

Un archétype d'oscillateur : le résonateur acoustique de Helmholtz

par **Frédéric BERNARDOT**, **Janine BRUNEAUX**
et **Jean MATRICON**

UFR de physique - Université Paris-7

bernardot@gps.jussieu.fr

bruneaux@wanadoo.fr

matricon@gps.jussieu.fr

RÉSUMÉ

Cet article présente des expériences élémentaires que l'on peut réaliser sur un résonateur de Helmholtz simple (résonance, oscillations libres), et sur deux résonateurs couplés (mise en évidence des modes, leur excitation sélective, battements). Ces expériences d'acoustique illustrent les propriétés générales des oscillateurs ; elles sont analysées quantitativement dans le cadre d'une théorie développée en analogie avec le système masse-ressort bien connu.

Cet article est le fruit d'une réflexion menée, au sein de l'enseignement de licence « Ondes et vibrations » de notre UFR (Unité de formation de recherche), sur les possibilités et l'intérêt pédagogique du résonateur acoustique de Helmholtz. L'article décrit le résonateur que nous avons construit et des expériences que l'on peut faire avec lui. Toutes les expériences présentées ont été réalisées par A. AÏTBAMOUSSA, F. KHEROUAA et D. REICHEL dans le cadre de leur projet de deuxième année à l'IUT (Institut universitaire de technologie) de Paris-Jussieu ; les auteurs remercient vivement les intéressées pour l'ampleur et la qualité de leur travail expérimental. Nos remerciements vont également à A. ROGER pour la fabrication des résonateurs et à J. JOVET pour la mise en œuvre des microphones.

INTRODUCTION

Dans l'enseignement traditionnel des oscillateurs, le système masse-ressort et le pendule sont immanquablement exposés. Ce sont en effet des systèmes mécaniques simples et concrets, facilement mis en équations et dont l'origine du mouvement oscillant est relativement intuitive. Néanmoins, ces objets ne se prêtent pas facilement à des expérimentations évoluées.

À l'inverse, le résonateur électrique LC est un système très malléable : sa fréquence propre peut être variée à volonté en changeant de façon contrôlée l'auto-inductance ou la capacité ; deux résonateurs peuvent être couplés de manière mesurable par inductance mutuelle ou par l'intermédiaire d'une capacité. Cependant, cet oscillateur LC présente

l'inconvénient de ne pas être si facile que cela à mettre en équations - à cause notamment du problème des conventions de signes dans les circuits électriques ; et puis des oscillations de charges sur une capacité, c'est bien abstrait !

Nous décrivons ici un résonateur acoustique, dont nous pensons qu'il peut être compris aussi intuitivement qu'un oscillateur mécanique simple, tout en présentant de vastes facilités de manipulations. Il est essentiellement constitué d'un volume fermé communiquant avec l'atmosphère par un col étroit. La partie 1 présente une théorie simple de ce résonateur, dans le cadre de l'analogie très forte qui le lie au système masse-ressort. Des expériences de résonance et d'oscillations libres sont ensuite exposées dans la partie 2. Il est facile de coupler ces résonateurs, en ménageant un tunnel étroit qui lie leur volume ; la partie 3 décrit des expériences quantitatives simples portant sur deux résonateurs couplés.

1. PRÉSENTATION DE L'OSCILLATEUR DE HELMHOLTZ

1.1. Aspect historique

Hermann VON HELMHOLTZ (1821-1894) est à l'origine du tout premier « résonateur de Helmholtz ». Pour extraire les harmoniques d'un son total, il imagina des récipients percés d'un orifice, qui ont une fréquence de résonance fonction de leur taille. Il utilisa ces résonateurs pour étudier la complexité des sons et leur perception par l'oreille humaine [1].

Le principe de fonctionnement du résonateur de Helmholtz est analysé avec le modèle théorique simple suivant.

1.2. Modèle théorique simple

Le résonateur de Helmholtz [2] est constitué d'une cavité de grand volume V reliée à l'atmosphère par un col étroit de section s et de longueur ℓ (cf. figure 1).

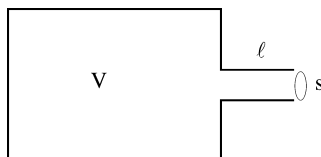


Figure 1

On obtient une théorie simple du système en supposant que l'air situé dans le col oscille en bloc, comme un bouchon qui couliserait. Son déplacement par rapport à son état de repos est repéré par $u(t)$ compté suivant l'axe du col ; sa masse est $M = \rho \ell s$, où ρ est la masse volumique de l'air.

La surpression dans le volume de l'oscillateur est définie par $p(t) = P(t) - P_o$, où P_o

est la pression atmosphérique et $P(t)$ est la pression de l'air contenu dans le volume. La force qui s'exerce sur l'air situé dans le col est donc $F = (P - P_o)s = ps$.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$Mu' = F \quad (1)$$

et le phénomène d'oscillation acoustique provient de l'élasticité de l'air contenu dans le grand volume : si le bouchon d'air situé dans le col est enfoncé vers l'intérieur, la surpression est positive et la force qu'il subit tend à le renvoyer vers l'extérieur ; s'il est déplacé vers l'extérieur, la surpression est négative et la force qu'il subit tend à le renvoyer vers l'intérieur.

Pour les mouvements de faible amplitude de l'air situé dans le col, la force F est une force de rappel élastique :

$$F = -Ku \quad (2)$$

où la raideur K se détermine de la façon suivante.

La compressibilité adiabatique⁽¹⁾ de l'air est, par définition :

$$\chi_s = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$$

Pour un déplacement u de l'air situé dans le col, $\delta V = su$ et $\delta P = p$. On tire donc :

$$p = - \frac{s}{\chi_s V} u \quad \text{et} \quad F = -Ku$$

avec :

$$K = \frac{s^2}{\chi_s V}$$

Les équations (1) et (2) montrent que le résonateur de Helmholtz est l'analogue exact de l'oscillateur mécanique masse-ressort, représenté sur la figure 2. La pulsation propre du système est donc :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

soit :

$$\omega_o = c \sqrt{\frac{s}{\ell V}}$$

où c est la célérité du son dans l'air⁽²⁾.

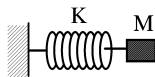


Figure 2

(1) C'est la compressibilité adiabatique χ_s qui intervient pour les vibrations acoustiques dans un fluide. Par exemple, la célérité du son dans un fluide est $c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_s}}$; χ_s : compressibilité adiabatique ; ρ : masse volumique.

(2) Un acousticien aurait écrit $\rho \frac{\ell}{s} u'' + \frac{1}{\chi_s V} u = 0$, où $\rho \frac{\ell}{s}$ est l'inertance et $\chi_s V$ la compliance.

Le résonateur de Helmholtz est donc un oscillateur simple, dont la pulsation propre dépend de ses caractéristiques géométriques s, ℓ, V . Le système peut être sondé en plaçant dans le grand volume un microphone sensible à la surpression p (elle-même proportionnelle au déplacement u de l'air situé dans le col).

