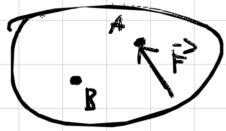
Heute

- Mehr zu Kräften, Leistung, Moment
- Statische äquivalenz
- Charakterisierung von Kräftegruppen
- Dyname und ihre Invarianten
- Aufgaben ranking

Letztes mal haben wir definiert:
Leistung $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Punktes ist worauf die Kraft wirkt.

Angenommen es sei $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ gegeben, und eine Kraft $\vec{F}$, welche am Punkt a wirkt.



Um die Leistung zu berechnen muss ich aber $\vec{v}_A$ wissen. $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$ ist durch die Starrkörperformel gegeben.

daher: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = \vec{F} \cdot (\vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$
$= \vec{F} \cdot \vec{v}_B + \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_B + \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{BA} \times \vec{F})$
$= \vec{F} \cdot \vec{v}_B + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_B$

Beweis von $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ im zusätzlichen Dokument

Was sagt uns dieses Ergebnis?
Um die Leistung zu berechnen müssten wir $\vec{F} \cdot \vec{v}_A$ nehmen, aber wir können auch einfach $\vec{F} \cdot \vec{v}_B$ berechnen. Dafür müssen wir danach noch die Leistung des Moments $\vec{M}_B$ berücksichtigen, welches durch $\vec{F}$ erzeugt wird als "Korrektur".

Falls $\vec{\omega} = 0$ haben wir reine Translation und $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ also gilt natürlich $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_B = \vec{F} \cdot \vec{v}_A$

Falls $\vec{v}_B = 0$ und $\vec{\omega} \neq 0$ dann interessiert uns nur noch das Moment, welches $\vec{F}$ erzeugt und $\vec{M}_B \cdot \vec{\omega}$ gibt uns die Leistung.

Erweitern wir das Konzept für mehrere Kräfte gilt:

$$P_{tot} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right)}_{\vec{R}} \cdot \vec{v}_B + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{BP_i} \times \vec{F}_i\right)}_{\vec{M}_B} \cdot \vec{\omega} = \vec{R} \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_B \cdot \vec{\omega}$$

Def Zwei Kräftegruppen sind statisch äquivalent, wenn sie für beliebige Bewegungen die selbe Leistung erzeugen/erbringen.

Seien $\{G_1\}$ und $\{G_2\}$ zwei Kräftegruppen, und $\vec{R}_1, \vec{M}_{B1}$ und $\vec{R}_2, \vec{M}_{B2}$ die entsprechenden Resultierenden Kräfte und Momente (bezüglich Punkt B)

beliebig

Sei eine beliebige Bewegung durch $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ charakterisiert.

Dann gilt: $P_1 = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_{B1} \cdot \vec{\omega}$

$P_2 = \vec{R}_2 \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_{B2} \cdot \vec{\omega}$

Leistung der entsprechenden Kräftegruppen

$\{G_1\}$ und $\{G_2\}$ sind also nur statisch äquivalent falls $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$ und $\vec{M}_{B1} = \vec{M}_{B2}$, weil $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ beliebig ist.

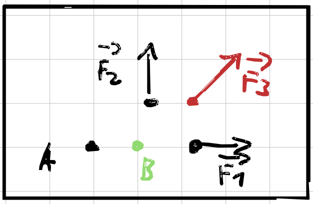
Bemerkung

Beim bearbeiten von Aufgaben lohnt es sich meistens zuerst $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$ zu überprüfen. falls $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$ gilt, ist es egal bezüglich welchem Punkt B man $\vec{M}_{B1} = \vec{M}_{B2}$ überprüft.

Warum? Weil falls es einen Punkt P gibt, wo $\vec{M}_{P1} = \vec{M}_{P2}$ gilt, gibt uns die Momenttransformationsformel für beliebige Punkte B $\vec{M}_{B1} = \vec{M}_{P1} + \vec{r}_{PB} \times \vec{R}_1$
Da $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$, $\vec{M}_{P1} = \vec{M}_{P2}$ schon vorrausgesetzt ist, gilt $\vec{M}_{B1} = \vec{M}_{B2}$

Falls also $\vec{M}_{P1} = \vec{M}_{P2}$ für einen Punkt P gilt, dann gilt $\vec{M}_{B1} = \vec{M}_{B2}$ für alle anderen Punkte B auch.
Analog falls $\vec{M}_{P1} \neq \vec{M}_{P2}$ gilt $\forall B \neq P$ auch $\vec{M}_{B1} \neq \vec{M}_{B2}$

Beispiel



Wir erkennen $\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{F_3}$
um statische äquivalenz zu überprüfen, müssen die Momente noch gleich sein.

$\vec{M}_A$ von den Kräftegruppen zu berechnen wäre mit etwas Aufwand verbunden. Statt dessen sehen wir, dass am Punkt B das Moment beider Kräftegruppen null ist, weil die Wirkungslinien durch B gehen! Daher sind sie statisch äquivalent.

Charakterisierung von Kräftegruppen

Mithilfe von $\vec{R}$ und $\vec{M}_B$ können wir Aussagen über Kräftegruppen treffen.

Fall 1. Gleichgewicht $\iff \vec{R}=\vec{M}_B=0$

Newtons erstes Gesetz $\Rightarrow$ der Bewegungszustand verändert sich nicht.

Fall 2. $\vec{R}\neq 0$, $\vec{M}_B=0$

Es gehen alle Wirkungslinien durch den Punkt B. (natürlich nur von den relevanten Kräften, denn man kann immer $\overleftarrow{F}\ \vec{F}$ dazuaddieren, was aber „irrelevant" ist, da es eine innere Kraft wäre)
Die Kräftegruppe lässt sich für diesen Punkt auf eine Einzelkraft reduzieren.

Fall 3. $\vec{R}=0$, $\vec{M}_B\neq 0$

Hier handelt es sich um ein „reines" Moment. Dieses Moment lässt sich durch ein Kräftepaar erzeugen. Bsp.

Es gilt $\vec{M}_B=\vec{r}\times\vec{F}\quad\forall B$

die Momenttransformationsformel gibt uns

$\vec{M}_P=\vec{M}_B+\underbrace{\vec{r}_{PB}\times\vec{R}}_{0}=\vec{M}_P\quad\forall P$, da $\vec{R}=0$ gilt, daher ist das Moment hier unabhängig vom Punkt B.
Es ist in jedem Punkt gleich

Def Wir bezeichnen $\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$ als die Dyname

Analog zur Kinematik charakterisiert die Dyname jede Kräftegruppe in dem Sinne, dass man mit der Dyname das Moment bezüglich jeden beliebigen Punktes berechnen kann

Analog definieren wir die Invarianten der Dyname

Def $\vec{I}_1 = \vec{R}$, $I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_B$

Aufgabenranking von Serie 5

4, 5, 2, 1, 3