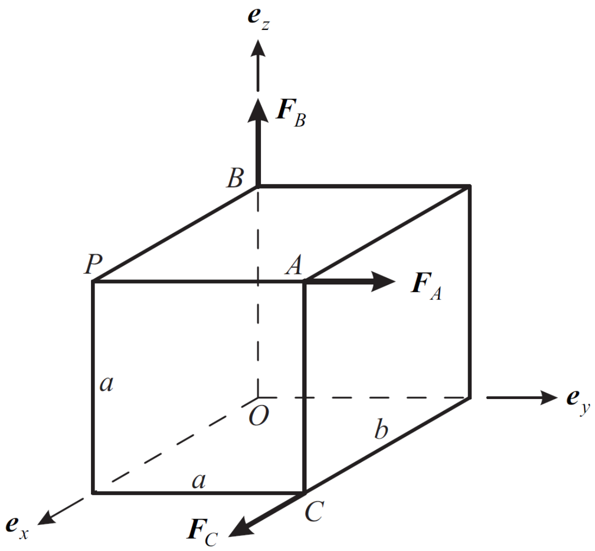
Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 5 -

Dr. Paolo Tiso

21. Oktober 2025

1. [1] Die Kräfte $\mathbf{F}_A = F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_z$, und $\mathbf{F}_C = F\mathbf{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader an (Kantenlängen b, a, a).



1. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.
2. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in P.
3. Wie muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

Lösung:

1. Die Resultierende Kraft kann berechnet werden als

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F. \quad (1)$$

Das resultierende Moment bezüglich O ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_B + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_C \\ &= \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F \\ &= \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} F \\ \Rightarrow \mathbf{M}_O &= \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Dyname in O ist $\{\mathbf{R},\, \mathbf{M}_O\}$.

[1]Aufgabe aus der Übungsserie 4 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

2. Die resultierende Kraft $\mathbf{R}$ ist invariant und darum unabhängig vom Bezugspunkt. Das resultierende Moment bezüglich P wird mit der Transformationsregel berechnet als

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_P &= \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{R} \\
&= \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F \\
&= \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ -b \end{pmatrix} F \\
\Rightarrow \mathbf{M}_P &= \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \\ -a \end{pmatrix} F.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die Dyname in P ist $\{\mathbf{R},\, \mathbf{M}_P\}$.

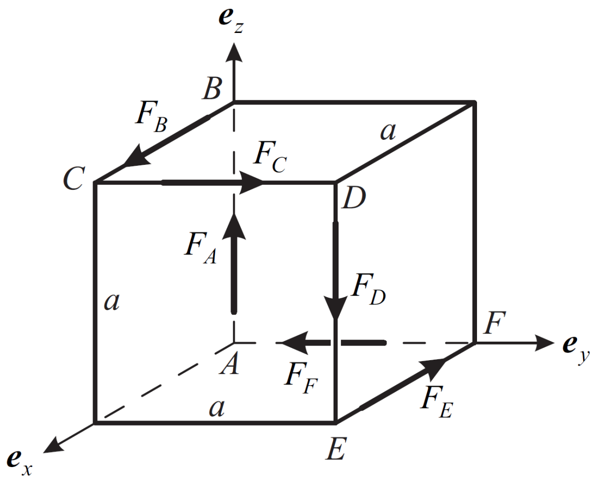
3. Die Kräftegruppe lässt sich auf eine Einzelkraft reduzieren falls es gilt

$$\mathbf{R} \neq \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad I_2 = 0;$$

also

$$\begin{aligned}
I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O &= 0 \\
\begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F &= 0 \\
F^2(-2a + b) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{a}{b} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

2. [2] Bestimmen Sie die eingezeichneten Komponenten der sechs am Würfel (Seitenlänge a) skizzierten Kräfte so, dass sie einem Momentvektor in z-Richtung vom Betrag M statisch äquivalent sind.



