Álgebras, Grupos y Representaciones
Ejercicios

Luis Antonio Ortega Andrés,
Guillermo Galindo Ortuño

March 3, 2020

Ejercicio 1. *Sea A un anillo. Diremos que A es trivial si $A = \{0\}$. Demostrar que A es trivial si, y sólo si, $1 = 0$.*

Supongamos que A es trivial, entonces como A es un anillo, $\exists 1 \in A \implies 0 = 1$. Sea ahora $1 = 0$, sea $a \in A$ se tiene que $a = a * 1 = a * 0 = 0 \implies A = \{0\}$.

Ejercicio 2. *Sea K un cuerpo y $M_n(K)$ el anillo de matrices cuadradas de orden n con entradas en K. Demostrar que $Z(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\}$, donde I_n es la matriz identidad de orden n.*

Es evidente que $\{kI_n \mid k \in K\} \subset Z(M_n(K))$. Tomemos $A \in Z(M_n(K))$, $E_{ij} \in M_n(K)$ la matriz de ceros salvo un 1 en la position (i, j). Se tiene que

$$E_{ij}A = AE_{ij} \ \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Pero es sencillo comprobar que $E_{ij}A$ es una matriz de ceros salvo por tener la fila j-ésima de A en la fila i-ésima. De igual forma AE_{ij} es una matriz de ceros salvo por tener la columna i-ésima de A en la columna j-ésima.
Luego estamos igualando una matriz con una sola fila no nula y una con una sola columna no nula, por ello A debe ser diagonal. Además, el valor i-ésimo y el valor j-ésimo de la diagonal deben coincidir. Con esto $A \in \{kI_n \mid k \in K\}$.

Ejercicio 3. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y el conjunto*

$$End_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

comprobar que es un subanillo de $End(V)$. Consideremos la aplicación $h : K \to End_K(V)$ que asigna a cada $k \in K$ la homotecia $h(k) : V \to V$, definido por $h(k)(v) = kv \ \forall v \in V$. Comprobar que h está bien definida y que es un morfismo de anillos. Además si $T : V \to V$ es K-lineal y $k \in K$, comprobar que $T \circ h(k) = h(k) \circ T$, luego $Im(h) \subset Z(End_K(V))$. Con esto $End_K(V)$ es una K-álgebra.

Es claro que con las operaciones de $End(V)$, se converva la K-linealidad, luego $End_K(V)$ es un subanillo.
La aplicación h está bien definida por ser V un espacio vectorial sobre K. Veamos que es un morfismo de anillos.

- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(a+b)(v) = (a+b)v = av+bv = h(a)(v)+h(b)(v) = (h(a)+h(b))(v)$
- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = ak(b)(v) = k(a) \circ k(b)(v)$
- Sea $v \in V$, $k(1)(v) = 1v = v = Id(v)$

Hagamos la última comprobación que se nos pide $T \circ h(k)(v) = T(kv) = kT(v) = h(k) \circ T(v)$.

Ejercicio 4. *Supongamos que A y B son K-álgebras con morfismos de estructura ρ_A y ρ_B. Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos. Demostrar que ϕ es un morfismo de K-álgebras si, y sólo si, $\phi \circ \rho_A = \rho_B$.*

Supongamos que $\phi \circ \rho_A = \rho_B$, sean $k \in K$ y $a \in A$

$$\phi(ka) = \phi(\rho_A(k) \star a) = \phi \circ \rho_A(k) \star \phi(a) = \rho_B(k) \star \phi(a) = k\phi(a)$$

Que es la única propiedad que necesita ϕ para ser un morfismo de K-espacios vectoriales.
Supongamos ahora que ϕ un morfismo de K-álgebras, veamos que $\phi \circ \rho_A = \rho_B$. Sea $k \in K, b \in B$

$$\phi \circ \rho_A(k) = \phi(k \star 1_A) = \phi(k) \star \phi(1_A) = k \star 1_B = k1_B = \rho_B(k)$$