1.3. Parallèle avec les oscillateurs classiques

Pour placer l'oscillateur de Helmholtz dans un contexte plus large, on le présente dans le tableau 1 en regard des oscillateurs traditionnels, en faisant apparaître les correspondances qui existent entre eux.

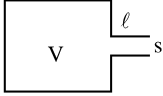
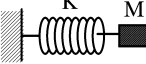
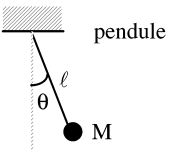
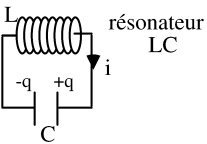
 <p>résonateur de Helmholtz</p>	 <p>masse-ressort</p>	 <p>pendule</p>	 <p>résonateur LC</p>
$u(t)$ $u'(t)$ $M = \rho \ell s$ $K = \frac{s^2}{\chi_s V}$ $M u'' = -K u$ $\omega_0 = c \sqrt{s/\ell V}$	$x(t)$ $v(t) = x'(t)$ M K $M v' = -K x$ $\omega_0 = \sqrt{K/M}$	$\theta(t)$ $\omega(t) = \theta'(t)$ $J = M \ell^2$ $Mg \ell$ $J \omega' = -Mg \ell \theta$ $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$	$q(t)$ $i(t) = q'(t)$ L $1/C$ $L i' = -q/C$ $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Tableau 1

2. EXPÉRIENCES SUR L'OSCILLATEUR SIMPLE

2.1. Présentation de l'oscillateur

2.1.1. Paramètres géométriques

Le résonateur de Helmholtz que nous avons construit et utilisé, a la forme décrite sur la figure 1. Son volume est formé d'un cylindre de longueur $L = 18,4$ cm et de diamètre intérieur $D = 7,4$ cm ; le volume possède ainsi la valeur :

$$V = \pi (D/2)^2 L = 791 \text{ cm}^3$$

Aux deux extrémités du cylindre, on trouve un fond et un couvercle qui ferment le grand volume. Le couvercle est percé de façon à pouvoir adapter un col cylindrique de diamètre intérieur $d = 1,55$ cm, c'est-à-dire de section :

$$s = \pi (d/2)^2 = 1,89 \text{ cm}^2$$

et de longueur ℓ . On dispose de plusieurs cols de différentes longueurs comprises entre 1 cm et 20 cm ; en les plaçant dans le prolongement les uns des autres, on peut augmenter cette gamme de longueurs. Toutes les pièces du système sont en PVC et ont été usinées au tour mécanique.

2.1.2. Procédure expérimentale

Pour la réalisation d'une expérience de résonance, on utilise le matériel suivant :

- un résonateur de Helmholtz (qui vient d'être décrit) ;
- un haut-parleur (HP) ;
- un générateur de basses fréquences (GBF) ;
- un microphone de petite taille (de 1 cm de diamètre) ;
- un oscilloscope.

Le HP est disposé au-dessus du col du résonateur à l'aide d'un support, d'une pince et d'une noix, autant de matériels courants en chimie. Le HP est excité en signaux sinusoïdaux par le GBF, ce qui impose une surpression sinusoïdale à l'entrée du col du résonateur. Le signal généré par le GBF est envoyé sur l'oscilloscope, pour servir de signal de déclenchement.

Le microphone, placé dans le grand volume du résonateur, est relié à l'une des voies de l'oscilloscope. Ce microphone est sensible à la surpression qui règne à l'intérieur du grand volume ; cette sensibilité se traduit par une conversion linéaire de la surpression en une tension électrique à ses bornes.

Dans une expérience d'oscillations libres, le HP n'est plus là. Par ailleurs, un oscilloscope à mémoire s'impose alors.

2.2. Expériences

2.2.1. Expérience de résonance

On réalise une expérience de résonance sur un oscillateur comportant un col de longueur $\ell = 5$ cm ; cette expérience est faite dans la disposition qui vient d'être décrite.

L'amplitude de la surpression dans le volume, en fonction de la fréquence du GBF, est portée sur la figure 3 (cf. page ci-après). On observe une résonance à la fréquence centrale :

$$f_o = 105,5 \text{ Hz}$$

La largeur de la résonance⁽³⁾, mesurée à $1/\sqrt{2}$ du maximum, vaut :

$$\Delta f = 6,0 \text{ Hz}$$

Le facteur de qualité du résonateur est donc :

$$Q = f_o / \Delta f = 18$$

La courbe de résonance de cet oscillateur est étroite, et par conséquent longue et délicate à obtenir à cause de la faible précision avec laquelle on peut balayer la fréquence d'un GBF ordinaire. Cependant, les expériences de résonance que nous ferons par la suite

(3) La dissymétrie de la résonance provient de la fonction de réponse du HP, dont il est tenu compte dans l'ajustement représenté en trait continu sur la figure 3 (cf. page ci-après).

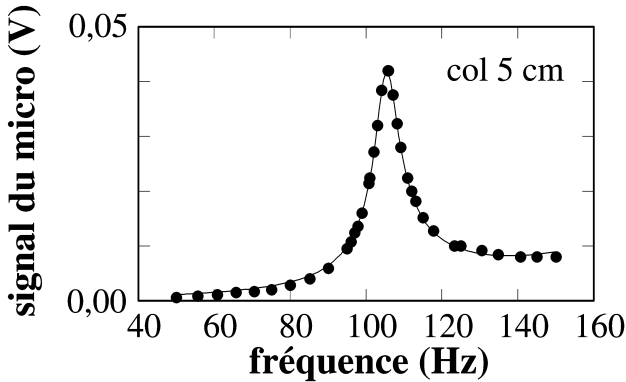


Figure 3

seront utilisées pour pointer des fréquences centrales, et le bon facteur de qualité du résonateur sera un atout pour les mesurer avec une bonne précision.

L'expérience de résonance qui vient d'être faite, avec une longueur de col de 5 cm, permet de déduire la période propre des oscillations de surpression :

$$T_o = 1/f_o = 9,5 \text{ ms}$$

ainsi que leur temps caractéristique d'amortissement (cf. annexe 1) :

$$\tau = Q/\pi f_o = 54 \text{ ms}$$

Il est possible de mesurer directement cette période propre et ce temps d'amortissement, en réalisant une expérience d'oscillations libres.

2.2.2. Expérience d'oscillations libres

On réalise cette expérience en maintenant le microphone à l'intérieur du volume du résonateur, et en gardant toujours une longueur de col de 5 cm. Le système est excité en engageant légèrement l'index dans le col et en le retirant brusquement.

