

Circuits électriques utilisant certains éléments constitués par des câbles coaxiaux

par J.-M. DUSSEAU

Laboratoire «Études et Recherches sur l'Enseignement Scientifique»

case 074

Université Montpellier II - 34095 Montpellier Cedex 05

RÉSUMÉ

De plus en plus les appareils électroniques, même ceux bas de gamme, sont équipés de prises coaxiales du type BNC, nécessitant l'emploi de câbles coaxiaux pour leurs raccordements.

Ces câbles présentent des inductances et des capacités dont les valeurs faibles peuvent néanmoins fausser les résultats de certaines expériences réalisées dans le cadre des Travaux Pratiques d'électronique.

Afin de sensibiliser les étudiants à ces problèmes, nous proposons de réaliser quelques circuits constitués, outre d'éléments discrets, de câbles coaxiaux, jouant le rôle de condensateur ou d'inductance, suivant qu'ils sont ouverts ou fermés à leur extrémité.

1. INTRODUCTION

Généralement les étudiants arrivant du lycée ont l'habitude, pour réaliser les liaisons entre appareils et montages d'électricité ou d'électronique, d'utiliser des lignes ouvertes où les deux conducteurs sont extérieurs l'un à l'autre.

Mis en présence de lignes fermées où l'un des conducteurs entoure complètement l'autre - et dont l'exemple type est le câble coaxial considéré ici - ils prennent difficilement conscience qu'il s'agit d'un circuit à constantes réparties dont les valeurs d'auto-inductance ou de capacité ne peuvent pas toujours être négligées.

Par exemple, soit le circuit amplificateur à transistor à effet de champ représenté sur la figure 1. Son gain en tension, dans la bande passante, V_D/V_G est égal à vingt, mais on observe en haute fréquence, une chute de ce gain. Cela provient de la capacité parasite interne inter-électrodes Drain-Grille que, par le théorème de Miller, on retrouve presque entièrement en parallèle sur la sortie.

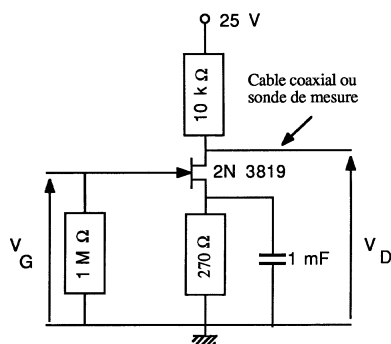


Figure 1 : Schéma de l'amplificateur à FET utilisé à titre d'exemple.

Si pour relier la sortie Drain du transistor à un oscilloscope ou à un voltmètre, on utilise un câble coaxial de 1 m de long, la fréquence de coupure haute (à -3 dB) correspond à 188 kHz. Par contre si on utilise une sonde (voir annexe) qui minimise la capacité ramenée par le système de mesure, cette fréquence est de 1160 kHz.

2. CÂBLE COAXIAL

Un câble coaxial est une ligne pouvant être caractérisée par quatre paramètres linéiques (figure 2).

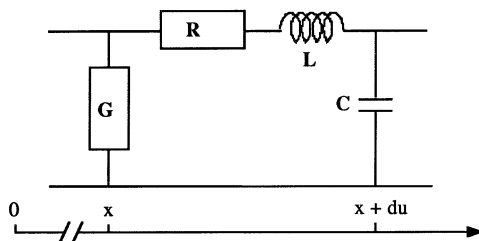


Figure 2 : Modèle électrique d'un câble coaxial.

avec R : résistance linéique en $\Omega \text{ m}^{-1}$,

L : auto-inductance linéique en H m^{-1} ,
 G : conductance linéique (ou perditance) en S m^{-1} ,
 C : capacité linéique en F m^{-1} .

Dans ce modèle, R et G sont respectivement les éléments dissipatifs d'énergie par effet Joule dans le conducteur et l'isolant.

Dans le cas des câbles coaxiaux couramment utilisés R et G sont négligeables. On a alors une ligne sans pertes dont on peut représenter un élément dx comme sur la figure 3, un tronçon de câble correspondant à une cascade de tels quadripôles pour lesquels dx tend vers 0.

