

Mathématiques Financières

TD 1 Intérêts simples

Exercice 1.

Deux capitaux sont placés à intérêts simples à la même date selon les conditions suivantes :

- Placement 1 : 20 000 € à 9%.
- Placement 2 : 17 500 € à 11%.

Déterminez au bout de combien de temps ces deux placements auront acquis la même valeur.

Correction:

Il s'agit de déterminer la valeur de n , la durée de placement en années, qui permet d'égaliser la valeur acquise des deux placements.

$$20000.(1 + 0,09.n) = 17500.(1 + 0,11.n)$$

$$20000 + 1800.n = 17500 + 1925.n$$

$$20000 - 17500 = 1925.n - 1800.n$$

$$2500 = 125.n$$

$$n = \frac{2500}{125} = 20$$

Les deux placements auront atteint la même valeur au bout de 20 ans.

Exercice 2.

Un individu emprunte 4 000 € au taux d'intérêt simple de 4%. Cette somme est remboursée en deux versements égaux. Le premier versement intervient le 4^{ème} mois tandis que le second intervient le 10^{ème} mois.

A combien s'élève chaque versement ?

Correction:

La valeur actuelle d'un emprunt est égale à la somme des valeurs actuelles des flux de remboursements et d'intérêts qui lui sont associés. Pour déterminer le montant des versements, nous allons nous baser sur cette propriété.

$$4000 = \frac{A}{1 + 0,04 \cdot \frac{4}{12}} + \frac{A}{1 + 0,04 \cdot \frac{10}{12}}$$

$$4000 = \frac{A}{1,013333} + \frac{A}{1,033333}$$

$$4000 = A \left(\frac{1}{1,013333} + \frac{1}{1,033333} \right)$$

$$4000 = 1,954585.A$$

$$A = \frac{4000}{1,954585} = 2046,47$$

Le montant des versements aux mois 4 et 10 est de 2046,47 €.

A combien d'intérêts cela correspond t-il?

Le montant remboursé est 4000 € (on ne rembourse que ce qu'on a emprunté). Le reste correspond donc aux intérêts.

$$2046,47 \times 2 - 4000 = 92,94$$

Le montant des intérêts versés ici est de 92,94 €.

Exercice 3.

Un capital placé une certaine durée à 8% a rapporté 500 € d'intérêts. Ce même capital placé 100 jours de moins à 9% aurait rapporté 480 € d'intérêts.

Quelle est la valeur de ce capital ? On suppose que j est «une certaine durée » en % d'année.

Correction:

Nous avons ici un système de deux équations avec deux inconnues (C , le montant placé et j le nombre de jours de placement). Chaque équation explique la formation de l'intérêt (simple) correspondant à chaque placement. On a :

$$\begin{cases} 500 = C \cdot 0,08 \cdot \frac{j}{360} \\ 480 = C \cdot 0,09 \cdot \frac{j-100}{360} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \frac{500}{0,08 \cdot \frac{j}{360}} \\ C = \frac{480}{0,09 \cdot \frac{j-100}{360}} \end{cases}$$

On peut égaliser les deux expressions de C pour déterminer j .

$$\frac{500}{0,08 \cdot \frac{j}{360}} = \frac{480}{0,09 \cdot \frac{j-100}{360}}$$

$$\frac{180000}{0,08 \cdot j} = \frac{172800}{0,09 \cdot (j-100)}$$

$$180000 \times 0,09 \cdot (j-100) = 172800 \times 0,08 \cdot j$$

$$16200 \cdot j - 1620000 = 13824 \cdot j$$

$$16200 \cdot j - 13824 \cdot j = 1620000$$

$$2376 \cdot j = 1620000$$

$$j = \frac{1620000}{2376} = 681,8182$$

La durée du premier placement est de 681 jours (681,8182). Maintenant que nous avons les durées de placement, nous pouvons déterminer le capital placé. Pour ce faire, reprenons l'équation 1.

$$500 = C \cdot 0,08 \cdot \frac{681,8182}{360}$$

$$0.1515151.C = 500$$

$$C = 3300$$

Le montant placé est de 3300 €.

Exercice 4.

Une banque vous propose deux type de placement pour une durée de six mois.

- Placement A : intérêts simples précomptés aux taux annuel de 6,95% .
- Placement B : intérêts simples post-comptés au taux annuel de 7%.

Quel placement choisissez-vous?

