

## Sur l'expérience de Desaguliers de la déviation d'un filet d'eau par une tige électrisée

par **Bruno JECH**

Lycée Léonce Vieljeux - 17000 La Rochelle

bruno.jech@ac-poitiers.fr

### RÉSUMÉ

*L'expérience de DESAGULIERS consistant à dévier un filet d'eau à l'aide d'un champ électrique est ici analysée d'un point de vue théorique ce qui permettra de montrer qu'elle n'établit en aucune manière la preuve du caractère polaire de l'eau, la déviation observée devant être essentiellement attribuée à l'existence des ions résultant de l'autoprotolyse aqueuse. Ce caractère polaire se révèle en revanche pleinement en présence d'ondes décimétriques si bien que l'usage des fours à micro-ondes reste la meilleure justification pédagogique dudit caractère.*

*« Il n'y a pas de simplicité véritable.*

*Il n'y a que des simplifications. »*

**Léon-Paul Fargue** - *Sous la lampe*

La lecture du numéro 935 du *Bup* de juin 2011 réserve une surprise de taille : dans un article fort intéressant, Bertrand WOLFF et Christine BLONDEL nous informent que la polarisation d'orientation n'est pas la principale responsable de la déviation d'un filet d'eau présenté à une tige électrisée [10] : ce sont les ions hydroxydes et oxonium qui en seraient la cause largement prédominante. En cela, leur interprétation s'oppose frontalement à l'interprétation orthodoxe (origine dipolaire de la déviation), d'ailleurs officialisée par directives ministérielles comme le rappellent ces auteurs. Après tout pourquoi pas ! Ce ne serait pas la première fois que la physique enseignée serrait ponctuellement en désaccord avec la physique qui se fait, voire avec les faits mêmes de la nature. Mais il est vrai qu'il est difficile de ne pas succomber aux séductions de l'explication orthodoxe et que ceux qui n'y ont pas recouru lui jettent la première pierre : en ayant nous-mêmes usé, nous ne serons pas de ceux-là. En tout cas, il semble que le sujet suscite interrogations et débats sur la Toile<sup>(1)</sup> et donc appelle une réponse approfondie, d'autant que certains points avancés dans l'article cité ci-dessus nous semblent quelque peu contestables.

(1) Voir par exemple le forum du site *Futura-Science* : <http://forums.futura-sciences.com/chimie>

Car quelle est la problématique ?

**Première question :** la déviation électrique d'un filet d'eau prouve-t-elle le caractère polaire de ce liquide ? La réponse est catégoriquement **non** comme nous le démontrerons ci-après et il nous faudra donc désormais nous rendre à cette in-évidence.

**Seconde question :** le rôle de la polarisation d'orientation dans le processus de déviation est-il « marginal » comme l'avancent B. WOLFF et C. BLONDEL ? Il nous faut également répondre **non** à cette question, car dans l'affirmative, le risque est grand de négliger purement et simplement le phénomène de polarisation.

Dans ce qui suit, nous établirons donc l'équation d'évolution du champ électrique à l'intérieur d'une goutte d'eau sphérique – plus simple à étudier qu'un filet d'eau en mouvement – placée dans un champ uniforme, équation qui fera apparaître une *constante de temps* d'(établissement de l')*équilibre électrique*. Dans le cas de l'eau pure à 25 °C, cette constante de temps est de l'ordre de la centaine de microsecondes ce qui fait qu'en une milliseconde la goutte atteint un état d'équilibre électrique... annihilant toute polarisation d'orientation.

Dans un deuxième temps, nous tiendrons compte de la nécessaire inhomogénéité spatiale du champ électrique pour dévier cette goutte et soulignerons quelle est la longueur caractéristique pertinente dans l'étude de ce processus. Nous évaluerons ensuite la force que subit cette goutte ce qui nous permettra de voir comment optimiser la source du champ électrique.

Enfin, dans un troisième temps, nous proposerons deux traitements alternatifs du problème en effectuant d'une part une analyse harmonique de l'expérience et d'autre part en généralisant le propos par une analyse adimensionnelle de l'équation régissant le champ électrique dans un milieu polaire conducteur. Lorsqu'il s'agira de mettre en évidence le caractère polaire de l'eau, nous serons alors fondés à rejeter définitivement l'inadéquation de l'expérience de la déviation électrique d'un filet aqueux en lui substituant une autre expérience... d'une banalité quotidienne.

Mais auparavant, disons un mot sur celui qui fut le premier à rapporter l'expérience de la déviation électrique d'un filet aqueux qui nous occupe ici.

## 1. À PROPOS DE JOHN THEOPHILUS DESAGULIERS

Quatorze ans après la mort de NEWTON, à une époque où la science de l'électricité en était encore à balbutier, l'expérience de la déviation électrique d'un filet d'eau fut réalisée pour la première fois fin août 1741 devant la *Royal Society* par l'un de ses honorables membres, John Theophilus DESAGULIERS (1683-1744) ([2], p. 666-667). Celui-ci, qui avait déjà effectué toute une série d'expériences sur l'électricité depuis 1738, en fit une compilation dans une *Dissertation* rédigée en français et primée par l'Académie de Bordeaux en 1742 [3]. Il y expose ladite expérience comme suit :

« *Expérience XII : Si l'on fait jouer d'une fontaine artificielle un petit jet d'eau, d'environ un quart de ligne de diamètre [de l'ordre de 0,5 mm], de bas en haut, ou de haut en bas ; quand on approche le tuyau frotté, le jet se courbe vers le tuyau à la distance d'un pied [environ 30 cm] ; et si l'on approche le tuyau plus près, le jet étant tout emporté par le tuyau, se change en rosée sur le tuyau, c'est-à-dire, s'applique au tuyau en petites gouttes, pourvu que le jet n'ait pas trop de force de jaillir.* » ([3], p. 11).

DESAGULIERS décrit par ailleurs le fameux « tuyau » qu'il utilisa pour effectuer cette expérience – précision qui nous sera utile par la suite :

« *Le tuyau de verre dont on se sert ordinairement dans les expériences électriques doit avoir environ trois pieds ou trois pieds et demi de longueur [soit 90 cm à 1,05 m], un pouce et demi de diamètre [de l'ordre de 4 cm] et environ une ligne d'épaisseur [de l'ordre de 2 mm]...* » ([3], p. 8).

Avant DESAGULIERS, on avait déjà observé une interaction entre eau et corps électrisés. Dès l'an 1600, William GILBERT avait signalé dans son *De Magnete*<sup>(2)</sup> qu'une goutte d'eau posée sur une surface bien sèche est attirée et déformée par de l'ambre frotté ([5],



Figure 1 : John Theophilus DESAGULIERS.

## DISSERTATION SUR L'ELECTRICITÉ DES CORPS

*QUI a remporté le Prix au Jugement de l'Académie  
Royale des Belles Lettres, Sciences & Arts.*

Par Monsieur DESAGULIERS, de la Société Royale  
de Londres, Chapelain de M. le Prince de Galles.



A BORDEAUX,

Chez PIERRE BRUN, Imprimeur-Aggrégé de l'Académie Royale,  
rue Saint James.

M. DCC. XLII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Figure 2 : Frontispice de la *Dissertation* de Desaguliers.

- (2) Le *De Magnete* publié en 1600 de William GILBERT (1544-1603), médecin de la reine Elisabeth 1<sup>re</sup>, peut être considéré comme le premier traité d'électricité et de magnétisme digne de ce nom. C'est lui qui introduisit dans le langage scientifique occidental le terme électrique forgé à partir du grec *ηλεκτρον* signifiant *ambre jaune*.

p. 89). Un autre britannique, Stephen GRAY (1666-1736) qui, en 1729, mit en évidence ce que nous appelons aujourd'hui la *conductivité électrique* – et son contraire – et avec qui DESAGULIERS collabora, GRAY donc montra en janvier 1731 qu'il pouvait déformer électriquement la surface libre d'une eau contenue dans un récipient isolé et même l'électrifier [6], expériences que rapporte également DESAGULIERS (expérience XI, [3], p. 10-11). Mais comme l'écrit l'éminent Joseph PRIESTLEY (1733-1804) dans l'une des toutes premières histoires de l'électricité :

« [DESAGULIERS] mit en évidence l'attraction de l'eau par un tuyau excité d'une façon bien meilleure que cela ne l'avait été fait auparavant, à savoir en approchant le tuyau d'un jet issu d'une fontaine de compression, jet qui de ce fait s'inclina notablement dans la direction du tuyau. » ([9], p. 68).

Si l'apport de DESAGULIERS à la connaissance de l'électricité reste somme toute modeste, sa contribution fut néanmoins fondamentalement nécessaire en une période où l'empirique guidait les premiers pas d'une science qui se cherchait. Par ailleurs, nous lui sommes redevables sur le plan terminologique. En effet, toujours dans sa *Dissertation*, il écrit :

« Nous appellerons ci-après le [corps] non électrique étendu en long, qui reçoit l'électricité, le conducteur de l'électricité... » ([3], p. 12).

