Álgebras, Grupos y Representaciones
Ejercicios

Luis Antonio Ortega Andrés

February 23, 2020

Ejercicio 1. *Sea A un anillo. Diremos que A es trivial si $A = \{0\}$. Demostrar que A es trivial si, y sólo si,* $1 = 0$.

Supongamos que A es trivial, entonces como A es un anillo, $\exists 1 \in A \implies 0 = 1$. Sea ahora $1 = 0$, sea $a \in A$ se tiene que $a = a * 1 = a * 0 = 0 \implies A = \{0\}$.

Ejercicio 2. *Sea K un cuerpo y $M_n(K)$ el anillo de matrices cuadradas de orden n con entradas en K. Demostrar que $Z(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\}$, donde I_n es la matriz identidad de orden n.*

Es evidente que $\{kI_n \mid k \in K\} \subset Z(M_n(K))$. Tomemos $A \in Z(M_n(K))$, $E_{ij} \in M_n(K)$ la matriz de ceros salvo un 1 en la position (i, j). Se tiene que

$$E_{ij}A = AE_{ij} \ \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Pero es sencillo comprobar que $E_{ij}A$ es una matriz de ceros salvo por tener la fila j-ésima de A en la fila i-ésima. De igual forma AE_{ij} es una matriz de ceros salvo por tener la columna i-ésima de A en la columna j-ésima.
Luego estamos igualando una matriz con una sola fila no nula y una con una sola columna no nula, por ello A debe ser diagonal. Además, el valor i-ésimo y el valor j-ésimo de la diagonal deben coincidir. Con esto $A \in \{kI_n \mid k \in K\}$.

Ejercicio 3. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y el conjunto*

$$End_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

comprobar que es un subanillo de $End(V)$. Consideremos la aplicación $h : K \to End_K(V)$ que asigna a cada $k \in K$ la homotecia $h(k) : V \to V$, definido por $h(k)(v) = kv \ \forall v \in V$. Comprobar que h está bien definida y que es un morfismo de anillos. Además si $T : V \to V$ es K-lineal y $k \in K$, comprobar que $T \circ h(k) = h(k) \circ T$, luego $Im(h) \subset Z(End_K(V))$. Con esto $End_K(V)$ es una K-álgebra.

Es claro que con las operaciones de $End(V)$, se converva la K-linealidad, luego $End_K(V)$ es un subanillo.
La aplicación h está bien definida por ser V un espacio vectorial sobre K. Veamos que es un morfismo de anillos.

- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(a+b)(v) = (a+b)v = av + bv = h(a)(v) + h(b)(v) = (h(a)+h(b))(v)$
- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = ak(b)(v) = k(a) \circ k(b)(v)$
- Sea $v \in V$, $k(1)(v) = 1v = v = Id(v)$

Hagamos la última comprobación que se nos pide $T \circ h(k)(v) = T(kv) = kT(v) = h(k) \circ T(v)$.

Ejercicio 4. *Supongamos que A y B son K-álgebras son morfismos de estructura ρ_A y ρ_B. Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos. Demostrar que ϕ es un morfismo de K-álgebras si, y sólo si, $\phi \circ \rho_A = \rho_B$.*

Ejercicio 5. *Sea A un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demostrar que dar una estructura de K-álgebra asociativa unital sobre A es equivalente a dar una multiplicación asociativa K-bilineal $\star : A \times A \to A$ junto con una aplicación K-lineal $\tau : K \to A$ tal que $\tau(k) \star a = ka = a \star \tau(k)$ $\forall k \in K, a \in A$*