

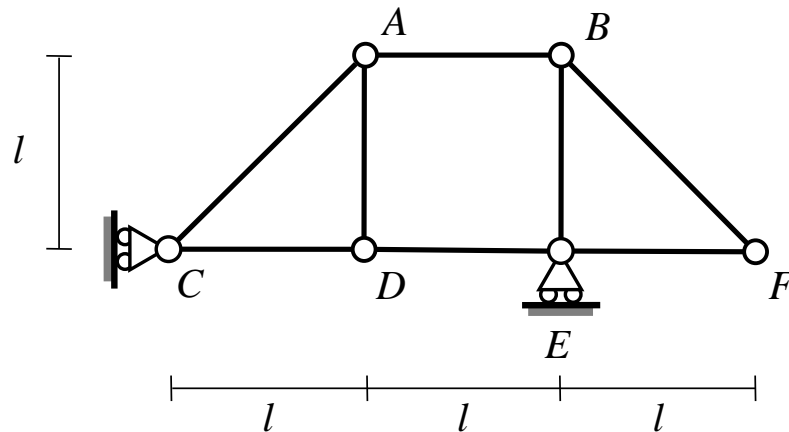
Technische Mechanik
151-0223-10

- Übung 4 -

Dr. Paolo Tiso

14. Oktober 2025

1. Das folgende System besteht aus 8 gelenkig miteinander verbundenen Stäben (siehe Skizze). Die Punkte C und E sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Längen der Stäbe sind in der Skizze angegeben.



Wie gross ist der Freiheitsgrad des Systems?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

Lösung:

Der Freiheitsgrad des Systems kann wie folgt berechnet werden:

$$f = n - b_{Lager} - b_{Gelenke} \quad (1)$$

Es gibt 8 Stäbe:

$$n = 8 \cdot 3 = 24 \quad (2)$$

2 Rolllager:

$$b_{Lager} = 2 \cdot 1 = 2 \quad (3)$$

2 Gelenke mit 2 Stäben und 4 Gelenke mit 3 Stäben:

$$b_{2\text{ Stbe}} = (2 - 1) \cdot 2 = 2 \quad (4)$$

$$b_{3\text{ Stbe}} = (3 - 1) \cdot 2 = 4 \quad (5)$$

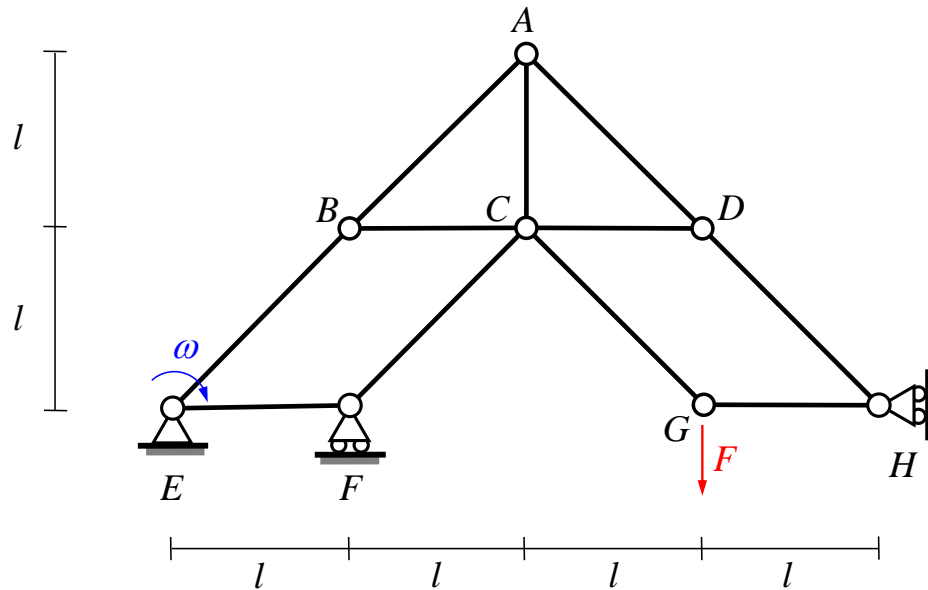
$$b_{Gelenk} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20 \quad (6)$$

Insgesamt erhält man:

$$f = 24 - 2 - 20 = 2 \quad (7)$$

Antwort (c) ist somit richtig.

2. Das unten skizzierte System besteht aus 11 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt E ist gelenkig gelagert, die Punkte F und H sind durch Rolllager auf eine horizontale bzw. vertikale Bewegung beschränkt. Die Kraft F greift im Punkt G an und der Stab BE hat die Winkelgeschwindigkeit ω .