L'expression est restée : c'est à DESAGULIERS que nous devons l'appellation *conducteur électrique*.

Un dernier point anecdotique eu égard au sujet qui nous préoccupe : il va de soi que DESAGULIERS fut et reste un scientifique britannique. Mais il naquit le 12 mars 1683 à... La Rochelle où il reçut le prénom de Jean Théophile et où il ne vécut que quelques mois : son père, pasteur protestant, dût émigrer avec sa famille à Guernesey du fait des persécutions anti-huguenotes – nous sommes alors à deux ans de la révocation de l'Édit de Nantes. Neuf ans plus tard, la famille s'installa à Londres. Ensuite, DESAGULIERS, qui accéda à la prêtrise anglicane, se consacra à des travaux remarquables dans divers domaines scientifiques et techniques. Il fut pris sous l'aile protectrice de NEWTON dont il fut l'un des amis et des plus fervents propagateurs des idées. Et, accessoirement, il participa activement à la création de la franc-maçonnerie moderne.

## 2. MODÉLISATION DE L'ÉLECTRISATION D'UN ÉLÉMENT AQUEUX

### 2.1. Champ électrique intérieur à une goutte d'eau

Dans un souci de simplification, nous n'allons pas considérer un filet d'eau, mais simplement une goutte d'eau mésoscopique<sup>(3)</sup> supposée sphérique de volume  $\vartheta$  – nous pourrions ainsi user de certains résultats classiques sans avoir à les redémontrer – et dont

(3) Cette simplification nous évitera d'avoir à recourir au formalisme eulérien sans pour autant limiter la portée du propos. En effet la trajectoire de cette goutte s'identifie à une ligne de courant en régime établi et donne ainsi l'allure du filet d'eau sous l'action d'un champ électrique.

le rayon est d'au moins 0,1 mm : nous resterons de ce fait dans le cadre de l'approximation du régime quasi stationnaire (ARQS) tant que les durées caractéristiques des phénomènes étudiés seront supérieures à :

$$10^{-4}/3 \cdot 10^8 \approx 10^{-12} \text{ s}$$

À l'instant  $t = 0$ , soumettons alors cette goutte à un champ électrique uniforme et stationnaire  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}$  de direction unitaire  $\vec{u}$ .

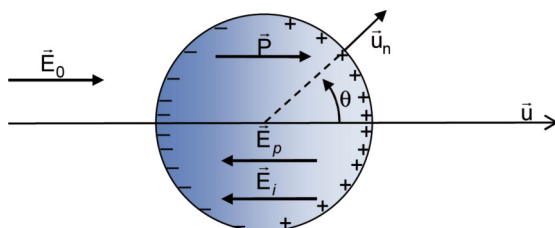


Figure 3 : Goutte d'eau soumise à un champ électrique uniforme.

Ce champ électrique a pour effet d'orienter les moments dipolaires moléculaires de l'eau ce qui conduit à l'apparition au sein de la goutte d'un *champ de polarisation*  $\vec{P}$  – ou densité volumique de moments dipolaires – et donc, en surface, d'une densité d'électricité  $\sigma_p$  d'origine dipolaire et d'expression :

$$\sigma_p(\theta) = \vec{P} \cdot \vec{u}_n = P \cos(\theta)$$

Un calcul classique – voir par exemple [4], p. 158 ou [8], p. 394 – montre que cette distribution de charges crée alors un champ électrique d'expression :

$$\vec{E}_p = -\vec{P}/3\epsilon_0 = -(P/3\epsilon_0)\vec{u}$$

Par ailleurs, l'eau étant un milieu ionique au moins du fait de son autoprotolyse, il y a apparition d'un courant temporaire dans la goutte et donc d'une accumulation supplémentaire de charge en surface. La conservation de l'électricité impose alors que la variation de la charge d'origine ionique en surface  $\sigma_i dS$  soit égale à la charge transportée par le courant ionique de densité  $\vec{J}_i$  ce qui implique :

$$d(\sigma_i dS) = \vec{J}_i \cdot dS \vec{u}_n dt \Rightarrow d\sigma_i/dt = J_i \cos(\theta)$$

Il s'ensuit qu'à un instant donné, la densité surfacique  $\sigma_i$  a une expression de la forme  $\sigma_{i0} \cos(\theta)$ , où  $\sigma_{i0}$  est la densité d'électricité d'origine ionique en  $\theta = 0$ , et crée donc au sein de la goutte un champ électrique :

$$\vec{E}_i = -(\sigma_{i0}/3\epsilon_0)\vec{u}$$

En conséquence, la valeur du champ électrique à l'intérieur de la goutte prend à tout instant l'expression suivante :

$$E_{\text{int}} = E_0 + E_p + E_i = E_0 - \frac{P + \sigma_{i0}}{3\epsilon_0} \quad (1)$$

## 2.2. Loi d'évolution dipolaire

L'approche microscopique de la polarisation en régime stationnaire conduit à définir la *polarisabilité*  $\alpha$  d'un milieu comportant  $\rho_N$  dipôles par unité de volume, chacun d'eux ressentant un champ local  $\vec{E}_{\text{loc}}$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \rho_N \alpha \vec{E}_{\text{loc}} = \epsilon_0 A \vec{E}_{\text{loc}}$$

Dans la modélisation de LORENTZ ([4], p. 171-172) applicable ici, ce champ local de direction  $\vec{u}$  a pour expression :

$$E_{\text{loc}} = E_{\text{int}} + P/3\epsilon_0$$

Compte tenu de la relation (1), il s'identifie donc au champ appliqué diminué du champ créé par la distribution surfacique des ions :

$$E_{\text{loc}} = E_0 - \sigma_{i0}/3\epsilon_0$$

Par ailleurs, la *susceptibilité électrique*  $\chi_e$  de l'eau en régime stationnaire est macroscopiquement définie par :

$$P = \epsilon_0 \chi_e E_{\text{int}}$$

D'où la relation liant la *polarisabilité mésoscopique*  $A = \rho_N \alpha$  à la susceptibilité  $\chi_e$  :

$$P = \epsilon_0 \chi_e E_{\text{int}} = \epsilon_0 A (E_{\text{int}} + P/3\epsilon_0) \Rightarrow A = 3\chi_e / (3 + \chi_e)$$

En régime non stationnaire, nous adopterons la théorie de Debye<sup>(4)</sup> stipulant que le champ de polarisation  $\vec{P}$  se relaxe avec une *constante de temps de polarisation*  $\tau_p$  le conduisant à être régi par l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\tau_p \frac{dP}{dt} + P = \epsilon_0 A E_{\text{loc}} = \epsilon_0 \frac{3\chi_e}{3 + \chi_e} \left( E_0 - \frac{\sigma_{i0}}{3\epsilon_0} \right) \quad (2)$$

Nous pouvons déterminer  $\tau_p$  grâce au comportement de l'eau en régime harmonique formalisé en notation complexe par :

$$j^2 = -1 \quad ; \quad \underline{E}_0 = E_0 \exp(j\omega t) \quad ; \quad \underline{P} = \epsilon_0 \frac{A}{1 + j\omega\tau_p} \underline{E}_{\text{loc}} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}_{\text{int}} = \epsilon_0 (\chi' - j\chi'') \underline{E}_{\text{int}}$$

(4) Peter DEBYE (1884-1966), physico-chimiste néerlandais, prix Nobel de chimie 1936, exposa l'essentiel de cette théorie en 1929 dans "Polar Molecules", *Chemical Catalogue Company*, New York, p. 172.

La susceptibilité complexe  $\chi_e$  est donc proportionnelle à  $1/(1 + j\omega\tau_p)$ , sa partie imaginaire  $\chi''$  – qui rend compte de l'absorption par le milieu – présentant un maximum lorsque  $\omega\tau_p$  vaut 1, ce qui permet de mesurer  $\tau_p$  – voir par exemple [4], p. 185 et [7], p. 826-827 et p. 836-838. Le maximum étant ici atteint pour une fréquence de l'ordre de 17 GHz (cf. figure 4), il s'ensuit :

$$\tau_p = 1/2\pi f_p \approx 10^{-11} \text{ s}$$

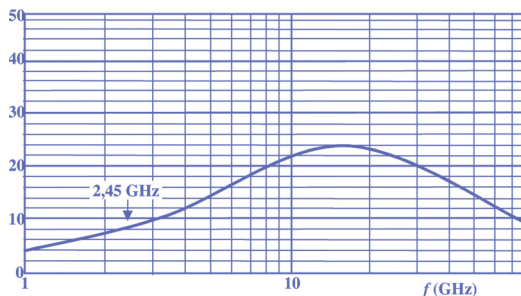


Figure 4 : Partie imaginaire de la susceptibilité complexe de l'eau<sup>(5)</sup>.

