Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 1 -

Dr. Paolo Tiso

23. September 2025

1. [1] Ein materieller Punkt P hat die Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{r}_P(t) = \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4}\cos \pi t\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{6L}{5} + \frac{L}{4}\sin \pi t\right)\mathbf{e}_y.$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_P$ des Punktes P als Funktion der Zeit.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_P des Punktes P als Funktion der Zeit.
3. Welche Bahn beschreibt der Punkt P ?

Lösung:

1. Die Geschwindikeit des materiellen Punktes P ist durch die zeitliche Ableitung des Ortsvektor $\mathbf{r}_P(t)$ gegeben als

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y \\ &= -\frac{\pi L}{4}\sin(\pi t)\mathbf{e}_x + \frac{\pi L}{4}\cos(\pi t)\mathbf{e}_y \\ &= \frac{\pi L}{4}(-\sin(\pi t)\mathbf{e}_x + \cos(\pi t)\mathbf{e}_y).\end{aligned} \tag{1}$$

2. Wir erhalten die Schnelligkeit des Punktes P aus dem Betrag der Geschwindigkeit als

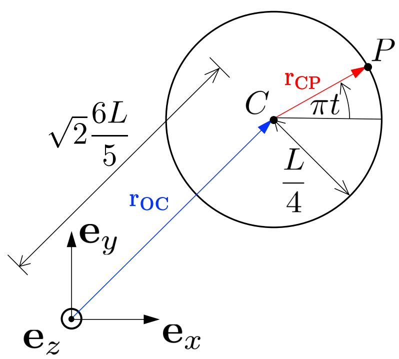
$$\begin{aligned}v_P = |\mathbf{v}_p| &= \sqrt{\left(-\frac{\pi L}{4}\sin(\pi t)\right)^2 + \left(\frac{\pi L}{4}\cos(\pi t)\right)^2} \\ &= \frac{\pi L}{4}\sqrt{\sin(\pi t)^2 + \cos(\pi t)^2} = \frac{\pi L}{4}.\end{aligned} \tag{2}$$

Aus diesem Ergebnis lässt sich erkennen, dass die Schnelligkeit des Punktes **konstant** ist.

3. Die Bahnkurve kann geometrisch dargestellt werden, indem der Ausdruck $\mathbf{r}_P$ wie folgt leicht umgeformt wird:

$$\mathbf{r}_P = \frac{6L}{5}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + \frac{L}{4}(\cos(\pi t)\mathbf{e}_x + \sin(\pi t)\mathbf{e}_y) = \mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CP}(t) \tag{3}$$

Hier kann man erkennen, dass $\mathbf{r}_P$ als die Summe der Vektoren $\mathbf{r}_{OC}$ und $\mathbf{r}_{CP}$ ausgedrückt werden kann, wobei $\mathbf{r}_{OC}$ ein konstanter Vektor und $\mathbf{r}_{CP}$ ein im Kreis rotierender Vektor ist.



