

Chaîne d'oscillateurs couplés

Notice 40

Jean Hare et Arnaud Belloche

5 juin 2003

Introduction

Ce pont, comprenant 9 condensateurs et 8 inductances, permet de réaliser rapidement un circuit constitué d'une chaîne de N oscillateurs identiques couplés, avec $N = 1, 2 \dots 8$. L'étude de deux oscillateurs identiques couplés (en mécanique et/ou en électronique) met en évidence le transfert d'énergie réversible d'un oscillateur vers l'autre ; dans ce dispositif, on prévoit un transfert d'énergie de proche en proche, caractéristique du phénomène de propagation. De même que pour deux oscillateurs couplés les modes propres sont des états d'excitation collective reflétant la symétrie du problème, on s'attend à observer des modes propres de structure *ondulatoire*, reflétant la symétrie de *translation* du système couplé. Néanmoins les conditions aux limites aux deux extrémités de la chaîne contraignent cette symétrie et conduisent à l'établissement d'ondes *stationnaires*, avec des fréquences discrètes. Leur distribution est une signature de la *relation de dispersion* que l'on pourrait observer sur un système analogue constitué d'un nombre arbitrairement grand d'oscillateurs élémentaires.

1 Analyse théorique

1.1 Paramétrisation

On introduit naturellement comme variables dynamiques les $N + 1$ charges $q_n(t)$ des condensateurs (de capacité C) et les N courants $I_n(t)$ des selfs (d'inductance L). La loi des noeuds donne de façon évidente la relation $\dot{q}_n(t) = I_n(t) - I_{n-1}(t)$ (avec les conventions de signe données par la figure ci-dessous).

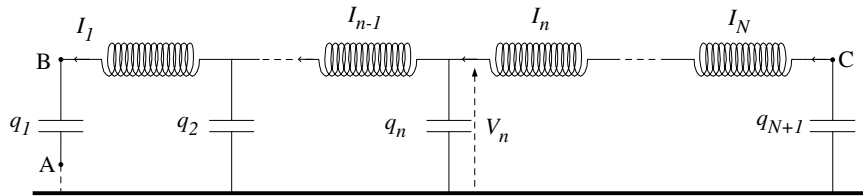


FIG. 1: Circuit électrique, définition des grandeurs physiques q_n , V_n et I_n et des points d'excitation et de mesure A, B et C

La différence entre le nombre de courants et de charges peut sembler surprenante ; elle résulte en

réalité de ce que les charges q_n ne sont pas indépendantes, mais doivent satisfaire la relation :

$$\sum_{n=1}^{N+1} q_n = Cste ,$$

la constante pouvant être prise nulle pour simplifier. La solution la plus naturelle et la plus efficace est alors d'introduire les charges Q_n définies par :

$$Q_n(t) = \int^t I_n(\tau) d\tau = \sum_{p=1}^n q_p(t) , \text{ qui sont bien indépendantes pour } n \in [1, N] , \quad (1)$$

et on a donc bien N degrés de liberté, et donc N modes propres.

1.2 Équations du mouvement

Elles sont ici fournies par la « loi des mailles » appliquée à chacune des N mailles du circuit :

$$\frac{1}{C}(q_{n+1} - q_n) \equiv V_{n+1} - V_n = -e_n = L\dot{I}_n , \quad (2)$$

qui conduit aux équations satisfaites par les charges q_n :

$$\ddot{q}_n + \omega_0^2 (2q_n - q_{n+1} - q_{n-1}) = 0 \text{ pour } n \in [2, N] \quad (3)$$

et

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 (q_1 - q_2) = \ddot{q}_{N+1} + \omega_0^2 (q_{N+1} - q_N) = 0 , \quad (3')$$

soit aussi, en terme des Q_n :

$$\ddot{Q}_n + \omega_0^2 (2Q_n - Q_{n+1} - Q_{n-1}) = 0 \text{ pour } n \in [1, N] , \quad (4)$$

en introduisant les paramètres auxiliaires $Q_0 = Q_{N+1} = 0$, qui expriment la fermeture du circuit aux deux extrémités.

