

Union des professeurs de physique et de chimie

Quanta de Planck, d'Einstein et « d'aujourd'hui »

par **Christian BRACCO**

IUFM de Nice - 06046 Nice Cedex 2

et Laboratoire universitaire d'astrophysique de Nice

cbracco@unice.fr

et **Jean-Pierre PROVOST**

Institut non-linéaire de Nice

Université de Nice-Sophia Antipolis - 06560 Valbonne

provost@unice.fr

RÉSUMÉ

Pour expliquer sa loi du corps noir, PLANCK introduit en 1900 des quanta d'énergie répartis sur des oscillateurs qui interagissent avec le rayonnement. Pour cela, il utilise une approche thermodynamique fondée sur une définition microscopique de l'entropie. En 1905 EINSTEIN utilise une même approche, mais il revient à la loi de Wien de 1896 et s'intéresse directement au rayonnement dans un volume V ce qui le conduit à envisager des quanta indépendants libres de se déplacer. S'ils expliquent bien l'effet photoélectrique, les quanta d'EINSTEIN devront être sérieusement corrigés par l'introduction d'une nouvelle statistique pour rendre compte de la loi de Planck. À l'opposé, le remplacement du concept d'oscillateur par celui de mode du champ donne aux formules de Planck une actualité remarquable.

1. INTRODUCTION

Dans son article de mars 1905 [1], intitulé *Un point de vue heuristique concernant la production et la transformation de la lumière*, EINSTEIN reprend l'analyse du corps noir et en déduit que la lumière doit se comporter comme si elle était constituée de « grains d'énergie » se déplaçant indépendamment les uns des autres : les quanta. Le terme « heuris-

tique⁽¹⁾ » qu'emploie EINSTEIN dans le titre de son article laisse entendre qu'il va utiliser « un point de vue » qu'il ne peut justifier complètement, mais qui lui permettra d'expliquer les phénomènes de « production » et de « transformation » de la lumière. Ce sont ces phénomènes - en particulier l'effet photoélectrique - qui ont été retenus par le jury Nobel et qui, dans l'enseignement, servent à introduire le photon. Nous revenons ici sur l'argumentation analogique (avec un gaz parfait) qui a conduit EINSTEIN aux quanta et sur les rapports de ces quanta à ceux de PLANCK et au champ quantique « moderne ».

L'approche d'EINSTEIN est essentiellement basée, comme celle de PLANCK quelques années plus tôt, sur une interprétation thermodynamique de la loi de Wien du corps noir, fondée sur la grandeur entropie. On peut donc se demander pourquoi PLANCK en a déduit une quantification de l'énergie d'oscillateurs-émetteurs (résonateurs), alors qu'EINSTEIN, utilisant les mêmes outils de thermodynamique statistique et presque les mêmes formules, argumente en faveur de quanta mobiles.

La raison principale est le changement de l'objet d'étude : PLANCK considère les émetteurs du rayonnement alors qu'EINSTEIN prend pour objet le rayonnement lui-même présent dans un volume V et une bande de fréquence $d\nu$. Cela amène EINSTEIN, qui a probablement une idée préconçue des quanta, à s'intéresser à la dépendance volumique de l'entropie. C'est en effet elle qui peut traduire la liberté des quanta de se déplacer librement dans l'enceinte. Nous reviendrons dans cet article sur le parallélisme entre les formules d'EINSTEIN et celles de PLANCK afin de mettre en valeur les différences de conception ainsi que la stratégie d'EINSTEIN.

Il est étonnant aussi qu'EINSTEIN en 1905 revienne à la loi de Wien qui avait été mise en défaut expérimentalement dès 1900. Ce n'est vraisemblablement pas un hasard, car cette loi porte en elle le germe des quanta indépendants. Par contre, la loi phénoménologique de Planck de 1900, confirmée par l'expérience, ne peut être expliquée sur la base de ces quanta s'ils sont indépendants. Il faudra, pour en rendre compte vingt ans après, que soit introduite la quantité de mouvement des quanta dans l'article sur l'émission induite et spontanée en 1916 [2] et que leur soit trouvée une statistique adaptée comme suite à l'article de BOSE en 1924 [3]. Comme on le verra, la loi de Planck porte en fait le germe d'un nouvel objet, le champ quantique, qui ne sera pleinement reconnu qu'à partir de 1925 [4]. En effet, le remplacement (déjà réalisé en partie par P. EHRENFEST en 1906) du concept de « résonateur » de PLANCK par celui de mode du champ (concept qui apparaît chez RAYLEIGH en 1900) donne aux formules de Planck de 1900 un sens très proche de l'interprétation moderne. À l'opposé, l'objet choisi par EINSTEIN dans sa démonstration de 1905 éloigne le quanta de cette notion de champ quantique et induit au niveau des formules une complication qu'on retrouve encore souvent dans l'enseignement.

Dans le paragraphe 2, nous rappelons le contexte historique et présentons l'évolution

(1) Heuristique : qui a une utilité dans la recherche, notamment la recherche scientifique et épistémologique ; qui aide à la découverte. *Hypothèse heuristique*. Dictionnaire encyclopédique. *Petit Larousse illustré*, 1996.

des points de vue de PLANCK en 1900. Nous discutons dans le paragraphe 3 l'approche et la stratégie d'EINSTEIN en 1905 ainsi que leurs limites. Dans le paragraphe 4, nous revenons sur la notion de mode et sa relation aux quanta. Nous nous sommes efforcés de suivre dans cet article la démarche réelle de PLANCK et d'EINSTEIN. En particulier, nous avons évité à leur propos de parler de la notion de mode qui ne figure pas dans leurs travaux. Indiquons à cette occasion l'existence de deux articles du BUP [5-6] relatifs à PLANCK et au corps noir, où l'on retrouvera, parfois plus développés, certains calculs et un ouvrage récent [7] dédié notamment au travail et la vie de PLANCK.

Dans ce qui suit, les notations des formules ont été harmonisées, et ne sont donc pas sous la forme exacte présentée par ces grands savants (qui en ont eux-mêmes souvent changé). Les paramètres a et b qui interviennent dans l'expression de l'entropie d'un résonateur sont ceux introduits par PLANCK dans son premier article de 1900 [8]. Les paramètres α et β (reliés à a et b) entrant dans la loi de Wien sont ceux utilisés par EINSTEIN. Les notations actuelles h pour la constante de PLANCK et k pour la « constante de BOLZMANN » figurent dans l'article de PLANCK de 1901 [9]. Ces notations n'ont pas été reprises par EINSTEIN qui note R/\mathcal{N} la constante k (R est la constante des gaz parfaits et \mathcal{N} le nombre d'Avogadro). Les citations en français d'EINSTEIN sont extraites de l'ouvrage [10].

2. LE CONTEXTE HISTORIQUE

2.1. Le caractère ondulatoire de la lumière

Renouveler en 1905 une conception « corpusculaire » de la lumière peut paraître « révolutionnaire » car cela bouscule une conception ondulatoire bien établie depuis les succès des interprétations de FRESNEL de la diffraction et de la polarisation [11]. L'expérience de FOUCAULT, en 1851, qui montre que la vitesse de la lumière dans l'eau est plus petite que dans l'air (en contradiction avec l'idée « newtonienne » d'un corpuscule accéléré à l'approche d'un milieu plus dense) a pu faire figure d'*experimentum crucis*. En l'espace de quatre articles et quelques mois, de 1861 à 1862, MAXWELL propose une théorie qui prédit l'existence d'ondes électromagnétiques et envisage que la lumière est une telle onde. Ces ondes sont « découvertes » en 1887 par HERTZ qui utilise des « oscillateurs » dipolaires pour les produire.

