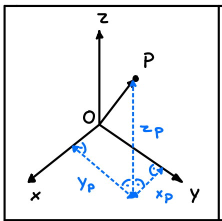
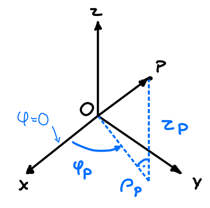
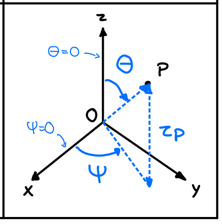
Simon Schwartz
HS 2020

Technische Mechanik

sschwartz@student.ethz.ch

Koordinaten / -systeme

	kart.	zylind.	kugel.
kart.		$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$ $\psi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$
zylind.	$x = \rho\cos(\varphi)$ $y = \rho\sin(\varphi)$ $z = z$		$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$ $\psi = \varphi$
kugel.	$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$ $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$ $z = r\cos(\theta)$	$\rho = r\sin(\theta)$ $\varphi = \psi$ $z = r\cos(\theta)$	

Freiheitsgrad eines Systems: $f = n - b$ (n: Summe FG einzelner SK; b: Anzahl Bindungen)

↳ SK hat FG $=6$ (3D), $=3$ (2D)

Bahnkurve: $\vec{r}(t) \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ ($\dot{\ } \hat{=}$ zeit. Ableitung)

Schnelligkeit: $v = |\vec{v}|$

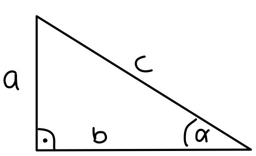
<u>Kart.</u>:
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$
$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$
$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

<u>Zylin.</u>:
$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho(\varphi) + z\vec{e}_z$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$
$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2}$$

Trigonometrie

0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	↯	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Grad ↔ Bogenmass: $\quad a^\circ = \frac{\varphi}{\pi}\cdot 180^\circ$
$(2\pi \text{ rad} = 360^\circ) \quad \beta = \frac{a^\circ}{180^\circ}\cdot\pi$

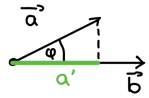


$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Geg}}{\text{Hyp}} = \frac{a}{c}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{An}}{\text{Hyp}} = \frac{b}{c}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Geg}}{\text{An}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} \qquad \sin^2 + \cos^2 = 1 \qquad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$

Vektorgeometrie

<u>Skalarprodukt</u>:



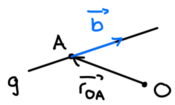
$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$
$$\varphi = 90^\circ \to \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$
$$a' = |\vec{a}|\cos(\varphi) = |\vec{a}||\vec{e}|\cos(\varphi) = \vec{a}\cdot\vec{e}$$

<u>Kreuzprodukt</u>: (Vektorprodukt)
$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

<u>Mehrfache Produkte</u>:
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

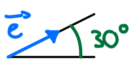
<u>Geraden</u>:



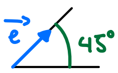
$$g: \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_{OA} + k\vec{b}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{b}$$

Betrag von F/v gegeben: $\vec{e}$ bestimmen

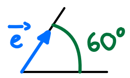
<u>Nützliche Geometrien</u>



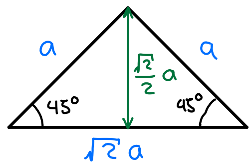
$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

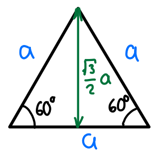


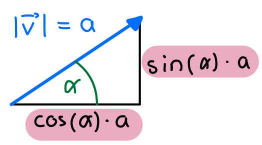
$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$







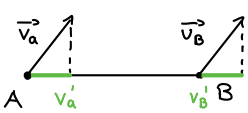
$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \pm\cos(\alpha)\cdot a \\ \pm\sin(\alpha)\cdot a \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\rho = \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x = \cos(\varphi)\,\vec{e}_\rho - \sin(\varphi)\,\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{e}_y = \sin(\varphi)\,\vec{e}_\rho + \cos(\varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

