

# À propos de la précession des équinoxes

par **Christophe CAPPE**

Lycée Augustin Thierry - 41000 Blois

tof\_cappe@yahoo.fr

## RÉSUMÉ

*On se propose dans cet article de présenter le phénomène de précession des équinoxes. Après une brève description des travaux du grand astronome grec HIPPARQUE DE NICÉE, on décrit la manière vraisemblable avec laquelle il a découvert ce phénomène. Après avoir démontré que les actions d'origine luni-solaire sur le bourrelet équatorial de la Terre en sont la cause, on présente quelques conséquences du phénomène, de la différence entre l'année sidérale et l'année tropique à la différence entre les signes du zodiaque et les constellations du même nom.*

## INTRODUCTION

Nous avons tous un jour observé le ciel nocturne sans l'ombre d'un nuage, parsemé d'une myriade d'étoiles, et sans nul doute constaté que ces dernières semblaient entraînées dans un ballet incessant, tournant toutes dans le même sens autour d'un axe imaginaire pointant vers l'une d'entre elles, l'étoile Polaire. Et le même spectacle se répète chaque nuit, simplement rythmé au fil des saisons par le coucher ou le lever d'un certain nombre d'astres, l'étoile Polaire gardant quant à elle une place indéfectible au milieu de la ronde.

Nous savons, grâce à de nombreux écrits qui nous sont parvenus, que les plus anciennes civilisations, des Babyloniens aux Égyptiens, scrutaient déjà il y a près de quatre mille ans le ciel auquel elles attribuaient un caractère sacré, les phénomènes célestes réglant tout le rituel de leur vie quotidienne. Mais ces peuples observaient-ils le même ciel que leurs descendants actuels ? Les étoiles semblaient-elles aussi tourner au cours de la nuit autour de l'étoile Polaire ? Si les positions relatives des étoiles n'ont guère varié au cours des siècles, notre étoile Polaire, en revanche, n'avait pas à l'époque la place centrale que nous lui connaissons aujourd'hui. Car un phénomène, découvert très tôt par les Anciens et appelé précession des équinoxes, affecte en fait en permanence la position du centre de la ronde céleste. L'objet de l'article est de comprendre l'origine de ce phénomène et d'en présenter quelques conséquences.

Rappelons auparavant un certain nombre de termes propres à l'astronomie de position (cf. figure 1). En observant le ciel, nous paraissions être au centre d'une voûte sphérique sur laquelle semblent se déplacer les étoiles. Cette sphère imaginaire, dont le centre

coïncide avec le centre  $O$  de la Terre, est appelée sphère céleste. Les deux points d'intersection  $P$  et  $P'$  de la sphère céleste avec l'axe de rotation terrestre, diamétralement opposés, sont les pôles célestes. L'intersection du plan de l'équateur terrestre avec la sphère céleste est un cercle appelé équateur céleste. L'intersection du plan de l'orbite terrestre avec la sphère céleste définit un autre cercle, appelé écliptique. Ces deux cercles se coupent en deux points : le point vernal, noté  $\gamma$ , correspondant à la position du Soleil sur la sphère céleste au moment de l'équinoxe de printemps, et le point qui lui est diamétralement opposé, noté ici  $\gamma'$ , correspondant à la position du Soleil sur la sphère céleste à l'équinoxe d'automne. Enfin, l'angle  $\varepsilon$  que fait le plan de l'écliptique avec le plan de l'équateur céleste est l'obliquité de l'écliptique. Cet angle vaut actuellement en moyenne  $23^{\circ}26'$ .

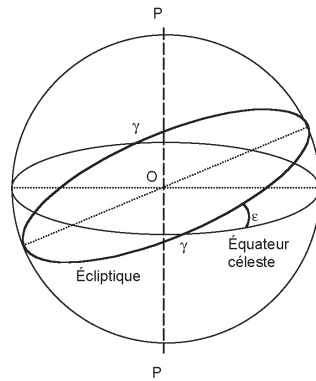


Figure 1 : La sphère céleste.

Nous utiliserons par ailleurs deux systèmes de coordonnées pour repérer la position d'une étoile quelconque sur la sphère céleste, systèmes que nous supposerons géocentriques, c'est-à-dire que chaque référentiel auquel ils sont associés a pour origine le centre  $O$  de la Terre.

Une étoile peut être repérée par ses coordonnées équatoriales constituées de son ascension droite  $\alpha$  et de sa déclinaison  $\delta$  (cf. figure 2). Le plan fondamental est le plan de l'équateur céleste. L'ascension droite est comprise entre 0 et 24 h dans le sens direct<sup>(1)</sup> dans le plan de l'équateur céleste à partir du point vernal  $\gamma$ . La déclinaison est comprise entre  $-90^{\circ}$  (pôle céleste Sud) et  $+90^{\circ}$  (pôle céleste Nord).

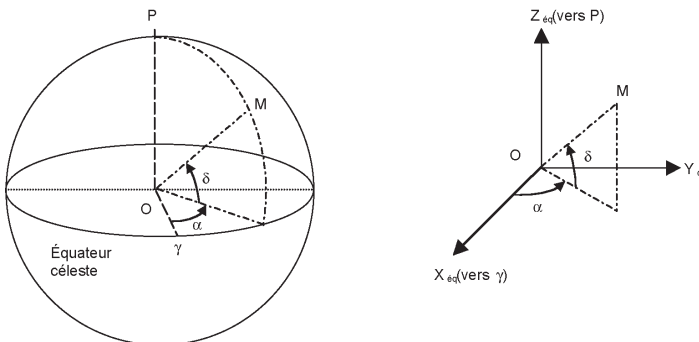


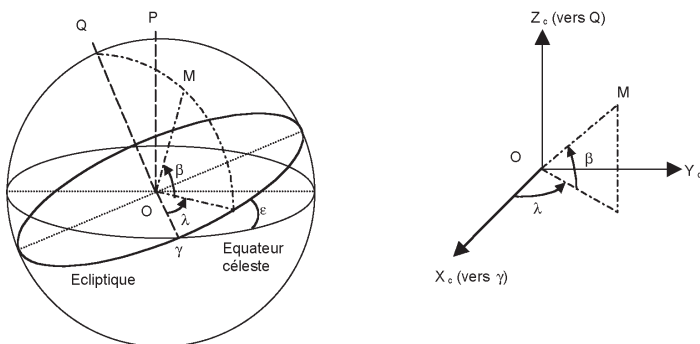
Figure 2 : Définition des coordonnées équatoriales d'un astre situé en  $M$  sur la sphère céleste.

(1) Le sens direct est le sens trigonométrique, dit vers l'est, alors que le sens inverse ou sens rétrograde est le sens des aiguilles d'une montre, dit vers l'ouest.

Dans le référentiel  $R_{eq}(O, X_{eq}, Y_{eq}, Z_{eq})$  permettant de définir les coordonnées équatoriales, nous avons pour toute étoile située en M à une distance D du centre O de la Terre :

$$\vec{D} = \vec{OM} = \begin{vmatrix} X_{eq} \\ Y_{eq} \\ Z_{eq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\delta \times D \\ \sin\alpha\cos\delta \times D \\ \sin\delta \times D \end{vmatrix}$$

Une étoile peut aussi être repérée par ses coordonnées écliptiques constituées de sa longitude écliptique  $\lambda$  et de sa latitude écliptique  $\beta$  (cf. figure 3). Le plan fondamental est le plan de l'écliptique. La longitude écliptique est comprise entre 0 et 360° dans le sens direct dans le plan de l'écliptique à partir du point vernal  $\gamma$ . La latitude écliptique est comprise entre  $-90^\circ$  (pôle écliptique Sud) et  $+90^\circ$  (pôle écliptique Nord, noté Q sur la figure 3).



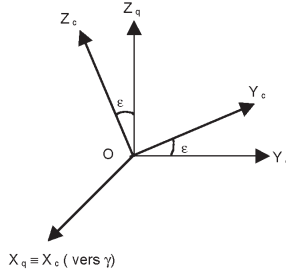
**Figure 3 :** Définition des coordonnées écliptiques d'un astre situé en M sur la sphère céleste.