Sur l'oscilloscope (à mémoire) placé en régime monocoup, on observe le signal délivré alors par le microphone. Ce signal est représenté sur la figure 4 ci-contre. Comme attendu, des oscillations libres amorties sont visibles ; on peut en observer une vingtaine environ, ce qui correspond bien au facteur de qualité déjà mesuré. Les trois premières oscillations apparaissent saturées, notamment pour les demi-alternances positives. Cet effet est dû à la grande amplitude de surpression qui règne dans l'oscillateur immédiatement après l'excitation. Au-delà de la troisième oscillation, cette saturation n'existe plus.

On mesure $20 T_o = 191 \text{ ms}$, d'où l'on tire la fréquence propre du résonateur :

$$f_o = 1/T_o = 105 \text{ Hz}$$

valeur en excellent accord avec celle mesurée dans l'expérience résonance.

La théorie des oscillateurs simples (rappelée dans l'annexe 1) prédit une décrois-

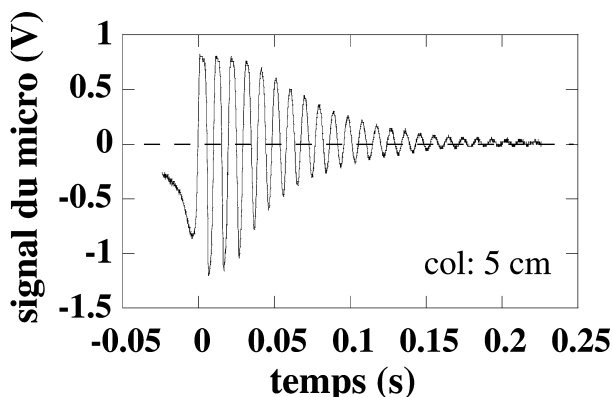


Figure 4

sance exponentielle de l'enveloppe des oscillations, avec le temps caractéristique $\tau = 1/\pi\Delta f$. Pour mesurer τ , on a porté en échelles semi-logarithmiques les amplitudes maximales des demi-alternances négatives, en fonction du temps. On obtient des points s'alignant sur une droite de pente $1/\tau = 21,6 \text{ s}^{-1}$, d'où la largeur de résonance :

$$\Delta f = 6,9 \text{ Hz}$$

valeur raisonnablement proche de celle tirée de l'expérience de résonance.

2.2.3. Comparaison avec la théorie

On vient de constater que l'expérience de résonance et celle d'oscillations libres se correspondaient au mieux. Il reste à vérifier que la théorie simple du résonateur de Helmholtz, développée au paragraphe 1.2., prédit bien la valeur mesurée de la fréquence de résonance ; c'est là qu'une subtilité du système se révèle.

En effet, si l'on suit cette théorie simple, la fréquence propre du résonateur vaut :

$$f_o = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{\ell V}}$$

Avec les paramètres de notre oscillateur, donnés au paragraphe 2.1., et une longueur de col $\ell = 5 \text{ cm}$, on obtient ⁽⁴⁾ :

$$f_o = 119 \text{ Hz}$$

Cette valeur calculée est très largement différente de la fréquence propre $f_o = 105 \text{ Hz}$ mesurée dans les deux expériences précédentes.

Ce désaccord provient du fait que nous avons considéré que l'air oscillant en bloc

(4) On utilise $c = 343 \text{ m/s}$ pour la célérité du son dans l'air à température ambiante ; cette valeur est calculée avec $c = (\gamma RT / M)^{1/2}$, $\gamma = 1,4$, $R = 8,31 \text{ J/K}$, $M = 29 \text{ g}$, $T = 293 \text{ K}$. Nous avons également obtenu cette valeur dans une expérience de propagation d'impulsions ultra-sonores guidées dans un tube. Voir également l'annexe 2 pour une autre méthode de détermination de c .

dans le col, avait exactement la longueur géométrique du col $\ell = 5$ cm. En fait, on comprend bien que les couches d'air situées de part et d'autre du col doivent être entraînées dans le mouvement, et donc que la longueur effective ℓ_{eff} de la masse d'air mobile est plus grande que la longueur géométrique ℓ du col. Dans l'expression de la fréquence propre issue de la théorie simple, ℓ_{eff} doit donc remplacer ℓ , ce qui conduit bien à une valeur plus faible que les 119 Hz initialement calculés. Ces considérations, ici qualitatives, sont vérifiées quantitativement au paragraphe suivant.

2.3. Variation des paramètres géométriques

2.3.1. Variation de la longueur géométrique du col

Dans cette expérience, nous avons fait varier la longueur géométrique du col ℓ de 1 cm à 45 cm, à volume fixe, et avons déterminé la fréquence de résonance de l'oscillateur pour chaque longueur de col. Le protocole expérimental est le même que celui effectué pour l'expérience de résonance du paragraphe 2.2.1.

Sur la figure 5, la période au carré, T_o^2 , est portée en fonction de la longueur du col ℓ (comprise entre 1 et 10 cm). Les points expérimentaux sont remarquablement bien alignés, comme on pouvait s'y attendre d'après la théorie simple qui prédit $T_o^2 = (2\pi/c)(V/s)\ell$; de plus, la pente de la droite montrée par les points est bien donnée par cette formule.

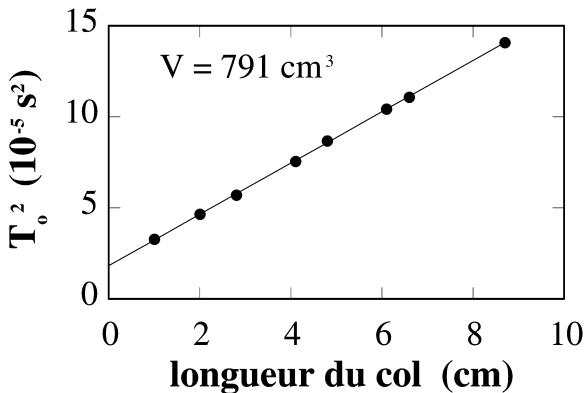


Figure 5

Cependant, la droite sur laquelle s'alignent les points expérimentaux ne passe pas par l'origine : tout se passe comme si la longueur géométrique ℓ du col était remplacée par :

$$\ell_{\text{eff}} = \ell + \ell_o$$

où la longueur supplémentaire ℓ_o est mesurée à la valeur $\ell_o = 1,3$ cm.

Des références spécialisées en acoustique [3] prédisent effectivement que c'est la

longueur ℓ_{eff} qui intervient à la place de la longueur géométrique ℓ , la longueur supplémentaire ℓ_o valant :

$$\ell_o = 8d/3\pi$$

où d est le diamètre de la section circulaire du col. Pour notre oscillateur, on dispose d'un diamètre de col $d = 1,55$ cm, ce qui permet de calculer $\ell_o = 1,32$ cm, valeur en excellent accord avec celle que l'on vient de déterminer expérimentalement.

