Technische Mechanik

1. **Zu mir selbst**: Ich bin Ludi und studiere wie die meisten von euch auch Elektrotechnik. Bei Fragen findet ihr meine E-mail und mein Discord auf der Website

2. **Organisatorisches**:

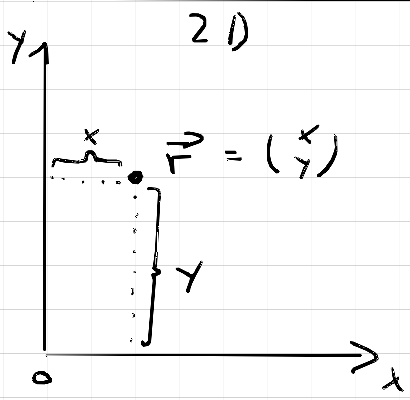
- Vorlesungen jeden Dienstag 10:15 - 12:00
  Kolloquium direkt danach
- Übungsstunde jeden Dienstag 14:15 - 16:00 Uhr im GLC E29.1
- Präsenzstunde / Study Center ab nächster Woche jeden Mittwoch 12:00 - 13:00 Uhr ETZ J91
- Prüfung: 2h, schriftlich
- Zwischenprüfung: Woche 9, 1h, multiple choice, freiwillig, kann Note verbessern
- Alte Prüfungen und Zusammenfassungen auf der AMIV - Website

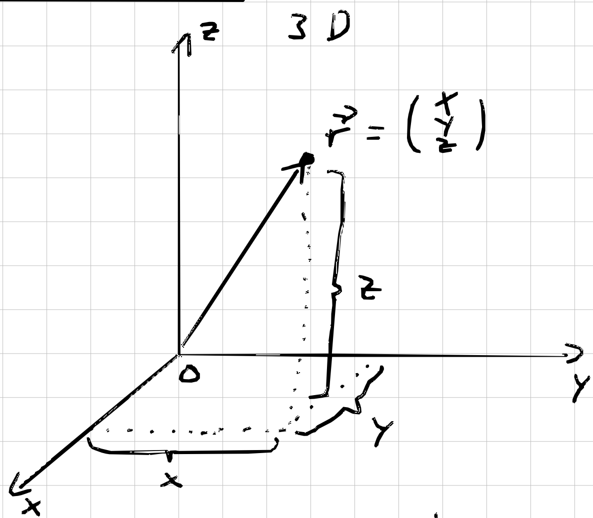
Notenbonus: Lego - Projekt machen -> Notenbonus von max. 0,25

Heute

- Kartesische Koordinaten
- Darstellung von Ort
- Wechsel von Bezugssystemen
- Bewegung / Bahnkurve
- Geschwindigkeit / Schnelligkeit
- Polarkoordinaten

Kartesische Koordinaten





Der Ort $\vec{r}$ eines Teilchens wird immer im Bezug zum Koordinatenursprung angegeben.

Andere schreibweise $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

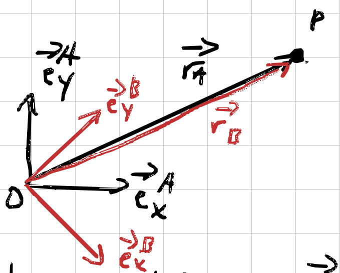
wobe: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$

Wie wählen wir die Orientierung des Koordinatensystems und den Ursprung im echten Leben?

Antwort: es ist egal, die Physik bleibt ja gleich.

Wechsel von Bezugssystemen

Nehme an Punkt P habe Ortsvektor $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ im Bezugssystem A



Was ist $\vec{r}_B$?

Idee:

Wir können $\vec{e}_x^{\,B}$ schreiben als $\vec{e}_x^{\,B} = c_1 \vec{e}_x^{\,A} + c_2 \vec{e}_y^{\,A}$

Analog $\vec{e}_y^{\,B} = d_1 \vec{e}_x^{\,A} + d_2 \vec{e}_y^{\,A}$

Löse nach $\vec{e}_x^{\,A}$ und $\vec{e}_y^{\,A}$ auf.

D.h. finde Konstanten, sodass $\vec{e}_x^{\,A} = c_1' \vec{e}_x^{\,B} + c_2' \vec{e}_y^{\,B}$
und $\vec{e}_y^{\,A} = d_1' \vec{e}_x^{\,B} + d_2' \vec{e}_y^{\,B}$

$$\Rightarrow \vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x^{\,A} + y_A \cdot \vec{e}_x^{\,B} = x_A (c_1' \vec{e}_x^{\,B} + c_2' \vec{e}_y^{\,B}) + y_A \cdot (d_1' \vec{e}_x^{\,B} + d_2' \vec{e}_y^{\,B})$$

$$= x_B \vec{e}_x^{\,B} + y_B \vec{e}_x^{\,B} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \vec{r}_B$$

etwas umsortieren

Keine Sorge, kam noch nie in einer Klausur vor.