Dans le référentiel  $R_{ec}(O, X_{ec}, Y_{ec}, Z_{ec})$  permettant de définir les coordonnées écliptiques, nous avons pour toute étoile située en M à une distance D du centre O de la Terre :

$$\vec{D} = \vec{OM} = \begin{vmatrix} X_{ec} \\ Y_{ec} \\ Z_{ec} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda\cos\beta \times D \\ \sin\lambda\cos\beta \times D \\ \sin\beta \times D \end{vmatrix}$$

Nous pouvons facilement passer d'un système de coordonnées à l'autre (cf. figure 4), par exemple [12, p. 1565] :

$$\begin{pmatrix} X_{ec} \\ Y_c \\ Z_{ec} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \times D \\ \sin\alpha\cos\delta \times D \\ \sin\delta \times D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \times D \\ (\cos\beta\sin\lambda\cos\epsilon - \sin\beta\sin\epsilon) \times D \\ (\cos\beta\sin\lambda\sin\epsilon + \sin\beta\cos\epsilon) \times D \end{pmatrix}$$



**Figure 4 :** Passage d'un système de coordonnées à l'autre.

**HIPPARQUE DE NICÉE  
ET LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES**

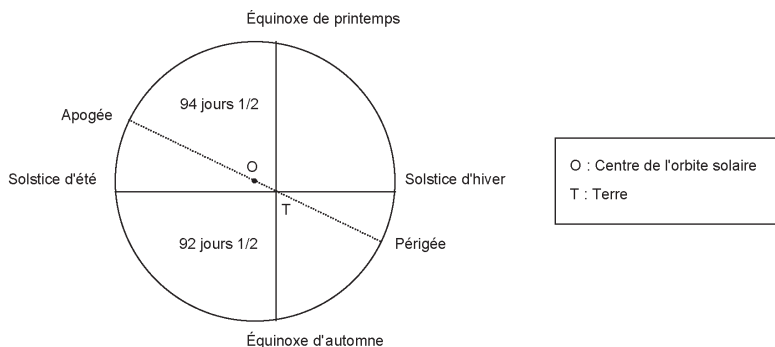
## 1. LE PLUS GRAND ASTRONOME GREC OBSERVATEUR

Tout ce que nous connaissons d'HIPPARQUE, nous les devons à l'*Almageste*, traduction arabe du *Mathematike Syntaxis*, le monumental traité de Claude PTOLÉMÉE d'Alexandrie, de deux siècles et demi son contemporain, qui marqua le couronnement de l'astronomie grecque antique. Considéré comme le plus grand astronome grec observateur, HIPPARQUE serait l'auteur d'une douzaine au moins d'ouvrages, mais le seul texte original qui nous soit parvenu est un commentaire d'un poème d'ARATOS à propos des travaux astronomiques d'EUDOXE.

Né à Nicée en Bithynie au nord-ouest de l'Asie Mineure (actuellement dans la province de Bursa en Turquie), HIPPARQUE semble avoir passé une majeure partie de sa vie sur l'île de Rhodes. PTOLÉMÉE lui attribue des observations entre 147 et 127 avant J.-C.

HIPPARQUE, à partir d'observations aux solstices et aux équinoxes, confirme l'inégalité des saisons déjà connue des astronomes Chaldéens (un peuple de Babylonie) et trouve une durée de 94 jours et demi pour le printemps et 92 jours et demi pour l'été. Pour expliquer cette inégalité et décrire ainsi avec précision le mouvement apparent du Soleil, HIPPARQUE utilise le modèle d'excentrique fixe, introduit quelques dizaines d'années auparavant par APOLLONIUS, célèbre mathématicien de l'école Alexandrine. Dans ce modèle (cf. figure 5), le Soleil se déplace le long de la circonférence d'un cercle dont le centre est à une certaine distance de la Terre, distance, appelée « excentricité » que HIPPARQUE

estime à  $1/24$  du rayon de l'orbite solaire, la direction de l'apogée étant à  $5^{\circ}30'$  dans la constellation des gémeaux.



**Figure 5 :** Modèle de l'excentricité fixe.

HIPPARQUE établit également une théorie du mouvement de la Lune, calculant avec une très grande précision les différents mois. Il trouve par exemple un mois synodique (durée moyenne séparant deux nouvelles Lunes consécutives) de 29 j 12 h 44 mn 24 s contre 29 j 12 h 44 mn 2,8 s, valeur actuellement retenue [1, p. 49]. Mais selon PTOLÉMÉE, qui s'y attarde longuement dans l'*Almageste*, son modèle pour rendre compte du déplacement de la Lune dans le ciel ne s'accordait avec la réalité qu'au moment de la nouvelle Lune et de la pleine Lune. Quoiqu'il en soit, HIPPARQUE fait ainsi passer petit à petit l'astronomie grecque d'une science descriptive à une science prédictive.

D'après l'*Histoire naturelle*, une vaste compilation de Pline l'Ancien, ce serait la découverte d'une nouvelle étoile, dans la constellation du Scorpion, en 135 avant J.-C., qui va inciter HIPPARQUE à mesurer les coordonnées écliptiques d'environ huit cent cinquante étoiles, afin de vérifier « si les étoiles que nous considérons comme fixes sont en mouvement ». Les étoiles sont en outre classées en six familles ou grandeurs, selon leur éclat apparent, les étoiles de première grandeur étant les plus brillantes et celles de sixième grandeur à peine perceptibles à l'œil nu. Ainsi apparaît en 129 avant J.-C. le premier catalogue d'étoiles, le premier de son genre, complété à un peu plus de mille étoiles par PTOLÉMÉE et qui servira de référence jusqu'à la fin du  $x^e$  siècle, jusqu'à ce que l'astronome arabe AL-SUFI en fasse une révision complète.

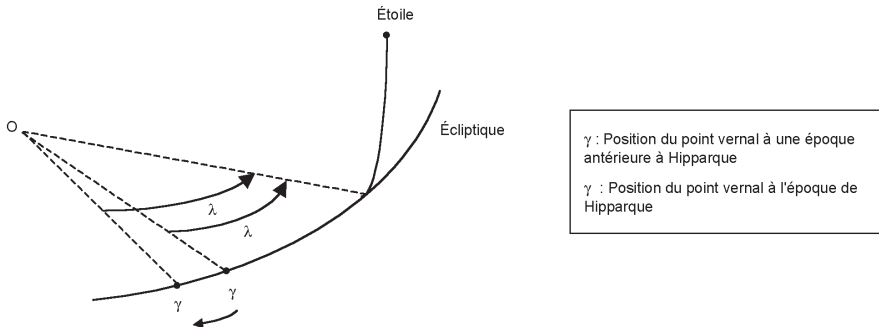
## 2. UNE DÉCOUVERTE MAJEURE

La réalisation de ce catalogue d'étoiles va permettre à HIPPARQUE de faire la découverte qui immortalisera son nom, une découverte majeure pour l'astronomie de précision qui suivra, celle de la précession des équinoxes.

Il y a dans la constellation de la vierge une étoile brillante, proche du plan de l'écliptique, l'étoile Spica (« l'épi » en latin), qui symbolise l'épi de blé tenu par la Vierge. Lors

d'une éclipse de Lune, alors que le Soleil est proche de l'équinoxe de printemps, HIPPARQUE mesure la position de Spica par rapport au centre de l'ombre terrestre (milieu de l'éclipse). Comme ce point est diamétralement opposé au Soleil, il peut en déduire la différence de longitude<sup>(2)</sup> entre Spica et le Soleil et donc finalement la longitude de Spica connaissant celle du Soleil. HIPPARQUE constate que Spica précède le point équinoxial d'automne de  $6^\circ$  (c'est-à-dire  $6^\circ$  mesuré vers l'ouest), soit une longitude comptée à partir du point vernal de  $180^\circ - 6^\circ = 174^\circ$ . Or, environ cent soixante ans auparavant, TIMOCHARIS avait trouvé que Spica précédait le point équinoxial de  $8^\circ$ , soit une longitude de  $172^\circ$ .

Pendant toute cette période, l'étoile pouvait donc s'être déplacée de  $2^\circ$  vers l'est par rapport au point vernal, ou bien le point vernal s'était déplacé de  $2^\circ$  vers l'ouest par rapport à l'étoile. En renouvelant la mesure sur des étoiles dont il avait réussi à obtenir des observations antérieures, HIPPARQUE confirme une augmentation générale de la longitude des étoiles et conclut alors à un mouvement rétrograde, c'est-à-dire un déplacement de l'est vers l'ouest, des points équinoxiaux (cf. figure 6). Dans l'hypothèse de l'immobilité de la Terre prônée par ARISTOTE, HIPPARQUE interprète ce déplacement par un mouvement annuel de la sphère céleste autour des pôles de l'écliptique, mouvement contraire à celui qui l'entraîne quotidiennement de l'ouest vers l'est. Ce déplacement est une des conséquences de ce que nous appelons aujourd'hui le phénomène de précession des équinoxes, ainsi nommé, car dans son mouvement apparent annuel d'ouest en est, le retour du Soleil à l'un des équinoxes précède son retour à sa position d'origine par rapport aux étoiles : les équinoxes se produisent donc en avance.



