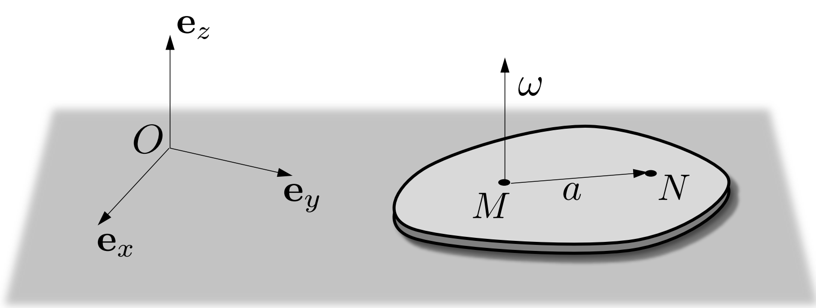
Technische Mechanik
151-0223-10

# - Übung 2 -

Dr. Paolo Tiso

30. September 2025

**1.** Betrachten Sie den Starrkörper in der Skizze. Sei $\mathbf{a}$ der Abstandsvektor zwischen 2 beliebigen Punkten des Körpers $M$ und $N$, und sei $|\mathbf{a}| = 2$. Der Körper rotiert um $M$ in der Ebene $z = 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$.




Welche der folgenden Aussagen ist zutreffend?

► (a) $\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 2$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2$

(d) $\dot{\mathbf{a}} = \omega \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

(e) $\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$

*Lösung*:

Das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ lässt sich leicht berechnen als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| = 4, \tag{1}$$

also ist Aussage (b) falsch.

Da $\mathbf{a}$ der Abstandsvektor zwischen Punkt $M$ und Punkt $N$ ist, d.h. $\mathbf{a} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M$, lässt sich $\dot{\mathbf{a}}$ wie folgt berechnen:

$$\mathbf{v}_N - \mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M) = \omega(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M) \tag{2}$$

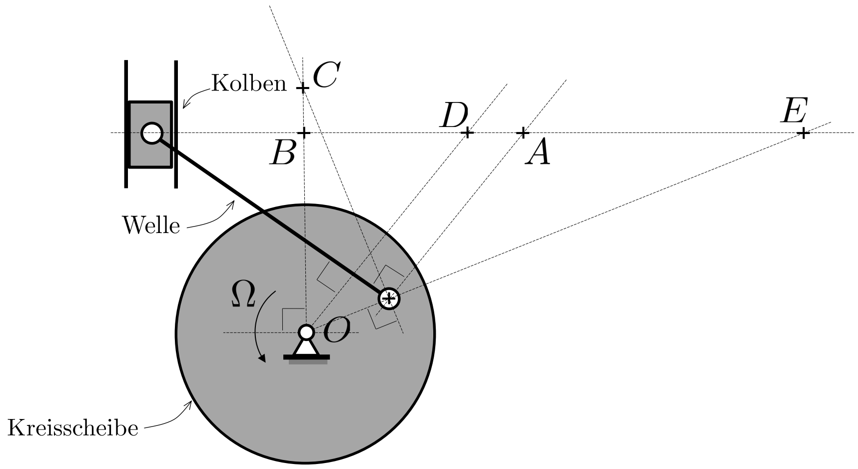
$$\Rightarrow \dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$$

wobei $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, während $\mathbf{a}$ auf der xy-Ebene liegt. Deshalb steht $\dot{\mathbf{a}}$ senkrecht zu $\mathbf{a}$, also ist Aussage (a) $\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0$ richtig. Dasselbe Ergebnis lässt sich anhand der Definition des starren Körpers überprüfen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0. \tag{3}$$

Ebenso ist Aussage (c) falsch, da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 0$.
Aussagen (d) und (e) besagen, dass $\dot{\mathbf{a}}$ parallel zu $\mathbf{a}$ ist. Wie aus Gleichung (2) hervorgeht , steht $\dot{\mathbf{a}}$ senkrecht zu $\mathbf{a}$, daher sind auch Aussagen (d) und (e) falsch.

**2.** Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Kurbelwellenmechanismus. Die Kreisscheibe dreht sich um den Fixpunkt $O$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$. Die Welle verbindet den Kolben mit der Scheibe über zwei Drehgelenke an ihren Spitzen. Der Kolben kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen, wie in der Abbildung gezeigt. Alle Teile des Systems können als starr angenommen werden.




Welcher Punkt ist das Momentanzentrum der Welle?