- ♦ Autrement dit, **le régime établi de polarisation est obtenu en  $10 \tau_p$**  – pour faire bonne mesure – **soit cent picosecondes**.

### 2.3. Loi d'évolution ionique

Sous l'action du champ  $\vec{E}_{\text{int}}$  intérieur à la goutte, les ions résultant de l'autoproto-lyse de l'eau – à savoir les ions hydroxydes et oxonium en concentration molaire de  $10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$  dans une eau pure à 25 °C – se mettent en mouvement et donnent lieu à un courant électrique régi par une théorie analogue à celle de DRUDE<sup>(6)</sup>. Ainsi, dans le référentiel du milieu conducteur, la vitesse  $\vec{v}_i$  des porteurs de charge  $q_i$  – de masse  $m_i$ , en densité volumique  $\rho_{N_i}$  – est régie par l'équation suivante :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_i \vec{E}_{\text{int}} - \frac{m_i}{\tau_i} \vec{v}_i \Leftrightarrow \tau_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \vec{v}_i = \frac{q_i \tau_i}{m_i} \vec{E}_{\text{int}} \Rightarrow \tau_i \frac{d\vec{J}_i}{dt} + \vec{J}_i = \frac{\rho_{N_i} q_i^2 \tau_i}{m_i} \vec{E}_{\text{int}}$$

Dans la dernière expression,  $\vec{J}_i = \rho_{N_i} q_i \vec{v}_i$  désigne le champ densité de courant ioni-

(5) Document extrait de la brochure *Application des magnétrons* (Radiotechnique-Compelec, Paris, 1978), p. 5. La fréquence de 2,45 GHz est celle allouée aux fours dits à micro-ondes.

(6) Paul DRUDE (1863-1906), physicien allemand, qui publia en 1900 une théorie concernant les métaux : “Zur Elektronentheorie der Metalle”, *Annalen der Physik*, vol. I, 1900, p. 566. L'approche de Drude est quelque peu différente de celle adoptée ici.

que global et le facteur de  $\vec{E}_{\text{int}}$  s'identifie à la *conductivité électrique stationnaire*  $\gamma_i$  associée à ces porteurs. La constante de temps ionique  $\tau_i$  rend compte de la durée que mettent les ions à trouver leur régime de croisière et, typiquement, au bout de  $10 \tau_i$ , le courant ionique peut être considéré comme établi. Dans le cas de solutions où les ions sont monovalents, il est judicieux d'exprimer la conductivité ionique en fonction de la concentration molaire  $c_i$  des ions de masse molaire  $M_i$ , soit :

$$\gamma_i = c_i \mathcal{F}^2 \tau_i / M_i$$

avec :

$$\mathcal{F} = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Ainsi, pour une eau pure dont la conductivité électrique à 25 °C est de  $\gamma_i = 5,5 \mu\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ , nous pouvons définir une constante de temps ionique *équivalente* en prenant une concentration ionique *globale*  $c_i = \underline{2} \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ , soit <sup>(7)</sup> :

$$M_i = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow \tau_i = M_i \gamma_i / c_i \mathcal{F}^2 \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

- ◆ Autrement dit, **au bout d'une demi-picoseconde, le courant ionique est établi.**
- ◆ Tant que les durées caractéristiques d'évolution de la goutte restent supérieures à la picoseconde – ce que nous impose ici l'ARQS compte tenu des dimensions de la goutte d'eau –, nous pouvons donc considérer que la loi d'Ohm locale est applicable dans la goutte et poser :

$$\vec{J}_i = \gamma_i \vec{E}_{\text{int}}$$

- ◆ Il s'ensuit que la densité surfacique de charges ioniques  $\sigma_{i0}$  est liée au champ intérieur par l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{d\sigma_{i0}}{dt} = \gamma_i E_{\text{int}}} \quad (3)$$

## 2.4. Loi d'évolution du champ intérieur à la goutte

### 2.4.1. Énoncé

En dérivant l'équation (1) par rapport au temps et compte tenu des équations (2) et (3), il vient :

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dt} = \frac{dE_0}{dt} - \frac{1}{3\epsilon_0} \left( \frac{dP}{dt} + \frac{d\sigma_{i0}}{dt} \right) = \dots$$

(7) À 25 °C, les conductivités molaires des ions hydroxydes et oxonium étant respectivement de  $20 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \text{mol}^{-1}$  et de  $35 \text{ mS} \cdot \text{m}^2 \text{mol}^{-1}$ , il vient plus précisément :

$$\tau_{\text{OH}^-} = 3,6 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

$$\tau_{\text{H}_3\text{O}^+} = 7,1 \cdot 10^{-14} \text{ s} \Rightarrow 2\tau_i / M_{\text{H}_2\text{O}} = \tau_{\text{OH}^-} / M_{\text{OH}^-} + \tau_{\text{H}_3\text{O}^+} / M_{\text{H}_3\text{O}^+}$$



$$\dots = \frac{dE_0}{dt} - \frac{1}{3\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\tau_p} \left[ \epsilon_0 A \left( E_0 - \frac{\sigma_{i0}}{3\epsilon_0} \right) - P \right] + \gamma_i E_{\text{int}} \right\}$$

Dérivons à nouveau cette équation pour éliminer le champ de polarisation  $P$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{\text{int}}}{dt^2} &= \frac{d^2 E_0}{dt^2} - \frac{1}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{\tau_p} \left( \epsilon_0 A \left( \frac{dE_0}{dt} - \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{d\sigma_{i0}}{dt} \right) - \frac{dP}{dt} \right) + \gamma_i \frac{dE_{\text{int}}}{dt} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{d^2 E_0}{dt^2} - \frac{1}{\tau_p} \left( \frac{A}{3} \left( \frac{dE_0}{dt} - \frac{\gamma_i}{3\epsilon_0} E_{\text{int}} \right) + \frac{dE_{\text{int}}}{dt} - \frac{dE_0}{dt} + \frac{\gamma_i}{3\epsilon_0} E_{\text{int}} \right) - \frac{\gamma_i}{3\epsilon_0} \frac{dE_{\text{int}}}{dt} \end{aligned}$$

Il s'ensuit en introduisant la constante de temps  $\tau_e = (3 + \chi_e) \epsilon_0 / \gamma_i$  :

$$\boxed{\tau_p \tau_e \frac{d^2 E_{\text{int}}}{dt^2} + \left( \tau_e + \frac{3 + \chi_e}{3} \tau_p \right) \frac{dE_{\text{int}}}{dt} + E_{\text{int}} = \tau_e \left( \tau_p \frac{d^2 E_0}{dt^2} + \frac{3}{3 + \chi_e} \frac{dE_0}{dt} \right)} \quad (4)$$

Dans le cas étudié, le champ  $E_0$  est stationnaire et l'équation ci-dessus se ramène à une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Par ailleurs, pour l'eau pure à 25 °C, la susceptibilité électrique est de l'ordre de 80, ce qui donne  $\tau_e \approx 1,3 \cdot 10^{-4}$  s à comparer à  $\tau_p \approx 10^{-11}$  s. Plus généralement, tant que  $\tau_e$  est très supérieure à  $\tau_p$ , cette équation se ramène à :

$$\text{Si } \tau_e \gg \tau_p, \quad \tau_p \tau_e \frac{d^2 E_{\text{int}}}{dt^2} + \tau_e \frac{dE_{\text{int}}}{dt} + E_{\text{int}} = 0$$

Les conditions initiales peuvent alors être obtenues à partir de l'équation (1) et du taux de variation temporel du champ intérieur :

$$E_{\text{int}}(0) = E_0 \quad ; \quad \frac{dE_{\text{int}}}{dt}(0) = - \left( \frac{\chi_e}{(3 + \chi_e) \tau_p} + \frac{3 + \chi_e}{3 \tau_e} \right) E_0 \approx - \frac{\chi_e}{(3 + \chi_e) \tau_p} E_0$$

Il s'ensuit tous calculs faits et en effectuant les approximations nécessaires résultant du fait que  $\tau_e$  est très supérieure à la constante de temps de polarisation :

$$E_{\text{int}}(t) \approx (\chi_e \exp(-t/\tau_p) + 3 \cdot \exp(-t/\tau_e)) \frac{E_0}{3 + \chi_e}$$

#### 2.4.2. Si l'eau pure était polaire et non conductrice...

Dans ce cas, la conductivité  $\gamma_i$  serait nulle et la constante de temps  $\tau_e$  infinie ce qui donnerait pour le champ intérieur (cf. figure 5a, page ci-après) :

$$E_{\text{int}}(t) \approx (\chi_e \exp(-t/\tau_p) + 3) \frac{E_0}{3 + \chi_e}$$

Nous constatons qu'au bout de  $10 \tau_p$ , soit environ cent picosecondes, le champ

intérieur prendrait la valeur constante  $3E_0/(3 + \chi_e)$ , soit environ  $E_0/28$  avec  $\chi_e \approx 80$ . Ce champ intérieur, sans être nul, serait donc fortement atténué par rapport à  $E_0$  et il en résulterait un champ de polarisation stationnaire égal à :

$$P = \epsilon_0 \chi_e E_{\text{int}}(\infty) = \epsilon_0 A E_0 = 2,9 \cdot \epsilon_0 E_0$$

La densité surfacique de charge de polarisation aurait donc pour expression :

$$\sigma_p(\theta) = 2,9 \cdot \epsilon_0 E_0 \cos(\theta)$$

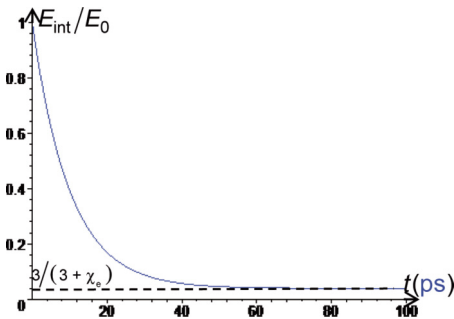
### 2.4.3. Si l'eau pure était faiblement conductrice et non polaire...

