Curve e integrali curvilinei

Lucrezia Bioni

Curva parametrizzata in parametro d'arco

Data una curva φ regolare, φ è detta curva parametrizzata in parametro d'arco quando $\|\varphi'(t)\| = 1 \quad \forall t$

Lunghezza della curva

Data una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ chiamo lunghezza di φ il numero

$$\mathcal{L}_\varphi := \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt$$

Integrale curvilineo

Sia $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare.
Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \Omega$ aperto, f continua
Dove $\phi([a, b]) \subseteq \Omega$
Chiamiamo integrale di f lungo la curva ϕ la quantità

$$\int_a^b f(\phi(t))\|\phi'(t)\|dt = \int_{\text{sost.}\phi} f ds$$

Triedro fondamentale (di Frenet/moving frame)

Data una curva $\varphi : [a, b]- > \mathbb{R}^3$, $\varphi \in \mathcal{C}^2$ regolare

Parametro d'arco

Riparametrizzo per lunghezza d'arco (= arclength o lunghezza curvilinea):
Trovo $s(t) = \int_0^t |\varphi'(t)| \, dt$.
Trovo $t(s)$ invertendo la relazione precedente e ottengo $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(t(s))$.

1. Versore tangente

<u>Parametro d'arco s</u>
Approssima la curva al primo ordine. Per la parametrizzazione scelta, è già di lunghezza 1.

$$T(s) = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds}$$

<u>Generico parametro t</u>

$$T(t) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds}$$

2. Versore normale

<u>Parametro d'arco s</u>

$$T(s) = \frac{\frac{dT}{ds}}{|\frac{dT}{ds}|}$$

<u>Generico parametro t</u>

$$T(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{|\frac{dT}{dt}|}$$

3. Versore binormale

$$B(s) = T \times N$$

Formule di Frenet-Serret

La base ortonormale (T, N, B) soddisfa il seguente sistema di ODE:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = kN \\ \frac{dN}{ds} = -kT + \tau B \\ \frac{dB}{ds} = -\tau N \end{cases} \tag{1}$$

Dove
Curvatura della curva $k = \left|\frac{dT}{ds}\right|$
Torsione della curva $\tau = -\langle \frac{dB}{ds}, N\rangle, |\tau| = |\frac{dB}{ds}|$