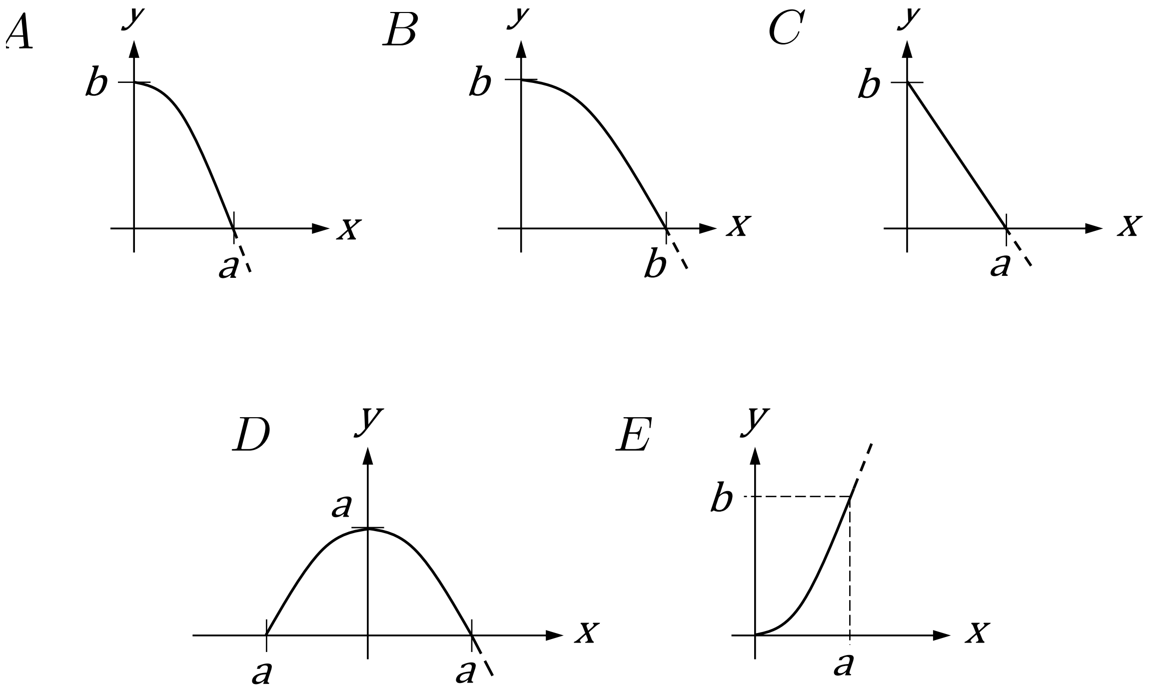
[1] Aufgabe aus der Übungsserie 1 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

Alternativ kann man bei Betrachtung der Bewegungsgleichungen von P bemerken, dass es sich um die Parameterdastellung eines Kreises handelt. Dieser Kreis hat Radius $R = L/4$ und Mittelpunkt C, mit $\mathbf{r}_{OC} = (6L/5\mathbf{e}_x + 6L/5\mathbf{e}_y)$. Der Punkt P umrundet also den Punkt C auf einer Kreisbahn.

2. Betrachten Sie die folgende Bahnkurve:

$$x(t) = at \qquad\qquad y(t) = b - \frac{a^2}{b}t^2$$

Wobei $a > 0$ und $b > 0$ gegebene Konstanten sind und die Zeit $t \geq 0$ als positiv betrachtet wird.



Welcher von der Graphen stellt die richtige Bahnkurve dar?

(a) A

► (b) B

(c) C

(d) D

(e) E

Lösung:

Die erste Gleichung kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$x = at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{a} \tag{1}$$

Beim Einsetzen in die zweite Gleichung kann y anhand von x beschrieben werden:

$$y = b - \frac{a^2}{b}t^2 \quad \Rightarrow \quad y = b - \frac{a^2}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y = b - \frac{x^2}{b} \tag{2}$$

Gleichung 2 beschreibt eine negative Parabel, daher können die Lösungen C und E ausgeschlossen werden.

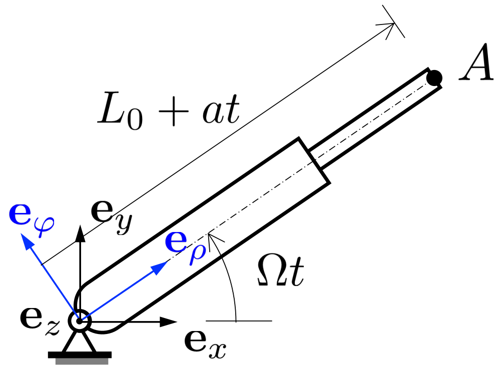
Die bleibenden Lösungen unterscheiden sich durch verschiedene Schnittstellen mit der x- und y-Axis. Diese können wie folgt berechnet werden:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = b - \frac{0}{b} = b \tag{3}$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = b - \frac{x^2}{b} \quad \Rightarrow \quad x^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{b^2} = \pm b \tag{4}$$

Aus $t \geq 0$, $a > 0$ und Gleichung 1, kann die Variable x nur positiv sein. Daraus folgt, dass die einzige Lösung mit den Schnittstellen $x = b$ und $y = b$ die Lösung (b) ist.