Dans ce cas, l'équation différentielle qui régirait le champ intérieur aurait simplement pour expression (cf. figure 5b) :

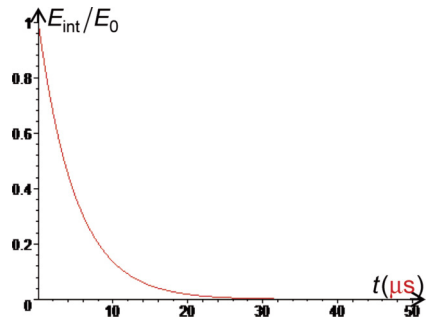
$$\frac{3\epsilon_0}{\gamma_i} \frac{dE_{\text{int}}}{dt} + E_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E_{\text{int}}(t) = E_0 \exp(-\gamma_i t / 3\epsilon_0)$$

Le champ intérieur décroîtrait avec une constante de temps d'environ  $5 \mu\text{s}$  et serait donc nul au bout de cinquante microsecondes. La densité surfacique de charges ioniques aurait alors pour expression :

$$\sigma_i(\theta) = 3 \cdot \epsilon_0 E_0 \cos(\theta)$$



**Figure 5a :** Évolution temporelle du champ intérieur dans le cas d'une goutte d'eau qui serait polaire et non conductrice.



**Figure 5b :** Évolution temporelle du champ intérieur dans le cas d'une goutte d'eau qui serait non polaire et faiblement conductrice.

### 2.4.4. Cas d'une eau pure à 25 °C

Dans le cas d'une goutte d'eau pure –  $pH = 7$  – pour laquelle  $\tau_p \approx 10 \text{ ps}$  et  $\tau_e \approx 130 \mu\text{s}$ , nous avons :

$$E_{\text{int}}(t)/E_0 \approx 0,96 \cdot \exp(-t/\tau_p) + 0,04 \cdot \exp(-t/\tau_e)$$

En zoomant sur les cent premières picosecondes, nous retrouvons le graphe de la figure 5a. Effectivement, l'influence ionique est alors négligeable puisque, même en pre-

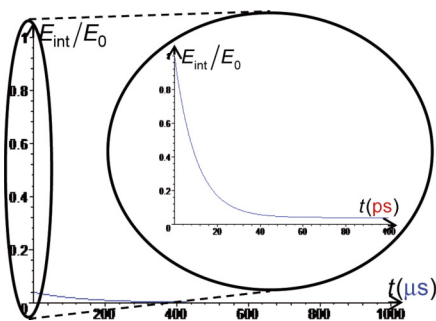


Figure 6 : Évolution temporelle du champ intérieur dans une goutte d'eau pure à 25 °C.

nant un champ extérieur  $E_0$  de l'ordre de  $1 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$  – soit celui du champ disruptif de l'air humide –, la densité surfacique ionique qui apparaît sur le laps de temps  $\delta t = 100 \text{ ps}$  ne peut être qu'inférieure à :

$$\delta\sigma_{i0} \approx \gamma_i E_0 \delta t \approx 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} \Rightarrow E_i \approx \sigma_{i0} / 3\epsilon_0 \approx 20 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Autant dire que le champ d'origine ionique n'est alors que fignole devant le champ intérieur qui lui reste supérieur à  $40 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ . En conséquence :

***Durant les cent premières picosecondes,  
le processus de polarisation par orientation est prépondérant.***

Ensuite, l'accumulation des charges ioniques en surface a pour effet de faire décroître le champ intérieur avec la constante de temps  $\tau_e$ , l'évolution temporelle de  $\sigma_{i0}$  étant pratiquement rendue par :

$$E_{\text{int}}(t) \approx \frac{3E_0}{3 + \chi_e} \exp(-t/\tau_e) \Rightarrow \sigma_{i0}(t) \approx \gamma_i \frac{3E_0}{3 + \chi_e} \tau_e (1 - \exp(-t/\tau_e))$$

Ainsi, au bout d'une milliseconde, nous pouvons considérer que ***l'équilibre électrique*** est atteint au sein de la goutte. Puisqu'alors il n'y a plus de champ intérieur, il n'y a plus de champ de polarisation et la charge en surface de la goutte est uniquement d'origine ionique et a pour expression :

$$\sigma_i(\theta) \approx \gamma_i \frac{3E_0}{3 + \chi_e} \tau_e \cos(\theta) = 3 \cdot \epsilon_0 E_0 \cos(\theta)$$

Nous constatons que l'état électrique final de la goutte est le même que celui d'une goutte non polaire et purement ionique.

#### 2.4.5. Scholies

##### Scholie-1

Il est remarquable que les résultats trouvés soient indépendants des dimensions de la goutte, ce qui permet d'étendre – en ordre de grandeur – le résultat trouvé à de « grosses »

gouttes. Par ailleurs, le chiffre 3 qui intervient dans les formules et en particulier dans l'expression de  $\tau_e$  est un paramètre dû à la forme sphérique donnée à la goutte. Si nous avons pris une goutte de forme parallélépipédique – d'aspect physique moins engageant –, ce paramètre vaudrait 1 ce qui nous conduirait en particulier à introduire la *permittivité relative* de l'eau  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ .

### Scholie-2

La constante de temps  $\tau_e$  étant inversement proportionnelle à la conductivité électrique, elle décroît quand la concentration ionique augmente. Autrement dit, *l'état d'équilibre électrique est d'autant plus rapidement atteint que la solution aqueuse est concentrée*<sup>(8)</sup>. Toutefois, lorsque  $\tau_e$  avoisine  $(3 + \chi_e) \tau_p / 3$  – cas de solutions aqueuses ayant une conductivité de l'ordre du siemens par mètre, donc une concentration de l'ordre du centième de mole par litre –, il faut recourir à l'équation (4) sans approximation. Enfin, avec des solutions très concentrées pour lesquelles  $\tau_e$  est de l'ordre de  $\tau_p$ , la phase de polarisation peut être fortement, voire totalement « court-circuitée ».

### Scholie-3

L'état d'équilibre électrique atteint est le même qu'il s'agisse d'une eau pure ou d'une solution aqueuse plus ou moins concentrée, puisqu'indépendant de la concentration ionique.

## 3. MODÉLISATION DE L'EXPÉRIENCE DE DESAGULIERS

### 3.1. Prise en compte de l'hétérogénéité spatiale du champ électrique

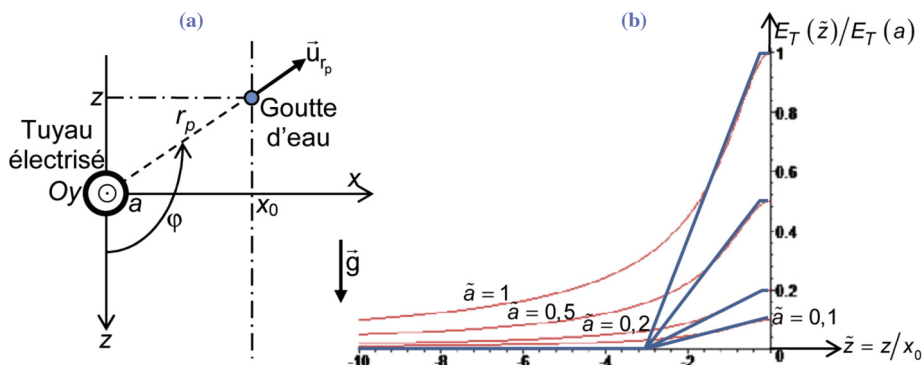
#### 3.1.1. Réfutation de la preuve du caractère polaire de l'eau par l'expérience de Desaguliers

Il n'en reste pas moins que le champ appliqué jusqu'à maintenant est uniforme et ne peut donc rendre compte de la déviation du filet aqueux. Considérons maintenant la situation particulière où le champ électrique est créé par un tuyau électrisé de rayon  $a$ , d'axe  $Oy$  et de longueur suffisamment grande pour pouvoir être considérée comme infinie – le tuyau de DESAGULIERS par exemple.