Correction:

Il s'agit ici d'exprimer les taux selon la même modalité de manière à pouvoir les comparer et donc d'exprimer le taux post-compté en taux précompté ou d'exprimer le taux précompté en taux post-compté.

Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'actualiser le taux à modifier par lui même.

Prenons le cas du passage du taux précompté au post-compté. Pour facilité le raisonnement posons K le capital et I qui dans le cas est retiré d'entrée au capital. On a:

$$(K - I)(1 + tx_{post} \cdot \frac{j}{360}) = K$$

$$K + K.tx_{post} \cdot \frac{j}{360} - I + I.tx_{post} \cdot \frac{j}{360} = K$$

$$K - I + (K - I).tx_{post} \cdot \frac{j}{360} - K = 0$$

$$-I + (K - I).tx_{post} \cdot \frac{j}{360} = 0$$

$$(K - I).tx_{post} \cdot \frac{j}{360} = I$$

$$tx_{post} = \frac{I}{(K - I) \frac{j}{360}}$$

Substituons à I sa valeur : $K.tx_{pr} \cdot \frac{j}{360}$

$$tx_{post} = \frac{K.tx_{pr} \cdot \frac{j}{360}}{(K - K.tx_{pr} \cdot \frac{j}{360}) \frac{j}{360}}$$

$$tx = \frac{K \cdot \frac{j}{360} (tx_{pr})}{K \cdot \frac{j}{360} (1 - tx_{pr} \cdot \frac{j}{360})}$$

$$tx_{post} = \frac{tx_{pr}}{1 - tx_{pr} \frac{j}{360}}$$

Le même raisonnement peut être tenu pour le taux précompté. On a alors.

$$tx_{pr} = \frac{tx_{post}}{1 + tx_{post} \frac{j}{360}}$$

Passons le post-compté en pré-compté.

$$tx_{pr} = \frac{0,07}{1 + 0,07 \cdot \frac{6}{12}} = 0,0676$$

Le taux équivalent précompté du placement B (6,76%) est inférieur au taux précompté du placement A (6,95%).

La placement A est donc plus intéressant que le placement B. Le même résultat peut être retrouvé sur la base du taux équivalent post-compté.

Exercice 5.

L'achat d'un appareil électroménager peut être réglé de la façon suivante:

Modalité 1: règlement du prix comptant 9420 €

Modalité 2: versement de 3000 € le jour de l'achat et acceptation de 12 traites mensuelles de 600 € chacune, la première à échéance le mois après l'achat

A. En décrivant l'équivalence des deux modalités de règlement le jour de l'achat, calculer le taux de crédit accordé à l'acheteur.

B. L'acheteur propose de verser 3000 € le jour de l'achat et de remplacer les 12 traites mensuelles par un règlement unique de 7200 €. Calculer aux mêmes conditions l'époque à laquelle il doit effectuer son règlement.

Correction:

A. Pour déterminer le taux de crédit implicite de la modalité 2, nous partons du fait que cette dernière doit être équivalente à la première. Autrement-dit, la valeur actuelle des deux modalités sont les mêmes. Cela nous amène à considérer la valeur actuelle des traites. Celle-ci se détermine selon le schéma suivant:

$$V_a = M_{traite} - intrt = M_{traite} - M_{traite} \times tx \times n$$

On a alors:

$$9420 = 3000 + \sum_{i=1}^{12} (600 - 600.tx.\frac{i}{12})$$

$$9420 - 3000 = 12 \times 600 - 600.tx.(1/12 + 2/12 + \dots + 12/12)$$

Dans la parenthèse, nous avons une suite arithmétique de raison 1/12. On peut directement déterminer sa valeur.

$$6420 = 7200 - 600.tx.12.\frac{1/12 + 12/12}{2}$$

$$6420 - 7200 = -tx \times 7200 \times 0,5416667$$

$$-780 = -3900.tx$$

$$tx = \frac{-780}{-39000} = 0,2$$

Le taux d'intérêt facturé sur la seconde modalité de paiement est de 20%.

B. Il s'agit ici de déterminer la date

$$9420 = 3000 + 7200 - 7200 \times 0.2 \times \frac{m}{12}$$

$$9420 - 3000 - 7200 = -7200 \times 0.2 \times \frac{m}{12}$$

$$-780 = -120.m$$

$$m = \frac{-780}{-120} = 6,5$$

La traite de 7200 € doit intervenir au bout de 6,5 mois pour que l'ensemble soit équivalent.