Heute

- Starrkörper
- Satz der Projizierten Geschwindigkeiten
- Klassifizierung der Bewegungsarten
- Satz von Momentanzentrum
- Freiheitsgrade

Starrkörper

Intuitiv ist alles was "hart" ist und als ganzes zusammen bleibt ein Starrkörper

Mathematisch ausgedrückt:

Def Starrkörper K

Seien P, Q punkte im Starrkörper K, dann gilt:

$\forall$ P, Q $\in$ K $|\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_P(t)| = \text{const.} \quad \forall t$

wobei $\vec{r}_P$ und $\vec{r}_Q$ die entsprechenden Ortsvektoren sind.

Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

Für jeden Starrkörper K gilt:

$(\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \cdot (\vec{v}_Q - \vec{v}_P) = 0$

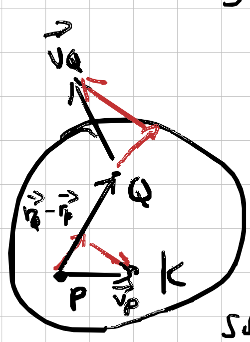
wobei Q und P punkte im Starrkörper K sind, und $\vec{r}_P, \vec{r}_Q, \vec{v}_P$ und $\vec{v}_Q$ die entsprechenden Orts/Geschwindigkeits-vektoren sind.

Was genau sagt uns der Satz?

Man kann $\vec{v}_Q$ und $\vec{v}_P$ zerlegen in eine senkrechte und parallel Komponente bezüglich $\vec{r}_Q - \vec{r}_P$.

$\vec{v}_Q = \vec{v}_{Qs} + \vec{v}_{Qp}$, $\vec{v}_P = \vec{v}_{Ps} + \vec{v}_{Pp}$

Es gilt: $(\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \cdot (\vec{v}_Q - \vec{v}_P)$



$$= (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \cdot (\vec{v}_{Qs} - \vec{v}_{Ps} + \vec{v}_{Qp} - \vec{v}_{Pp})$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \cdot (\vec{v}_{Qs} - \vec{v}_{Ps})}_{} + (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)(\vec{v}_{Qp} - \vec{v}_{Pp})$$

$$= 0 + (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)(\vec{v}_{Qp} - \vec{v}_{Pp})$$

$$\overset{\text{SdpG}}{=} 0$$

Also muss $\vec{v}_{Qp} = \vec{v}_{Pp}$ gelten

Ebene Bewegungsarten

Falls alle Geschwindigkeiten parallel zu einer Ebene sind bewegt sich ein Starrkörper in 2 Dimensionen und es gibt nur noch 2 Bewegungsarten:

1. Translation $\vec{v_P} = \vec{v} \quad \forall\, P \in K$
2. Rotation $\exists\, P \in K : \vec{v_P} = 0$
   Alle P für die $\vec{v_P} = 0$ gilt liegen auf einer Geraden

In 3D ist die Gerade die Rotationsachse
In 2D gibt es nur 1 Punkt P wo $\vec{v_P} = 0$ gilt.
Das ist das Momentanzentrum.

Satz von Momentanzentrum

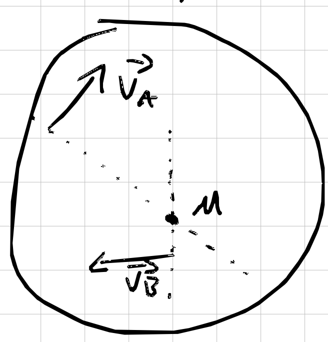
Im Falle einer Rotation gibt es ein Momentanzentrum M und alle Geschwindigkeiten $\vec{v_P}$ sind senkrecht zur Verbindungsgerade $\vec{r}_{MP} = \vec{r}_P - \vec{r}_M$

Außerdem gilt: $\vec{v_P} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MP}$ (Vektorprodukt)

$\vec{\omega}$ ist der Winkelgeschwindigkeitsvektor und steht senkrecht auf der Ebene zu der alle Geschwindigkeiten parallel sind.

Wie findet man das Momentanzentrum?

Man schaut sich 2 Geschwindigkeiten an und bestimmt den Punkt wo sich die Senkrechten schneiden



Es gilt außerdem:

$$|\vec{v_P}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}_{MP}|$$

Freiheitsgrade

Intuitiv gibt der Freiheitsgrad an, wie viele Koordinaten / Variablen man braucht um ein System eindeutig zu bestimmen

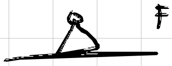
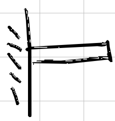
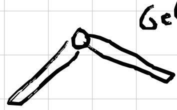
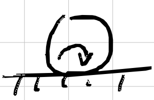
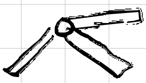
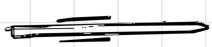
Def Freiheitsgrad f

$$f = n - b$$

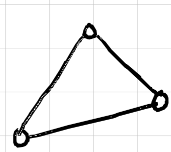
n: Freiheitsgrad ungebundenes System
b: Anzahl unabhängiger Bindungen

Wir betrachten meistens nur den 2D Fall

ein Punkt hat $f = 2$
ein Stab / Starrkörper hat $f = 3$

Einschränkung	b
 Auflager	1
 Festlager	2
 Einspannung	3
 Gelenk	2
 Rollen ohne gleiten	2
 Gelenk mit n Starrkörper	$(n-1) \cdot 2$
 Slider	2

(Verbindung zweier Starrkörper erlaubt nur noch rotation für einen der Starrkörper)



jedes Dreieck kann als Starrkörper betrachtet werden