Cependant, la théorie ondulatoire se trouve confrontée à quelques problèmes importants. Elle fait l'hypothèse d'un milieu de propagation, l'« éther », qui résiste à toute interprétation mécanique réaliste. Les expériences sur « l'entraînement de l'éther » par les corps en mouvement mettent en évidence des difficultés dont la théorie peine à s'affranchir (expériences de MICHELSON) sans recourir à des hypothèses *ad hoc* (contraction dynamique des longueurs dans le sens du mouvement par FITZGERALD et LORENTZ). L'effet photoélectrique, découvert par HERTZ, et analysé par LÉNARD en 1902, ne s'interprète pas simplement dans le cadre de la théorie ondulatoire. Enfin, l'analyse du corps noir, par PLANCK, sur la base de la théorie électromagnétique, contient des contradictions qui seront relevées par EINSTEIN.

2.2. Le caractère discontinu de la matière ?

C'est dans la seconde moitié du XIX^e siècle que les recherches conduisent physiciens et chimistes à concrétiser vraiment une théorie atomique qui s'était déjà avérée utile. C'est ainsi que se précisent de plus en plus les notions d'atome, de molécules, de radical, d'ion... en liaison avec l'étude des phénomènes de transport (MAXWELL, BOLTZMANN), des réactions chimiques, des électrolytes... L'électron « apparaît » en 1897 [12]. Les « énergéticiens » du courant antiatomiste (OSTWALD, MACH par exemple) restent cependant très influents en cette fin de siècle en raison des succès de la thermodynamique macroscopique fondée sur les grandeurs continues « énergie » et « entropie » (premier et second principes). L'hypothèse atomique reste donc à prouver et le nombre d'Avogadro à déterminer avec précision. L'atomisme de la lumière introduit par EINSTEIN trouve probablement ses fondements dans cette représentation discontinue du monde [13]. Il est aussi en accord avec l'abandon de la notion d'éther qu'imposent cette même année 1905 les idées d'EINSTEIN sur la relativité.

Dans ce contexte, l'interprétation probabiliste de l'entropie par BOLTZMANN, qui donne à cette grandeur son véritable sens, va se révéler être un outil déterminant⁽²⁾. Reformulée par PLANCK dans son article de 1901, elle prend la forme actuelle :

$$S = k \ln W \quad (1)$$

Dans cette formule W représente le nombre de complexions, c'est-à-dire le nombre de manières de réaliser un état d'équilibre macroscopique à partir de toutes les réalisations microscopiques de cet état. Son calcul encourage la manipulation de quantités discrètes. Si ces quantités ont une signification physique, cet outil va aider naturellement à leur découverte. C'est ce qui va se produire pour les quanta de PLANCK et ceux d'EINSTEIN.

2.3. Le problème du « corps noir »

En 1859, Gustav KIRCHHOFF montre que lorsque des corps de composition quelconque sont enfermés dans une cavité, isolée thermiquement du milieu extérieur, la relation entre l'émission et l'absorption du rayonnement est une loi universelle qui ne dépend que de la température. Il s'ensuit que la densité volumique spectrale d'énergie lumineuse

(2) Dans l'approche traditionnelle (à la suite de CLAUSIUS en 1854) l'entropie S apparaît dans la relation $dU = TdS - PdV$ où U est l'énergie interne, TdS et $-PdV$ désignent respectivement un échange thermique δQ et un travail élémentaires δW réversibles et T est la température thermodynamique.

Dans l'approche de BOLTZMANN, W est une mesure de la liberté (ou désordre) microscopique et la relation (1) est une mesure additive de cette liberté. Par exemple, pour un gaz parfait de n molécules occupant le volume V , cette liberté correspond aux différentes positions possibles pour chaque molécule (estimées pour chacune par un terme proportionnel à V) et aux différentes façons de distribuer l'énergie entre ces molécules : $W \propto V^n W_e$. L'entropie pour une mole de gaz s'écrit donc $S = R \ln V + f(U)$. En écrivant que $dS = T^{-1} dU + T^{-1} p dV$ on retrouve la loi des gaz parfaits $PV = RT$ et la loi de Joule (U ne dépend que de T). Un grand intérêt de l'expression (1) de l'entropie est qu'elle permet de comprendre l'irréversibilité (d'où découle le second principe). Par exemple, si l'on offre à 10^{-9} mole ($n = 6 \cdot 10^{14}$) une augmentation relative de volume de 10^{-6} , W est multiplié par un facteur égal à 1 suivi 10^8 zéros. Même pour cette infime libération des contraintes, le système n'aura aucune chance de revenir à son état initial.

u dans le four en fonction de la longueur d'onde λ est une fonction universelle. Elle correspond également au pouvoir émissif d'un corps qui absorberait le rayonnement à toutes les longueurs d'onde, d'où le nom de « corps noir ». La détermination expérimentale de cette fonction et son interprétation théorique constituent le « problème du corps noir ».

En 1896, le physicien allemand Wilhelm WIEN donne une forme empirique de u que l'on peut écrire en fonction de la fréquence $\nu = c/\lambda$:

$$u(\nu) = \alpha \nu^3 \exp \left[-\frac{\beta \nu}{T} \right] \quad (2)$$

Par définition de u , l'énergie E du rayonnement présent dans le volume V et dans la bande de fréquence $d\nu$ est :

$$E = V u d\nu \quad (3)$$

Pour justifier l'expression (2) de u , WIEN [14], s'inspirant d'un travail du physicien russe W.A. MICHELSON [15-16], met en correspondance les fréquences du rayonnement avec les vitesses des émetteurs, en l'occurrence des molécules de gaz. S'appuyant sur la loi de probabilité de MAXWELL de ces molécules :

$$p(\nu) \propto \nu^2 \exp \left[-\frac{\nu^2}{\gamma^2} \right] \quad (4)$$

où γ^2 est proportionnel au carré de la vitesse moyenne ν d'agitation thermique et donc à la température thermodynamique T , WIEN introduit l'expression générale (réécrite en terme de fréquence) :

$$u_{fg}(\nu) = f(\nu) \exp \left[-\frac{g(\nu)}{T} \right] \quad (5)$$

Pour cela, il fait les deux hypothèses suivantes. La première est que la longueur d'onde λ émise est une fonction de la vitesse ν . La seconde est que l'intensité du rayonnement entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$ est proportionnelle au nombre de molécules qui émettent dans ce domaine et à une fonction de ν et donc de λ . On remarquera que WIEN omet de mentionner le facteur $T^{-3/2}$ du coefficient de proportionnalité de $p(\nu)$.

Il établit ensuite l'expression de u à partir de celle de u_{fg} en utilisant la « loi du déplacement » qu'il a donnée en 1893, à savoir « ...la variation du rayonnement avec la température se compose, selon la théorie donnée par BOLTZMANN et la mienne, d'une élévation de l'énergie totale suivant la quatrième puissance de la température et d'un changement de longueur d'onde de toute l'énergie comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$ de telle manière que la longueur d'onde dans ce domaine soit modifiée en rapport inverse de la température absolue ». Il confère ainsi en particulier à la fonction $g(\nu)$ une dépendance linéaire $g(\nu) = \beta \nu$ déterminante pour les interprétations que donneront PLANCK et EINSTEIN. On notera que WIEN se situe dans une ligne de pensée qui consiste à associer les propriétés du rayonnement et celles de ses émetteurs supposés. Ce point de vue, partagé par PLANCK, et auquel EINSTEIN finira par revenir en 1916, est toujours actuel.

