

Mathématiques Financières

TD 2 Intérêts composés

Exercice 1.

Une personne place une somme de 10 000 € pour 4 ans et 7 mois au taux annuel de 4,5%. De combien disposera-t-elle à l'issue du placement :

- si les intérêts sont capitalisés en fin d'année et calculés à intérêts simples pour des fractions d'années?
- si on utilise la formule des intérêts composés pour une durée de placement qui n'est pas un nombre entier d'années?

Correction:

- Commençons par traiter les années entières avec capitalisation des intérêts (intérêts composés).

$$10000 \cdot (1 + 0,045)^4 = 11925,19$$

Considérons maintenant les 7 mois où cette somme produit des intérêts simples.

$$11925,19 \cdot (1 + 0,045 \cdot \frac{7}{12}) = 12238,23$$

On disposera dans ces conditions de 12 238,23 €.

- Voyons ce qu'il en est si les intérêts composés courent sur l'entièreté de la période.

$$10000(1 + 0,045)^{\frac{4 \times 12 + 7}{12}} = 10000(1 + 0,045)^{\frac{55}{12}} = 12235,35$$

On disposera dans ces conditions de 12 235,35 €.

Exercice 2.

On considère deux placements à intérêts composés annuellement, l'un est de 10 000 € à 6% et l'autre de 9 000 € à 7%. Au bout de combien de temps auront-ils la même valeur acquise? Quelle sera cette valeur?

Correction:

$$10000.(1 + 0,06)^n = 9000.(1 + 0,07)^n$$

$$\frac{10000}{9000}.1,06^n = 1,07^n$$

$$\frac{10000}{9000} = \frac{1,07^n}{1,06^n}$$

$$\frac{10000}{9000} = \left(\frac{1,07}{1,06}\right)^n$$

$$\ln\left(\frac{10000}{9000}\right) = \ln\left(\frac{1,07}{1,06}\right)^n$$

$$0,1053605 = n.\ln\left(\frac{1,07}{1,06}\right)$$

$$\frac{0,1053605}{n} = \ln\left(\frac{1,07}{1,06}\right)$$

$$\frac{0,1053605}{n} = 0,00938974$$

$$\frac{1}{n} = \frac{0,00938974}{0,1053605}$$

$$n = \frac{0,1053605}{0,00938974} = 11,22081$$

Les deux placements atteindront la même valeur au bout de 11 ans 2 mois 19 jours.

Pour connaître la valeur acquise par les capitaux placés, reprenons le premier.

$$10000.(1 + 0,06)^{11,22081} = 19228,8$$

Cette valeur acquise est de 19 228,80 €.

Exercice 3.

On partage une somme totale de 300 000 € entre trois personnes (A, B, C) âgées respectivement de 12 ans, 13 ans et 16 ans. Le partage est effectué de façon à ce que chaque bénéficiaire dispose à sa majorité de la même somme ; après capitalisation annuelle au taux de 7,5% de la fraction des 300 000 € qui lui sont attribués.

Effectuez le partages de 300 000 €.

Correction:

Posons A, B et C les sommes placées pour chacune des personnes dont le total est 300 000 €.

$$300000 = A + B + C$$

Nous savons que la somme placée pour chacun doit produire la même valeur finale le jour des 18 ans de chacun des individus (dans 6 ans pour A, dans 5 ans pour B et dans 2 ans pour C).

$$V_f = A.(1 + 0,075)^6 = B.(1 + 0,075)^5 = C.(1 + 0,075)^2$$

$$V_f = A.1,075^6 = B.1,075^5 = C.1,075^2$$

Nous voulons connaître les valeurs actuelles des placements réalisés pour chaque individu permettant d'obtenir cette valeur acquise.