Kleinwinkelapprox.
$$\sin(\varphi) \approx \varphi$$
$$\cos(\varphi) \approx 1$$
$$\tan(\varphi) \approx \varphi$$

Kinematik

<u>Satz der projezierten Geschwindigkeiten (SdpG)</u>



$$v'_a = v'_b = \vec{v}_a\cdot\vec{e}_{AB} = \vec{v}_B\cdot\vec{e}_{AB}$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

↳ $\boxed{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)\cdot\vec{e}_{AB} = 0 \qquad \vec{v}_a\cdot\vec{AB} = \vec{v}_b\cdot\vec{AB}}$ (ist nicht mehr die Projektion!)

SdpG $\forall P \in K$ erfüllt → starre Bewegung

1) Translation: $\vec{v}_P = \vec{v} \quad \forall P \in K$

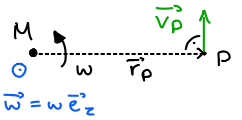
2) Rotation: $\vec{v}_a = \vec{v}_b = 0 \to$ Rotationsachse

Ebene Bewegungen

1) alle $\vec{v}$ $\parallel$ zur Ebene E
2) alle Punkte auf einer Normalen zu E haben gleiches $\vec{v}$

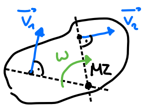
=> momentan entweder Rotation oder Translation

Satz vom Momentanzentrum



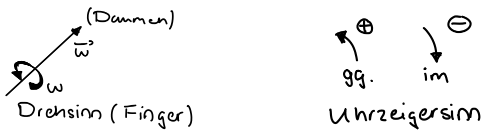
$$\boxed{\begin{array}{ll} v_P = \omega \cdot r_P & \text{(skalar)} \\ \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P & \text{(vektor)} \end{array}}$$ + RHR

ω = Rotationsschnelligkeit
M = Momentanzentrum

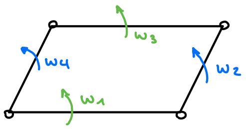


$\vec{v}_M = 0$
Richtung von v durch RHR und $\vec{\omega}$

Bem. RHR

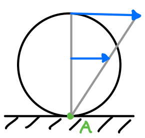


Bem. Parallelogrammregel

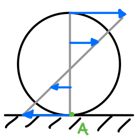


$\omega_2 = \omega_4$
$\omega_1 = \omega_2$
gilt für Richtung und Betrag

Bem. Rollen und Gleiten



$\vec{v}_A = \vec{v}_{Boden} = 0$ -> Momentanzentrum!
Körper haftet am Boden



$\vec{v}_A \neq 0$
Körper rutscht über den Boden
Geschwindigkeitsverteilung muss nicht symmetrisch um Mittelpunkt sein!

Vorgehen Kinematikaufgaben / Ebene Fachwerke

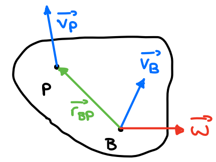
1. alle SK identifizieren (Dreiecke zusammenfassen)
2. Identifikation der Lager und Verbindungen
   - Festlager: MZ des Stabs $v_y = v_x = 0$!
   - Auflager: MZ auf Gerade $v_y = 0, v_x \neq 0$!
   - Gelenk / Berührungspunkt A zweier Körper: gleiches v in A
   - Rollen: MZ = Berührungspunkt mit Boden
3. $\vec{\omega}$, $\vec{v}_i$ und MZ aller SK bestimmen
   - SvM: Schnittpunkt der Orthogonalen auf v = MZ
   - SdpG
   - Parallelogrammregel
   - Allgemeine Geschwindigkeitsformeln
   - falls nötig mit Projektionen rechnen: $\vec{v}_P = \begin{pmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ v_{Pz} \end{pmatrix}$

