

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

Propagation des ondes vitesse de phase - vitesse de groupe

par B. LAHAYE,

Laboratoire de Spectroscopie atomique
Université de Caen, 14032 Caen Cedex.

I. INTRODUCTION.

Dans leur propagation, les ondes sont susceptibles de transporter de l'information car elles peuvent transférer de l'énergie depuis un émetteur jusqu'à un récepteur. Il s'agit de savoir à quelle vitesse circule cette information et dans quelles conditions le « signal » détecté par le récepteur est fidèle au signal issu de l'émetteur. Nous nous intéresserons tout spécialement à l'une des causes de non fidélité : la dispersion.

II. PROPAGATION « CLASSIQUE ».

1. Fonction d'onde caractéristique.

Un signal, de forme quelconque, se propageant sans déformation à vitesse v (indépendante de sa forme) le long d'une corde tendue, vers les x positifs, est décrit par la fonction :

$$y(x, t) = y\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (1)$$

Cette fonction implique effectivement une propagation sans déformation que nous appellerons propagation classique : tous les points du signal se déplaçant à la même vitesse v , un observateur, situé en x voit, à l'instant t strictement ce qu'a vu, à l'instant t_0 ($t_0 < t$), un observateur situé en x_0 tel que :

$$t - \frac{x}{v} = t_0 - \frac{x_0}{v},$$

$t - t_0$ représentant la durée du parcours $x - x_0$ (fig. 1).

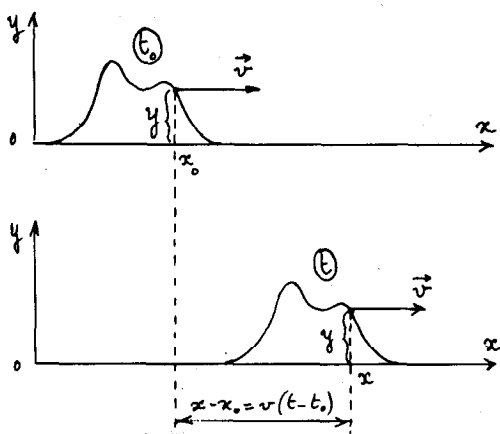


Fig. 1

Remarque.

Un signal se propageant sans déformation suivant les x négatifs serait décrit par la fonction $y(x, t) = y\left(t + \frac{x}{v}\right)$ (2)

2. Equation « classique » de propagation.

De la relation (1), nous déduisons l'équation nécessaire de propagation classique.

$$\begin{aligned} \text{Posant } \tau = t - \frac{x}{v}, (1) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \tau} \cdot \left(-\frac{1}{v}\right) \\ &= -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \text{ car : } \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pour avoir une équation valable quel que soit le sens de propagation, exprimons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \\ &= -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x} = +\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad (3)$$

Cette équation sera appelée : équation classique de propagation (suivant x'). Dans cette équation, v est une constante indépendante des caractéristiques du signal : forme, amplitude, fréquence (si signal périodique).

3. Exemples.

a) Les seules ondes satisfaisant *rigoureusement* à l'équation classique sont les ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide illimité : cas des ondes lumineuses nous parvenant du Soleil ou des Etoiles. E étant le champ électrique de telles ondes :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad c = 299\,793 \text{ km.s}^{-1}.$$

b) Exemples satisfaisant *approximativement* à l'équation classique :

$$1. \text{ Ondes électromagnétiques dans l'air : } v = \frac{c}{n}$$

avec $n \simeq 1,0003$.

2. Corde élastique tendue (tension T) : si la corde est homogène (masse linéique μ), très flexible, et si l'on néglige l'amortissement, une onde donnant lieu à une faible déformation de la corde obéit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

3. Ondes à la surface de l'eau, en eau peu profonde : $v = \sqrt{gh}$.

4. Onde acoustique peu intense se propageant sans amortissement dans un milieu homogène (masse volumique ρ ; coefficient de compressibilité adiabatique χ).

Cas particulier.

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \text{ pour un gaz parfait de masse molaire } M \text{ à la}$$

température absolue T.

Remarque importante.

La vitesse v de ces ondes ne dépend que des propriétés du milieu. En particulier, si de telles ondes sont périodiques, leur vitesse est indépendante de leur fréquence : le milieu est dit NON DISPERSIF.

4. Exemples ne satisfaisant pas à l'équation classique.

Dans les exemples 2., 3. et 4. précédents, si l'amplitude des ondes n'est pas faible, elles n'obéissent pas à l'équation classique : un ébranlement donnant lieu à une forte déformation d'une corde, par exemple, se déforme au cours de sa propagation.

Dans les mêmes exemples, si l'amortissement n'est pas négligeable, une onde se déforme par atténuation au cours de sa propagation.

Dans toute la suite, nous considérerons des ondes d'amplitude suffisamment faible pour que la première cause de déformation n'intervienne pas ; et, sauf cas particulier, nous nous placerons dans des cas où l'amortissement est négligeable de sorte qu'il n'y aura pas de déformation du signal par atténuation (cf. § VIII. 3).

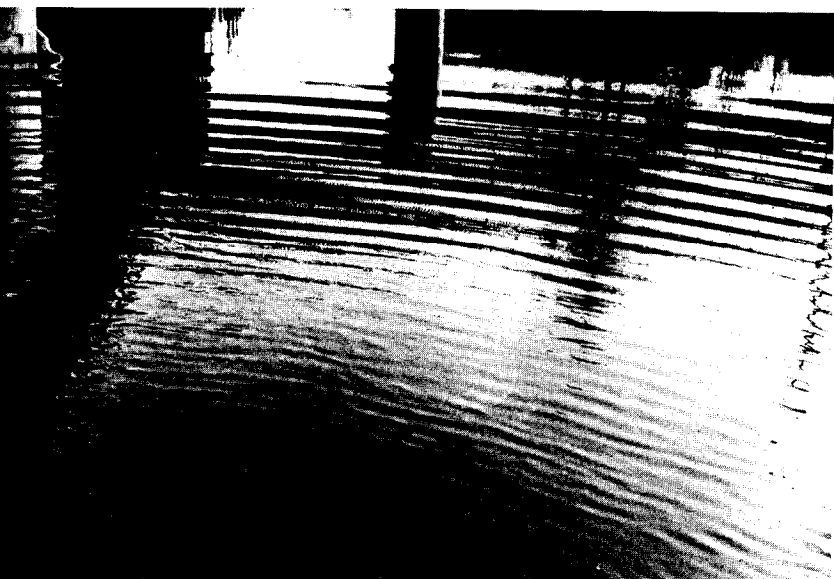
Malgré ces conditions très restrictives, il existe des exemples d'ondes qui se déforment au cours de leur propagation : on dit alors que le milieu est DISPERSIF.

L'exemple typique est celui des ondes sur l'eau. Si une personne crie « top », une deuxième personne entend un seul « top » à quelque distance qu'elle se trouve de la première. Par contre, si la première personne jette une pierre dans l'eau (en eau profonde) — analogue au « top » précédent — la seconde, placée à une certaine distance du point de chute, ne verra pas un seul événement (passage d'un signal unique) mais une succession d'ondes d'allure sinusoïdale défilant devant elle pendant une durée relativement longue (chacun peut en faire facilement l'expérience (cf. photographies ci-après) : cette succession d'ondes ne ressemble pas du tout à « l'impulsion » créée initialement par l'arrivée de la pierre dans l'eau. Nous sommes ici en présence d'une très forte dispersion, alors que le « top » acoustique se propage, lui, pratiquement sans dispersion (cf. § X.).

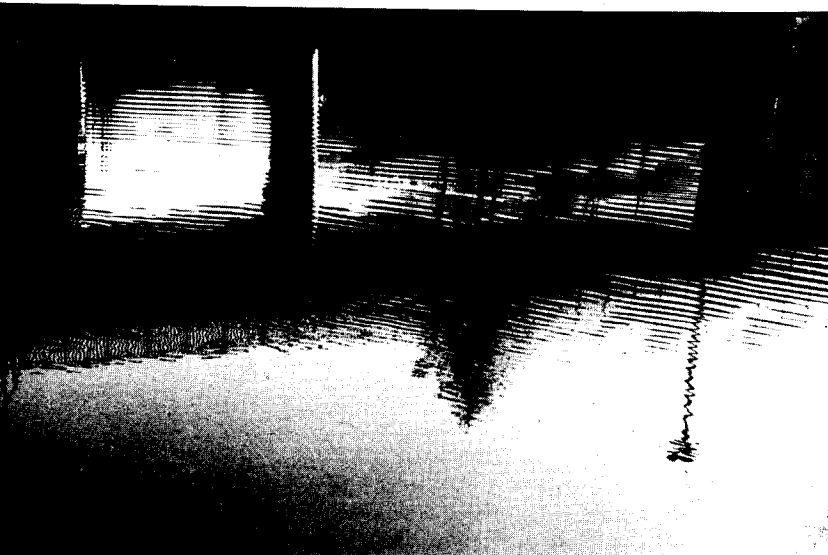
Ondes créées à la surface de l'eau (en eau profonde) par la chute (à $t = 0$) d'une (seule) pierre :

- a) Instantané à t de l'ordre de 10 secondes.
- b) Instantané à t de l'ordre de 20 secondes.
- c) Instantané à t de l'ordre de 30 secondes.

