Formulario
Analisi Matematica 3

Lucrezia Bioni

1 Funzioni Implicite

1.1 Teoremi

Teorema di ∃! globale

Siano $a < b$, $c < d \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che:
1. $\forall x \in [a, b]$, $\lim_{y \to c^+} f(x, y)$ e $\lim_{y \to d^-} f(x, y)$ hanno segni discordi
2. $\forall (x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, $\partial_y f(x, y)$ esiste e ha segno strettamente definito
Allora esiste un'unica funzione $g : (a, b) \to (c, d)$ tale che $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Teorema di Dini, ∃! e regolarità locale

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che:
1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$
Allora esistono un intorno aperto V di x_0, un intorno aperto W di y_0 con $VxW \subset U$, ed esiste un'unica funzione $g : V \to W$ tale che:
1. $g(x_0) = y_0$,
2. $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in V$
Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua derivata soddisfa in V l'identità $g'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}|_{x,g(x)}$

Teorema di ∃! e regolarità locale multi dimensionale

Sia U aperto di $\mathbb{R}^{m+n}$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1(U)$. Sia $(x_0, y_0) \in U$ e supponiamo che:
1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $\det J_y f(x_0, y_0) \neq 0$
Allora esistono un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ di x_0, un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ di y_0 con $VxW \subset U$, ed esiste un'unica funzione $g : V \to W$ tale che:
1. $g(x_0) = y_0$,
2. $f(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in V$
Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(V)$ e la sua matrice jacobiana soddisfa in V l'identità
$(Jg)|_x = -(J_y f)^{-1}(J_x f)|_{x,g(x)}$

Simmetrie

Solo la parità di F ci dà informazioni sulla simmmetria di f:
- se $F(x, y) = F(-x, y)$, allora $f(x) = f(-x)$ (pari)
- se $F(x, y) = F(-x, -y)$, allora $f(x) = -f(-x)$ (dispari)

2 Curve

2.1 Definizioni

Curva parametrizzata in parametro d'arco

Data una curva φ regolare, φ è detta curva parametrizzata in parametro d'arco quando $\|\varphi'(t)\| = 1 \quad \forall t$

Lunghezza della curva

Data una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ chiamo lunghezza di φ il numero

$$\mathcal{L}_\varphi := \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt$$

Integrale curvilineo

Sia $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare.
Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Omega$ aperto, f continua
Dove $\phi([a, b]) \subseteq \Omega$

Chiamiamo integrale di f lungo la curva ϕ la quantità

$$\int_a^b f(\phi(t))\|\phi'(t)\|dt = \int_{\text{sost.}\phi} f ds$$

Baricentro di una curva

Il baricentro din una curva ϕ si determina ponendo:

$$x_B = \frac{1}{\mathcal{L}(\phi)} \int_\phi x ds \qquad y_B = \frac{1}{\mathcal{L}(\phi)} \int_\phi y ds$$

2.2 Triedro fondamentale (di Frenet/moving frame)

Data una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi \in \mathcal{C}^2$ regolare
Parametro d'arco
Riparametrizzo per lunghezza d'arco (= arclength o lunghezza curvilinea):
Trovo $s(t) = \int_0^t |\varphi'(t)|\ dt$.
Trovo $t(s)$ invertendo la relazione precedente e ottengo $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(t(s))$.
•**Versore tangente** Approssima la curva al primo ordine.
Parametro d'arco s: $T(s) = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds}$; Generico parametro t: $T(t) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds}$
•**Versore normale** Parametro d'arco s: $T(s) = \frac{\frac{dT}{ds}}{|\frac{dT}{ds}|}$; Generico parametro t: $T(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{|\frac{dT}{dt}|}$
•**Versore binormale** $B(s) = T \times N$

Formule di Frenet-Serret

La base ortonormale (T, N, B) soddisfa il seguente sistema di ODE:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = kN \\ \frac{dN}{ds} = -kT + \tau B \\ \frac{dB}{ds} = -\tau N \end{cases} \tag{1}$$