Les lois d'invariance et de symétrie alliées à la loi de conservation du flux électrique à l'extérieur du tuyau électrisé conduisent à exprimer le champ au niveau de la goutte sous la forme suivante (cf. figure 7a, page ci-contre) :

$$\vec{E}_T(r_p) = (E_T(a) a / r_p) \vec{u}_{r_p}$$

(8) Si Bertrand WOLFF et Christine BLONDEL avancent une microseconde en ordre de grandeur pour  $\tau_e$  ([9], p. 709), c'est pour avoir utilisé une eau du robinet environ cent fois plus conductrice que l'eau pure déminéralisée.



Figures 7a et 7b : Évolution spatiale du champ créé par un tuyau électrisé.

Expérimentalement, nous constatons que tant que la cote  $z$  de la goutte est négative, la trajectoire de celle-ci est quasi verticale si bien que nous pouvons considérer dans un premier temps un champ électrique à abscisse  $x_0$  constante :

$$\text{Si } z < 0, \quad E_T(r_p) \equiv E_T(z) = E_T(a) \frac{a}{\sqrt{x_0^2 + z^2}} = E_T(a) \frac{\tilde{a}}{\sqrt{1 + \tilde{z}^2}}$$

$$\text{avec} \quad \tilde{z} = z/x_0 \quad \text{et} \quad \tilde{a} = a/x_0$$

Traçons alors les courbes en grandeurs réduites  $E_T(\tilde{z})/E_T(a)$  paramétrées par le rapport  $\tilde{a}$  (cf. figure 7b). La variation spatiale du champ nous conduit à recourir à l'équation d'évolution du champ intérieur suivante, obtenue à partir de l'équation (4) avec les approximations appropriées :

$$\tau_e \gg \tau_p,$$

$$\tau_p \tau_e \frac{d^2 E_{\text{int}}}{dt^2} + \tau_e \frac{dE_{\text{int}}}{dt} + E_{\text{int}} \approx \tau_e \frac{3}{3 + \chi_e} \frac{dE_T}{dt} = \frac{3\epsilon_0}{\gamma_i} \frac{dE_T}{dz} \frac{dz}{dt}$$

En linéarisant  $E_T(z)$  sur une distance de  $3x_0$  (cf. figure 7b) et en négligeant la faible variation de vitesse  $v = dz/dt$  de la goutte sur ce trajet, la solution approchée de cette équation est de la forme :

$$E_{\text{int}}(t) = E_{10} \exp(-t/\tau_p) + E_{20} \exp(-t/t_e) + \frac{3}{3 + \chi_e} \frac{E_T(a) a}{x_0} \frac{v \tau_e}{3x_0}$$

Si nous considérons un filet d'eau issu d'une burette graduée remplie sur environ 50 cm, le théorème de Venturi nous donne une vitesse de sortie de l'ordre de :

$$v = \sqrt{2gh} \approx 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En fait, il est préférable de prendre une vitesse caractéristique de l'ordre du mètre par seconde pour tenir compte des effets de capillarité, de viscosité, de baisse de niveau de

l'eau dans la burette... La durée  $\Delta t_1$  de la phase de croissance du champ électrique est donc de l'ordre de :

$$\Delta t_1 \approx 3 x_0 / v$$

Comme  $x_0$  ne peut être inférieur au millimètre et est plutôt de l'ordre du centimètre,  $\Delta t_1$  est donc de l'ordre de quelques dizaines de millisecondes, si bien qu'à la fin de cette phase le champ intérieur est de l'ordre de :

$$E_{\text{int, max}} \approx \frac{3}{3 + \chi_e} \frac{E_T(a)a}{x_0} \frac{\tau_e}{\Delta t_1}$$

Nous constatons que ce champ est notablement inférieur à celui qui existerait après polarisation si nous appliquions un champ uniforme de valeur  $E_T(a)a/x_0$ . Il n'y a là rien de surprenant puisque durant la croissance du champ  $E_T(z)$ , la polarisation et les ions sont simultanément à la manœuvre.

Après cette phase, le champ appliqué présente une zone de quasi-constance puisqu'il passe par un maximum en  $z = 0$ . Évaluons la largeur de cette zone de constance à 1 % près :

$$E_T(z) = 0,99 E_T(a)a/x_0 \Rightarrow z = \pm 0,14 \cdot x_0 \Rightarrow \Delta z \approx 0,3 \cdot x_0$$

Donc, sur une distance de l'ordre de  $0,3 \cdot x_0$ , nous pouvons considérer que la goutte est dans un champ quasi-constant ce qui nous permet d'utiliser en première approche les résultats du paragraphe 2.4. pour le champ intérieur. La durée de transit dans le champ quasi-constant est ici de  $\Delta t_2 \approx 0,3 x_0 / v$ , soit de l'ordre de quelques millisecondes pour une distance  $x_0$  de l'ordre du centimètre. Une durée en tout cas supérieure à  $10 \tau_e$ ...

***L'équilibre électrique a donc le temps de s'établir*** et il en résulte immédiatement que :

***L'expérience de DESAGULIERS ne constitue aucunement une preuve  
du caractère polaire de l'eau !***

Elle en constitue d'autant moins une preuve que, lorsqu'il y a équilibre électrique, ce caractère polaire ne peut se manifester. En revanche, elle met en évidence qu'il existe dans l'eau pure des entités électriques « libres », sans pouvoir trancher sur le fait de savoir s'il s'agit d'ions ou de dipôles.

L'étude précédente nous montre aussi que, bien que le lièvre dipolaire se fasse coiffer à l'arrivée par la tortue ionique, la polarisation d'orientation est loin de jouer un rôle « marginal » durant le processus conduisant à l'équilibre électrique et cela pour au moins trois bonnes raisons :

- ◆ Tout d'abord, dans le cas du champ uniforme de l'étude du paragraphe 2.4., la polarisation d'orientation *booste* fortement la décroissance du champ intérieur durant les cent premières picosecondes.
- ◆ Ensuite, la polarisation d'orientation est présente durant la phase de mise en champ quasi constant dans l'expérience de DESAGULIERS.

- ♦ Elle allonge de ce fait la constante de temps de décroissance du champ intérieur : il faut en effet du temps pour compenser toutes les charges surfaciques d'origine polaire par des charges d'origine ionique.

En résumé donc, si le rôle de la polarisation d'orientation est bien *marginal* dans l'observation de la déviation du filet d'eau, il ne l'est aucunement dans le processus qui conduit à cette déviation.

### 3.1.2. Scholies

#### Scholie-1

Là encore, l'état d'équilibre électrique étant indépendant de la concentration ionique, la déviation observée avec une solution aqueuse plus ou moins concentrée ne peut être très différente de celle observée avec un filet d'eau pure, ce qui semble être validé expérimentalement.

#### Scholie-2

En ce sens, l'expérience de DESAGULIERS généralisée à des solutions aqueuses peut constituer une belle illustration de deux « principes » que Charles Augustin COULOMB (1736-1806) établit expérimentalement en 1786 dans son *Quatrième mémoire sur l'électricité et le magnétisme* [1] :

- « *Le fluide électrique se répand dans tous les corps conducteurs suivant leur figure, sans que ce fluide paraisse avoir de l'affinité ou une attraction élective pour un corps préférablement à un autre* » ([1], p. 175). En d'autres termes plus modernes, un conducteur métallique et un conducteur « imparfait » de même forme aboutissent au même état électrique final... mais pas sur la même durée ce que COULOMB note en page 177 de son *Mémoire*. Et cette identité d'état final est en grande part due à ce que...
- « *Dans un corps conducteur chargé d'électricité, le fluide électrique se répand sur la surface des corps, mais ne pénètre pas dans l'intérieur des corps.* » ([1], p. 178). Que ce corps soit un bon conducteur ou un conducteur imparfait... comme l'eau pure.

#### Scholie-3

Il apparaît dans l'étude précédente que la grandeur spatiale caractéristique n'est pas tant la hauteur de chute de l'eau que l'abscisse  $x_0$  séparant le filet du tuyau électrisé.

## 3.2. De la force électrique subie par l'élément aqueux

Une fois l'équilibre électrique établi, la polarisation n'entre certes plus en compte, mais la goutte d'eau est néanmoins assimilable à un dipôle électrique de moment <sup>(9)</sup> :

$$\vec{\pi} = 3\varepsilon_0 E_T(r_p) \vec{\partial} u_r$$

(9) Pour trouver ce résultat, il suffit de faire une analogie avec une sphère uniformément polarisée avec un champ de polarisation  $\vec{P} = 3\varepsilon_0 \vec{E}_T$ .