Kreiselung

Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation
=> $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$
Die Gerade durch O in Richtung $\vec{\omega}$: Momentanachse
fixierter Punkt

Starrkörperformel

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BP}}$$



$\vec{v}_B$ = Translationsgeschwindigkeit
$\vec{\omega}$ = Rotationsgeschwindigkeit

Kinemate: $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ — ω des Körpers, Bezugspunkt frei wählbar, da auf dem selben SK ω gleich ist

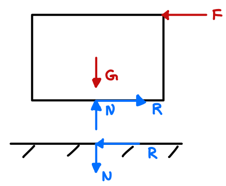
Invarianten

$\vec{I}_1 = \vec{\omega}$
$I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P$ (P frei wählbar)

- Translation: $\vec{I}_1 = 0$ und $I_2 = 0$ ($\vec{v} \neq 0$)
- Rotation: $\vec{I}_1 \neq 0$ und $I_2 = 0$ → $\vec{\omega} \perp \vec{v}$
- Schraubung: $\vec{I}_1 \neq 0$ und $I_2 \neq 0$ ($\vec{v} \neq 0$)

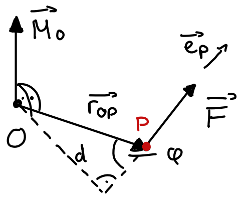
Kräfte und Momente

Kraft: Punktgebundener Vektor $[\vec{F}] = N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
Kontaktkraft: Actio/Reactio in Berührungspunkt
Fernkraft: Actio/Reactio auf Verbindungsgerade



äussere Kräfte
innere Kräfte
↳ heben sich wegen Reaktionsprinzip auf

Moment in O: $\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}}$ $[\vec{M}_O] = N \cdot m$



P: Angriffspunkt

Hebelarm: $M_O = r_{OP} F \sin(\varphi)$
(skalar) $= \pm dF$ (RHR)
$d = |\vec{r}_{OP} \times \vec{e}_P|$

Beachte:

- Kräfte darf man entlang der Wirkungslinie verschieben, ohne dass sich $\vec{M}_O$ oder $\vec{R}$ ändern
- $\vec{M}_O = 0$ wenn Wirkungslinie von F durch O

Leistung

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}_P}$$ $[P] = W = \frac{J}{s} = \frac{m^2 kg}{s^3}$

leistungslose Kraft: $P = 0 \Longleftrightarrow \vec{F} \perp \vec{v}_Q$

reine Rotation: $\boxed{P = \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}}$
(Rotationsachse durch O)

Gesamtleistung: $P = \sum_i P_i$

Statik

Kräftegruppe: $\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i\}$

Resultierende: $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

res. Moment bezüglich O: $\boxed{\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i}$

Gesamtleistung: $\boxed{\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}_P + \vec{M}_P \cdot \vec{\omega}}$

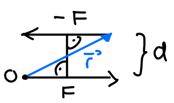
Statische Äquivalenz: $\mathcal{P}(\{\vec{F}_i\}) = \mathcal{P}(\{\vec{G}_i\})$
$\forall$ Starrkörperbewegungen

Zwei Kräftegruppen sind genau dann statisch äquivalent, wenn $\vec{R}$ und $\vec{M}_O$ von beiden gleich sind (einzelne Kraft: vektoriell gleich und gleiche Wirkungslinie besitzen)

$\{\vec{F}_i\}$ sä. null, wenn $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$

↳ Nullsystem, System im Gleichgewicht

Kräftepaar:



$M = F \cdot d$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

(unabhängig vom Bezugspunkt)

Dyname : $\{\vec{R}, \vec{M}_O\}$

Reduktion = Berechnung der Dyname

haben zwei Punkte gleiche Dyname → sä

Transformationsregel

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{M}_P &= \vec{M}_O + \vec{r}_{PO} \times \vec{R} \\ &= \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{r}_{OP}\end{aligned}}$$

Invarianten

$\vec{I}_1 = \vec{R}$

$I_2 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$

Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu:

