Teoria del potenziale scalare: campi vettoriali e forme differenziali

Lucrezia Bioni

Def: Lavoro del campo lungo una curva

Dato un campo vettoriale $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^0$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e data una curva regolare a tratti $\varphi : [a,b] \to \Omega$, si chiama lavoro del campo lungo la curva data il numero:

$$\int_\gamma \langle \mathcal{F}, \tau \rangle \; ds := \int_a^b \sum_{j=1}^n \mathcal{F}_j(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t) \, dt$$

Def: Integrale di una forma differenziale lungo una curva

Data ω forma differenziale su Ω di classe $\mathcal{C}^0$, $\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$ e data una curva regolare a tratti $\varphi : [a,b] \to \Omega$, si chiama integrale di ω lungo φ la quantità

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_\gamma \sum_{j=1}^n a_j \; dx_j \;:=\; \int_a^b \sum_{j=1}^n a_j(\varphi(t)) \; \varphi_j'(t) \quad dt \;=\; \int_\gamma \langle \mathcal{F}_\omega, \tau \rangle \; ds$$

Thm: Teorema di caratterizzazione

Data ω forma differenziale su Ω (aperto di $\mathcal{R}^n$) di classe $\mathcal{C}^n$.
I seguenti fatti sono equivalenti:
• ω è esatta in Ω
• $\int_\gamma \omega = 0 \forall$ curva γ regolare (a tratti) e chiusa in Ω
• $\forall p, q$ in Ω, comunque si prenda una curva regolare (a tratti) in Ω da p a q e orientata (da p a q) si ha che $\int_{\text{curva da p a q}} \omega$ dipende solo da p e q, ma non dipende dalla curva γ

Def: Forma differenziale chiusa

Sia $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$ una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, ω è detta chiusa

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \;\; \forall i, j$$

Def: Campo vettoriale non rotazionale

Sia $F = (F_1, ..., F_n)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, F è detto non rotazionale (o irrotazionale) quando si verifica:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \;\; \forall i, j$$

Proposizione

Sia ω una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Se ω è esatta in $\Omega \implies \omega$ è chiusa in Ω.

Thm: Lemma di Poincaré

Sia ω una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.
Se Ω è stellato e ω è chiusa in $\Omega \implies \omega$ è esatto in Ω.
Valido anche nel caso in cui Ω sia semplicemente connesso.

Def: Omotopia

Siano $\phi_0, \phi_1 : [0,1] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Supponiamo che ϕ_0 e ϕ_1 siano curve con $\phi_0(0) = \phi_1(0)$ e $\phi_0(1) = \phi_1(1)$.
Le due curve ϕ_0 e ϕ_1 sono dette omotope quando esiste una mappa (mappa di omotopia) $\psi : [o,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua globalmente e tale che:
• $\psi(0,t) = \phi_0(t) \forall t$
• $\psi(s,0) = \phi_1(t) \forall t$
• $\psi(s,0)$ non dipende da s e $\psi(s,0)$ non dipende da s.

Thm: Teorema di invarianza omotopica

Sia ω una forma differenziale su Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che ω sia chiusa in Ω.
Siano ϕ_0 e ϕ_1 curve regolari a tratti da p a q in Ω.
Se ϕ_0 e ϕ_1 sono omotope $\implies \int_{\phi_0} \omega = \int_{\phi_1} \omega$