

Mathématiques financières

TD 3 Les annuités

Exercice 1.

Une personne verse chaque année une même somme de 10 000 € à un fond d'investissements. Celui-ci lui garantit un taux d'intérêt de 3%. La date du premier versement a eu lieu le 1er décembre 2005 et le dernier en 2020.

Calculer le montant du capital constitué à la date du 1er décembre 2020.

Correction:

Chaque versement produit des intérêts qui se composent jusqu'à la fin du plan d'investissement. Celui-ci atteindra au terme de l'année n la valeur V_f définie comme:

$$V_f = a.(1+i)^n + a.(1+i)^{n-1} + \dots + a.(1+i) + a$$

$$V_f = a.[1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

On retrouve ici une suite géométrique profitons en pour détailler la formule de la valeur acquise d'un placement régulier de même montant (ici a).

$$V_f = a.[1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n]$$

On a a que multiplie une suite géométrique S de raison $q = (1+i)$.

$$S.q - S = (q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}) - (1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n)$$

$$S.(q-1) = q^{n+1} - 1$$

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$V_f = a.S = a. \frac{1 - q^{n+1}}{q - 1}$$

$$V_f = a. \frac{1 - (1 + i)^{n+1}}{(1 + i) - 1}$$

$$V_f = a. \frac{1 - (1 + i)^{n+1}}{i}$$

$$V_f = 10000. \frac{(1 + 0,03)^{16} - 1}{0,03} = 10000. \frac{0,6047064}{0,03} = 201568,80$$

Le capital constitué est au final de 201 568,80 €.

Exercice 2.

a. Une suite de 13 annuités constantes, capitalisées au taux de 3,5%, a une valeur acquise de 200 000 €. Calculez le montant de l'annuité.

b. Calculez la valeur acquise par 44 trimestrialités de chacune 10 000 € placés au taux de 2,5%.

Correction:

a.

$$200000 = a. \frac{(1 + 0,035)^{13} - 1}{0,035}$$

$$200000 \times 0,035 = a.((1 + 0,035)^{13} - 1)$$

$$a = \frac{200000 \times 0,035}{(1 + 0,035)^{13} - 1}$$

$$a = \frac{7000}{0,563956} = 12412,32$$

b.

La capitalisation est trimestrielle. Il faut pour en tenir compte transformer notre taux annuel en taux trimestriel.

$$(1 + 0.025)^{3/12} - 1 = 0,006192246$$

$$v_f = 10000 \cdot \frac{(1 + 0,00619)^{44} - 1}{0,00619}$$

$$v_f = 10000 \cdot \frac{0,3119578}{0,00619} = 503970,60$$

Exercice 3

Un particulier désire financer l'achat de sa résidence principale par un crédit immobilier au taux de 2,8 % sur une durée de 20 ans. Le prêt est remboursé en mensualités constantes terme échu. En supposant que l'emprunteur a des capacités de remboursement de 2 000 € par mois et qu'il peut payer comptant 500 000 €, quel est le montant qu'il peut consacrer à l'achat de sa résidence ?

Correction:

Le montant qu'il peut consacrer à l'achat correspond à la somme de sous apport et de sa capacité d'emprunt. Reste donc à déterminer cette capacité. Nous savons qu'elle correspond à la valeur actuelle d'une série de mensualité constante de 2000 € sur 20 ans soit 240 mois.

On a a que multiplie une suite géométrique S de raison $q = (1 + i)^{-1}$.

$$S \cdot (q - 1) = q^{(n+1)} - 1$$

$$S = \frac{q^{(n+1)} - 1}{q - 1}$$

$$V_a = a \cdot S = a \cdot \frac{q^{(n+1)} - 1}{q - 1}$$

$$V_a = a \cdot \frac{(1 + i)^{-1(n+1)} - 1}{(1 + i)^{-1} - 1}$$

$$V_a = a \cdot \frac{(1 + i)^{-(n+1)} - 1}{i^{-1} - 1}$$

$$V_a = a \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-(n+1)}}{i}$$

Le taux est donné en base annuelle. Il est donc nécessaire pour notre rythme de composition mensuel de calculer le taux équivalent correspondant.

$$(1 + 0,028)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,002304$$

Le taux mensuel est 0,2304%.

$$V_a = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$V_a = 2000 \frac{1 - (1 + 0,002304)^{-240}}{0,002304} = 368397,08$$

Maintenant que nous avons la capacité d'emprunt, on peut

$$500000 + 368397,08 = 868397,08$$

Le particulier peut emprunter 868 397, 08 €.

Exercice 4

Une personne désire emprunter 10 000 € à un établissement financier. Elle peut rembourser cet emprunt suivant plusieurs formules qui correspondent toutes au même taux d'intérêt :

Formule 1 : payer capital et intérêt en une seule fois au bout de 2 ans.

Formule 2 : payer en 24 mensualités constantes et ce, dès la fin du premier mois après l'emprunt.

Formule 3 : ne rien payer pendant la première année, puis payer 12 mensualités égales à partir du 13ème mois de l'emprunt.

Questions :

A. Avec la formule 1, la personne doit payer 12 155,06 €. Quel est le taux annuel des intérêts si la capitalisation est annuelle ?

B. Si elle choisit la formule 2, combien devra-t-elle payer par mois (capitalisation mensuelle)?

C. Calculez le montant de chacune des mensualités de la formule 3 (capitalisation mensuelle)

Correction:

A. Le taux d'intérêt de la première formule est obtenu en résolvons l'équation suivante:

$$12155,06 = 10000(1+i)^2$$

$$\frac{12155,06}{10000} = (1+i)^2$$

$$\left(\frac{12155,06}{10000}\right)^{1/2} = 1+i$$

$$i = 0,1025$$

Le taux ici est de 10,25%.

B. Pour déterminer combien il devait payer par mois dans la modalité de deux (capitalisation mensuel sur 24 mois). Commençons par déterminer le taux équivalent mensuel.

$$(1 + 0,1025)^{1/12} - 1 = 0,008165$$

On a la valeur actuelle de

$$10000 = a \frac{1 - (1 + 0,008165)^{-24}}{0,008165}$$

$$a = \frac{10000 \times 0,008165}{1 - (1 + 0,008165)^{-24}}$$

$$a = \frac{81,65}{1 - 0,8226995}$$

$$a = \frac{81,65}{1 - 0,8226995} = 460,5176 \approx 460,52$$

La mensualité serait de 460,52 €.

C. Commençons par calculer la valeur acquise de la somme au bout d'un an.

$$10000(1 + 0,008165)^{12} = 11025,02$$

C'est le points de départ de nos mensualités (12 mois).

$$11025,02 = a \frac{1 - (1 + 0,008165)^{-24}}{0,008165}$$

$$a = \frac{11025,02 \times 0,008165}{1 - (1 + 0,008165)^{-12}}$$

$$a = 968,24$$

Les mensualités de la seconde année doit être de 968,24 €.