Lösung:

Die Resultierende Kraft wird berechnet als

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_F \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_F \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_B - F_E \\ F_C - F_F \\ F_A - F_D \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Das resultierende Moment bezüglich A ist

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B + \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}_C + \mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{F}_D + \mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_E + \mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{F}_F \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_D \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -F_F \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ aF_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -aF_C \\ 0 \\ aF_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -aF_D \\ aF_D \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aF_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_C - F_D \\ F_B + F_D \\ F_C + F_E \end{pmatrix} a.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Diese Dyname ist einem Momentvektor in z-richtung von Betrag M statisch äquivalent falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$
\mathbf{R} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{M}_A = M\mathbf{e}_z. \tag{3}
$$

[2] Aufgabe aus der Übungsserie 4 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

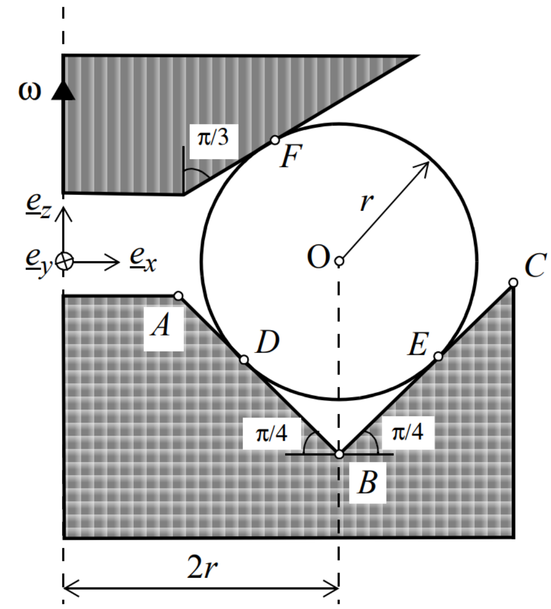
Daraus folgt

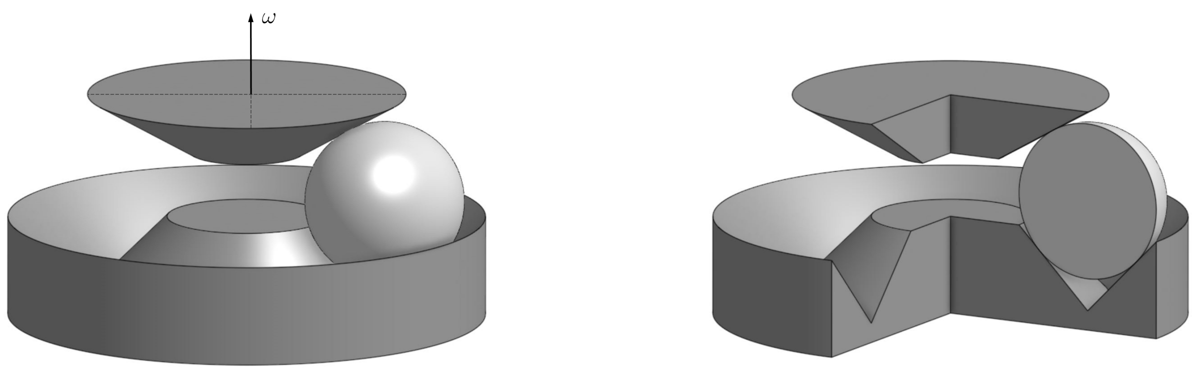
$$\begin{aligned}
& F_B = F_E; \quad F_C = F_F; \quad F_A = F_D \\
& \begin{pmatrix} -F_C - F_D \\ F_B + F_D \\ F_C + F_E \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \\
& F_C = -F_D; \quad F_B = -F_D; \quad F_C + F_E = \frac{M}{a} \\
& F_C = F_F = -F_D = -F_A = F_B = F_E \\
& \frac{M}{a} = F_C + F_E = 2F_E \\
\Rightarrow \quad & F_E = \frac{M}{2a}
\end{aligned} \tag{4}$$

Zusammengefasst

$$\begin{aligned}
& F_A = -\frac{M}{2a}; \quad F_B = \frac{M}{2a}; \quad F_C = \frac{M}{2a}; \\
& F_D = -\frac{M}{2a}; \quad F_E = \frac{M}{2a}; \quad F_F = \frac{M}{2a}.
\end{aligned} \tag{5}$$

3. Eine Kugel mit Radius r rollt ohne zu gleiten auf einer festen Kegelfläche AB vom halben Öffnungswinkel $\pi/4$, einer festen Kegelfläche BC vom gleichen Öffnungswinkel und auf der gezeichneten, um $\mathbf{e}_z$ drehenden Welle ab, wie in der ersten Abbildung gezeigt. Die Welle rotiere mit der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Zur besseren Veranschaulichung zeigt die zweite Abbildung zwei 3D-Ansichten des Systems.[3]





Was ist die Kinemate der Kugel in ihrem Mittelpunkt O?