1. Was ist die Winkelgeschwindigkeit ω_{GH} vom Stab GH?
 - (a) $\omega_{GH} = 0$
 - (b) $\omega_{GH} = \omega$
 - (c) $\omega_{GH} = -\omega$
 - (d) $\omega_{GH} = 2\omega$
 - (e) $\omega_{GH} = \frac{\omega}{2}$

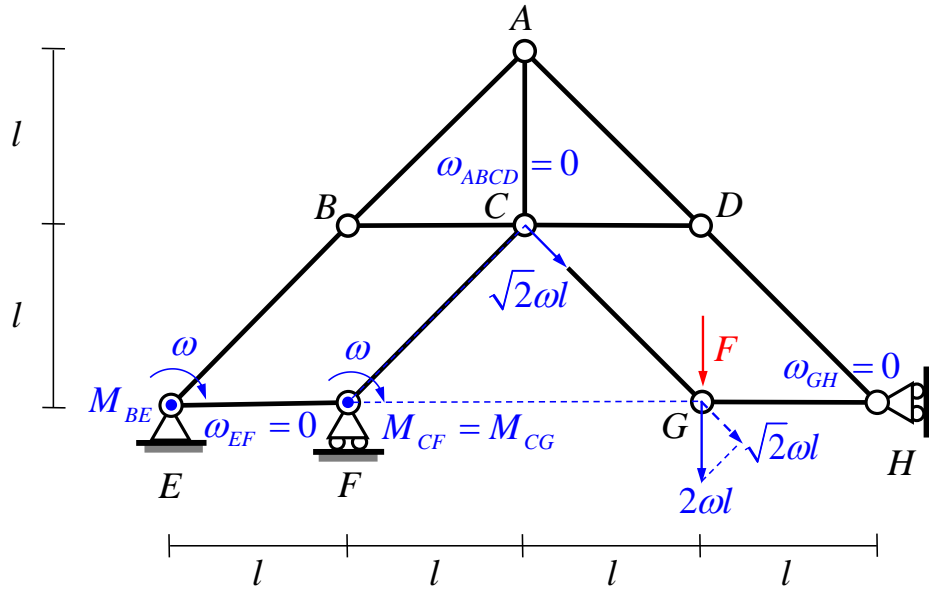
2. Wie gross ist die Gesamtleistung des Systems?
 - (a) $P = 0$
 - (b) $P = -vF$
 - (c) $P = \omega l F$
 - (d) $P = -\omega l F$
 - (e) $P = 2\omega l F$

Lösung:

1. Das System besteht aus zwei Parallelogrammen BCEF und CDGH, die durch einen starren Körper ABCD miteinander verbunden sind. Stab EF ist durch die Lager fixiert, woraus $\omega_{EF} = 0$ folgen muss. Dank der Parallelogrammregel (gegenüberliegende Stäbe auf demselben Parallelogramm haben die gleiche Winkelgeschwindigkeit) ergibt sich:

$$\omega_{EF} = \omega_{ABCD} = \omega_{GH} = 0 \quad (1)$$

2. Die folgende Skizze zeigt den grafischen Lösungsprozess:



- (a) Stab CF hat dieselbe Winkelgeschwindigkeit wie Stab BE und das Momentanzentrum in F (siehe Skizze). Daraus kann man die Geschwindigkeit in C berechnen:

$$v_C = \omega \cdot \sqrt{2}l = \sqrt{2}\omega l \quad (2)$$

- (b) Da Stab GH eine reine Translation ausführt ($\omega_{GH} = 0$), muss die Geschwindigkeit in G gleich der in H sein, weshalb v_G vertikal sein muss. Wegen des SvM oder des SdpG auf Stab CG, kann die Geschwindigkeit im Punkt G bestimmt werden:

SdpG:

$$v_G \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}\omega l \quad \Rightarrow \quad v_G = 2\omega l \quad (3)$$

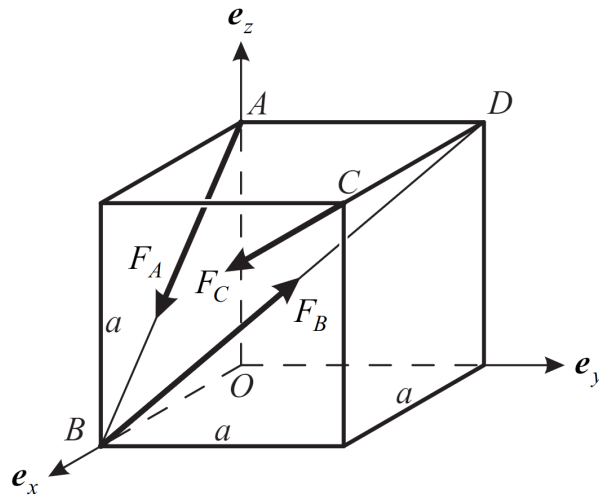
SvM (Momentanzentrum in F):

$$\omega_{CG} = \frac{\sqrt{2}\omega l}{\sqrt{2}l} = \omega \quad \Rightarrow \quad v_G = \omega_{CG} \cdot 2l = 2\omega l \quad (4)$$

- (c) Zum Schluss ergibt sich die Leistung als (positiv, da beide Vektoren nach unten zeigen):

$$P = F \cdot 2\omega l = 2\omega l F \quad (5)$$

3. ¹ An einem Würfel mit der Seitenlänge a greifen die gezeichneten Kräfte vom Betrag F_A , F_B und F_C an. Die Kraft \mathbf{F}_C verläuft parallel zur \mathbf{e}_x -Achse.