3. Ein Antrieb, der im Gelenk O drehbar gelagert wird, rotiert um die $\mathbf{e}_z$ Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und verlängert sich gleichzeitig gemäss dem Ausdruck $L(t) = L_0 + at$, wie in der folgenden Skizze dargestellt.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ des Punktes A in Polar- und kartesischen Koordinaten.
2. Bestimmen Sie die Schnelligkeit v_A des Punktes A.

Lösung:

1. Die Lage des Punktes A kann in Polarkoordinaten bestimmt werden als

$$\mathbf{r}_{OA} = \rho\mathbf{e}_\rho = (L_0 + at)\mathbf{e}_\rho, \tag{1}$$

wobei

$$\mathbf{e}_\rho = \cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y. \tag{2}$$

der polare Einheitsvektor in radialer Richtung ist.
Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ lässt sich dann in Polarkoordinaten bestimmen als

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_{OA} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\mathbf{e}}_\rho \\ &= a\mathbf{e}_\rho + (L_0 + at)\dot{\mathbf{e}}_\rho \\ &= a\mathbf{e}_\rho + (L_0 + at)[-\Omega\sin(\Omega t)\mathbf{e}_x + \Omega\cos(\Omega t)\mathbf{e}_y] \\ &= a\mathbf{e}_\rho + \Omega(L_0 + at)\mathbf{e}_\varphi,\end{aligned} \tag{3}$$

wobei

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin(\Omega t)\mathbf{e}_x + \cos(\Omega t)\mathbf{e}_y. \tag{4}$$

Wie in der Vorlesung gezeigt, $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$, d.h. $\mathbf{e}_\rho$ und $\mathbf{e}_\varphi$ stehen senkrecht zueinander.

Um $\mathbf{v}_A$ in kartesische Koordinaten umzurechnen, kann man einfach (2) und (4) in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= a\mathbf{e}_\rho + \Omega(L_0 + at)\mathbf{e}_\varphi \\ &= a(\cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y) + \Omega(L_0 + at)(-\sin(\Omega t)\mathbf{e}_x + \cos(\Omega t)\mathbf{e}_y) \\ &= [a\cos(\Omega t) - \Omega(L_0 + at)\sin(\Omega t)]\mathbf{e}_x + [a\sin(\Omega t) + \Omega(L_0 + at)\cos(\Omega t)]\mathbf{e}_y.\end{aligned} \tag{5}$$

Ähnlicherweise kann man den Ortsvektor $\mathbf{r}_{OA}$ in kartesischen Koordinaten ausdrücken als

$$\mathbf{r}_{OA} = (L_0 + at)[\cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y]. \tag{6}$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= a[\cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y] + (L_0 + at)[-\Omega \sin(\Omega t)\mathbf{e}_x + \Omega \cos(\Omega t)\mathbf{e}_y] \\ &= [a\cos(\Omega t) - (L_0 + at)\Omega \sin(\Omega t)]\mathbf{e}_x + [a\sin(\Omega t) + (L_0 + at)\Omega \cos(\Omega t)]\mathbf{e}_y.\end{aligned} \tag{7}$$

2. Die Schnelligkeit v_A des Punktes A wird aus dem Betrag der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_A$ erhalten:

$$\mathbf{v}_A = a\mathbf{e}_\rho + \Omega(L_0 + at)\mathbf{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad v_A = |\mathbf{v}_A| = \sqrt{a^2 + \Omega^2(L_0 + at)^2}. \tag{8}$$

Man kann zeigen, dass der gleiche Ausdruck aus (7) bestimmt werden kann.

