

Phénomène d'induction associé au mouvement d'un aimant dans un tube de cuivre

par André DEIBER et Laurent MARKIEWICZ

Lycée Fustel de Coulanges - 67000 Strasbourg

Olivier KEMPF

IUFM d'Alsace - Site de Strasbourg

et Frédéric PAVIET

Lycée Kléber - 67000 Strasbourg

GRESEP Groupe de recherche de l'Université Louis Pasteur et de IUFM d'Alsace

RÉSUMÉ

Lorsqu'un aimant se déplace dans un tube cylindrique conducteur, les courants de Foucault qui apparaissent dans la masse métallique sont suffisamment importants pour modifier de manière sensible le mouvement de l'aimant. La force électromotrice induite par le passage de l'aimant dans une bobine reliée à un oscilloscope permet une étude quantitative des phénomènes d'induction résultant d'une variation temporelle du champ magnétique. La géométrie simple de ce problème permet de confronter les résultats expérimentaux à des modèles physiques de plus en plus performants. L'accent est mis sur des calculs relativement élaborés. Un second article détaille les exploitations didactiques possibles de cette expérience.

1. UN FREIN ÉLECTROMAGNÉTIQUE PUISSANT

1.1. Premières observations

Cette expérience ne nécessite que très peu de matériel, un ou plusieurs tubes de cuivre, un tube en verre ou en matière plastique, ainsi que deux aimants d'agitateur magnétique (de préférence un modèle gainé avec du téflon pour limiter les frottements). Le tube dans lequel se déplace l'aimant doit être au préalable placé verticalement. On lâche simultanément les deux aimants à l'extrémité supérieure des tubes de même longueur et on constate un très net décalage temporel à l'arrivée. L'aimant qui se déplace dans le tube conducteur arrive nettement après l'autre aimant, l'effet est d'autant plus net que l'on associe plusieurs tubes conducteurs de rayon croissant en les emboîtant. L'aimant n'étant sensible qu'à des champs magnétiques, il faut rechercher l'origine de ce ralen-

tissement dans les courants de Foucault qui circulent dans la masse métallique. Précisons d'office qu'un document vidéo est disponible sur le serveur à l'adresse :

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp>

1.2. Géométrie des courants

Des arguments de symétrie permettent de prévoir l'allure des lignes de courants induits. En un point N du métal repéré par des coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe parallèle au tube, le plan $(N, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie vu le caractère pseudo-vectoriel du vecteur moment magnétique \vec{M} . La densité de courant en N , en tant que vecteur polaire est orthogonale à ce plan $(N, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$. En conséquence en coordonnées cylindriques, la densité de courant \vec{j} présente uniquement une composante orthoradiale soit :

$$\vec{j} = j_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

2. CHUTE D'UN AIMANT DANS UN TUBE VERTICAL

2.1. Montage expérimental

Afin d'étudier de manière quantitative ce phénomène on enfle le tube dans une bobine dite «de détection». Cette bobine (1200 spires par exemple) est associée à un oscilloscope à mémoire ou à un système d'acquisition informatisé. Vu ce mode de branchement, l'impédance des appareils de mesure étant très grande, on peut considérer qu'aucun courant ne va circuler dans cette bobine lors du passage de l'aimant.

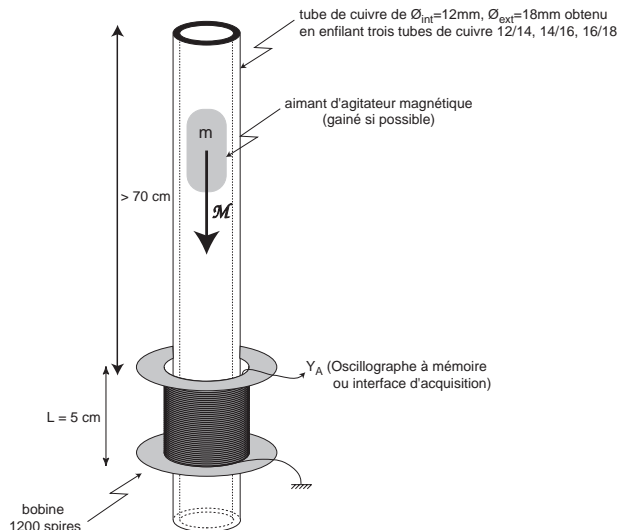
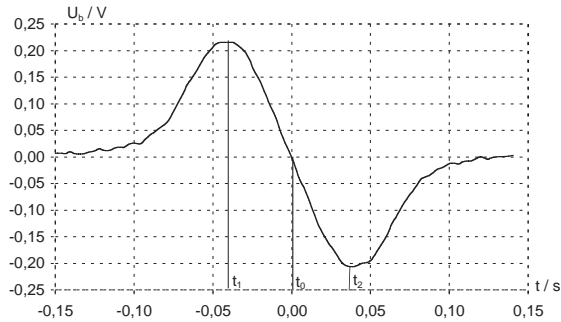


Figure 1 : Montage expérimental.

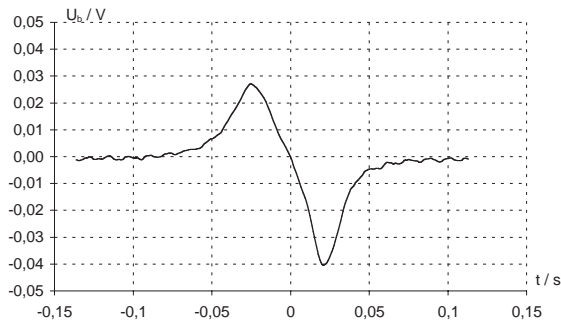
2.2. Détection du passage de l'aimant



Graph 1 : Tension aux bornes de la bobine.

On lâche l'aimant à l'extrémité supérieure du tube. Lors du passage de l'aimant dans la bobine, l'oscilloscope détecte un double pic algébrique de tension aux bornes de celle-ci. Suivant le branchement de la bobine et le sens d'introduction de l'aimant, on peut obtenir un signal opposé à celui du graph 1. Cette force électromotrice induite résulte d'une variation de flux magnétique à travers la bobine de détection. Si on choisit la date origine lors du passage par zéro de la tension, cette fonction semble impaire.