1. Berechnen Sie die Momente dieser Kräfte bezüglich der Punkte O und A .
2. Bestimmen Sie die Abstände der drei Kraft-Wirkungslinien von O und A . Berechnen Sie daraus die Beträge der Momente und vergleichen Sie diese mit den Beträgen der oben berechneten Momente.

Lösung:

1. Die Momente der Kräfte \mathbf{F}_A , \mathbf{F}_B und \mathbf{F}_C bezüglich O werden berechnet als

$$\mathbf{M}_O^A = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} F_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_O^B = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_O^C = \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} a F_C \quad (3)$$

Die entsprechenden Beträge sind dann

$$M_O^A = |\mathbf{M}_O^A| = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \quad (4)$$

$$M_O^B = |\mathbf{M}_O^B| = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \quad (5)$$

¹Aufgabe aus der Übungsserie 3 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

$$M_O^C = |\mathbf{M}_O^C| = \sqrt{2}aF_C. \quad (6)$$

Analog erhält man für die Momente der Kräfte bezüglich A

$$\mathbf{M}_A^A = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_A^B = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}F_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}aF_B \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_A^C = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} aF_C \quad (9)$$

und für deren Beträge

$$M_A^A = |\mathbf{M}_A^A| = 0 \quad (10)$$

$$M_A^B = |\mathbf{M}_A^B| = \frac{\sqrt{6}}{3}aF_B \quad (11)$$

$$M_A^C = |\mathbf{M}_A^C| = aF_C. \quad (12)$$

Alternativ kann man für die Berechnungen der Momente bezüglich A die Momenten-Transformationsformel verwenden, die für zwei beliebige Punkte O und P wie folgt lautet:

$$\mathbf{M}_P^i = \mathbf{M}_O^i + \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{F}_i \quad (13)$$

wobei \mathbf{F}_i die angreifende Kraft, deren Moment wir berechnen möchten und \mathbf{r}_{PO} der Abstandsvektor von Punkt P nach Punkt O ist.

Wir wenden diese Formel an den Momenten bezüglich Punkt O an, welche wir bereits im ersten Teil der Aufgabe berechnet haben, und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A^A &= \mathbf{M}_O^A + \mathbf{r}_{AO} \times \mathbf{F}_A \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}aF_A + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{1}F_A \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}aF_A - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}aF_A \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

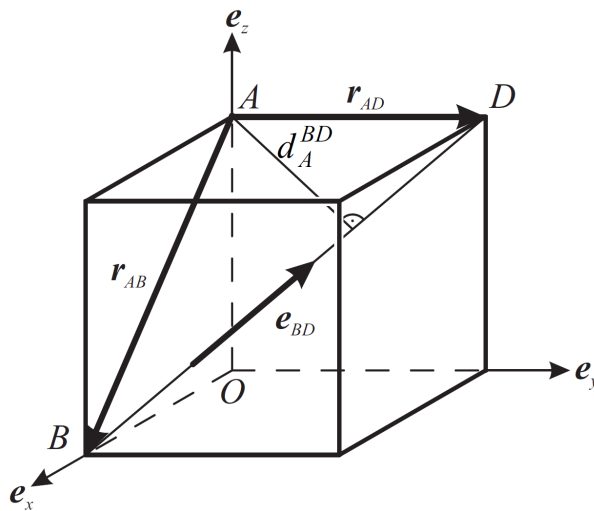
$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_A^B &= \mathbf{M}_O^B + \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{F}_B \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} F_B \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} a F_B
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_A^C &= \mathbf{M}_O^C + \mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{F}_C \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} a F_C + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_C \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} a F_C + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} a F_C \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a F_C
\end{aligned} \tag{16}$$

Wir sehen, dass beide Lösungswege zu identischen Ergebnissen führen.

2. Der Abstand d_A^{BD} einer Geraden BD zum Punkt A kann mit dem Kreuzprodukt berechnet werden als

$$d_A^{BD} = |\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{e}_{BD}| \equiv |\mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{e}_{BD}|. \tag{17}$$



Die Abstände der Wirkungslinien bezüglich O sind

$$d_O^{AB} = |\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{e}_{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{2} a \tag{18}$$

$$d_O^{BD} = |\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{e}_{BD}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{6}}{3} a \quad (19)$$

$$d_O^{DC} = |\mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{e}_{DC}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| a = \sqrt{2} a \quad (20)$$

