Disclaimer: Diese Zusammenfassung wurde im Rahmen der D-ITET Technische Mechanik von Prof. Dual im HS20 hergestellt. Ich kann weder für Vollständigkeit noch für Richtigkeit dieses Dokuments garantieren, bin jedoch froh über Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen:

ldewindt@ethz.ch

Zürich, der 23.10.2021 Lina De Windt

Grundlagen:

Freiheitsgrad: $\boxed{f = n - b}$

n: Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper

b: # der lin. unabhängigen Bindungsgleichungen

Geschwindigkeit ($\underline{v}$) / Schnelligkeit (v):

$\boxed{\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)}$ $\boxed{v = |\underline{v}|}$

in Zylinderkoordinaten:

$\boxed{\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z$

($\underline{e}_\rho$ hängt von φ ab)

Kartesisch ↔ Zylinderkoordinaten:

$$\begin{cases} \underline{e}_\rho = \cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y \\ \underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\underline{e}_x + \cos(\varphi)\underline{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{e}_x = \cos(\varphi)\underline{e}_\rho - \sin(\varphi)\underline{e}_\varphi \\ \underline{e}_y = \sin(\varphi)\underline{e}_\rho + \cos(\varphi)\underline{e}_\varphi \end{cases}$$

Starre Körper (SK)

SdpG: $\boxed{v_P' = v_Q'}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_P \cdot \underline{r}_{PQ} = \underline{v}_Q \cdot \underline{r}_{PQ}}$

$\Rightarrow \boxed{(\underline{v}_P - \underline{v}_Q)\cdot\underline{r}_{PQ} = (\underline{r}_P - \underline{r}_Q)\cdot(\underline{v}_P - \underline{v}_Q) = \underline{0}}$

⚠ alle SKs erfüllen SdpG.

Translation: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}}$; $\forall P$ ($\underline{v}_P = \underline{v}_Q$)

Rotation: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_Q = \underline{0}}$

↳ PQ ist Rotationsachse

Ebene Bewegung:

→ alle $\underline{v}$ parallel zu geg. Ebene ($v_z = 0$)

→ alle Pkte auf Normalen zur Ebene besitzen gleiche $\underline{v}$.

Satz vom Momentanzentrum:

$\boxed{\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{r}_P}$; $\boxed{v_P = \omega \cdot r_P}$ wenn $\underline{\omega} \perp \underline{r}$ = immer in 2D.

$\underline{\omega}$ = Rotationsgeschwindigkeit

$\underline{r}_P$ = Verbindungsgerade vom MZ zu P.

($\underline{v}$ ist immer $\perp$ zu $\underline{r}$ und $\underline{\omega}$.)

MZ P

2D: $\boxed{\underline{v}_P = \begin{pmatrix} y\omega \\ x\omega \end{pmatrix}}$ ← Vorzeichen aufpassen.

Polbahn = Bewegung des MZ.

Räumliche Bewegungen:

Kreiselung: momentan eine Rotation (ein Pkt. bleibt fix).

SK-Formel: $\boxed{\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{r}_{BA}}$ ABBA-Formel

Kinemate: $\boxed{\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}}$

$\underline{v}_B$: Translationsgeschwindigkeit (bezüglich Pkt. auf SK)

$\underline{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (unabhängig vom Bezugssystem). ← bzw. unabhängig vom Pkt. auf SK.

Invarianten: = überall gleich im SK

vektorielle Invariante: $\boxed{I_1 = \underline{\omega}}$

skalare Invariante: $\boxed{I_2 = \underline{\omega} \cdot \underline{v}_B}$

→ Translation: $\underline{I}_1 = \underline{\omega} = \underline{0}$

→ Rotation: $\underline{I}_1 = \underline{\omega} \neq \underline{0}$; $I_2 = 0$

→ Schraubung: $I_2 \neq 0$

Zentralachse = Achse in Richtung von $\underline{\omega}$.

Kräfte: Resultierende Kraft $\underline{R}$:

$\boxed{\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i}$ (unabhängig vom Bezugspunkt).

Moment & Leistung:

Moment = "Rotation, die von Kräften verursacht wird".

$\boxed{\underline{M}_O(P) = \underline{r}_{OP} \times \underline{F}_P}$ (M von P bezüglich O) ← OOPP-Formel

$\underline{r}$: OP

P: Angriffspunkt der Kraft

O: Bezugspunkt

⚠ Momente sind vom Bezugssystem und vom Bezugspunkt abhängig.

$\boxed{M_O = \pm dF}$ d: Abstand von O zu P wenn d $\perp$ Wirkungslinie von F → fast nur in 2D brauchbar. ← F verschieben!

$\boxed{\underline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i}$ $\left(= \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_O(P_i)\right)$ $\boxed{+ \underline{M}_{\text{Körper}}}$

↳ res. Moment bezüglich Pkt O.

$\boxed{\underline{M}_P = \underline{M}_O + \underline{r}_{PO} \times \underline{R}}$ Transformationsregel

$\underline{R}$: Resultierende Kraft

Leistung einer Kraft: $\boxed{P = \underline{F} \cdot \underline{v}_Q}$ ← $\boxed{\underline{F} \cdot \underline{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha}$

Q: Angriffspunkt der Kraft

Leistung eines Moments: $\boxed{P = \underline{M}_O \cdot \underline{\omega}}$ ← im Falle einer Reinen Rotation

Gesamtleistung: $\boxed{P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \underline{\omega}_i}$

falls Kinemate $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$ bekannt: $= \sum_i P_i$

$\boxed{P_{tot} = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}}$

Äquivalenz & Reduktion v. Kräftegruppen:

statische Äquivalenz: $\boxed{P(\{\underline{F}_i\}) = P(\{\underline{G}_i\})}$ für $\forall$ SK-Bewegungen

2 Kräftegruppen sind statisch äquivalent wenn:

- Die Resultierende & das resultierende Moment gleich sind
- Sie vektoriell gleich sind & ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Dyname einer Kräftegruppe: $\boxed{\{\underline{R}, \underline{M}_O\}}$ bezüglich Pkt. O

$\underline{R}$: Resultierende Kraft, unabhängig vom Bezugspunkt

$\underline{M}_O$: Moment bzg. des Pkt O (abhängig vom Bezugspunkt, ausser in Statikaufgaben.)