Notons que l'on obtient une courbe ayant même allure en lâchant l'aimant au-dessus de la bobine en l'absence de tube de cuivre comme l'indique le graph 2.



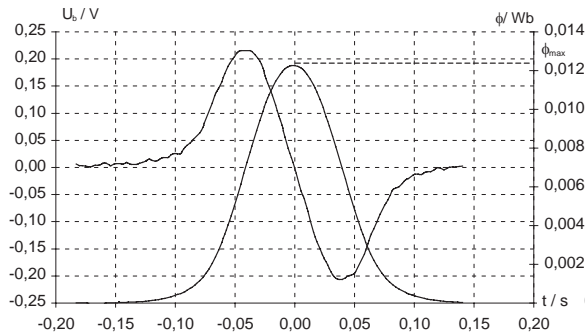
Graph 2 : Tension aux bornes de la bobine sans tube.

Mais plusieurs différences apparaissent entre les deux courbes. *A contrario* de la chute dans le tube, le double pic n'est plus impair dans le cas «d'une chute libre», les

valeurs absolues des amplitudes des deux pics diffèrent notablement ainsi que les durées séparant ces valeurs maximales du passage par zéro. Ceci peut s'expliquer en supposant que le mouvement de l'aimant est uniforme (du moins lors du passage dans la bobine) en présence du tube conducteur. Pour la chute libre, le mouvement est accéléré, la vitesse d'entrée dans la bobine diffère de la vitesse de sortie. Cette explication se trouve renforcée si on remarque que l'adjonction de plusieurs tubes de cuivre (emboîtés) de rayon croissant modifie sensiblement le temps de chute. Le freinage électromagnétique s'avère suffisamment important pour imposer une vitesse limite dans le tube.

2.3. Flux magnétique à travers la bobine de détection

2.3.1. Première estimation du moment magnétique de l'aimant



Graph 3 : Tension induite et flux magnétique : valeurs expérimentales.

La tension aux bornes de la bobine est égale à l'opposée de la force électromotrice induite en convention récepteur. Le flux du champ magnétique créé par l'aimant au travers de la bobine de détection peut se calculer par intégration numérique. Avant de procéder à cette intégration il faut enlever la composante continue du signal, celle-ci étant obtenue aisément par modélisation par une fonction constante. Une valeur moyenne non nulle, même faible, va se traduire par intégration par une valeur non nulle de ϕ après le passage de l'aimant.

Le caractère impair de la tension se traduit maintenant par une fonction paire donnant le flux. Le flux dans le tube est nul lorsque l'aimant est loin de la bobine que ce soit avant ou après le passage. Le flux est maximal lorsque l'aimant se trouve au centre de la bobine.

Le graphique donnant le flux permet de déterminer le moment magnétique de l'aimant. Le flux magnétique à travers la bobine peut se calculer directement ou plus

rapidement par estimation d'une inductance mutuelle entre deux circuits. L'aimant de moment magnétique $\vec{M} = M_{mag} \vec{e}_z$ est équivalent à une spire de surface s parcourue par un courant d'intensité $i = \frac{M_{mag}}{s}$; l'orientation de ce circuit équivalent est telle que

la normale orientée soit suivant $+\vec{e}_z$. On se trouve donc ramené à calculer le flux du champ magnétique créé par ce circuit à travers la bobine. Vu les propriétés des inductances mutuelles, ce flux peut être calculé à partir du flux à travers la surface orientée s du champ magnétique créé par la bobine. Ce dernier vaut classiquement :

$$B_{bob \rightarrow spire} = \frac{1}{2} \mu_0 n I_{bob} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2]$$

d'où :

$$\Phi_{bob \rightarrow spire} = \frac{1}{2} s \mu_0 I_{bob} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \Rightarrow \Phi_{spire \rightarrow bob} = \frac{1}{2} s \mu_0 n i_{spire} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2]$$

et :

$$\Phi_{spire \rightarrow bob} = \frac{\mu_0 n M_{mag}}{2} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \Rightarrow \Phi_{max} = \frac{1}{2} \mu_0 n M_{mag} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{l^2}}}$$

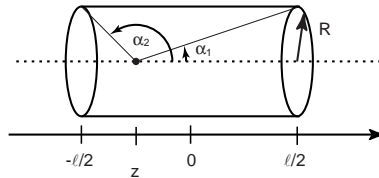


Figure 2

On en tire expression du moment magnétique $M_{mag} = \frac{\Phi_{max} \sqrt{1 + \frac{4R^2}{l^2}}}{\mu_0 \frac{N}{l}}$. La bobine

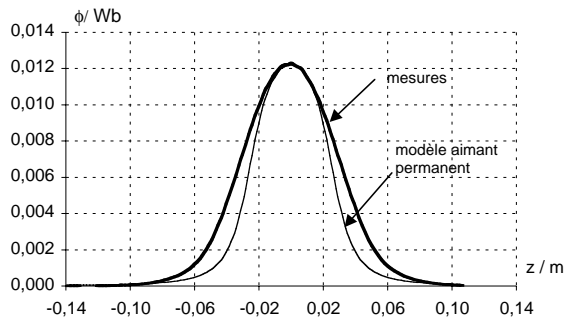
Leybold utilisée comportait 1200 spires pour une longueur l de 5 cm et un rayon moyen R de 2,0 cm, ce qui donne $M_{mag} \cong 0,46 \text{ A.m}^2$. Comme l'aimant n'est pas ponctuel, et comme la bobine a une épaisseur non négligeable car elle comporte plusieurs couches de spires, cette valeur n'est qu'approchée.

2.3.2. Modèle du moment magnétique ponctuel

2.3.2.1. Cas du solénoïde mono-couche

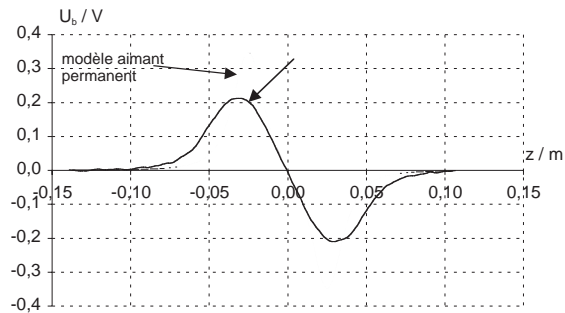
Connaissant M_{mag} , on peut confronter les courbes expérimentales donnant la tension et le flux aux courbes issues d'un modèle théorique simple, celui d'un aimant supposé ponctuel. En reprenant les calculs précédents le flux magnétique à travers la bobine vaut :

$$\Phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{bobine}} = \frac{\mu_0 n M_{mag}}{2} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] = \frac{\mu_0 n M_{mag}}{2} \left(\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + R^2}} \right)$$



Graph 4 : Comparaison du flux expérimental et théorique.