Die Beträge der Momente sind dann

$$M_O^A = d_O^{AB} F_A = \frac{\sqrt{2}}{2} a F_A \quad (21)$$

$$M_O^B = d_O^{BD} F_B = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \quad (22)$$

$$M_O^C = d_O^{DC} F_C = \sqrt{2} a F_C \quad (23)$$

Analog erhält man die Abstände der Wirkungslinien bezüglich A als

$$d_A^{AB} = |\mathbf{r}_{AA} \times \mathbf{e}_{AB}| = 0 \quad (24)$$

$$d_A^{BD} = |\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{e}_{BD}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{6}}{3} a \quad (25)$$

$$d_A^{DC} = |\mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{e}_{DC}| = \left| \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| a = a \quad (26)$$

und die Beträge der Momente als

$$M_A^A = d_A^{AB} F_A = 0 \quad (27)$$

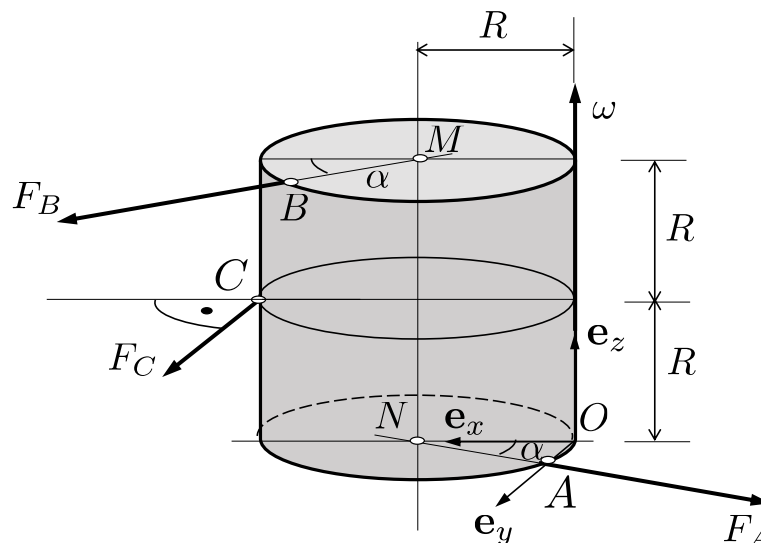
$$M_A^B = d_A^{BD} F_B = \frac{\sqrt{6}}{3} a F_B \quad (28)$$

$$M_A^C = d_A^{DC} F_C = a F_C \quad (29)$$

Die Beträge der Momente sind also gleich wie im Teil 1. der Aufgabe.

Bemerkung: Die Abstände $d_O^{AB}, d_O^{DC}, d_A^{AB}, d_A^{DC}$ kann man auch gleich aus der Zeichnung ablesen.

- 4.² Ein Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe $2R$ dreht sich mit der Rotationsgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Auf ihn wirken die drei Kräfte \mathbf{F}_A , \mathbf{F}_B , und \mathbf{F}_C mit den Beträgen F , F bzw. $\sqrt{2}F$. Die beiden Kräfte \mathbf{F}_A und \mathbf{F}_B greifen radial unter einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ an. Die Kraft \mathbf{F}_C verläuft parallel zur \mathbf{e}_y -Achse.

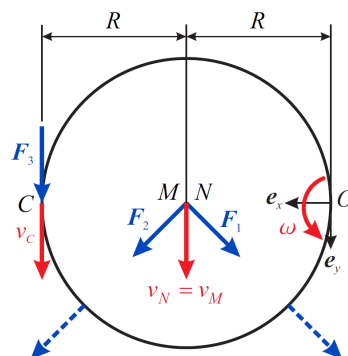


Die Leistungen dieser Kräfte können auf zwei Arten bestimmt werden:

1. Zur Berechnung der Leistungen dürfen die Kräfte längs ihrer Wirkungslinien verschoben werden. Wählen Sie Punkte auf den Wirkungslinien, deren Geschwindigkeiten einfach zu berechnen sind. Ermitteln Sie daraus die Leistungen der drei Kräfte.
2. Berechnen Sie die Momente der Kräfte bezüglich O und daraus die Leistungen.

Lösung:

Hinweis: In der Lösung werden die Kräfte \mathbf{F}_A , \mathbf{F}_B und \mathbf{F}_C mit \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 und \mathbf{F}_3 bezeichnet.



1. Die Kraftangriffspunkte von \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 werden entlang ihrer Wirkungslinie verschoben, nach N bzw. nach M . Die Leistungen der Kräfte werden berechnet

²Aufgabe aus der Übungsserie 4 der Vorlesung « 151-0223-10 Technische Mechanik », HS 2019, Prof. Dual/Prof. Glocker.

als

$$P_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_N = F \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} F \omega R; \quad (1)$$

$$P_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_M = F \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} F \omega R; \quad (2)$$

$$P_3 = \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{v}_C = F \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega R \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} F \omega R; \quad (3)$$

Die Gesamtleistung ergibt sich als

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \omega R + \frac{\sqrt{2}}{2} F \omega R + 2\sqrt{2} F \omega R = 3\sqrt{2} F \omega R. \quad (4)$$

2. Die Momente der Kräfte bezüglich O können erhalten werden als

$$\mathbf{M}_O^1 = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_1 = R \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} RF; \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_O^2 = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_2 = R \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} RF; \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_O^3 = \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_3 = R \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sqrt{2} RF; \quad (7)$$

Die entsprechenden Leistungen sind dann

$$P_1 = \mathbf{M}_O^1 \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} RF \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} RF \omega; \quad (8)$$