1.3 Modes propres et fréquences propres

Comme on vient de la voir, les variables Q_n permettent d'exprimer les N équations du mouvement de façon unifiée, et en même temps d'écrire très simplement les conditions aux limites. Les ondes stationnaires recherchées s'écrivent alors :

$$Q_n^{(p)} = A_p \sin(n\phi_p) \cos(\omega_p t) \quad (5)$$

où l'indice $p \in [1, N]$ caractérise un mode de fréquence ω_p et de « nombre d'onde » ϕ_p . Le choix du sinus dans la dépendance spatiale assure automatiquement que la condition $Q_0 = 0$ est vérifiée. La condition à l'autre extrémité s'écrit bien sûr $\sin((N+1)\phi_p) = 0$, soit $(N+1)\phi_p = 0 \text{ modulo } \pi$. Comme ϕ_p est lui-même défini modulo π , on en déduit qu'un choix possible est :

$$\phi_p = p \frac{\pi}{N+1} \text{ avec } p = 1, 2 \dots N , \quad (6)$$

ce qui donne bien N modes linéairement indépendants.

Leur fréquences propres peuvent être déterminées en imposant que les expressions (5) satisfassent à l'équation (4), ce qui conduit à la relation :

$$\omega_p = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{\phi_p}{2}\right) \right| . \quad (7)$$

1.4 Imperfections

Les inductances utilisées sont loin d'être idéales¹ ; en particulier, elles exhibent à haute fréquence une petite capacité parallèle, qui forme avec la self un « circuit bouchon » possédant une résonance très aiguë autour de 1 MHz. Le choix des valeurs $L = 10$ mH et $C = 10$ nF conduit à $\omega_0 \sim 10^5 \text{s}^{-1}$, et permet donc que toutes les fréquences propres soient nettement inférieures. Dans le domaine des basses fréquences, les inductances sont seulement limitées par leur résistance série r , qui dans notre cas est de l'ordre de 30Ω .

La prise en compte de cette résistance conduit à réécrire l'équation (4) :

$$\ddot{Q}_n + \gamma \dot{Q}_n + \omega_0^2 (2Q_n - Q_{n+1} - Q_{n-1}) = 0 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{r}{L} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ rad/s} . \quad (8)$$

Les solutions de cette équation sont toujours des ondes stationnaires de la même forme que précédemment, au remplacement près de ω_p par $\omega'_p = (\omega_p^2 - (\gamma/2)^2)^{1/2}$, et amorties par un facteur $\exp(-\gamma t/2)$.

2 Mise en œuvre expérimentale

2.1 Branchement

Le montage est constitué d'une succession de circuits série L - C et on peut les coupler en chaîne à l'aide des cavaliers. On choisit ainsi le nombre N d'oscillateurs composant la chaîne.

On excite le circuit en entrée en branchant un générateur basse-fréquence au niveau de la première capacité entre le point A et la masse. On peut alors observer la réponse du circuit en mesurant le potentiel entre un point quelconque du circuit et la masse.

On doit noter que les extrémités du circuit sont des *noeuds* des ondes stationnaires pour les grandeurs Q_n , et qu'elles sont donc des ventres pour les charges q_n :

$$q_n^{(p)} = Q_n^{(p)} - Q_{n-1}^{(p)} = 2A_p \sin\left(\frac{\phi_p}{2}\right) \cos\left((n - \frac{1}{2})\phi_p\right) \cos(\omega_p t) \quad (9)$$

et donc pour les tensions V_n . On aura donc intérêt à brancher la détection au point B ou au point C du circuit ; on peut en outre observer que le signal est effectivement plus faible en tout autre point.

Dans tous les cas on veillera à ne pas dépasser des courants I_n supérieurs à 50 mA, sous peine d'échauffer, voire de détruire les inductances, ainsi que d'être affecté par leur réponse non-linéaire, en raison de leur noyau de ferrite.

2.2 Mesures

2.2.1 Fréquences

On peut pointer les résonances associées aux différents modes propres de façon manuelle en observant les maxima de la tension en fonction de la fréquence. On notera que la phase du signal évolue de façon non-triviale.

Il est néanmoins beaucoup plus avantageux d'utiliser un oscilloscope numérique, et on peut alors visualiser le spectre de la fonction de transfert de deux façons différentes :

- soit à l'aide d'une modulation très lente, en tirant parti de la rémanence rendue artificiellement très grande ;
- soit on excite le circuit à l'aide de créniaux de longue période, de façon à observer la réponse indicelle (combinant tous les modes), et en utilisant la transformation de Fourier rapide.