(a) $A$

(b) $B$

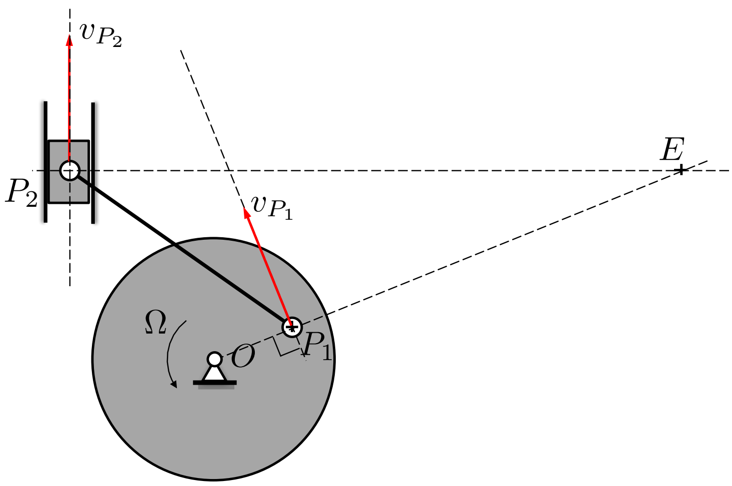
(c) $C$

(d) $D$

► (e) $E$

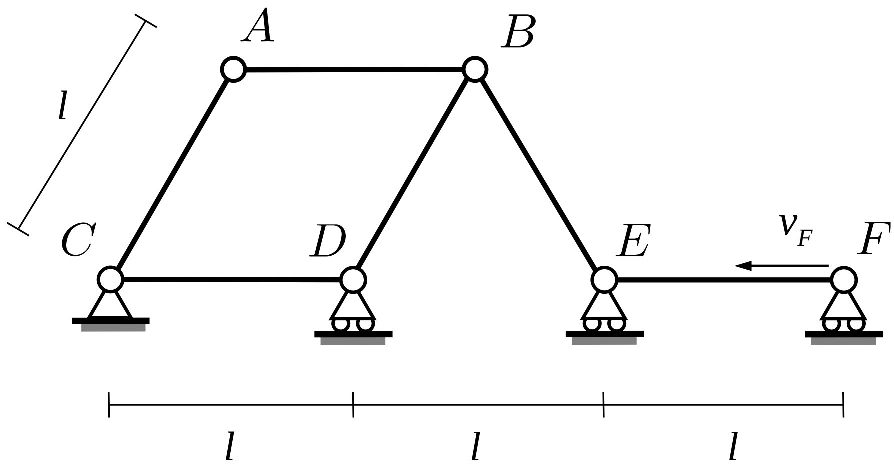
*Lösung*:

Wegen der Zwangsbedingungen im System müssen die Geschwindigkeiten $v_{P_1}$ und $v_{P_2}$ der Punkte $P_1$ und $P_2$ die dargestellten Richtungen haben:




Daher entspricht das Momentanzentrum definitionsgemäss dem Punkt $E$, d.h. der Schnittpunkt der beiden Geraden, die durch $P_1$ und $P_2$ gehen und senkrecht zu $\mathbf{v}_{P_1}$ bzw. zu $\mathbf{v}_{P_2}$ stehen.

**3.** Das unten dargestellte ebene System besteht aus sechs starren Stäben gleicher Länge $l$, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Punkt $F$ bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_F$ nach links, wie in der Skizze eingezeichnet.



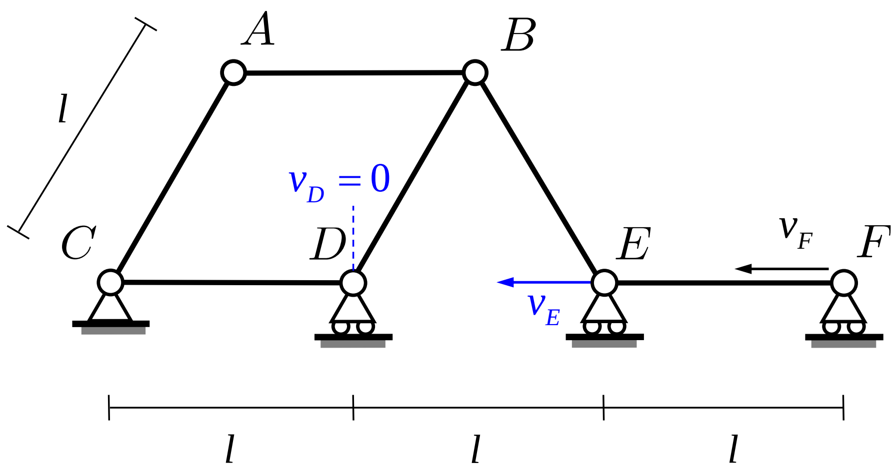

Bestimmen Sie für das Fachwerk die folgenden Parameter:

1. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_E$
2. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_D$
3. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$
4. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$

*Lösung*:

1. Beide Punkte $E$ und $F$ können sich nur horizontal bewegen. Bei Anwendung des Satzes der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG) auf Stab EF, müssen die Geschwindigkeit in den Punkten $E$ und $F$ gleich sein:

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{F\parallel} = \mathbf{v}_{E\parallel} = \mathbf{v}_E \tag{4}$$

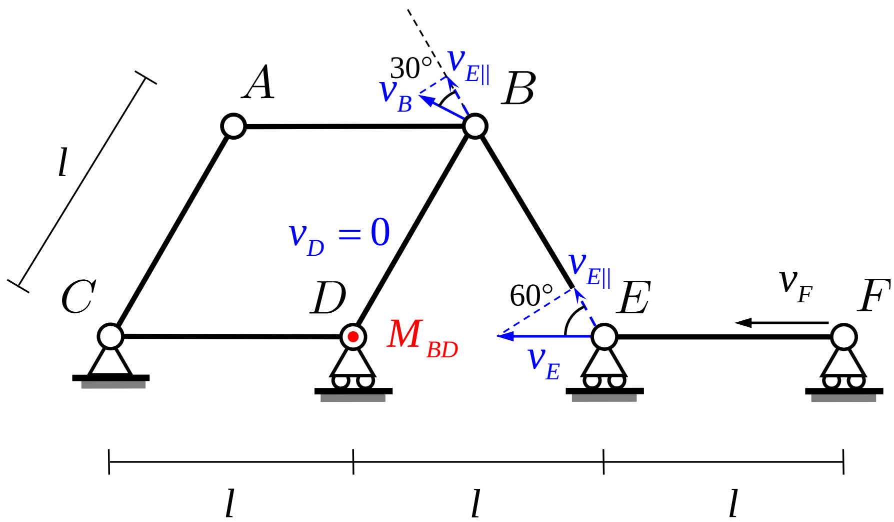



2. Die Berechnung von $\mathbf{v}_D$ kann ähnlich zur Berechnung von $\mathbf{v}_E$ erfolgen. Da Punkt $C$ fix ist und Punkt $D$ sich nur horizontal bewegen kann, muss die Geschwindigkeit in $D$ gleich 0 sein (SdpG):

$$\mathbf{v}_C = 0 = \mathbf{v}_{C\parallel} = \mathbf{v}_{D\parallel} = \mathbf{v}_D \tag{5}$$

3. Die Geschwindigkeit in $B$ kann entweder mit dem **Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG) graphisch**, **SdpG vektoriell** oder mit Hilfe des **Satzes vom Momentanzentrum (SvM)** bestimmt werden. Die 3 Methoden sind äquivalent und führen genau zur selben Lösung. Im Rahmen dieser Aufgabe sind alle 3 Methoden ausführlich erklärt, damit jede/r alle Methoden ausprobieren und für zukünftige Aufgaben die passende wählen kann.