**Figure 6 :** La longitude  $\lambda$  de l'étoile à une époque antérieure à HIPPARQUE est inférieure à sa longitude  $\lambda'$  à l'époque de HIPPARQUE du fait du mouvement de l'est vers l'ouest du point vernal.

Selon PTOLÉMÉE, en admettant un mouvement uniforme, HIPPARQUE aurait considéré un déplacement de  $1^\circ$  tous les cent ans, soit  $36''$  par an. Il semble toutefois que cette valeur ne soit qu'une limite inférieure, tirée de son *Traité sur la grandeur de l'année* qui précède son *Traité du déplacement des points tropiques et équinoxiaux*, dans lequel il s'est probablement davantage rapproché de la valeur actuellement retenue de  $50''$  par an

(2) Pour alléger l'écriture, la longitude écliptique et la latitude écliptique seront ici simplement appelées longitude et latitude.

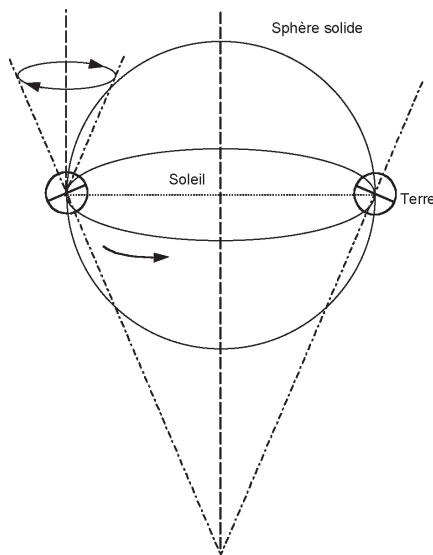
environ. Remarquons d'ailleurs, qu'en admettant cent soixante ans entre les observations d'HIPPARQUE et celles de TIMOCHARIS, nous arrivons à un déplacement de 45'' par an. Alors pourquoi cette limite de 36'' par an est si inférieure à la vérité ? Cela tient certainement au fait qu'HIPPARQUE a légèrement surestimé la durée de l'année tropique<sup>(3)</sup>, donc considéré un mouvement moyen du Soleil trop lent et par conséquent une longitude du Soleil trop faible. PTOLÉMÉE a finalement eu le tort d'admettre comme définitive la valeur de 36'' par an, trop confiant dans la durée de l'année tropique assignée par HIPPARQUE.

## INTERPRÉTATION DU PHÉNOMÈNE DE PRÉCESSION DES ÉQUINOXES

### 1. PREMIÈRE TENTATIVE DE COPERNIC

En 1543, avec la publication du *De revolutionibus orbium caelestium*, un homme d'Église, le polonais Nicolas COPERNIC, amorce une véritable révolution de l'astronomie en osant s'attaquer à la vision géocentrique de la physique aristotélicienne. Adoptant le modèle héliocentrique esquissé par l'astronome grec ARISTARQUE DE SAMOS au III<sup>e</sup> siècle avant J.-C., il relègue la Terre au même rang qu'une simple planète, en orbite autour du Soleil et en rotation sur elle-même de surcroît, réfutant l'idée d'une Terre immobile au milieu du monde, centre des mouvements circulaires célestes. Ne pouvant apporter de véritables preuves de ce qu'il avance, les raisons d'un tel choix sont essentiellement métaphysique et esthétique. Idolâtrant en effet le Soleil, COPERNIC estime que le centre de l'univers doit lui revenir de droit. Ainsi posé en principe, le mouvement de la Terre doit lui permettre d'expliquer toutes les apparences astronomiques, de l'inégalité des jours et des nuits à la succession des saisons.

Pour expliquer le mouvement annuel du centre de la Terre autour du Soleil, COPERNIC reprend cependant un concept typiquement aristotélicien. Il suppose la Terre entraînée par une sphère solide en



**Figure 7 :** Mouvement compensateur de l'axe de rotation terrestre pour que ce dernier puisse conserver une direction fixe au cours du mouvement de la Terre autour du Soleil.

(3) L'année tropique est définie dans la troisième partie.

rotation autour du Soleil, à laquelle elle est fixée. Mais son axe, qui fait toujours un angle égal à l'obliquité de l'écliptique, ne peut plus conserver la même direction au cours du mouvement de la sphère et décrit désormais un cône de révolution de l'ouest vers l'est. Pour qu'il puisse toujours rester parallèle à la même direction, seul cas qui permette d'expliquer toutes les apparences, COPERNIC introduit alors un troisième mouvement de la Terre [4, p. 298], dans lequel l'axe décrit un second cône de révolution sensé compenser exactement le mouvement qu'il a subi dans la direction opposée (cf. figure 7, page précédente).

Grâce à ce mouvement, pourtant totalement fictif, COPERNIC peut également expliquer le phénomène de précession des équinoxes. Il considère que le mouvement compensateur de l'axe de la Terre décrit en fait un angle très légèrement inférieur à l'angle qu'il décrit dans le même temps lors de la rotation de la sphère autour du Soleil. Au bout d'une année, la différence est de 50'' environ, l'axe n'est pas tout à fait redressé, entraînant le long de l'écliptique un glissement de l'équateur céleste auquel il correspond et donc un déplacement des points équinoxiaux. Si paradoxalement, COPERNIC arrive à unifier l'explication de l'ensemble des apparences par une combinaison des mouvements de la Terre, il n'en demeure pas moins que le phénomène de précession des équinoxes a une origine tout autre qu'un illusoire mouvement compensateur.

## 2. EFFET DU SOLEIL ET DE LA LUNE SUR LE BOURRELET ÉQUATORIAL

### 2.1. La Terre n'est pas sphérique

La rotation diurne de la Terre a une conséquence importante sur sa forme. En supposant la Terre légèrement déformable et initialement sphérique, la force d'inertie centrifuge provoquée par sa rotation sur elle-même, maximale dans les régions équatoriales et nulle dans les régions polaires, entraîne la formation d'un « bourrelet équatorial » donnant à la Terre, en première approximation, la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati selon l'axe des pôles (cf. figure 8). Prévu par NEWTON, cet aplatissement fut confirmé grâce à deux expéditions qui quittèrent la France en 1736, l'une emmenée par BOUGUER vers le Pérou près de l'équateur, l'autre emmenée par MAUPERTUIS vers la Laponie près du cercle polaire, l'objectif étant de montrer la différence de longueur d'un arc de méridien de  $1^\circ$  à ces deux latitudes. Notons que les progrès décisifs de la géodésie avec l'avènement des satellites ont permis de mettre en évidence, par rapport à l'ellipsoïde de référence, les nombreuses irrégularités du « géoïde » terrestre, défini comme la surface équipotentielle du champ de pesanteur de la Terre calculé au niveau de la mer.

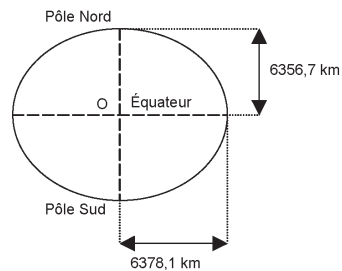


Figure 8 : Ellipsoïde de révolution.



## 2.2. Position du problème

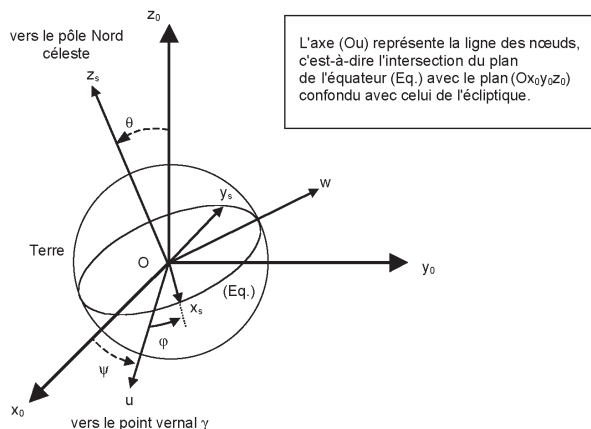
Si nous assimilons désormais la Terre à un ellipsoïde de révolution, nous comprenons que l'action des autres astres sur le bourrelet équatorial soit à l'origine de forces perturbatrices dont le moment résultant calculé au centre  $O$  de la Terre est non nul. Nous allons montrer justement que ce moment, en agissant sur l'axe de révolution matérielle terrestre, tout comme agirait le moment du poids sur l'axe de rotation d'une toupie en mouvement autour d'un point fixe, engendre le phénomène de précession des équinoxes.