¹Référence 22R106, 10 mH de C&D Technologies, cf. spécifications en annexe

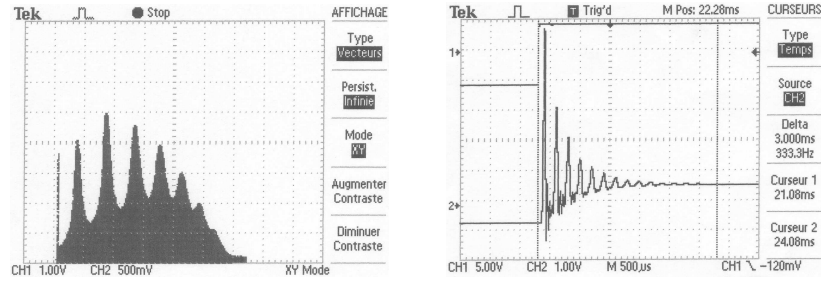


FIG. 2: Copies d'écran pour $N = 8$. A gauche : vobulation ; à droite : réponse indicielle

Dans tous les cas, on observe une largeur importante de ces résonances, consistante avec le calcul conduit au § 1.4, et celle-ci rend parfois impossible le pointé des résonances d'ordre le plus élevé, qui sont plus rapprochées.

On peut alors tracer les fréquences de résonances ainsi relevées en fonction de l'ordre p du mode correspondant, et vérifier qu'elles se placent effectivement sur le graphe de la fonction de l'équation (7).

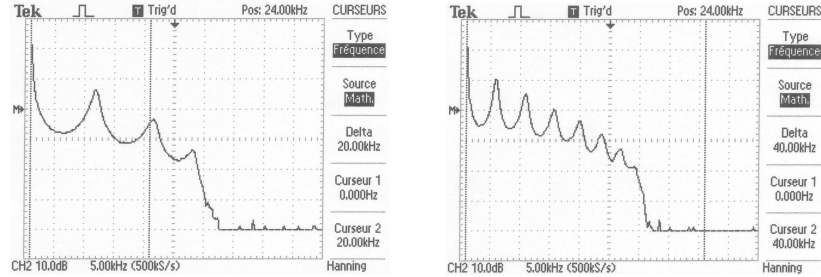


FIG. 3: Copies d'écran montrant le spectre de la réponse indicielle. A gauche : pour $N = 3$; à droite : pour $N = 8$

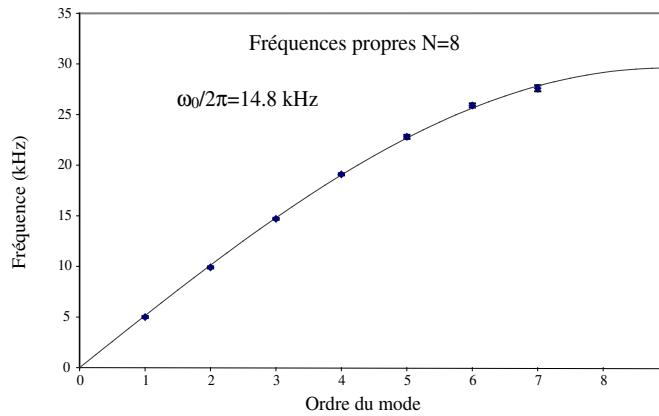


FIG. 4: Courbe des fréquences propres en fonction de l'ordre du mode (pour $N = 8$). La valeur de ω_0 utilisée pour la courbe théorique est obtenue par ajustement. La valeur attendue d'après les valeurs nominales de L et C est de 15.9 kHz.

2.2.2 Évolution avec N

Dans un second temps, en reprenant les mesures du paragraphe précédent pour plusieurs valeurs de N , et en traçant les fréquences non plus en fonction de l'ordre mais des angles ϕ_p (calculés), on

peut reporter l'ensemble des mesures sur le même graphe, en ajustant la loi $\omega(\phi) = 2\omega_0 \sin(\phi/2)$.

3 Pour aller plus loin...

3.1 Analogie mécanique : modes de phonons

On peut noter que les énergies électrique $E_{\text{el.}}$ et $E_{\text{mag.}}$ magnétique s'écrivent, en termes des Q_n :

$$E_{\text{el.}} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(Q_n - Q_{n-1})^2}{2C} , \text{ et } E_{\text{mag.}} = \sum_{n=1}^N \frac{L\dot{Q}_n^2}{2} . \quad (10)$$