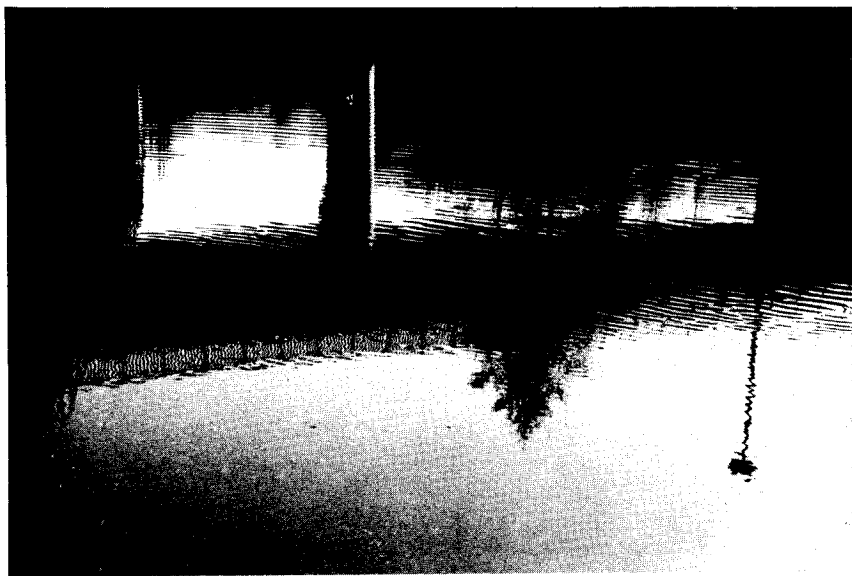
Les trois photos représentant, vue du point de chute, la même région de la surface, on constate une très forte dispersion, les grandes longueurs d'onde étant plus rapides.



a)



b)



c)

III. ONDES PROGRESSIVES SINUSOIDALES : RELATION DE DISPERSION.

1. Vitesse de phase.

Une onde sinusoïdale, de *pulsation* ω , se propageant à la vitesse v suivant un axe $x'x$ vers les x positifs et relative à une grandeur physique s s'écrit, d'après (1) :

$$s(x, t) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Soit $\varphi(x, t)$ sa *phase* au point d'abscisse x et à l'instant t :

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

ω étant constante, $\varphi(x, t)$ satisfait à la relation (1) : elle se propage vers les x positifs à la vitesse v de l'onde ; v , *vitesse de la phase* de l'onde est appelée « *vitesse de phase* » de cette onde sinusoïdale : nous la noterons désormais v_φ . Elle correspond à $\varphi(x, t) = c^{te}$.

2. Expressions équivalentes.

$$\begin{aligned}
 S(x, t) &= a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi} \right) \\
 &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = v_\varphi T = \frac{v_\varphi}{\nu} \\
 &= a \cos (\omega t - kx) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_\varphi}
 \end{aligned}$$

T = période de l'onde,

$\nu = \frac{1}{T}$ = fréquence de l'onde,

λ = longueur d'onde (« période » spatiale à t donné),

\vec{k} = vecteur d'onde (orienté dans la direction et dans le sens de la propagation, ici k représente la norme de \vec{k}); k représente le nombre d'ondes (c'est-à-dire de longueurs d'ondes) dans une longueur dont la mesure est 2π .

3. Mesure de v_φ .

La mesure directe de v_φ n'est pas toujours possible car une onde sinusoïdale ne constitue pas un signal. Par contre, dans le cas où la fréquence est mesurable, on peut obtenir v_φ indirectement par interférences ou ondes stationnaires : la mesure de ν et de λ fournit $v_\varphi = \nu \lambda$.

En optique, la fréquence n'est pas mesurable : on déduit v_φ de la mesure de l'indice de réfraction n :

$$v_\varphi = \frac{c}{n},$$

n étant déterminé par une méthode d'optique géométrique (déviation du prisme ; réfraction limite ; réflexion totale) (1).

4. Relation de dispersion.

Les résultats des mesures de v_φ conduisent à une relation $\omega = f(k)$, dite « relation de dispersion ». Le graphe correspondant est appelé « courbe de dispersion ». Sur ce graphe (fig. 2), la vitesse de phase n'est autre que la pente du rayon vecteur OM : $v_\varphi = \text{tg } \alpha$.

(1) Voir J.-P. MATHIEU : *Optique 1*, Sedes (p. 77).

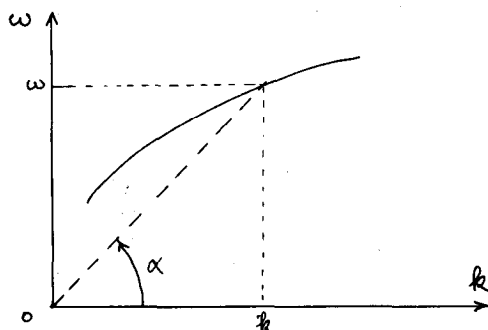


Fig. 2

a) PROPAGATION SANS DISPERSION.

v_ϕ est indépendante de ω . C'est le cas des ondes obéissant à l'équation classique de propagation. La relation $\omega(k)$, dite relation de dispersion est alors très simple :

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi = \operatorname{tg} \alpha = \text{cte indépendante de } \omega.$$

Le graphe $\omega(k)$ est une droite passant par l'origine (fig. 3).

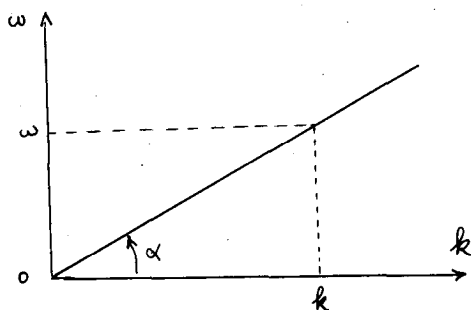


Fig. 3

b) PROPAGATION AVEC DISPERSION.

v_ϕ est fonction de ω : la relation de dispersion n'est plus linéaire et les ondes n'obéissent plus à l'équation classique (bien qu'étant supposées d'amplitude faible).

L'origine du mot « dispersion » tient au fait qu'un faisceau parallèle de lumière blanche traversant un prisme de verre donne un faisceau émergent dont les couleurs sont dispersées (dans le même ordre que celui de l'arc-en-ciel), le bleu étant le plus dévié.

Cette dispersion, dite NORMALE car elle a été la première observée, correspond donc au fait que, lorsque λ décroît, n croît et v_φ décroît : v_φ est alors fonction croissante de λ .

Exemple:

Tableau 1

« Couleur »	λ (μm)	ν (10^{11} Hz)	n
UV proche	0,361	8,31	1,539
Bleu sombre	0,434	6,92	1,528
Bleu vert	0,486	6,18	1,523
Jaune	0,589	5,10	1,517
Rouge	0,656	4,57	1,514
IR proche	1,20	2,50	1,505
IR	2	1,50	1,497

Cette dispersion normale se rencontre également en mécanique, par exemple chez les ondes à la surface de l'eau (en eau profonde : profondeur $h \geq \lambda$) : voir 2^e partie du tableau 3 (grandes λ), page 299.

Lorsque v_φ est fonction décroissante de λ , la dispersion est dite ANORMALE. C'est le cas des courtes longueurs d'onde à la surface de l'eau (voir 1^{re} partie du même tableau). De ce tableau, on déduit les graphes de la fig. 4 représentant respectivement $v_\varphi(k)$ et $\omega(k)$. β étant la pente de la courbe $\omega(k)$, on en déduit :

$$\beta < \alpha \iff \text{DISPERSION NORMALE}$$

$$\beta > \alpha \iff \text{DISPERSION ANORMALE.}$$

Nous verrons (§ IX.3) que, pour ces ondes, la dispersion normale est due à la gravité ; la dispersion anormale est due à la capillarité.

En optique, la dispersion anormale s'observe également, mais liée à l'absorption comme le montre le tableau 2 ci-après, dans lequel a est le coefficient d'absorption (cf. J.-P. MATHIEU 1, p. 78).

Tableau 2

Substance	λ (en μm)	n	a
NaCl	0,6	1,54	—
NaCl	61	4	5,4
Cu	0,55	0,75	2,4
Cu	3	0,9	14,6
Ag	0,589	0,2	3,65
Ag	4	3,0	28
Na	0,546	0,05	2,2

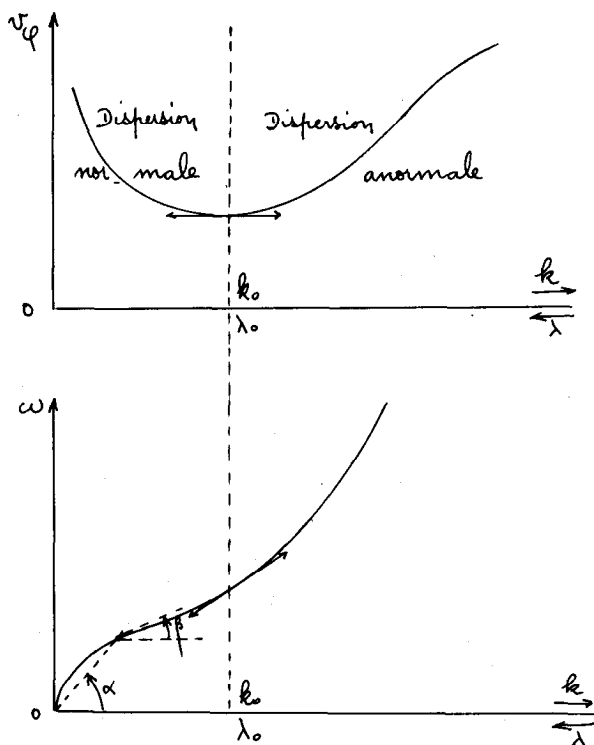


Fig. 4

Ce tableau fait apparaître non seulement une dispersion anormale, mais quelque chose de paradoxal en apparence : un indice inférieur à 1, soit une vitesse de phase supérieure à la vitesse c de la lumière dans le vide ! En réalité, cela n'est pas en contradiction avec la Théorie de la Relativité (qui implique une limite supérieure, c , à la vitesse d'un signal). Une onde sinusoïdale transporte de la phase, mais elle ne constitue pas un « signal » : elle ne transporte pas d'information. Les « informations » qui nous parviennent par ondes radio consistent en une modulation (soit en amplitude, soit en fréquence) d'une onde sinusoïdale dite « porteuse ». C'est cette information qui ne peut pas voyager à une vitesse supérieure à c .