Dove
Curvatura della curva $k = |\frac{dT}{ds}|$
Torsione della curva $\tau = -\langle \frac{dB}{ds}, N\rangle, |\tau| = |\frac{dB}{ds}|$

3 Ottimizzazione

Ottimizzazione vincolata

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.
Sia $D \subseteq \Omega$ l'insieme degli zeri di una mappa $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m < n), F \in \mathcal{C}^1$.
Supponiamo che $x_0 \in D$ sia un estremo locale per f ristretto a D.
Supponiamo che $J_F(x_0)$ abbia rango massimo (ovvero di rango m).
Allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla F_1(x_0) + ... + \lambda_m \nabla F_m(x_0)$, dove $F = (F_1, ..., F_m)$.

Ovvero: se $P = (x, y, x) \in \partial\Omega$ è un estremo (locale) per $f|_{\partial\Omega}$, allora $\nabla f(x, y, z)$ è parallelo al versore normale di $\partial\Omega$ in P, essendo $\partial\Omega$ vincolo regolare.

Condizione di rango massimo

Il rango di una matrice 2×3 non è 2 nei punti in cui tutti e 3 i minori di ordine 2 si annullano.

4 Forme differenziali

4.1 Teoremi e definizioni

Lavoro del campo lungo una curva

Dato un campo vettoriale $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^0$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e data una curva regolare a tratti $\varphi : [a, b] \to \Omega$, si chiama lavoro del campo lungo la curva data il numero:

$$\int_\gamma \langle \mathcal{F}, \tau\rangle\ ds := \int_a^b \sum_{j=1}^n \mathcal{F}_j(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t)\, dt$$

Integrale di una forma differenziale lungo una curva

Data ω forma differenziale su Ω di classe $\mathcal{C}^0$, $\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j dx_j$ e data una curva regolare a tratti $\varphi : [a,b] \to \Omega$, si chiama integrale di ω lungo φ la quantità

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_\gamma \sum_{j=1}^{n} a_j\ dx_j \;:=\; \int_a^b \sum_{j=1}^{n} a_j(\varphi(t))\ \varphi_j'(t) \quad dt \;=\; \int_\gamma \langle \mathcal{F}_\omega, \tau \rangle\ ds$$

Teorema di caratterizzazione

Data ω forma differenziale su Ω (aperto di $\mathcal{R}^n$) di classe $\mathcal{C}^n$.
I seguenti fatti sono equivalenti:
• ω è esatta in Ω
• $\int_\gamma \omega = 0 \forall$ curva γ regolare (a tratti) e chiusa in Ω
• $\forall p, q$ in Ω, comunque si prenda una curva regolare (a tratti) in Ω da p a q e orientata (da p a q) si ha che $\int_{\text{curva da p a q}} \omega$ dipende solo da p e q, ma non dipende dalla curva γ

Forma differenziale chiusa

Sia $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, ω è detta chiusa

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \ \ \forall i, j$$

Campo vettoriale non rotazionale

Sia $F = (F_1, ..., F_n)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, F è detto non rotazionale (o irrotazionale) quando si verifica:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \ \ \forall i, j$$

Proposizione

Sia ω una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Se ω è esatta in $\Omega \implies \omega$ è chiusa in Ω.

Lemma di Poincaré

Sia ω una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.
Se Ω è stellato e ω è chiusa in $\Omega \implies \omega$ è esatto in Ω.
• Valido anche nel caso in cui Ω sia semplicemente connesso.
• Se Ω è stellato, allora Ω è semplicemente connesso.
• Se Ω è $\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, allora Ω è semplicemente connesso, ma non è stellato.

Omotopia

Siano $\phi_0, \phi_1 : [0,1] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Supponiamo che ϕ_0 e ϕ_1 siano curve con $\phi_0(0) = \phi_1(0)$ e $\phi_0(1) = \phi_1(1)$.
Le due curve ϕ_0 e ϕ_1 sono dette omotope quando esiste una mappa (mappa di omotopia) $\psi : [o,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua globalmente e tale che:
• $\psi(0,t) = \phi_0(t) \forall t$
• $\psi(s,0) = \phi_1(t) \forall t$
• $\psi(s,0)$ non dipende da s e $\psi(s,0)$ non dipende da s.