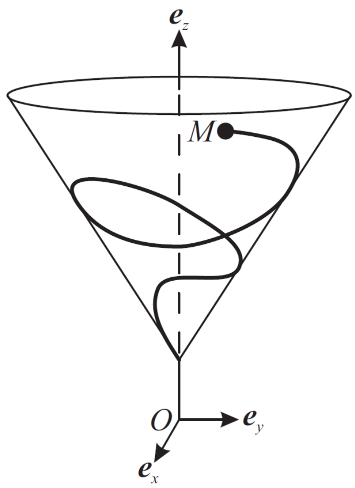
4. [2] Ein materieller Punkt M bewegt sich auf einer Kreiskegelfläche. Die Bewegung des Punktes wird in Zylinderkoordinaten durch die Gleichungen

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos \mu t)$$

$$\varphi = \sqrt{3}\mu t$$

$$z = 3 - \cos \mu t$$

gegeben (t wird in Zeiteinheiten gemessen und μ ist eine dimensionslose Konstante).



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in Zylinderkoordinaten.
2. Berechnen Sie die Schnelligkeit von M.
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von M in den kartesischen Koordinaten .

Lösung:

Die Basisvektoren der Zylinderkoordinaten ausgedrückt in kartesischen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\rho(\varphi) = \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{1}$$

Der Ortsvektor des materiellen Punktes M bezüglich des *ruhenden* Ursprungs O kann dann berechnet werden als

$$\mathbf{r}_{OM} = \mathbf{r}_{OM}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\mathbf{e}_z \text{ mit } \begin{aligned} \rho(t) &= \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \cos(\mu t)), \\ \varphi(t) &= \sqrt{3}\mu t, \\ z(t) &= 3 - \cos(\mu t). \end{aligned} \tag{2}$$

[2]Aufgabe aus der Übungsserie 1 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik», HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

1. Die Geschwindigkeit von M in Zylinderkoordinaten kann aus der zeitlichen Ableitung von $\mathbf{r}_{OM}$ berechnet werden unter Anwendung der Produkt- und Kettenregel als

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_M = \mathbf{r}_{OM} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z) = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z}\mathbf{e}_z \\
&= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}(-\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y) + \dot{z}\mathbf{e}_z = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mu\sin(\mu t)\mathbf{e}_\rho + \frac{\sqrt{3}}{3}(1-\cos(\mu t))\sqrt{3}\mu\mathbf{e}_\varphi + \mu\sin(\mu t)\mathbf{e}_z\right) \\
&= \mu\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\mu t)\mathbf{e}_\rho + (1-\cos(\mu t))\mathbf{e}_\varphi + \sin(\mu t)\mathbf{e}_z\right).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

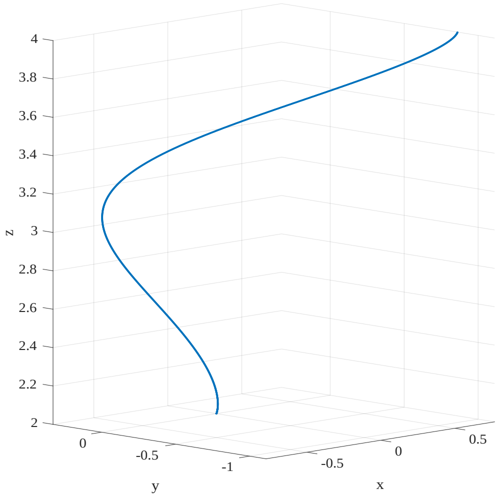
2. Die Schnelligkeit von M ist als Betrag der Geschwindigkeit aus (3) berechnet als

$$
\begin{aligned}
v_M = |\mathbf{v}_M| &= \sqrt{\mathbf{v}_M\cdot\mathbf{v}_M} \\
&= \mu\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\mu t)\right)^2 + (1-\cos(\mu t))^2 + (\sin(\mu t))^2} \\
&= \mu\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2(\mu t) + 1 - 2\cos(\mu t) + \cos^2(\mu t) + \sin^2(\mu t)} \\
&= \mu\sqrt{2 + \frac{1}{3}\sin^2(\mu t) - 2\cos(\mu t)}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