Une information n'est pas sinusoïdale car une onde sinusoïdale progressive n'a ni début ni fin, à la fois dans le temps et dans l'espace. Mais alors, à quelle vitesse se propage l'information ?

IV. ONDES D'ETENDUE LIMITEE : THEOREME DE FOURIER.

1. Nouvelle difficulté.

La vitesse (de phase) de la lumière dans un milieu matériel peut se déduire de la mesure de l'indice de réfraction n (cf. § III.3) de ce milieu. Pour le *sulfure de carbone*, par exemple, on trouve $n = 1,64$ pour $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$.

Inversement, on pourrait penser déduire n de la mesure *directe* de la vitesse de la lumière dans ce milieu. Pour cela, on mesure le temps t mis par la lumière pour parcourir, dans ce milieu, une distance l . Il faut alors, non une onde sinusoïdale, mais un « signal » lumineux, *repérable*, constitué soit par un éclair (onde limitée dans le temps et dans l'espace), soit par une suite de maximums d'amplitude (onde modulée) :

méthodes anciennes : roue dentée de FIZEAU,
miroir tournant de FOUCAULT ;

méthode moderne : dispositif de BERGSTRAND (modulation par cellule de KERR). Voir J.-P. MATHIEU, *I*, p. 285.

Pour le sulfure de carbone, ces méthodes conduisent à $\frac{c}{v} = 1,75$, valeur en désaccord avec la précédente. Il faut en conclure que la dernière vitesse n'est pas la vitesse de phase, mais la vitesse du signal (ou de l'information), et que ces vitesses sont différentes dans le sulfure de carbone.

2. Théorème de Fourier.

Une onde est toujours plus ou moins limitée et dans le temps et dans l'espace, mais l'intérêt de l'étude faite au paragraphe précédent réside dans la propriété suivante : *toute onde, d'étendue limitée, peut être considérée comme la somme d'un certain nombre d'ondes sinusoïdales (ses composantes); cette propriété constitue le théorème de FOURIER (2).*

3. Equation de propagation.

Nous ne considérons toujours que des ondes de faible amplitude de sorte que l'équation de propagation — même si elle n'est pas du type classique — est LINÉAIRE : *il en résulte que, si un signal est la somme de plusieurs composantes, la solution de l'équation de propagation est la somme des solutions correspondant à chaque composante.*

Cette linéarité de l'équation de propagation, associée au théorème de FOURIER, constitue le point clé de la suite de notre étude.

(2) BERKELEY : *Ondes*, Coll. V, p. 296.

Nous allons donc « grouper » plusieurs ondes composantes pour essayer de constituer un signal (se propageant suivant l'axe $x'x$).

V. GROUPE DE 2 ONDES SINUSOIDALES PROGRESSIVES.

1. Soient deux ondes sinusoïdales, de pulsations voisines ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) et donc de vecteurs d'onde voisins k_1 et k_2 (nous supposons $k_1 < k_2$), de même amplitude a , de même phase « initiale » ($\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ en $x = 0$ à $t = 0$), se propageant suivant $x'x$ vers

les x positifs aux vitesses, voisines, $v_{1\varphi} = \frac{\omega_1}{k_1}$ et $v_{2\varphi} = \frac{\omega_2}{k_2}$ respectivement.

Leur somme :

$$s(x, t) = a [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)]$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} &= 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x) \\ &= A(x, t) \cos(\omega_0 t - k_0 x) \end{aligned}$$

en posant :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1; \quad \omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta k = k_2 - k_1; \quad k_0 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$A(x, t) = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$$

$s(x, t)$ est une onde sinusoïdale, de pulsation ω_0 , de vecteur d'onde k_0 , se propageant vers les x positifs à la vitesse de phase

$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ mais dont l'amplitude $|A(x, t)|$ varie lentement au

cours du temps, en x donné et, dans l'espace, à t donné. Cette onde est donc modulée, et la modulation se propage également suivant $x'x$ mais avec une vitesse *a priori* différente de v_φ (3).

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

(3) On peut le vérifier en plaçant les points (ω_1, k_1) , (ω_2, k_2) sur le graphe de la fig. 4.

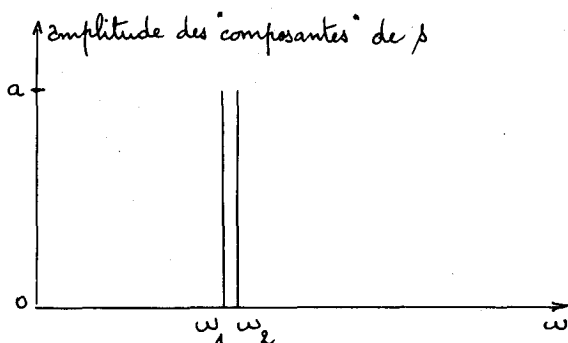


Fig. 5

L'onde $s(x, t)$ dont le « spectre » de Fourier est représenté sur la fig. 5, est encore un phénomène permanent, occupant encore l'axe $x'x$ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ comme une onde sinusoïdale pure mais nous notons des nouveautés :

- apparition de « paquets » d'ondes, identiques, occupant chacun

un intervalle $\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}$ sur l'axe $x'x$ (à t donné : cf. fig. 6 a),

un intervalle $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta \omega}$ sur l'axe $t't$ (en x donné : cf. fig. 6 b),

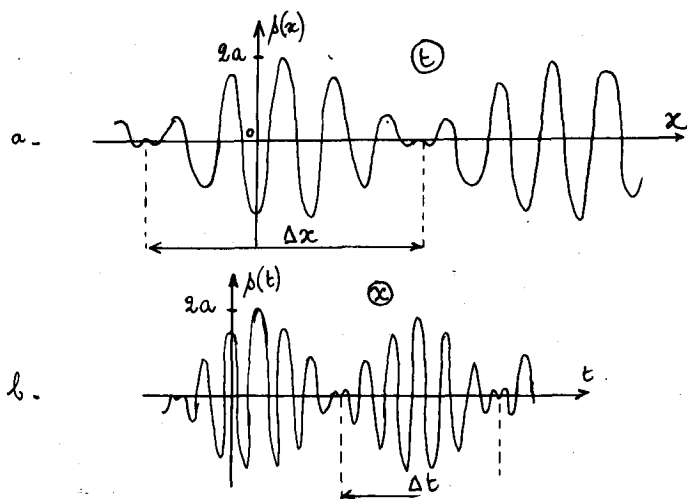


Fig. 6

- ces paquets ou « groupes » d'ondes se déplacent tous à la même vitesse $u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ alors que l'onde elle-même (ses crêtes par exemple se déplacent) à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$; u est appelée *vitesse de groupe* de l'onde modulée : c'est la *vitesse de la modulation*.

Si la dispersion est normale, $u < v_\varphi$: l'onde progresse, à l'intérieur même d'un paquet, de la queue vers la tête de ce dernier.

Si la dispersion est anormale, $u > v_\varphi$: l'onde régresse à l'intérieur même d'un paquet, de la tête vers la queue de celui-ci.

S'il n'y a pas de dispersion, $u = v_{1\varphi} = v_{2\varphi} = v_\varphi$: l'onde est immobile à l'intérieur de chaque paquet.

L'existence même de ces paquets ou groupes d'ondes résulte d'une « INTERFÉRENCE » des deux composantes :

- $|A(x, t)|$ est maximale, égale à $2a$, lorsque les deux ondes composantes sont en phase : elles interfèrent alors constructivement.
- $|A(x, t)|$ est minimale, égale à zéro, lorsque les deux ondes composantes sont en opposition de phase : interférence destructive. Ce zéro d'amplitude, facile à repérer, constitue un « signal » dont la vitesse u peut ainsi être mesurée directement (cf. § IV. 1).