1) Nullsystem: $\vec{I}_1 = 0$ und $\vec{M}_O = 0$
2) Moment (Kräftepaar): $\vec{I}_1 = 0$ und $\vec{M}_O \neq 0$
3) Einzelkraft: $\vec{I}_1 \neq 0$ und $I_2 = 0$
4) Schraube: $\vec{I}_1 \neq 0$ und $I_2 \neq 0$

Schraube: $\vec{R} \parallel \vec{M}_O$ → Schraubenachse, Zentralachse

Parallele Kräftegruppe

$\vec{R} = 0$: $\vec{N} = \sum_i F_i \cdot \vec{r}_i$ ⇒ $\vec{M} = \vec{N} \times \vec{e}$

$\vec{R} \neq 0$: Kräftemittelpunk $\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{R} \sum_i F_i \cdot \vec{r}_i}$

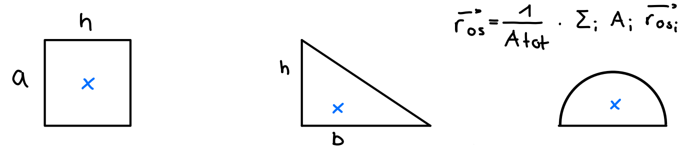
Massenmittelpunkt

Im Massenmittelpunkt greif die Gewichtskraft an. Die x- und y-Komponenten für einfache Geometrien ergeben sich aus:

$$x_s = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} \qquad y_s = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

$$\underset{\text{Gesamtgewicht}}{G} \cdot \vec{r}_c^{\,O\to S} = \sum_i \underset{\text{Teilgewicht } i}{G_i} \, \vec{r}_i^{\,O\to S_i} \qquad (G = \text{Gesamtgewicht})$$

$\vec{r}_{OS} = \frac{1}{A_{tot}} \cdot \sum_i A_i \, \vec{r}_{OS_i}$



$S = \left(\frac{h}{2}, \frac{a}{2}\right)$ $\quad S = \left(\frac{2}{3}b, \frac{h}{3}\right)$ $\quad S = \left(0, \frac{4}{3\pi} r\right)$

Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

formal: $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = 0 \quad \forall \{\tilde{\vec{v}}\}$

Hauptsatz der Statik

In einer Ruhelage müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein.

$$\vec{R} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{M}_O = 0$$

Achtung: notwendig, aber nicht hinreichend (nur falls für alle SK erfüllt)

Gleichgewichtsbedingungen

Komponentenbedingung (KB) $\vec{R} = 0$

2D: $\sum F_x \overset{!}{=} 0$, $\sum F_y \overset{!}{=} 0$ → 2 Gl.

3D: $\sum F_x \overset{!}{=} 0$, $\sum F_y \overset{!}{=} 0$, $\sum F_z \overset{!}{=} 0$ → 3 Gl.

Momentenbedingung (MB) $\vec{M}_O = 0$

2D: $M_z \overset{!}{=} 0$ → 1. Gl.

3D: $M_x \overset{!}{=} 0$, $M_y \overset{!}{=} 0$, $M_z \overset{!}{=} 0$ → 3. Gl.

Zusatzbedingungen

Reibung, Normalkraft Auflager Seilkraft, Stabilität, etc.

Statische Bestimmtheit / kin. Unbestimmtheit

Lässt sich das System bewegen?

(Mechanismus) Ja → kinematisch unbestimmt

Nein → nicht kinematisch unbestimmt

Gibt es mehr od. gleich viele lineare Gl. wie Unb.?

