Integrazione secondo Lebesgue

Lucrezia Bioni

Funzione misurabile

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua $\implies f$ è misurabile

Funzione integrabile

Diciamo che f è integrabile quando $\int_E f^+ \, dx$ e $\int_E f^- \, dx$ sono finiti

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \iff \quad f \in \mathfrak{M}(E) \;\text{ e }\; \int_E |f| \, dx < +\infty$$

Teorema di convergenza monotona

Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $\; f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $\; E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\; f_k$ e $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.
Supponiamo che $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $\quad g \in \mathcal{L}(E)$, $\quad$ con $g(x) \le f_k(x) \;\; \forall x \in E \;\;\; \forall k \in \mathbb{N}$.
Supponiamo poi che $\forall x \in E \;\; f_k(x) \nearrow f(x)$ (convergenza monotona puntuale)

$$\implies f_k \;\forall k \;\text{ e } f \;\text{ hanno integrale } \;\text{ e }\; \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$$

Lemma di Fatou

Sia $\; f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$, $\; f_k \in \mathfrak{M}(E) \; \forall k$.
1. Supponiamo che $\exists\, g \in \mathcal{L}(E)$, $g(x) \le f_k(x) \; \forall x$

$$\implies \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \, dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k$$

2. Supponiamo che $\exists\, G \in \mathcal{L}(E)$, $f_k(x) \le G(x) \; \forall x$

$$\implies \int_E \limsup_{k\to\infty} f_k \, dx \ge \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k$$

Teorema di convergenza dominata

Sia $\; f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$, $\; f_k \in \mathfrak{M}(E) \; \forall k$. Supponiamo che
1. $\exists\, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, con $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \; \forall x \in E$
2. $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}(E) \quad$ con $|f_k(x)| \le g(x) \quad \forall x \in E \quad \forall k$

$$\implies \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$$