Heute

- Freiheitsgrade Aufgaben
- Kreiselung
- Bewegungsarten
- Starrkörperformel
- Invarianten der Kinemate
- Zentralachse

Kreiselung

Im 2D Fall haben wir schon den Satz von Momentanzentrum (SvM) gesehen, der für jede beliebige Rotation gilt.

Def Kreiselung (3D Fall von Rotation)

Eine Kreiselung ist eine Rotation um eine Momentanachse wobei alle Punkte auf der Achse eine Geschwindigkeit $\vec{v}=0$ haben.

Satz

Analog zum SvM gilt für einen Starrkörper K

$$\forall P \in K \quad \vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_{op}$$

wobei $\vec{r}_{op}$ ein Verbindungsvektor von einem beliebigen Punkt auf der Momentanachse zum Punkt P ist.

Bewegungsarten

Im 3 dimensionalen Fall gibt es 3 Bewegungsarten

1. Translation $\vec{v_P} = \vec{v} \quad \forall P \in K$
2. Kreiselung / Rotation (oben definiert)
3. Schraubung

   Die Schraubung ist der Allgemeinste Bewegungsfall. Jede Schraubung lässt sich durch eine Vektoraddition aus einer Translation und Kreiselung darstellen.

Starrkörperformel

Satz

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{r_{AB}} \qquad \forall A, B \in K$$

$\vec{r}_{AB}$ ist der Verbindungsvektor zwischen A und B.

Bemerkungen

- Die Formel gilt für alle Schraubungen obwohl in der Vorlesung es nur für Kreiselungen gezeigt wurde
- Inuition hinter der Formel: Man stellt sich vor man betrachte alles vom Punkt A aus. Anders gesagt, man "sitzt" auf dem Punkt A oder man stellt sich vor, dass man ein zweites Koordinatensystem im Punkt A reinlegt. In diesem Koordinatensystem ist $\vec{v_A} = 0$ und A ist somit auf der Rotationsachse. Also gilt $\vec{v_B} = \vec{\omega} \times \vec{r_{AB}}$. Transformieren wir unser $\vec{v_B}$ zurück ins ursprüngliche Koordinatensystem müssen wir die Geschwindigkeit des zweiten Koordinatensystems dazu addieren, was genau $\vec{v_A}$ ist und wir erhalten $\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{r_{AB}}$.

Invarianten der Kinemate

Aus der Starrkörperformel sehen wir, dass es reicht eine Geschwindigkeit von einem Punkt zu kennen und den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ um jede andere Geschwindigkeit zu bestimmen. Der Momentane Bewegungszustand ist vollständig durch $\{\vec{v}_P, \vec{\omega}\}$ charakterisiert!

Wir sagen, dass es zwei Invarianten $I_1 = \vec{\omega}$ und $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P$ gibt. I_2 ist unabhängig von der Wahl von P.

Charakterisierung der Bewegungsarten:

1. Translation
   $I_1 = I_2 = 0$
2. Rotation / Kreiselung
   $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$
3. Schraubung
   $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$

I_2 lässt sich verstehen als die Projektion einer Geschwindigkeit auf die Rotationsachse.

Bemerkung:
Wenn man in einer Schraubung eine Geschwindigkeit $\vec{v}_P$ betrachtet kann man die "Translationskomponente" bestimmen durch

$$\vec{v}_{PT} = \underbrace{\left(\vec{v}_P \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}\right)\right)}_{\text{Translationsschnelligkeit}} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$$

Einheitsvektor in Richtung der Translation

$\Rightarrow$ Rotationskomponente $\vec{v}_{PR} = \vec{v}_P - \vec{v}_{PT}$

$\vec{v}_{PT}$ ist gleich für alle Punkte $P \in K$

Zentralachse

In jeder Schraubung gibt es eine Zentral/Rotationsachse. Da die Invarianten der Kinematik jede momentane Bewegung charakterisiert, muss es ein Weg geben die Rotationsachse zu finden.

__Satz__ Sei $\vec{v_B}$ die Geschwindigkeit im Punkt B und $\vec{\omega}$ die Rotationsgeschwindigkeit.

Dann ist $\vec{r}_{BA} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v_B}}{\omega^2} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v_B}}{\|\vec{\omega}\|^2}$
der Verbindungsvektor vom Punkt B zu einem Punkt A auf der Rotationsachse.

Die restlichen Punkte lassen sich durch

$$\vec{r}_A + c \cdot \vec{\omega} = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA} + c \cdot \vec{\omega} \quad , c \in \mathbb{R}$$

finden.