Integrazione secondo Lebesgue

Lucrezia Bioni

Def: Funzione misurabile

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua $\implies f$ è misurabile

Def: Funzione integrabile

Diciamo che f è integrabile quando $\int_E f^+ \, dx$ e $\int_E f^- \, dx$ sono finiti

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \iff \quad f \in \mathfrak{M}(E) \;\text{ e }\; \int_E |f| \, dx < +\infty$$

Thm: Condizione sufficiente di integrabilità

- Se f è misurabile e limitata e $m(E) < +\infty \implies f \in L(E)$
- $f \in \mathcal{R}(I), I = [a, b] \implies f \in L(I)$
- $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo (non necessariamente compatto). Supponiamo che f sia assolutamente integrabile secondo Riemann generalizzato in I $\implies f \in L(I)$

Teorema di convergenza uniforme

Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, con $m(E) < +\infty$.
Se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} : E \to \mathbb{R}, f_k \in L(E)$, $f : E \to \mathbb{R}$, e $f_k \to f$ uniformemente in E
Allora $f \in L(E)$ e, inoltre, $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \, dx = 0$, così che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k$ esiste e vale $\int_E f$

Teorema di convergenza monotona

Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, f_k e $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.
Supponiamo che $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}(E)$, con $g(x) \le f_k(x) \;\; \forall x \in E \;\; \forall k \in \mathbb{N}$.
Supponiamo poi che $\forall x \in E \;\; f_k(x) \nearrow f(x)$ (convergenza monotona puntuale)
$\implies f_k \;\forall k$ e f hanno integrale e $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$

Lemma di Fatou

Sia $f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_k \in \mathfrak{M}(E) \;\forall k$.
1. Supponiamo che $\exists\, g \in \mathcal{L}(E)$, $g(x) \le f_k(x) \;\forall x \implies \int_E \lim_{k\to\infty} \inf \, f_k \, dx \le \lim_{k\to\infty} \inf \int_E f_k$
2. Supponiamo che $\exists\, G \in \mathcal{L}(E)$, $f_k(x) \le G(x) \;\forall x \implies \int_E \lim_{k\to\infty} \sup \, f_k \, dx \ge \lim_{k\to\infty} \sup \int_E f_k$

Teorema di convergenza dominata

Sia $f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_k \in \mathfrak{M}(E) \;\forall k$. Supponiamo che
1. $\exists\, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, con $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \;\forall x \in E$
2. $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}(E)$ con $|f_k(x)| \le g(x) \;\; \forall x \in E \;\; \forall k \implies \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$