Cette expérience permet donc de conclure que la pulsation propre du résonateur de Helmholtz est simplement obtenue en remplaçant par ℓ_{eff} la longueur ℓ du col apparaissant dans la théorie simple :

$$\omega_o = c \sqrt{\frac{s}{\ell_{\text{eff}} V}}$$

Remarquons néanmoins que les points expérimentaux obtenus pour T_o^2 s'écartent de la droite attendue, lorsque la longueur du col excède 10 cm (cf. annexe 2). Cela est dû au fait que la longueur du col n'est alors plus négligeable devant la longueur d'onde acoustique à la fréquence de résonance. Une théorie ondulatoire du résonateur est dans ce cas nécessaire ; elle est décrite dans l'annexe 2.

2.3.2. Variation du volume d'air

Cette expérience consiste à mesurer la fréquence propre du résonateur, en fonction de son volume d'air. Pour cela, on remplit le système avec de l'eau : connaissant le volume initial $V = 791 \text{ cm}^3$ du résonateur, le volume devient $V - V_{\text{eau}}$ lorsque le volume V_{eau} d'eau a été ajouté. Il est commode pour cette expérience de placer le résonateur sur une balance, afin de mesurer V_{eau} à l'aide de la masse d'eau ajoutée. Il est sage de scotcher le fil du microphone sur la paroi extérieure, de sorte qu'il ne tombe pas dans l'eau.

La figure 6 (cf. page ci-après) représente le carré de la période, T_o^2 , en fonction du volume d'eau ajouté. Les points expérimentaux se placent de façon très satisfaisante sur la droite :

$$T_o^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{\ell_{\text{eff}}}{s} (V - V_{\text{eau}})$$

que l'on attendait.

Cette expérience est donc une pleine confirmation de l'expression trouvée au paragraphe précédent 2.3.1. pour la pulsation propre du résonateur de Helmholtz.

2.4. Conclusion

Les expériences réalisées sur notre résonateur de Helmholtz fabriqué en matière plastique, ont donné des résultats très satisfaisants : d'une part, les expériences de résonance et d'oscillations libres se correspondent ; d'autre part, l'expression de la pulsation propre du résonateur, trouvée au paragraphe 1.2. puis raffinée au paragraphe 2.3.1., se confirme.

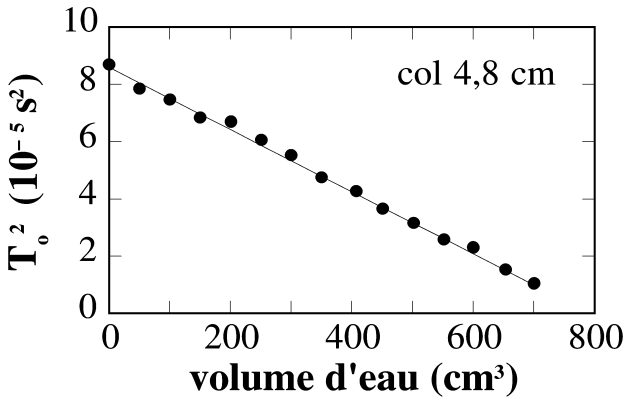


Figure 6

Le bon facteur de qualité du résonateur est un atout pour réaliser des mesures précises de fréquences de résonance. En supposant que l'amortissement du système provient du rayonnement acoustique émis par le col, l'expression $Q = 2\pi \left(\ell_{\text{eff}}^3 V / s^3 \right)^{1/2}$ est prédite [3]. Avec les paramètres géométriques des expériences du paragraphe 2.2. ($\ell = 5$ cm), il vient alors $Q = 10^3$, valeur bien plus élevée que $Q = 18$ obtenu en réalité. Il est probable que l'amortissement du résonateur soit plutôt dû à la viscosité de l'air (nous n'avons pas fait d'étude de l'amortissement du système).

3. RÉSONATEURS DE HELMHOLTZ COUPLÉS

3.1. Présentation

L'objectif des expériences suivantes est d'observer le comportement du système formé de deux résonateurs de Helmholtz lorsqu'ils sont couplés. Les résonateurs employés sont identiques à celui utilisé au paragraphe 2., et ont les caractéristiques suivantes : $V = 791 \text{ cm}^3$, $s = 1,89 \text{ cm}^2$ et on a fixé une longueur de col $\ell = 5$ cm dans nos expériences. La principale nouveauté est maintenant que le fond des deux cylindres est percé, afin de les relier par un tunnel de couplage de longueur géométrique h variable (de 2 cm à 45 cm environ). Le diamètre de ce tunnel est identique à celui des cols, c'est-à-dire $d = 1,55$ cm, ce qui correspond à une section d'aire $s = 1,89 \text{ cm}^2$. Un schéma du système est donné sur la figure 7.

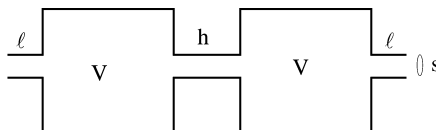


Figure 7

3.2. Expériences de résonance

En utilisant le même type de raisonnement que celui suivi au paragraphe 1.2. sur l'oscillateur simple ⁽⁵⁾, on montre que le système des deux oscillateurs couplés présente deux modes de résonance, de pulsations ω_- et ω_+ telles que :

$$\omega_-^2 = \omega_o^2 \quad \text{et} \quad \omega_+^2 = \omega_o^2 + 2\Omega^2$$

où $\Omega = c \sqrt{s/hV}$ est la pulsation caractéristique du couplage et $\omega_o = c \sqrt{s/\ell V}$ est la pulsation propre des résonateurs isolés.

Pour effectuer les mesures, on place un microphone dans le volume d'un résonateur et on excite sinusoidalement l'entrée du col de l'autre avec un haut-parleur (cf. figure 8a). On mesure l'amplitude de la tension délivrée par le microphone, en fonction de la fréquence d'excitation du haut-parleur. On s'attend à observer une résonance de fréquence basse fixe et une autre dont la fréquence, haute, varie avec h .

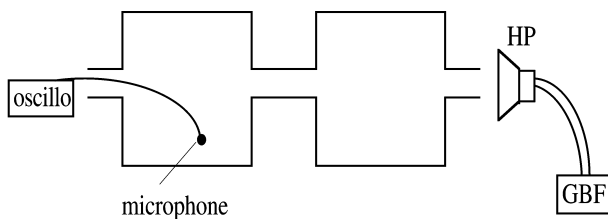


Figure 8a

Avant de débiter l'expérience, on a vérifié que les fréquences propres des oscillateurs pris séparément sont identiques, à l'aide d'une expérience rapide de résonance. On obtient les valeurs suivantes : $f_o(1) = 106,9$ Hz et $f_o(2) = 106,5$ Hz. La différence de 0,4 Hz est un décalage qui va bien se révéler négligeable par rapport aux séparations des fréquences propres que l'on va obtenir.

La figure 8b (cf. page ci-après) montre les deux résonances du système réalisé avec $h = 20,2$ cm (la ligne continue n'est qu'un guide pour les yeux). Elles sont pointées aux fréquences $f_- = 105$ Hz et $f_+ = 134$ Hz. En faisant passer le microphone d'un volume à l'autre, on observe comme attendu que les suppressions dans les deux volumes ont la même amplitude à résonance et oscillent en phase dans le mode de basse fréquence, en opposition de phase dans le mode de haute fréquence (la référence de phase est le signal électrique de commande du haut-parleur).