En faisant le remplacement :

$$Q_n \mapsto x_n , L \mapsto m , 1/C \mapsto K ,$$

on fait apparaître ces expressions comme celles de l'énergie potentielle et cinétique d'un ensemble de N masses identiques (de masse m) reliées de proches en proches par $N + 1$ ressorts (de raideur K), les extrémités étant maintenues fixes. Un tel système est communément utilisé pour modéliser les vibrations des atomes dans un cristal, et les modes propres étudiés sont donc analogues à des *modes de phonons acoustiques*. Ceux-ci sont généralement décrits par la relation de dispersion :

$$\omega(k) = 2\omega_0 |\sin(ka/2)| , \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{K/m}$$

où k est le « vecteur d'onde », et a la « maille » du cristal. Toutefois, N étant fini, les valeurs possibles pour k sont quantifiées en raison des conditions aux limites, et vérifient : $k_p = p 2\pi/D$, où $D = (N + 1)a$ est la longueur totale de la chaîne. A la limite $k \ll 2\pi/a$, on retrouve la propagation du son à la vitesse :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0 |\sin(ka/2)|}{k} \approx a\omega_0 .$$

Ce dernier résultat met en lumière le fait que le problème électrocinétique initial est dépourvu d'*échelle de longueur*, et qu'il n'est donc pas possible de définir dans ce cas de « vitesse » de propagation à partir des seules fréquences.

3.2 Ligne coaxiale

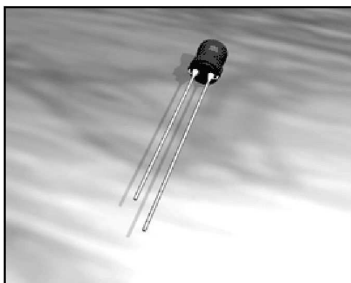
Le circuit peut aussi être vu comme un modèle discret pour une portion de ligne coaxiale, de longueur D , divisées en $N + 1$ éléments de même longueur a . En notant \mathcal{L} et \mathcal{C} les inductance et capacité linéiques de la ligne, chacun des éléments peut être assimilé à un quadripôle L - C , analogue à ceux qui composent notre circuit, avec $L = \mathcal{L}a$ et $C = \mathcal{C}a$. Le système sera à nouveau caractérisé par les relations

$$\omega(k) = 2\omega_0 |\sin(ka/2)| , \text{ et } k = p \frac{2\pi}{D}$$

Il n'y a pas lieu d'être surpris de ne pas retrouver la propagation sans dispersion qui caractérise la ligne coaxiale : la discrétisation opérée n'est une approximation raisonnable que pour des échelles de longueurs grandes devant a , et donc pour des fréquences spatiales $k \ll 2\pi/a$. Comme précédemment, on retrouve alors :

$$v = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \frac{2|\sin(ka/2)|}{ka} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} ,$$

qui est le résultat attendu, et dont on constate avec satisfaction qu'il est indépendant de a , et restera donc valable à la limite $a \rightarrow 0$.



FEATURES

- Radial Format
- Up to 1.5A IDC
- 10 μ H to 2.2mH
- Low DC Resistance
- Miniature Size
- PCB Mounting
- MIL-I-23053/5 Class I & II Slewing
- Fully Tinned Leads
- Supplied in Bags of 100
- Custom Parts Available

DESCRIPTION

The 2200R Series is a general-purpose range of inductors suitable for low to medium current applications. Their small footprint makes them ideal for high-density applications where a chip inductor will not cope with the power requirement.

SELECTION GUIDE

Order Code	Inductance	DC Resistance	DC Current Continuous ²	Nominal Q at f kHz		Nominal Self Resonant Frequency
	$\pm 10\%$ (at 1kHz) μ H	Ω MAX	A MAX	Q	f	MHz
22R103	10	0.07	1.50	140	1400	40.00
22R153	15	0.80	1.10	150	1400	30.00
22R223	22	0.11	1.00	150	950	20.00
22R333	33	0.15	0.92	150	950	15.00
22R473	47	0.28	0.78	160	600	12.80
22R683	68	0.30	0.77	150	700	6.80
22R104	100	0.50	0.66	160	450	6.00
22R154	150	0.54	0.52	160	300	4.40
22R224	220	1.05	0.44	150	250	3.70
22R334	330	1.21	0.38	150	250	3.30
22R474	470	1.87	0.31	140	250	2.90
22R684	680	2.70	0.25	120	250	2.20
22R105	1mH	3.80	0.17	150	200	1.80
22R155	1.5mH	5.40	0.13	160	200	1.65
22R225	2.2mH	11.00	0.11	150	200	1.35

TYPICAL CORE CHARACTERISTICS

Inductance Temperature Coefficient	Resistance Temperature Coefficient	Curie Temperature TC	Saturation Flux BSAT
350ppm	3900ppm	190°C	325mT

ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Operating free air temperature range	-25°C to 70°C
Storage temperature range	-50°C to 125°C