****

Politecnico di Torino

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale L-8

A.a. 2022/2023

Sessione di Laurea Ottobre 2023

**Metodi di risoluzione per il min-Knapsack Problem con vincoli di compattezza**

|  |
| --- |
| Relatore:  Prof. Rosario Scatamacchia |
|  |
|  | Candidata: |
|  | Ludovica Marino |

Indice

[Introduzione 2](#_Toc144984413)

[Introduzione alla Ricerca Operativa 2](#_Toc144984414)

[Introduzione al problema 3](#_Toc144984415)

# Introduzione

## Introduzione alla Ricerca Operativa

La Ricerca Operativa è una disciplina il cui concetto non può essere definito in modo univoco. Viene infatti considerata sia come l’insieme di problemi, metodologie e soluzioni, sia come un processo applicativo caratterizzato da un approccio sistematico.

Lo scopo, ed in ugual modo il ruolo fondamentale di questa tipologia di scienza, è definito nell’attività di supporto che la ricerca operativa svolge, aiutando a prendere decisioni scientificamente fondate per risolvere problemi complessi del mondo reale. L’approccio teorico è infatti finalizzato ad essere applicato ad un modello pratico, ovvero una forma di rappresentazione semplificata di un sistema complesso del mondo reale. La rappresentazione assume la forma di equazioni, disequazioni e funzioni matematiche. Il principale obiettivo della creazione di un modello matematico è identificare soluzioni ottimali per problemi che coinvolgono il sistema reale, evitando di interagire direttamente con quest’ultimo.

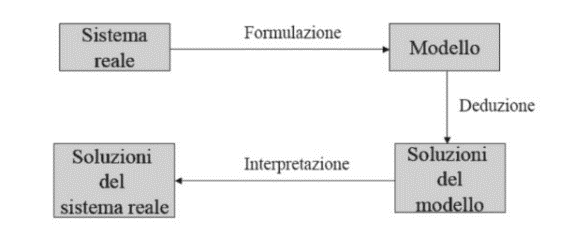
Il processo di modellazione comprende tre fasi chiave, che possono essere schematizzate come in Fig. 0.

Fig. 0: Modellazione di un sistema lineare

La prima fase, detta formulazione, implica la creazione del modello e richiede creatività ed esperienza per selezionare gli aspetti rilevanti del sistema da rappresentare. Questa fase è soggettiva poiché non esiste un’unica formulazione “corretta” universale. Nella fase di deduzione vengono sviluppate le soluzioni del modello mediante l’applicazione di tecniche risolutive basate su algoritmi, adatti alla complessità del modello stesso. Questa fase garantisce quindi precisione e oggettività nell’ottenimento delle soluzioni, in quanto caratterizzata da una rigorosa applicazione matematica. Nella fase finale di interpretazione, si richiede la partecipazione umana per tradurre le soluzioni del modello in azioni pratiche per il sistema reale. Questo ultimo passaggio richiede particolare attenzione, poiché aspetti trascurati nelle fasi precedenti possono emergere come rilevanti, rendendo necessarie alcune correzioni o adattamenti alle soluzioni proposte dal modello.

Questi modelli sono quindi strumenti potenti per risolvere problemi complessi, che richiedono però un equilibrio stabile tra creatività e rigore matematico ed un’accurata precisione nell’interpretazione delle soluzioni ottenute. Lo studio dei modelli matematici permette infatti ad una figura gestionale di essere supportata e guidata da dati certi, nelle decisioni aziendali e nell’ottimizzazione di varie situazioni, lavorative e non, che deve però apportare la propria conoscenza personale per assumere decisioni funzionali e vantaggiose.

La parola “ottimizzazione” richiede un’attenzione particolare, sia all’interno della presente tesi, sia nelle vite quotidiane di questo secolo. La società infatti frenetica in cui viviamo, è causata dai processi ottimizzati che utilizziamo nella quotidianità, ed è allo stesso tempo una concausa dello sviluppo e della ricerca necessaria per il campo della ricerca operativa, in quanto il continuo miglioramento della qualità di vita e della tecnologia, richiede una costante crescita, e quindi ottimizzazione, degli strumenti che occorrono alla popolazione.

In egual modo anche la globalizzazione ha contribuito agli studi dei metodi matematici, cercando i migliori approcci e i punti strategici per permettere la connessione sempre più agevole di varie zone geografiche. Alcune delle sfaccettature più peculiari della ricerca operativa sono infatti la scelta della posizione ideale per un punto vendita in una specifica area geografica o la definizione di percorsi minimi, usati per la pianificazione degli ormai comuni navigatori, il cui accesso è garantito ad una grande parte della popolazione, grazie all’integrazione delle macchine di calcolo digitali alle mere formule matematiche.

In ambito aziendale troviamo tante altre applicazioni utili alla gestione operativa, come per esempio la logistica, la gestione dei flussi di cassa, fino all’ottimizzazione di intere catene e flussi di produzione. Tutto ciò avviene in modo rapido ed agevole grazie all’implementazione dei modelli matematici attraverso sistemi informatici avanzati.

Lo spettro di fattori analizzati permette di constatare che la ricerca operativa promuove lo sviluppo del sapere e quindi del potere umano. La sua particolarità risiede infatti nella capacità di affrontare problemi apparentemente insuperabili, spingendo l’intelligenza umana a cercare soluzioni innovative e di conseguenza contribuendo al progresso della società moderna.