Les fréquences de résonance f_- et f_+ ont été mesurées pour différentes longueurs h du tunnel de couplage. On a tracé sur la figure 9 (cf. page ci-après) la combinaison $(f_+^2 - f_-^2)^{-1}$ en fonction de la longueur h du tunnel. Comme attendu d'après la théorie élémentaire énoncée au début de ce paragraphe, les points expérimentaux s'alignent suivant

(5) On fait l'hypothèse que les masses d'air dans les cols et dans le tunnel vibrent en bloc, cf. annexe 3.

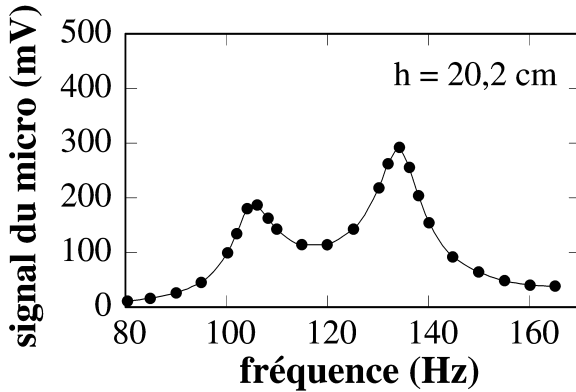


Figure 8b

une droite. La pente de cette droite est conforme à celle que l'on attend. Cependant, la droite ne passe pas par l'origine, pour la même raison que celle que nous avons discutée au paragraphe 2.3.1. : le bloc d'air oscillant dans le tunnel de couplage a une longueur plus grande que la stricte longueur géométrique h . La droite représentée sur la figure 9 est celle obtenue en remplaçant h par la longueur effective $h_{\text{eff}} = h + \ell_o$, où $\ell_o = 1,3$ cm est la longueur supplémentaire discutée au paragraphe 2.3.1. ; l'accord avec les points expérimentaux est satisfaisant.

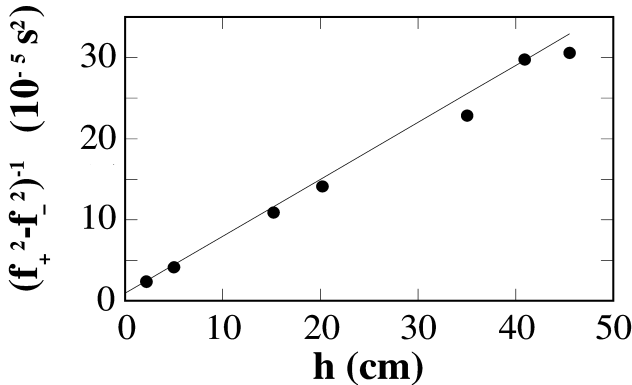


Figure 9

Les carrés des fréquences propres en fonction de $1/h_{\text{eff}}$ sont représentés sur la figure 10 (*cf.* page ci-contre). Les deux droites sont celles issues de la théorie élémentaire énoncée au début de ce paragraphe, en tenant compte des caractéristiques géométriques du système et du remplacement « à la main » de h par h_{eff} . L'accord avec les points expérimentaux est très bon (ℓ est également remplacé par $\ell_{\text{eff}} = \ell + \ell_o$).

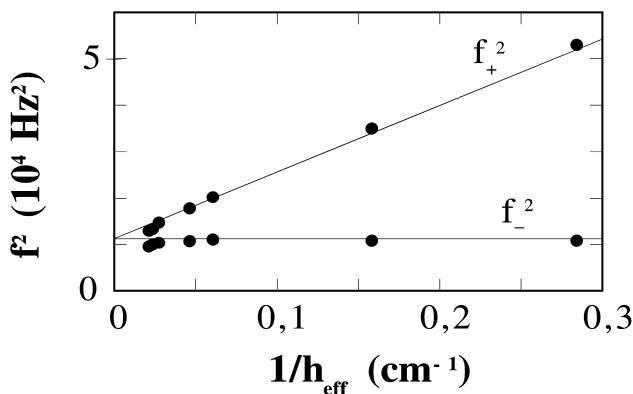


Figure 10

Remarquons pour finir que la fréquence basse du système, au lieu de rester constante, décroît avec la longueur du tunnel de couplage lorsque celui-ci devient grand. On fait face ici au problème déjà rencontré au paragraphe 2.3.1. : lorsque la taille du système n'est plus négligeable devant la longueur d'onde acoustique, on sort du cadre de validité de la théorie simple où les surpressions dans les volumes et les vitesses dans les cols et le tunnel sont des grandeurs uniformes. Cela explique que les points expérimentaux obtenus sur la figure 10 pour les plus grandes longueurs de tunnel s'écartent des droites attendues.

3.3. Excitation sélective des modes

Les surpressions dans les volumes du système formé des deux résonateurs couplés, ont des relations d'amplitude et de phase bien précises dans chacun des deux modes propres : dans le mode de basse fréquence, elles ont la même amplitude et oscillent en phase ; dans le mode de haute fréquence, elles ont la même amplitude et oscillent en opposition de phase (*cf.* annexe 3). Ces caractéristiques des modes propres permettent qu'ils soient excités sélectivement.

Cette possibilité est démontrée sur le système réalisé avec $h = 20,2$ cm, système déjà exploré au paragraphe 3.2. (*cf.* figure 8b). Deux haut-parleurs identiques sont approchés des deux cols, comme indiqué sur la figure 11a. Ils sont alimentés en parallèle par le générateur de basses fréquences, de telle sorte que le signal du microphone soit minimal

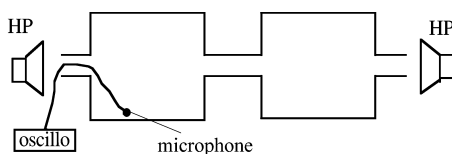


Figure 11a

à la fréquence de 134 Hz. Il est nécessaire également de jouer sur l'éloignement de l'un des haut-parleurs pour minimiser ce signal. Ces conditions étant remplies, la fréquence est balayée et la courbe de résonance enregistrée. On obtient la courbe de la figure 11b : seule la résonance à 105 Hz apparaît. En effet, les deux haut-parleurs imposent des surpressions de même amplitude et en phase dans les deux volumes du système, ce qui correspond à la structure du mode de basse fréquence.