Pour simplifier l'analyse du problème, nous supposons par la suite le système {Terre - Lune - Soleil} isolé, ce qui revient à négliger l'action des autres corps planétaires et donc, admettons-le pour le moment, à considérer fixe le plan de l'écliptique.

Pour décrire les trois degrés de liberté de la Terre en mouvement autour de son centre  $O$ , nous utiliserons les angles d'Euler (cf. figure 9 et annexe), comptés positivement dans le sens trigonométrique direct et qui permettront de passer du référentiel  $\mathbf{R}_0$  au référentiel  $\mathbf{R}_s$  définis comme suit :

- ♦  $\mathbf{R}_0(O, x_0, y_0, z_0)$  est le référentiel géocentrique. Les axes  $(Ox_0)$ ,  $(Oy_0)$  et  $(Oz_0)$  sont dirigés vers des étoiles lointaines supposées fixes,  $O$  est confondu avec le centre de la Terre et le plan  $(Ox_0 y_0)$  est confondu avec le plan de l'écliptique.
- ♦  $\mathbf{R}_s(O, x_s, y_s, z_s)$  est le référentiel lié à la Terre. L'axe  $(Oz_s)$ , dirigé vers le pôle céleste Nord, est axe de symétrie matérielle de révolution, et les axes  $(Ox_s)$  et  $(Oy_s)$  sont supposés axes principaux d'inertie.

Enfin, par souci de simplification, tous les calculs seront effectués dans la base  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_c)$ , dite base de Résal, liée au référentiel intermédiaire  $\mathbf{R}_2(O, u, w, z_s)$  dont l'axe  $(Ou)$ , dirigé vers le point vernal  $\gamma$ , représente la ligne des nœuds, c'est-à-dire l'intersection du plan de l'écliptique avec le plan de l'équateur céleste.



**Figure 9 :** Définition des trois angles d'Euler permettant de définir les trois degrés de liberté de la Terre en mouvement autour de son centre  $O$  dans le référentiel  $\mathbf{R}_0$ .

### 2.3. Calcul du moment en O exercé par le Soleil sur la Terre

Intéressons nous tout d'abord à l'action du Soleil, supposé à répartition sphérique de masse, dont le centre S est situé à une distance  $\vec{D}_s = \vec{OS}$  du centre O de la Terre. Nous supposons cette distance égale au demi-grand axe de l'orbite elliptique de la Terre autour du Soleil (ce qui revient donc à assimiler l'ellipse d'excentricité 0,017 à un cercle).

Soit M un point matériel de la Terre, de masse infinitésimale dm, situé quant à lui à une distance  $\vec{r} = \vec{OM}$  de O. Ce point matériel est soumis dans le référentiel  $\mathbf{R}_0$  à la force élémentaire de marée [13] :

$$\delta\vec{F}_s = dm \left( \frac{GM_s}{|\vec{D}_s - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{D}_s - \vec{r}) - \frac{GM_s}{D_s^3} \cdot \vec{D}_s \right)$$

avec G la constante de gravitation universelle et  $M_s$  la masse du Soleil.

Dans ce même référentiel, le moment élémentaire en O de cette force s'écrit :

$$\delta\vec{M}_{O,s} = \vec{r} \wedge \delta\vec{F}_s$$

soit en généralisant l'action du Soleil à l'ensemble des points matériels de la Terre :

$$\vec{M}_{O,s} = \int \vec{M}_{O,s} = \int dm \vec{r} \wedge \left( \frac{GM_s}{|\vec{D}_s - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{D}_s - \vec{r}) - \frac{GM_s}{D_s^3} \cdot \vec{D}_s \right)$$

Puisque  $D_s \gg r$ , nous avons en développant au premier ordre :

$$\frac{1}{|\vec{D}_s - \vec{r}|^3} = \frac{1}{D_s^3 \left( 1 - \frac{\vec{D}_s \cdot \vec{r}}{D_s^2} \right)^3} \cong \frac{1}{D_s^3} \left( 1 + 3 \frac{\vec{D}_s \cdot \vec{r}}{D_s^2} \right)$$

$$\text{d'où : } \vec{r} \wedge \left( \frac{\vec{D}_s - \vec{r}}{|\vec{D}_s - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{D}_s}{D_s^3} \right) \cong \frac{\vec{r}}{D_s^3} \wedge \left[ (\vec{D}_s - \vec{r}) \cdot \left( 1 + 3 \frac{\vec{D}_s \cdot \vec{r}}{D_s^2} \right) - \vec{D}_s \right] = 3 \frac{\vec{D}_s \cdot \vec{r}}{D_s^5} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{D}_s)$$

$$\text{et donc : } \vec{M}_{O,s} = 3 \frac{GM_s}{D_s^5} \int dm (\vec{D}_s \cdot \vec{r}) \cdot (\vec{r} \wedge \vec{D}_s).$$

Dans la base de Résal ( $\vec{u}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{z}_s$ ) liée au référentiel  $\mathbf{R}_2$ , nous supposons que les composantes de  $\vec{r}$  et  $\vec{D}_s$  s'écrivent respectivement :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathbf{R}_2} \quad \text{et} \quad \vec{D}_s = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathbf{R}_2}$$

$$\text{Donc } \int dm \left( \vec{D}_s \cdot \vec{r} \right) \cdot \left( \vec{r} \wedge \vec{D}_s \right) = \int dm (xX + yY + zZ) \cdot \begin{vmatrix} yZ - zY \\ zX - xZ \\ xY - yX \end{vmatrix}_{R2}$$

Développons la première ligne :

$$\int dm (xX + yY + zZ) \cdot (yZ - zY) =$$

$$YZ \int dm (y^2 - z^2) + XZ \int dm xy + Z^2 \int dm zy - XY \int dm xz - Y^2 \int dm yz.$$

Or, la Terre est supposée avoir une symétrie matérielle de révolution. Sa matrice d'inertie s'écrit donc dans la base de Résal qui est aussi base principale d'inertie :

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \text{ avec } I_1 \text{ et } I_3 \text{ les moments d'inertie de la Terre.}$$

Les produits d'inertie sont donc nuls, c'est-à-dire :

$$\int dm xy = \int dm zy = \int dm xz = \int dm yz = 0.$$

$$\text{Par ailleurs } \int dm (y^2 - z^2) = \int dm (x^2 + y^2) - \int dm (x^2 + z^2) = I_1 - I_3.$$

La première ligne se réduit ainsi à  $YZ(I_1 - I_3)$ . De la même manière, nous pourrions vérifier que la deuxième ligne se réduit à  $XZ(I_3 - I_1)$  et la troisième ligne à  $XY(I_1 - I_3) = 0$ . Finalement :

$$\vec{M}_{0,s} = 3 \frac{GM_s}{D_s} (I_1 - I_3) \cdot \begin{vmatrix} YZ \\ -XZ \\ 0 \end{vmatrix}_{R2}$$

Le référentiel  $\mathbf{R}_2$  auquel est attachée la base de Résal, tel qu'il a été défini, coïncide avec le référentiel permettant de définir les coordonnées équatoriales (ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$ ) d'une étoile. Par commodité, nous préférons cependant utiliser par la suite les coordonnées écliptiques (longitude écliptique  $\lambda$  et latitude écliptique  $\beta$ ). Ainsi, pour une étoile située à une distance  $D$  du centre  $O$  de la Terre, le passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques (cf. introduction) conduit à :

$$\vec{D} = \vec{OM} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{R2} = \begin{vmatrix} \cos\beta\cos\lambda \times D \\ (\cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon) \times D \\ (\cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon) \times D \end{vmatrix}_{R2}$$

avec  $\varepsilon$  l'obliquité de l'écliptique.

