 10.0, 10000, 10

X = BM(T, m, n)

# 时间格点
t_grid = np.linspace(0, T, m + 1)

# 展示结果
for i in range(n):
    plt.plot(t_grid, X[i, :])

plt.xlabel('$t$')
plt.ylabel('$X_t$')
plt.title('Orbits of BM')
plt.show()
```

5.2 问题 2 代码

```python
def SDE_ez(T, m, n):
    # n: sample path的数目
    # m: 时间离散的步数
    # T: 仿真的终止时间

    h = T / m # 时间步长

    Z = np.random.normal(0.0, 1.0, (n, m)) # 标准正态分布变量

    X = np.zeros((n, m + 1)) # 存储n条路径的矩阵

    X[:, 0] = x0 # 初始化

    for i in range(m):
        # 迭代：矩阵化实现
        X[:, i + 1] = X[:, i] + alpha * (mu - X[:, i]) * h
        + sigma * np.sqrt(h) * Z[:, i]

    return X

# 实验
x0 = 0
T, m, n = 10.0, 10000, 5
```

```python
alpha, mu, sigma = 2.0, 0.5, 0.2
X = SDE_ez(T, m, n)
su = 0
su2 = 0

# 时间格点
t_grid = np.linspace(0, T, m + 1)

# 计算期望和方差
for i in range(n):
    su += X[i, m]
    su2 += X[i, m] * X[i, m]
avg = su / n
avg2 = su2 / n
d = avg2 - avg * avg

# 展示结果
for i in range(n):
    plt.plot(t_grid, X[i, :])

plt.xlabel('$t$')
plt.ylabel('$X_t$')
plt.title('Orbits of SDE in Problem 2')
plt.show()
```

5.3 问题 3 代码

```python
def SDE_hd(T, m, n):
    # n: sample path的数目
    # m: 时间离散的步数
    # T: 仿真的终止时间

    h = T / m # 时间步长

    Z = np.random.normal(0.0, 1.0, (n, m)) # 标准正态分布变量
    ZZ = np.random.normal(0.0, 1.0, (n, m)) # 标准正态分布变量

    X = np.zeros((n, m + 1)) # 存储n条路径的矩阵
    S = np.zeros((n, m + 1)) # 存储n条路径的矩阵

    X[:, 0] = x0 # 初始化
```

```python
    S[:, 0] = s0 # 初始化

    for i in range(m):
        # 迭代: 矩阵化实现
        X[:, i + 1] = X[:, i] + alpha * (mu - X[:, i]) * h
        + sigma * np.sqrt(h) * Z[:, i]
        S[:, i + 1] = S[:, i] + theta * (X[:, i] - S[:, i]) * h
        + sigma_1 * np.sqrt(h) * Z[:, i]
        + sigma_2 * np.sqrt(h) * ZZ[:, i]

    return X, S

# 实验
x0 = 10
s0 = 12
T, m, n = 1.0, 1000, 10000
alpha, mu, sigma = 2.0, 14.0, 2.0
theta, sigma_1, sigma_2 = 2.0, 2.0, 2.0
su = 0
su2 = 0
X, S = SDE_hd(T, m, n)

# 时间格点
t_grid = np.linspace(0, T, m + 1)

# 计算期望和方差
for i in range(n):
    su += S[i, m]
    su2 += S[i, m] * S[i, m]
avg = su / n
avg2 = su2 / n
d = avg2 - avg * avg

# 展示结果
for i in range(n):
    plt.plot(t_grid, S[i, :], label='$S_t$')

for i in range(n):
    plt.plot(t_grid, X[i, :], alpha = 0.8, label='$X_t$')

plt.xlabel('$t$')
```

```
plt.ylabel('$(X_t, S_t)$')
plt.legend()
plt.title('Orbit of SDE in Problem 3')
plt.show()
```