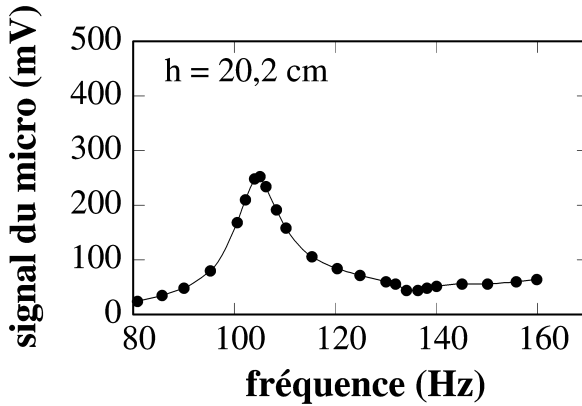


Figure 11b

Le mode de haute fréquence peut également être excité seul, en inversant la polarité électrique sur l'un des deux haut-parleurs et en trouvant leur positionnement qui minimise le signal à 105 Hz. Les deux haut-parleurs imposent alors des surpressions de même amplitude et en opposition de phase dans les deux volumes, et la courbe de résonance ne révèle alors que le mode à 134 Hz (*cf.* figure 11c).

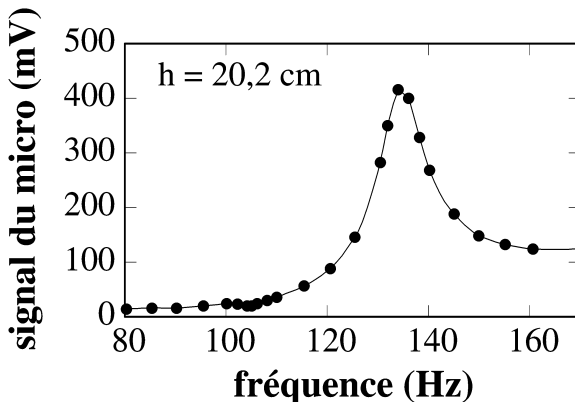


Figure 11c

3.4. Oscillations libres: battements

Nous avons achevé nos expériences sur les résonateurs couplés par une mesure d'oscillations libres des surpressions dans les deux volumes. Cette expérience a été faite toujours sur le système à $h = 20,2$ cm, en plaçant maintenant un microphone dans chaque volume. En l'absence de tout haut-parleur, le système est excité en engageant légèrement l'index dans l'un des cols et en le dégageant brusquement. L'oscilloscope placé en mode monocoup permet de visualiser les oscillations de surpression dans chaque volume.

La figure 12a montre les oscillations libres enregistrées dans le volume dont le col n'est pas excité. Ces oscillations, amorties, montrent des battements ; la période de ces battements est estimée à $T_b = 33$ ms, ce qui correspond comme attendu à une fréquence $f_b = 30$ Hz égale à la différence des fréquences des modes propres (exactement, $f_+ - f_- = 29$ Hz).

La figure 12b montre les oscillations libres enregistrées simultanément dans l'autre volume, celui dont le col est excité. On observe qu'à un maximum d'amplitude des oscillations de surpression enregistrées sur un microphone, correspond un nœud de celles enregistrées sur l'autre, et *vice-versa* : on vérifie ainsi que la fréquence des battements f_b est la fréquence d'échange de l'énergie acoustique entre les deux volumes du système.

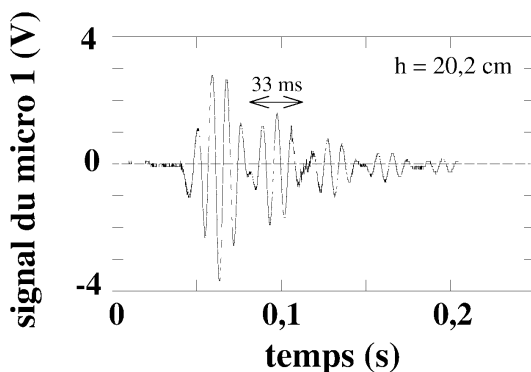


Figure 12a

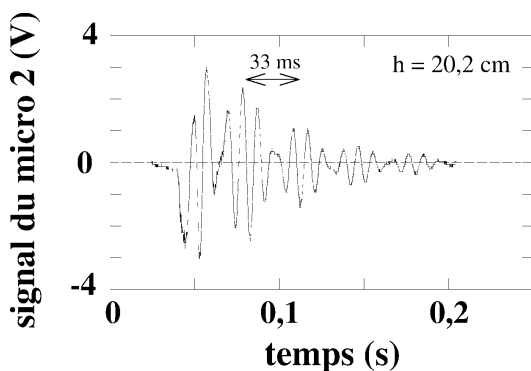


Figure 12b

CONCLUSION

Nous avons fait valoir que le résonateur acoustique de Helmholtz est un oscillateur facilement compréhensible, grâce à l'analogie étroite qu'il partage avec l'oscillateur mécanique masse-ressort. De plus, ce résonateur acoustique est aisément réalisé en pratique et facilement manipulable ; des expériences de résonance et d'oscillations libres sur le résonateur simple ont été présentées, ainsi que des expériences portant sur deux résonateurs associés, expériences qui illustrent les propriétés générales exhibées par deux oscillateurs couplés.

Une subtilité du résonateur de Helmholtz est qu'il faut veiller, lors de sa construction, que sa taille reste suffisamment faible devant la longueur d'onde acoustique à la fréquence de résonance, afin que son traitement théorique reste simple. Mais cette subtilité n'est certainement pas plus délicate que l'approximation de Hooke dans le système masse-ressort, ou que le problème de l'anharmonicité du pendule aux grandes amplitudes, ou que la capacité parasite à haute fréquence présentée par l'auto-inductance d'un résonateur électrique LC...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VON HELMHOLTZ H. *On the Sensations of Tone*. 1885 (réédition : Dover Publications, 1954). Des photocopies de résonateurs de Helmholtz historiques sont disponibles à l'adresse :
<http://www.physics.brown.edu/Studies/Demo/waves/demo/3d3040.html>
- [2] COSNARD C. Résonance en acoustique. *Bull. Un. Phys.*, octobre 1988, vol. 82, n° 707, p. 1051-1071. Voir également :
<http://www.phys.unsw.edu.au/~jw/Helmholtz.html>
- [3] Voir, par exemple :
 - ♦ TEMKIN. *Elements of acoustics*. Wiley, 1981.
 - ♦ KINSLEY et FREY. *Fundamentals of acoustics*. Wiley, 1962.
- [4] TANG S.H. et al. Velocity of sound and resonance absorption determination from a low-cost Helmholtz experiment. *European Journal of Physics*, 1985, vol. 6, p. 134.

Annexe 1

Résonateur simple : oscillations libres et résonance

A1.1. OSCILLATIONS LIBRES

On a montré au paragraphe 1.2. que la surpression $p(t)$ dans le volume du résonateur suivait l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$p''(t) + \omega_o^2 p(t) = 0$$

En introduisant un amortissement fluide, de taux Γ , l'équation suivie par la surpression devient :

$$p''(t) + \Gamma p'(t) + \omega_o^2 p(t) = 0$$

La recherche d'une solution exponentielle $\exp(rt)$ fournit l'équation caractéristique $r^2 + \Gamma r + \omega_o^2 = 0$, dont les solutions sont $r = -\frac{\Gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$; lorsque l'amortissement

est faible ($\Gamma \ll \omega_o$), $r = -\frac{\Gamma}{2} \pm i\omega_o$ et les oscillations libres obéissent à :

$$p(t) = A \exp(-t/\tau) \sin(\omega_o t + \phi).$$

Elles ont la forme d'oscillations sinusoïdales de pulsation ω_o , amorties avec une enveloppe exponentielle de temps caractéristique $\tau = 2/\Gamma$. L'amplitude A et la phase ϕ dépendent des conditions initiales.