Invarianten: (überall gleich im SK)

vektorielle Invariante: $\boxed{\underline{I}_1 = \underline{R}}$

skalare Invariante: $\boxed{I_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_O}$

→ Nullsystem: $\underline{R} = \underline{0}$; $\underline{M}_O = \underline{0}$ ($\underline{I}_1 = 0$, $I_2 = 0$)

→ Kräftepaar / Moment: $\underline{R} = \underline{0}$; $\underline{M}_O \neq \underline{0}$ ($I_2 = 0$)

→ Einzelkraft: $\underline{R} \neq \underline{0}$; $I_2 = 0$

→ Schraube: $I_2 \neq 0$

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage muss gelten:

$\boxed{\underline{R} = \underline{0} ;\ \underline{M}_O = \underline{0}}$ ⊛

$\underline{R} = \underline{0}$: Komponentenbedingungen

$\underline{M}_O = \underline{0}$: Momentenbedingungen

↳ Bezugspunkt egal!

Zusatzbedingungen: Reibung, Seil, Kippen, ...

⊛ Bedingung ist für bewegliche / deformierbare Körper notwendig, für SK hinreichend

GGW:

$$\begin{cases} KB(x) = 0 = \dots \\ KB(y) = 0 = \dots \\ KB(z) = 0 = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} MB(x) = 0 = \dots \\ MB(y) = 0 = \dots \\ MB(z) = 0 = \dots \end{cases}$$

Blau = nur in 3D. ⊛ Moment ist nicht mehr bezüglich Pkt. Es ist für $\forall$ Pkte im SK gleich, da $\underline{R} = \underline{0}$ gilt.

→ geeigneter Pkt. aussuchen für Berechnung.

n = # lin. unabhängige GGW-Gleichungen m = # Unbekannte

- **statisch bestimmt**: $\boxed{m = n}$

→ gleich viele Unbekannte wie lin. unabhängige Gl.en

- **statisch unbestimmt**: $\boxed{m > n}$

→ mehr Unbekannte als lin. unabhängige Gl.en

→ Grad der Unbestimmtheit: $m - n$

→ System klemmt ("zu viele Bindungen")

→ Lagerreaktionen können nicht (alle) bestimmt werden.

gleichzeitig möglich. z.B. F

- **kinematisch unbestimmt**:

→ mehr lin. unabhängige Gl.en als Unbekannte

→ zulässige momentane Bewegungen sind möglich

→ $\not\Leftrightarrow$ statisch bestimmt

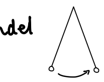
→ triviale Gl.en = Indiz einer kin. Unbestimmtheit.

→ Momentbedingungen nicht aufstellbar ...not 100% sure.

Aufpassen:

kinematisch unbestimmt $\not\Leftrightarrow$ statisch bestimmt

$\not\Leftrightarrow$ statisch unbestimmt (im Allgemeinen)

z.B. Pendel 

Ein System ist genau dann statisch bestimmt, wenn es als Ganzes und in jedem Teil weder statisch unbestimmt noch kinematisch unbestimmt ist.

In diesem Fall kann man alle inneren und äusseren (Lager-) Kräfte aus den GGW-Gleichungen ermitteln.

(GGW = Gleichgewicht.)

Lina De Windt - ldewindt@ethz.ch

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

System befindet sich in Ruhe wenn:

$\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = 0}$, $\forall \{\underline{v}\}$

$\{\tilde{\underline{v}}_0, \tilde{\underline{\omega}}\}$: virtueller Bewegungszustand

PdvL: $\tilde{\mathcal{P}} = \sum \tilde{\underline{v}}_i \cdot \underline{F}_i = 0$

$$\boxed{\tilde{P}_{tot} = \sum_i \underline{F}_i \cdot \tilde{\underline{v}}_i + \sum_i \underline{M}_i \cdot \tilde{\underline{\omega}}_i = 0}$$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \underline{R}\cdot\tilde{\underline{v}}_0 + \underline{M}_0 \cdot \tilde{\underline{\omega}} = 0} \quad \forall \{\tilde{\underline{v}}_0, \tilde{\underline{\omega}}\}$$

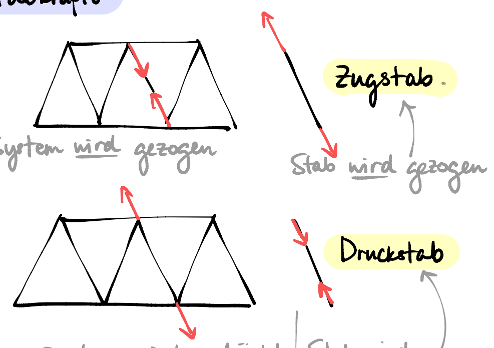
Kräfte/Momente dort einzeichnen, wo Bewegung/Drehung durch Lager/System "gestoppt" wird.

Bei PdvL: egal, in welche Richtungen mr die Kräfte einzeichnen (an Prüfung wird Skizze berücksichtigt). einfach konsistent bleiben!

Auch egal, in Bezug zu welchem Pkt. im EinzelSK wir das Moment berechnen. (Kommt schlussendlich sowieso auf dasselbe hinaus).

→ Ein geeigneter, einfach & gut positionierter Pkt auswählen!