2.4. Les solutions de Planck en 1900

En novembre 1899 [8], PLANCK soumet un article où, puisque la fonction $u(\nu)$ est universelle, il décrit l'émission et l'absorption du champ électromagnétique par des oscillateurs classiques. Il établit d'abord la formule :

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U \quad (6)$$

où U représente l'énergie moyenne d'un oscillateur de fréquence ν , légèrement amorti à cause du rayonnement émis, en équilibre avec le champ électrique appliqué (supposé chaotique). Cette formule fondamentale montre en particulier que l'équilibre thermique se fait fréquence par fréquence.

Puisqu'il s'agit d'étudier un équilibre thermique PLANCK est amené dans la deuxième partie de son article à introduire la grandeur entropie. Il propose pour l'entropie rapportée à un oscillateur l'expression :

$$S = -\frac{U}{a\nu} \left(\ln \frac{U}{b\nu} - 1 \right) \quad (7)$$

Comme il le montre, et comme on peut le vérifier facilement, il s'agit, à une constante additive près, de la seule relation conforme à la fois à la définition thermodynamique de la température :

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU} = -\frac{1}{a\nu} \ln \frac{U}{b\nu} \quad (8)$$

et à la relation de WIEN (2) mise sous la forme :

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{u}{\alpha\nu^3} \quad (9)$$

La comparaison des formules ci-dessus entraîne $a = \beta$ et $b = \frac{c^3 \alpha}{8\pi}$. Notons que dans cet article PLANCK attribue aussi une densité d'entropie au rayonnement qu'il relie à S par :

$$s(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} S \quad (10)$$

Cette relation analogue à celle entre u et U lui sert à effectuer un bilan d'entropie lorsque les oscillateurs échangent de l'entropie avec le rayonnement⁽³⁾. D'une certaine façon, toutes les propriétés du rayonnement se retrouvent par les formules (6) et (10) dans celles des résonateurs.

Bien sûr le problème du corps noir reste entier puisqu'une justification de S indépendante de la loi de Wien n'a pas été donnée. En mars 1900 [17], PLANCK pense avoir justifié, en décrivant les échanges d'énergie et d'entropie entre les oscillateurs et le rayonnement, que la dérivée seconde de l'entropie par rapport à l'énergie U , ci-dessus égale à $S''(U) = -(a\nu U)^{-1}$ est bien inversement proportionnelle à U . C'est alors que H. RUBENS lui

(3) Un tel échange d'entropie est naturel puisqu'un corps chaud rayonnant voit son entropie diminuer alors que l'entropie totale ne peut qu'augmenter d'après le second principe.

communiquer les données expérimentales concernant l'infrarouge jusqu'à 60 μm , ce qui va profondément changer le développement de la théorie. Ces données montrent que dans ce domaine des basses fréquences $u(\nu)$ est proportionnel à la température T , en désaccord avec la loi de Wien. Cela suggère d'après la relation (6) que dans ce domaine la dérivée première $S'(U) = T^{-1}$ de l'entropie est proportionnelle à U^{-1} , et donc que sa dérivée seconde est proportionnelle à U^{-2} . C'est probablement ainsi [15-16] que PLANCK est conduit à proposer en octobre 1900 [18] une formule d'interpolation que l'on peut récrire sous la forme :

$$S''(U) = -\frac{1}{U(av + CU)} \quad (11)$$

où C est une constante. Cette interpolation a été considérée par JAMMER [19] dans son livre sur l'histoire de la physique quantique comme « *one of the most significant and momentous contributions ever made in the history of physics* ». Par intégration sur U et identification à T^{-1} elle donne la relation :

$$U = \frac{av}{C} \frac{1}{\exp\left(\frac{av}{T}\right) - 1} \quad (12)$$

L'expression de $u(\nu)$ qui en est déduite par la relation (6) est connue sous le nom de « loi de Planck » et n'a jamais été mise en défaut par la suite. Elle se ramène à la loi de Wien aux hautes fréquences ($av \gg T$) si $C = a/b$. À basses fréquences ($av \ll T$), la relation (12) donne $U = bT/a$, qui est bien proportionnelle à la température.

PLANCK ne fait alors pas référence à l'interprétation statistique de l'entropie. C'est lors d'une communication le 14 décembre 1900, puis dans son article soumis en janvier 1901 [9], qu'il l'introduit. Il écrit alors pour un ensemble de N oscillateurs identiques :

$$S_N = k \ln W_N \quad (13)$$

avec $S_N = NS$ et $U_N = NU$, afin de retrouver la nouvelle formule de $S(U)$:

$$S(U) = \frac{b}{a} \left[\left(1 + \frac{U}{bv}\right) \ln \left(1 + \frac{U}{bv}\right) - \frac{U}{bv} \ln \frac{U}{bv} \right] \quad (14)$$

qui se déduit par intégrations de l'expression (11) de $S''(U)$. La solution ingénieuse qu'il donne pour W_N (et qui probablement lui a été suggérée [19] par le calcul inverse de $\exp\left[\frac{NS}{k}\right]$) est :

$$W_N = \frac{(N+P+1)!}{(N-1)!P!} \approx \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P} \quad (15)$$

W_N est le nombre de manières⁽⁴⁾ de répartir entre les oscillateurs (distinguaibles) l'énergie totale $U_N = P\varepsilon$ avec P grand, chaque oscillateur ne pouvant avoir que les énergies 0, ε ,

(4) Pour $N = 4$ et $P = 3$, W_N vaut 20. On obtient ce résultat en ajoutant les quatre façons de choisir un oscillateur pour lui donner l'énergie 3ε , les 4×3 façons de choisir deux oscillateurs pour leur donner respectivement les énergies 2ε et ε , et les quatre façons de choisir trois oscillateurs pour donner à chacun ε . Dans le

2ε... La comparaison de $k \ln W_N$ avec l'expression (14) de l'entropie $S(U)$ conduit très simplement à :

$$\varepsilon = h\nu \quad (16)$$

avec $h = b = ak$. En 1901 et pendant quelques années encore, ces paquets d'énergie (*energie element*) et la constante h vont rester fortement marqués par l'origine phénoménologique de la loi de Planck.

Pour comparer ultérieurement les démarches de PLANCK et d'EINSTEIN il est utile de donner ici l'expression de W_N que Planck aurait obtenue s'il était parti de la formule (7) de l'entropie déduite de la loi de Wien. L'entropie pour N oscillateurs s'écrit alors :

$$S_N = - \frac{U_N}{av} \left(\ln \frac{U_N}{Nbv} - 1 \right) \quad (17)$$

On calcule facilement à partir de cette expression le nombre de complexions :

$$W_N = \exp\left(\frac{S_N}{k}\right) = \left(\frac{Nbv}{U_N}\right)^{\frac{U_N}{avk}} \exp\left(\frac{U_N}{avk}\right) = \left(\frac{N}{P}\right)^P e^P \quad (18)$$

si l'on pose avec PLANCK $U_N = P\varepsilon$, $\varepsilon = avk = h\nu$ et $b = ak$. Cette expression de W_N que l'on retrouvera au paragraphe 3.3. est l'approximation de :

$$W_N = \frac{N!}{P!(N-P)!} \quad (19)$$

pour P grand mais très petit devant N . Elle est bien sûr aussi un cas particulier de la relation (15) de PLANCK sous les mêmes conditions. Elle correspond au nombre de manières de répartir les P éléments d'énergie ε sur les N résonateurs dans l'approximation où peu d'oscillateurs sont excités (leurs énergies sont soit 0 soit ε). L'image qui découle de ce calcul est celle d'un ensemble d'oscillateurs binaires fixes au sein de la cavité, « éteints » pour la plupart, « allumés » pour quelques-uns, donnant une version « scintillante » du champ électromagnétique. L'allumage et l'extinction des résonateurs ne pouvant se faire que par paquets d'énergie, PLANCK développera à partir de 1911 sa théorie des échanges d'énergie entre résonateurs et champ [20].