Tant que le rayon de la goutte reste très inférieur à  $x_0$ , la force exercée par le champ  $\vec{E}_T$  sur la goutte a pour expression (cf. [8], p. 430) :

$$\vec{F}_T(r_p) = (\vec{\pi} \cdot \text{grad}) \vec{E}_T = - \frac{3\epsilon_0 (E_T(a)a)^2 \vartheta}{r_p^3} \vec{u}_{r_p}$$

Il n'est pas question ici de déterminer la trajectoire de la goutte, mais seulement de comparer la force électrique à celle de pesanteur. En  $z=0$ , ces deux forces sont orthogonales et le rapport de leur module a pour expression  $-\rho$  désignant la masse volumique de l'eau et  $\beta$  l'angle que forme la résultante avec la verticale :

$$\frac{\|\vec{F}_T(x_0)\|}{\rho \vartheta g} = \frac{3\epsilon_0 E_T^2}{a\rho g} \left(\frac{a}{x_0}\right)^3 = \tan(\beta)$$

Dans sa *Dissertation*, DESAGULIERS précise que ses expériences électrostatiques réussissent d'autant mieux que son tuyau en verre a été préalablement chauffé « *pour le sécher* » et, « *pour savoir si on a assez frotté le tuyau, il faut passer le bout des doigts en travers près du tuyau, à la distance d'environ un demi-pouce [soit un peu plus d'un centimètre] et on entendra pétiller les émanations électriques...* » ([3], p. 5). Nous pouvons donc en conclure le champ électrique sur le tuyau de rayon  $a = 2$  cm était de l'ordre du champ disruptif de l'air sec, soit  $3,6 \text{ MV} \cdot \text{m}$ . Il s'ensuit que pour cette expérience, nous avons :

$$\tan(\beta) \approx 1,85 (a/x_0)^3$$

- ◆ Pour une distance  $x_0$  donnée, l'angle  $\beta$  sera d'autant plus important que le rayon  $a$  du tuyau électrisé est grand : le tuyau de DESAGULIERS est donc de ce fait plus performant que le chalumeau en plastique servant à siroter un diabolo menthe.
- ◆ Au voisinage immédiat du tuyau en verre, l'angle  $\beta$  est de l'ordre de  $60^\circ$ , compatible avec l'observation que le jet « *s'applique au tuyau en petites gouttes, pourvu que le jet n'ait pas trop de force de jaillir* »<sup>(10)</sup>.
- ◆ En revanche, lorsque DESAGULIERS note une déviation du jet à 30 cm de distance, il faut croire qu'il était un excellent observateur puisqu'alors l'angle  $\beta$  est de l'ordre de la minute d'arc. Mais, compte tenu de la cinétique du filet d'eau, ce n'est pas impossible. En tout cas, il ne faut pas espérer observer une déviation du filet à 30 cm d'un chalumeau en plastique.
- ◆ Cette étude apporte par ailleurs quelques éclaircissements sur le fait qu'une pointe électrisée a peu d'effet sur un filet d'eau. En effet, le champ électrique d'une pointe variant plutôt en  $1/r^2$ , la force électrique s'exerçant sur le dipôle aqueux varie en  $1/r^5$

(10) Une étude plus complète nécessiterait de prendre en compte également les effets cinétiques de l'écoulement.



et donc décroît très rapidement avec la distance. Pour observer un effet, il faut donc approcher la pointe très près du filet... et nous savons combien l'eau et l'électricité statique ne font guère bon ménage. Il n'en reste pas moins qu'il y a mise en œuvre du *pouvoir des pointes* lorsque l'on utilise le tranchant d'une règle en plastique pour dévier le filet aqueux.

## 4. TRAITEMENTS ALTERNATIFS

### 4.1. Analyse harmonique de la réponse électrique d'une goutte d'eau

Dans un esprit de transdisciplinarité et pour compléter l'analyse indicielle faite précédemment, effectuons une analyse harmonique de la réponse électrique d'une goutte d'eau en recourant à la représentation graphique que l'ingénieur américain Hendrik Wade BODE (1905-1982) a introduite en théorie des systèmes électroniques et automatiques. Pour cela, supposons la goutte d'eau en régime établi dans un champ électrique uniforme harmonique  $\vec{E}_0(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}$  et convertissons l'équation (4) en complexe<sup>(11)</sup> –  $d/dt \rightarrow j\omega$  :

$$\left( \tau_p \tau_e (j\omega)^2 + \left( \tau_e + \frac{3 + \chi_e}{3} \tau_p \right) j\omega + 1 \right) \underline{E}_{\text{int}} = \tau_e \left( \tau_p (j\omega)^2 + \frac{3}{3 + \chi_e} j\omega \right) \underline{E}_0$$

Posons alors :

$$\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = 1/\tau_p \tau_e$$

En introduisant la fréquence réduite  $\tilde{f} = f/f_0 = \omega/\omega_0$  et en définissant une fonction de transfert complexe  $\underline{G}_{\text{int}}(\tilde{f})$  par le rapport de la réponse électrique  $\underline{E}_{\text{int}}$  de la goutte d'eau à son excitation, il vient tous calculs faits :

$$\underline{G}_{\text{int}}(\tilde{f}) = \frac{\underline{E}_{\text{int}}}{\underline{E}_0} = \frac{j k \tilde{f}_p \tilde{f} (1 + j \tilde{f} / k \tilde{f}_p)}{1 - \tilde{f}^2 + j(\tilde{f}_p + 1/k \tilde{f}_p) \tilde{f}}$$

avec

$$k = \frac{3}{3 + \chi_e} ; \quad \tilde{f}_p = \frac{f_p}{f_0} = \frac{1}{2\pi \tau_p f_0} = \sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_p}}$$

De même, en convertissant les équations (2) et (3) en complexe, nous pouvons définir les deux fonctions de transfert suivantes caractérisant respectivement les évolutions ionique et dipolaire :

$$\underline{G}_i = \frac{\underline{E}_i}{\underline{E}_0} = \frac{-\underline{G}_{\text{int}}}{j k \tilde{f}_p \tilde{f}} = \frac{-(1 + j \tilde{f} / k \tilde{f}_p)}{1 - \tilde{f}^2 + j(\tilde{f}_p + 1/k \tilde{f}_p) \tilde{f}}$$

(11) Il est d'ailleurs possible d'obtenir l'équation (4) en raisonnant directement en complexe et en effectuant la transformation inverse de celle donnée ici.

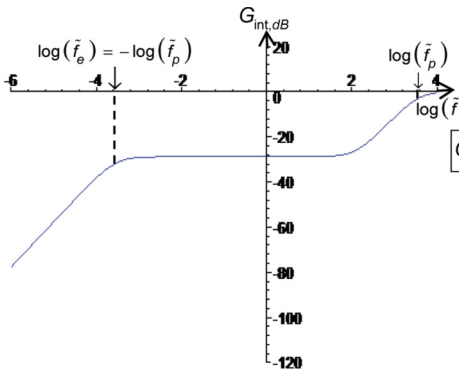
$$\underline{G_p} = \frac{\underline{E_p}}{\underline{E_0}} = \frac{-(\chi_e/3) \underline{G_{int}}}{1 + j\tilde{f}/k\tilde{f}_p} = \frac{-jk\tilde{f}_p\tilde{f}\chi_e/3}{1 - \tilde{f}^2 + j(\tilde{f}_p + 1/k\tilde{f}_p)\tilde{f}}$$

Tracer le diagramme de Bode en gain consiste alors à représenter la courbe  $G_{int,dB} = 20 \log(|G_{int}|)$  en fonction de  $\log(\tilde{f})$  (cf. figure 8). La fréquence  $f_0$  pour l'eau pure à 25 °C étant de l'ordre de 5 MHz, nous limitons l'extension fréquentielle à quatre décades au-dessus de  $f_0$  pour rester dans le cadre de l'ARQS. Ces diagrammes s'interprètent alors comme suit :

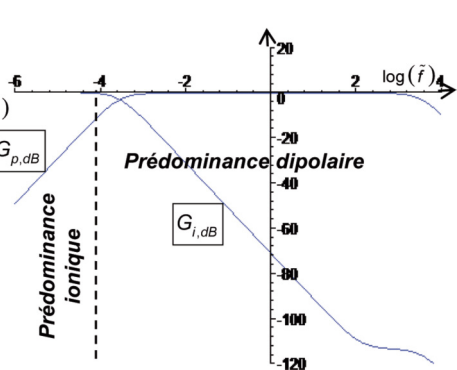
- ♦ En associant à la constante de temps  $\tau_e$  la fréquence  $f_e = 1/2\pi\tau_e$ , la fréquence  $f_0$  apparaît comme la moyenne géométrique de  $f_e$  et  $f_p$ , si bien qu'en fréquences réduites nous avons :

$$\tilde{f}_e = f_e/f_0 = f_0/f_p = 1/\tilde{f}_p .$$

- ♦ En basses fréquences –  $\tilde{f} < \tilde{f}_e$  –, nous constatons sur la figure 8b que le champ d'origine dipolaire est croissant à raison de + 20 décibels par décade, mais reste constamment inférieur au champ d'origine ionique  $E_i$  qui est pratiquement égal à  $E_0$  : il y a donc là **prédominance ionique** et cette prédominance est d'autant plus grande que la fréquence est faible <sup>(12)</sup>.
- ♦ *A contrario*, pour les fréquences supérieures à  $f_e$ , le champ d'origine ionique décroît à raison de – 20 décibels par décade alors que le champ d'origine dipolaire présente