Ja → nicht statisch unbestimmt ↳ statisch bestimmt

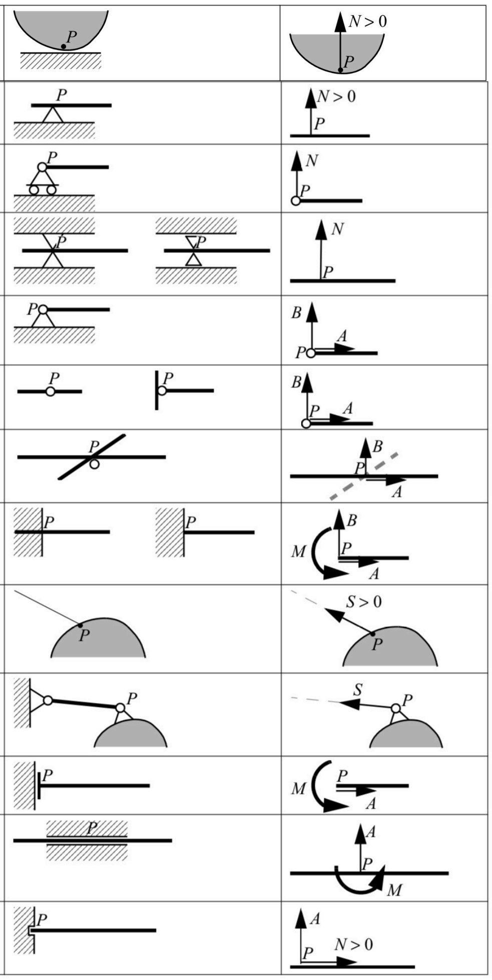
Nein (es klemmt z.B. ☒) → statisch unbestimmt

Begriff kinematisch bestimmt gibt es nicht!

Grad der Unbestimmtheit: (n−r)−fach

Bindungen (reibungsfrei)

Auflager (einseitig)	
Auflager (einseitig) *Loslager*	
Auflager (beidseitig) *Loslager*	
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*	
Gelenk *Festlager*	
Gelenk	
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)	
Einspannung	
Faden / Seil	
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)	
Parallelführung	
Langes Querlager, Schiebehülse	
Längs- und kurzes Querlager	

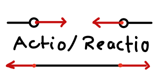


Bem $\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{F} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0 \rightarrow \vec{F} = 0$

$\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{M}_0 \neq 0$, $\vec{\omega} \neq 0 \rightarrow \vec{M}_0 = 0$

Stabkraft bestimmen (1 Kraft gesucht → PdVL)

1. Stab ausschneiden (Skizze)
   ↳ an beiden Knoten Zugkraft

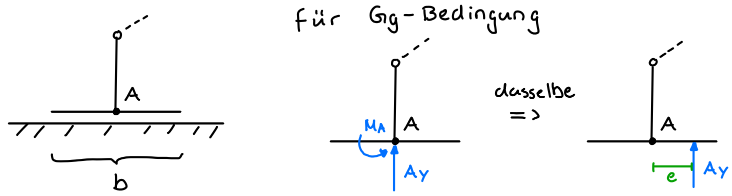


2. Bew.zustand des Mechanismus bestimmen: $\{\vec{\omega}, \vec{v}\}$
3. PdvL formulieren: $\sum \tilde{P} \stackrel{!}{=} 0$, $\tilde{P}_i = \tilde{v}_i \cdot F_i$ (⊥ Komponente fällt weg, bzw = 0)
4. nach Stabkraft auflösen:
   - $S > 0 \rightarrow$ Zugstab
   - $S < 0 \rightarrow$ Druckstab

Vorgehen Analytische Statik

1. System freischneiden, Kräfte einführen
   - Gewichtskraft greift im Schwerpunkt an
   - Seil- & Stabkräfte als Zugkraft
   - Reibungskräfte entgegen Bew. richtung
   - Normalkräfte senkrecht auf Berührungsfläche
2. zweckmässiges Koordinatensystem wählen
3. Gleichungen und Unbekannten zählen
   ↳ statische Bestimmtheit
4. Gleichgewichtsbedingungen formulieren
   ↳ evtl. System weiter auftrennen → Schnittkräfte
5. LGS auflösen und Resultate diskutieren
   - Seil ist gespannt, Zugkraft: $S > 0$
   - Körper kippt nicht: $|x| \leq e/2$
   - Körper hebt nicht ab: $N > 0$
   - Körper gleitet nicht: $|\vec{F}_R| \leq \mu |\vec{N}|$