3. LA STRATÉGIE D'EINSTEIN DE 1905

3.1. Le retour à la loi de Wien

Pour justifier la démarche qu'il va suivre, EINSTEIN commence par une critique des

cas général, une astuce de calcul pour calculer W_N consiste à placer sur une ligne P points indiscernables (représentant les éléments d'énergie ε) et $N - 1$ traits (eux aussi indiscernables) séparant N régions représentant les oscillateurs numéros 1, 2, ..., N . W_N est le nombre de possibilités de placer les $N - 1$ traits parmi les $N + P - 1$ positions pour les traits et les points. On utilise ensuite la formule d'équivalence de Stirling $N! \approx N^N e^{-N}$ applicable à des grands nombres. Un exemple de complexion possible dans le cas $N = 4$ et $P = 3$ est « .ll » ; l'oscillateur 1 a l'énergie 2ε , l'oscillateur 2 l'énergie ε et les oscillateurs 3 et 4 l'énergie 0. En se permettant un jeu de mots, on peut dire que W_N est le nombre de façons de répartir en bourse la valeur de P actions entre N actionnaires.

oscillateurs de PLANCK qu'il matérialise par des électrons « liés à des points de l'espace [qui] émettent et absorbent des ondes électromagnétiques de période bien déterminée ». Ces électrons étant en équilibre thermique avec les « molécules », il fait appel au théorème d'équipartition (qu'il considère comme universellement valable) pour affirmer que « la valeur moyenne de l'énergie U de chacun de ces mouvements d'oscillation rectiligne est : $U = \frac{R}{N} T$ ». Faisant usage de la relation (6) de PLANCK entre u et U , il montre que

la proportionnalité de u à v^2 dans tout le domaine spectral conduit à une énergie volumique totale infinie. Cette divergence a été baptisée « catastrophe ultraviolette » par Paul EHRENFEST en 1911. Puis, après avoir vérifié que la loi de Planck se ramène à cette expression pour les grandes longueurs d'onde ⁽⁵⁾ (ce qui lui permet de retrouver le nombre d'Avogadro par identification), il se concentre sur l'étude de la partie haute fréquence du spectre, responsable de la divergence ci-dessus, et donnée par la loi de Wien.

Comme PLANCK, il considère que l'équilibre thermique se fait fréquence par fréquence et il s'appuie sur la relation :

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T} \quad (20)$$

Comme PLANCK encore, il part de la loi de Wien, mais l'objet n'est plus un oscillateur. Il est devenu le rayonnement présent dans un volume V et une bande de fréquence dv . Soit $E = Vudv$ son énergie et $S = Vsdv$ son entropie. Alors la loi de Wien (2) peut être mise sous la forme :

$$\frac{1}{T} = - \frac{1}{\beta v} \ln \frac{E}{\alpha v^3 V dv} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (21)$$

ce qui conduit à l'expression suivante de l'entropie :

$$S = - \frac{E}{\beta v} \left(\ln \frac{E}{V \alpha v^3 dv} - 1 \right) \quad (22)$$

Les relations (21) et (22) sont strictement équivalentes aux relations (8) et (7) de PLANCK, mais sont interprétées de manière radicalement différente par EINSTEIN.

3.2. Quanta et « liberté » volumique

Toute l'originalité de la démarche d'EINSTEIN est de s'intéresser à la dépendance en volume de S et non pas à sa dépendance en énergie. La différence, pour E fixé :

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta v} \ln \frac{V}{V_0} \quad (23)$$

« montre que l'entropie d'un rayonnement monochromatique, de densité suffisamment faible, varie en fonction du volume selon la même loi que l'entropie d'un gaz parfait ou d'une solution diluée ». Rappelons en effet que pour un gaz parfait de n molécules (cf. note 2), cette dépendance volumique (illustrée dans l'enseignement actuel par la détente

(5) En effet, pour $\alpha v \ll T$, la formule (12) donne bien $U = kT$.

de Joule) est :

$$S - S_0 = \frac{Rn}{\mathcal{N}} \ln \frac{V}{V_0} \quad (24)$$

À ce moment, par comparaison entre les deux relations précédentes, EINSTEIN pourrait conclure comme il le fait plus loin qu'« *un rayonnement monochromatique de faible densité (dans les limites de validité de la loi du rayonnement de Wien) se comporte, par rapport à la théorie de la chaleur, comme s'il était constitué de quanta d'énergie, indépendants les uns des autres, de grandeur $R\beta\nu/\mathcal{N}$* ». Cette dernière quantité est l'expression du quantum d'énergie de PLANCK que l'on peut écrire :

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{où} \quad h = \frac{R\beta}{\mathcal{N}} \quad (25)$$

Cependant, afin de donner plus de consistance à sa vision microscopique, EINSTEIN prend la peine, dans cet article consacré au rayonnement, d'établir l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en revenant à l'interprétation probabiliste de BOLTZMANN. Il écrit :

$$S - S_0 = \frac{R}{\mathcal{N}} \ln W \quad (26)$$

où W est la « *probabilité relative* » d'un état d'entropie S . Il fait ensuite le raisonnement suivant, soit « *n points mobiles (des molécules par exemple) dans le volume V_0 . Le système considéré [...] a une certaine entropie S_0 . Imaginons une portion du volume V_0 de grandeur V , et que les n points mobiles soient transportés dans le volume V , sans que rien par ailleurs ne soit modifié dans le système. À cet état correspond évidemment une autre valeur (S) de l'entropie [...]. Posons-nous alors la question [...] quelle est la probabilité pour que, en un instant choisi au hasard, les n points mobiles indépendants contenus dans le volume V_0 se trouvent (par hasard) tous dans le volume V ? [...] on obtient évidemment la valeur :*

$$W = \left(\frac{V}{V_0} \right)^n \gg \quad (27)$$

d'où l'expression (24) de $S - S_0$. Il interprète alors la différence $S - S_0$ pour le rayonnement (23) : « *Si un rayonnement monochromatique de fréquence ν et d'énergie E est enfermé (grâce à des parois réfléchissantes) dans un volume V_0 , la probabilité pour qu'à un instant quelconque, toute l'énergie du rayonnement se trouve dans une portion V du volume V_0 est :*

$$W = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{\mathcal{N}}{R} \frac{E}{\beta\nu}} \gg \quad (28)$$

La comparaison des deux expressions ci-dessus de W conduit bien sûr elle aussi à la relation (25) des quanta. C'est donc bien le fait qu'EINSTEIN applique ses formules (mathématiquement équivalentes à celles de PLANCK) directement au champ électromagnétique dans un volume V , et étudie seulement la dépendance de l'entropie vis-à-vis du volume qui entraîne une autre interprétation. Cette dépendance implique que les quanta d'EINSTEIN sont, contrairement à ceux de PLANCK, libres de se déplacer.