2. Relation entre vitesses de phase et de groupe.

Les pulsations ω_1 et ω_2 étant voisines, u peut s'écrire $u = \frac{d\omega}{dk}$ dérivée calculée pour $k = k_0$. Or, $\omega = k v_\varphi$, d'où :

$$u = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk} \quad \text{ou encore}$$

$$u = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}$$

On retrouve les conclusions du § III.4 b) quant au signe de $u - v_\varphi$. *Vérification expérimentale* de cette formule : Pour le sul-

fure de carbone $\frac{u}{v_\varphi} = 0,937$ (cf. § IV. 1); de plus, l'expérience

donne $\frac{dn}{d\lambda_0} = -0,20 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$. ($\lambda_0 = n\lambda$: longueur d'onde dans le

vide). $v_\varphi = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{dv_\varphi}{d\lambda} = -\frac{v_\varphi}{n} \frac{dn}{d\lambda}$ d'où :

$$u = v_\varphi \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \simeq v_\varphi \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right) \text{ et } \frac{u}{v_\varphi} \simeq 1 - 0,067$$

résultat compatible avec le précédent.

Si la superposition de 2 ondes progressives permet d'introduire la vitesse de groupe, nous venons de constater qu'elle est insuffisante pour obtenir un signal unique, par exemple un seul éclair lumineux ou un seul « top » acoustique.

VI. GROUPE DE $N + 1$ ONDES SINUSOIDALES PROGRESSIVES.

Superposons $N + 1$ ondes sinusoïdales, se propageant vers les x positifs et dont les vecteurs d'ondes, voisins, sont distribués régulièrement de part et d'autre de k_0 (spectre de la fig. 7). Les amplitudes sont égales et les phases initiales nulles.

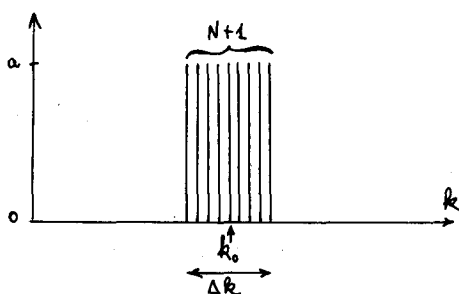


Fig. 7

1. A $t = 0$,

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_k a \cos(-kx) \\ &= a \sum_k \cos[-k_0 x - (k - k_0)x] \\ &= a \sum_{n=-N/2}^{+N/2} \cos \left[-k_0 x - n \frac{\Delta k}{N} x \right] \end{aligned}$$

il s'agit de la somme de $N + 1$ fonctions sinusoïdales, déphasées 2 à 2 de $\varphi = \frac{\Delta k}{N} x$, et de même amplitude. Utilisant la construction de FRESNEL (fig. 8) ou la représentation complexe, on trouve :

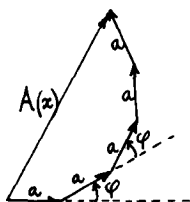


Fig. 8

$$s(x, t) = a \frac{\sin\left(\frac{N+1}{N} \cdot \frac{\Delta k}{2} x\right)}{\sin\left(\frac{\Delta k}{2N} x\right)} \cos(-k_0 x) = A(x) \cos(-k_0 x).$$

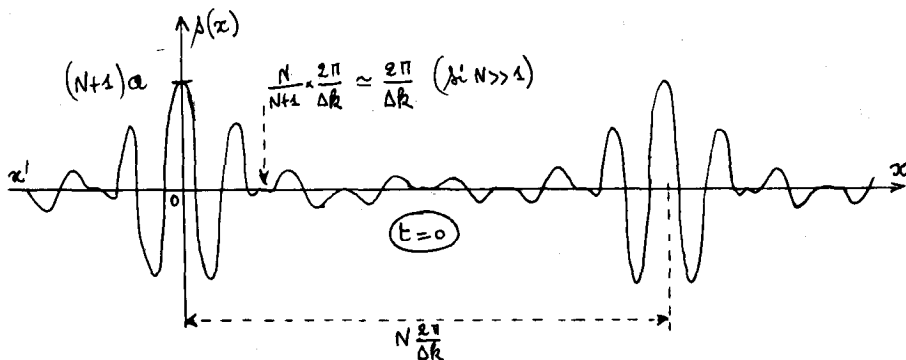


Fig. 9

Le résultat (fig. 9) est encore une succession de paquets d'ondes occupant tout l'axe $x'x$ de $-\infty$ à $+\infty$, mais ces paquets ne sont plus accolés.

2. A t quelconque,

$$s(x, t) = \sum_k a \cos[\omega(k)t - kx].$$

Pour chaque valeur de k , on obtient ω par un développement de TAYLOR soit, avec $\omega(k_0) = \omega_0$:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots$$

Si le spectre est étroit ou (et) si $\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0}$ est très petit

— très faible courbure du graphe $\omega(k)$ au point (k_0, ω_0) — on peut, avec une bonne approximation, ne conserver que le terme du premier ordre. Alors :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \sum_k a \cos \{ [\omega_0 + u(k - k_0)] t - kx \} \quad \text{avec} \quad u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \\ &= \sum_k a \cos \{ (\omega_0 t - k_0 x) + (u t - x)(k - k_0) \} \\ &= a \sum_{n=-N/2}^{+N/2} \cos \left\{ (\omega_0 t - k_0 x) + n(u t - x) \frac{\Delta k}{N} \right\} \end{aligned}$$

Nous sommes ramenés à une somme du type précédent avec cette fois-ci : $\varphi = (u t - x) \frac{\Delta k}{N}$. D'où le résultat :

$$s(x, t) = a \frac{\sin \left[\frac{N+1}{N} (u t - x) \frac{\Delta k}{2} \right]}{\sin \left[(u t - x) \frac{\Delta k}{2N} \right]} \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

Le signal $s(x, t)$ est donc le même qu'à $t = 0$, mais décalé sur l'axe des x de la distance $u t$; cela signifie que le groupe des $N+1$ ondes constituant ce signal se propage, *sans déformation* (4) et ce, que le milieu soit dispersif ou non, à la *vitesse*

$u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$. L'onde elle-même (ses crêtes par exemple, ou

ses « creux ») se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ comme le prouve le terme en cosinus (5).

Remarques très importantes.

1. Quelle que soit la valeur de $N+1$, l'amplitude du signal, maximale à l'instant t au point d'abscisse $x = u t$, y est égale

(4) Si le terme du 2^e ordre du développement de TAYLOR est effectivement négligeable.

(5) Si $N = 1$, on retrouve les résultats du § V.

à $(N + 1) a$: cela signifie que toutes les ondes composantes sont en interférences totalement constructives, à cet instant, en ce point. La vitesse de groupe n'est autre que la vitesse du point où toutes les composantes interfèrent constructivement, résultat qui généralise celui du § V.

2. Une autre propriété qui généralise les résultats de ce § V est la suivante : le signal est non négligeable sur une distance Δx

de l'ordre de $\frac{N}{N+1} \frac{2\pi}{\Delta k} \simeq \frac{2\pi}{\Delta k}$ dès que N est supérieur à quelques unités. Ce signal passe devant un observateur donné

pendant la durée $\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{\Delta x}{d\omega} dk \simeq \frac{\Delta x}{\Delta\omega} \Delta k$. Les relations

$$\Delta k \cdot \Delta x \simeq 2\pi$$

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \simeq 2\pi$$

sont donc générales et elles conduisent à un *principe d'incertitude*, dit principe d'incertitude classique. Si en effet nous voulons localiser le signal avec une très grande précision ($\Delta x \rightarrow 0$), la première relation implique $\Delta k \rightarrow \infty$, ce qui est contraire à notre hypothèse de calcul : le développement de TAYLOR n'a plus de signification ; le signal, se propageant dans un milieu dispersif, se déforme : en particulier il s'élargit d'ailleurs en s'atténuant : (cf. conservation de l'énergie) sa localisation devenant moins bonne.

Pour transmettre un message, le plus fidèlement possible, à travers un milieu matériel (toujours plus ou moins dispersif), il faut donc :

- d'une part, choisir un domaine de fréquences où le milieu est peu dispersif ;
- d'autre part, limiter la bande passante ($\Delta\omega$ et donc Δk d'après la courbe de dispersion, assez faibles), pas trop cependant (cf. § VII).

3. Un *signal unique* (non répétitif) est obtenu avec $N \rightarrow \infty$: son *spectre de Fourier est alors continu* (cf. fig. 7).

VII. SIGNAL DE FORME QUELCONQUE.

Dans la pratique, le signal émis (supposé unique) ayant une forme donnée, le problème consiste à trouver la bonne distribution des composantes (démarche inverse de celle des § précédents), c'est-à-dire la Transformée de Fourier du signal. Ce problème étant supposé résolu, le signal $s(x, t)$ s'écrit :

$$s(x, t) = \sum_k a(k) \cos [\omega(k)t - kx + \vartheta(k)],$$

cette somme devenant intégrale (spectre continu) pour un signal unique.