Teorema di invarianza omotopica

Sia ω una forma differenziale su Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che ω sia chiusa in Ω.
Siano ϕ_0 e ϕ_1 curve regolari a tratti da p a q in Ω.
Se ϕ_0 e ϕ_1 sono omotope $\implies \int_{\phi_0} \omega = \int_{\phi_1} \omega$

4.2 Osservazioni

Vortice

Tale forma è chiusa, ma non è esatta nel suo insieme di definzione $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$:

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

5 Integrazione secondo Lebesgue

5.1 Teoremi

Funzione misurabile

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua $\implies f$ è misurabile

Funzione integrabile

Diciamo che f è integrabile quando $\int_E f^+ \, dx$ e $\int_E f^- \, dx$ sono finiti

$$f \in \mathcal{L}(E) \iff f \in \mathfrak{M}(E) \text{ e } \int_E |f| \, dx < +\infty$$

Condizione sufficiente di integrabilità

- Se f è misurabile e limitata e $m(E) < +\infty \implies f \in L(E)$
- $f \in \mathcal{R}(I), I = [a, b] \implies f \in L(I)$
- $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo (non necessariamente compatto). Supponiamo che f sia assolutamente integrabile secondo Riemann generalizzato in I $\implies f \in L(I)$

Teorema di Lebesgue - Vitali

Sia f una funzione limitata, non negativa e nulla fuori da un limitato. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
(a) f è integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}$.
(b) L'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla secondo Lebesgue.
(c) Se una (e quindi entrambe) delle condizioni sopra vale, allora f è misurabile, integrabile secondo Lebesgue e i due integrali, secondo Riemann e secondo Lebesgue, coincidono.

Teorema di convergenza uniforme

Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, con $m(E) < +\infty$.
Se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} : E \to \mathbb{R}, f_k \in L(E)$, $f : E \to \mathbb{R}$, e $f_k \to f$ uniformemente in E
Allora $f \in L(E)$ e, inoltre, $\lim_{k \to \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| \, dx = 0$, così che $\lim_{k \to \infty} \int_E f_k$ esiste e vale $\int_E f$

Teorema di convergenza monotona

Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, f_k e $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.
Supponiamo che $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}(E)$, con $g(x) \leq f_k(x)$ $\forall x \in E$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Supponiamo poi che $\forall x \in E$ $f_k(x) \nearrow f(x)$ (convergenza monotona puntuale)
$\implies f_k \; \forall k$ e f hanno integrale e $\lim_{k \to \infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$

Lemma di Fatou

Sia $f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_k \in \mathfrak{M}(E)\ \forall k$.
1. Supponiamo che $\exists\, g \in \mathcal{L}(E)$, $g(x) \leq f_k(x)\ \forall x \implies \int_E \lim_{k \to \infty} \inf f_k \, dx \leq \lim_{k \to \infty} \inf \int_E f_k$
2. Supponiamo che $\exists\, G \in \mathcal{L}(E)$, $f_k(x) \leq G(x)\ \forall x \implies \int_E \lim_{k \to \infty} \sup f_k \, dx \geq \lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k$

Teorema di convergenza dominata

Sia $f_k : E \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_k \in \mathfrak{M}(E)\ \forall k$. Supponiamo che
1. $\exists\, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, con $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)\ \forall x \in E$
2. $\exists\, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}(E)$ con $|f_k(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in E$ $\forall k \implies \lim_{k \to \infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f(x) \, dx$

6 Integrazione multidimensionale

6.1 Teoremi per integrali iterati

Teorema di Fubini

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f \in L(E)$. Sia $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ una decomposizione ortogonale. Allora:
- per $q.o.\,x$ la sezione $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k$ con $(x, y) \in E\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$
- per $q.o$ la funzione $x \mapsto \int_{E(x)} f(x, y) dy$ è ben definita, ed è in $L(\mathbb{R}^m)$
- $\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{E(x)} f(x, y) dy \right] dx$