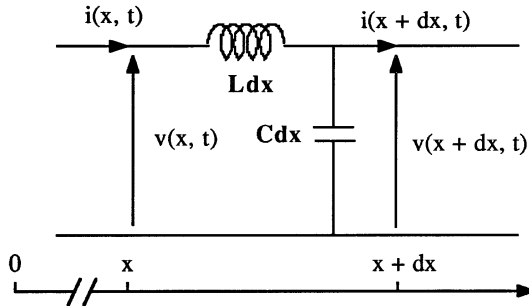


Figure 3 : Représentation schématique d'une ligne sans perte.

L'élément dx présente une inductance Ldx et une capacité Cdx . Sur cet élément, en considérant les variations des valeurs instantanées de la tension et du courant, on obtient :

$$v(x, t) - v(x + dx, t) = Ldx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = Cdx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Par passage à la limite ($dx \rightarrow 0$), on obtient :

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (1')$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2')$$

En régime sinusoïdal, on pose :

$$i(x, t) = \Re \underline{I}(x) e^{j\omega t}$$

$$v(x, t) = \Re \underline{V}(x) e^{j\omega t}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{d\underline{V}(x)}{dx} = -jL\omega \underline{I}(x) \quad (1'')$$

$$\frac{d\underline{I}(x)}{dx} = -jC\omega \underline{V}(x) \quad (2'')$$

En dérivant par rapport à x les équations (1'') et (2''), on obtient les équations des télégraphistes en régime sinusoïdal pour une ligne sans pertes :

$$\frac{d^2\underline{V}}{dx^2} + LC\omega^2 \underline{V} = 0$$

$$\frac{d^2\underline{I}}{dx^2} + LC\omega^2 \underline{I} = 0$$

dont les solutions sont les équations de propagation :

$$\underline{V}(x) = \underline{V}(0) \cos \beta x - j Z_c \underline{I}(0) \sin \beta x$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}(0) \cos \beta x - j \frac{\underline{V}(0)}{Z_c} \sin \beta x$$

avec $\underline{V}(0)$ et $\underline{I}(0)$, tension et courant à l'origine des abscisses, prise aux bornes du générateur, $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ impédance caractéristique du câble,

et $\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\lambda}$, où ω et λ sont respectivement la pulsation et la longueur d'onde du signal se propageant dans le câble.

On obtient ainsi :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{V}(x)}{\underline{I}(x)} = Z_c \frac{\underline{Z}_o - j Z_c \operatorname{tg} \beta x}{Z_c - j \underline{Z}_o \operatorname{tg} \beta x} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_o = \frac{\underline{V}(0)}{\underline{I}(0)}$$

Dans le cas d'une ligne de longueur l , l'impédance ramenée à l'entrée de la ligne $\underline{Z}_e = Z_c \frac{\underline{Z}(l) + j Z_c \operatorname{tg} \beta l}{Z_c + j \underline{Z}(l) \operatorname{tg} \beta l}$ vaut :

- $\underline{Z}_{ecc} = j Z_c \operatorname{tg} \beta l$, si cette ligne est fermée sur un court-circuit ($\underline{Z}(l) = 0$),
- $\underline{Z}_{eco} = \frac{Z_c}{j \operatorname{tg} \beta l}$, si cette ligne est ouverte à son extrémité ($\underline{Z}(l) = \infty$), et
- $\underline{Z}_e = Z_c$, si l'impédance terminale $\underline{Z}(l)$ est égale à Z_c . Dans ce dernier cas, $\underline{Z}(x) = Z_c$, l'impédance en n'importe quel point de la ligne est indépendante de x et de ω .

Pour $\beta l < 0,5$, c'est-à-dire pour des fréquences peu élevées, $\operatorname{tg} \beta l \approx \beta l$, d'où $Z_{ecc} = j l L \omega$ et $Z_{eco} = \frac{1}{j l C \omega}$.