3.3. Remarques sur le raisonnement analogique d'Einstein

Dans ce paragraphe nous revenons sur la démarche analogique d'EINSTEIN afin d'en examiner sa généralité et ses limites. Prenons la forme (5) que WIEN avait déjà donnée pour u , où les fonctions $f(v)$ et $g(v)$ sont quelconques et généralisent αv^3 et βv . Le raisonnement d'EINSTEIN conduit alors immédiatement pour l'entropie S et sa variation $S - S_0$ à :

$$S = - \frac{E}{\beta g(v)} \left(\ln \frac{E}{V f(v) dv} - 1 \right), \quad S - S_0 = \frac{E}{\beta g(v)} \ln \frac{V}{V_0} \quad (29)$$

On constate d'abord en comparant les relations (29) et (23) que l'idée de quanta persiste, mais l'énergie de chaque quanta est désormais égale à $\varepsilon = hg(v)$. La relation $\varepsilon = hv$, dont on sait aujourd'hui qu'elle est valable dans tout le domaine quantique, repose donc entièrement en 1905 sur le remplacement par Wien de $g(v)$ par une fonction linéaire en 1896.

On constate ensuite que le choix de la fonction $f(v)$ n'a aucune incidence sur le résultat ce qui paraît aussi en faveur de la généralité de l'analyse d'EINSTEIN. Mais dans la loi de Wien, considérée comme une approximation de la loi de Planck de 1900, la fonction $f(v)$ s'écrit :

$$f(v) = \frac{8\pi h v^3}{c^3} = \frac{8\pi v^2}{c^3} (hv) \quad (30)$$

Il est donc étonnant qu'EINSTEIN, qui accordait lui-même de l'importance au terme $8\pi v^2/c^3$ responsable de la « catastrophe ultraviolette », ignore le terme $f(v)$, d'autant plus que le facteur hv s'y retrouve.

Pour approfondir ce point, intéressons-nous à la dépendance en énergie dans la relation (22) d'EINSTEIN. Le nombre de complexions s'écrit alors :

$$W = \exp\left(\frac{S}{k}\right) = \left(\frac{\alpha v^3 V dv}{E}\right)^{\frac{E}{hv}} \exp\left(\frac{E}{hv}\right) = \left(\frac{N}{P}\right)^P e^P \quad (31)$$

Cette expression ressemble à l'expression (18) trouvée pour PLANCK dans l'approximation de WIEN. $P = \frac{E}{hv}$ est encore le nombre de quanta (ici d'EINSTEIN) mais :

$$N = \frac{\alpha v^2 dv V}{h} = \frac{8\pi v^2 dv}{c^3} V \quad (32)$$

ne représente plus le nombre d'oscillateurs. Dans ce calcul, N doit être interprété comme le « nombre d'états » (discernables) entre lesquels on distribue les P quanta (indiscernables) étant entendu, puisque $P \ll N$, qu'il n'y a que 0 ou 1 quantum par état. On dirait aujourd'hui que $N = f(v) dv V$ mesure la dégénérescence des états des photons associés à la bande de fréquence dv et au volume V . On reviendra dans le paragraphe 4 sur le calcul direct de N (qui fait appel à un comptage de modes) et sur ces deux interprétations différentes de N .

3.4. Lumière et matière

Ayant trouvé dans l'expression de S en fonction de V une justification de son approche atomiste de la lumière, EINSTEIN poursuit son raisonnement analogique en revenant à la matière : « Dès lors qu'un rayonnement monochromatique (de densité suffisamment faible) se comporte, relativement à la dépendance en volume de son entropie, comme un milieu discontinu constitué de quanta d'énergie de grandeur $R\beta\nu/\mathcal{N}$, on est conduit à se demander si les lois de la production et de la transformation de la lumière n'ont pas également la même structure que si la lumière était constituée de quanta d'énergie de ce type ». EINSTEIN, dans ses lettres privées, exprime avoir conscience de proposer là une théorie « révolutionnaire ».

Il examine alors les cas de la « photoluminescence », de la « production des rayons cathodiques par éclairage d'un corps solide » (effet photoélectrique), et de l'« ionisation d'un gaz par de la lumière ultraviolette » pour montrer que ces phénomènes sont facilement explicables en vertu de l'hypothèse des « grains d'énergie ». Nous ne rappelons ici que l'analyse de l'effet photoélectrique.

Lorsqu'une surface métallique est éclairée par un rayonnement d'une longueur d'onde suffisamment courte (ultraviolet), des électrons sont arrachés au métal (les « rayons cathodiques »). Le phénomène se produit même avec des sources de très faible intensité, ce qui est difficile à expliquer dans le cadre de la théorie ondulatoire pour laquelle l'énergie se « dilue » sur toute la surface de l'onde. Ici le phénomène suggère à première vue que l'énergie lumineuse reste concentrée. EINSTEIN en donne l'interprétation corpusculaire suivante : « La conception selon laquelle la lumière excitatrice est constituée de quanta d'énergie $(R/\mathcal{N})\beta\nu$ permet de concevoir la production de rayons cathodiques par de la lumière de la manière suivante. Des quanta d'énergie pénètrent dans la couche superficielle du corps ; leur énergie est transformée, au moins en partie, en énergie cinétique des électrons. La représentation la plus simple que l'on puisse s'en faire est celle d'un quantum de lumière cédant son énergie à un seul électron ; nous allons supposer que c'est bien ce qui se passe. Il n'est pas exclu cependant que des électrons ne prennent qu'une partie de l'énergie des quanta de lumière. Un électron, auquel de l'énergie cinétique a été fournie à l'intérieur du corps, atteint la surface en ayant perdu une partie de son énergie cinétique. Nous allons supposer, de plus, que tout électron doit, pour pouvoir quitter un corps, fournir un certain travail P (caractéristique du corps). Les électrons qui quittent le corps avec la vitesse normale la plus élevée sont ceux qui se trouvent immédiatement à la surface et qui ont été excités normalement à celle-ci. L'énergie cinétique de ces électrons est :

$$\beta\nu - P \quad (33)$$

Si le corps est porté au potentiel π , s'il est entouré de conducteurs à un potentiel nul, et si π est tout juste capable d'empêcher le corps de perdre de l'électricité, on a :

$$\pi e = \beta\nu - P \quad (34)$$

où e désigne la charge électrique de l'électron ⁽⁶⁾ ».

(6) En notations modernes, avec $h\nu$ l'énergie d'un quantum, e la charge de l'électron, V le potentiel du métal et $W = h\nu_0$ le travail nécessaire à l'extraction d'un électron superficiel, où ν_0 est la fréquence seuil en dessous de laquelle il n'y a plus extraction, cette relation se lit $eV = h(\nu - \nu_0)$.

Le physicien américain Robert MILLIKAN vérifie en 1916 la prédiction d'EINSTEIN suivant laquelle le potentiel « π en fonction de la fréquence de la lumière excitatrice doit être, en coordonnées cartésiennes, une droite dont la pente ne dépend pas de la substance étudiée ». La détermination de la pente de la droite donne la valeur de h . « Les valeurs ainsi déterminées sont, pour le sodium : $h = 6,569 \cdot 10^{-27}$ erg.s. et, pour le lithium, $h = 6,584 \cdot 10^{-27}$ erg.s. Les mesures de MILLIKAN montrent donc que la pente de la droite est indépendante de la nature du métal. Elles fournissent une valeur particulièrement précise de la constante de PLANCK : $h = 6,57 \cdot 10^{-27}$ erg.s. à 0,5 % près » [21].

EINSTEIN se voit attribué le prix Nobel de physique 1921 « pour ses services rendus à la physique théorique et spécialement pour sa découverte de la loi de l'effet photoélectrique ».