Kippen



$M_A = e A_y \implies e = \frac{M_A}{A_y}$ ➡ $\left|\frac{M_A}{A_y}\right| = |e| \leq \frac{b}{2}$

Einsetzen für M_A, A_y was bekannt sein sollte aus den Gleichgewichtsbedingungen

Reibung

μ_0 : Haftreibungskoeffizient

μ_1 : Gleitreibungskoeffizient

μ_2 : Rollwiderstandslänge

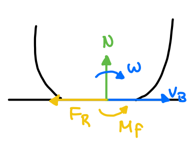
Haftreibung: $\boxed{|\vec{F}| \leq \mu_0 |\vec{N}|}$ => Zusatzbedingung
($\vec{v}_B = 0$)

Gleitreibung: $\boxed{|\vec{F}| = \mu_1 |\vec{N}|}$ => weitere Gleichung
($\vec{v}_B \neq 0$)

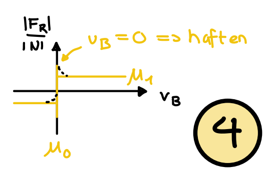
$\vec{F} = -\mu_1 |\vec{N}| \frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|}$

Rollwiderstand: $\boxed{|\vec{M}_f| \leq \mu_2 |\vec{N}|}$ $\omega = 0$ (haftet)

$\boxed{|\vec{M}_f| = \mu_2 |\vec{N}|}$ $\omega \neq 0$ (rollt)



$\vec{M}_F = -\mu_2 |\vec{N}| \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$



ideal rau: $\mu_0 = \infty$, $\mu_2 = 0$
(Zahnrad)

Dynamik

Beschleunigung

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Kart. $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

Zylin. $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

Polar $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ (eben)

↳ $r = \text{¢}$: $\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

radial nach innen $r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$ tangential $r\ddot{\varphi}$

Trägheitskräfte und PdvL

spezifische Masse / Dichte: $\rho = \frac{dm}{dV}$

Trägheitskraftdichte: $\vec{f}^{(t)} = -\rho\vec{a}$

Trägheitskraft: $d\vec{F}^{(t)} = \vec{f}^{(t)} \cdot dV = -a\,dm$

↳ fiktive Kraft → verletzt Reaktionsprinzip

$$\boxed{\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = 0 \,, \quad \forall \{\tilde{\vec{v}}\}}$$

innere Kräfte, äussere Kräfte, Trägheitskräfte: $-m\vec{a} \cdot \tilde{\vec{v}}$

$= 0$ falls $\vec{a} = 0$

Wann liefert $\tilde{\mathcal{P}}^{(t)}$ keinen Beitrag?

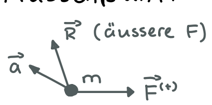
i) Inertialsystem: $\vec{v} = \text{¢} \rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$ Statik

ii) Masseloses modelliertes Teilsystem

↳ $m = 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = 0 \Rightarrow$ Statik

Newton'sches Bewegungsgesetz

Massenpunkt: evt. Rotation / Deformierbarkeit des Körpers uninteressant & keinen Einfluss auf $\vec{R}$



Trägheitskraft am Massenpunkt:

$$\vec{F}^{(t)} = \int d\vec{F}^{(t)} = -\int a\,dm = -am$$

aus PdvL: $\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = (\vec{R} - \vec{a}m)\tilde{\vec{v}} \stackrel{!}{=} 0$

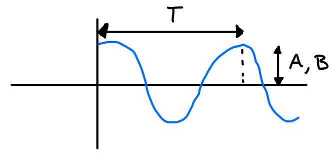
Newton'sches Bewegungsgesetz (KB):

$$\boxed{m \cdot \vec{a} = \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Sigma F_x &= m\ddot{x} \\ \Sigma F_y &= m\ddot{y} \end{aligned}}$$