Comme le montre le graphique 4 l'accord n'est pas satisfaisant même si l'allure est correcte. Ce désaccord est encore plus net avec les courbes donnant la tension aux bornes de la bobine.



Graph 5 : Tension expérimentale et prévision théorique.

Là encore l'allure semble convenable mais on peut noter que le modèle de l'aimant ponctuel prévoit un double pic algébrique plus étroit mais plus élevé que les données expérimentales. Plusieurs explications sont possibles : soit il faut tenir compte de la «taille» de l'aimant et de l'épaisseur de la bobine ; soit l'écart entre les deux courbes provient des courants induits dans la masse métallique qui produisent un champ magnétique, lui aussi détecté par la bobine. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point.

2.3.2.2. Modèle de la bobine multicouche

Une cause de discordance possible entre la théorie et l'expérience réside dans l'épaisseur de la bobine. Avec ses 1200 spires, l'épaisseur de la couche bobinée n'est pas négligeable devant le rayon moyen. Pour calculer $\Phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{bobine}}$ il faut procéder à une intégration sur la variable de $R_1 = 15 \text{ mm}$ à $R_2 = 25 \text{ mm}$.

En notant que :

$$\Phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{bobine}} = \frac{\mu_0 M_{\text{mag}}}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + R^2}} \right) \frac{ndR}{R_2 - R_1}$$

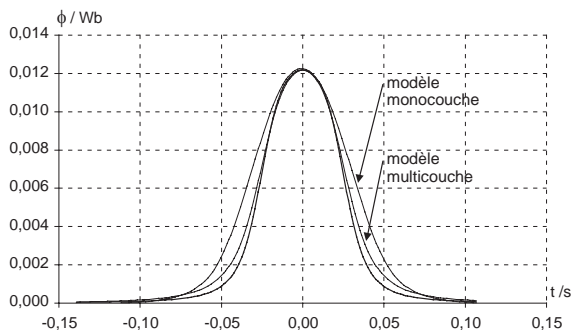
il vient :

$$\Phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{bobine}} = \frac{\mu_0 M_{\text{mag}}}{2} \frac{n}{R_2 - R_1} \left[\left(\frac{l}{2} - z \right) \ln \left(\frac{u_2 + \sqrt{u_2^2 + 1}}{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1}} \right) + \left(\frac{l}{2} + z \right) \ln \left(\frac{u_4 + \sqrt{u_4^2 + 1}}{u_3 + \sqrt{u_3^2 + 1}} \right) \right]$$

$$\text{avec :} \quad u_1 = \frac{R_1}{\frac{l}{2} - z} \quad ; \quad u_2 = \frac{R_2}{\frac{l}{2} - z} \quad ; \quad u_3 = \frac{R_1}{\frac{l}{2} + z} \quad ; \quad u_4 = \frac{R_2}{\frac{l}{2} + z}$$

$$\text{si } z \neq \pm \frac{l}{2} \text{ et avec } n = \frac{N}{l}.$$

Le graphe 6 compare le flux déduit des mesures aux deux modèles de bobine après réévaluation de M_{mag} . On constate certes une légère amélioration de la concordance, mais l'écart entre ces deux modèles théoriques et l'expérience reste important.



Graph 6 : Modèle mono et multicouche à comparer au flux expérimental.

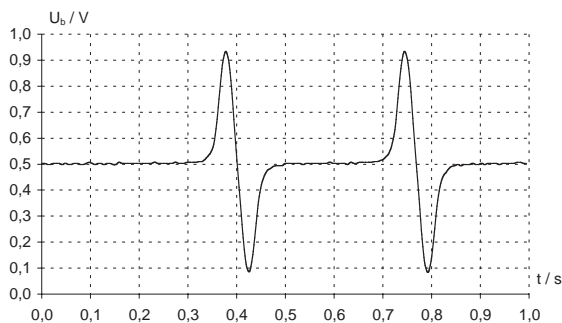
2.4. Mesure de la vitesse de l'aimant

2.4.1. Étalonnage avec deux bobines en série

Afin de déterminer la vitesse de l'aimant, on place deux bobines connectées en série et espacées de 28 cm. Le passage de l'aimant par l'une ou l'autre bobine se traduit par un pic de tension. La similitude de deux pics milite en faveur d'une vitesse constante de l'aimant dans le tube ; il est facile de modifier l'espacement des deux bobines et de constater que la durée séparant les deux passages par zéro de la tension est proportionnelle à la distance entre les deux centres des bobines. Dans le cas de l'aimant non lesté en mouvement dans un tube de diamètre 10 mm / 12 mm, la vitesse vaut :

$$\frac{0,28 \text{ m}}{0,768 \text{ s} - 0,401 \text{ s}} \cong 0,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

valeur très inférieure à celle d'une chute libre pour une hauteur de quelques décimètres.

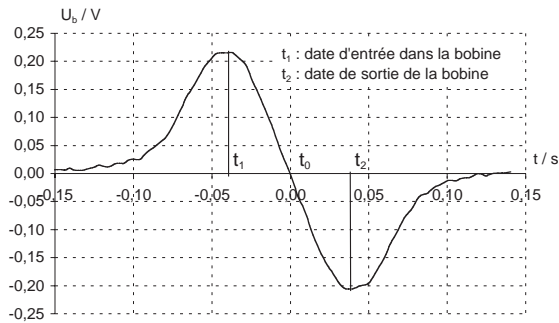


Graph 7 : Association de deux bobines en série.

2.4.2. A quelles positions correspondent les *extrema* de la tension induite ?

Notons t_1 la date du premier maximum, t_0 la date de passage par 0 et t_2 la date du minimum de la tension aux bornes de la bobine détectrice.