En conclusion on peut reprendre la citation suivante extraite de l'introduction de l'article d'EINSTEIN, qui résume bien la stratégie et la démarche suivies : « La théorie ondulatoire de la lumière opérant avec des fonctions d'espace continues s'est avérée parfaite pour ce qui est de la description des phénomènes purement optiques et il se peut qu'elle ne soit jamais remplacée par aucune autre théorie. Il ne faut cependant pas perdre de vue que les observations optiques portent sur des valeurs moyennes dans le temps et pas sur des valeurs instantanées ; il n'est pas inconcevable, bien que les théories de la diffraction, de la réflexion, de la réfraction, etc., soient entièrement confirmées par l'expérience, que la théorie de la lumière qui opère sur des fonctions continues de l'espace puisse conduire à des contradictions avec l'expérience lorsqu'elle est appliquée aux phénomènes de production et de transformation de la lumière.

De fait, il me semble que les observations portant sur le "rayonnement noir", la photoluminescence, la production de rayons cathodiques par la lumière ultraviolette, et d'autres classes de phénomènes concernant la production et la transformation de la lumière, apparaissent comme plus compréhensibles si l'on admet que l'énergie de la lumière est distribuée de façon discontinue dans l'espace. Selon l'hypothèse envisagée ici, lors de la propagation d'un rayonnement lumineux émis par une source ponctuelle, l'énergie n'est pas distribuée de façon continue sur des espaces de plus en plus grands, mais est constituée d'un nombre fini de quanta d'énergie localisés en des points de l'espace, chacun se déplaçant sans se diviser et ne pouvant être absorbé ou produit que tout d'un bloc ».

3.5. Doutes et espoirs d'Einstein sur les quanta

L'idée des quanta indépendants de 1905, que l'on justifie dans l'enseignement par l'effet photoélectrique, va se révéler incomplète, voire trop naïve. Tout d'abord, subsiste l'éternel débat sur le caractère en apparence contradictoire des comportements « ondulatoires » et « corpusculaires » de la lumière. EINSTEIN va revenir sur ce qu'il dit dans l'introduction de son article de 1905. Dans une lettre adressée à LORENTZ le 23 mai 1909, il écrit : « En effet, je ne pense pas du tout qu'il faille concevoir la lumière comme composée de quanta indépendants les uns des autres et localisés dans des volumes relativement petits. Pour expliquer la limite de WIEN de la formule du rayonnement, c'est certainement

ce qu'il y aurait de plus commode ». Puis il ajoute « *Mais la division d'un rayon lumineux à la surface de milieux réfringents à elle seule interdit purement et simplement cette conception. Un rayon lumineux se divise, alors qu'un quantum lumineux ne peut pas se diviser sans qu'il y ait changement de fréquence [...]* ». Enfin, il livre son sentiment : « *J'imagine donc chaque quantum de lumière comme un point, environné d'un champ vectoriel très étendu, décroissant avec la distance d'une façon quelconque* ».

Dans un article de 1909 [22], EINSTEIN déduit les fluctuations d'énergie du rayonnement du corps noir à partir de la loi de Planck et de la relation suivante entre ces fluctuations et la dérivée seconde de S :

$$(\Delta E)^2 = -k \left(\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \right)^{-1} \quad (35)$$

Cette fluctuation est composée de deux termes :

$$(\Delta E)^2 = h\nu E + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu V} E^2 \quad (36)$$

dont le premier correspond à l'approximation de WIEN. Si celui-ci existait seul, on le comprendrait naturellement de la manière suivante. Soit $n = \frac{E}{h\nu}$ le nombre de quanta, les fluctuations de n obéissent à $(\Delta n)^2 = n$ à la manière de celles du nombre de molécules d'un gaz dilué dans le volume V . Cette constatation encourage EINSTEIN dans sa remise en cause de la théorie ondulatoire, mais subsiste le second terme proportionnel à E^2 . Celui-là s'interprète bien au contraire dans le cadre de la théorie ondulatoire comme résultant de la superposition d'ondes électromagnétiques d'amplitude et de phase aléatoires (à l'image d'une figure de speckles). Les doutes d'EINSTEIN s'accroissent dans une lettre à son ami BESSO en 1911 : « *Je ne me demande plus si ces quanta existent réellement. Et je n'essaye plus de les construire parce que je sais maintenant que mon cerveau en est incapable. Mais j'explore quand même les conséquences aussi soigneusement que possible, afin d'apprendre le domaine d'applicabilité de ce concept.* » ou encore dans une lettre à HOPF la même année : « *Les quanta remplissent certes leur fonction de quanta, mais ils n'ont pas d'existence, pas plus que l'éther au repos. Celui-ci se retourne consciencieusement dans sa tombe, en ce moment, avec l'espoir de retrouver une nouvelle vie - le pauvre* ».

Certes, l'espoir d'EINSTEIN renaît en 1916 lorsqu'il pense parvenir à une justification de la loi de Planck en introduisant les phénomènes d'émission induite et spontanée. À cette occasion, il attribue aux quanta une quantité de mouvement $p = h\nu/c$ qui se retrouvera dans l'expérience de Compton de la diffusion des rayons X en 1923. Cet espoir est conforté en 1924 par l'article de BOSE qui le conduit à formuler pour les quanta la statistique connue sous le nom de Bose-Einstein [23]. Les quanta sont alors largement acceptés dans la communauté scientifique, mais ils ont profondément changé par rapport à ceux de 1905. Ils prennent le nom « photons » en 1926 avec LEWIS.

Avec le développement de la mécanique quantique et son application à la quantifi-

cation du champ électromagnétique, EINSTEIN qui n'adhérera jamais à l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique persistera dans ses doutes et écrira en 1951 : « *Ces cinquante ans de ruminations conscientes ne m'ont pas rapproché de la question "Que sont les quanta lumineux ?" Aujourd'hui le premier fripon venu croit qu'il sait ce qu'ils sont, mais il se leurre* ».

4. LE CHAMP QUANTIQUE

Le but de ce paragraphe est d'introduire la conception « moderne » suivant laquelle l'objet d'étude n'est plus l'oscillateur, ni le champ ou les quanta présents dans le volume V , mais un mode du champ. Ce changement d'objet permet d'obtenir simplement la loi de Planck à partir de la loi de Boltzmann et de mieux comprendre les différentes formules qui apparaissent dans les travaux de PLANCK et d'EINSTEIN.

4.1. La notion de mode

La notion de mode s'introduit par exemple quand on considère une corde vibrante de longueur l fixée à ses extrémités $z = 0$ et $z = l$. Un mode de vibration correspond à une onde stationnaire $A \sin k_z \cos \omega t$ où tous les points oscillent en phase ($\omega = 2\pi\nu = ck$ où c est la vitesse de propagation sur la corde). Le mode se comporte comme un oscillateur dont la pulsation est quantifiée par les conditions aux limites $k = n\pi/l$. Une vibration quelconque de la corde peut être représentée par une somme de modes (analyse de Fourier) et l'énergie moyenne correspondante est la somme des énergies des différents modes constitutifs.

Quand beaucoup de modes sont simultanément présents sur la corde leur nombre dans l'intervalle Δk s'obtient en divisant Δk par l'intervalle $\pi/\Delta z$ entre deux modes ($l = \Delta z$). Dans cette situation (qui est aussi celle du champ à l'intérieur du corps noir), il n'est ni facile, ni physique, de distinguer les modes de vibration de ceux de propagation définis par les ondes progressives $A \cos(\omega t - k_z z)$. Comme les ondes peuvent se propager dans les deux sens, k_z est algébrique. Le même décompte du nombre de modes s'obtient alors avec des ondes progressives en divisant Δk_z par $2\pi/\Delta z$. Autrement dit, un mode de propagation occupe dans l'espace (z, k_z) une surface 2π .

