Formulario

Analisi Matematica 3

Lucrezia Bioni

1 Funzioni Implicite

1.1 Teoremi

Teorema di $\exists!$ globale

Siano $a < b$, $c < d \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che:
1. $\forall x \in [a, b]$, $\lim_{y \to c^+} f(x, y)$ e $\lim_{y \to d^-} f(x, y)$ hanno segni discordi
2. $\forall (x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, $\partial_y f(x, y)$ esiste e ha segno strettamente definito
Allora esiste un'unica funzione $g : (a, b) \to (c, d)$ tale che $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Teorema di Dini, $\exists!$ e regolarità locale

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che:
1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$ Allora esistono un intorno aperto V di x_0, un intorno aperto W di y_0 con $VxW \subset U$, ed esiste un'unica funzione $g : V \to W$ tale che:
1. $g(x_0) = y_0$,
2. $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in V$
Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua derivata soddisfa in V l'identità $g'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}|_{x,g(x)}$

Teorema di $\exists!$ e regolarità locale multi dimensionale

Sia U aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che:
1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\det J_y f(x_0, y_0) \neq 0$
Allora esistono un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ di x_0, un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ di y_0 con $VxW \subset U$, ed esiste un'unica funzione $g : V \to W$ tale che:
1. $g(x_0) = y_0$,
2. $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in V$
Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua matrice jacobiana soddisfa in V l'identità
$(Jg)|_x = -(J_y f)^{-1}(J_x f)|_{x,g(x)}$

1.2 Definizioni

Retta tangente all'implicita

Sia $y = f(x)$ definita implicitamente. Per trovare il piano tangente in (x_0, y_0): $f'(x) = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F}$
$0 = \partial xxF + 2\partial_{xy} F f' + \partial_{yy} F (f')^2 + \partial_y F f''$

Piano tangente all'implicita 2D

Sia $z = f(x, y)$ definita implicitamente.

2 Forme differenziali

2.1 Teoremi e definizioni

Lavoro del campo lungo una curva

Dato un campo vettoriale $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^0$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e data una curva regolare a tratti $\varphi : [a, b] \to \Omega$, si chiama lavoro del campo lungo la curva data il numero:

$$\int_\gamma \langle \mathcal{F}, \tau \rangle \; ds := \int_a^b \sum_{j=1}^n \mathcal{F}_j(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t)\, dt$$

Integrale di una forma differenziale lungo una curva

Data ω forma differenziale su Ω di classe $\mathcal{C}^0$, $\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$ e data una curva regolare a tratti $\varphi : [a, b] \to \Omega$, si chiama integrale di ω lungo φ la quantità

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_\gamma \sum_{j=1}^n a_j \; dx_j \;:=\; \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\varphi(t)) \; \varphi_j'(t) \quad dt \;=\; \int_\gamma \langle \mathcal{F}_\omega, \tau \rangle \; ds$$

Teorema di caratterizzazione

Data ω forma differenziale su Ω (aperto di $\mathcal{R}^n$) di classe $\mathcal{C}^n$.
I seguenti fatti sono equivalenti:
• ω è esatta in Ω
• $\int_\gamma \omega = 0 \forall$ curva γ regolare (a tratti) e chiusa in Ω
• $\forall p, q$ in Ω, comunque si prenda una curva regolare (a tratti) in Ω da p a q e orientata (da p a q) si ha che $\int_{\text{curva da p a q}} \omega$ dipende solo da p e q, ma non dipende dalla curva γ

Forma differenziale chiusa

Sia $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, ω è detta chiusa

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \;\; \forall i, j$$

Campo vettoriale non rotazionale

Sia $F = (F_1, ..., F_n)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, F è detto non rotazionale (o irrotazionale) quando si verifica:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \;\; \forall i, j$$

Proposizione

Sia ω una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Se ω è esatta in $\Omega \implies \omega$ è chiusa in Ω.

Lemma di Poincaré

Sia ω una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.
Se Ω è stellato e ω è chiusa in $\Omega \implies \omega$ è esatto in Ω.
Valido anche nel caso in cui Ω sia semplicemente connesso.