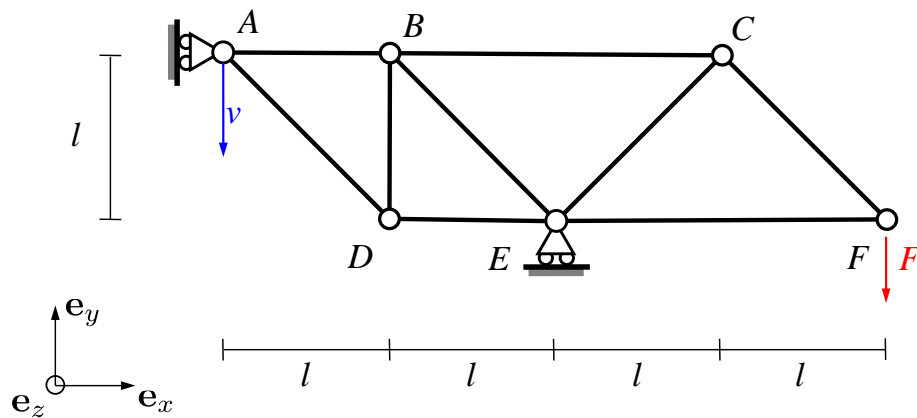
$$P_2 = \mathbf{M}_O^2 \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} RF \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} RF \omega; \quad (9)$$

$$P_3 = \mathbf{M}_O^3 \cdot \boldsymbol{\omega} = \sqrt{2} RF \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} RF \omega. \quad (10)$$

Die Gesamtleistung ist nach wie vor

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} F \omega R + \frac{\sqrt{2}}{2} F \omega R + 2\sqrt{2} F \omega R = 3\sqrt{2} F \omega R. \quad (11)$$

5. Das unten skizzierte System besteht aus 9 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Punkt A ist durch ein Rolllager auf eine vertikale und Punkt E auf eine horizontale Bewegung beschränkt. Punkt A bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach unten und die Kraft F greift am Punkt F an (siehe Skizze).



1. Was ist der Freiheitsgrad des Systems und aus wie vielen starren Körpern besteht es?
 - (a) Freiheitsgrad = 0, Anzahl Starrkörper = 9
 - (b) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 1
 - (c) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 3
 - (d) Freiheitsgrad = 1, Anzahl Starrkörper = 4
 - (e) Freiheitsgrad = 2, Anzahl Starrkörper = 1

2. Wie gross ist die Leistung der Kraft F?
 - (a) $P = 0$
 - (b) $P = -\frac{1}{2}vF$
 - (c) $P = -\frac{\sqrt{5}}{2}vF$
 - (d) $P = -vF$
 - (e) $P = \frac{\sqrt{5}}{2}vF$

Lösung:

1. Das System besteht aus 4 angrenzenden Dreiecken. Da ein Dreieck ein starrer Körper ist, besteht das System aus einem einzelnen starren Körper ABCDEF.

Der Freiheitsgrad des Systems kann wie folgt berechnet werden:

$$f = n - b_{\text{Lager}} - b_{\text{Gelenke}} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 0 = 1 \quad (1)$$

Wobei es einen 2D-Körper (3 Freiheitsgrade), 2 Rollenlager (je 1 Bindung) und kein Gelenk gibt (da es sich um einen einzelnen Körper handelt).

Alternative: der Freiheitsgrad kann anhand der einzelnen Stäben berechnet werden:

$$f = n - b_{Lager} - b_{Gelenke} \quad (2)$$

Es gibt 9 Stäbe:

$$n = 9 \cdot 3 = 27 \quad (3)$$

2 Rolllager:

$$b_{Lager} = 2 \cdot 1 = 2 \quad (4)$$

Und 6 Gelenke mit 2 bis 4 Stäben (jeweils 2):

$$b_{2\text{ Staebe}} = (2 - 1) \cdot 2 = 2 \quad (5)$$

$$b_{3\text{ Staebe}} = (3 - 1) \cdot 2 = 4 \quad (6)$$

$$b_{4\text{ Staebe}} = (4 - 1) \cdot 2 = 6 \quad (7)$$

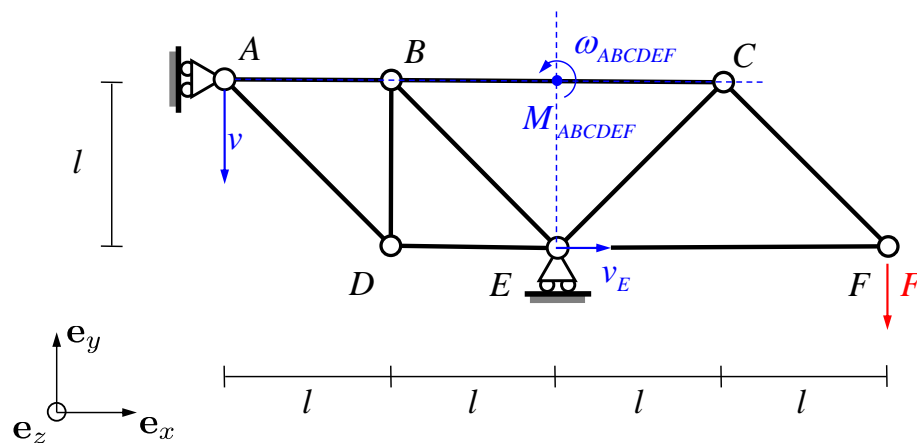
$$b_{Gelenk} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 24 \quad (8)$$

Insgesamt erhält man:

$$f = 27 - 2 - 24 = 1 \quad (9)$$

Deshalb ist Antwort (b) (1 Freiheitsgrad, 1 starrer Körper) korrekt.