Les positions extrêmes de cette tension doivent correspondre à des positions données de l'aimant par rapport à la bobine, et ce indépendamment de la vitesse de chute. Intuitivement, t_1 correspond peu ou prou à l'entrée de l'aimant dans la bobine et t_2 à la sortie. La vitesse étant connue (*via* l'usage de deux bobines), on peut comparer les distances parcourues entre ces diverses dates et la longueur $l = 5$ cm de la bobine : on trouve $v(t_2 - t_0) \cong v(t_0 - t_1) = 3,0$ cm soit $v(t_2 - t_1) \cong 6,0$ cm $> l$. Comme on le voit la tension passe par son maximum légèrement avant l'entrée dans la bobine et par son minimum un peu après la sortie. Rappelons que le signe de la tension induite dépend aussi du sens d'introduction de l'aimant et du sens de branchement de la bobine. Par ailleurs il ne faut pas perdre de vue que la bobine détecte le champ magnétique total résultant de la superposition du champ de l'aimant et du champ créé par les courants induits.



Graphie 8 : Dates particulières pour la détermination de la vitesse.

2.5. Existence de courants de Foucault

Le déplacement de l'aimant s'accompagne de courants induits qui circulent dans la masse conductrice des tubes de cuivre. Dans le cadre de l'approximation dipolaire magnétique on peut calculer la densité de courant induite. Supposons l'aimant placé en O à la date $t = 0$, le potentiel vecteur \vec{A} créé en un point M repéré par les coordonnées cylindriques $\vec{OM}(r, \theta, z)$ vaut :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} M_{mag} \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

Ce vecteur est dirigé suivant :

$$\vec{e}_\theta, A_0 = \frac{\mu_0 M_{mag}}{4\pi} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

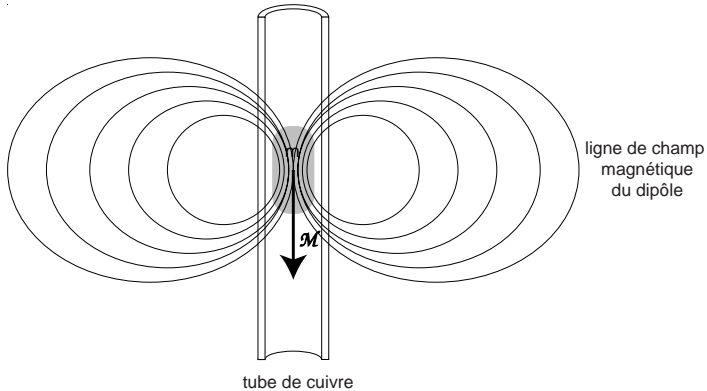
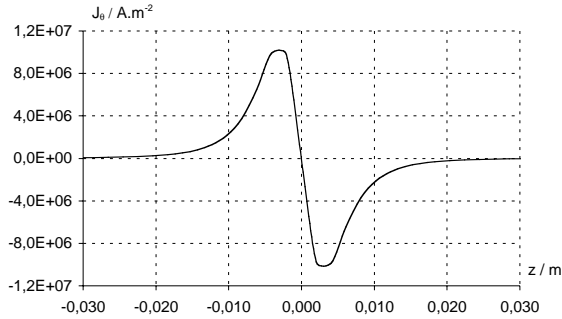


Figure 3 : Ligne de champ magnétique de l'aimant dans le tube.

La translation verticale de l'aimant induit une variation temporelle de \vec{A} en un point M donné via la relation $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 M_{mag}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{r}{(r^2 + (z - v_z t)^2)^{3/2}} \vec{e}_\theta$. La densité de courant s'en déduit en tenant compte de la conductivité $\gamma = 5,90 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ du cuivre, $j_\theta = -\frac{3 \gamma \mu_0 M_{mag}}{4\pi} \frac{r z}{[r^2 + z^2]^{5/2}} v_z$ à $t = 0$.

Précisons qu'à ce stade nous négligeons l'action des courants de Foucault sur eux-mêmes. En effet en un point M du cuivre, il y a superposition de deux champs magnétiques variables, celui créé par l'aimant et celui dû aux courants de Foucault. Nous ne retiendrons que la première contribution par la suite.



Graphe 9 : Densité de courant en fonction de la cote par rapport à l'aimant (pour $r = 6$ mm).

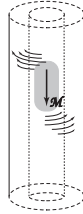


Figure 4

Cette relation appelle plusieurs remarques :

- la densité de courant s'annule dans le plan perpendiculaire au moment magnétique. C'est une fonction impaire de z , ce qui ne doit pas surprendre vu le caractère antisymétrique du plan $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ pour les courants, le moment magnétique étant un pseudovecteur ;
- elle est directement proportionnelle à la composante suivant z de la vitesse de l'aimant. On peut donc s'attendre à un champ magnétique induit lui aussi proportionnel à v_z ;
- le signe négatif découle de la loi de Lenz ;
- $|j_\theta|$ est maximale à r fixé pour $z = \frac{r}{2}$. Les courants induits circulent au voisinage de l'aimant comme le confirme le graphe 9. Ceci est probablement encore valable même en dehors de l'approximation dipolaire, ce qui explique la similitude des courbes de f.é.m induite avec ou sans tube de cuivre ;

- cette valeur maximale à r fixé vaut $|j_\theta|_{\max} = \frac{3\gamma\mu_0 M_{\text{mag}}}{8\pi} \left(\frac{4}{5}\right)^{5/2} v_z \frac{1}{r^3}$. Connaissant M_{mag} , on en tire la valeur numérique $j_{\theta_{\max}} \cong 8,2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ qui s'avère énorme. C'est l'ordre de grandeur de la densité de courant en alimentation EDF domestique (3 kW pour une section de $1,5 \text{ mm}^2$) ;
- on peut calculer par intégration l'intensité induite dans une section verticale du tube en se limitant par antisymétrie au domaine $z > 0$:

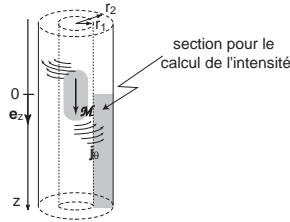


Figure 5

$$dI = j_\theta dr dz = - \frac{3\gamma\mu_0 M_{\text{mag}}}{4\pi} \frac{r z dr dz}{(r^2 + z^2)^{5/2}} v_z$$

Donc, en négligeant les effets de bords du tube,

$$I = \frac{3\gamma\mu_0 M_{\text{mag}} v_z}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \int_0^\infty \frac{u du}{(1 + u^2)^{5/2}} = - \frac{\gamma\mu_0 M_{\text{mag}} v_z}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

où $u = \frac{z}{r}$. Dans le cas de trois tubes emboîtés $d_1 = 12 \text{ mm}$ et $d_2 = 18 \text{ mm}$ l'intensité vaut

115 A. Même s'il faut nuancer ce résultat vu l'approximation dipolaire retenue, il ne fait pas de doute que l'intensité des courants de Foucault est très élevée !