Pour résoudre le problème exprimons, B et C en fonction de A. Commençons par B. La valeur finale de A

$$A.1,075^6 = B.1,075^5$$

$$B = 1,075^6 \times 1,075^{-5} = A.(1,075)$$

Continuons avec C.

$$A.1,075^6 = C.1,075^2$$

$$C = A.1,075^6 \times 1,075^{-2} = A.1,075^4$$

On peut alors remplacer les valeurs de B et C exprimées en fonction de A dans notre équation de répartition des 300 000 €.

$$300000 = A + A.(1,075) + A.(1,075)^4$$

$$300000 = A.(1 + 1,075 + 1,075^4)$$

A partir de là, on obtient facilement la valeur de capital attribué à A.

$$A = \frac{300000}{3,410469} = 87964,44$$

Pour obtenir celle attribuée à B et à C, il suffit de substituer à A sa valeur dans leurs expressions respectives. On a ainsi:

$$B = 87964,44 \times 1,075 = 94561,76$$

$$C = 87964,44 \times 1,075^4 = 117473,80$$

A se voit donc attribuer 87964,44 €, B 94 561,76 € et C 117473,80 €. On a bien:

$$87964,44 + 94561,76 + 117473,80 = 300000$$

Exercice 4.

La presse relate qu'un club de football a payé 30,5 Millions d'Euros pour disposer d'un joueur dans son équipe. Selon une source précise, les termes réels du contrat sont les suivants:

- 2,44 Millions d'Euros versés à la signature du contrat
- 6,1 Millions d'Euros versés un an plus tard
- 9,76 Millions d'Euros versés deux ans plus tard
- 12,2 Millions d'Euros versés trois ans plus tard

Le montant indiqué dans la presse est-il correct sachant que le taux d'intérêt sur le marché est de 10%.

Correction:

Il s'agit pour répondre à la question de calculer la valeur actuelle du contrat en ramenant les flux à la date de signature.

$$V_a = 2,44 + \frac{6,1}{1 + 0,1} + \frac{9,76}{(1 + 0,1)^2} + \frac{12,2}{(1 + 0,1)^3}$$

$$V_a = 2,44 + 5,545455 + 8,066116 + 9,166041 = 25,21761$$

La valeur du contrat est de 25,22 Millions d'Euros la presse a donc surestimé sa valeur en ne prenant pas en compte le timing des différents flux.

Exercice 5.

Un capital de 300 000 € rapporte des intérêts semestriels de 12 000 €.

- Quel est le taux annuel équivalent de ce placement?
- Si ce capital a été placé aux taux annuel de 7%, quel est le taux d'intérêts trimestriels versés?
- Si le taux annuel annoncé par la banque est de 9% et qu'en réalité les intérêts sont versés mensuellement aux taux proportionnel, quel est le taux annuel équivalent?

Correction:

- Commençons par déterminer le taux semestriel.

$$tx.sem. = \frac{12000}{300000} = 0,04$$

Le taux d'intérêt semestriel est de 4%. Voyons maintenant le taux équivalent annuel.

$$K(1+i)^{6/12} = K(1+0,04)$$

$$(1+i)^{1/2} = 1,04$$

$$1+i = 1,04^2$$

$$i = 1,0816 - 1 = 0,0816$$

Le taux équivalent annuel est de 8,16%.

b. Le taux semestriel correspondant à un taux annuel de 7% sur un semestre est:

$$(1+0,07)^{3/12} = 1 + tx.trim$$

$$tx.trim = 1,017059 - 1 = 0,017059 \approx 0,0171$$

Le taux d'intérêt trimestriel est approximativement de 1,71% (1,7059%).

c. Ici, on cherche le taux annuel correspondant à un taux proportionnelle mensuelle.

$$tx.prop.mens = \frac{0,09}{12} = 0,0075$$

Le taux proportionnel est de 0,75%. Voyons le taux équivalent correspondant.

$$(1+i)^{1/12} = 1+0,0075$$

$$1+i = 1,0075^{12}$$

$$i = 1,093807 - 1 = 0,093807 \approx 0,0938$$

Le taux annuel équivalent est de 9,38%.