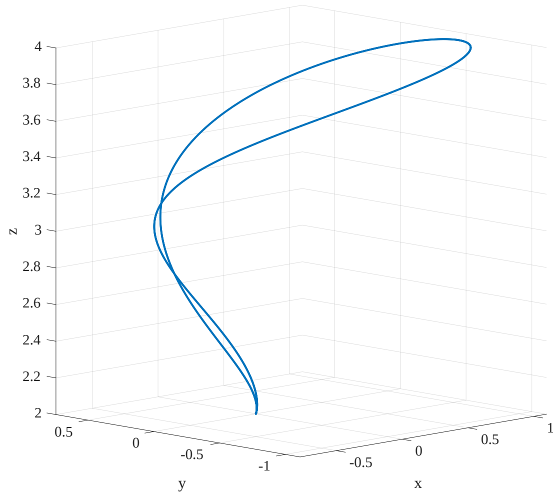
3. Ersetzen der zylindrischen Basisvektoren durch die kartesischen Basisvektoren gemäss (1) liefert die Geschwindigkeit von M in kartesischen Koordinaten

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_M = \mu\Big(&\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\mu t)(\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y) \\
&+ (1-\cos(\mu t))(-\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y) + \sin(\mu t)\mathbf{e}_z\Big) \\
= \mu\Big[&\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\mu t)\cos(\sqrt{3}\mu t) - (1-\cos(\mu t))\sin(\sqrt{3}\mu t)\Big)\mathbf{e}_x \\
&+ \Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\mu t)\sin(\sqrt{3}\mu t) + (1-\cos(\mu t))\cos(\sqrt{3}\mu t)\Big)\mathbf{e}_y \\
&+ \sin(\mu t)\mathbf{e}_z\Big].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

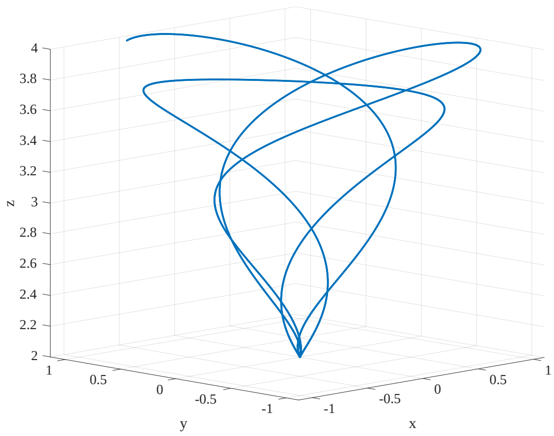
Zusatz: Im Folgenden ist die Bewegung des Punktes M für $\mu = \pi$ für unterschiedliche Zeitspannen t gegeben.