A1.2. RÉSONANCE

En suivant la même démarche que celle suivie au paragraphe 1.2., on montre que la surpression $p(t)$ dans le volume du résonateur suit l'équation :

$$p''(t) + \Gamma p'(t) + \omega_o^2 p(t) = \omega_o^2 p_{ext}(t)$$

lorsque le haut-parleur crée la surpression $p_{ext}(t)$ au voisinage de l'entrée du col.

En régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω , $p_{ext}(t) = \text{Re}(p_o e^{i\omega t})$ et la surpression $p(t) = \text{Re}(A e^{i\omega t})$ dans le résonateur est caractérisée par l'amplitude complexe

$$A = \frac{\omega_o^2 p_o}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}, \text{ c'est-à-dire } A = \frac{(\omega_o/2)p_o}{\omega_o - \omega + i\Gamma/2} \text{ lorsque l'amortissement est faible } (\Gamma \ll \omega_o).$$

Pour une pulsation excitatrice résonnante ($\omega = \omega_o$), les oscillations de surpression dans le résonateur ont une amplitude maximale Qp_o , où $Q = \omega_o/\Gamma$ est le facteur de qualité du résonateur. La largeur de la résonance, mesurée à $1/\sqrt{2}$ du maximum, vaut $\Delta\omega = \Gamma$.

Annexe 2

Une théorie ondulatoire du résonateur de Helmholtz

On analyse ici le résonateur acoustique décrit au paragraphe 1.2., dans le cadre d'une théorie ondulatoire simple où le champ acoustique dans le système est décrit comme la somme de deux ondes planes sinusoïdales se propageant en sens opposés dans la direction de l'axe de symétrie $z'z$ (cf. figure A1).

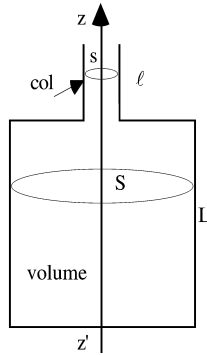


Figure A1

s et ℓ sont la section et la longueur géométrique du col ; S et L sont les mêmes grandeurs associées au volume $V = SL$ du résonateur.

La vitesse associée à l'onde vers les $z > 0$ est $v_+(z, t) = A_+ e^{i(\omega t - kz)}$ dans le volume et $v_+(z, t) = a_+ e^{i(\omega t - kz)}$ dans le col, avec $k = \omega/c$; la surpression est $p_+(z, t) = Z v_+(z, t)$, où $Z = \rho c$ est l'impédance caractéristique de l'air (ρ : masse volumique de l'air ; c : célérité du son).

La vitesse de l'onde vers les $z < 0$ est $v_-(z, t) = A_- e^{i(\omega t + kz)}$ dans le volume et $v_-(z, t) = a_- e^{i(\omega t + kz)}$ dans le col ; la surpression associée est $p_-(z, t) = -Z v_-(z, t)$.

En tout point du système, la vitesse et la surpression sont la somme des contributions de chaque onde : $v = v_+ + v_-$, $p = p_+ + p_-$.

Les conditions aux limites sur le fond du volume (vitesse nulle), à l'extrémité débouchante du col (surpression nulle) et au passage interne volume-col (continuité de la surpression et du débit) donnent les pulsations propres du résonateur comme solutions de l'équation :

$$tg \frac{\omega L}{c} = s / Stg \frac{\omega \ell}{c}$$

En l'absence de col ($s = 0$), les pulsations propres sont les $\omega_n = n\pi c/L$, avec $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Comme attendu, on retrouve les pulsations propres d'un tube acoustique de longueur L fermé en ses deux extrémités ($L = n\lambda_n/2$).

En présence du col (s non nulle, et faible), une analyse graphique de l'équation aux pulsations propres montre que les modes de tube précédents ont leur pulsation à peine modifiée, tandis qu'il apparaît un nouveau mode de basse pulsation, à ω_o telle que $\omega_o L/c < \pi/2$; il s'agit du mode de Helmholtz auquel nous nous intéressons.

A2.1. RÉSONANCES DE TUBE SONORE

Nous avons pointé les fréquences $f_n = \omega_n/2\pi$ des modes de tube en fonction de leur ordre n , pour le système décrit au paragraphe 2.1. (avec $\ell = 4,8$ cm). Portées sur la figure A2, ces fréquences suivent la loi linéaire attendue $f_n = nc/2L$. La connaissance de la longueur $L = 18,4$ cm permet de mesurer la célérité du son ⁽⁶⁾ ; on trouve $c = 345$ m/s, valeur cohérente avec l'expression $c = (\gamma RT/M)^{1/2}$ ($\gamma = 1,4$; $R = 8,31$ J/K ; $M = 29$ g) considérée à la température ambiante.

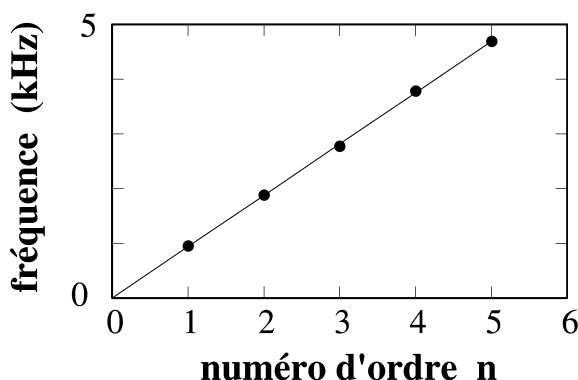


Figure A2

A2.2. RÉSONANCE DE HELMHOLTZ

Considérons maintenant le mode de Helmholtz. Si sa pulsation ω_o est assez faible pour que les tangentes apparaissant dans l'équation aux pulsations propres, puissent être confondues avec leurs arguments (ce qui revient à $\ell \ll \lambda$ et $L \ll \lambda$, où $\lambda = 2\pi c/\omega_o$ est la longueur d'onde sonore à la pulsation ω_o), alors l'expression simple de ω_o obtenue au paragraphe 1.2. est retrouvée :

$$\omega_o = c \sqrt{\frac{s}{\ell V}}$$

(6) Pour un autre type de mesure de la célérité du son à l'aide de la résonance de Helmholtz, voir [4].