   **SdpG graphisch:** Es wird genau dasselbe Prinzip wie für die vektorielle Methode angewendet. Der Unterschied liegt in der Berechnungsmethode: Anstatt mit kartesischen Vektoren zu rechnen, werden die Vektoren graphisch gezeichnet und nur die entsprechenden Skalare berechnet.




   Als erster Schritt werden die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_D$ und $\mathbf{v}_E$ in der Skizze eingezeichnet. $\mathbf{v}_E$ muss horizontal verlaufen, da den Rollager keine andere Bewegung erlaubt. Da $\mathbf{v}_D = 0$, wird Punkt $D$ das Momentanzentrum $M_{BD}$ vom Stab BD. Daraus folgt, dass $\mathbf{v}_{D\|} = 0$ und $\mathbf{v}_B$ senkrecht zur Stab BD sein muss.

   Nachher wird die entsprechende Projektion in Stabsrichtung $\mathbf{v}_{E\|}$ gezeichnet und der Projektionswinkel ermittelt. Da das Dreieck BDE gleichschenklig ist, beträgt der Projektionswinkel von $\mathbf{v}_E$ zu $\mathbf{v}_{E\|}$ genau 60°. Damit kann der Betrag $v_{E\|}$ berechnet werden:

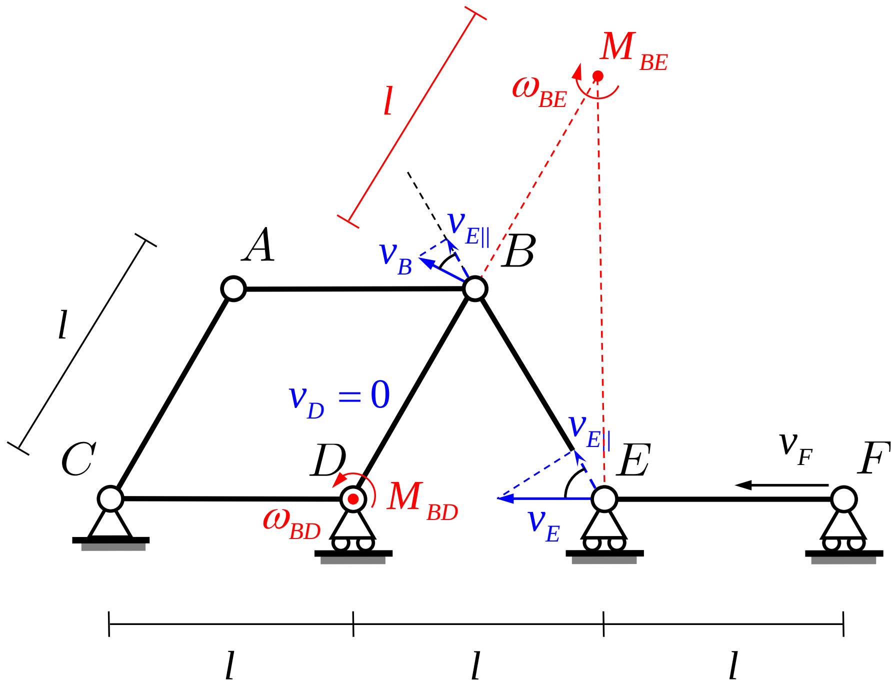
$$v_{E\|} = v_E \cdot \cos 60^\circ = \frac{v_E}{2} = \frac{v_F}{2} \tag{6}$$

   Da Punkt $D$ das Momentanzentrum ist, muss die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ senkrecht zum Stab BD sein. $\mathbf{v}_{E\|}$ kann in die selbe Richtung vom Stab BE gezeichnet werden und der Winkel für die Projektion beträgt dann 30°. Der Betrag $v_B$ kann dann wie folgt berechnet werden:

$$v_{E\|} = v_B \cdot \cos 30^\circ \tag{7}$$

$$v_B = \frac{v_{E\|}}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_{E\|} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \tag{8}$$

**SvM:** Dieses Verfahren ist auch graphisch basiert und anders als beim SdpG wird die momentane Rotation des Stabes betrachtet, anstatt die Geschwindigkeit entlang der Stabachse. Die untere Skizze dient als graphische Darstellung der Lösung:




Um die Geschwindigkeit im Punkt $B$ zu definieren, ist das Momentanzentrum und die entsprechende Winkelgeschwindigkeit von mindestens einem mit Punkt $B$ verbundenen Stab nötig. Für diesen Fall sind die Stäbe AB, BD und BE mögliche Kandidaten. Da aber die Geschwindigkeit vom Punkt $A$ unbekannt ist, ist es sinnvoller mit den Stäben BD und BE anzufangen.