Omotopia

Siano $\phi_0, \phi_1 : [0, 1] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Supponiamo che ϕ_0 e ϕ_1 siano curve con $\phi_0(0) = \phi_1(0)$ e $\phi_0(1) = \phi_1(1)$.
Le due curve ϕ_0 e ϕ_1 sono dette omotope quando esiste una mappa (mappa di omotopia) $\psi : [o, 1] \times [0, 1] \to \Omega$ continua globalmente e tale che:
• $\psi(0, t) = \phi_0(t) \forall t$
• $\psi(s, 0) = \phi_1(t) \forall t$
• $\psi(s, 0)$ non dipende da s e $\psi(s, 0)$ non dipende da s.

Teorema di invarianza omotopica

Sia ω una forma differenziale su Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che ω sia chiusa in Ω.
Siano ϕ_0 e ϕ_1 curve regolari a tratti da p a q in Ω.
Se ϕ_0 e ϕ_1 sono omotope $\implies \int_{\phi_0} \omega = \int_{\phi_1} \omega$

3 Ottimizzazione

Ottimizzazione vincolata

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.
Sia $D \subseteq \Omega$ l'insieme degli zeri di una mappa $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m < n), F \in \mathcal{C}^1$.
Supponiamo che $x_0 \in D$ sia un estremo locale per f ristretto a D.
Supponiamo che $J_f x_0$ abbia rango massimo (ovvero di rango m).
Allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla F_1(x_0) + ... + \lambda_m \nabla F_m(x_0)$, dove $F = (F_1, ..., F_m)$.

4 Integrazione secondo Lebesgue

5 Teoremi

Funzione misurabile

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua $\implies f$ è misurabile

Funzione integrabile

Diciamo che f è integrabile quando $\int_E f^+ \, dx$ e $\int_E f^- \, dx$ sono finiti

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathfrak{M}(E) \ \text{ e } \int_E |f| \, dx < +\infty$$

Condizione sufficiente di integrabilità

- Se f è misurabile e limitata e $m(E) < +\infty \implies f \in L(E)$
- $f \in \mathcal{R}(I), I = [a, b] \implies f \in L(I)$
- $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo (non necessariamente compatto). Supponiamo che f sia assolutamente integrabile secondo Riemann generalizzato in I $\implies f \in L(I)$

Teorema di convergenza uniforme

Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, con $m(E) < +\infty$.
Se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} : E \to \mathbb{R}, f_k \in L(E)$, $f : E \to \mathbb{R}$, e $f_k \to f$ uniformemente in E
Allora $f \in L(E)$ e, inoltre, $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \, dx = 0$, così che $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k$ esiste e vale $\int_E f$

Teorema di convergenza monotona

Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} : E \to \overline{\mathbb{R}}, \ f : E \to \overline{\mathbb{R}}, \ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \ f_k$ e $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.
Supponiamo che $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}, \quad g \in \mathcal{L}(E), \quad$ con $g(x) \leq f_k(x) \ \ \forall x \in E \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Supponiamo poi che $\forall x \in E \ f_k(x) \nearrow f(x)$ (convergenza monotona puntuale)
$\implies f_k \ \forall k$ e f hanno integrale e $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$

Lemma di Fatou

Sia $f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_k \in \mathfrak{M}(E) \ \forall k$.
1. Supponiamo che $\exists\, g \in \mathcal{L}(E)$, $g(x) \leq f_k(x) \ \forall x \implies \int_E \lim_{k\to\infty} \inf f_k \, dx \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_E f_k$
2. Supponiamo che $\exists\, G \in \mathcal{L}(E)$, $f_k(x) \leq G(x) \ \forall x \implies \int_E \lim_{k\to\infty} \sup f_k \, dx \geq \lim_{k\to\infty} \sup \int_E f_k$

Teorema di convergenza dominata

Sia $f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_k \in \mathfrak{M}(E)\ \forall k$. Supponiamo che
1. $\exists\, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, con $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ \forall x \in E$
2. $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}(E) \quad$ con $|f_k(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in E \quad \forall k \implies \lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, dx = \int_E f(x)\, dx$

6 Integrazione multidimensionale

7 Teoremi e definizioni

Teorema di Fubini

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f \in L(E)$. Sia $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ una decomposizione ortogonale. Allora:
- per $q.o.\, x$ la sezione $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k$ con $(x, y) \in E\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$
- per $q.o$ la funzione $x \mapsto \int_{E(x)} f(x, y)dy$ è ben definita, ed è in $L(\mathbb{R}^m)$
- $\int_E f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{E(x)} f(x, y)dy\right] dx$