**Figure 8a :** Diagramme de Bode de la réponse électrique d'une goutte d'eau pour le champ  $E_{int}$ .



**Figure 8b :** Diagramme de Bode de la réponse électrique d'une goutte d'eau pour les champs  $E_i$  et  $E_p$ .

(12) Tant que la fréquence  $f$  reste inférieure à  $kf_p$ , le diagramme de Bode représentatif de  $G_{i,dB}$  est analogue à celui d'un filtre passe-bas du premier ordre.

une bande fréquentielle où  $G_{i,dB}$  reste égal à  $-0,32$  dB puisqu'alors :

$$|E_p| = |P|/3\varepsilon_0 \approx k \chi_e |E_0|/3 = 0,96 |E_0| = 10^{(-0,32/20)} |E_0|$$

Il y a donc là prédominance dipolaire et cette prédominance est d'autant plus grande que la fréquence augmente<sup>(13)</sup>.

- ◆ Toujours sur ces diagrammes, nous constatons que l'approche de la fréquence  $f_p$  se traduit par une nouvelle croissance du champ intérieur due aux variations temporelles du champ dipolaire  $\vec{P}$  dont rend compte l'équation (3).
- ◆ Enfin, la largeur de la bande de prédominance dipolaire est égale à :

$$2 \log(\tilde{f}_p) = \log(\tau_e / \tau_p)$$

Cette largeur décroît donc quand la conductivité de la solution aqueuse augmente et s'annule même quand la conductivité est telle que  $\tau_e = \tau_p$ . L'aspect des diagrammes de Bode d'une goutte de solution aqueuse plus ou moins concentrée se différencie donc de ceux de l'eau pure uniquement par la largeur de la bande de prédominance dipolaire.

En tout état de cause, cette analyse harmonique confirme bien le fait qu'en régime *statique* établi ce sont les ions qui imposent leur loi dans la détermination de l'état électrique de la goutte d'eau. Dans l'esprit de cette analyse, nous avons donné en annexe un modèle électrocinétique analogique d'une goutte d'eau.

## 4.2. Analyse adimensionnelle

Afin de généraliser les propos qui précèdent, revenons aux fondamentaux à savoir aux équations de Maxwell dans un milieu diélectrique conducteur de permittivité relative  $\varepsilon_r$  et de conductivité électrique  $\gamma$ . Nous ferons l'hypothèse que la permittivité relative reste constante ce qui, compte tenu de l'étude du paragraphe II.2), est quasi valide pour l'eau jusqu'à des fréquences de l'ordre du gigahertz<sup>(14)</sup>. Nous avons ainsi, avec les notations usuelles :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{div} \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\text{rot}} \left( \vec{B} / \mu_0 \right) - \frac{\partial (\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E})}{\partial t} = \gamma \vec{E}$$

De ce système d'équations, nous tirons l'équation aux dérivées partielles régissant le champ électrique dans un tel milieu,  $\Delta$  désignant l'opérateur laplacien :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(13) Le diagramme de Bode représentatif de  $G_{p,dB}$  est analogue à celui d'un filtre passe bande du second ordre à large bande.

(14) Cette simplification est pardonnable dans la mesure où la précision à deux décimales n'est pas de mise quand il s'agit d'obtenir des ordres de grandeur.

Cette belle équation s'interprète de la façon suivante :

- ◆ Si le phénomène de conduction ionique est négligeable, le premier terme de droite est négligeable devant le second et nous obtenons ainsi une équation de propagation de d'Alembert de célérité  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0} = c_0/n$  avec  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ .
- ◆ Si le phénomène de conduction ionique est prépondérant, le deuxième terme de droite est négligeable devant le premier ce qui nous donne une équation du type équation de diffusion où le facteur  $1/\mu_0 \gamma$  joue le rôle d'un coefficient de diffusion.

Mettons alors l'équation aux dérivées partielles précédente sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\mu_0 \gamma} \Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + T_c \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Cette expression fait apparaître une durée  $T_c$  que nous qualifierons de critique pour des raisons qui vont se faire jour... et qui, pour l'eau, est pratiquement égale à la constante de temps  $\tau_e$  introduite précédemment :

$$T_c = \epsilon_0 \epsilon_r / \gamma \approx \tau_e = \epsilon_0 (3 + \chi_e) / \gamma$$

Réduire l'équation régissant le champ électrique consiste alors à faire intervenir des grandeurs spatio-temporelles *caractéristiques* du problème, à savoir ici une longueur  $L$  et une durée  $T$ , et à définir des grandeurs réduites sans dimension :

$$\tilde{x} = x/L \quad ; \quad \tilde{y} = y/L \quad ; \quad \tilde{z} = z/L \quad ; \quad \tilde{t} = t/T$$

L'équation réduite prend de ce fait pour expression,  $\tilde{\Delta}$  désignant un laplacien réduit :

$$\frac{1}{\mu_0 \gamma L^2} \tilde{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tilde{t}} + \frac{T_c}{T} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \tilde{t}^2} \right)$$

En conséquence :

- ◆ Si la durée caractéristique  $T$  est très supérieure à la durée critique  $T_c$ , le phénomène de diffusion ionique est prépondérant. Si au contraire la durée caractéristique  $T$  est très inférieure à  $T_c$ , la diffusion ionique est négligeable. D'où la justification du qualificatif « critique » accolé à la durée  $T_c$ .
- ◆ Dans le cas de l'eau pure à 25 °C, nous avons  $T_c \approx \tau_e = 0,13$  ms. Tant que les durées caractéristiques des phénomènes restent supérieures à la milliseconde – ce qui est le cas dans l'expérience de DESAGULIERS –, la diffusion ionique est prépondérante et le phénomène de polarisation est masqué.
- ◆ Cherchons maintenant la durée caractéristique associée<sup>(15)</sup> à une longueur caractéristique  $L$  de l'ordre du centimètre. L'équation aux dérivées partielles réduites implique

(15) Rappelons que des grandeurs caractéristiques sont associées lorsque toutes les dérivées partielles de l'équation réduite sont du même ordre de grandeur.

alors l'équation en ordre de grandeur suivante :

$$\frac{1}{\mu_0 \gamma L^2} \approx \frac{1}{T} \left( 1 + \frac{T_c}{T} \right) \Rightarrow 1,5 \cdot 10^{15} T^2 - T - 1,3 \cdot 10^{-4} \approx 0 \Rightarrow T \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Sur de telles durées de l'ordre de 100 ps – très inférieures à  $T_c$  –, le phénomène de polarisation est prépondérant. Et si nous prenons l'inverse de cette durée caractéristique, nous obtenons une fréquence caractéristique  $f = 3 \text{ GHz}$ , **à savoir pratiquement la fréquence allouée aux fours à micro-ondes !** Autrement dit, s'il s'agit de prouver le caractère polaire de l'eau, l'expérience de DESAGULIERS n'est en aucun cas idoine : le réchauffage matinal d'une tasse de café y pourvoit !

## CONCLUSION

Si l'on a tant incliné à croire que l'expérience de DESAGULIERS prouvait le caractère polaire de l'eau, c'est essentiellement pour deux raisons, à savoir la forte susceptibilité électrique de ce liquide et surtout sa faible conductivité électrique. Mais mauvais conducteur ou conducteur « imparfait » comme disait COULOMB ne veut pas dire isolant et c'est ce qui, en l'occurrence, fait la différence.

Toutefois, la nature est facétieuse, car bien que les ions empêchent la polarisation d'orientation de se manifester dans l'expérience de DESAGULIERS, ils ont l'effronterie de faire d'une goutte d'eau pure... un dipôle électrique. De plus, nous ne pouvons que relever la ténuité de la différence d'état d'équilibre électrique entre des gouttes d'eau réelles, purement polaires ou purement ioniques, ce qui ne facilite pas la discrimination de ces caractères.

Et en fait de différence, Lao-Tseu nous rappelle que, si tous les hommes sont semblables dans la mort, ils sont différents dans la vie. Il en va de même des liquides étudiés qui, placés dans un champ donné, aboutissent à un équilibre électrique qui leur est quasiment indifférent, mais à la suite d'une évolution qui leur est propre.

Enfin, force est de constater que la polarisation d'orientation se manifeste bien mieux en régime variable et il est remarquable à cet égard que la fréquence allouée aux fours à micro-ondes soit une fréquence caractéristique associée aux dimensions caractéristiques des aliments que l'on y réchauffe.