Als erstes werden die Momentanzentren von den gewählten Stäben definiert:

- Da Punkt $D$ fix ist und Punkt $B$ beweglich ist (keine reine Translation möglich), muss $M_{BD}$ sich am Punkt $D$ befinden.
- $M_{BE}$ muss senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}_E$ und $\mathbf{v}_B$ sein. Da der Stab BD eine Rotation um den Punkt $D$ ausführt, muss die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ senkrecht zum Stab BD sein. Damit kann $M_{BE}$ eindeutig bestimmt werden (siehe Skizze).

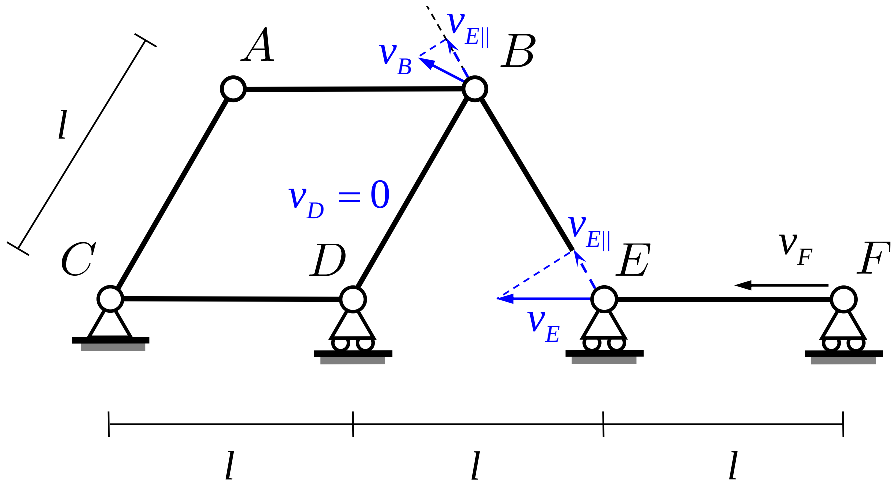
Als nächstes kann $\omega_{BE}$ aus $\mathbf{v}_E$ bestimmt werden (skalare Grössen, die Richtungen sind in der Skizze ersichtlich):

$$\omega_{BE} \cdot \sqrt{3}l = v_E \quad \Rightarrow \quad \omega_{BE} = \frac{v_E}{\sqrt{3}l} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{v_F}{l} \tag{9}$$

Und daraus ergibt sich $\mathbf{v}_B$ durch:

$$v_B = \omega_{BE} \cdot l = \frac{v_E}{\sqrt{3}l}l = \frac{\sqrt{3}}{3}v_F \tag{10}$$

**SdpG vektoriell:** Die folgende Skizze zeigt die berechneten Vektoren:




Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ kann wie folgt durch den SdpG berechnet werden:

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{e}_{EB} = 0 \tag{11}$$

Wobei $\mathbf{v}_E$ aus Aufgabenteil 1 bekannt ist:

$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} -v_F \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Und der Einheitsvektor $\mathbf{e}_{BE}$ entlang des Stabes BE verläuft. Da das Dreieck BDE gleichschenklig ist, müssen alle Eckwinkeln 60° betragen. Daraus ergibt sich $\mathbf{e}_{BE}$ als:

$$\mathbf{e}_{EB} = \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$\mathbf{v}_B$ muss dann senkrecht zum Stab BD verlaufen, da $\mathbf{v}_D = 0$ und dementsprechend muss die Geschwindigkeit entlang des Stabes BD ($\mathbf{v}_{D\|} = 0$) null sein (siehe Skizze). Die Richtung von $\mathbf{v}_B$ kann entweder graphisch abgelesen werden oder durch einen senkrechten Vektor zum Stab BD berechnet werden:

$$\mathbf{e}_{DB} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{v_B} &= \mathbf{R}\left[\theta = 90^\circ\right] \cdot \mathbf{e}_{DB} && (15)\\
&= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix} && (16)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} && (17)\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} && (18)
\end{aligned}$$

Daraus kann $\mathbf{v}_B$ wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{v}_B = v_B \cdot \mathbf{e}_{v_B} = v_B \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Durch Einsetzen in Gleichung 11 kann $v_B$ berechnet werden:

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{e}_{EB} = 0 \tag{20}$$

$$\left( v_B \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -v_F \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

$$\left( -v_B \frac{\sqrt{3}}{2} + v_F \right) \cdot -\frac{1}{2} + \left( v_B \frac{1}{2} - 0 \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \tag{22}$$

$$v_B \frac{\sqrt{3}}{4} - v_F \frac{1}{2} + v_B \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \qquad | + v_F \frac{1}{2} \tag{23}$$

$$v_B \frac{\sqrt{3}}{2} = v_F \frac{1}{2} \qquad | * \frac{2\sqrt{3}}{3} \tag{24}$$

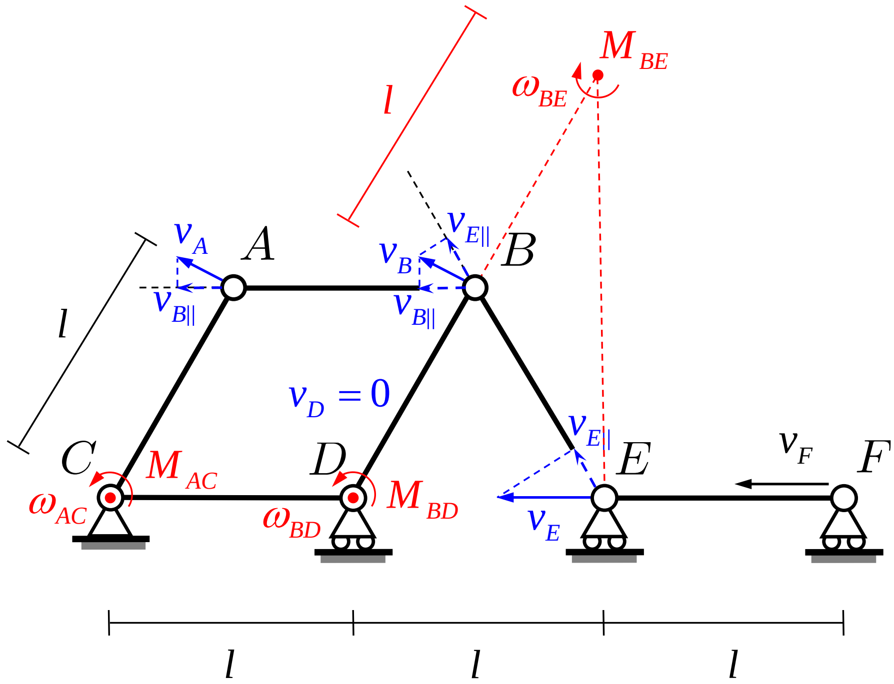
$$v_B = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \tag{25}$$

