Funzioni implicite

Lucrezia Bioni

Teorema di $\exists!$ globale

Siano $a < b$, $c < d \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che:
• $\forall x \in [a, b]$, $\lim_{y \to c^+} f(x, y)$ e $\lim_{y \to d^-} f(x, y)$ hanno segni discordi
• $\forall (x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, $\partial_y f(x, y)$ esiste e ha segno strettamente definito
Allora esiste un'unica funzione $g : (a, b) \to (c, d)$ tale che $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Teorema di Dini, $\exists!$ e regolarità locale

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che:
• $f(x_0, y_0) = 0$
• $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ Allora esistono un intorno aperto V di x_0, un intorno aperto W di y_0 con $VxW \subset U$, ed esiste un'unica funzione $g : V \to W$ tale che:
• $g(x_0) = y_0$,
• $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in V$
Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua derivata soddisfa in V l'identità
$g'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}|_{x,g(x)}$

Teorema di $\exists!$ e regolarità locale multi dimensionale

Sia U aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che:
• $f(x_0, y_0) = 0$
• det $J_y f(x_0, y_0) \neq 0$
Allora esistono un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ di x_0, un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ di y_0 con $VxW \subset U$, ed esiste un'unica funzione $g : V \to W$ tale che:
• $g(x_0) = y_0$,
• $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in V$
Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua matrice jacobiana soddisfa in V l'identità
$(Jg)|_x = -(J_y f)^{-1}(J_x f)|_{x,g(x)}$