À trois dimensions, un mode dans un volume $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ occupe dans l'espace (\mathbf{r}, \mathbf{k}) une région telle que $(\Delta x \Delta k_x)(\Delta y \Delta k_y)(\Delta z \Delta k_z) = (2\pi)^3$. Pour la lumière (conçue comme un phénomène ondulatoire) dans le volume V et la bande de fréquence $d\nu$, qui correspond au domaine $4\pi k^2 dk$ avec $k = 2\pi\nu/c$ dans l'espace des vecteurs d'ondes \mathbf{k} , le nombre de modes est :

$$N = 2 \frac{V(4\pi k^2 dk)}{(2\pi)^3} = V \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \quad (37)$$

Le facteur 2 a été rajouté pour tenir compte des deux polarisations transverses d'une onde

plane électromagnétique. On retrouve ainsi le nombre d'états de la formule (32)⁽⁷⁾.

Une propriété remarquable associée à la notion de mode est que quand un pinceau lumineux se propage dans l'air ou à travers un instrument optique, le volume $(\Delta x \Delta k_x)(\Delta y \Delta k_y)(\Delta z \Delta k_z)$ reste constant. Toute portion $\Delta x \Delta y \Delta z$ de ce faisceau conserve donc son nombre de modes⁽⁸⁾ dans la propagation. La conservation de l'énergie entraîne aussi celle de l'énergie par modes et par conséquent celle du nombre de photons dans le mode. Ces dernières quantités sont reliées simplement (à travers les constantes h et c) à la fréquence ν et à la luminance du faisceau [24].

4.2. Quantification et thermalisation d'un mode

À l'aide du concept de mode, la formule de Planck peut se réinterpréter de la manière suivante (due à EHRENFEST dès 1906). Soit $\frac{N}{V d\nu}$ le nombre de modes par unité de volume et de fréquence. On obtient la densité spectrale d'énergie volumique u en multipliant ce nombre par l'énergie d'un mode. On trouve alors l'expression (6) de PLANCK à la condition d'identifier l'énergie du mode à l'énergie U d'un résonateur. Plus généralement, on peut reprendre l'analyse de PLANCK et ses résultats en remplaçant le mot « résonateur » par les mots « mode du champ ».

Ainsi les valeurs $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots$ avec $\varepsilon = h\nu$, introduites par PLANCK, représentent les énergies quantifiées des différents états possibles pour le mode, chaque état étant caractérisé par la présence de $0, 1, 2, \dots$ photons dans le mode. Si l'on considère que les modes, dans le cas du rayonnement du corps noir, sont indépendants (incohérents entre eux d'un point de vue classique), on peut appliquer à chacun la loi de Boltzmann, comme on le fait pour des molécules indépendantes d'un gaz parfait, c'est-à-dire affecter chacune des énergies $n\varepsilon$ du mode d'un facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{n\varepsilon}{kT}\right)$. L'énergie moyenne U du mode (obtenue à partir des probabilités de chaque énergie) est ainsi :

$$U = \frac{\sum n\varepsilon \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{kT}\right)}{\sum \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{kT}\right)} = \frac{\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1} \quad (38)$$

Ceci n'est autre que la formule (12) de PLANCK. Si l'on s'intéresse à l'énergie dans le

(7) La première version de ce calcul a été effectuée par RAYLEIGH en 1900 avec une erreur sur le facteur 8. BOSE a fait un calcul similaire dans l'espace des phases $(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}/2\pi)$ en 1924 en utilisant la quantité de mouvement donnée par EINSTEIN en 1916. Dans l'espace de phase un mode (ou état du photon) correspond alors à une cellule élémentaire de volume $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{p} = h^3$.

(8) Cette propriété est un cas particulier du théorème de Liouville. On le comprend sur l'exemple d'un pinceau lumineux divergent issu d'une petite source. Le volume d'une portion du faisceau croît avec le carré de la distance et la dispersion $\Delta k_x, \Delta k_y$, en un point de cette portion décroît inversement avec le carré de cette distance ($k^{-2} \Delta k_x \Delta k_y$ est la surface angulaire apparente de la source).

volume V et la bande $d\nu$ on obtient :

$$E = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu U = V \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu \quad (39)$$

ce qui donne la loi de Planck du rayonnement. De même, en calculant les fluctuations d'énergie du mode, on obtient :

$$(\Delta U)^2 = \frac{\sum (n\varepsilon)^2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{kT}\right)}{\sum \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{kT}\right)} - U^2 = U(h\nu + U) \quad (40)$$

Si l'on s'intéresse aux photons dans le mode, ces formules s'écrivent, pour le nombre moyen de photons $\langle n \rangle = \frac{U}{\varepsilon}$ et pour les fluctuations $(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ de ce nombre :

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT} - 1\right)} \quad \text{et} \quad (\Delta n)^2 = \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle) \quad (41)$$

La signification physique du nombre n de photons par mode a été discutée dans le paragraphe précédent. La formule donnant $(\Delta n)^2$ signifie qu'au cours du temps, dans la cavité, le nombre de photons dans un mode n'est pas fixé. Si, par expérience de pensée, on isole un mode à la sortie du corps noir ou à l'aide d'une cavité résonante placée dans le corps noir, ce nombre de photons (donc l'énergie du mode) fluctue au cours du temps. On remarquera que ces formules ont été obtenues à partir de la statistique de BOLTZMANN⁽⁹⁾.

Si l'on s'intéresse aux fluctuations d'énergie, on observe que la formule (40) ci-dessus est identique à celle d'EINSTEIN (36) mais beaucoup plus simple. On passe de l'une à l'autre en ajoutant les contributions des fluctuations des différents modes puisqu'ils sont indépendants :

$$(\Delta E)^2 = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu (\Delta U)^2 \quad (42)$$

D'autre part, si on utilise la relation (35) entre les fluctuations $(\Delta U)^2$ en énergie et la dérivée seconde de l'entropie, on retombe sur l'expression phénoménologique de Planck (11) :

$$S''(U) = \frac{k}{U(h\nu + U)}$$

qui a été le point de départ de toute cette aventure des quanta. Comment alors ne pas s'exclamer avec LORENTZ en 1916 [4] : « *Non seulement les fluctuations sont une conséquence nécessaire des théories modernes mais encore elles nous livrent la clé de la théorie du rayonnement toute entière* ».

(9) Si on relit attentivement l'article de BOSE [3] on s'aperçoit qu'il retrouve la loi de Boltzmann pour les cellules de l'espace de phase avant d'obtenir l'énergie moyenne par cellule.

Si enfin l'on revient à l'expression (15) de W_N donnée par PLANCK en 1901, on observe que :

$$W_N = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!} \approx \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

est, dans cette interprétation, le nombre de façons de répartir l'énergie totale Pe entre N répliques identiques d'un mode du champ (les N résonateurs de PLANCK) chacun pouvant avoir les énergies $0, \epsilon, 2\epsilon \dots$ Le lecteur qui connaît la statistique de BOSE-EINSTEIN [23] remarquera qu'on utilise une formule semblable :

$$\prod_v \frac{(g_v + N_v - 1)!}{(g_v - 1)!N_v!} \quad (43)$$

pour calculer le nombre de complexions à partir des photons. g_v représente alors, comme N à la fin du paragraphe 3.3., le nombre d'états (ou de modes) associés à la bande de fréquence dv et au volume V et N_v est le nombre de photons. Mais il faut alors maximiser cette quantité (à l'aide des multiplicateurs de LAGRANGE) par rapport aux variables N_v sous la contrainte que le nombre de photons et l'énergie sont fixés. Ce calcul compliqué n'est pas non plus « physique » puisque dans une cavité, ce ne sont pas les photons qui thermalisent (les photons n'interagissent pas entre eux) mais chaque mode du champ dans son interaction avec la matière.