Und in Vektorform:

$$\mathbf{v}_B = v_B \cdot \mathbf{e}_{v_B} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_F \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = v_F \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \tag{26}$$

*Bemerkung: Der SdpG basiert auf dem Skalarprodukt und darum kann daraus immer nur eine Variable ausgerechnet werden, auch wenn z.B. ein 2D-System eine x- und y-Koordinate hat. Dafür wurde in diesem Beispiel die Richtung vom Geschwindigkeitsvektor in B ($\mathbf{e}_{v_B}$) im Voraus bestimmt, damit das Verhältnis zwischen $v_{Bx}$ und $v_{By}$ festgesetzt werden konnte.*

4. $\mathbf{v}_A$ kann entweder durch den SdpG oder durch den SvM bestimmt werden. Die unten abgebildete Skizze dient als graphische Darstellung von beiden Methoden.




Ähnlich zu Stab BD, ist auch Stab AC an einem Punkt fix und am anderen beweglich. Der Punkt $C$ ist somit das Momentanzentrum vom Stab AC. Demzufolge muss $\mathbf{v}_A$ senkrecht zum Stab AC stehen (siehe Skizze).

**SdpG:** Dank der Projektion der Geschwindigkeit auf Stab AB kann $\mathbf{v}_A$ wie folgt bestimmt werden:

$$v_{B\|} = v_B \cdot \cos 30^\circ \tag{27}$$

$$v_A = \frac{v_{B\|}}{\cos 30^\circ} = \frac{v_B \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = v_B \tag{28}$$

**SvM:** Die Parallelogrammregel, angewendet auf das Parallelogramm ABCD, liefert die folgenden Gleichungen:

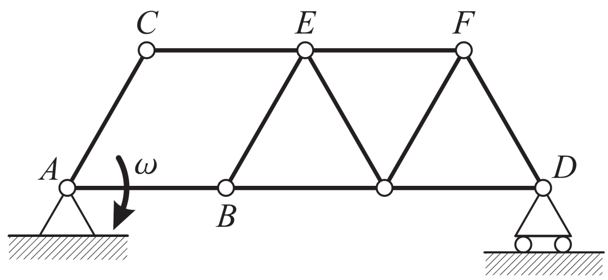
$$\omega_{AB} = \omega_{CD} \qquad \omega_{AC} = \omega_{BD} \tag{29}$$

Im Zusammenhang mit den untenstehenden Gleichungen aus dem SvM, müssen $v_A$ und $v_B$ gleich sein:

$$v_A = \omega_{AC}\, l \qquad v_B = \omega_{BD}\, l \quad \Rightarrow \quad v_A = v_B \tag{30}$$

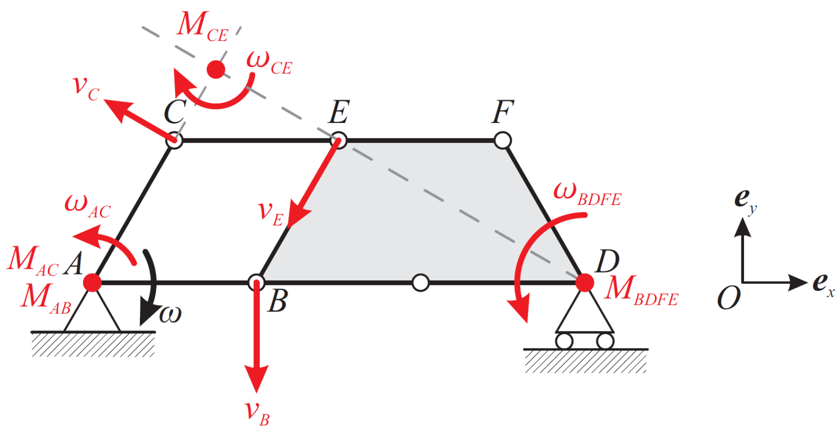
*Bemerkung: Aus einer anderen Perspektive gesehen, wenn der Stab CD fix ist (das bedeutet $\omega_{AB} = \omega_{CD} = 0$), führt der Stab AB eine reine Translation aus. In diesem Fall hat jeder Punkt auf dem Stab AB genau die selbe Geschwindigkeit.*

**4.** [1] Das in der Skizze dargestellte ebene System besteht aus zehn starren Stäben gleicher Länge, die gelenkig miteinander verbunden sind. Der Stab $AB$ rotiert momentan mit der Rotationsschnelligkeit $\omega$.




1. Welche Teile des Systems bilden starre Körper?
2. In welche Richtung rotiert der Stab $AC$?
3. Wie gross ist seine Rotationsschnelligkeit?