En considérant un terme de plus dans le développement de $\operatorname{tg} x$: $\operatorname{tg} x = x + x^3/3$, on obtient l'expression modifiée :

$$\omega_o = c \sqrt{\frac{s}{\ell V}} \left[1 - \frac{s(\ell^2 + L^2)}{6\ell V} \right]$$

Il est à noter que cette théorie ondulatoire, tout comme la théorie élémentaire du paragraphe 1.2., ne prévoit pas le nécessaire remplacement de la longueur géométrique du col ℓ par la longueur effective $\ell_{\text{eff}} = \ell + \ell_o$, où $\ell_o = 8d/3\pi$ (d : diamètre de la section circulaire du col). On en est réduit à effectuer ce remplacement « à la main ».

Un écart à l'expression simple pour la pulsation du mode de Helmholtz, a été observé dans le dépouillement des données expérimentales concernant l'étude du carré de la période en fonction de la longueur du col (cf. § 2.3.1.). L'expression modifiée de la pulsation conduit à la loi :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{V\ell_{\text{eff}}}{s} + \frac{4\pi^2}{c^2} \frac{L^2 + \ell_{\text{eff}}^2}{3}$$

qui contient un terme supplémentaire par rapport à celle que l'on peut tirer de la théorie simple du paragraphe 1.2. Cette loi est tracée en traits pointillés sur les deux figures⁽⁷⁾ A3a et A3b, obtenues pour des volumes d'air de 791 cm³ et $V = 396$ cm³.

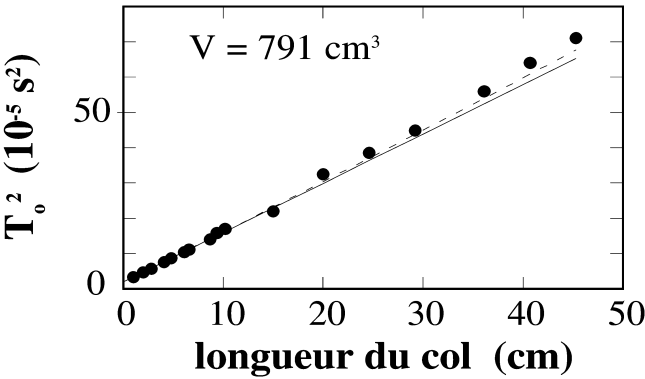


Figure A3a

(7) Le volume d'air de 396 cm³ dans le résonateur est réalisé en introduisant le volume d'eau :

$$V_{\text{eau}} = 791 - 396 = 395 \text{ cm}^3.$$

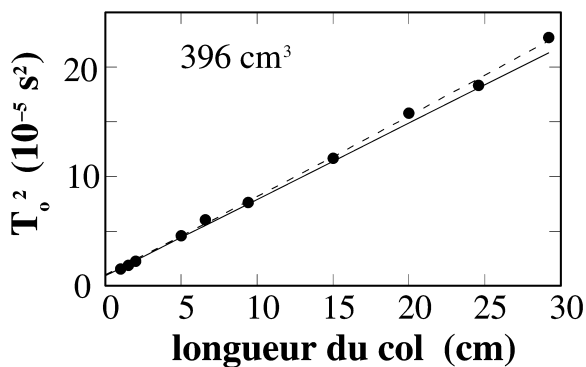


Figure A3b

On parvient ainsi à comprendre que les points expérimentaux s'écartent de la droite prévue par la théorie simple, lorsque la longueur du col devient grande.

Annexe 3

Résonateurs de Helmholtz couplés

Deux résonateurs identiques peuvent être couplés en les reliant par un tunnel de couplage de longueur géométrique h . Le volume de chaque résonateur est toujours noté V , la longueur du col ℓ et l'aire de la section du col s . Le tunnel de couplage possède également la section s (cf. figure A4a).

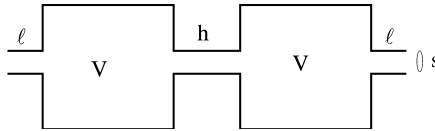


Figure A4a

On suppose, comme on l'a fait au paragraphe 1.2., que les masses d'air dans les cols et dans le tunnel de couplage se meuvent en bloc. La masse d'air dans un col est $M = \rho \ell s$, celle dans le tunnel de couplage vaut $m = \rho h s$ (ρ : masse volumique de l'air). Les masses M situées dans les cols sont couplées par l'élasticité de l'air contenu dans les deux volumes, via la masse d'air située dans le tunnel ; le système est équivalent au modèle mécanique représenté sur la figure A4b, où la raideur K a l'expression vue au paragraphe 1.2. : $K = s^2 / \chi_s V$, χ_s étant la compressibilité adiabatique de l'air.

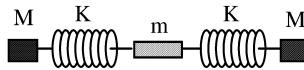


Figure A4b

En notant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les déplacements longitudinaux des masses M , et $x(t)$ celui de la masse m , on obtient le système d'équations couplées :

$$\begin{aligned} M u_1'' &= -K(u_1 - x) \\ m x'' &= -K(x - u_1) - K(x - u_2) \\ M u_2'' &= -K(u_2 - x) \end{aligned}$$

La recherche d'un mode propre à la pulsation ω : $u_1(t) = \text{Re}(A_1 e^{i\omega t})$, $x(t) = \text{Re}(B e^{i\omega t})$, $u_2(t) = \text{Re}(A_2 e^{i\omega t})$, conduit aux pulsations propres :

$$\omega_- = \omega_o \quad \text{et} \quad \omega_+ = \sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2}$$

où $\omega_o = c(s/\ell V)^{1/2}$ est la pulsation propre d'un résonateur isolé et $\Omega = c(s/hV)^{1/2}$ est la pulsation caractérisant le couplage des deux résonateurs.

Les surpressions dans chacun des deux volumes ont pour expression :

$$p_1 = -\frac{s}{\chi_s V}(x - u_1) \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{s}{\chi_s V}(u_2 - x)$$

Dans le mode de pulsation basse ($\omega_- = \omega_o$), $u_2 = -u_1$ et $x = 0$: les bouchons d'air dans les cols oscillent en opposition de phase (cf. figure A5a) et les surpressions dans les volumes oscillent en phase : $p_2 = p_1$.

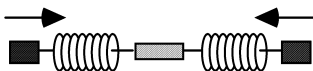


Figure A5a

Dans le mode de pulsation haute (ω_+), $u_2 = u_1$ et $x = -2lu_1/h$: les bouchons d'air dans les cols oscillent en phase (cf. figure A5b) et les surpressions dans les volumes oscillent en opposition de phase : $p_2 = -p_1$.

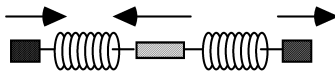


Figure A5b

Il va de soi que la théorie simple qui vient d'être développée ne tient que si la taille géométrique du système reste faible devant la longueur d'onde acoustique. En outre, cette théorie est trop rudimentaire pour prévoir le nécessaire remplacement des longueurs géométriques des cols et du tunnel par les longueurs effectives associées, que l'on mesure expérimentalement (cf. les paragraphes 2.3. et 3.2.).