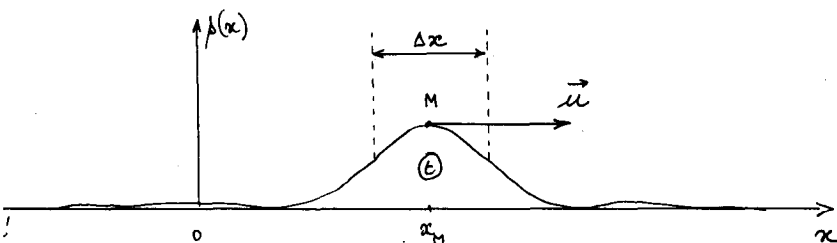


Fig. 10

Son amplitude étant maximale, à t , au point M d'abscisse x_M cela signifie que toutes les ondes composantes interfèrent constructivement à t en M, c'est-à-dire que :

$$\varphi(x, t, k) = \omega(k)t - kx_M + \vartheta(k) = 2n\pi, \quad \forall k,$$

n étant un entier, d'où : $\frac{d\omega}{dk}t - x_M + \frac{d\vartheta}{dk} = 0$,

soit :

$$x_M = \frac{d\omega}{dk}t + \frac{d\vartheta}{dk}$$

Le point M, donc notre signal, se déplace à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$, la valeur de cette dérivée étant à prendre au centre k_0 du spectre de Fourier du signal. Si le spectre est suffisamment étroit (Δk et donc $\Delta\omega$ petits), le signal se propage sans déformation à la vitesse de groupe $u = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$.

Exemples.

1. Les atomes émettent des « trains » d'ondes d'allure sinusoïdale mais d'étendue limitée (fig. 11) égale à Δx . La preuve de cette limitation peut se déduire de la visibilité des franges d'interférences lumineuses (6). Dans les meilleures conditions

(6) J.-P. MATHIEU : *Optique 1*, p. 190.

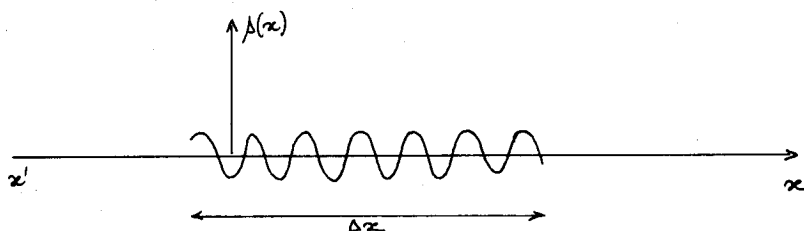


Fig. 11

$\Delta x \simeq 30 \text{ cm}$, d'où $\Delta t \simeq \frac{\Delta x}{c} \simeq 10^{-9} \text{ s}$ et $\Delta \omega$, largeur du spectre

(appelée en optique largeur de raie), égale à 10^9 rd s^{-1} soit $\Delta \nu \simeq 1,5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$. Cela explique que ces trains d'onde se propagent à la vitesse de groupe (§ IV.1 et V.2).

2. Il est bien connu que la quantité d'informations transmissible par modulation d'une onde sinusoïdale (la « porteuse ») croît avec la fréquence de celle-ci.

Chaque station radio occupe, en modulation d'amplitude, une largeur de bande $\Delta \nu = 5 \text{ kHz}$ (bande passante comprise entre 0 et 5 kHz autour de la porteuse de fréquence ν , de l'ordre de 1 000 kHz), ce qui est largement suffisant pour la parole, et suffisant pour la musique tant que l'on ne cherche pas une « haute fidélité ».

La transmission d'une image de télévision nécessite une bande passante plus élevée, de l'ordre de 10 MHz, la fréquence de la porteuse étant de l'ordre de 500 MHz (cf. BERKELEY, *Ondes*, p. 285).

Dans les deux cas, le rapport $\Delta \nu / \nu$ est très faible : la vitesse de groupe est bien définie et la propagation se fait pratiquement sans déformation, d'autant plus que le milieu (l'atmosphère) est peu dispersif.

3. Le problème des liaisons téléphoniques est similaire. Le désir d'augmenter le nombre de communications transmissibles simultanément par une seule ligne a conduit à l'utilisation de fréquences de plus en plus élevées. Un progrès énorme a été réalisé dans ce sens en passant des ondes radioélectriques (pour lesquelles les pertes d'énergie croissent vite avec la fréquence) aux ondes lumineuses. Mais la directivité d'une onde croissant avec la fréquence, il fallait guider l'onde d'où l'avènement des fibres optiques dont l'essor est dû à l'apparition d'une source idéale, le laser (cf. La Recherche n° 59, sept. 1975). Les difficultés liées à l'absorption et à la dispersion (cf. § IX.1) sont actuellement en partie surmontées. La fréquence extrêmement élevée de

la porteuse (de l'ordre de 10^{14} à 10^{15} Hz) permet non seulement de transmettre la parole mais également l'image (visiaphone) d'un grand nombre de communications simultanées.

VIII. VITESSE DE L'ENERGIE ET VITESSE DE GROUPE.

Il est certain qu'une onde transporte de l'énergie (ex. : énergie « solaire » ; énergie acoustique capable d'actionner la mécanique de l'oreille...). Nous allons évaluer l'énergie cinétique d'une corde tendue et chercher, dans deux cas simples, à quelle vitesse elle se propage.

1. Energie d'une corde (par unité de longueur).

a) Energie cinétique d'un élément de longueur dx , situé entre les abscisses x , $x + dx$: $y(x, t)$ étant l'élongation instantanée

de cet élément, sa vitesse est $\frac{\partial y}{\partial t}$ (rien à voir avec la vitesse de

l'onde) et son énergie cinétique :

$$dE_c = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx,$$

soit une énergie cinétique linéique :

$$e_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

b) Energie potentielle (par unité de longueur). On sait que la force de rappel $-ky$ d'un ressort de raideur k dérive

d'une énergie potentielle $\frac{1}{2} kx^2$.

La composante suivant Oy de la force de rappel exercée par la partie 1. sur la partie 2. (fig. 12) de la corde étant

$-T \frac{\partial y}{\partial x}$, on peut s'attendre à ce qu'elle dérive d'une énergie

potentielle :

$$e_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

par unité de longueur de corde (cf. calcul complet en appendice A).

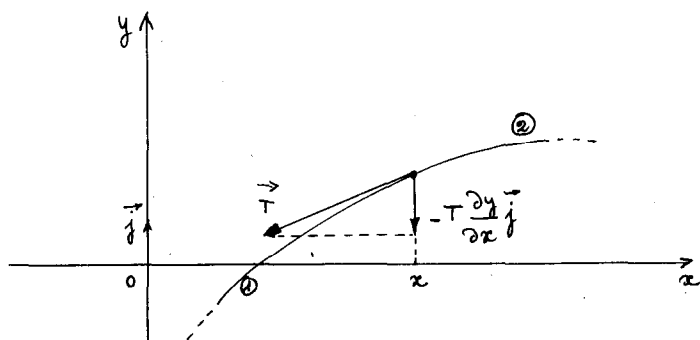


Fig. 12

c) Energie linéique totale :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Cas particulier d'une *onde progressive* obéissant à l'équation classique. On remarque alors facilement que $e_c(x, t) = e_p(x, t)$ et non $e_c + e_p = c^2$: cas d'un oscillateur harmonique.

2. Propagation de l'énergie, sans dispersion.

Considérons d'abord une onde progressive sinusoïdale,

$$y(x, t) = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

Alors :

$$e(x, t) = \mu a^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] :$$

l'énergie se propage donc à la vitesse v de l'onde.

Soit maintenant un « signal » $y(x, t)$, représenté par le graphe de la fig. 13 a se propageant sans dispersion à la vitesse v vers les x positifs. Le second graphe (fig. 13 b) représente l'énergie :

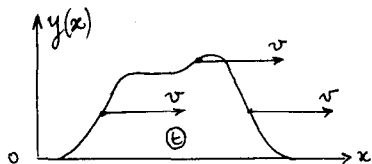


Fig. 13 a)

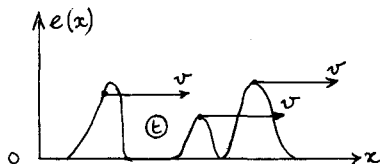


Fig. 13 b)

$$e(x, t) = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

il est clair que celle-ci se propage également à la vitesse v du signal.

3. Propagation de l'énergie, avec dispersion.

Un moyen simple d'introduire de la *dispersion* dans la propagation consiste à tenir compte d'une *absorption* d'énergie, l'absorption impliquant toujours de la dispersion (la réciproque n'est pas nécessairement vraie : cf. ondes à la surface de l'eau). L'équation de propagation le long d'une corde tendue, par

exemple, s'écrit alors (en notant $-\mu f \frac{\partial y}{\partial t}$ la force de frottement visqueux agissant sur l'unité de longueur de corde) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + f \frac{\partial y}{\partial t} - v_o^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \dots$$

$$\dots (v_o = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \text{vitesse de propagation si } f = 0).$$

On s'attend à une solution comportant un terme d'amortissement :

a) Cherchons donc si une solution de la forme :

$$y(x, t) = A e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx),$$

représentant une onde pseudo-sinusoidale amortie se propageant

à la vitesse (de phase) $\frac{\omega}{k}$, peut convenir. Pour le savoir, il

suffit de reporter dans l'équation de propagation les expressions des dérivées partielles trouvées à partir de $y(x, t)$; on trouve :

$$-\alpha x \left\{ \underbrace{[-\omega^2 + v_o^2(k^2 - \alpha^2)]}_{=0} \cos(\omega t - kx) + \underbrace{[2 v_o^2 k \alpha - f \omega]}_{=0} \sin(\omega t - kx) \right\} = 0$$

et $\forall t$ d'où : 0 et 0

soit 2 équations à 2 inconnues (α et k) dont les solutions n'existent que si $\alpha < k$.