*Lösung*:




1. Das System besteht aus 4 starren Körper: die Stäbe $AB$, $AC$, $CE$ und das Fachwerk $BDFE$.
2. Die Stäbe $AB$ und $AC$ sind in $A$ drehbar gelagert, also ist $A$ Momentanzentrum von beiden Stäbe

$$M_{AB} = M_{AC} = A \quad \Rightarrow \quad v_A = 0. \tag{31}$$

Unter Anwendung vom Satz vom Momentanzentrum (SvM, $A \to B$) kann man die Schnelligkeit im Punkt $B$ ausdrücken als

$$v_B = \omega l. \tag{32}$$

Der Auflager im Punkt $D$ kann sich nur horizontal bewegen, demnach bewegt sich auch der Punkt $D$ horizontal. Da man die Richtung der Geschwindigkeit

[1]Aufgabe aus der Übungsserie 2 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

im Punkt $B$ kennt, unter Ausnutzung des Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG, $B \to D$) erhält man die Schnelligkeit im Punkt $D$ als

$$v_D = 0. \tag{33}$$

Der Punkt $D$ ist demnach Momentanzentrum von $BDFE$

$$M_{BDFE} = D. \tag{34}$$

Um den SvM ( $B \to D$) zu erfüllen, muss die Geschwindigkeit im Punkt $B$ den folgenden Betrag haben:

$$v_B = \omega_{BDFE} 2l. \tag{35}$$

Gleichsetzen mit (32) und umformen liefert die Rotationsschnelligkeit von $BDFE$ als

$$\omega_{BDFE} = \frac{v_B}{2l} = \frac{\omega}{2}. \tag{36}$$

Die Geschwindikeit im Punkt $E$ hat dann den Betrag (SvM, $D \to E$)

$$v_E = \omega_{BDFE} \sqrt{3} l = \frac{\sqrt{3} l}{2} \omega. \tag{37}$$

Das Momentanzentrum von $EC$ kann aus dem SvM als Schnittpunkt der Geraden $AC$ und $DE$ bestimmt werden (siehe Skizze).
Daraus ist die Schnelligkeit im Punkt $E$ entsprechend

$$v_E = \omega_{EC} \frac{\sqrt{3}}{2} l. \tag{38}$$

Aus (37) und (38) kann man die Rotationsgeschwindigkeit von $EC$ bestimmen als

$$\omega_{EC} = \frac{2\sqrt{3}}{3l} v_E = \omega; \tag{39}$$

die Schnelligkeit im Punkt $C$ ist dann

$$v_C = \omega_{EC} \frac{l}{2} = \frac{\omega l}{2}. \tag{40}$$

Da $C$ auch zum Stab $AC$ gehört, kann seine Schnelligkeit auch wie folgt ausgedrückt werden (SvM, , $C \to M_{AC}$):

$$v_C = \omega_{AC} l. \tag{41}$$

Durch gleichsetzen von (40) und (41) erhalten wir schlussendlich

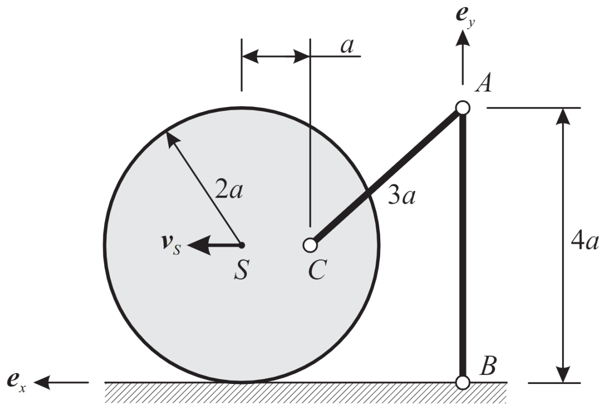
$$\omega_{AC} = \frac{\omega}{2}. \tag{42}$$

Der Stab $AC$ rotiert in mathematisch positiver Richtung um $A$ mit Rotationsschnelligkeit $\omega_{AC} = \omega/2$.

*Bemerkung: Wenn die Momentanzentren bekannt sind, lassen sich die Verhältnisse der Rotationsschnelligkeiten direkt über die inversen Verhältnisse der Radien bestimmen, ohne die Geschwindigkeiten explizit auszurechnen:*

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{BDFE}}{\omega} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{\omega_{EC}}{\omega_{BDFE}} = \frac{2}{1}; \qquad \frac{\omega_{AC}}{\omega_{EC}} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{\omega_{BDFE}}{\omega} \frac{\omega_{EC}}{\omega_{BDFE}} \frac{\omega_{AC}}{\omega_{EC}} &= \frac{1}{2}\frac{2}{1}\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \omega_{AC} &= \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \tag{43}$$

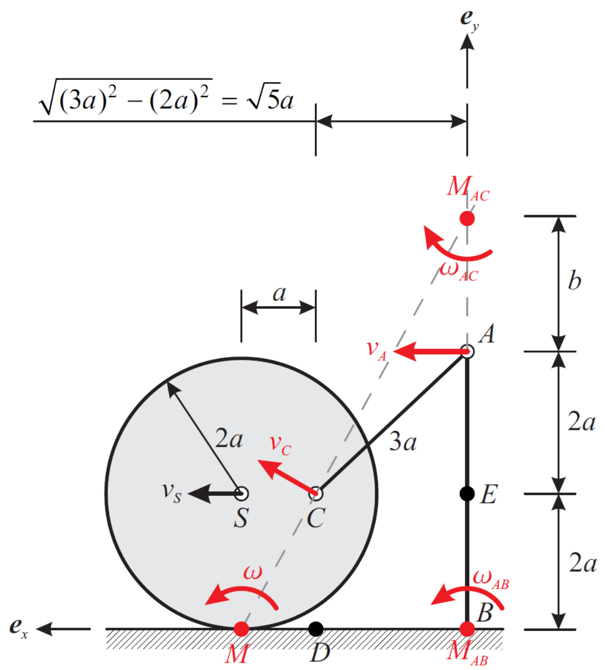
**5.** [2] Das eben modellierte System besteht aus einer Walze und zwei Stangen. Die Walze rollt mit der konstanten (Mittelpunkts-) Geschwindigkeit $\mathbf{v}_s = v_s \mathbf{e}_x$ nach links, ohne zu gleiten.