Mais  $\beta_s = 0$  car le Soleil est dans le plan de l'écliptique, et l'obliquité  $\varepsilon$  de l'éclip-

tique s'identifie à l'angle de nutation  $\theta$  défini dans le paragraphe 2.2. D'où :

$$\vec{D}_s = \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \cos\lambda_s \times D_s \\ \sin\lambda_s \cos\theta \times D_s \\ \sin\lambda_s \sin\theta \times D_s \end{vmatrix}$$

$$\text{et donc : } \vec{M}_{O,S} = 3 \frac{GM_s}{D_s^5} (I_1 - I_3) \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} YZ \\ -XZ \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \cos\theta \sin\theta (1 - \cos 2\lambda_s) \\ -\frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \sin\theta \sin 2\lambda_s \\ 0 \end{vmatrix}.$$

## 2.4. Équations du mouvement

Dans la base de Résal ( $\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}$ ) liée au référentiel  $\mathbf{R}_2$ , le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel  $\mathbf{R}_0$  s'écrit (cf. annexe) :

$$\vec{\Omega}(\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_0) = \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{vmatrix}.$$

Nous en déduisons l'expression dans la base de Résal du moment cinétique  $\vec{\sigma}_0$  de la Terre en O par rapport au référentiel  $\mathbf{R}_0$  :

$$\vec{\sigma}_0 = [I_0] \cdot \vec{\Omega}(\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_0) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\psi} \sin\theta \\ I_3 (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}) \end{vmatrix}.$$

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel  $\mathbf{R}_0$  conduit à :

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_{R0} = \vec{M}_{O,S}.$$

Compte tenu de la composition des dérivations (formule de Bour), il vient :

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_{R0} = \left( \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_{R2} + \vec{\Omega}(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_0) \wedge \vec{\sigma}_0 = \vec{M}_{O,S} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega}(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_0) = \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{vmatrix},$$

$$\text{soit : } \frac{d}{dt} \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\psi} \sin\theta \\ I_3 (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}) \end{vmatrix} + \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{matrix} \text{R2} \end{matrix} \begin{vmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\psi} \sin\theta \\ I_3 (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}) \end{vmatrix} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \cos\theta \sin\theta (1 - \cos 2\lambda_s) \\ - \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \sin\theta \sin 2\lambda_s \\ 0 \end{array} \right|_{R^2}$$

d'où en développant :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta} + (I_3 - I_1) \dot{\psi}^2 \cos\theta \sin\theta + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin\theta = \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \cos\theta \sin\theta (1 - \cos 2\lambda_s) \\ I_1 \sin\theta \ddot{\psi} + (2I_1 - I_3) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta - I_3 \dot{\theta} \dot{\phi} = - \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \sin\theta \sin 2\lambda_s \\ I_3 (\ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta + \ddot{\phi}) = 0 \end{array} \right. .$$

La vitesse de rotation propre de la Terre, de l'ordre de  $360^\circ / 24 \text{ h}$ , c'est-à-dire  $15''$  par seconde, est évidemment nettement supérieure aux vitesses de précession et de nutation, correspondant à des mouvements de très faible amplitude de la Terre dans le référentiel  $\mathbf{R}_0$ . Nous sommes donc dans le cadre de l'approximation gyroscopique :

$$|\dot{\psi}| \quad \text{et} \quad |\dot{\theta}| \ll |\dot{\phi}|.$$

Nous pouvons donc négliger les termes en  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\dot{\psi} \dot{\theta}$  et  $\dot{\psi}^2$  dans le système précédent qui s'écrit désormais :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} = \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \cos\theta (1 - \cos 2\lambda_s) \\ I_3 \dot{\phi} \dot{\theta} = \frac{3GM_s}{2D_s^3} (I_1 - I_3) \sin\theta \sin 2\lambda_s \\ \ddot{\phi} = 0 \end{array} \right. .$$

De la dernière équation, nous en déduisons que la vitesse de rotation propre de la Terre  $\dot{\phi}$  est constante. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \frac{3GM_s}{2D_s^3} \frac{1}{\dot{\phi}} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \cos\theta (1 - \cos 2\lambda_s) \equiv \dot{\psi}_s \\ \dot{\theta} = \frac{3GM_s}{2D_s^3} \frac{1}{\dot{\phi}} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \sin\theta \sin 2\lambda_s \equiv \dot{\theta}_s \end{array} \right. .$$

Mais nous devons maintenant modifier le système précédent pour tenir également compte de l'action de la Lune. Nous supposons pour simplifier que la Lune est dans le plan de l'écliptique (le plan de l'orbite lunaire étant en réalité incliné d'un angle de  $5^\circ 9'$  environ sur celui de l'écliptique).

Par analogie avec le Soleil, le moment en O dans le référentiel  $\mathbf{R}_0$  des forces exercées sur la Terre par la Lune, supposée à répartition sphérique de masse, s'écrit dans la base de Résal :

$$\vec{M}_{O,L} = \begin{cases} \frac{3GM_L}{2D_L^3} (I_1 - I_3) \cos\theta \sin\theta (1 - \cos 2\lambda_L) \\ -\frac{3GM_L}{2D_L^3} (I_1 - I_3) \sin\theta \sin 2\lambda_L \\ 0 \end{cases}$$

Nous avons donc finalement :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{3}{2} \frac{1}{\phi} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \cos\theta \left[ \frac{GM_S}{D_S^3} (1 - \cos 2\lambda_S) + \frac{GM_L}{D_L^3} (1 - \cos 2\lambda_L) \right] \equiv \dot{\psi}_{S+L} \\ \dot{\theta} = \frac{3}{2} \frac{1}{\phi} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \sin\theta \left[ \frac{GM_S}{D_S^3} \sin 2\lambda_S + \frac{GM_L}{D_L^3} \sin 2\lambda_L \right] \equiv \dot{\theta}_{S+L} \end{cases}$$

## 2.5. Calcul de l'angle de précession en une année tropique

La précession des équinoxes est un phénomène certes périodique, mais de période qui peut être considérée comme très longue devant l'intervalle de temps sur lequel porte nos calculs ou nos observations. Si nous considérons effectivement un déplacement du point vernal de 50" par an le long de l'écliptique, la totalité de ce dernier, soit 360°, sera donc parcourue en vingt-six mille ans environ.

Pour un intervalle de temps au plus de quelques dizaines d'années, la précession peut donc être considérée comme dépendant directement des premières puissances du temps. Nous dirons qu'il correspond à la précession des termes séculaires, par opposition aux termes périodiques, qui doivent être eux explicitement conservés comme tels dans les calculs, et qui représentent, nous y reviendrons brièvement en conclusion, un autre phénomène appelé nutation.

Il est facile de voir dans le système précédent que les termes séculaires sont simplement obtenus en ne conservant que la partie non périodique de chaque second membre, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \bar{\psi} = \frac{3}{2} \left( \frac{GM_S}{D_S^3} + \frac{GM_L}{D_L^3} \right) \frac{1}{\phi} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \cos\theta \\ \bar{\theta} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation nous indique qu'il n'y a pas de variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique :  $\theta \equiv \varepsilon = \text{constante}$

Enfin, de la théorie des marées [13], nous savons que l'influence lunaire est environ 2,17 fois plus forte que l'influence solaire, c'est-à-dire que  $\frac{M_L}{M_S} \cdot \left( \frac{D_S}{D_L} \right)^3 \cong 2,17$ . Donc :

$$\bar{\psi} = \frac{3}{2} \frac{GM_S}{D_S^3} (1 + 2,17) \frac{1}{\phi} \frac{I_1 - I_3}{I_3} \cos\varepsilon.$$

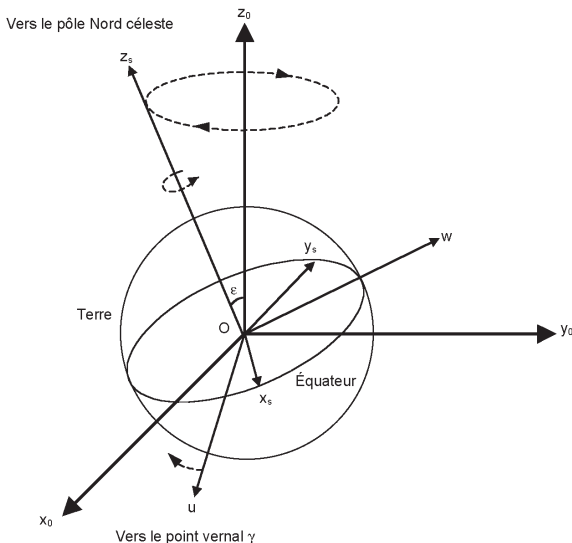
### Application numérique

- ◆  $\frac{GM_s}{D_s^3} = \frac{4\pi^2}{T_a^2}$  d'après la troisième loi de Kepler avec  $T_a$  la période de révolution sidérale de la Terre :  $T_a = 365,25636$  jours solaires moyens (un jour solaire moyen =  $24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ ) ;
- ◆ la vitesse de rotation propre de la Terre est définie par  $\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T_j}$  avec  $T_j$  le jour sidéral :  
 $T_j = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,0905 \text{ s}$  ;
- ◆  $\frac{I_3 - I_1}{I_3} \cong \frac{1}{306}$  ;
- ◆  $\varepsilon = 23^\circ 26'$ .