4.3. Interaction matière-rayonnement

Concluons avec quelques mots sur cette interaction avec la matière qui est au cœur de l'explication du rayonnement du corps noir comme n'a cessé de le répéter PLANCK. En 1916, EINSTEIN, reprenant le modèle de BOHR de 1913, relie la loi de Planck à la loi de Boltzmann pour un système atomique à deux niveaux d'énergies respectives ϵ_1 et ϵ_2 ($\epsilon_2 > \epsilon_1$). Il introduit les coefficients d'absorption $B_{1 \rightarrow 2}$, d'émission induite $B_{2 \rightarrow 1}$, d'émission spontanée A , et écrit l'égalité à l'équilibre du nombre de transitions par unité de temps de $1 \rightarrow 2$ et de $2 \rightarrow 1$ sous la forme :

$$B_{1 \rightarrow 2}(v)u(v)\exp\left[-\frac{\epsilon_1}{kT}\right] = [A(v) + B_{2 \rightarrow 1}(v)u(v)]\exp\left[-\frac{\epsilon_2}{kT}\right] \quad (44)$$

Il retrouve la loi de Planck pour $u(v)$ si $B_{1 \rightarrow 2}(v) = B_{2 \rightarrow 1}(v) = \left[\frac{8\pi v^2}{c^3}(hv)\right]^{-1} A(v)$. Là encore, cette formule s'écrit simplement en introduisant le nombre de photons par modes :

$$\langle n \rangle \exp\left[-\frac{\epsilon_1}{kT}\right] = (1 + \langle n \rangle) \exp\left[-\frac{\epsilon_2}{kT}\right] \quad (45)$$

Bien qu'obtenue dans le cadre très restrictif du corps noir, elle fournit une information clé sur l'interaction matière-rayonnement : quand n photons sont présents dans le mode, les probabilités d'émission et d'absorption sont respectivement proportionnelles à n et $n+1$.

Pour comprendre ce résultat il faudra attendre le travail de JORDAN sur la quantifi-

cation du champ électromagnétique en 1925 (chaque mode du champ étant assimilé à un oscillateur), et le travail de DIRAC de 1927 sur la quantification du système complet {charges + champ} avec l'introduction des opérateurs d'annihilation a et de création a^+ des photons [4]. L'action de ces opérateurs sur les états $|n\rangle$ correspondant à n photons dans le mode est en effet :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{et} \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (46)$$

Elle explique le résultat ci-dessus puisque les transitions atomiques $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow 1$ correspondent au passage de n à $n-1$ et n à $n+1$ photons respectivement. On trouvera dans le livre de FEYNMAN [25] une introduction des facteurs \sqrt{n} et $\sqrt{n+1}$ à propos de la statistique des bosons et dans la référence [24] un traitement simplifié de l'interaction d'un système à deux niveaux avec un mode classique ou quantique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EINSTEIN A. *Un point de vue heuristique concernant la production et la transformation de la lumière*, in BALIBAR Françoise (Dir), *Albert Einstein - Œuvres choisies*, 1993, vol. 1, Quanta, Sources du savoir, Seuil/CNRS, p. 39-53. *Annalen der Physik*, 1905, vol. 17, p. 132-148.
- [2] EINSTEIN A. *Théorie quantique du rayonnement*, in BALIBAR Françoise (Dir), *Albert Einstein - Œuvres choisies*, 1993, vol. 1, Quanta, Sources du savoir, Seuil/CNRS, p. 134-147. *Annalen der Physik*, 1917, vol. 18, p. 121-128. D'abord publié dans les *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft*, Zurich, 1916, n° 18.
- [3] BOSE S. N. Planck's Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 1924, 26, p. 178-181. trad. dans J. LEITE LOPES, B. ESCOUBES, *Source et évolution de la physique quantique - textes fondateurs*, Masson, 1995.
- [4] DARRIGOL O. La genèse du concept de champ quantique. *Annales de physique*, 1984, 9, p. 433-501, pour une étude historique.
- [5] KASTLER A. Max Planck et le concept de quantum d'énergie lumineuse $\varepsilon = h\nu$. *Bull. Un. Phys.*, octobre 1997, vol. 91, n° 797, p. 1621-1636.
- [6] GIÉ H. L'introduction de la constante d'action h par Planck (1900). *Bull. Un. Phys.*, décembre 1985, vol. 80, n° 679, p. 327-337.
- [7] BOUDENOT J.-C. et COHEN-TANNOUDJI G. *Max Planck et les quanta*. Ellipses, 2001.
- [8] PLANCK M. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge. *Annalen der Physik*, 1900, vol. 1, p. 69-112.
- [9] PLANCK M. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. *Annalen der Physik*, 1901, vol. IV, p. 553-563. trad. dans J. LEITE LOPES, B. ESCOUBES, *Source et évolution de la physique quantique - textes fondateurs*, Masson, 1995.
- [10] BALIBAR F. (Dir). *Albert Einstein - Œuvres choisies*. 1993, vol. 1, Quanta, Sources du savoir, Seuil/CNRS, 270 pages.

- [11] BRACCO C., KREBS G., CHARRIER R. et ALBRECHT F. Cédérom *Histoire des idées sur la lumière, de l'Antiquité au début du xx^e siècle*, CRDP de Nice, 2004.
- [12] DARRIGOL O., Aux confins de l'électrodynamique maxwellienne : Ions et électrons vers 1897. *Rev. Hist. Sci.*, 1998, vol. 51/1, p. 5-34.
- [13] BALIBAR F. *Einstein 1905. De l'éther aux quanta*. PUF, 1992, 128 pages.
- [14] WIEN W. Über die energieverteilung im Emmissionspectrum eines schwarzen Körpers. *Annalen der Physik*, 1896, 58, p. 662-669.
- [15] KANGRO H. *Vorgeschichte des Planckschen Strahlungsgesetzes*. Franz Steiner Verlag, 1970, 271 pages.
- [16] KUHN T. *Black-body theory and the Quantum Discontinuity, 1894-1912*. University of Chicago Press, 1978.
- [17] PLANCK M. Entropie und Temperatur strahlender Wärme. *Annalen der Physik*, 1900, p. 729-732.
- [18] PLANCK M. Über eine Verbesserung der Wien'schen Spektralgleichung. *Verh. d. D. Phys. Ges.*, 1900, p. 202-204.
- [19] JAMMER M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. New York, 1966.
- [20] PLANCK M. *The theory of heat radiation*. Dover, 1914, 224 pages.
- [21] DESJARDINS G. *Les quantas*. Collection Armand Collin, 1930, p. 58.
- [22] EINSTEIN A. Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems. *Physikalische Zeitschrift*, 19096, n° 6, p. 185-193.
- [23] EINSTEIN A. *Théorie quantique du gaz parfait*, in BALIBAR Françoise (Dir), *Albert Einstein - Œuvres choisies*, 1993, vol. 1, Quanta, Sources du savoir, Seuil/CNRS, p. 134-147. *Annalen der Physik*, 1917, vol. 18, p. 121-128.
- [24] PROVOST J.-P. et VALLÉE G. *Les maths en physique*. Dunod, 2004.
- [25] FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. et SANDS M. *Cours de physique*. Tome 3, InterEditions, 1992.



Christian BRACCO

Maître de conférences

IUFM de Nice, Luan

Université de Nice - Sophia Antipolis



Jean-Pierre PROVOST

Professeur

Département de physique, INLN

Université de Nice - Sophia Antipolis