Stabkräfte:



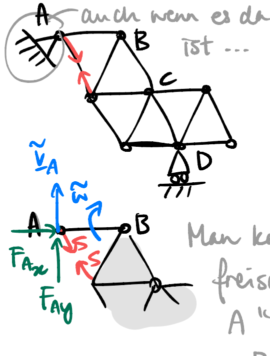
⊛ Man zeichnet Kräfte ein, welche auf das System wirken. ("wird" benutzen) gezogen/gedrückt

PdvL: (zulässige/unzulässige Bewegungen)

virtueller Zustand kann beliebig gewählt werden. D.h. Zustand so wählen, dass es am einfachsten ist für die Berechnung. (Lager müssen nicht unbedingt respektiert werden).

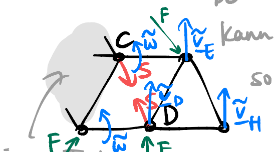
↪ D.h. z.B.

auch wenn es da eig. festgelagert ist ...



Man kann System so freischneiden und A "beweglich" machen und z.B B als MZ nehmen.

Oder wenn man S_{PC} bestimmen möchte...



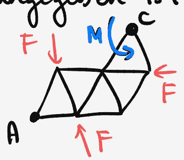
kann man System z.B. so freischneiden

Diesen Teil "unbeweglich" machen.

Statikaufgaben:

Moment ist überall gleich auf (Einzel-)SK. (wegen $\underline{R}=\underline{0}$). ($\underline{M}_P = \underline{M}_0 + \underbrace{\underline{r}_{P0}\times\underline{R}}_{0}$). D.h. ein Pkt. nehmen, bei der die Momentberechnung am einfachsten geht.

Auch: wenn ein Moment schon angegeben ist, z.B so:



& man berechnet Moment für Pkt. A

→ angegebenes M darf man einfach so übernehmen. D.h

$M_A = \sum_i r_i \times F_i + M$

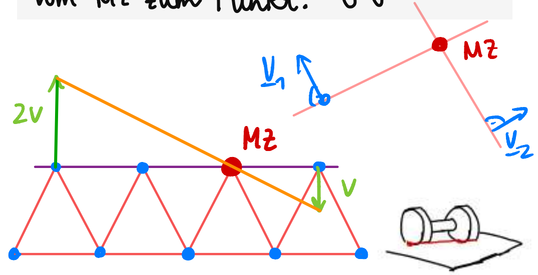
M_C ist ja auch $\sum_i r_i \times F_i + M$ ⊖

PdvL, Vorgehensweise:

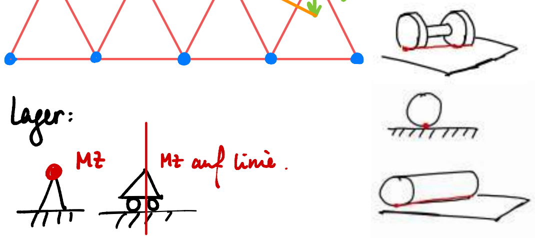
1. $\tilde\omega$ einführen & MZ der SK bestimmen (SdpG)
2. Relevante $\tilde v$ berechnen (SvM)
3. $\tilde{\mathcal P} = \sum_{i=1}^N \underline F_i \tilde{\underline v}_i + \underline{\tilde M}\cdot\tilde{\underline\omega} \stackrel{!}{=} 0$ ⟺ Ruhelage
4. Stabkraft berechnen → Zug oder Druck?

Momentanzentrum finden:

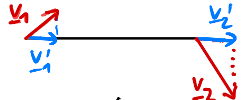
⇒ Mittels Normalen von $\underline{v}$ von Pkten, die zu mehreren SK's gehören, die MZ's der weiteren SK's finden (durch Konstruktion) ↳ $\underline{v}$ ist immer ⊥ zur Verbindungsgeraden vom MZ zum Punkt.



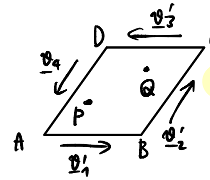
Lager:



SK-Bedingung: $\boxed{v_1' = v_2'}$ & $\boxed{\overline{PQ} = \text{konst.}}$



$v_1' = v_2'$



$v_1' + v_3' = v_2' + v_4'$

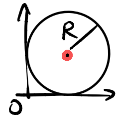
$\Rightarrow v_1' = v_3'$

Dipolmoment: $\boxed{N = \sum_{i=1}^N F_i \underline{r}_i}$

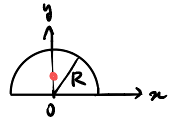
$\underline M = \underline N \times \underline e$ ($\underline e$ von $\underline R$)

N/Moment unabhängig vom Bezugspkt.

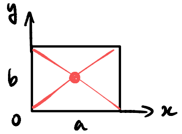
Schwerpunktberechnung:



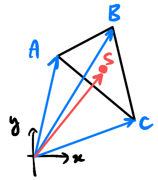
$\boxed{\underline{r}_{0S} = \begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix}}$ $A = \pi r^2$



$\boxed{\underline{r}_{0S} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{4R}{3\pi}\end{pmatrix}}$ $A = \frac{1}{2}\pi r^2$



$\boxed{\underline{r}_{0S} = \begin{pmatrix}a/2\\ b/2\end{pmatrix}}$ $A = a\cdot b$



$\boxed{\underline{r}_{0S} = \frac{\underline a + \underline b + \underline c}{3}}$ $A = \frac{1}{2} AC \cdot h_B$

Wenn S vom Gesamtkörper berechnen:

↗ da hom. Massenverteilung

$$\boxed{\underline r_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i \underline r_i \stackrel{\circledast}{\Leftrightarrow} \underline r_A = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i \vec r_i}$$

aufschreiben!

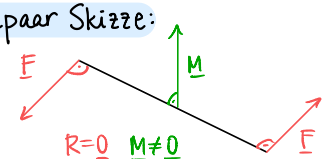
$\boxed{x_s = \frac{\sum_i x_i\cdot A_i}{\sum_i A_i}}$ $\boxed{y_s = \frac{\sum_i y_i\cdot A_i}{\sum_i A_i}}$

Kräftemittelpunkt C: (o — A $\underline r_A = \underline r_{0A}$.)