Ejercicio 5. *Sea A un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demostrar que dar una estructura de K-álgebra asociativa unital sobre A es equivalente a dar una multiplicación asociativa K-bilineal $\star : A \times A \to A$ junto con una aplicación K-lineal $\tau : K \to A$ tal que $\tau(k) \star a = ka = a \star \tau(k)$ $\forall k \in K, a \in A$*

Supongamos que tenemos una estructura de K-álgebra sobre A. Denotamos $\star$ a la multiplicación de A como anillo y $\tau : K \to Z(A)$ al morfismo que dota de estructura de K-álgebra. Veamos que τ es K-lineal, sea $k \in K$:

$$\tau(k) = \tau(k) \star 1_A = k1_A = k\tau(1_K)$$

Comprobemos ahora que $\star$ es K-bilineal, la bilinealidad viene dada por la estructura de anillo. Sean $k \in K, a, b \in A$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (ka) \star b$$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (a \star \tau(k)) \star b = a \star (\tau(k) \star b) = a \star (kb)$$

Supongamos ahora que tenemos ambas aplicaciones definidas. Notamos que $\tau(1_K) \star a = 1_K a = a = a \star \tau(1_K)$. Luego $\tau(1_K) := 1_A$ actua como elemento neutro de A para la operación $\star$. Si comprobamos que A con $(\star, 1_A)$ es un anillo, entonces tendremos que A es una K-álgebra. Como la operación es asociativa por hipótesis y ya tenemos el elemento neutro, solo nos quedaría comprobar la distributividad que la tenemos por ser $\star$ una aplicación bilineal.

Ejercicio 6. * *Sea K un cuerpo. Comprobar que el anillo de polinomios es una $K[X]$-álgebra. Si ahora tomamos un ideal no nulo I de $K[X]$, comprobar que $A = K[X]/I$ tiene estructura de K-álgebra. Sabemos que existe un único polinómio $p(X) \in K[X]$ tal que $I = \langle p(X) \rangle$. Llamamos n*

al grado de $p(X)$, y suponemos $n > 0$. Comprobar que $\mathcal{B} = \{1+I, x+I, \dots, x^{n-1}+I\}$ es una base de A como K-espacio vectorial y, por tanto $dim_K A = n$. Sea

$$p(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 \cdots + X^n$$

Comprobar que la matriz de $M_n(K)$ que representa al endomorfismo $\lambda(x+I)$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$\tilde{N}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \dots & 0 & -p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

y que A es isomorfa a la subálgebra $\{a_0 I + a_1 \tilde{N}(p) + \cdots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K\} \subset M_n(K)$

El anillo de polinomios $K[X]$ es una K-álgebra utilizando el morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \rho : K &\to K[X] \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

El morfismo de anillos que da a $A = K[X]/I$ estructura de K-álgebra es el siguiente:

$$\begin{aligned} \rho : K &\to K[X]/I \\ k &\mapsto k + I \end{aligned}$$

La comprobación de que se tratan de morfismos de anillos es rutinaria. El algoritmo de división nos asegura que todos los polinomios de A tienen grado a lo sumo $n-1$, por tanto $\mathcal{B}$ es un sistema de generadores de A y forman una base por ser linealmente independientes.
Sea el endomorfismo $\lambda(x+I)(a) = (x+I)a$, es claro que las primeras $n-1$ columnas de la matriz $\tilde{N}(p)$ corresponden a multiplicar $x+I$ por los elementos $1+I, \dots, x^{n-2}+I$. Ahora,

$$(x+I)(x^{n-1}+I) = x^n + I = -p(X) + I$$

De ahí la última columna de la matriz.
Dado $a \in A$ con $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ en $\mathcal{B}$ el morfismo de K-álgebras lleva $(a_0, \dots, a_{n-1}) \to a_0 I + a_1\tilde{N}(p) + \cdots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1}$
TODO terminar