Les deux grandeurs L et C peuvent être calculées, par exemple, par intégration des densités volumiques d'énergie respectivement magnétique et électrostatique.

2.1. Auto-inductance L par unité de longueur

On considère le câble coaxial représenté sur la figure 4. Si une des extrémités de ce câble est en court-circuit, le conducteur intérieur étant parcouru par un courant continu I , le conducteur extérieur sera parcouru par le même courant mais en sens contraire.

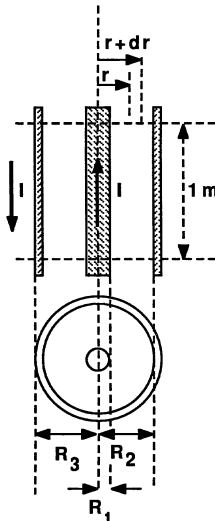


Figure 4 : Représentation géométrique d'un câble coaxial.

Un contour circulaire extérieur au câble entoure un courant total nul. Par conséquent le champ magnétique à l'extérieur du câble est nul.

L'énergie électromagnétique W_m emmagasinée par le câble par unité de longueur est $\frac{1}{2} LI^2$, mais c'est aussi l'intégrale de la densité volumique d'énergie magnétique $\overline{w}_m = \frac{B^2}{2\mu}$, où μ est la perméabilité magnétique du milieu, et B le champ d'induction du courant I .

Les conducteurs utilisés pour la réalisation des câbles étant non ferromagnétiques, on aura $\mu = \mu_0$ dans les conducteurs aussi bien que dans l'isolant.

Par suite de la symétrie de révolution du câble autour de l'axe commun aux deux cylindres, les lignes d'induction sont des cercles de même axe. L'application du théorème d'Ampère, en utilisant ces lignes d'induction, permet de déterminer la valeur du module du champ d'induction B en un point situé à une distance r de l'axe.

Pour l'âme centrale, ce module, dû à la fraction du courant I circulant dans le cylindre de rayon r , a pour valeur : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2}{R_1^2}$.

Dans la partie isolante, pour $R_1 < r < R_2$: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Pour le conducteur extérieur, le contour considéré, de rayon r , entoure à la fois le courant circulant dans le conducteur central, et la fraction de courant circulant dans la partie du conducteur extérieur, de rayon inférieur à r .

Dans ce cas, on a : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$.

On peut alors calculer $W_m = \iiint \overline{w}_m dv$, et en considérant une longueur unité, $W_m = \iint \frac{B^2}{2\mu_0} dS$ où l'intégrale de surface est étendue

à tout le plan normal à l'axe du câble. Mais B est nul à l'extérieur du câble ($r > R_3$).

$$W_m = \int_{r=0}^{r=R_1} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2}{R_1^2} \right)^2 2\pi r \, dr + \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r \, dr +$$

$$\int_{r=R_2}^{r=R_3} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \right)^2 2\pi r \, dr = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\text{d'où} \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \text{Ln} \frac{R_2}{R_1} + \left(\frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \text{Ln} \frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)} \right) \right\} \quad (3)$$

Cette inductance propre est la somme d'une composante externe aux conducteurs, de valeur $\frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln} \frac{R_2}{R_1}$ et de 2 composantes internes aux conducteurs. Il est à noter que plus la fréquence devient élevée, plus l'effet de peau réduit les valeurs effectives des fractions de R_1 et de $R_3 - R_2$ dans lesquelles le courant circule. Le champ magnétique est alors localisé presque exclusivement dans l'isolant situé entre les conducteurs.

2.2. Capacité C par unité de longueur

Le champ électrostatique \vec{E} est seulement non nul entre les deux conducteurs. Il est radial et a pour module : $E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon r}$ où σ est la charge portée par unité de longueur par le conducteur intérieur, et ϵ la constante diélectrique du matériau.

L'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble par unité de longueur est $\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{C}$, mais c'est aussi l'intégrale de la densité volumique d'énergie électrostatique $w_e = \frac{\epsilon E^2}{2}$.