Bewegung

Wir können Ort angeben als $\vec{r}$.
Was, wenn $\vec{r}$ von der Zeit abhängt?
$\Rightarrow$ Bewegung (eine Funktion die den Ort beschreibt und von der Zeit t abhängt)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$$

Ortskurven

Vielleicht haben wir eine Funktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ wobei $x(t)$ und $y(t)$ gegeben sind, wollen aber wissen, wie die Bewegung aussieht.

Idee: $x(t) = \ldots$ nach t auflösen und in $y(t)$ einsetzen.
Jetzt hängt y nur noch von x ab und der Graph beschreibt die Ortskurve der Bewegung

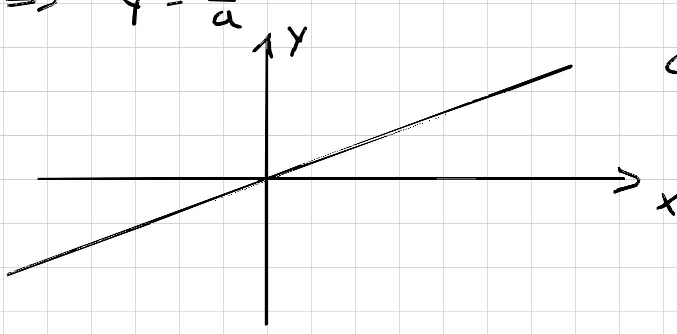
Beispiel 1

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ t \end{pmatrix}$$

hier ist $x(t) = at$, $y(t) = t$
Auflösen und einsetzen:

$$x = at \iff t = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{a}$$



Gerade mit Steigung a

Beispiel 2

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ be^{t} \end{pmatrix}$

Wie sieht die Ortskurve aus?

Geschwindigkeit / Schnelligkeit

Der Vektor $\vec{r}(t)$ beschreibt den Ort unserer Bewegung.

Def Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ ist ein Vektor und ist die komponentenweise zeitliche Ableitung des Ortes.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Def Schnelligkeit

Die Schnelligkeit $v(t)$ ist ein Skalar

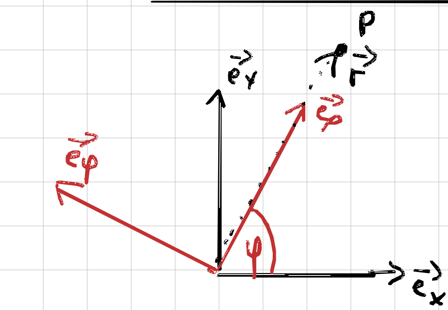
$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2} = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

Beispiel 3

Sei $\vec{r}(t) = -2t\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y + 4t^2\,\vec{e}_z$

Berechne die Geschwindigkeit und die Schnelligkeit.

Polarkoordinaten



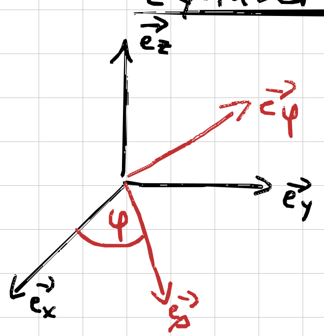
Statt $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$
jetzt $\vec{e_\rho}$ und $\vec{e_\varphi}$

Ort von P wird angegeben als

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e_\rho}(\varphi) = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$$

abhängig von φ!

Zylinderkoordinaten



Selbe wie Polarkoordinaten
aber mit $\vec{e_z}$.

$$\vec{r} = \underbrace{x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{\rho\,\vec{e_\rho}(\rho) + z\vec{e_z}}_{\text{Zylinder}}$$

$\boxed{\text{Transformationsregeln}}$:

Kartesisch $\longrightarrow$ Zylinder

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

$$\vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\varphi\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_\varphi} = \sin\varphi\,\vec{e_x} + \cos\varphi\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_z} = \vec{e_z}$$

Zylinder $\longrightarrow$ Kartesisch

$$x = \rho\cos(\varphi)$$
$$y = \rho\sin(\varphi)$$
$$z = z$$

$$\vec{e_x} = \cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_y} = \sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_z} = \vec{e_z}$$

Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\rho(t)\,\vec{e_\rho}(\varphi) + z(t)\,\vec{e_z}\right)$$

$$= \dot{\rho}(t)\,\vec{e_\rho}(\varphi) + \rho(t)\cdot\dot{\varphi}(t)\cdot\vec{e_\varphi} + \dot{z}(t)\cdot\vec{e_z}$$

Schnelligkeit $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\,\dot{\varphi}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$

der Vektor $\vec{e_\rho}(\varphi)$ ist zeitlich nicht konstant, daher muss $\rho(t)\,\vec{e_\rho}(\varphi)$ mit der Produktregel abgeleitet werden!