Bestimmen Sie in der dargestellten Lage:

1. Das Momentanzentrum und die Rotationsschnelligkeit der Walze.
2. Die Geschwindigkeit und die Schnelligkeit des Punktes $C$.
3. Die Rotationsschnelligkeit $\omega_{AB}$ und das Momentanzentrum des Stabes $AB$.
4. Die Rotationsschnelligkeit $\omega_{AC}$ und das Momentanzentrum des Stabes $AC$.

*Lösung*:




1. Die Walze rollt auf dem Boden ohne zu gleiten. Der materielle Berührungspunkt $M$ ist in Ruhe und demnach das Momentanzentrum der Walze. Die Rotationsschnelligkeit der Walze ergibt sich mit dem Satz vom Momentanzentrum (SvM, $S \rightarrow M$) als

$$v_s = 2a\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_s}{2a}. \tag{1}$$

[2] Aufgabe aus der Übungsserie 2 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

2. Die Schnelligkeit von Punkt $C$ ergibt sich mit dem SvM ($M \to C$) als

$$v_C = \omega\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} v_s. \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit in $C$ steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden $MC$ und hat den Betrag $v_C$, also

$$\mathbf{v}_c = \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{pmatrix} = \frac{v_c}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v_s}{2}. \tag{3}$$

*Hinweis: Alternativ lässt sich die Geschwindigkeit in C auch komponentenweise berechnen. Dazu wendet man den Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG) auf $S \to C$ an und erhält die x- Komponente $v_{Cx} = v_S$ . Die y-Komponente berechnet sich über den SvM $M \to D$ und den SdpG $D \to C$ zu $v_{Cy} = v_S/2$. D stellt dabei einen fiktiven Hilfspunkt dar, der sich mit der starren Walze mitbewegt.*

3. Der Stab $AB$ ist in $B$ gelenkig mit dem Boden verbunden. $B$ ist in Ruhe und somit Momentanzentrum von $AB$. Die Geschwindigkeit in $A$ steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden $AB$ und hat nach dem SvM ($B \to A$) den Betrag $v_a = \omega_{AB} 4a$ mit noch unbekanntem $\omega_{AB}$.

$$\mathbf{v}_A = v_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \omega_{AB} 4a. \tag{4}$$

Die Rotationsschnelligkeit lässt sich nun mit dem Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG, $C \to A$) bestimmen

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A) \cdot (\mathbf{r}_{BC} - \mathbf{r}_{BA}) = (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{r}_{AC} \\
&= \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v_S}{2} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \omega_{AB} 4a \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5}a \\ -2a \end{pmatrix} \\
&= (v_S - \omega_{AB} 4a)\sqrt{5}a - \frac{1}{2} v_S 2a \\
&= [(\sqrt{5} - 1)v_S - 4a\sqrt{5}\omega_{AB}]a \\
&\Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{(\sqrt{5} - 1)v_S}{4a\sqrt{5}} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \frac{v_S}{4a}.
\end{aligned} \tag{5}$$

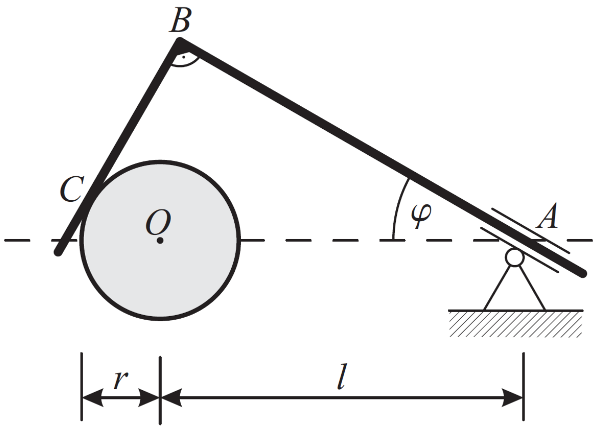
4. Das Momentanzentrum von $AC$ liegt auf den Senkrechten von $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_C$ und damit im Schnittpunkt der Geraden $MC$ und $BA$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $MDC$ und $CEM$ folgt

$$\frac{a}{2a} = \frac{\sqrt{5}a}{2a + b} \quad \Rightarrow \quad b = 2a(\sqrt{5} - 1). \tag{6}$$

Mit dem SvM ($M_{AC} \to A$) resultiert für die Rotationsschnelligkeit von $AC$

$$v_A = \omega_{AC} b \quad \Rightarrow \quad \omega_{AC} = \frac{v_A}{b} = \frac{\omega_{AB} 4a}{2a(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \frac{v_S}{4a} 4a}{2a(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} v_S}{10a}. \tag{7}$$

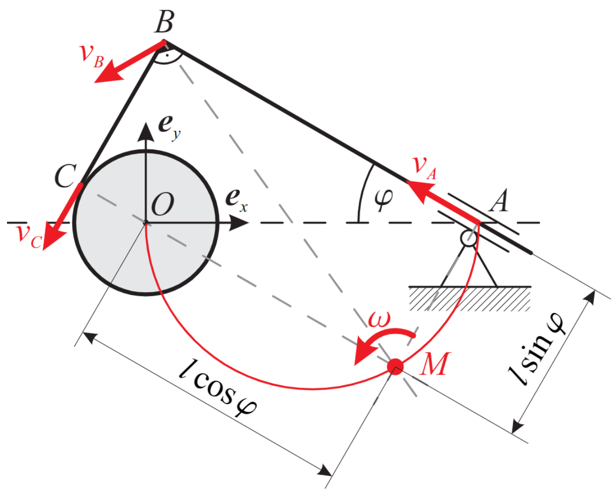
**6.** [3] Zwei starr im rechten Winkel verbundene Stäbe bewegen sich so, dass der eine Stab an einem Kreis vom Radius $r$ gleitet und der andere durch den festen Punkt $A$ (Abstand $l$ vom Zentrum des Kreises) geht.