$\boxed{\underline r_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^N F_i \underline r_i}$ mit $R = \sum_{i=1}^N F_i$

auch Schwerpunkt/Massenmittelpunkt

Kräftepaar Skizze:



$\underline{R} = \underline{0}$ $\underline{M} \neq \underline{0}$

Moment = Drehwirkung einer Kraft auf einen Körper.

⊛ eine Kraft, die ⊥ auf $\underline{v}$ steht, ist leistungslos. P=0. $P = \underline{v}\cdot\underline{F} = 0$

Reibung: Haften/Gleiten

⇒ Kräfte.

Haftreibungsgesetz: $|\vec F| \le \mu_0 |\vec N|$ (Ruhe)

μ_0: Haftreibungskoeffizient; ($v_B = 0$)

Gleichung erfüllt: Haftet.

→ liefert erst nachträglich ein Kriterium dafür, dass Ruhe wirklich möglich ist.

Gleitreibungsgesetz: $|\vec F| = \mu_1 |\vec N|$ (Bewegung)

μ_1: Gleitreibungskoeffizient; ($v_B \neq 0$)

Vektoriell: $\vec F = -\mu_1 |\vec N| \frac{\vec v_B}{|\vec v_B|}$

$\vec v_B = \vec v$ des Berührungspunkts

liefert zusätzliche Gleichungen zum bestimmen der Unbekannten.

Rollwiderstandsgesetz

→ rollen / nicht rollen

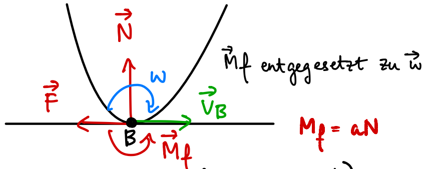
⇒ Momente

im Fall der Ruhe: $|\vec M_f| \le \mu_2 |\vec N|$

im Fall der Bewegung: $|\vec M_f| = \mu_2 |\vec N|$

μ_2: Rollwiderstandslänge

Vektoriell: $\vec M_f = -\mu_2 |\vec N| \frac{\vec \omega}{|\vec \omega|}$



$M_f = aN$

ideal rau: $\mu_0 = \infty$; $\mu_2 = 0$ (z.B. Zahnrad)

$$|M_f| = |aN| = |a||N| \le \underbrace{a_{max}}_{=\mu_2}|N|$$

Für Fall der Bewegung: $|a||N| = a_{max}|N|$

Lagerreibung:

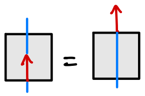
im Fall der Ruhe: $|M_f| \le \mu_0 r_L \sqrt{A^2+B^2}$

im Fall der Bewegung: $M_f = \pm \mu_1 r_L \sqrt{A^2+B^2}$

A, B: Zapfenkräfte

r_L: Lagerradius

Kräfte können entlang der Wirkungslinie verschoben werden.



Freiheitsgrad des Gesamtsystems:

unabhängiger Bewegungen, die das Gesamtsystem machen kann. (= geringste # an Koordinaten, die nötig ist, um das Gesamtsystem zu beschreiben.)

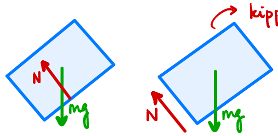
→ Federn, die am System angebracht sind, verringern den Freiheitsgrad nicht.

Nicht kippen:

$M_A = e \cdot A \Leftrightarrow e = \frac{M_A}{A} = ⊛$ $(e = \frac{a}{2})$

$|⊛| \le \frac{a}{2} \Rightarrow a \ge ⊛ \cdot 2$ $e \in [-1,1]\frac{a}{2}$

Wenn a schon bekannt, und e besteht aus einer nach bestimmten Kräften aufgelöste Gleichung, mit diesem Ansatz rechnen.



kippt!! → N darf sich nicht ausserhalb des Körpers befinden

Dynamik:

Beschleunigung: $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}}$

$\underline{a} = \ddot x \underline{e}_x + \ddot y \underline{e}_y + \ddot z \underline{e}_z$

in Zylinderkoordinaten:

$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\underline{e}_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\underline{e}_\varphi + \ddot z \underline{e}_z$

in ebenen Polarkoordinaten:

$\underline{v} = \dot r \underline{e}_r + r\dot\varphi \underline{e}_\varphi$

$\underline{a} = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\underline{e}_r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\underline{e}_\varphi$ r = Radius (=ρ)

Kreisbewegung: (r = konstant) $\dot r = \ddot r = 0$

$\underline{v} = r\dot\varphi \underline{e}_\varphi$

$\underline{a} = -r\dot\varphi^2 \underline{e}_r + r\ddot\varphi \underline{e}_\varphi$

$r\dot\varphi^2 = \frac{v^2}{r}$: radial nach innen gerichtet

$r\ddot\varphi$: tangentiale Komponente

Trägheitskräfte, PdvL:

↳ fiktiv. verletzen das Reaktionsprinzip.

Trägheitskraftdichte: $\underline{f}^{(t)} = -\rho \underline{a}$

ρ: spezifische Masse, Dichte $\rho = \rho(\vec r)$

Trägheitskraft: $d\vec F = -\rho \vec a \, dV = -\vec a \, dm$

PdvL: $\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = 0, \ \forall \{\tilde v\}$

Inertialsystem: wenn v = konst. (kein a)

↳ wie Statikaufgabe behandeln.

↳ PdvL gilt.

Masselose Systeme: Methoden der Statik ✓

kein $\tilde{\mathcal{P}}^{(t)}$.

Newton'sches Bewegungsgesetz:

$m\vec a = \vec R$

Komponentenweise:

$\sum F_x = m\ddot x$ $\sum F_y = m\ddot y$

→ ergeben DGL.

↳ Anfangsbedingungen nötig!

↳ oft: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot x(0) = 0 \end{cases}$ oder $\dot x(0) = v_0$

→ falls mehrere Körper → für jeden Körper aufstellen!