3. CHUTE D'UN AIMANT LESTÉ

3.1. Protocole expérimental

Afin de modifier la vitesse de l'aimant lors du passage dans la bobine, on le relie à une masse M placée à l'extérieur du tube à l'aide d'un fil fin. Les courants induits dans le tube de cuivre par le mouvement de l'aimant ne dépendent pas de la valeur de cette masse auxiliaire. Admettons pour l'instant que l'interaction entre ces courants et l'aimant se traduise par une force de type «frottement fluide – $\vec{h}\nu$ ». Dans ce contexte,

on peut modifier le rapport $\frac{\text{force de freinage}}{(m + M)g}$, donc la vitesse par action sur M . La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'aimant lesté s'écrit :

$$(m + M) \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{h}v + (m + M) \vec{g}$$

Comme la force de freinage électromagnétique $-\vec{h}v$ ne s'exerce que sur l'aimant, la constante de temps $\tau = \frac{(m + M)}{h}$ du régime transitoire varie avec M , ainsi que la vitesse limite $v_{\infty} = \frac{(m + M)g}{h}$. On n'a donc pas intérêt à augmenter M de manière trop sensible, si on veut éviter que la force de freinage, qui apparaît sur la hauteur finie de chute, ne devienne négligeable devant le poids de l'ensemble et que l'auto-interaction des courants de Foucault ne devienne sensible : on prendra donc $0 \leq M \leq 100 \text{ g}$ pour $m \cong 7 \text{ g}$.

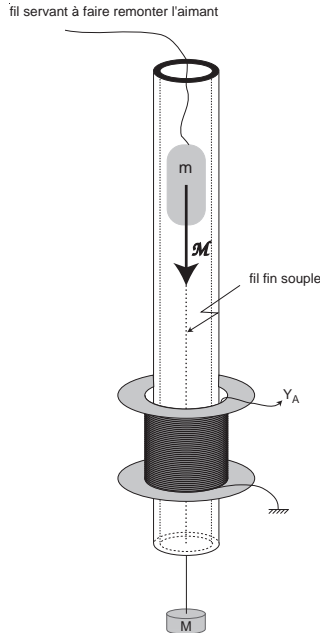
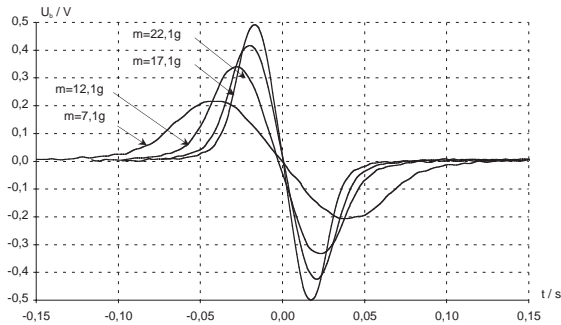


Figure 6

Pour diverses masses M , on obtient le faisceau de courbes suivant :



Graphe 10 : Influence de la masse M sur le pic de f.é.m induite.

3.2. Influence de la vitesse sur l'amplitude du pic de tension

On constate d'emblée que le pic de tension se rétrécit à la base mais augmente en amplitude lorsque la vitesse augmente. Cette dernière est déterminée par la lecture graphique des deux dates t_1 et t_2 . Comparons pour chaque pic la valeur maximale $U_{\max} > 0$ à $U_{\min} < 0$ en fonction de la masse $M + m$, donc de la vitesse v :

$M + m$ (en g)	U_{\max} (en V)	U_{\min} (en V)	vitesse v (m.s ⁻¹)	$\frac{U_{\max} - U_{\min}}{2v}$
7,1	0,216	- 0,208	0,76	0,278
12,1	0,340	- 0,331	1,19	0,281
17,1	0,418	- 0,421	1,51	0,278
22,1	0,506	- 0,498	1,87	0,268
27,1	0,557	- 0,564	2,00	0,280

Tableau 1

La dernière colonne donnant le rapport de l'amplitude crête à crête du double pic de tension sur la vitesse de l'aimant lors du passage dans la bobine, montre clairement que l'amplitude est proportionnelle à la vitesse. Cette dépendance est une conséquence directe de la relation entre la dérivée temporelle du potentiel vecteur $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et la vitesse de l'aimant. En effet d'après le paragraphe 2.5, on a en un point de la bobine :

$$\frac{\partial A_{\theta}}{\partial t} = \frac{3\mu_0 M_{mag}}{4\pi} \frac{rz}{[r^2 + z^2]^{5/2}} v_z \Rightarrow \int_{Bobine} \vec{E} \cdot d\vec{l} \propto v_z$$

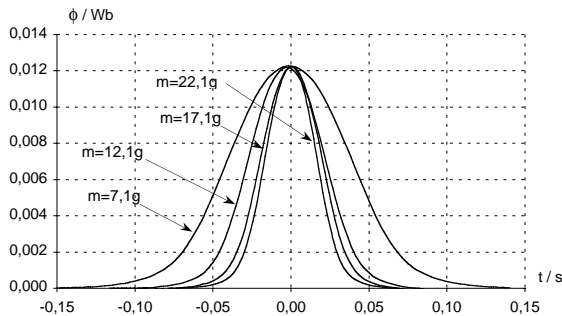
De manière plus explicite, la tension mesurée vaut $u = -e = \frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot v_z$; ϕ étant le flux du champ magnétique de l'aimant à travers la bobine, et v_z la vitesse de l'aimant. Cette tension est maximale pour $\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0$ soit aux points d'inflexion de la fonction $\phi(z)$

qui correspondent à l'entrée et à la sortie de la bobine. De plus $\left| \frac{d\phi}{dz} \right|_{\text{entrée ou sortie}}$ est un

facteur géométrique indépendant de la vitesse de l'aimant. On confirme ainsi le résultat expérimental étudié au § 2.4.2. Nous venons donc de montrer qu'une bobine est un capteur de vitesse, l'amplitude du pic donne directement une image de la vitesse.