Ejercicio 7. * *Sea K un cuerpo. Dar la lista, salvo isomorfismos, de todas las K-álgebras asociativas unitales de dimensión 2.*

Sea A una K-álgebra con morfismo de estructura ρ. Sea $\{1, a\}$ la base de A como espacio vectorial. Consideramos

$$\begin{aligned} f : K[X] &\to A \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) \\ x &\mapsto a \end{aligned}$$

Es un morfismo de álgebras por ser $\rho = f \circ \rho_K$ con ρ_K el morfismo de estructura de $K[X]$.
Notamos que la imagen de f tiene dimensión 2 como espacio vectorial, luego es sobreyectivo (?).
Esto nos dice que existe I ideal de $K[X]$ tal que $K[X]/I \cong A$. Por ello, buscar álgebras de dimensión 2 es equivalente a buscar ideales del anillo de polinomios $K[X]$.
Tenemos entonces 3 opciones

- $K[X]/\langle x^2 - 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 + 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 \rangle$

TODO Comprobar que es verdad TODO Comprobar cuales son asociativos unitales

Ejercicio 8. *Expresar el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2}$ como una $\mathbb{Q}$-álgebra de un álgebra de matrices sobre $\mathbb{Q}$.*

Tomamos la base $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}\}$, el morfismo inyectivo de $\mathbb{Q}$-álgebras $m = M_{\mathcal{B}} \circ \lambda : \mathbb{Q} \to M_{''}(\mathbb{Q})$ verificando:

- $\lambda(a + b\sqrt{2})(1) = a + b\sqrt{2} \implies (a, b)$ en $\mathbb{B}$
- $\lambda(a + b\sqrt{2})(\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + 2b \implies (2b, a)$ en $\mathbb{B}$

Luego

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \{m(a + b\sqrt{2}), a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Ejercicio 9. *Sea*

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

1. Demostrar que $\mathbb{H}$ es una subálgebra real de $M_2(\mathbb{C})$ y que $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$
2. Demostrar que todo elemento no nulo de $\mathbb{H}$ es una unidad
3. Demostrar que las matrices

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

forman una base de $\mathbb{H}$ como espacio vectorial real.
4. Comprobar las identidades

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \ \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \ \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

Para ver que es una subálgebra, vemos que $\mathbb{H}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{C})$, vemos que es cerrado para la suma de matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \bar{\alpha_1} + \bar{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

y para la multiplicación

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta_1} \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta_2} \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta_1}\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta_2} - \bar{\beta_1}\bar{\alpha_2} \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha_1}\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta_2} + \bar{\alpha_1}\bar{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

además $1 \in \mathbb{H}$
Para que un elemento esté en el centro deben coincidir

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta_1} \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta_2} \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta_1}\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta_2} - \bar{\beta_1}\bar{\alpha_2} \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha_1}\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta_2} + \bar{\alpha_1}\bar{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta_2} \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta_1} \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_1 - \bar{\beta_2}\beta_1 & -\alpha_2\bar{\beta_1} - \bar{\beta_2}\bar{\alpha_1} \\ \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha_2}\beta_1 & -\beta_2\bar{\beta_1} + \bar{\alpha_2}\bar{\alpha_1} \end{bmatrix}$$

Para tener esto necesitamos $\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha_1}\beta_2 = \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha_2}\beta_1 \implies \beta_1 = 0$ y $\alpha_1 = \bar{\alpha_1}$. Luego $\alpha \in \mathbb{R}$

$$Z(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

2. Para ver que todo elemento es una unidad basta tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}/\|\alpha\| & \bar{\beta}/\|\beta\| \\ -\beta/\|\beta\| & \alpha/\|\alpha\| \end{bmatrix}$$

3. Veamos ahora que dichas matrices son una base, es sencillo ver que son linealmente independientes, luego comprobemos que son un sistema de generadores

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = Re(\alpha)\mathbf{1} + Re(\beta)\mathbf{i} + Im(\alpha)\mathbf{j} + Im(\beta)\mathbf{k}$$

4. Para comprobar dichas identidades basta con realizar las cuentas correspondientes.

Ejercicio 10. *Dado un A-módulo V no nulo, demostrar que*

$$Ann_A(V) = \{a \in A : av = 0 \ \forall v \in V\}$$

es un ideal de A. Dotar a V de estructura de $A/Ann_A(V)$-módulo fiel (es decir, la representación correspondiente es fiel).