Teorema di Tonelli

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{M}(E), f(x) \geq 0\, \forall x$. Sia $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$ una decomposizione ortogonale. Allora:
- per $q.o.\,x$ la sezione $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^k$ con $(x, y) \in E\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$
- per $q.o\,x$ la funzione $x \mapsto \int_{E(x)} f(x, y) dy$ è ben definita, ed è in $L(\mathbb{R}^m)$
- $\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{E(x)} f(x, y) dy \right] dx$

Teorema per il cambiamento di coordinate

Sia $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \tilde{\Omega}$, con Ω e $\tilde{\Omega}$ aperti, un cambiamento di coordinate (dunque un diffeomorfismo). Sia $E \subseteq \tilde{\Omega}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ $\implies \Phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.
Sia $f : E \to \mathbb{R}, f \in L(E)$ oppure $f : E \to [0, +\infty]$ e misurabile. Allora:

$$\int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) \left|\det J\Phi(x)\right| dx = \int_E f(y)dy$$

Esempi notevoli:
• Coordinate cilindriche: $\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$, con $(\rho, \theta, z) \longmapsto \Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)$, $|\det J\phi = \rho^2|$
• Coordinate sferiche: $\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longmapsto \mathbb{R}^3 \backslash (\{x \geq 0, y = 0\} \bigcup \{0, 0, z\})$, con $(\rho, \phi, \theta) \longmapsto \Phi(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\theta)$, $|\det J\phi = \rho^2 \sin\phi|$

6.2 Teoremi e definizioni in $\mathbb{R}^2$

Dominio normale (e regolare) in x (analogo in y)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$. D è detto dominio normale in x quando $\exists \alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$.
Se α e $\beta \in \mathcal{C}^1$, è detto dominio nromale regolare in x.

Dominio regolare

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$. D è detto dominio regolare quando $\exists\, D_1, \ldots, D_N$ domini normali regolari, con $\mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \emptyset \;\forall\, i, j$ e $D = \bigcup_{i=1}^N D_i$.
Dato un dominio regolare, posso sempre definire, sul bordo di di D, versori tangenti τ e normali ν: ν è sempre uscente e τ è definito in modo che la coppia ν, τ sia equiversa alla coppia e_1, e_2.

Formule di Green

Sia D un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, D \subseteq \Omega, \Omega$ aperto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, allora:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_{\partial D^+} f(x, y)dy$$
$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dxdy = -\int_{\partial D^+} f(x, y)dx$$

Teorema della divergenza (Gauss) e di Stokes in $\mathbb{R}^2$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^2, D \subseteq \Omega, \Omega$ aperto, un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $F = (f, g)$ allora:

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = \int_D \text{Div}F dxdy = \int_{\partial D^+} (f dy - g dx) = \int_{\partial D^+} < F, \nu > ds$$
$$\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D^+} (f dx + g dy) = \int_{\partial D^+} < F, \tau > ds$$

6.3 Teoremi e definizioni in $\mathbb{R}^3$

Superficie regolare in $\mathbb{R}^3$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio connesso (ovvero D è la chiusura di un aperto connesso). Una superficie parametrizzata regolare è una mappa $\phi : D \to \mathbb{R}^3$, con $\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dove Ω è un aperto, $D \subseteq \Omega$, tale che:
(a) ϕ ristretta a $\mathring{D}$ è iniettiva
(b) $J\phi = [\partial_u \phi | \partial_v \phi]$ ha rango 2 in $\mathring{D}$.
Chiamo poi sostegno S di ϕ l'insieme $S \coloneqq Im\phi(D)$.

Osservazione: gli oggetti che appaiono come grafici di funzioni sono tutti superfici regolari:
Sia D dominio connesso in $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\Omega), \Omega$ aperto, $D \subseteq \Omega$, $\phi : D \to \mathbb{R}^3$, con $\phi(u, v) \coloneqq (u, v, f(u, v))$, è una mappa di parametrizzazione regolare della superficie Γ_f.