Pour une unité de longueur :

$$W_e = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon r} \right)^2 2\pi r \, dr = \frac{\sigma^2}{4\pi\varepsilon} \operatorname{Ln} \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{d'où} \quad C = 2\pi\varepsilon \frac{1}{\operatorname{Ln} \frac{R_2}{R_1}} \quad (4)$$

3. MESURES

Le câble coaxial utilisé pour la réalisation des circuits est des plus courants. Il a pour référence KX 15 (Norme 93550) ce qui correspond aux caractéristiques suivantes :

- le diamètre de l'âme, constituée de 19 brins de 0,18 mm de diamètre, a pour valeur $2 R_1 = 0,9$ mm,
- l'isolant utilisé est du polythène, de constante diélectrique relative $\varepsilon_r = 2,3$. Le diamètre extérieur de cet isolant vaut : $2 R_2 = 2,95 \pm 0,1$ mm,
- la tresse, qui assure à la fois le deuxième conducteur et le blindage du câble a pour épaisseur $R_3 - R_2 = 0,13$ mm.

En considérant les expressions (3) et (4), on obtient les valeurs $L = 0,29 \mu\text{H m}^{-1}$, et $C = 107 \text{ pF m}^{-1}$. Cette dernière valeur est à comparer à celle fournie par le constructeur : 100 pF m^{-1} , d'où on déduit à partir de $Z_c = 50 \Omega$, valeur également fournie par le constructeur et mesurée à 200 MHz, $L = Z_c^2 = 0,25 \mu\text{H m}^{-1}$. Cette valeur de L est plus faible que celle déterminée par le calcul car si la contribution du conducteur extérieur est toujours négligeable ($0,7 \cdot 10^{-8} \text{ H m}^{-1}$), l'effet de peau va diminuer, aux fréquences élevées, la contribution du conducteur intérieur, même si cet effet est lui-même réduit par la division en brins de l'âme centrale [cf. Réf. 2, tome 2, pp. 237-243]. La valeur déduite des mesures du constructeur correspond alors en fait

$$\text{à } L = \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous utiliserons dans les montages proposés des câbles de 3 m de long.

Le générateur de fonction, de résistance interne $50\ \Omega$, est relié, par une connexion coaxiale de 2 cm maximum, à une plaquette de circuit imprimé adapté en $50\ \Omega$ (technique Strip-line), qui supporte les fiches BNC de branchement des câbles et les éléments discrets.

Les tensions sont prélevées à l'aide de 2 sondes afin de minimiser (à 2 fois 15 pF maximum) les capacités introduites par les câbles de mesures. Les mesures de tensions et de fréquences sont effectuées à l'aide d'un oscilloscope HEWLETT - PACKARD 54600, équipé d'une interface permettant la recopie d'écran.

3.1. Réponse indicielle d'un circuit pseudo-intégrateur

Si on soumet le circuit intégrateur de la figure 5a à une tension périodique en créneaux symétriques (de fréquence 30 kHz, par exemple), on observe à l'oscilloscope, aux bornes d'un câble coaxial ouvert, la tension représentée figure 5b.

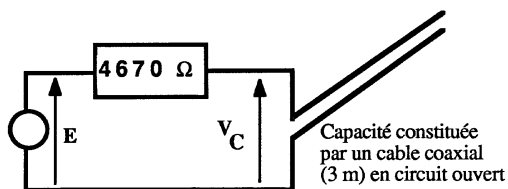


Figure 5a : Montage intégrateur.

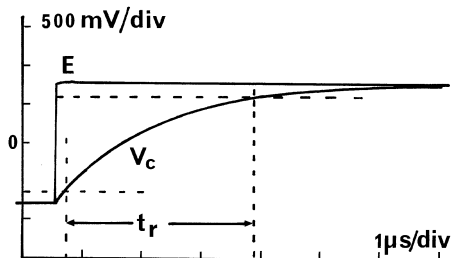


Figure 5b : Charge de la capacité d'un câble coaxial sous tension constante.

La charge du condensateur varie exponentiellement, et la tension à ses bornes est donnée par $V_c = E \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i} \right) \right]$, où E est l'amplitude de la tension appliquée au circuit, et $\tau_i = RC$ est la constante de temps de ce circuit.