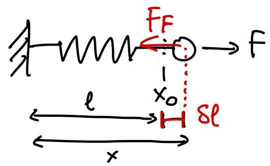
Feder:

Federgesetz: $|F| = c|\delta\ell|$

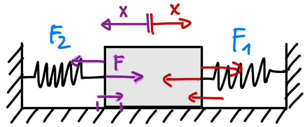
$\delta\ell$: Verlängerungsstrecke ($\delta\ell = x - l$)

c: Federkonstante

$F_F = \pm cx$



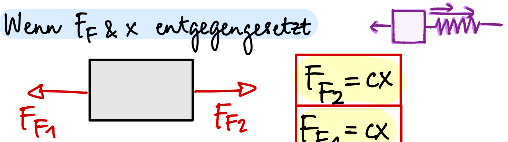
• Wenn F_F & x in gleiche Richtung:



$F_{F_1} = -cx$

$F_{F_2} = -cx$

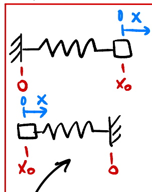
• Wenn F_F & x entgegengesetzt



$F_{F_2} = cx$

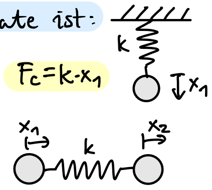
$F_{F_1} = cx$

• aufpassen, wo die Koordinate ist:



$F_F = c\cdot(x+x_0)$

$F_F = -c(x-x_0)$



$F_c = k\cdot x_1$

$F_c = k\cdot(x_2 - x_1)$

* Jede beidseitig belastete Feder erhöht den Freiheitsgrad um 1.

hier ist die entspannte Länge der Feder 0.

Wichtig wo die Koordinate ist, nicht die Box.

ldewindt@ethz.ch

Impuls:

Impulssatz: $\boxed{\dot{\vec p} = \vec R} = \frac{d}{dt}(m\vec v)$

$\vec p$ .. Impuls

Impuls: $\boxed{p = m\cdot v}$

⊛ Erhaltungssatz: wenn $\boxed{\dot p = 0}$:

⇒ Impuls bleibt erhalten

$E_{kin} = \boxed{\frac{1}{2} m v^2}$ $\vec R = m\vec a$

Anwendung: gleich wie Newton'sches Bewegungsgesetz.

Massenmittelpunktsatz: $\boxed{\vec R = m\vec a_c}$ $= m\ddot x$

$\vec a_c$ .. $\vec a$ von MMPkt. C

m .. Masse

→ beide unabhängig vom Bezugspunkt.

Kinetik ebener Bewegungen

Drallsatz: $\boxed{\dot{\vec L}_0 = \vec M_0 = I_c\ddot\varphi = I_c\dot\omega}$

$\vec L_0$ .. Drall   bezüglich Inertialpkt. 0

Drallsatz ≈ Newton für Rotation

aus $M_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{a}\, dm$ $L_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{v}\, dm$

relativer Drallsatz:

Drall bezüglich C: $\boxed{\dot{\vec L}_c = \vec M_c}$

C = Massenmittelpkt.

Drallsatz, Impulssatz & Massenmittelpunktsatz gelten ganz allgemein (also nicht nur für SKs).

Drehimpuls: (Drallsatz) $I_0\omega$ ‖

$\boxed{L_0 = I_0\omega = I_0\dot\varphi} \to \boxed{\dot L_0 = I_0\ddot\varphi = M_0}$

$\boxed{L_c = I_c\omega = I_c\dot\varphi} \to \boxed{\dot L_c = I_c\ddot\varphi = M_c}$

I_0, I_c = Massenträgheitsmoment

⊛ Drall = wie ω.

$\vec L_0$ ⊥ aus Ebene heraus

Massenträgheitsmoment

$I_0 = \iint_B r^2\, dm$ 0 = Fixpunkt, $r = r_{0dm}$

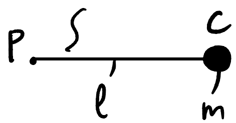
$I_c = \iint_B r'^2\, dm$ C = Schwerpunkt, $r' = r_{cdm}$

Satz von Steiner (Bezugspktwechsel):

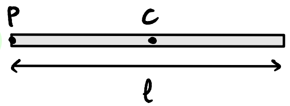
$I_p = I_c + ma^2$ ⇝ $\vec L_0 = \vec r_c \times \vec p + \vec L_c$ ($\vec p = m\vec v_c$)

Wichtige Massenträgheitsmomente:

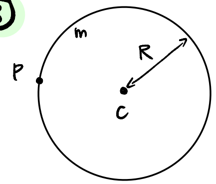
↳ konstant bei ebener SK-Bewegung.

① 

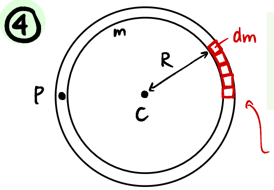
$I_c = 0$
$I_p = ml^2$

② 

$I_c = \frac{1}{12} ml^2$
$I_p = \frac{1}{3} ml^2$

③ 

$I_c = \frac{1}{2} mR^2$
$I_p = \frac{3}{2} mR^2$

④ 

$I_c = mR^2$
$I_p = 2mR^2$

Summe aller dm's · R^2

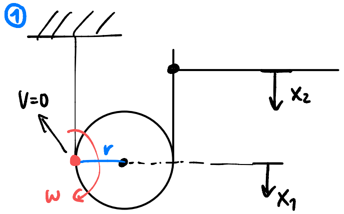
$\iint R^2\, dm = mR^2$

→ Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers = Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.

Kinematische Relationen:

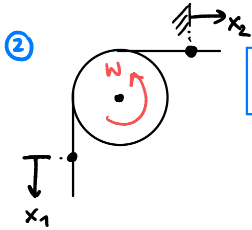
→ mehr Koordinaten als Freiheitsgrad, so sind diese voneinander abhängig.