▶ (a) $\mathbf{v}_O = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = -3\omega(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(b) $\mathbf{v}_O = \sqrt{\frac{3}{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = 2\omega(3+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(c) $\mathbf{v}_O = \frac{3}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = \omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(d) $\mathbf{v}_O = \sqrt{2}(3-\sqrt{2})\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = r\omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(e) $\mathbf{v}_O = \frac{2\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{3})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = -2\omega(\sqrt{3}-2)\,\mathbf{e}_x.$

[3]Danke an Thomas Gratz für die Erstellung der 3D-Modelle.

Lösung:

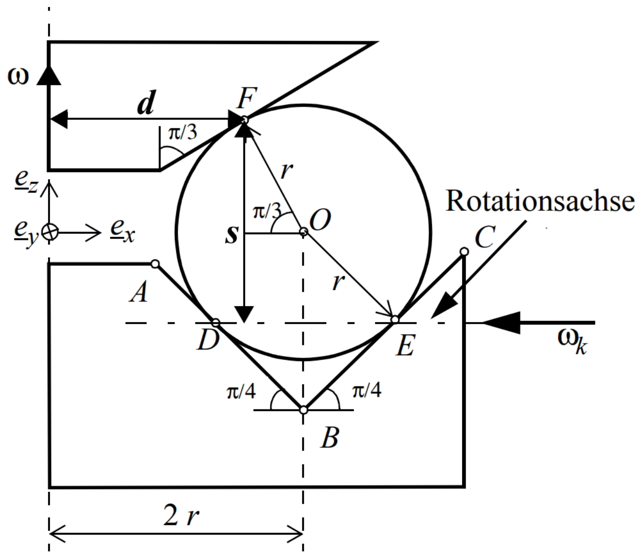
Da die Kugel auf der festen Kegelfläche rollt, müssen die momentanen Geschwindigkeiten in den Berührungspunkten verschwinden, also

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_E = \mathbf{0}; \tag{1}$$

Die Rotationsachse der Kugel geht durch die Punkte D und E und die Rotationsgeschwindigkeit lautet

$$\boldsymbol{\omega}_k = \omega_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei ω_k unbekannt ist.



Der Abstand zwischen F und der Rotationsachse der Welle ist

$$d = 2r - r\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}r, \tag{3}$$

während der Abstand zwischen F und der Rotationsachse der Kugel der folgende ist

$$s = r\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}r = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}r. \tag{4}$$

Da es sich um ein ebenes Problem handelt und wir die Rotationsgeschwindigkeit der Welle $\boldsymbol{\omega}$ schon kennen, darf man die Geschwindigkeit von F einfach berechnen als

$$\mathbf{v}_F = d\omega\mathbf{e}_y = \frac{3}{2}r\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

Mit der Starrkörperformel erhalten wir analog

$$\mathbf{v}_F = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_F = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3r/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}r/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}r\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Um den SvM zu erfüllen, muss die Geschwindigkeit in F auch das folgende erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_F = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_{DF} \\
&\frac{3}{2} r\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r/\sqrt{2} - r/2 \\ 0 \\ r/\sqrt{2} + \sqrt{3} r/2 \end{pmatrix} \\
&\frac{3}{2} r\omega = -\omega_k r \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \right) \\
&\omega_k = -3\omega(\sqrt{3} - \sqrt{2}),
\end{aligned} \tag{7}$$

wobei ω_k die Rotationsschnelligkeit der Kugel ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\omega_k < 0$. Somit zeigt die Rotationsgeschwindigkeit der Kugel in **negative** $\mathbf{e}_x$-Richtung.