Si l'amortissement est faible, un développement limité conduit aux valeurs approchées

$$\left\{ \begin{array}{l} k \simeq \frac{\omega}{v_0} \left(1 + \frac{f^2}{8\omega^2} + \dots \right) \quad \text{avec} \quad \frac{f}{\omega} \ll 1 \\ \alpha \simeq \frac{f}{2v_0} \end{array} \right.$$

Remarque.

Au 3^e ordre près, α est indépendant de ω .

b) Superposition de 2 ondes sinusoïdales ($\omega_1 \simeq \omega_2$) amorties.

L'onde $y(x, t) = A e^{-\alpha_1 x} \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A e^{-\alpha_2 x} \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ est solution de l'équation de propagation (linéaire) précédente. Elle représente des paquets d'ondes qui se propagent (comme au § V.) à la vitesse de groupe, les minimums d'amplitude n'étant nuls que si $\alpha_1 = \alpha_2$ (amortissement faible).

La densité d'énergie, $e(x, t)$, transportée par cette onde, s'évalue à partir de l'expression générale (§ VIII.1 c). Deux cas se présentent :

- Si l'amortissement est faible, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$: $e^{-\alpha x}$ se factorise non seulement dans l'expression de $y(x, t)$ mais aussi dans celles de $\frac{\partial y}{\partial t}$ et de $\frac{\partial y}{\partial x}$; dans ces deux dernières apparaissent alors des sommes ou des différences de sinus et de cosinus qui, transformées en produits, prouvent que les amplitudes de $\frac{\partial y}{\partial t}$ et de $\frac{\partial y}{\partial x}$ — et donc l'énergie — se propagent à la vitesse de groupe.
- Si l'amortissement n'est pas faible, $\alpha_1 \neq \alpha_2$: il n'existe pas de facteur commun aux sinusoïdes et par conséquent ni somme ni différence de telles fonctions à partir desquelles apparaissait la vitesse de groupe. La vitesse de propagation de l'énergie diffère alors de la vitesse de groupe et ce, d'autant plus que l'amortissement est plus grand.

En pratique, nous nous intéressons à la propagation sur des distances longues : l'amortissement doit être faible et l'énergie se propage alors à la vitesse de groupe qui constitue également la vitesse du signal, l'énergie étant localisée là où est le signal.

Remarque.

D'après la Théorie de la Relativité, c'est la vitesse du signal qui ne peut dépasser la valeur c . Il en est donc de même de la

vitesse de groupe lorsque l'amortissement est faible. Par contre, dans les bandes d'absorption des ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu matériel, la vitesse de groupe, comme la vitesse de phase, dépasse la valeur c (cf. ALONSO-FINN, *Physique Générale*, Tome II, § 19.13) et la vitesse de l'énergie, tout en restant inférieure à c , diffère de la vitesse du signal dont la définition dépend de la forme du pulse et de la nature du détecteur mais dont la valeur ne dépasse effectivement jamais c (cf. BRILLOUIN, *Congrès International d'Electricité*, Tome II, Paris, 1932).

IX. ORIGINES DE LA DISPERSION.

Nous avons vu (§ VIII.) que la dispersion pouvait être créée par l'absorption. Nous allons citer d'autres cas.

1. En milieu « fermé ».

Soit par exemple un *guide d'onde* rectangulaire, constitué de 2 plans conducteurs parallèles (P_1, P_2). La dispersion des ondes E.M. y est due à une propagation en zigzag (fig. 14) à la vitesse

de groupe $u = c \cos \theta$ alors que $v_\phi = \frac{c}{\cos \theta}$ (donc $v_\phi > c$). Ce

sont les conditions aux limites du mode T.E. (transverse électrique : $E = E_z = 0$ en $y = 0$ et $y = b$) qui imposent cette dispersion (cf. BERKELEY, *Ondes*, p. 337) : on dit qu'il s'agit d'une dispersion modale.

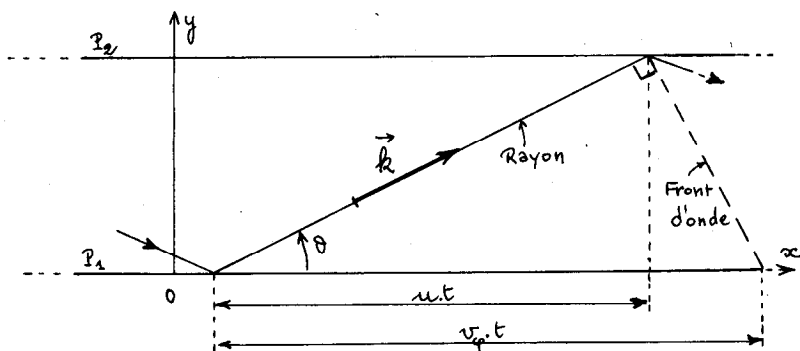


Fig. 14

Une cause analogue se trouve dans les *fibres optiques* (cf. LA RECHERCHE n° 130, février 1982).

2. En milieu « ouvert ».

Dans un milieu matériel illimité, le champ électrique d'une onde E.M. plane de pulsation ω met en mouvement harmonique

les électrons dont l'amplitude des oscillations est en $\frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2}$

(ω_o = pulsation propre des électrons ; on néglige l'amortissement, ce qui est légitime pour un milieu transparent à la fréquence considérée). Ces électrons, en mouvement accéléré (puisque sinusoïdal), émettent un champ électromagnétique ϵ qui se superpose, en M, au champ E de l'onde initiale.

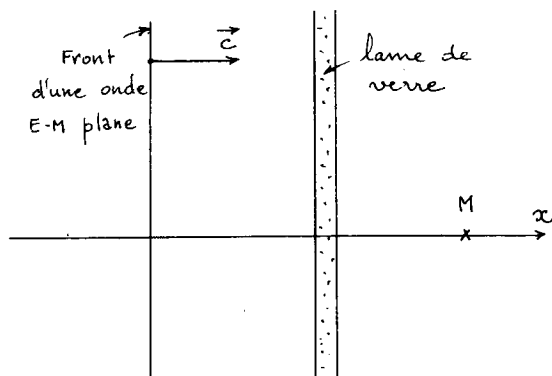


Fig. 15

Si, en l'absence de lame de verre $E(M, t) = E_o \cos \omega t$, on montre que, avec la lame : $E(M, t) = E'_o \cos \omega t + \epsilon \sin \omega t$

$$\epsilon, \text{proportionnel à } \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2}; \quad \frac{\epsilon}{E_o} = \delta \ll 1$$

$$\Rightarrow E(t) \simeq E'_o \cos(\omega t - \delta)$$

(cf. BERKELEY, p. 189 et 387).

Si donc $\omega < \omega_o$ (cas des ondes lumineuses dans le verre), δ est > 0 : une valeur donnée de la phase de l'onde, en M, sera, avec la lame de verre atteinte plus tard que sans lame. Donc $v_p < c$.

Si $\omega > \omega_o$ (cas des rayons X), δ est < 0 et $v_p > c$.

Cette dispersion, dite spectrale, est due à une interaction entre l'onde et les électrons du milieu (le verre ici, mais ce résultat est général : on observe par exemple une dispersion des ondes radio dans l'ionosphère, qui contient des électrons libres : $\omega_o = 0$) (cf. BERKELEY, Ondes, p. 87 ; 169 ; 184).

3. Ondes à la surface de l'eau.

Le tableau ci-après donne les valeurs des vitesses de phase et de groupe de ces ondes, en eau profonde, en fonction de λ

$$\text{ou de } v = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Tableau 3

λ cm	ν , Hz	v_φ cm/sec	v_g cm/sec	$\frac{v_g}{v_\varphi}$
0,10	675	67,5	101,4	1,50
0,25	172	43,0	63,7	1,48
0,50	62,5	31,2	44,4	1,42
1,0	24,7	24,7	30,7	1,24
1,7	13,6	23,1	23,1	1,00
2	11,6	23,2	21,4	0,92
4	6,80	27,2	17,8	0,65
8	4,52	36,2	19,6	0,54
16	3,14	50,3	25,8	0,51
32	2,22	71	35,8	0,50
100	1,25	125	62,5	0,50
200	0,884	177	88,5	0,50
400	0,625	250	125	0,50
800	0,442	354	177	0,50
1 600	0,313	500	250	0,50
3 200	0,221	708	354	0,50
6 400	0,156	1 000	500	0,50

La *théorie* de ces ondes n'est pas simple. Nous allons en donner la démarche essentielle :

• Une goutte d'eau, de volume $d\tau$, de masse $dm = \varrho d\tau$, au sein du liquide possède, à un instant t , une accélération

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ sous l'action des forces de pression et de pesanteur, la

pression étant une pression dynamique (différente de la pression

statique) : $\vec{a} dm = \varrho \vec{a} d\tau = d\vec{F}_{\text{pression}} + \varrho \vec{g} d\tau$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}} p d\tau - \overrightarrow{\text{grad}} U d\tau$$

avec :

$$\varrho \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$$

U étant l'énergie potentielle de pesanteur, par unité de volume,

$$\text{d'où : } \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\varrho} \overrightarrow{\text{grad}} (p + U) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p + U}{\varrho} \right) \quad (1)$$

un liquide étant *incompressible*. Il en résulte que $\frac{d\vec{V}}{dt}$, et donc \vec{V} , est un $\overrightarrow{\text{grad}}$.