Sean $a, b \in Ann_A(V)$, tenemos que $(a+b)(v) = av + bv = 0 \implies a + b \in Ann_A(V)$. Sea ahora $a \in Ann_A(V), b \in A$, $(ab)v = a(bv) = 0 \implies ab \in Ann_A(V)$ luego tenemos un ideal.
Una representación es fiel si y solo si su núcleo es trivial. Sea ρ el morfismo de estructura de V, tenemos que $Ker(\rho) = Ann_A(V)$ que hemos visto es un ideal, luego para dotar a V de estructura de $A/Ann_A(V)$-módulo fiel definimos el morfismo de estructura

$$\tau : A/Ann_A(V) \to End(V)$$
$$a + Ann_A(V) \mapsto \rho(a)$$

Ejercicio 11. *Sea M un A-módulo*

1. *Dados submódulos $N_1, \ldots, N_m$ de M, tenemos que*
$$N_1 + \cdots + N_m = \{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\}.$$

2. *Dado $X = \{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$, tenemos que $RX = Rm_1 + \cdots + Rm_n$.*

1. Por $N_1, \ldots, N_m$ submódulos es claro que $N_1 \cup \cdots \cup N_m \subset \{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\}$ y que $\{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\}$ es también un submódulos de M.
Supongamos ahora que existe N submódulo de M con $\cup_i N_i \subset N$ submódulo de M. Para cualesquiera $n_1, \ldots, n_m$ en $N_1, \ldots, N_m$ respectivamente, por contener N a la unión de todos los N_i,
$$n_i \in N \forall i = 1, \ldots, m.$$
Y por N submódulo,
$$\sum_i n_i \in N \implies \{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\} \subset N.$$

2. La inclusión de izquierda a derecha es inmediata pues $Rm_1 + \cdots + Rm_n$ es un submódulo que contiene X. Para la otra inclusión, claramente $Rm_1, \ldots, Rm_n \subset Rx$. Ahora, usando el apartado anterior, y que Rx es un submódulo de M, tenemos $Rm_1 + \cdots + Rm_n \subset Rx$

Ejercicio 27. ** *Sea R un álgebra sobre un cuerpo de característica distinta de 2, y $a, b, e \in R$ idempotentes. Demostrar que si $e = a+b$, entonces $ab = ba = 0$. Si la característica es 2, encontrar un contraejemplo con $b \neq a$.*

Por e, a, b idempotentes, tenemos que
$$a + b = e = e^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = a + b + ab + ba \implies ab + ba = 0.$$
Luego
$$ab = -ba. \tag{1}$$
Multiplicando a izquierda y derecha por a, por ser este idempotente tenemos que $aba = -aba$. Ahora, usando que $char(R) \neq 2$, $aba = 0$. Por último, sustituyendo ab ó ba respectivamente usando (1), tenemos
$$0 = aba = -baa = -ba \implies ba = 0$$
$$0 = aba = -aab = -ab \implies ab = 0.$$
Veamos ahora el contraejemplo. Sea $\mathbb{F}_2$ el cuerpo de dos elementos (el más sencillo con característica 2), y $M_2(\mathbb{F}_2)$ la $\mathbb{F}_2-$álgebra usual de matrices de orden 2 sobre este cuerpo. Entonces, tomamos
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e = a + b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
En efecto, es sencillo comprobar que $a, b,$ y e son idempotentes, y que por $b = I_2$, efectivamente $ab = ba = a \neq 0$