Aus (2) und (7) folgt

$$\boldsymbol{\omega}_k = -3\omega(\sqrt{3} - \sqrt{2})\mathbf{e}_x. \tag{8}$$

Der Abstand zwischen F und O ist

$$\mathbf{r}_{FO} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi/3) \\ 0 \\ -r\sin(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2r \end{pmatrix} \tag{9}$$

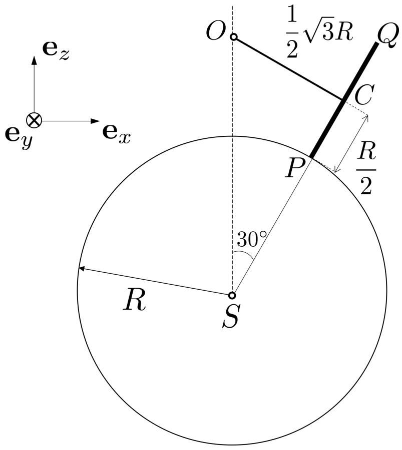
Wir benutzen die Starrkörperformel und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_O &= \mathbf{v}_F + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_{FO} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 3r\omega/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\omega(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2r \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 3r\omega/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{3}\omega r(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{10}$$

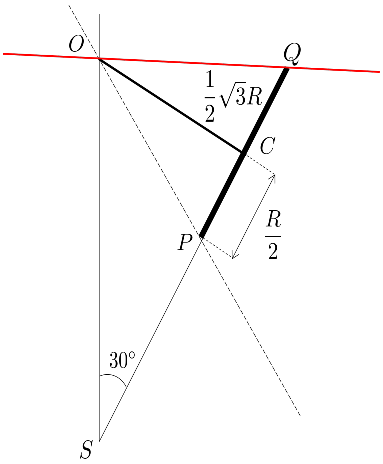
also

$$\mathbf{v}_O = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) r\omega \mathbf{e}_y. \tag{11}$$

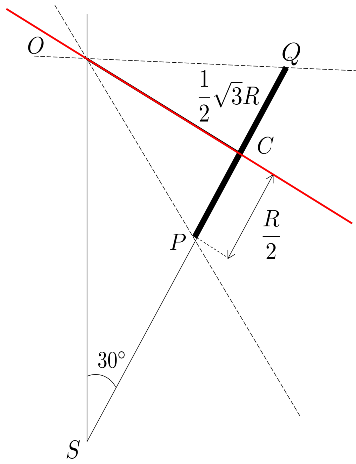
4. Auf einer Kugel mit dem Radius R rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$, die auf einer in O gelagerten Welle sitzt. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt P die Normale zur Kugelfläche, welche mit der Vertikalen einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Mittelpunkt C der Nabe bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C = (0,\ v,\ 0)^T$.



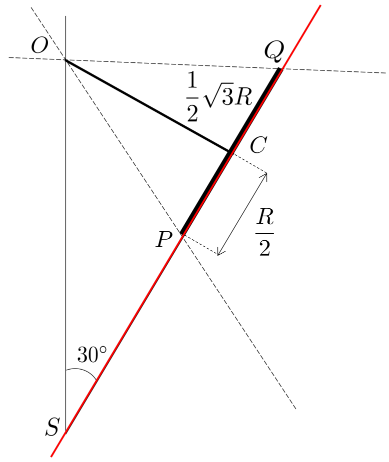
In welcher Abbildung ist die richtige momentane Rotationsachse dargestellt?



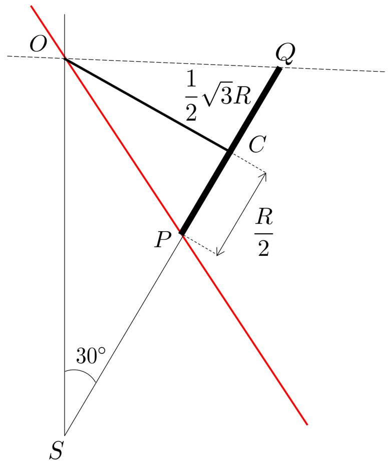
(a)



