Integrali multidimensionali

Lucrezia Bioni

Thm: Teorema di Fubini

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f \in L(E)$. Sia $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ una decomposizione ortogonale. Allora:
- per $q.o. \, x$ la sezione $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k \text{ con } (x, y) \in E\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$
- per $q.o$ la funzione $x \mapsto \int_{E(x)} f(x, y)dy$ è ben definita, ed è in $L(\mathbb{R}^m)$
- $\int_E f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{E(x)} f(x, y)dy\right] dx$

Thm: Teorema di Tonelli

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{M}(E), f(x) \geq 0 \, \forall x$. Sia $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ una decomposizione ortogonale. Allora:
- per $q.o. \, x$ la sezione $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k \text{ con } (x, y) \in E\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$
- per $q.o \, x$ la funzione $x \mapsto \int_{E(x)} f(x, y)dy$ è ben definita, ed è in $L(\mathbb{R}^m)$
- $\int_E f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{E(x)} f(x, y)dy\right] dx$

Thm: Teorema per il cambiamento di coordinate

Sia $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \tilde{\Omega}$, con Ω e $\tilde{\Omega}$ aperti, un cambiamento di coordinate (dunque un diffeomorfismo). Sia $E \subseteq \tilde{\Omega}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \implies \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
Sia $f : E \to \mathbb{R}, f \in L(E)$ oppure $f : E \to [0, +\infty]$ e misurabile. Allora:

$$\int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) \left|\det J\Phi(x)\right| dx = \int_E f(y)dy$$

Thm: Formule di Green

Sia D un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, D \subseteq \Omega, \Omega$ aperto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, allora:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_{\partial D^+} f(x, y)dy$$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dxdy = -\int_{\partial D^+} f(x, y)dx$$

Thm: Teorema della divergenza (Gauss) e di Stokes in $\mathbb{R}^2$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^2, D \subseteq \Omega, \Omega$ aperto, un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $F = (f, g)$ allora:

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = \int_D \mathrm{Div}F dxdy = \int_{\partial D^+} (fdy - gdx) = \int_{\partial D^+} < F, \nu > ds$$

$$\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D^+} (fdx + gdy) = \int_{\partial D^+} < F, \tau > ds$$

Def: Equazione del piano tangente

Sia $s_0 \in \overset{\circ}{S} \left(\equiv \mathrm{Im}\phi\left(\overset{\circ}{D}\right)\right)$. Allora S ha in s_0 un piano tangente che ha equazione:

$$\det\left[\mathbf{x} - s_0 \,|\, \partial_u\phi(u_0, v_0) \,|\, \partial_v\phi(u_0, v_0)\right] = 0$$

Def: Integrale di superficie

Data una superficie ϕ (non necessariamente orientabile) di sostegno S, sia $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con S $\subseteq W$, dico che f è integrabile (secondo Lebesgue) su S quando $f \circ \phi \, \|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\|$ è Lebesgue integrabile in D. In tal caso si pone:

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D (f \circ \phi)(u, v) \, \|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\| \, dudv$$

Thm: Teorema della divergenza (Gauss) in $\mathbb{R}^3$

Sia T un dominio regolare e sia $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, con Ω aperto, $T \subseteq \Omega$, allora:

$$\int_T Div\mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial T^+} < \mathbf{F}, \nu > \, d\sigma$$

Dove $Div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ e $\nu = \frac{\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi}{\|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\|}$

Thm: Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$

Sia $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con bordo, con D dominio regolare, di sostegno S. Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(W)$ con W un aperto di $\mathbb{R}^3, S \subseteq W$. Allora:

$$\int_S < \text{rot}F, \nu > \, d\sigma = \int_{\partial S^+} < \mathbf{F}, \tau > \, ds$$

Dove rot$\mathbf{F}$:

$$\begin{bmatrix} i & \partial x & F_1 \\ j & \partial y & F_2 \\ k & \partial z & F_3 \end{bmatrix}$$