Teorema di Tonelli

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{M}(E), f(x) \geq 0\, \forall x$. Sia $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ una decomposizione ortogonale. Allora:
- per $q.o.\, x$ la sezione $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k$ con $(x, y) \in E\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$
- per $q.o\, x$ la funzione $x \mapsto \int_{E(x)} f(x, y)dy$ è ben definita, ed è in $L(\mathbb{R}^m)$
- $\int_E f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{E(x)} f(x, y)dy\right] dx$

Teorema per il cambiamento di coordinate

Sia $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \tilde{\Omega}$, con Ω e $\tilde{\Omega}$ aperti, un cambiamento di coordinate (dunque un diffeomorfismo). Sia $E \subseteq \tilde{\Omega}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \implies \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
Sia $f : E \to \mathbb{R}, f \in L(E)$ oppure $f : E \to [0, +\infty]$ e misurabile. Allora:

$$\int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x))\, |\det J\Phi(x)|\, dx = \int_E f(y)dy$$

Formule di Green

Sia D un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, D \subseteq \Omega, \Omega$ aperto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, allora:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_{\partial D^+} f(x, y)dy$$
$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dxdy = -\int_{\partial D^+} f(x, y)dx$$

Teorema della divergenza (Gauss) e di Stokes in $\mathbb{R}^2$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^2, D \subseteq \Omega, \Omega$ aperto, un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $F = (f, g)$ allora:

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = \int_D \mathrm{Div}F\, dxdy = \int_{\partial D^+} (f dy - g dx) = \int_{\partial D^+} < F, \nu > ds$$
$$\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D^+} (f dx + g dy) = \int_{\partial D^+} < F, \tau > ds$$

Equazione del piano tangente

Sia $s_0 \in \overset{\circ}{S} \left(\equiv \mathrm{Im}\phi\left(\overset{\circ}{D}\right)\right)$. Allora S ha in s_0 un piano tangente che ha equazione:

$$\det\left[\mathbf{x} - s_0 \,|\, \partial_u \phi(u_0, v_0) \,|\, \partial_v \phi(u_0, v_0)\right] = 0$$

Integrale di superficie

Data una superficie ϕ (non necessariamente orientabile) di sostegno S, sia $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con S $\subseteq W$, dico che f è integrabile (secondo Lebesgue) su S quando $f \circ \phi \, \|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\|$ è Lebesgue integrabile in D. In tal caso si pone:

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D (f \circ \phi)(u, v) \, \|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\| \, dudv$$

Teorema della divergenza (Gauss) in $\mathbb{R}^3$

Sia T un dominio regolare e sia $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, con Ω aperto, $T \subseteq \Omega$, allora:

$$\int_T Div\mathbf{F} \; dx \, dy \, dz = \int_{\partial T^+} < \mathbf{F}, \nu > \; d\sigma$$

Dove $Div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ e $\nu = \frac{\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi}{\|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\|}$

Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$

Sia $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con bordo, con D dominio regolare, di sostegno S. Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(W)$ con W un aperto di $\mathbb{R}^3, S \subseteq W$. Allora:

$$\int_S < \text{rot}F, \nu > \; d\sigma = \int_{\partial S^+} < \mathbf{F}, \tau > \; ds$$

Dove rot$\mathbf{F}$:

$$\begin{bmatrix} i & \partial x & F_1 \\ j & \partial y & F_2 \\ k & \partial z & F_3 \end{bmatrix}$$

7.1 Domini notevoli in $\mathbb{R}^3$

Paraboloide

$z = z_0 + x^2 + y^2$ - Paraboloide con vertice in $(0, 0, z_0)$ e aperto verso +
$y = y_0 + x^2 + z^2$ - Paraboloide su asse y
$x = x_0 + y^2 + z^2$ - Paraboloide su asse x
Se è della forma $z = -(x^2 + y^2)$ è ribaltato.

Sfera

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z^0)^2 = r^2$ - Sfera di raggio r e centro (x_0, y_0, z_0)

Cono

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ - Cono standard
$z = z_0 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ - Cono di vertice $(0, 0, z_0)$. Se segno - è ribaltato.

Cilindro

$x^2 + y^2 = c^2$ - Cilindro di raggio c.

Iperboloide

$z^2 - (x^2 + y^2) = c^2$ - Iperboloide di vertice c.

Sfera parziale

$z = a \pm \sqrt{b - x^2 - y^2}$ - Porzione della sfera ridotta a un intorno del polo N/S