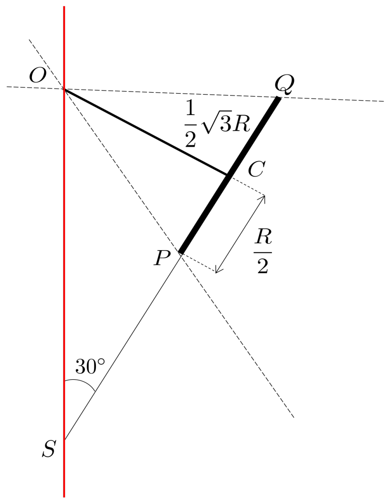
(b)



(c)



(d)

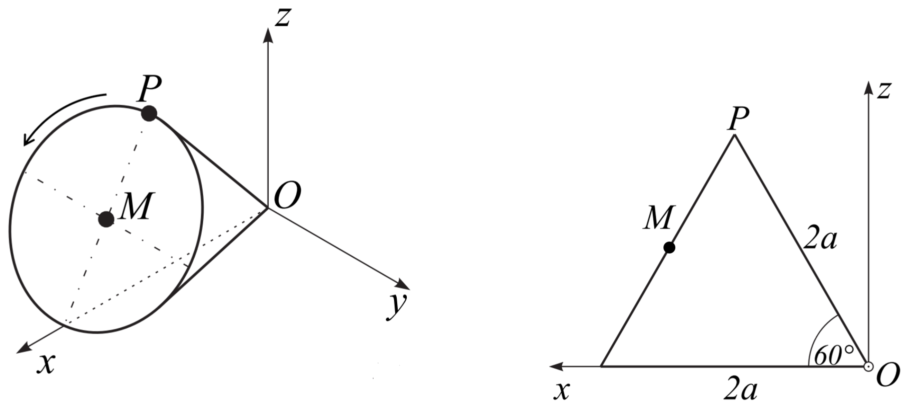


(e)

Lösung:

Die Punkte O und P bewegen sich nicht ($v = 0$), deshalb muss die Rotationsachse durch diese Punkte gehen. Die Lösung ist dementsprechend (d).

5. Ein starrer Kegel rollt mit der gegebenen Rotationsschnelligkeit ω auf der xy-Ebene, so dass seine Spitze stets im Ursprung des raumfesten kartesischen Koordinatensystems liegt. Der Punkt M befindet sich dabei im Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.



1. Was ist in der skizzierten Lage die momentane Rotationsachse?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_P$ und $\mathbf{v}_M$ in den Punkten P und M in der momentanen Lage.
3. Nehmen sie an, dass ω konstant ist. Wie lange braucht der Kegel für eine Umdrehung um die z-Achse?

Lösung:

1. Die momentane Rotationsachse ist die Kontaktlinie zwischen Kegel und xy-Ebene und geht durch O, also

$$\mu : \mathbf{r}(p) = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Wobei $\boldsymbol{\omega}$ parallel zur Berührungslinie verläuft und daher in positive oder negative x-Richtung zeigen kann. Angesichts des Pfeils in der Skizze wird $\boldsymbol{\omega}$ in den folgenden Aufgabenteilen als positiv betrachtet.

2. Um die Geschwindigkeit im Punkt P bzw. im Punkt M zu bestimmen, benutzen wir die Starrkörperformel und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}a\omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OM} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3a/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}a/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}a\omega/2 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3}$$

3. Für die Berechnung der Dauer einer vollständigen Umdrehung des Kegels betrachten wir den Punkt M. Dieser Punkt bewegt sich auf einer Kreisbahn, weil sein Abstand zur z-Achse während des Rollens unverändert bleibt. Der Abstand zwischen Punkt M und O ist

$$\mathbf{r}_{OM} = \begin{pmatrix} 3a/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}a/2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Der Punkt M beschreibt also einen Kreis in der xy-Ebene mit Radius $3a/2$ und Mittelpunkt 0 um die z-Achse. Der Kreis hat folglich den Umfang $U = 3a\pi$.
Die Schnelligkeit von Punkt M ist

$$v_M = |\mathbf{v}_M| = \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega. \tag{5}$$

Für eine Umkreisung um die z-Achse braucht der Kegel also die Zeit T:

$$T = \frac{U}{v_M} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\omega}. \tag{6}$$