En une année tropique de 365,24220 jours solaires moyens, le point vernal  $\gamma$  se déplace donc le long de l'écliptique d'un angle  $\Delta\varpi = -2,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ , soit  $50,4''$  dans le sens rétrograde, c'est-à-dire de l'est vers l'ouest.

## 2.6. Mouvement de précession de l'axe de rotation terrestre

La ligne des nœuds (Ou) balaye donc un angle de  $50,4''$  par an de l'est vers l'ouest dans le plan de l'écliptique. Or, l'axe de révolution matérielle ( $Oz_s$ ) de la Terre garde une inclinaison fixe, égale à  $(90^\circ - \varepsilon)$  par rapport à la ligne des nœuds, puisque nous avons vu que l'angle de nutation  $\theta$  (qui s'identifie à l'obliquité  $\varepsilon$  de l'écliptique) n'a pas de variation séculaire. L'axe de rotation terrestre décrit donc autour de la normale ( $Oz_0$ ) au plan de l'écliptique un cône de révolution d'angle au sommet  $\varepsilon$ , de l'est vers l'ouest, en  $360^\circ \times 3600 / 50,4'' = 25\,700$  ans (cf. figure 10). C'est ce mouvement de précession, que nous avons l'habitude de comparer au mouvement d'une toupie autour d'un point fixe, qui est à l'origine du phénomène de précession des équinoxes découvert par HIPPARQUE il y a plus de deux mille ans.



**Figure 10 :** Mouvement de précession de l'axe de rotation terrestre.

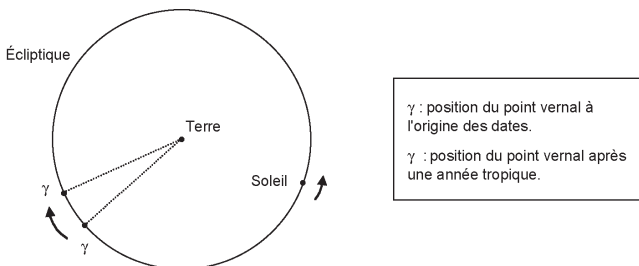
## QUELQUES CONSÉQUENCES DU PHÉNOMÈNE DE PRÉCESSION DES ÉQUINOXES

### 1. L'ANNÉE TROPIQUE EST PLUS COURTE QUE L'ANNÉE SIDÉRALE

Nous avons vu précédemment que le retour du Soleil à l'équinoxe de printemps précède son retour à sa position d'origine par rapport aux étoiles. De ce fait, l'année tropique, définie comme la durée moyenne séparant deux équinoxes consécutifs de printemps, est plus courte que l'année sidérale, correspondant à la durée moyenne séparant deux conjonctions consécutives du Soleil avec une étoile quelconque (c'est-à-dire lorsque les centres respectifs du Soleil et de cette étoile ont même longitude écliptique). L'année tropique est ainsi de 365,24220 jours<sup>(4)</sup> et l'année sidérale de 365,25636 jours, soit une différence de vingt minutes. Selon PTOLÉMÉE, HIPPARQUE aurait quant à lui mesuré à l'époque une année tropique de 365 jours 1/4 moins 1/300 de jour (soit 365,24667 jours) et calculé une année sidérale de 365 jours 1/4 plus 1/144 de jour (soit 365,25694 jours), valeurs, comparées à celles actuellement retenues, d'une précision tout à fait remarquable [1, p. 50].

Remarquons que nous pouvons, de la différence entre l'année tropique et l'année sidérale, retrouver l'angle, noté ici  $\psi$ , duquel rétrograde le point vernal  $\gamma$  le long de l'écliptique en une année tropique. En une année sidérale, le Soleil parcourt le long de l'écliptique un angle de  $360^\circ$ , soit un déplacement en longitude de  $360^\circ/365,25636 = 0,98560912^\circ$  par jour. En une année tropique, il parcourt par contre un angle légèrement inférieur, égal à  $0,98560912^\circ \times 365,24220$ . Quant au point vernal, il parcourt pendant ce temps le long de l'écliptique un angle  $\psi$ . En une année tropique, le Soleil et le point vernal auront donc parcouru à eux deux  $360^\circ$  (cf. figure 11) :

$$360^\circ = 0,98560912^\circ \times 365,24220 + \psi(^{\circ}) \text{ soit } \psi = 50,2'' \text{ environ.}$$



**Figure 11** : En une année tropique, le Soleil parcourt l'arc  $\widehat{\gamma\gamma'}$  d'ouest en est et le point vernal l'arc  $\widehat{\gamma\gamma'}$  d'est en ouest, soit  $360^\circ$  à eux deux.

(4) Jours solaires moyens plus précisément.



## 2. NOUS ALLONS CHANGER D'ÉTOILE POLAIRE

C'est l'étoile Alpha de la constellation de la Petite Ourse qui est aujourd'hui l'étoile la plus proche du pôle céleste Nord (c'est-à-dire le point d'intersection de l'axe polaire de la Terre avec l'hémisphère céleste boréal). Surnommée vers l'an 1000, Polaris ou étoile Polaire, elle se trouve à ce jour à moins de  $1^\circ$  du pôle céleste Nord. Au cours d'une nuit, tous les observateurs ont ainsi constaté que l'ensemble des étoiles semble décrire, dans le ciel boréal, un arc de cercle pratiquement centré sur cette étoile, mouvement apparent qui résulte de la rotation de la Terre autour de son axe.

Étant donné que l'axe de rotation terrestre précède autour de l'axe des pôles du plan de l'écliptique, le pôle céleste Nord décrit alors sur la sphère céleste un cercle autour du pôle écliptique Nord (en 26 000 ans environ). Donc, toutes les étoiles situées sur ce cercle seront amenées à porter aussi un jour le nom d'étoile Polaire. Ainsi, en 2500 avant J.-C., le couloir principal de la grande pyramide de Khéops, fut orienté approximativement vers le pôle céleste Nord, c'est-à-dire à l'époque vers l'étoile Alpha de la constellation du Dragon. Notre étoile Polaire actuelle gardera encore son titre au moins jusqu'en l'an 2100 environ où elle sera au plus près du pôle céleste Nord, qui dans son cycle, rencontrera ensuite, en l'an 4000, puis 7500, les étoiles Gamma et Alpha de la constellation de Céphée, et en l'an 13500, la très brillante étoile Véga de la constellation de la Lyre (cf. figure 12).

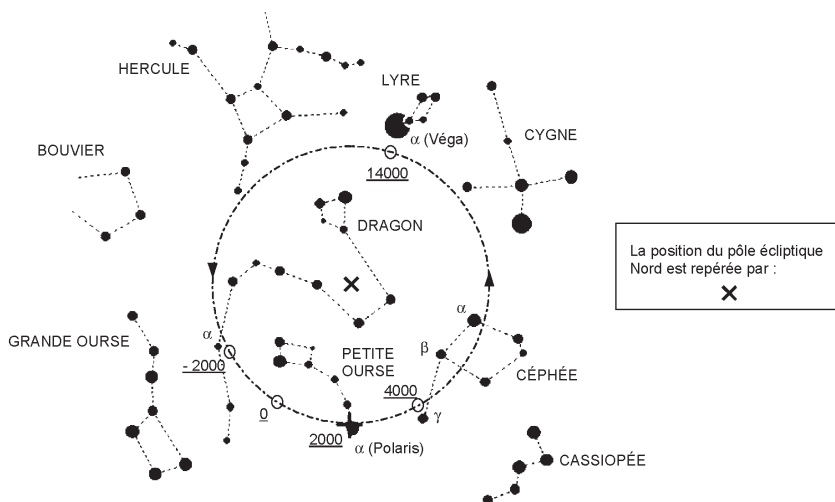
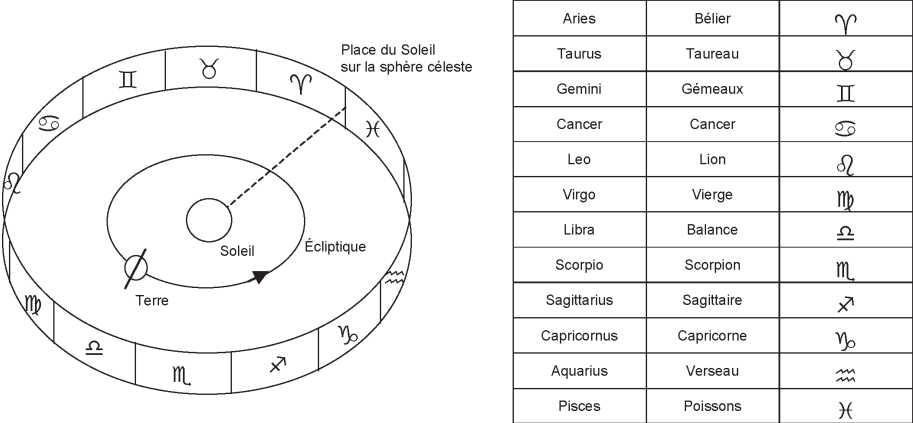


Figure 12 : Mouvement du pôle céleste Nord devant les constellations.