1. Inizio modulo

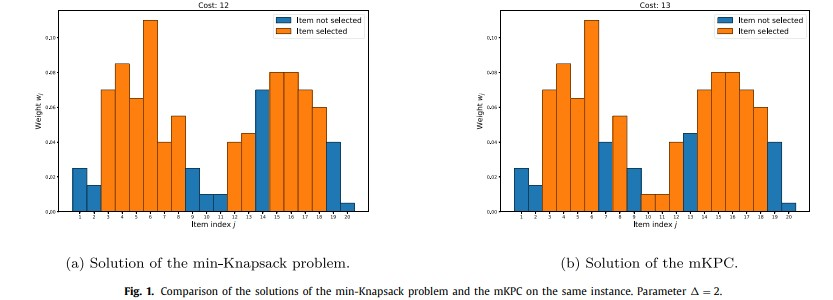
## Introduzione al problema

Il problema che verrà analizzato nella presente tesi è chiamato min-Knapsack Problem con vincoli di compattezza (mKPC). Il problema è stato introdotto in letteratura nel 2023, e di conseguenza analizzato in un articolo del Luglio 2023, pubblicato sulla rivista “European Journal of Operational Research” (A. Santini ed E. Malaguti). Il problema in analisi è dunque una particolare estensione del generico min-Knapsack problem, che fa parte a sua volta della famiglia del Knapsack Problem (KP).

Alla base del “problema dello zaino” è presente un modello decisionale lineare binario. L’esito del processo decisionale lineare, e dunque della soluzione finale, è valutato tramite una combinazione lineare dei valori associati a ciascuna delle decisioni binarie. Formalmente, il modello decisionale lineare è definito da n variabili binarie xi ∈ {0,1}, che corrispondono alla selezione nella i-esima decisione binaria, e da valori di profitto pi. Possiamo quindi assumere che in qualsiasi dei due casi xi=1 e xi=0, abbiamo sempre pi ≥ 0. Il profitto totale associato a tutte le n decisioni binarie è quindi dato dalla somma di tutti i valori pi per tutte le decisioni in cui è stata selezionata la prima alternativa. Il problema dello zaino è infine ottenuto aggiungendo una restrizione di capacità in modo che la somma dei pesi di tutte le decisioni binarie non superi un dato valore c, che concettualmente equivale alla capacità del contenitore, ovvero dello zaino (knapsack). L’obiettivo è selezionare un sottoinsieme degli n elementi, tale che il profitto totale degli oggetti selezionati sia massimizzato e il peso totale non superi c.

Il min-Knapsack problem è una variante del sopra citato problema dello zaino, che viene in questa casistica trasformato in un problema di minimizzazione. Da un numero finito di oggetti n, si deve selezionare un sottoinsieme di elementi con un peso totale almeno pari a c, tale che il profitto totale, in questo caso considerato come costo, degli oggetti sia minimizzato.

Come anticipato all’inizio di questa sezione, il problema in analisi per questa tesi, è un’estensione di quest’ultimo, in quanto aggiunge al comune vincolo sul peso, un altro vincolo di compattezza, che opera a livello spaziale, dichiarando che gli elementi selezionati nel sottoinsieme non possono essere tra loro troppo distanti. Immaginando infatti che i vari oggetti giacciano in una sequenza ordinata, con questo vincolo aggiuntivo l’obiettivo è quello di selezionare un insieme di elementi quanto più compatto. Il vincolo sulla distanza utilizza come numeri di riferimento il valore numerico degli indici degli elementi. Calcolando infatti la differenza fra i due indici, viene definita la distanza tra i due. Usando un valore positivo intero Δ come parametro della distanza, se la distanza tra gli indici dei due oggetti considerati è maggiore di Δ, allora viene richiesto che sia selezionato almeno un altro elemento tra i due. Analizzando l’esempio in Fig.1, proposto dall’articolo (A. Santini ed E. Malaguti), gli oggetti sono ordinati sull’asse x in modo crescente in base al proprio indice, mentre l’altezza delle barre indica il proprio peso. Il costo è unitario per tutti gli elementi ed il parametro Δ per il mKPC è pari a 2.



La versione (a), ovvero senza i vincoli di compattezza, ha un costo totale di 12, ma considerano il parametro Δ, esso viene violato tra gli elementi con indice 8 e 12, che presentano una distanza di 4>2. Nella versione (b), è presentata una soluzione ottima che presenta un costo totale pari a 13, che non viola il vincolo spaziale. Si nota quindi che il mKPC presenta una soluzione con un costo maggiore di un normale min-Knapsack, ma selezionando un sottoinsieme compatto di elementi.

Lo studio di questa variante del problema, come viene sottolineato nell’articolo precedentemente citato, è motivato dalle sue applicazioni nell’analisi delle serie temporali e nella statistica con grandi dimensioni. Una serie temporale è una sequenza di valori numerici indicizzati da punti temporali discreti (Hamilton, 1994). Data una serie temporale y1, …, yn, l’obiettivo del rilevamento dei cambiamenti è identificare se la distribuzione di probabilità sottostante di y cambia, quante volte lo fa e in quali punti temporali. I tipici punti di cambio per le serie temporali si verificano quando la serie temporale cambia il suo valore atteso, la sua varianza o entrambi. Alcune tra le applicazioni più importanti sono per esempio nel settore sanitario, per rilevare i cambiamenti nelle condizioni nei pazienti, o in econometria, per avvertire i segnali di una crisi.

1. **Modello lineare**

Ciaobdiwbdi

1. **Algoritmo euristico**
2. **Analisi computazionale**
3. **Conclusioni**