On pose :

$$\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad (2)$$

ϕ = potentiel des vitesses.

D'autre part, \vec{V} dépend de t et du point (x, y, z) où se trouve la goutte d'eau à t ; entre t et $t + dt$, \vec{V} varie de $d\vec{V}$ tel que :

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz$$

soit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} V_x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} V_y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} V_z}_{\text{termes du 2^e ordre,}}$$

négligeables pour des ondes de *faible amplitude*. L'équation (1), compte tenu de (2) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{p + U}{\rho} \quad (3)$$

• Enfin, la conservation de la matière impose (7) :

$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$ et, comme le fluide est incompressible ($\rho = \text{cte}$) :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad \text{soit, d'après (2)} \quad \Delta \phi = 0 \quad (4)$$

Pour des ondes rectilignes, parallèles à Oz et se propageant suivant Ox, (4) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4 \text{ bis})$$

La solution de cette équation, calquée sur celle de l'équation classique de propagation, s'écrit en notation complexe :

$$\phi = f_1(x - iy) + f_2(x + iy)$$

soit :

$$\phi(x, y, t) = e^{i(\omega t - kx)} (A e^{-ky} + B e^{ky}) \quad (5)$$

pour une onde sinusoïdale progressive.

(7) En l'absence de bulles.

• Conditions aux limites.

Si la goutte d'eau est au fond du récipient ($y = -h$), elle ne peut avoir de mouvement vertical :

$$V_y = 0 \quad \text{et donc} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=-h} = 0 \quad [\text{cf. (2)}], \quad \text{soit :}$$

$$-A e^{kh} + B e^{-kh} = 0. \quad (6)$$

Soit $s(x, t) = a e^{i(\omega t - kx)}$ l'élongation verticale de l'onde en surface. Si la goutte d'eau est en surface, en x à t , alors $y = s$ (en prenant $y = s = 0$ à l'équilibre) alors elle participe au mouvement de l'onde elle-même : $V_y = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=s} \equiv \frac{\partial s}{\partial t}$

soit, avec s très petit et donc $e^{\pm ks} = 1$:

$$k(A - B) = i\omega a. \quad (7)$$

Pour tenir compte de la pression en surface, nous prendrons nulle la pression atmosphérique. Alors, si l'on néglige les phénomènes de capillarité, seule subsiste dans (3) l'énergie potentielle de pesanteur :

$$U = \rho g s(x, t) \quad (8)$$

qui engendre les ondes dites de gravité ou tout simplement vagues.

a) ONDES DE GRAVITÉ (VAGUES).

(3) et (8), appliquées en surface, impliquent :

$$i\omega(A + B) = g a. \quad (9)$$

Faisant le rapport (9)/(7), on élimine a et, compte tenu de (6), il vient :

$$\boxed{\omega^2 = g k \operatorname{th}(kh)} \quad (10)$$

(th = tangente hyperbolique).

C'est la relation de dispersion des ondes de gravité, exacte pour toutes les valeurs des paramètres k et h .

Deux cas limites sont intéressants :

• en eau peu profonde (c'est-à-dire $kh \ll 1$).

Alors $\operatorname{th}(kh) \simeq kh$ et $\omega^2 = k^2 gh$. (En pratique, il suffit que $h < \frac{\lambda}{20}$)

d'où :

$$\boxed{v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}} \quad (11) \Rightarrow \text{pas de dispersion} \\ \text{mais } v_{\varphi} = v_{\varphi}(h);$$

- en eau profonde (c'est-à-dire $kh \gg 1$).

Alors $th(kh) \simeq 1$ et $\omega^2 = gk$. (En pratique, il suffit que $h \geq \lambda$)

d'où :

$$\boxed{v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}} \quad (12) \Rightarrow v_{\varphi} \text{ est indépendante}$$

de h , mais dépend de k : il y a dispersion et même une forte dispersion puisque, d'après (12) :

$$\boxed{u = \frac{v_{\varphi}}{2}} \quad (13) \quad u < v_{\varphi} : \text{dispersion normale.}$$

b) ONDES CAPILLAIRES (RIDES).

Si les longueurs d'onde sont courtes, la courbure de la surface n'est plus négligeable ; la pression n'est plus nulle à la surface, mais égale à la pression capillaire : (phénomène de « tension » capillaire, analogue à la résultante des forces agissant sur l'unité de longueur d'une corde tendue (fig. 16) :

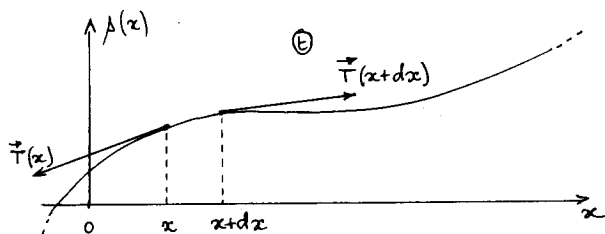


Fig. 16

$$F_{1y} + F_{2y} = T \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_{x+dx} - T \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_x = T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

soit, par unité de longueur : $T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$.

Cette figure représente aussi bien une coupe de la surface liquide : $T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$, avec T = tension superficielle du liquide, représentant la force exercée sur l'unité de surface, correspondant à une pression extérieure :

$$p = -T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = T k^2 s. \quad (14)$$

Pour l'eau : $T \simeq 75 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ (par méthode de Jurin).

Appliquant (3), (9) devient :

$$i \omega (A + B) = \left(g + \frac{T}{\rho} k^2 \right) a \quad (9 \text{ bis})$$

d'où, en divisant par (7) :

$$\omega^2 = \left(g k + \frac{T}{\rho} k^3 \right) \tanh(k h) \quad (10 \text{ bis})$$

C'est la relation — complète — de dispersion des ondes à la surface d'un liquide NON VISQUEUX (nous n'avons tenu compte d'aucun amortissement). Son graphe est représenté sur la fig. 18.

La vitesse de phase est :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{T}{\rho} k \right) \tanh(k h)} \quad (\text{voir fig. 4 page 282}).$$

Capillarité et gravité ont même « poids » dans la dispersion pour $\frac{g}{k} = \frac{T}{\rho} k$, ce qui correspond, pour l'eau, à :

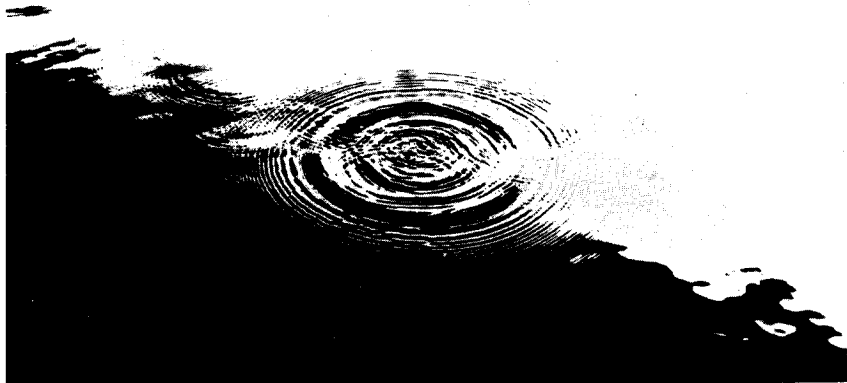
$$\left. \begin{aligned} \lambda_o &\simeq 17,5 \text{ mm} \\ \nu_o &= \frac{\omega_o}{2\pi} \simeq 13,5 \text{ Hz} \end{aligned} \right\} v_{\phi \text{ min}} \simeq 23 \text{ cm/s.}$$

Pour les grandes longueurs d'onde ($\lambda \gg \lambda_o$), les ondes sont purement de gravité.

Pour les courtes longueurs d'onde ($\lambda \ll \lambda_o$), elles sont purement capillaires mais vite amorties car leurs fréquences sont élevées.

La photo ci-après, prise 1 à 2 secondes après la chute d'un petit gravier dans l'eau, les montre clairement. On y constate

que les courtes longueurs d'onde sont plus rapides (dispersion anormale), conformément au tableau 3.



Il semble bien que, pour les ondes à la surface d'un liquide, la dispersion soit due à l'incompressibilité du milieu qui implique un couplage entre les mouvements vertical et horizontal d'une particule (goutte d'eau). On peut d'ailleurs montrer que ces deux mouvements sont en quadrature (la trajectoire est donc elliptique), ce qui rappelle l'expression de $E(M, t)$ (§ IX.2.) mais ici les amplitudes des 2 mouvements étant du même ordre, la dispersion est importante.