Le temps de montée du signal observé (passage de 10 à 90 % de sa valeur finale) a pour valeur mesurée $t_r = 3,14 \mu\text{s}$. Il est relié à la constante de temps par la relation $t_r = 2,2 \tau_i$, ce qui nous permet, connaissant R de déterminer la valeur expérimentale de C, soit 305 pF, valeur qui inclut les capacités parasites du montage.

Lorsqu'on considère la réponse en fréquence d'un tel circuit passe-bas, on montre que la pulsation de coupure ω_o est reliée à la constante de temps par la relation $\omega_o \tau_i = 1$.

$\tau_i = 1,42 \mu\text{s}$ correspond donc à une fréquence de coupure $f_o = 111 \text{ kHz}$, et expérimentalement on vérifie qu'une atténuation de 3 db se produit pour une fréquence de 105 kHz.

3.2. Réponse permanente d'un circuit pseudo-dérivateur à un signal triangulaire

Si l'on soumet le circuit dérivateur de la figure 6a à une entrée en dent de scie (de fréquence 1 MHz, par exemple), on observe à l'oscilloscope aux bornes d'un câble coaxial court-circuité la tension reproduite sur la figure 6b.

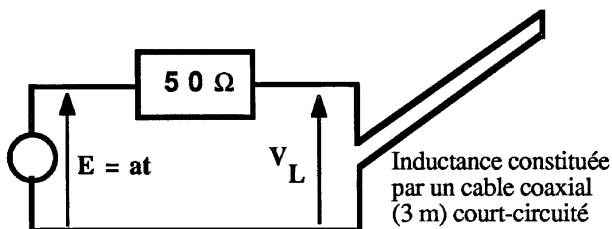


Figure 6a : Montage dérivateur.

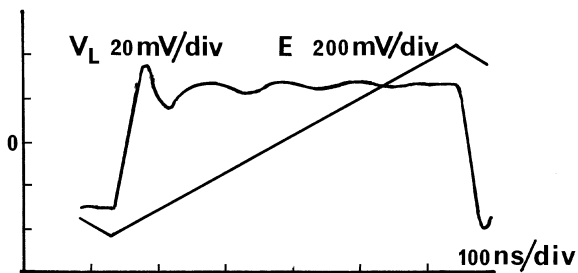


Figure 6b : Tension V_L aux bornes du câble pour une tension d'entrée E en rampe.

En effet, en fonction du temps, la tension aux bornes de l'inductance est donnée par $V_L(t) = a\tau_d \left(1 - \exp - \frac{t}{\tau_d}\right)$ où a est la pente du signal d'entrée. Pour $t \gg \tau_d$, $V_L \approx a\tau_d$.

La mesure de $a\tau_d$ est peu précise car les capacités parasites font apparaître des oscillations de faible amplitude dans le régime permanent. Avec $a = 1,54 \cdot 10^6$ V/s, on mesure $a\tau_d = 24 \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-3}$ V, d'où la valeur de l'inductance du câble de trois mètres : $L = 0,78 \pm 0,06 \mu\text{H}$.

3.3. Circuit du deuxième ordre ; étude en régime harmonique

Le circuit est schématisé figure 7a. Pour des fréquences supérieures à quelques mégahertz on ne peut plus assimiler $\text{tg}\beta l$ à βl . Les impédances ramenées de leurs extrémités par les câbles, ont pour valeur respectivement $j Z_c \text{tg}\beta l$ pour le câble court-circuité et $\frac{Z_c}{j\text{tg}\beta l}$ pour le câble en circuit ouvert.

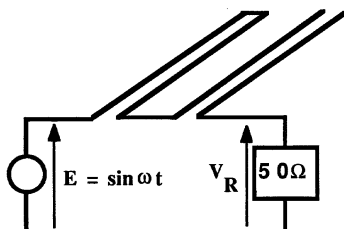


Figure 7a : Circuit du deuxième ordre à câbles coaxiaux.