## 3. LES SIGNES DU ZODIAQUE NE CORRESPONDENT PLUS À LEURS CONSTELLATIONS

Rappelons tout d'abord ce qu'est le zodiaque. D'un point de vue géocentrique, la

Lune et les principales planètes de notre système solaire semblent tourner sensiblement sur une même trajectoire, la trajectoire apparente que le Soleil décrit autour de la Terre et que nous appelons *écliptique*. Dans leur ronde annuelle, la Lune et les planètes parcourent ainsi une mince bande de ciel, balisée d'étoiles, que les Anciens ont regroupés selon le fruit de notre imagination en treize figures reconnaissables, appelées *constellations*. Cette bande de ciel, conventionnellement large de  $17^\circ$  et qui s'étend de chaque côté de l'écliptique, est appelée *zodiaque*. Elle a été divisée, à partir du point vernal, en douze secteurs d'égale longueur, soit  $30^\circ$  : ce sont les *signes du zodiaque*. Chaque signe est ainsi censé contenir la constellation du même nom. À partir du point vernal, en suivant la trajectoire apparente du Soleil, nous rencontrons successivement les signes : Bélier, Taureau, Gémeaux, Cancer, Lion, Vierge, Balance, Scorpion, Sagittaire, Capricorne, Verseau et enfin Poissons (cf. figure 13). Remarquons que à l'époque où apparurent les signes, vers  $-400$  avant J.-C., rares étaient les constellations qui rentraient d'un seul tenant dans ces rectangles parfaits de  $17^\circ$  de largeur et de  $30^\circ$  de longueur.



**Figure 13 :** Les douze signes du zodiaque.

Or, compte tenu du phénomène de *précession des équinoxes*, le point vernal se déplace le long de l'écliptique de  $50''$  environ par an dans le sens rétrograde. Depuis l'apparition des signes jusqu'à aujourd'hui (environ 2400 ans), il s'est donc déplacé d'un peu plus de  $30^\circ$ , soit la longueur d'un signe. Autrement dit, au moment de l'équinoxe de printemps, le Soleil est toujours à l'entrée du signe du Bélier par convention, mais ce dernier ne contient plus la constellation du Bélier, mais celle des Poissons. Quant à la constellation du Bélier, elle se trouve désormais dans le signe suivant, celui du Taureau et ainsi de suite...

Si le zodiaque a pu jouer un rôle durant l'Antiquité, notamment pour l'établissement des calendriers, il n'y a plus que les astrologues qui lui trouvent aujourd'hui un quelconque intérêt. Précisons enfin que depuis 1930, l'UAI (Union astronomique internationale) a clairement délimité la frontière des quatre-vingt-huit constellations, en particulier

celles du zodiaque, qui ont vu la famille s'agrandir à treize, avec l'arrivée de la constellation d'Ophiucus (le Serpente) entre le Sagittaire et le Scorpion.

#### 4. CORRECTION DES TABLES DE POSITIONS STELLAIRES

Nous pouvons trouver dans les catalogues les coordonnées équatoriales (ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$ ) d'étoiles pour une époque standard, par exemple 2000,0 (ce qui signifie 2000 janvier 1 à 0 h temps universel). Comme le point vernal  $\gamma$ , origine des ascensions droites, rétrograde le long de l'écliptique, et le plan de l'équateur céleste, origine des déclinaisons, précède autour de l'axe des pôles du plan de l'écliptique, les coordonnées équatoriales d'un astre sont variables. Il convient donc d'effectuer une correction si nous souhaitons connaître ses coordonnées à une autre époque.

Nous avons vu que les formules de passage des coordonnées équatoriales ( $\alpha$  ;  $\delta$ ) aux coordonnées écliptiques ( $\lambda$  ;  $\beta$ ) d'un astre (cf. introduction) conduisent aux équations :

$$\begin{cases} \cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda & (a) \\ \cos\delta\sin\alpha = (\cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon) & (b) \\ \sin\delta = (\cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon) & (c) \end{cases}$$

La longitude écliptique  $\lambda$  varie, car également définie à partir du point vernal. En revanche, dans l'hypothèse de l'immobilité du plan de l'écliptique, la latitude écliptique  $\beta$  et l'obliquité  $\varepsilon$  sont supposées fixes.

En dérivant et simplifiant (c), il vient :

$$\frac{d\delta}{dt} = \cos\alpha\sin\varepsilon \frac{d\lambda}{dt}.$$

En dérivant (b), il vient :

$$-\sin\delta\sin\alpha \frac{d\delta}{dt} + \cos\delta\cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \cos\beta\cos\lambda\cos\varepsilon \frac{d\lambda}{dt} \equiv \cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{d'après (a)}$$

d'où en utilisant la relation établie précédemment :

$$-\sin\delta\sin\alpha\cos\alpha\sin\varepsilon \frac{d\lambda}{dt} + \cos\delta\cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \cos\delta\cos\alpha\cos\varepsilon \frac{d\lambda}{dt}.$$

Finalement, nous obtenons après simplification :

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\cos\varepsilon + \tan\delta\sin\alpha\sin\varepsilon) \frac{d\lambda}{dt}.$$

#### Application numérique

- ♦  $\varepsilon = 23^\circ 26'$  ;
- ♦  $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = 50,4''$  par année tropique.

La variation de chacune des coordonnées ( $\alpha$  ;  $\delta$ ) d'un astre, exprimée en secondes

d'arc par année tropique, est donc numériquement :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = 46,2 + 20,0 \times \tan\delta \sin\alpha \\ \frac{d\delta}{dt} = 20,0 \times \cos\alpha \end{cases}.$$

Connaissant ces coordonnées à l'époque standard notée  $\tau$ , nous pouvons maintenant en déduire les coordonnées à l'époque  $t + \tau$  par les formules suivantes, établies toutefois en supposant l'intervalle de temps  $t$  entre ces deux époques négligeable devant la période de précession et en supposant l'astre suffisamment éloigné du pôle ( $\delta \ll \pi/2$ ) :

$$\begin{cases} \alpha_t = \alpha_\tau + t \times (46,2 + 20,0 \times \tan\delta \sin\alpha) \\ \delta_t = \delta_\tau + t \times 20,0 \times \cos\alpha \end{cases}$$

avec  $t$  en années tropiques,  $\alpha_t$  et  $\delta_t$  en secondes d'arc.

## CONCLUSION

La précession des équinoxes est caractérisée par une rétrogradation du point vernal de 50'' environ par an le long de l'écliptique. Ce phénomène est également appelé précession luni-solaire, traduisant bien son origine. Mais l'étude précédente a été menée en négligeant l'action des autres astres devant celle du Soleil et de la Lune. En toute rigueur, les perturbations exercées par les autres planètes, les principales étant dues à l'action de Vénus (de par sa proximité) et de Jupiter (de par sa masse), sont responsables d'un déplacement séculaire du plan de l'écliptique. Ce déplacement engendre à son tour un déplacement du point vernal par rapport aux étoiles, appelé précession planétaire. Cette mobilité du plan de l'écliptique permet ainsi d'expliquer la lente décroissance observée de l'obliquité, de 46'' environ par siècle.

L'étude menée dans la seconde partie de l'article a par ailleurs montré qu'au phénomène de précession, de type séculaire, se superpose un autre phénomène, de type périodique, que nous avons appelé nutation. Ce phénomène fut découvert en 1748 par l'astronome britannique James BRADLEY, qui tentait alors de mesurer la parallaxe de l'étoile  $\gamma$  Draconis (la première parallaxe ne fut mesurée qu'en 1838 par l'astronome allemand Friedrich BESSEL sur l'étoile 61 du Cygne, mesure qui apporta la preuve définitive du mouvement de la Terre autour du Soleil). Elle consiste, du moins dans sa partie principale et si nous faisons un temps abstraction de la précession, en un mouvement périodique de l'axe de rotation terrestre qui décrit une ellipse autour de sa position moyenne. D'une période égale à 18,60 ans, elle fait subir au plan de l'équateur terrestre des déplacements qui affectent d'une part la position du point vernal et d'autre part l'obliquité de l'écliptique. Notons qu'à ce déplacement s'ajoute également un grand nombre d'autres déplacements de courte période et de faible amplitude, dont la somme constitue la nutation luni-solaire proprement dite. Car la cause de ce phénomène reste encore l'action sur le bourrelet équatorial de la Lune et dans une moindre mesure du Soleil. Au final, de la

combinaison des phénomènes de précession et de nutation (luni-solaire), le pôle céleste Nord décrit sur la sphère céleste une sorte de sinussoïde autour du cercle de précession.