Equazione del piano tangente

Sia $s_0 \in \mathring{S} \left(\equiv \text{Im}\phi\left(\mathring{D}\right)\right)$. Allora S ha in s_0 un piano tangente che ha equazione:

$$\det\left[\mathbf{x} - s_0 \,|\, \partial_u \phi(u_0, v_0) \,|\, \partial_v \phi(u_0, v_0)\right] = 0$$

Superficie orientabile

La superficie è detta orientabile quando il versore normale può esere esteso per continuità a tutti i punti di $\mathring{S}$.

Integrale di superficie

Data una superficie ϕ (non necessariamente orientabile) di sostegno S, sia $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con S $\subseteq W$, dico che f è integrabile (secondo Lebesgue) su S quando $f \circ \phi \, \|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\|$ è Lebesgue integrabile in D. In tal caso si pone:

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D (f \circ \phi)(u, v) \, \|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\| \, dudv$$

Dominio regolare di $\mathbb{R}^3$

Una regione $T \subseteq \mathbb{R}^3$ è detta dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ quando è unione finita di domini regolari a interni disgiunti, dove un domimio normale regolare è un insieme di $\mathbb{R}^3$ che può essere descritto come:
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \, \mathrm{e} \, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)$ con D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$.

Teorema della divergenza (Gauss) in $\mathbb{R}^3$

Sia T un dominio regolare e sia $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, con Ω aperto, $T \subseteq \Omega$, allora:

$$\int_T Div\mathbf{F} \; dx \, dy \, dz = \int_{\partial T^+} < \mathbf{F}, \nu > \, d\sigma$$

Dove $Div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ e $\nu = \frac{\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi}{\|\partial_{\mathbf{u}}\phi \wedge \partial_{\mathbf{v}}\phi\|}$.

Superficie regolare con bordo

Una superficie regolare con bordo è una mappa $\phi : D \to \mathbb{R}^3$ con D un dominio connesso di $mathbbR^2$ e $\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, $D \subseteq \Omega$ tale che:
(a) ϕ è iniettiva su D
(b) $J\phi = [\partial_u\phi | \partial_v\phi]$ ha rango 2 in D
Ci sono 2 possibili orientazioni per la superficie e 2 per il suo bordo (curva): oriento il sostegno S e ∂S in modo compatibile (regola della mano destra).

Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$

Sia $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con bordo, con D dominio regolare, di sostegno S. Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(W)$ con W un aperto di $\mathbb{R}^3, S \subseteq W$. Allora:

$$\int_S < \mathrm{rot}\mathbf{F}, \nu > \, d\sigma = \int_{\partial S^+} < \mathbf{F}, \tau > \, ds \qquad \text{dove } \mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} i & \partial x & F_1 \\ j & \partial y & F_2 \\ k & \partial z & F_3 \end{bmatrix}$$

6.4 Domini notevoli in $\mathbb{R}^3$

Paraboloide
$z = z_0 + x^2 + y^2$ - Paraboloide con vertice in $(0, 0, z_0)$ e aperto verso +
$y = y_0 + x^2 + z^2$ - Paraboloide su asse y
$x = x_0 + y^2 + z^2$ - Paraboloide su asse x
Se è della forma $z = -(x^2 + y^2)$ è ribaltato.
Sfera
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z^0)^2 = r^2$ - Sfera di raggio r e centro (x_0, y_0, z_0)
Cono
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ - Cono standard (semicono)
$z = z_0 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ - Cono di vertice $(0, 0, z_0)$. Se segno - è ribaltato.
Cilindro
$x^2 + y^2 = c^2$ - Cilindro di raggio c.
Iperboloide
$z^2 - (x^2 + y^2) = c^2$ - Iperboloide a una falda di vertice c.
$z^2 - (x^2 + y^2) = -c^2$ - Iperboloide a due falde di vertice c.
Sfera parziale
$z = a \pm \sqrt{b - x^2 - y^2}$ - Porzione della sfera ridotta a un intorno del polo N/S.
Ellissoide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Paraboloide iperbolico
$z = x^2 - y^2$