1. Zeichnen Sie in der gegebenen Lage die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_C$ der Stabpunkte A und C ein.
2. Bestimmen Sie geometrisch das Momentanzentrum.
3. Es sei die Schnelligkeit $v_C$ gegeben. Bestimmen Sie die Rotationsschnelligkeit $\omega$ sowie die Schnelligkeiten der Stabpunkte $A$ und $B$.

*Lösung*:

1. Siehe Zeichnung:




2. Das Momentanzentrum $M$ liegt im Schnittpunkt der Senkrechten zu $\mathbf{v}_C$ und $\mathbf{v}_A$.
3. Die Rotationsschnelligkeit der Walze ergibt sich mit dem SvM ($C \to M$) als

$$v_C = \omega(r + l\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r + l\cos\varphi} v_C. \tag{1}$$

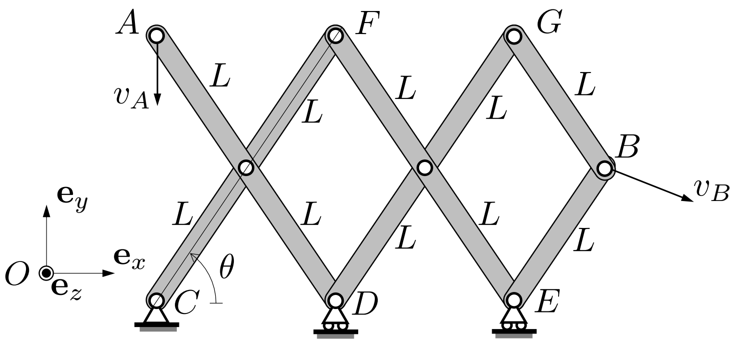
[3] Aufgabe aus der Übungsserie 2 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Die Schnelligkeiten der Stabpunkten $A$ bzw. $B$ ergeben sich mit dem SvM ($M \to A$ bzw. $M \to B$) als

$$v_A = \omega l \sin\varphi = \frac{l \sin\varphi}{r + l\cos\varphi} v_C; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} v_B &= \omega\sqrt{(l\sin\varphi)^2 + (r + l\cos\varphi)^2} \\ &= \omega\sqrt{l^2\sin^2\varphi + r^2 + 2rl\cos\varphi + l^2\cos^2\varphi} \\ &= \frac{\sqrt{l^2 + r^2 + 2rl\cos\varphi}}{r + l\cos\varphi} v_C. \end{aligned} \tag{3}$$

**7.** Das gezeigte System besteht aus starren Stäben der Längen $2L$ und $L$, die an ihren Mittel- und Endpunkten gelenkig miteinander verbunden sind, wie in der Skizze dargestellt. Der Punkt $C$ ist am Boden angelenkt, während die Punkte $D$ und $E$ sich nur in der dargestellten horizontalen $\mathbf{e}_x$-Richtung bewegen dürfen. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A = -v_A\mathbf{e}_y$ des Punktes $A$ ist bekannt. Bezeichnen Sie mit $\theta$ den Winkel, den der Stab $CF$ mit der $\mathbf{e}_x$ -Richtung einschliesst.




Was ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ des Punktes B?

(a) $\mathbf{v}_B = \frac{1}{2}v_A \tan\theta \mathbf{e}_x$

► (b) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A\mathbf{e}_y$

(c) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \cos\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A \sin\theta \mathbf{e}_y$

(d) $\mathbf{v}_B = \frac{3}{2}v_A \sin\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{5}v_A \cos\theta \mathbf{e}_y$

(e) $\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \cos\theta \mathbf{e}_x$

*Lösung*:

Die Lage des Punktes $B$ ist

$$\mathbf{r}_B = 5L\cos\theta \mathbf{e}_x + L\sin\theta \mathbf{e}_y + \mathbf{r}_{OC}, \tag{4}$$

wobei $O$ der Ursprung des Koordinatensystems $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ ist.
Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_B = L\dot{\theta}(-5\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y). \tag{5}$$

Wir müssen noch $\dot{\theta}$ bestimmen. Dies ist möglich, wenn man bedenkt, dass $F$ das Momentanzentrum des Stabes $AD$ ist, da die Geschwindigkeit von $D$ in $\mathbf{e}_x$-Richtung gerichtet sein muss. Durch Anwendung des SvM ergibt sich dann

$$-v_A\mathbf{e}_y = -\dot{\theta}\mathbf{e}_z \times (-2L\cos\theta)\mathbf{e}_x \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{v_A}{2L\cos\theta}, \tag{6}$$

wobei $\boldsymbol{\omega}_{AD} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ aus Symmetrieüberlegungen folgt (der Balken $AD$ rotiert mit gleicher und entgegengesetzter Geschwindigkeit wie der Balken $CF$). Setzt man $\dot{\theta}$ in (5) ein, erhält man

$$\mathbf{v}_B = \frac{5}{2}v_A \tan\theta \mathbf{e}_x - \frac{1}{2}v_A\mathbf{e}_y. \tag{7}$$