Notons enfin que les formules établies précédemment et destinées à corriger les tables de position des étoiles ne sont que des formules approchées. Elles ont justement été établies en supposant l'obliquité constante et le plan de l'écliptique immobile, c'est-à-dire en ne tenant pas compte à la fois de la nutation (luni-solaire) et de la précession planétaire. En faisant d'abord intervenir la précession planétaire, nous obtenons les coordonnées moyennes de l'étoile, c'est-à-dire les coordonnées rapportées au plan de l'équateur moyen et à l'équinoxe moyen (le nœud ascendant du plan de l'écliptique moyen dans le plan de l'équateur moyen). Les plans de l'équateur moyen et de l'écliptique moyen sont deux plans fictifs qui ne se distinguent que par la nutation des plans fondamentaux vrais tels qu'ils sont déterminés par l'observation. Si nous corrigeons ensuite les coordonnées moyennes de la nutation, nous obtenons les coordonnées vraies de l'étoile, rapportées au plan de l'équateur vrai et à l'équinoxe vrai (par convention le nœud ascendant du plan de l'écliptique moyen dans le plan de l'équateur vrai, la nutation planétaire n'étant donc pas prise en compte). On pourra consulter à ce sujet André DANJON dans [9] pour davantage de précisions.

## BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] VERDET J.-P. *Une histoire de l'astronomie*. Paris : Seuil, 1990.
- [2] RONAN C. *Histoire mondiale des sciences*. Paris : Seuil, 1988.
- [3] LLOYD G. *La science grecque après Aristote*. Paris : la Découverte, 1990.
- [4] TANNERY P. *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*. Paris : Jacques Gabay, 1995.
- [5] SZCZECINIARZ J.-J. *Copernic et la révolution copernicienne*. Paris : Flammarion, 1998.
- [6] VIGOUREUX J.-M. *Les pommes de Newton*. Paris : Albin Michel Sciences, 2003.
- [7] CAUSERET P. et SARRAZIN L. *Les saisons et les mouvements de la Terre*. Paris : Belin, 2004.
- [8] PASCOLI G. *Astronomie fondamentale*. Paris : Dunod, 2000.
- [9] DANJON A. *Astronomie générale*. Paris : Albert Blanchard, 1994.
- [10] PÉREZ J.-P. *Mécanique*. Paris : Masson, 1995.
- [11] ACKER A. *Initiation à l'astronomie*. Paris : Masson, 1982.
- [12] ALHALEL T. La différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai : l'équation du temps. *Bull. Un. Phys.*, novembre 2001, vol. 95, n° 838 (1), p. 1557-1577.
- [13] Toutes les références liées au phénomène des marées océaniques proviennent du site du SHOM (Service hydrographique et océanographique de la marine) où de nombreux

documents destinés aux étudiants sont téléchargeables notamment dans le cadre des TIPE (Travaux d'initiative personnelle encadrés) :

[http://www.shom.fr/fr\\_page/fr\\_act\\_oceano/maree/maree\\_f.htm](http://www.shom.fr/fr_page/fr_act_oceano/maree/maree_f.htm)

[14] La figure 10 a été réalisée à partir d'un horlogiel téléchargeable sur le site :

<http://rockefeller.univ-lyon1.fr/~romeuf/ObservatoiresAugerollesCunlhat/>



**Christophe CAPPE**

*Agrégé de physique*

Lycée Augustin Thierry

Blois (Loir-et-Cher)

## Annexe

### Les angles d'Euler

Considérons un solide homogène, possédant une symétrie matérielle de révolution, en mouvement autour d'un point fixe O dans un référentiel  $\mathbf{R}_0(O, x_0, y_0, z_0)$  lui-même fixe.

Soit  $\mathbf{R}_s(O, x_s, y_s, z_s)$  un référentiel lié au solide, l'axe ( $Oz_s$ ) étant supposé l'axe de symétrie matérielle de révolution du solide.

Nous savons que trois rotations sont nécessaires pour passer de  $\mathbf{R}_0$  à  $\mathbf{R}_s$ , par exemple, si nous choisissons les angles d'Euler, qui font partie d'un repérage classique en mécanique du solide :

- ♦ Une rotation d'un angle  $\psi$  de  $\mathbf{R}_0$  autour de l'axe ( $Oz_0$ ) (cf. figure 14).

Le vecteur rotation instantanée associé est  $\vec{\Omega}(\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_2) = \dot{\psi} \vec{z}_0$  avec  $\vec{z}_0$  un vecteur unitaire de l'axe ( $Oz_0$ ).

- ♦ Une rotation d'un angle  $\theta$  de  $\mathbf{R}_1$  autour de l'axe ( $Ou$ ) (cf. figure 15).

Le vecteur rotation instantanée associé est  $\vec{\Omega}(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_1) = \dot{\theta} \vec{u}$  avec  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de l'axe ( $Ou$ ).

- ♦ Une rotation d'un angle  $\phi$  de  $\mathbf{R}_2$  autour de l'axe ( $Oz_s$ ) (cf. figure 16).

Le vecteur rotation instantanée associé est  $\vec{\Omega}(\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_2) = \dot{\phi} \vec{z}_s$  avec  $\vec{z}_s$  un vecteur unitaire de l'axe ( $Oz_s$ ).

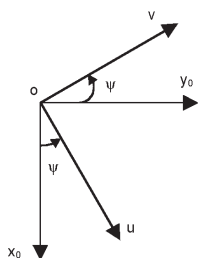


Figure 14 :

$\mathbf{R}_0(O, x_0, y_0, z_0) \rightarrow \mathbf{R}_1(O, u, v, z_0)$ .

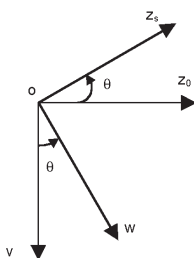


Figure 15 :

$\mathbf{R}_1(O, u, v, z_0) \rightarrow \mathbf{R}_2(O, u, w, z_0)$ .

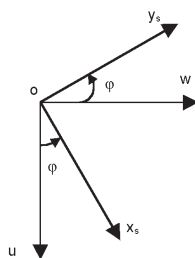


Figure 16 :

$\mathbf{R}_2(O, u, w, z_0) \rightarrow \mathbf{R}_s(O, x_s, y_s, z_s)$ .

Nous en déduisons ainsi le vecteur rotation instantanée du référentiel lié au solide  $\mathbf{R}_s$  par rapport au référentiel fixe  $\mathbf{R}_0$  :

$$\vec{\Omega}(\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}_s$$

Le vecteur unitaire  $\vec{z}_0$  s'écrit dans la base  $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$  liée au référentiel  $\mathbf{R}_2$  appelée base

de Résal :  $\vec{z}_0 = \vec{z}_s \cos\theta + \vec{w} \sin\theta$ , d'où les composantes de  $\vec{\Omega}(\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_0)$  dans cette base :

$$\vec{\Omega}(\mathbf{R}_s/\mathbf{R}_0) = \begin{matrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{matrix}_{R2}$$

L'angle  $\varphi$ , appelé angle de rotation propre, correspond à la rotation du solide autour de son axe de révolution ( $Oz_s$ ). L'angle  $\psi$ , appelé angle de précession, correspond à la rotation de cet axe autour de la verticale ( $Oz_0$ ). L'angle  $\theta$ , appelé angle de nutation, correspond à la variation de l'angle que fait cet axe avec la verticale. Précisons enfin que l'axe ( $Ou$ ), qui est aussi l'intersection du plan ( $Ox_0 y_0$ ) avec le plan ( $Ox_s y_s$ ), est appelé ligne des nœuds (*cf.* figure 17).

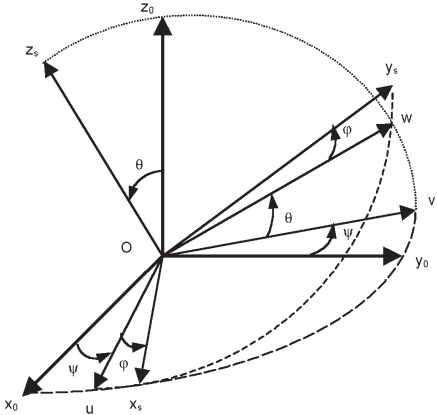


Figure 17 : les angles d'Euler.