L'impédance totale du circuit a pour module :

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_c^2 \left[\frac{\text{tg}^2 \beta l - 1}{\text{tg} \beta l} \right]^2}$$

Cette impédance passe par un minimum, et donc la tension aux bornes de R passe par un maximum pour $\beta l = (2k + 1) \frac{\pi}{4}$ avec k entier positif, soit avec les valeurs considérées ici, pour des fréquences multiples impairs de 8,25 MHz. Par contre, cette impédance sera maximale pour des fréquences multiples pairs de 8,25 MHz. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 7b. Il faut cependant noter que, du fait

que dans ce montage les câbles considérés n'ont pas de points à la masse, les mesures deviennent délicates au dessus de 20 MHz. Pour minimiser les fluctuations, il convient de placer les gaines extérieures des 2 câbles le plus près possible l'une de l'autre.

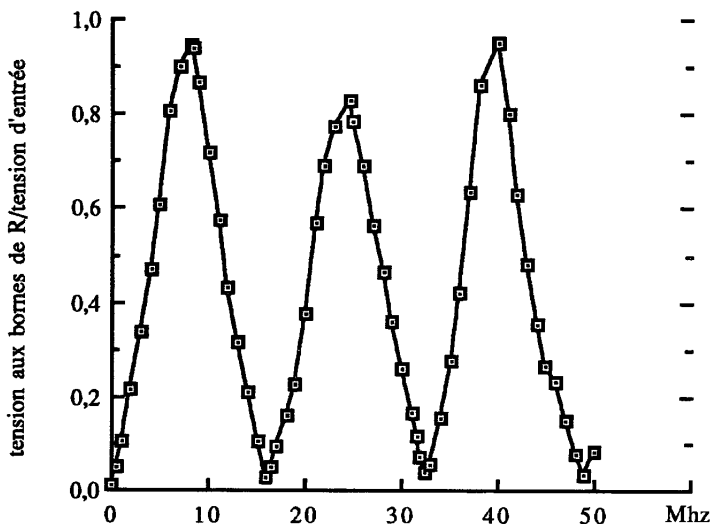


Figure 7b : Variations en fonction de la fréquence du rapport de la tension V_R aux bornes de la résistance de 50Ω , à la tension d'entrée E du circuit.

CONCLUSION

Il est souhaitable de montrer aux étudiants que l'utilisation de câbles coaxiaux, si elle est susceptible de faciliter la réalisation de mesures sur des montages d'électronique, notamment en protégeant les liaisons entre appareils des rayonnements extérieurs (à condition toutefois que le conducteur extérieur du câble soit relié à la masse de mesure), peut aussi introduire des capacités et dans une moindre mesure des inductances parasites non négligeables. Ceci permet alors d'expliquer certains résultats observés.

Remarque : Il m'est agréable de remercier mon collègue Monsieur J. MICHEL, Maître de conférences à l'Université Montpellier II, pour nos discussions amicales sur ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.-F. COMBES, Transmission en espace libre et sur les lignes.
Dunod Université.
- [2] A. FRÜLING, Cours d'électricité, Dunod.

Annexe

Le principe de base d'une sonde de mesure est le pont diviseur de tension à résistances, dont les valeurs sont prises dans le domaine des mégohms. Sur la figure 8, la capacité C_2 est équivalente à la capacité du câble de liaison et à celle du circuit d'entrée de l'oscilloscope ou du voltmètre électronique.

Pour diminuer son influence, on compense l'atténuateur en plaçant en parallèle sur R_1 un condensateur C_1 . Si $R_1 C_1 = R_2 C_2$, alors :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

est indépendant de la fréquence.

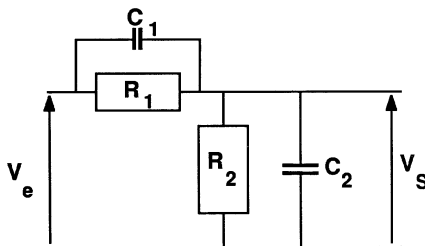


Figure 8 : Schéma de principe d'une sonde de mesure.