3.3. Comparaison des flux

Lorsque l'aimant se trouve au centre de la bobine de détection, le flux est maximal, mais sa valeur ne dépend que de la position relative aimant / bobine et non de la vitesse de l'aimant ce qu'explique le graphe ci-dessous.



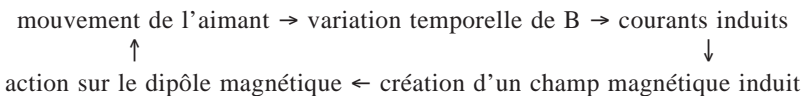
Graph 11 : Comparaison des flux magnétiques pour diverses vitesses.

4.4. Nature du mouvement de l'aimant dans le tube

4.4.1. Interaction entre l'aimant et les courants de Foucault

4.4.1.1. L'aimant se trouve dans un champ magnétique inhomogène

Les courants de Foucault freinent l'aimant suivant l'enchaînement causal ci-dessous :



Rappelons que nous négligeons «l'auto-interaction» des courants de Foucault.

Pour traduire ceci quantitativement, il faut calculer le gradient longitudinal (suivant l'axe Oz) du champ magnétique créé par les courants induits. A l'instant considéré, l'aimant se trouve en O , le champ magnétique B_{ind} est suivant l'axe Oz et soit un point M d'abscisse Z placé sur l'axe. L'élément de volume centré sur le point $P(r, \phi, z)$ est parcouru par une densité de courant à $t = 0$:

$$j_{\theta} = - \frac{3\mu_0 M_{mag}}{4\pi} \frac{rz}{[r^2 + z^2]^{5/2}} v_z$$

D'après la loi de Biot et Savart, la contribution de cet élément de volume à la composante B_{ind_z} vaut :

$$d^3 B_{ind_z} = \frac{\mu_0 j_{\theta}}{4\pi} \frac{rd\theta dr dz}{(r^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} (\vec{e}_{\theta} \wedge (-r\vec{e}_r + (Z - z)\vec{e}_z)) \cdot \vec{e}_z$$

Après simplification, il reste :

$$d^3 B_{ind_z} = \frac{\mu_0 j_{\theta}}{4\pi} \frac{r^2 d\theta dr dz}{(r^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu_0 M_{mag} v_z}{4\pi} \frac{r^3 d\theta dr dz}{[r^2 + z^2]^{5/2} [r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}}$$

La contribution au gradient longitudinal est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 B_{ind_z}}{dZ} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu_0 M_{mag} v_z r^3 d\theta dr dz}{4\pi [r^2 + z^2]^{5/2}} \frac{d}{dZ} \left(\frac{1}{[r^2 + (Z - z)^2]^{3/2}} \right) \\ \frac{d^4 B_{ind_z}}{dZ} &= + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{9\mu_0 M_{mag} v_z r^3 d\theta dr dz}{4\pi [r^2 + z^2]^{5/2}} \frac{(Z - z)}{[r^2 + (Z - z)^2]^{5/2}} \\ \Rightarrow \left. \frac{d^4 B_{ind_z}}{dZ} \right|_{Z=0} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{9\mu_0 M_{mag} v_z r^3 d\theta dr dz}{4\pi [r^2 + z^2]^5} \end{aligned}$$

L'intégration sur les trois variables donne :

$$\left. \frac{dB_{ind_z}}{dZ} \right|_{Z=0} = - \frac{9\mu_0^2 M_{mag} v_z}{8\pi} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^4} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1 + u^2)^5} \right)$$

avec $u = \frac{z}{r}$ et en négligeant toujours les effets de bords du tube. En notant J l'intégrale sur u on obtient finalement :

$$\left. \frac{dB_{ind_z}}{dZ} \right|_{Z=0} = - \frac{3\mu_0^2 M_{mag} v_z}{8\pi} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) J$$

De manière générale, un dipôle magnétique se trouvant dans un gradient de champ magnétique est soumis à une force dont la composante sur \vec{e}_z s'écrit :

$$F_z = M_{mag} \left. \frac{dB_{ind_z}}{dZ} \right|_{Z=0} = - \frac{3\mu_0^2 M_{mag}^2 v_z}{8\pi} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \times J$$

Cette force est bien du type frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$. On peut donc dire que l'aimant, supposé ponctuel se trouve dans une zone de champ magnétique nul, mais de gradient de champ important.

En conséquence comme le champ magnétique créé par les courants de Foucault est nul en O , on peut penser que l'aimantation du matériau magnétique ne sera presque pas modifiée, donc il n'y aura pas de pertes par hystérésis. De plus, ce matériau étant conducteur, comme $j_0 = 0$ pour $z = 0$, les courants de Foucault dans l'aimant lui-même seront négligeables. On ne considérera donc pas par la suite d'autres transferts d'énergie mécanique que celui dû aux pertes par courants de Foucault dans le tube.