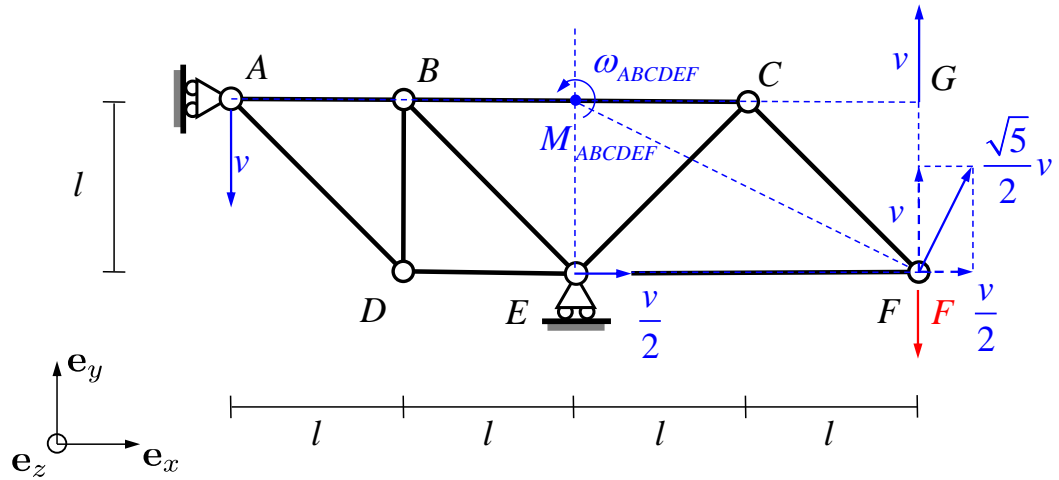
2. Das System besteht aus einem einzigen starren Körper. Wenn man das Momentanzentrum findet, kann man die Geschwindigkeit jedes Punktes ausrechnen. Dank der Rolllagern sind die Geschwindigkeitsrichtungen im Punkt A und E bekannt und das Momentanzentrum muss sich in der Mitte vom Stab BC befinden (siehe Skizze):



Die Winkelgeschwindigkeit kann demzufolge bestimmt werden:

$$\omega_{ABCDEF} = \frac{v}{2l} \quad (10)$$

Aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Momentanzentrum lässt sich die Geschwindigkeit im Punkt F berechnen. Da aber die Kraft F vertikal angreift ist es schlauer direkt die Projektion der Geschwindigkeit auf die vertikale Achse zu berechnen, anstatt den ganzen Vektor. Das kann gemacht werden, indem man die Geschwindigkeit auf der Höhe des Momentanzentrums berechnet (siehe Punkt G in der Skizze). Durch Anwenden des SdpG weiss man, dass die vertikale Geschwindigkeit im Punkt F gleich sein muss. Die folgende Skizze dient als grafische Darstellung (der Vollständigkeit halber ist auch die horizontale Komponente von v_F gegeben):



Die vertikale Komponente in F ist dann:

$$v_{F,v} = \omega_{ABCDE F} \cdot 2l = v \quad (11)$$

Und die entsprechende Leistung berechnet sich als:

$$P = v_{F,v} \cdot -F = -vF \quad (12)$$

wobei das Resultat negativ ist, weil die Vektoren in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Antwort (d) ist demzufolge richtig.

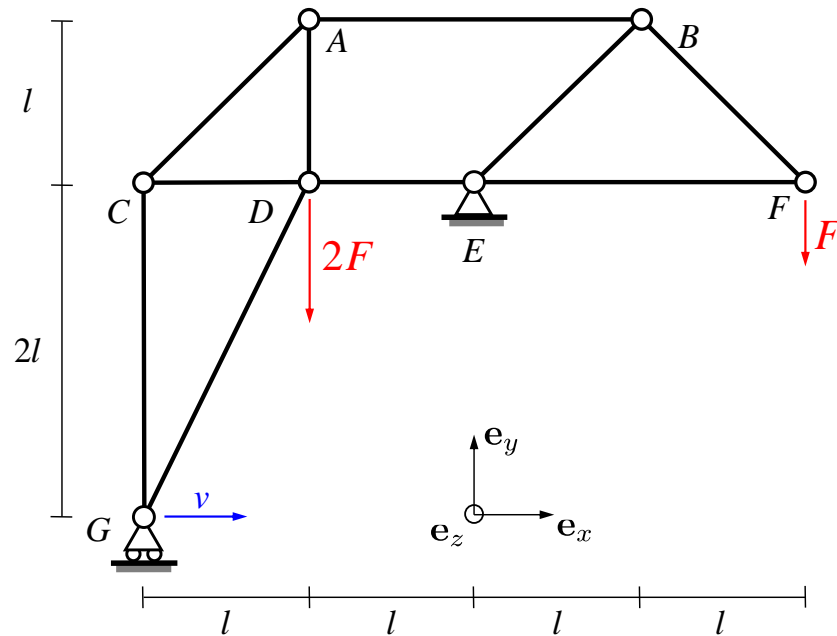
Bemerkung: Der Geschwindigkeitsvektor in F kann auch durch die Berechnung von der vertikalen und horizontalen Komponente erfolgen:

$$v_{F,h} = v_E = \omega_{ABCDE F} \cdot l = \frac{v}{2} \quad (13)$$

und in Vektorform:

$$v_F = \begin{pmatrix} v_{F,h} \\ v_{F,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} \\ v \end{pmatrix} \quad (14)$$