C'est cette forte dispersion qui est responsable (moyennant certaines hypothèses : faible amplitude, eau profonde...) de l'angle

constant $\left(\vartheta = \text{Arc sin } \frac{1}{3} \right)$ que fait le sillage d'un bateau avec

la trajectoire de celui-ci (cf. SOMMERFELD : *Mechanics of Deformable Bodies*, p. 200) alors que pour un avion supersonique

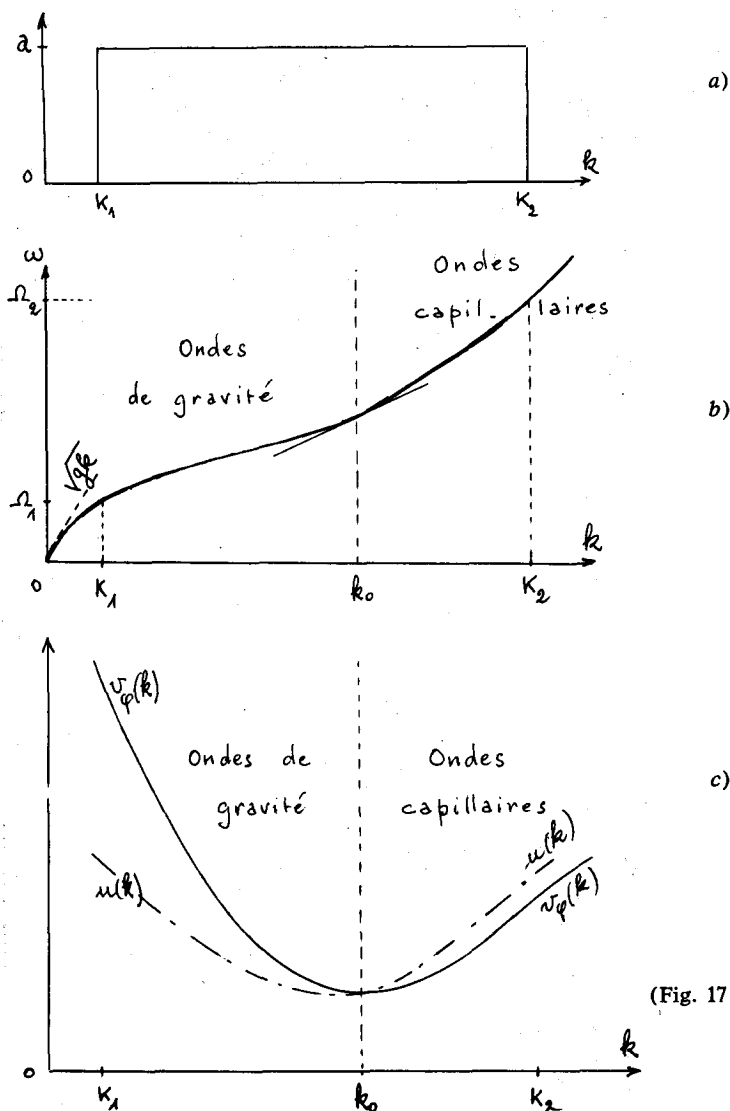
$$\vartheta = \text{Arc sin } \frac{v}{V} \text{ (pas de dispersion).}$$

Reste à voir comment, pour les ondes à la surface de l'eau, mesurer $v_p(\lambda)$, puis comment définir et mesurer $u(\lambda)$, pour une longueur d'onde λ donnée.

X. GENERALISATION DE LA NOTION DE VITESSE DE GROUPE.

La chute d'une pierre dans l'eau crée une perturbation (unique) très proche d'une *impulsion* spectre :

- continu,
- très étendu, k variant continûment de K_1 à K_2 (fig. 17 a),
- blanc, toutes les composantes ayant même amplitude a .



(Fig. 17)

La chute de la pierre crée donc (cf. théorème de Fourier et courbe de dispersion : fig. 17 b) des ondes sinusoïdales dont les pulsations ω varient continûment de Ω_1 à Ω_2 . Ces ondes se propagent — indépendamment les unes des autres — superposant leurs effets en un point donné à un instant donné.

La dispersion étant très importante, le « signal » initial (l'impulsion due à la chute de la pierre) se déforme très rapidement, au point qu'il devient vite méconnaissable. Les sinusoides — composantes de Fourier — se détachent du « paquet » initial, les plus rapides devançant les autres. Suivant la masse de l'objet tombant dans l'eau, le spectre est :

- plutôt à gauche de k_0 (les grandes λ dominant) : c'est le cas avec une pierre assez lourde, et les ondes de gravité sont les plus rapides (fig. 17 c),
- plutôt à droite de k_0 (les courtes λ dominant) : c'est le cas avec la chute de gouttes d'eau (cf. photo précédente) et les ondes capillaires sont les plus rapides (fig. 17 c), mais elles sont vite amorties du fait de leurs fréquences élevées : au bout de quelques mètres ne subsistent que les ondes de gravité.

La situation des photos du début (ondes de gravité) permet en fait de voir le spectre de Fourier se propager. Faisons une coupe schématique de ces photos aux instants t_1 (fig. 18 a) et t_2 (fig. 18 b) ($t_2 > t_1$) :

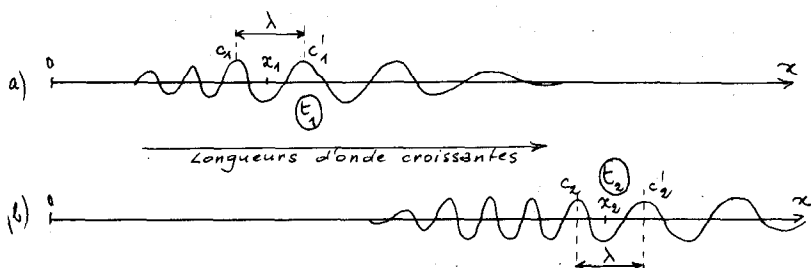


Fig. 18

Pour mesurer $v_g(\lambda)$, il suffit de repérer la longueur d'onde λ et de mesurer la vitesse d'une des crêtes c_1, c'_1, c_2, c'_2 , mais sur une courte distance puisque λ évolue ($c_1 c'_1$ ne reste pas égal à la même valeur), soit sur une distance de l'ordre de 2 m.

Pour mesurer $u(\lambda)$, il suffit de repérer λ (en x_1 à t_1) puis une vingtaine de mètres plus loin (en x_2 à t_2) : $x_2 - x_1 = u(t_2 - t_1)$.

La théorie correspondante, traitée en appendice B, consiste à décomposer l'intervalle (K_1, K_2) en intervalles très petits (k_1, k_2) dans chacun desquels la relation de dispersion peut être considérée comme linéaire : $\omega = ut + b$ et à superposer (continûment, d'où une intégrale) les ondes de vecteurs k compris entre k_1 et k_2 .

APPENDICE A :

EVALUATION DE L'ENERGIE LINEIQUE $e(x, t)$ D'UNE CORDE

A t , l'élément dx de la corde (fig. 16) est soumis aux forces extérieures $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x + dx)$.

Pendant dt , l'élément dx s'étant déplacé suivant Oy , la somme des travaux de ces 2 forces est :

$$\delta^2 \mathcal{E} = + (T_y dy)_{en\ x} + (T_y dy)_{en\ x+dx}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_y(x) = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \quad \text{et} \quad T_y(x+dx) = +T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} \\ dy_x = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_x dt \quad \text{et} \quad dy_{x+dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x+dx} dt, \end{array} \right.$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{E} &= T \left[- \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x+dx} \right] dt \\ &= T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dx \right] dt \\ &= T \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] dx dt \\ &= T \left[\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] dx dt \\ \delta \mathcal{E}_{ext} &= \left[\underbrace{\mu \int \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dt}_{u \cdot u'} + T \int \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dt}_{u \cdot u'} \right] dx \dots \\ &\dots = \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

$$dE_c(x, t) - \delta \mathcal{E}_{int} = dE_c(x, t) + dE_p(x, t) \dots$$

$$\dots = [e_c(x, t) + e_p(x, t)] dx$$

d'où :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

APPENDICE B :

GENERALISATION DE LA NOTION DE VITESSE DE GROUPE

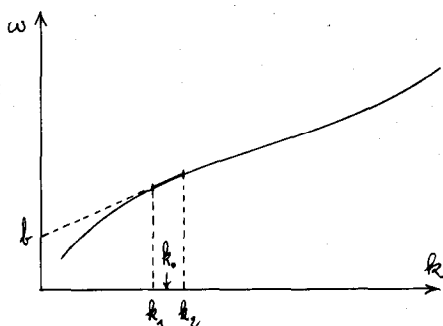


Fig. 19

$$k_1 \leq k \leq k_2 \Rightarrow \omega = uk + b$$

$$s_o(x, t) = a \int_{k_1}^{k_2} \cos(\omega t - kx) dk \quad (\text{pour un spectre « blanc »})$$

$$= a \int_{k_1}^{k_2} \cos[bt - k(x - ut)] dk$$

$$= a \left[\frac{\sin[bt - k(x - ut)]}{x - ut} \right]_{k_1}^{k_2}$$

$$= 2a \frac{\sin \left[\frac{k_1 - k_2}{2} (x - ut) \right] \cos \left[bt - \frac{k_1 + k_2}{2} (x - ut) \right]}{x - ut}$$

$$= -2a \frac{\sin \left[\frac{\Delta k}{2} (x - ut) \right]}{x - ut} \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \Delta k = k_2 - k_1 \\ k_o = \frac{k_1 + k_2}{2} \\ \omega_o = \omega(k_o). \end{array} \right.$$

Le signal $s_o(x, t)$ est une sinusoïde (*) $[\cos(\omega_o t - k_o x)]$ qui se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_o}{k_o}$ mais qui n'est *non nulle* qu'au voisinage du point x , à l'instant t tel que $x - ut = 0$: on la voit donc se propager à la vitesse $u(\lambda_o)$ c'est-à-dire à la vitesse de groupe puisque $u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_o}$ tel que $k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o}$.

(*) De longueur d'onde $\lambda_o = \frac{2\pi}{k_o}$.