Bewegungsdiff'gleichung

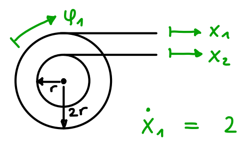
$\ddot{x} = k$	$x(t) = \frac{k}{2}t^2 + At + B$
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
$\ddot{x} + \omega^2 x = k$	$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$
$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$	$x(t) = A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{-\lambda t}$

ω: Kreisfrequenz
A, B: Amplitude
T: Periode

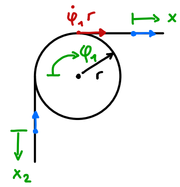


Kinematische Relationen

Gibt es mehr Koordinaten als Freiheitsgrade so sind diese voneinander abhängig.

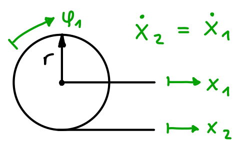


$\dot{x}_1 = 2r\dot{\varphi}$
$\dot{x}_2 = r\dot{\varphi}$



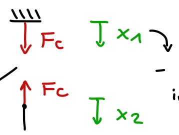
$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$

$\dot{\varphi}_1 r = \dot{x}_1$

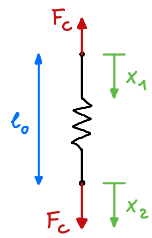


$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r\dot{\varphi}$

Federkraft



– weil F_c und x_1 in gleiche Richtung



$\boxed{|F_c| = c \cdot x}$

c: Federkonstante
x: Auslenkung

$\Rightarrow |F_c| = c \cdot (x_2 - x_1)$

– weil F_c und x_1 nicht in gleiche Richtung

Dämpfer: $\vec{F} = -\eta\dot{\vec{x}}$

Dynamikaufgaben Vorgehen

1. Modellbildung, materielles System abgrenzen
2. Einzelne SK sinnvoll freischneiden
3. In allgemeiner Lage alle Kräfte einführen
4. Freiheitsgrad ermitteln & KS einführen (alle SK)
5. Kinematische Relationen aufstellen (Bindungen)
6. Diff'gleichung aufstellen (für alle Lagekoordinaten)
7. Bindungskräfte bestimmen und aus Bew. gleichung eliminieren, Anzahl Gleichungen reduzieren
8. Anfangsbedingungen formulieren, ges. Grössen berechnen
9. Resultat diskutieren

Impulssatz (Translation)

Impuls p: $\vec{p} = \iiint_B \vec{v}\, dm = m\vec{v}$

Impulssatz: $\boxed{\dot{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\vec{a}_c = \vec{R}}$

$\vec{R} = 0 \Rightarrow$ Impuls konst. "erhalten":

Impulserhaltung: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

inelastischer Stoss: $v_1' = v_2' = v'$
(Stossobjekte "kleben" zusammen)

elastischer Stoss: $v_1' = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1$

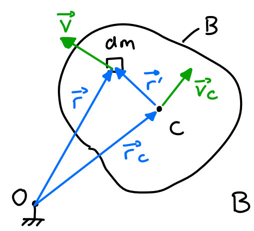
$v_2' = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2$

Massenmittelpunktsatz (Translation)

$$\boxed{\vec{R} = m \cdot \vec{a}_c = m \cdot \ddot{\vec{r}}_c}$$

Drallsatz (Rotation)

① Starre Rotation um **festen** Punkt O:



$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}'$

$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}'$

B noch kein starrer Körper!

aus PdvL: $\tilde{\vec{P}}^{(a)} = \vec{M}_0 \cdot \tilde{\vec{\omega}}$ Folgt:

Moment: $\vec{M}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{a}\, dm$

Drall: $\vec{L}_0 = \iiint_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm$