→ Punkte finden, wo man kinematische Relationen aufstellen kann. Oft bei Rollen.

① 

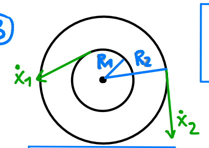
$\boxed{\omega = \frac{\dot x_1}{r} = \frac{\dot x_2}{2r}}$

⇒ $2\dot x_1 = \dot x_2$

② 

$\boxed{\omega = \frac{\dot x_1}{r} = -\frac{\dot x_2}{r}}$

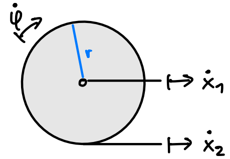
⇒ $\dot x_1 = -\dot x_2$

③ 

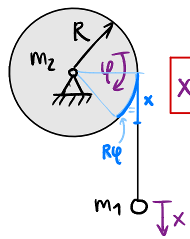
$\boxed{\dot\varphi = \omega = \frac{\dot x_1}{R_1} = -\frac{\dot x_2}{R_2}}$

⇒ $\dot x_2 = -\frac{R_2}{R_1}\dot x_1$

oder: $\boxed{d\varphi = \frac{dx_1}{R_1} = \frac{dx_2}{R_2}}$ ⇒ $x_2 = -\frac{R_2}{R_1}x_1 + k$

④ 

$\boxed{\dot x_2 = \dot x_1 - r\cdot\dot\varphi}$

allgemein: 

$\boxed{x = R\varphi}$

$\omega = \dot\varphi$ = Rotationsgeschwindigkeit = Kreisfrequenz.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$ $\omega = \frac{\varphi}{t}$ ⇝ $\varphi(t) = \omega t$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = Periodendauer, $[T] = s$

Bewegungsdiff'gleichungen:

Lösungsansatz für DGL:

falls DGL in diese Form umformbar:

(Schwingung): $\boxed{\ddot x + \omega^2 x = k}$ $\ddot\varphi, \ddot x, \ddot y$ in diese Form bringen. (Werte vor x mit ω^2 ersetzen)

$\boxed{x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}}$

löst dieser Ansatz die DGL.   oft: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Kinematik:

$\boxed{m\ddot x = R}$ (kein ω)

$\boxed{x(t) = c_1\frac{1}{2}x^2 + c_2 x + c_3}$ $e^{\lambda x}$

Herangehensweise einer Dynamikaufg.:

- Drallsatz: $\dot L_c = M_c = I_c\ddot\varphi = \dots$
- Massenmittelpunktsatz $m\vec a_c = \vec R$
  - → $m\ddot x = \dots$
  - → go to move als erstes!
- Kinematische Relationen:
  $x = R\varphi$, $\dot x = R\dot\varphi$ ⇒ $\ddot x = R\ddot\varphi$

↳ aufstellen für: x, y, ... (Strecken); x, φ, ...; φ, α, γ, ... (Winkel)

Tipp: Wenn $\left\{ \begin{array}{l} m\ddot x_1 = \dots \\ I_1\ddot\varphi_1 = \dots \end{array} \right\}$ das schon aufgestellt, und wir müssen eine Kraft von der rechten Seite bestimmen

⇒ mit $I_1\ddot\varphi_1 + r\cdot m\ddot x_1 = \dots$ probieren.

$\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0$

↓

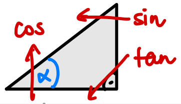
$\varphi(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$

(allg. Lösung)

Lina De Windt

Sonstiges:

Trigonometrie:



DEG	0°	30°	45°	60°	90°
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Trigonometrische Ableitungen: $\sin \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \cos \xrightarrow{\frac{d}{dx}} -\sin \xrightarrow{\frac{d}{dx}} -\cos \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \sin$

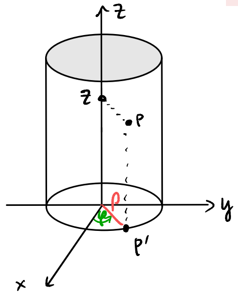
Koordinatenumwandlungen:

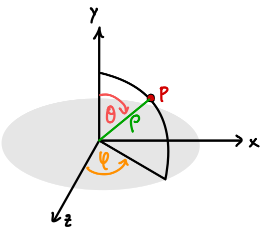
Kartesisch ↔ Zylinderkoordinaten:

$x = \cos(\varphi)\cdot\rho$, $y = \sin(\varphi)\cdot\rho$, $z = z$ ↔ $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $z = z$

Kartesisch ↔ Kugelkoordinaten:

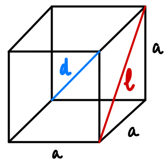
$x = \rho\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)$, $y = \rho\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)$, $z = \rho\cdot\cos(\theta)$ ↔ $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$





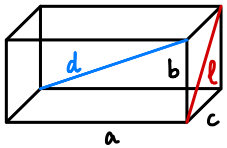
Geometrien:

Quader / Würfel:



$l = \sqrt{2}a$

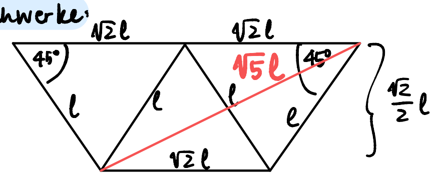
$d = \sqrt{3}a$

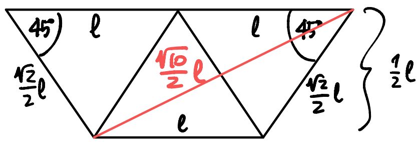


$l = \sqrt{b^2+c^2}$

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

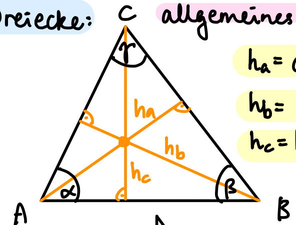
Fachwerke:





Dreiecke:

allgemeines Dreieck:

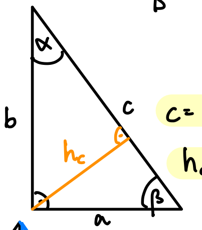


$h_a = c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma$

$h_b = a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha$

$h_c = b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$

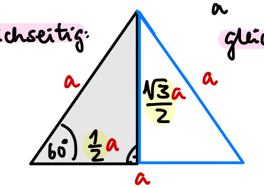
Rechtwinklig:



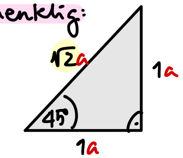
$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$h_c = \frac{a\cdot b}{c}$

gleichseitig:



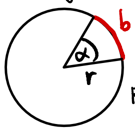
gleichschenklig:



Kreis:

Kreisgleichung: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

Kreisbogen:



DEG: $b = \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi r$

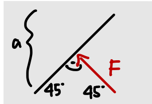
ges. Fläche $= \pi r^2$
ges. Umlauf $= 2\pi r$

RAD: $b = \alpha\cdot r \rightsquigarrow \alpha = \frac{b}{r}$

Vektoren & Einheitsvektoren:

$\underline{e}_x = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$; $\underline{x} = \underline{e}_x\cdot\|\underline{x}\|$

d.h. z.B. $\underline{F} = \underline{e}_F \cdot F$



$\Rightarrow \underline{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} F$

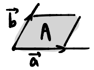
(keine l, a usw.)

Skalarprodukt / Kreuzprodukt:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$ $\quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$: $\vec{c}\perp\vec{a}$ & $\vec{c}\perp\vec{b}$

Anwendungen:

↳ 

$|\vec{a}\times\vec{b}|$ = Fläche!

↳ |Spatprodukt| = Volumen des Parallelopipeds:

↳ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

Abstand einer Geraden AB zum Punkt 0:

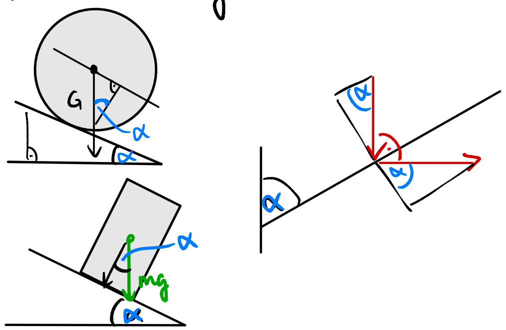
$d_0^{AB} = |\underline{r}_{OA}\times\underline{e}_{AB}| = |\underline{r}_{OB}\times\underline{e}_{AB}|$

oder:

$P = (P_x, P_y, P_z)$ $\quad g: \vec{Q}(s) = \vec{A} + s\vec{v}$

Abstand: $\frac{|\vec{v}\times\vec{AP}|}{|\vec{v}|}$

Winkelbeziehungen:



Betrag:

$|x| \geq 0$

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

↳ $|a^n| = |a|^n$ für $n\in\mathbb{N}$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$

$\left|\frac{1}{a^n}\right| = \frac{1}{|a|^n}$ für $n\in\mathbb{N}, a\neq 0$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Wurzelapproximationen:

$\sqrt{2} \approx 1.41$

$\sqrt{3} \approx 1.73$

$\sqrt{5} \approx 2.24$

$\sqrt{7} \approx 2.65$

$\sqrt{3} < 2 < 2\sqrt{2} < 3$

Ungleichungen:

$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ -x > a \Leftrightarrow x > -a \end{cases} \Leftrightarrow -a < x < a$

Umformungen:

$|\vec{F}_T| \leq \mu_0 |\vec{F}_N|$

$\Leftrightarrow F_T \in [-1,1]\mu_0 F_N$

$e \in [-1,1]\frac{a}{2}$

Physikalische Gleichungen:

- Physikalischer Pendel:

$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

- Mathematischer Pendel:

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

- freier Fall:

$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$

- Amplitude:

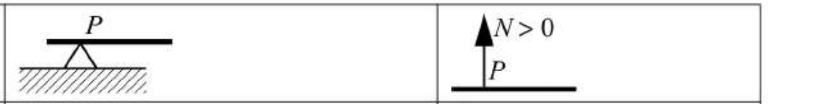
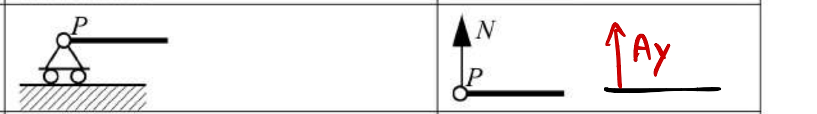
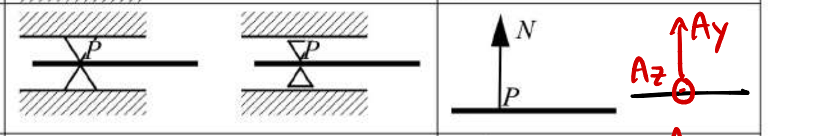
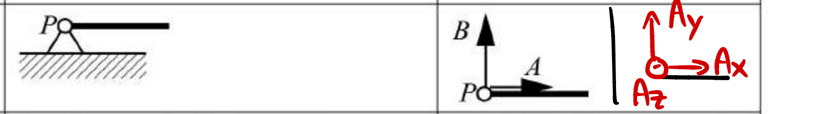
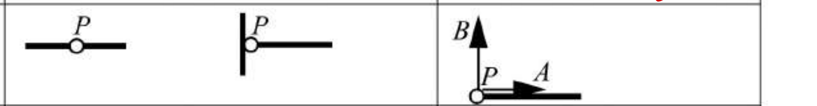
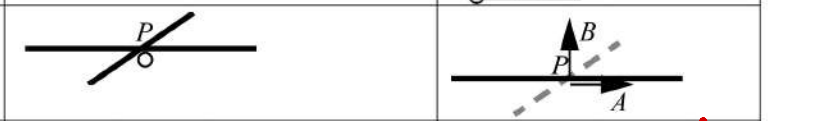
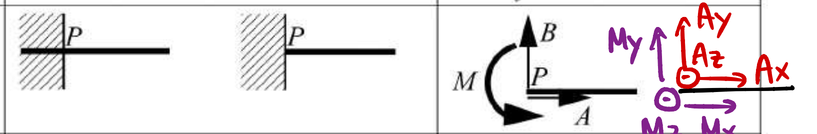
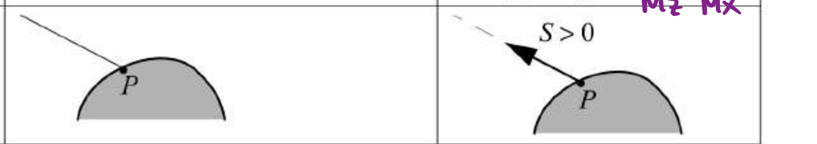
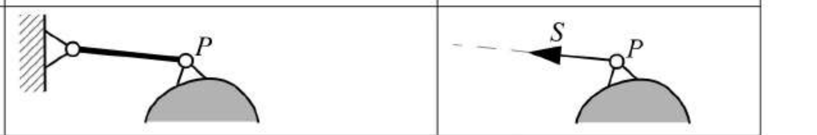
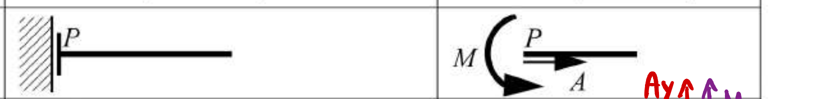
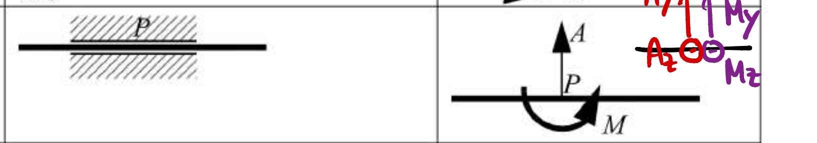
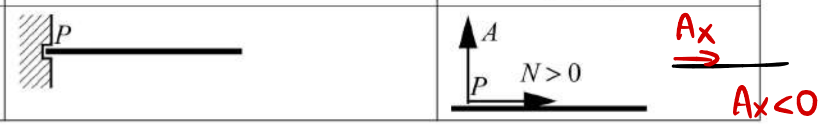
~ cos(...)

~ sin(...)

ldewindt@ethz.ch

Lagerreaktionen (2D):

3D:

Auflager (einseitig) *Loslager*	
Auflager (beidseitig) *Loslager*	
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*	
Gelenk *Festlager*	
Gelenk	
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)	
Einspannung	
Faden / Seil	
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)	
Parallelführung	
Langes Querlager, Schiebehülse	
Längs- und kurzes Querlager	

Statikaufgaben:

1. Materielles System abgrenzen; freigeschnittenes System zeichnen (Kräfte statt Lager!)
2. Äussere Lasten & Bindungskräfte einführen
3. Zweckmässiges KS wählen
4. Gleichungen & Unbekannte zählen
   ↳ ist System statisch bestimmt oder unbestimmt?
5. GGW und evtl. weitere Gleichungen (z.B. Reibung) komponentenweise formulieren
6. Falls nötig System trennen, Schnittkräfte einführen & Schritte 1~3 wiederholen
7. Gleichungen nach den Unbekannten auflösen
8. Resultate & evtl. Zusatzbedingungen diskutieren

Dynamikaufgaben:

1. Modellbildung, materielles System abgrenzen.
2. Für die Berechnung von inneren Bindungskräften: einzelne Körper freischneiden.
3. In allgemeiner Lage (nicht in der Anfangslage!) alle angreifenden Kräfte einführen.
4. Freiheitsgrad ermitteln, Wahl von zweckmässigen KS.
5. Kinematische Relationen aufstellen (← Bindungen Rollen)
6. Bewegungsdiff'gleichungen für alle Komponenten formulieren
   ⇒ Massenmittelpunktsatz, Drallsatz
7. Bindungskräfte bestimmen, aus den Bewegungsgleichungen eliminieren, # Gleichungen entsprechend reduzieren.
8. Anfangsbedingungen formulieren; gesuchte Grössen berechnen
9. Resultate diskutieren

allgemeine Tipps; an Prüfung:

> **Formeln aufschreiben!**
(vor dem Rechnen → nur Formel aufschreiben gibt Punkte!)

Begriffe:

Dynamik

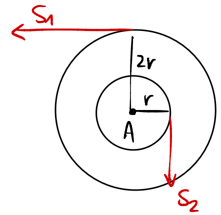
- Kinematik: Studium der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten
- Kinetik: Frage nach Zusammenhang zw. den angreifenden Kräften & seiner Bewegung (also Dyname & Kinemate)
  → Kräfte verändern Bewegungszustand

Inertialpunkt:
> Pkt, der in einem Inertialsystem ruht (d.h. darf nicht beschleunigt sein).

Massenträgheitsmoment (= Inertialmoment):
> Trägheit eines Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse

Aufpassen!

- Kräftefrei: $\underline{R}=\underline{0}$, $\underline{M}=\underline{0}$
- SdpG ≠ Vektoradition
- Bindungskräfte nicht vergessen!

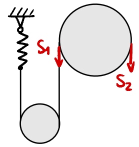


$S_1 \neq S_2$

$\Rightarrow M(A): 2rS_1 - rS_2 = 0$

$S_1 = \frac{1}{2}S_2$

Bei Dynamikaufgaben ist i.A.



$S_1 \neq S_2$

↳ weil System ist nicht in Ruhe. (& wegen Feder)

→ Falls System in Ruhe, dann $S_1 = S_2$