Il n'en reste pas moins que la méprise pédagogique faisant de l'expérience de DESAGULIERS un test du caractère dipolaire de l'eau devrait nous inciter à cultiver l'humilité et l'esprit critique dans l'enseignement des sciences physiques. Car qu'enseignons-nous en définitive ? Des *modèles* et seulement des modèles. Mais *modèle n'est pas réalité*, il serait salutaire de ne jamais perdre de vue ce qui devrait être une évidence. En conséquence et dans un esprit de cohérence, nous invitons le lecteur à ne tenir les résultats avancés ici que pour un modèle électrique de l'eau un peu plus élaboré certes, mais limité par ses équations constitutives (1), (2) et (3) et par l'ARQS.

Enfin, nous ne pouvons qu'abonder dans le sens de Bertrand WOLFF et Christine BLONDEL lorsqu'ils rappellent que la théorie physique est bien loin d'avoir explicité toutes les richesses de la nature – et c'est tant mieux, il reste tant à faire ! Si la théorie physique peut s'enorgueillir de donner une idée relativement précise des états atomiques et subatomiques, elle peine encore à expliquer ce qui se passe lors d'un frottement, de la fusion d'un corps solide ou de l'électrisation d'un isolant. En ce sens, les phénomènes électrostatiques comme le soulignent ces deux auteurs, mais plus généralement l'histoire de la physique, constituent une « mine » de questionnements théoriques en tout genre qu'il reste à explorer.

## BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] COULOMB C.A. « Quatrième mémoire sur l'électricité et le magnétisme » in *Collections de mémoires relatifs à la physique, tome 1*. Paris : Gauthier-Villars, 1884, p. 173-182.  
Consultable sur le site <http://cnum.cnam.fr/>
- [2] DESAGULIERS J.T. "Several electrical experiments, made at various times, before the Royal Society". *Philosophical Transactions*, 1739-1741, vol. 41, p. 661-667.  
Consultable sur le site <http://gallica.bnf.fr/>
- [3] DESAGULIERS J.T. *Dissertation sur l'électricité des corps*. Bordeaux, 1742.  
Consultable sur le site <http://books.google.com>
- [4] GIÉ H. et SARMA J.-P. *Électromagnétisme*, volume 2. Paris : Édition Lavoisier, 1985.
- [5] GILBERT W. *De magnete* (première édition 1600), traduction anglaise de P. FLEURY MOTTELEY, New York : Ed. Dover, 1958.
- [6] GRAY S. "A letter concerning the electricity of water". *Philosophical Transactions*, 1731-1732, vol. 37, p. 227-230, addendum p. 260.  
Consultable sur le site <http://gallica.bnf.fr/>
- [7] JECH B. *Bible de physique, PC-PC\**. Paris : Ellipses, 2004.
- [8] PÉREZ J.-Ph., CARLES R. et FLECKINGER R. *Électromagnétisme, vide et milieux matériels*. Paris : Masson, 1991.
- [9] PRIESTLEY J. *The history and present state of electricity, with original experiments*. Londres, 1767.  
Consultable sur le site <http://books.google.com>  
Une traduction française de 1771 est consultable sur le site <http://cnum.cnam.fr/>
- [10] WOLFF B. et BLONDEL C. « Quelques questions encore posées aujourd'hui par l'histoire de l'électrostatique ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, juin 2011, vol. 105, n° 935, p. 705-717.
- [11] JECH B. « Formalisation électrocinétique des équations de Maxwell ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1994, vol. 88, n° 765 (2), p. 57-78.
- [12] JECH B. « Du calculateur analogique au filtre universel ». *Bull. Un. Phys.*, février 2002, vol. 96, n° 841 (2), p. 137-165.

## Annexe

### Modélisation électrocinétique d'une goutte d'eau

Dans le droit fil de divers travaux que nous avons publiés dans cette revue [11-12] et afin de donner un support visuel à l'analyse harmonique développée précédemment, nous proposons d'élaborer un modèle électrocinétique du comportement électrique de la goutte d'eau étudiée.

Tout d'abord, en définissant les champs  $E_{ir}$  et  $E_{pr}$  comme opposés des champs  $E_i$  et  $E_p$ , la relation (1) peut s'interpréter comme traduisant une loi des mailles linéique – rappelons qu'une tension s'identifie à la circulation d'un champ électrique :

$$(1) \Rightarrow E_0 = E_{int} + E_{pr} + E_{ir}$$

Par ailleurs, en régime harmonique établi, la relation (3) s'interprète comme une relation de conservation de la densité de courant  $J_i$  traversant la série d'un dipôle résistif symbolique de résistivité  $1/\gamma_i$  soumis au champ  $E_{int}$  et d'un dipôle capacitif symbolique de *capacitivité*  $\Gamma_i = 3\varepsilon_0$  soumis au champ  $E_{ir}$  puisque :

$$(3) \Rightarrow J_i = \gamma_i E_{int} = j\omega \sigma_{j0} = j\Gamma_i \omega E_{ir}$$

Enfin, toujours en régime harmonique établi, la relation (2) conduit également à une relation de conservation de  $J_i$  puisque :

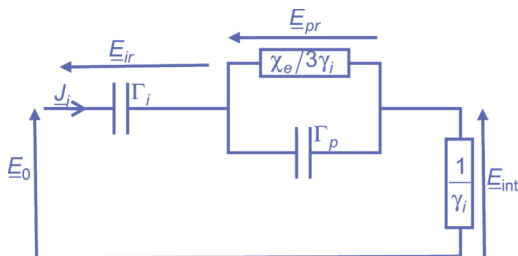
$$(2) \Rightarrow 3\varepsilon_0 E_{pr} (1 + j\omega \tau_p) = \varepsilon_0 A (E_{int} + E_{pr}) \Rightarrow$$

$$E_{int} = \left( \frac{3}{\chi_e} + j\omega \frac{3 + \chi_e}{\chi_e} \tau_p \right) E_{pr} \Rightarrow J_i = \gamma_i E_{int} = \left( \frac{3\gamma_i}{\chi_e} + j \frac{(3 + \chi_e)^2}{\chi_e} \frac{\tau_p}{\tau_e} \varepsilon_0 \right) E_{pr}$$

Le dernier terme ci-dessus représente une densité de courant  $J_i$  traversant un dipôle résistif symbolique de résistivité  $\chi_e/3\gamma_i$  en parallèle avec un dipôle capacitif symbolique de *capacitivité* :

$$\Gamma_p = \left( (3 + \chi_e)^2 \tau_p / \chi_e \tau_e \right) \varepsilon_0$$

soumis au champ  $E_{pr}$ . Nous pouvons donc schématiser le modèle électrocinétique de notre goutte d'eau (cf. figure 9).



**Figure 9 :** Modèle électrocinétique d'une goutte d'eau.

Ce modèle permet alors d'évaluer aisément les effets ioniques et

dipolaires en fonction de la fréquence. Par exemple, tant que l'influence de la capacitivité  $\Gamma_p$  est négligeable, nous avons par application de la loi du diviseur de tension (linéique) :

$$\frac{E_{jr}}{E_0} = \frac{1/j\Gamma_i\omega}{((3+\chi_e)/3\gamma_i) + (1/j\Gamma_i\omega)} = \frac{3\gamma_i}{3\gamma_i + j\Gamma_i\omega(3+\chi_e)} = \frac{1}{1+j\omega\tau_e}$$

C'est là l'expression d'une fonction de transfert du premier ordre de type passe-bas présentant une constante de temps  $\tau_e$  – correspondant à une fréquence de coupure à  $-3$  dB égale à  $1/2\pi\tau_e$ . De même, avons-nous :

$$\frac{E_{pr}}{E_0} = \frac{\chi_e/3\gamma_i}{((3+\chi_e)/3\gamma_i) + (1/j\Gamma_i\omega)} = \frac{j\chi_e\omega\tau_e/(3+\chi_e)}{1+j\omega\tau_e}$$

En très basses fréquences – très inférieures à  $1/2\pi\tau_e$  –, cette fonction de transfert du premier ordre de type passe-haut a donc un module très petit devant celui de la fonction de transfert ionique pratiquement égal à l'unité.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la fonction de transfert  $E_{int}/E_0$  obtenue également par application de la loi du diviseur de tension (linéique) permet d'obtenir l'équation différentielle (4).

Enfin, nous retrouvons qu'en régime indicial, il y a d'abord « charge » rapide de la capacitivité  $\Gamma_p$ , puis « charge » plus lente de la capacitivité  $\Gamma_e$  pour aboutir à un régime d'équilibre électrique où la densité de courant  $J_i$  est nulle.



**Bruno JECH**

*Professeur de sciences physiques en TSI deuxième année  
Lycée Léonce Vieljeux  
La Rochelle (Charente-Maritime)*