↳ Drallsatz bezüglich **inertialen** Punkt O

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0}$$

relativer Drall bezüglich **Massenmittelpunkt C**:

$$\vec{L}_c = \iiint_B \vec{r}' \times \vec{v}'\, dm$$

↳ Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c}$$

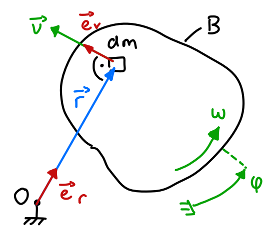
Umrechnungsformel zwischen inertialen Punkt O und Massenmittelpunkt C:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{p} + \vec{L}_c$$

② Ebene Bewegungen

Hier ist **B ein starrer Körper** in x-y-Ebene

Fall 1) Körper B hat Fixpunkt O



$v = \omega r$

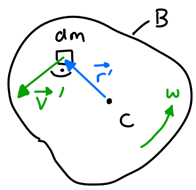
Drall / Drallsatz **bzgl O** (3. Komponente in z)
(wie MB in Statik)

$$\boxed{L_0 = I_0\,\omega; \quad \dot{L}_0 = I_0\,\dot{\omega} \overset{\omega = \dot{\varphi}}{=} \underbrace{I_0\ddot{\varphi} \overset{!}{=} \sum M_{0i}}_{\text{"MB"}}}$$

Massenträgheitsmoment bezüglich O:

$$I_0 = \iint_B r^2\, dm$$

Fall 2) Relativdrallsatz (gilt immer!)



$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}'$

relativer Drall / Drallsatz **bezüglich C**

$$\boxed{L_c = I_c\,\omega \qquad \dot{L}_c = I_c\,\dot{\omega} = M_c}$$

Massenträgheitsmoment bezüglich C:

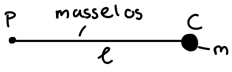
$$I_c = \iint_B r'^2\, dm$$

Satz von Steiner: (Bezugspunktwechsel) $I_p = \underset{\text{zwingend } c}{I_c} + ma^2$

I_p gibt an wie "schwer" es ist, den Körper um P zu drehen ("Widerstand gegen Verdrehung")

Beispiele Massenträgheitsmoment:

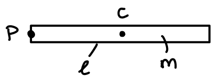
i) Punktmasse an Stange



$I_c = 0$

$I_P = m\ell^2$

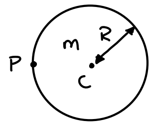
ii) Balken



$I_c = \frac{1}{12} m\ell^2$

$I_P = \frac{1}{3} m\ell^2$

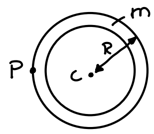
iii) Kreisscheibe



$I_c = \frac{1}{2} mR^2$

$I_P = \frac{3}{2} mR^2$

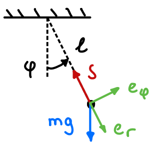
iv) Kreisring



$I_c = mR^2$

$I_P = 2\, mR^2$

Mathematisches Pendel



Komponenten von $\vec{a}$:

$a_\varphi = \ell\ddot{\varphi}$

$a_r = -\ell\dot{\varphi}^2$

Newton'sche Gesetze: $m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi)$

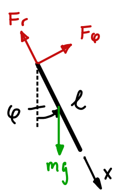
$-m\ell\dot{\varphi}^2 = mg\cos(\varphi) - S$

Bwg. diff. gleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ $\qquad$ $\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 2\pi f$

Ruhelage: $\varphi(t) = 0$ oder π

Physikalisches Pendel



MMS: tan: $m\frac{\ell}{2}\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) + F_\varphi$

rad: $m\frac{\ell}{2}\dot{\varphi} = mg\cos(\varphi) - F_r$

DS in z: $M_{0z} = I_0\ddot{\varphi} = m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\varphi} = -mg\frac{\ell}{2}\sin(\varphi)$

Bwg. diff. gleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2\ell}\sin(\varphi) = 0$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

Ruhelage: (aus $\ddot{\varphi} = 0$) $\rightarrow$ $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$