3.4.1.2. Analyse énergétique

Comme c'est souvent le cas des considérations énergétiques permettent d'obtenir ce résultat beaucoup plus rapidement. Après un régime transitoire, la vitesse de l'aimant devient constante. L'énergie de l'ensemble aimant + tube varie entre deux instants voisins t et $t + dt$ sous l'action d'un transfert thermique (l'effet Joule) et d'une variation d'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgz$ (la verticale est descendante). On peut donc écrire $dE_p = -P_{Joule} dt$ en l'absence d'autres transferts énergétiques, soit :

$$mg \frac{dz}{dt} = P_{joule} \Rightarrow mgv_z = \iiint_{conducteur} \frac{\vec{j}^2}{\gamma} dV$$

En explicitant la densité de courant il vient :

$$mg = v_z \iiint_{\text{conducteur}} \frac{9\mu_0^2 M_{\text{mag}}^2 r^3 dz^2 d\theta}{(4\pi)^2 (r^2 + z^2)^5} = v_z \frac{3\mu_0^2 M_{\text{mag}}^2}{8\pi} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \times J$$

3.4.1.3. Valeur numérique de la constante de freinage h

Procédons à l'évaluation de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^5}$ en introduisant la suite

$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n}$. On voit que $J = J_4 - J_5$. Une intégration par parties donne :

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} \times 1 du = \left[\frac{1}{(1+u^2)^n} \times u \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2nu}{(1+u^2)^{n+1}} \times u du = 2n (J_n - J_{n+1})$$

d'où la formule de récurrence $J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n$ permettant de calculer J_n à partir de

$J_1 = [\arctan u]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$. Il vient $J_4 = \frac{5\pi}{16}$, $J_5 = \frac{35\pi}{128}$, $J = \frac{5\pi}{128} \cong 0,123$ et finalement :

$$h = \frac{3\mu_0^2 M_{\text{mag}}^2}{8\pi} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \times I$$

soit $h \cong 0,50 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ pour un tube 12 mm / 14 mm.

3.4.1.4. Interaction des courants de Foucault sur eux-mêmes

Le schéma causal explicité plus haut est à la base d'une méthode itérative de calcul du champ magnétique et des courants de Foucault, sous forme de séries : pour les courants, les termes d'auto-interaction sont ceux que donne la deuxième itération et les suivantes. Cherchons un critère adimensionnel qui permette de savoir s'il est valide d'approximer les expressions des champs et des courants en les tronquant à leurs premiers termes. Le passage des termes d'ordre n à ceux d'ordre $n+1$ des développements

en série de \vec{B} et \vec{j} peut se schématiser par $B_n \rightarrow j_n$ tel que $\vec{\text{rot}} (\vec{j}_n) = -\gamma \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} \rightarrow B_{n+1}$

tel que $\vec{\text{rot}} \vec{B}_{n+1} = \mu_0 \vec{j}_n$.

On en tire, par analyse dimensionnelle l'ordre de grandeur de j_n en considérant une boucle circulaire centrée sur l'axe du tube : $j_n \sim \gamma B_n \frac{\mathcal{L}}{T}$, où la longueur caractéristique \mathcal{L} est de l'ordre du rayon du tube et le temps caractéristique T est de l'ordre de $\frac{r_1}{v_z}$.

A l'ordre d'itération suivant le champ B_{n+1} créé par le courant j_n peut être estimé à $B_{n+1} \sim \mu_0 j_n L'$ en intégrant la relation de Maxwell-Ampère sur un rectangle placé dans un plan contenant l'axe entre r_1 et r_2 , d'où $L' \sim \Delta r \rightarrow B_{n+1} \sim \mu_0 j_n \Delta r$, $\Delta r = r_2 - r_1$ étant l'épaisseur de la coquille cylindrique.

On en tire la correction relative qu'apporte une itération :

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \sim \frac{j_{n+1}}{j_n} \sim \mu_0 \gamma \frac{\mathcal{L} L'}{T} \sim \mu_0 \gamma \Delta r v_z$$

Lorsque la vitesse devient trop importante, on ne peut pas s'arrêter au premier terme de cette série. Si la f.é.m d'induction due au champ de l'aimant mobile est évidemment une fonction linéaire de v_z , il n'en est plus de même pour celle due au champ créé par les courants de Foucault (termes d'ordre supérieur). La vitesse critique à ne pas dépasser afin de rester dans le domaine «linéaire» pour la relation f.é.m / vitesse est donc de l'ordre de $v_{critique} \cong \frac{1}{\mu_0 \gamma \Delta r}$. Pour un tube 12-14 mm (épaisseur 1 mm), on a $v_{critique} = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, cette limite tombe à $4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour trois tubes emboîtés. On peut vérifier que toutes les expériences décrites dans ces deux articles respectent cette limite à 15 % près.

4.4.2. Force de freinage en $-\hbar\vec{v}$: vérification expérimentale

Les enregistrements précédents (cf. § 2.2.) permettent de tester l'hypothèse d'une force de freinage en $-\hbar\vec{v}$ en étudiant la fonction $v = g(M)$ donnant la vitesse pour une hauteur de chute L en fonction de M . Lorsque l'aimant tombe seul ($M = 0$), la vitesse limite v_∞ est largement atteinte pour peu que l'on ne place pas la bobine de détection trop près de l'extrémité supérieure du tube. Cette vitesse limite étant proportionnelle à la masse totale $(m + M)$, on peut exploiter cette première mesure pour calculer les autres vitesses limites par la relation $v_\infty(M) = v_\infty(m) \frac{(m + M)}{m}$. Le centre de la bobine étant à

la distance L du départ de la chute freinée, la résolution de l'équation différentielle donne :

$$(m + M) \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{h}v + (m + M) \vec{g}$$

donne :

$$v = v_{\infty}(M) \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

avec :

$$\tau = \frac{m + M}{h}$$

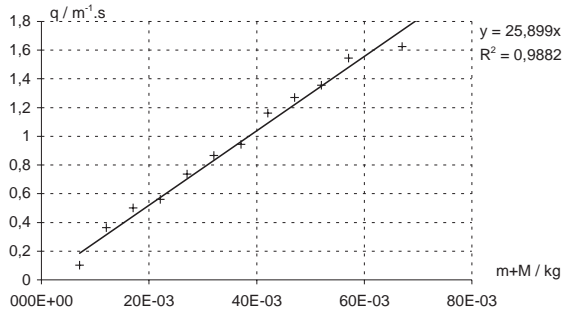
puis :

$$z = v_{\infty} t - v_{\infty} \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

si on considère la verticale descendante. Il en résulte que $L = \tau \left(v_{\infty} \ln \left(\frac{v_{\infty}}{v_{\infty} - v} \right) - v \right)$

Dans le cadre de ce modèle la représentation de la quantité $q = \frac{1}{v_{\infty} \ln \left(\frac{v_{\infty}}{v_{\infty} - v} \right) - v}$ en

fonction de $M + m$ doit donner une droite.