6. Das unten skizzierte System besteht aus 10 gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Die entsprechenden Längen sind in der Skizze angegeben. Der Punkt G bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung und der Punkt E ist gelenkig gelagert. Zwei Kräfte mit Beträgen $2F$ und F wirken an den Punkten D bzw. F in negative y-Richtung.

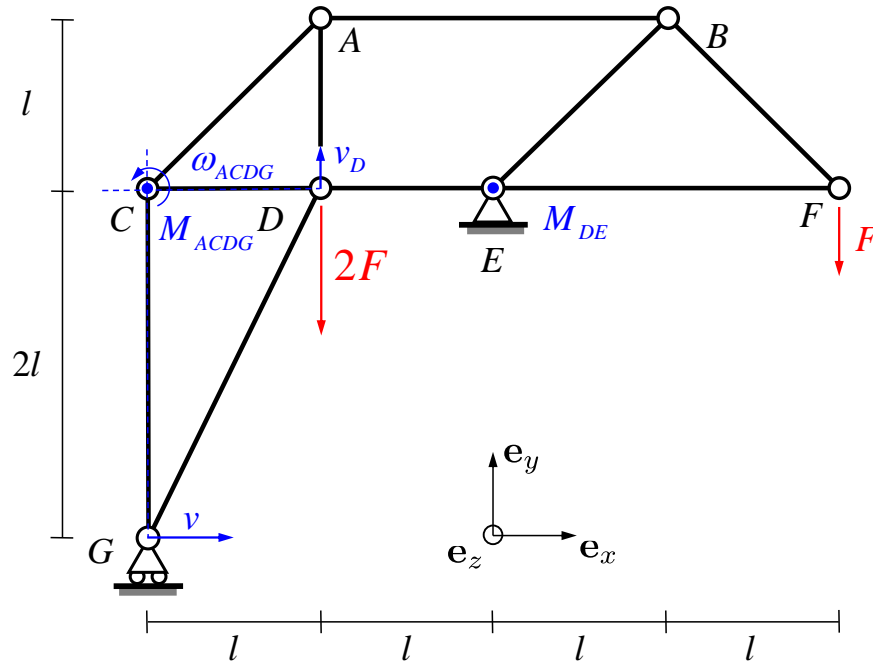


1. Identifizieren Sie alle starren Körper im System.
2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt D.
3. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Punkt F.
4. Was ist die Gesamtleistung des Systems?

Lösung:

1. Dreiecksförmig angeordnete Stäbe bilden starre Körper. Demzufolge besteht das System aus den folgenden 4 Körpern:
 - (a) Körper ACDG
 - (b) Stab AB
 - (c) Stab DE
 - (d) Körper BEF

2. Um die Geschwindigkeit im Punkt D zu berechnen, wird das Momentanzentrum des Körpers ACDG benötigt. Da der Stab DE im Punkt E gelenkig gelagert ist, muss die Geschwindigkeit im Punkt D vertikal verlaufen. Angesichts des Rolllagers in G, liegt das Momentanzentrum im Punkt C (siehe Skizze):



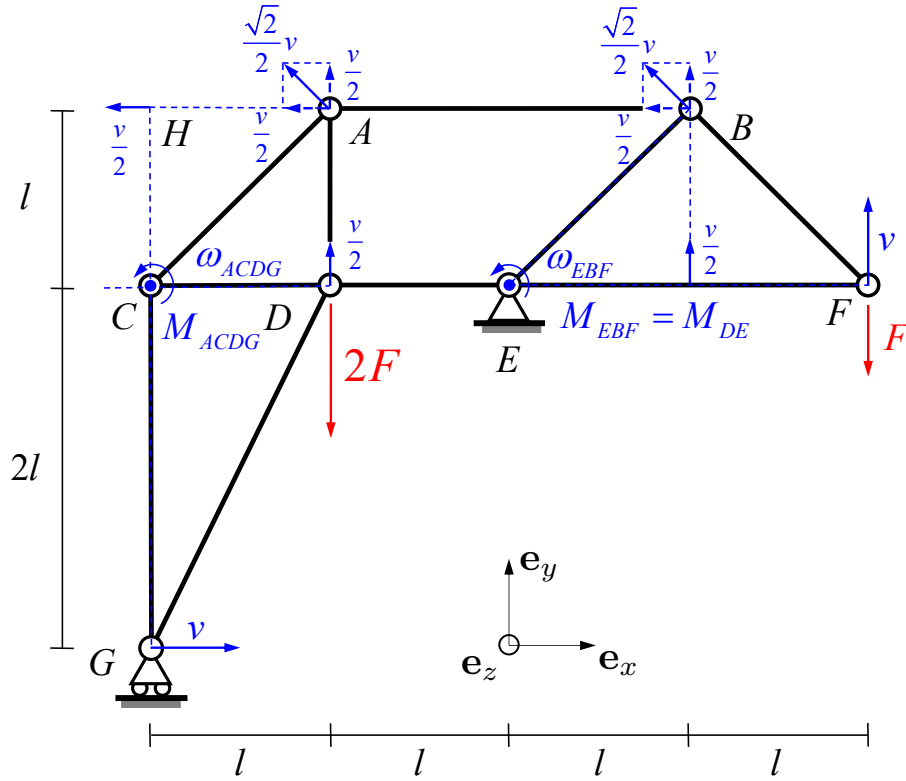
Aus dem Momentanzentrum kann die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ACDG berechnet werden:

$$\omega_{ACDG} = \frac{v}{2l} \quad (1)$$

und v_D ergibt sich als:

$$v_D = \omega_{ACDG} \cdot l = \frac{v}{2} \quad (2)$$

3. Der Körper BEF rotiert um das Festlager in E. Die Winkelgeschwindigkeit ω_{BEF} kann wie folgt berechnet werden (siehe auch Skizze):



- (a) Die horizontale Geschwindigkeit in A kann im Punkt H berechnet werden, da dank des SdpG die Punkte H und A dieselbe horizontale Geschwindigkeiten haben:

$$v_{A,h} = v_{H,h} = \omega_{ACDG} \cdot l = \frac{v}{2} \quad (3)$$

- (b) Dasselbe gilt für Punkt B und ω_{BEF} :

$$v_{B,h} = v_{A,h} \Rightarrow \omega_{BEF} = \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{v}{2l} \quad (4)$$

- (c) Und daraus ergibt sich die Geschwindigkeit in F:

$$v_F = \omega_{BEF} \cdot 2l = v \quad (5)$$

4. Die Gesamtleistung des Systems ergibt sich dann als:

$$P = P_D + P_F = -2F \frac{v}{2} - Fv = -2Fv \quad (6)$$

Unter Ausnutzung des SvM ($C \rightarrow F$) können wir die Rotationsschnelligkeit $\omega_{CEFD} = \omega_1$ von $CEFD$ wie folgt berechnen:

$$-v_{Cx} = \omega_1 l \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{v}{l}. \quad (3)$$

Da wir die Richtung der Geschwindigkeiten in A und C kennen, können wir daraus schliessen, das Momentanzentrum von AC liegt im Schnittpunkt von CF mit der Vertikalen durch A (siehe Abbildung, $M_{AC} = M_2$).

Wir können dann die Rotationsschnelligkeit $\omega_{AC} = \omega_2$ von AC berechnen:

$$v = \frac{2}{3}\omega_2 l \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{3v}{2l}. \quad (4)$$

Da wir die Rotationsschnelligkeit von $CEFD$ ω_1 aus (3) kennen, können wir den Betrag der Geschwindigkeit im Punkt D berechnen als

$$v_D = \omega_1 l = v; \quad (5)$$

Aus der SdpG muss die x-Komponente der Geschwindigkeit verschwinden, also

$$\mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Wir wenden den SdpG ($D \rightarrow B$) :

$$0 = (\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{r}_{DB} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -l \\ 0 \end{pmatrix} = lv_{Bx} \quad (7)$$

$$\Rightarrow v_{Bx} = 0.$$

Daraus kann man erschliessen, dass das Momentanzentrum $M_{AB} = M_3$ von AB im Schnittpunkt von BD mit der Vertikalen durch A liegt, wie auf der Skizze dargestellt. Nun können wir die Rotationsschnelligkeit ω_3 aus der Schnelligkeit im Punkt A erhalten als

$$v_A = v = \omega_3 l \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{v}{l}; \quad (8)$$

der Betrag der Geschwindigkeit im Punkt B ist also

$$v_B = \omega_3 \frac{l}{2} = \frac{v}{2} \quad (9)$$

und da wir die x-Komponente v_{Bx} schon kennen, erhalten wir

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -v/2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Da die Geschwindigkeiten in Punkten B und D gleichgerichtet sind (in vertikale Richtung), liegt das Momentanzentrum $M_{BD} = M_4$ von BD auf BD .

Nochmals mit dem SvM finden wir den Betrag der Rotationsschnelligkeit ω_4 sowie den Abstand von M_4 vom Punkt B :

$$v_B = \frac{v}{2} = \omega_4 d; \quad v_D = v = \omega_4 (l - D) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_4 = \frac{3v}{2l}; \quad d = \frac{l}{3}.$$

2. Die Gesamtleistung der Lasten F_B und F_D ist

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{v}_B + \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v}_D \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -F_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -v/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}F_B - F_D\right)v. \end{aligned} \tag{12}$$