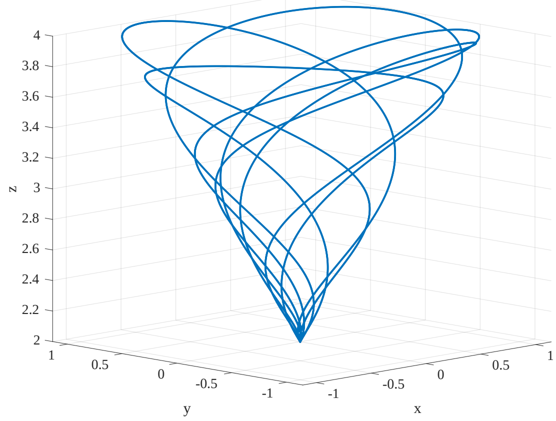
$0 < t < 1$



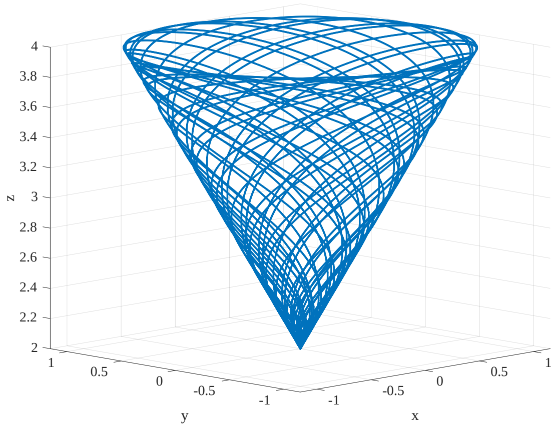
$0 < t < 2$



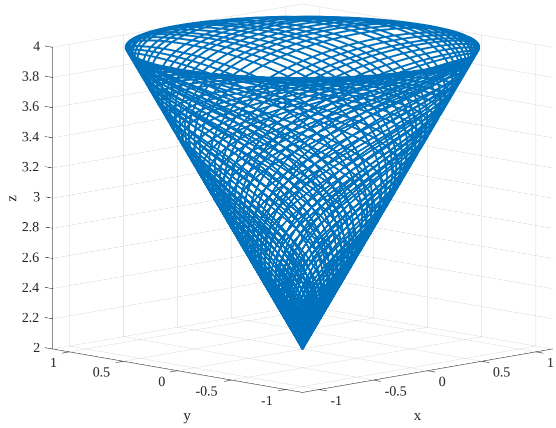
$0 < t < 5$



$0 < t < 10$



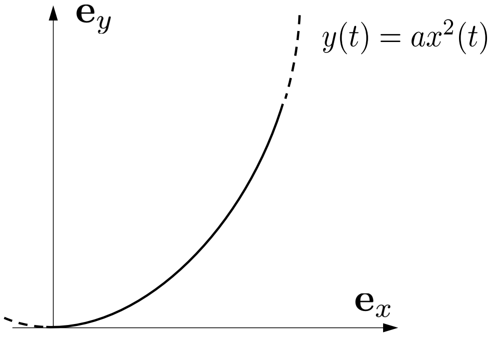
$0 < t < 50$



$0 < t < 100$

5. Gegeben sei die Bahnkurve $y(t) = ax^2(t)$. Zur Zeit $t_1 = 1$ $[s]$ sind $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ gegeben als

$$x(t_1) = 1; \qquad \dot{x}(t_1) = 1.$$



Was ist die Schnelligkeit $v(t_1)$?

(a) $v(t_1) = \sqrt{2 + 4a^2}$

(b) $v(t_1) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}a^2}$

(c) $v(t_1) = -\sqrt{1 + 4a^2}$

(d) $v(t_1) = \sqrt{2 + \frac{1}{2}a^2}$

► (e) $v(t_1) = \sqrt{1 + 4a^2}$

Lösung:

Beim Ableiten der Bahnkurve nach der Zeit t ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ax^2(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2(t))\dot{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

also

$$\dot{y}(t) = 2ax(t)\dot{x}(t), \tag{2}$$

wobei man die Kettenregel beachten muss, da $x = x(t)$ eine Funktion der Zeit ist.

Wenn $x(t_1)$ und $\dot{x}(t_1)$ in (2) eingesetzt werden, erhält man

$$\dot{y}(t_1) = 2ax(t_1)\dot{x}(t_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t_1) = 2a \tag{3}$$

Laut Definition ist die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten zur Zeit t_1

$$\mathbf{v}(t_1) = \dot{x}(t_1)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t_1)\mathbf{e}_y = 1\mathbf{e}_x + 2a\mathbf{e}_y. \tag{4}$$

Die Schnelligkeit $v(t_1)$ wird aus dem Betrag der Geschwindigkeit zur Zeit t_1 erhalten als

$$v(t_1) = |\mathbf{v}(t_1)| = \sqrt{1 + 4a^2}. \tag{5}$$