Graphie 12 : Droite de régression pour la détermination de h .

Ce graphe réalisé avec une série de douze valeurs de M valide pleinement ce modèle. Par ailleurs la pente de $26 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ vaut théoriquement $\frac{1}{hL}$ ce qui donne la

valeur $0,096 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la constante h . Cette valeur est à rapprocher d'une estimation basée sur la première vitesse (cf. graphe 1) :

$$h_{\text{exp}} = \frac{mg}{v} \cong \frac{0,0071 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \cong 0,090 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

La valeur expérimentale s'écarte notablement de la valeur théorique :

$$h_{\text{théo}} \cong 0,50 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'erreur d'un facteur 5,7 montre que nous avons négligé un aspect physique important que l'on peut rechercher dans les limites du modèle du moment magnétique ponctuel et de l'approximation dipolaire.

3.4.3. Vers une amélioration du modèle

Pour tenir compte de la taille de l'aimant (20 mm), répartissons le moment magnétique total sur cinq aimants identiques espacés de 5 mm.

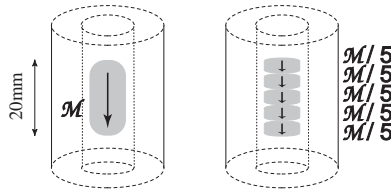
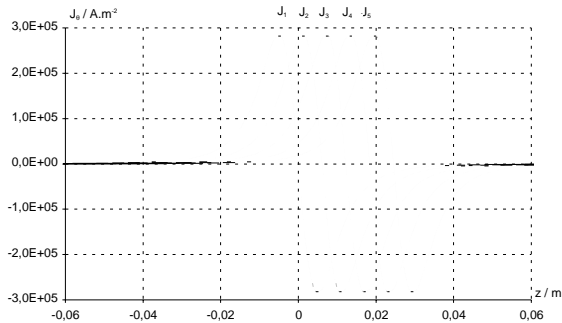


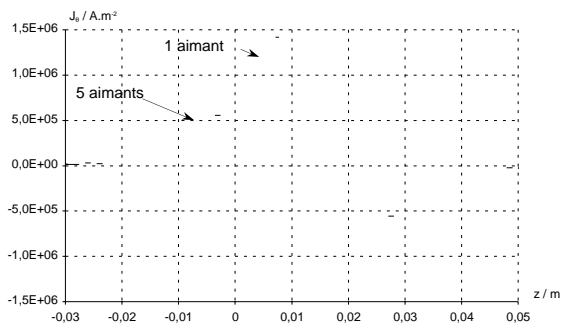
Figure 7 : Un modèle d'aimant non ponctuel.

Pour chaque aimant, on considère l'approximation dipolaire comme satisfaisante.



Graphique 13 : Contribution de chaque aimant en fonction de z

En un point du métal les diverses contributions algébriques à la densité de courant totale s'additionnent vu le caractère orthoradial de chacune d'entre elles. Le graphe 14 montre bien quel est le «moteur physique» de la surévaluation de h . Pour un aimant unique la densité de courant est cinq fois la valeur représentée tandis que pour la répartition en cinq aimants, il y a compensation partielle des diverses contributions algébriques. Comparons alors la densité de courant totale à celle de l'aimant central multiplié par cinq.

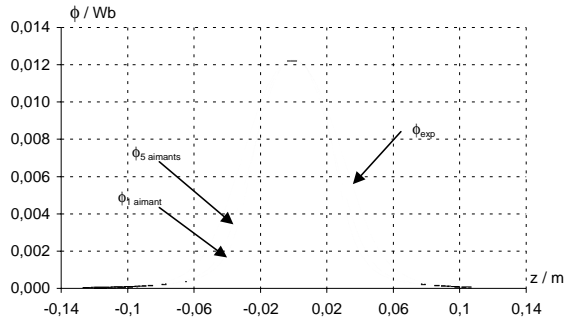


Graphe 14 : Densité de courant pour un aimant et pour une répartition de cinq aimants.

Ce phénomène de compensation apparaît clairement sur ce graphe. Pour bien s'en convaincre, on peut d'ailleurs pousser ce modèle plus loin en calculant le rapport des intégrales du carré de cette densité de courant (effet Joule) sur l'ensemble du phénomène : on trouve un rapport de 4,7. Nous retrouvons donc bien le facteur d'erreur sur h vu plus haut. Certains auteurs ont d'ailleurs montré, en se basant sur une approche différente de celle qui vient d'être décrite, que l'on pouvait retrouver la forme du signal détectée par la bobine en tenant compte de la répartition volumique de l'aimant [1]. Par ailleurs, la tension induite par ce modèle de cinq aimants peut être utilement comparé à la tension induite lors de la chute d'un solénoïde [2].

3.4.4. Que détecte vraiment la bobine ?

Au § 2.4. nous avons laissé en suspens le problème de l'origine du désaccord entre l'expérience et le modèle de l'aimant ponctuel. Vu le succès du modèle d'un aimant réparti en cinq moments magnétiques ponctuels, on peut appliquer ce second modèle au calcul du flux total à travers la bobine du champ magnétique créé par les cinq aimants supposés ponctuels.



Graph 15 : Comparaison flux expérimental / flux théorique pour les deux modèles.

L'amélioration est à peine sensible lors du passage d'un modèle à l'autre. En conséquence, la bobine détecte à la fois le champ magnétique de l'aimant et celui créé par les courants de Foucault qui circulent dans le tube de manière orthoradiale.

Cette expérience très simple à réaliser permet une étude quantitative fiable pour mettre en évidence les phénomènes fondamentaux du freinage électromagnétique liés aux courants de Foucault. Un second article détaille des exploitations possible au niveau du lycée de cette expérience pour la mise en évidence de la non-conservation de l'énergie mécanique et l'étude dynamique de la chute de l'aimant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Cyrus MACCLATCHY, Philip BACKMAN et Larry BOGAN, «A quantitative magnetic braking experiment», Am. J. Phys., **61** (12), december 1993.
- [2] L. BASANO, P. OTTOLOONNO et C. PONTIGGIA, «The magnet-solenoid equivalence : A modern experiment using a personal computer», Am. J. Phys., **56** (6), june 1988.