

# Álgebras, Grupos y Representaciones

## Ejercicios

Luis Antonio Ortega Andrés,  
Guillermo Galindo Ortuño

March 4, 2020

**Ejercicio 1.** Sea  $A$  un anillo. Diremos que  $A$  es trivial si  $A = \{0\}$ . Demostrar que  $A$  es trivial si, y sólo si,  $1 = 0$ .

Supongamos que  $A$  es trivial, entonces como  $A$  es un anillo,  $\exists 1 \in A \implies 0 = 1$ . Sea ahora  $1 = 0$ , sea  $a \in A$  se tiene que  $a = a * 1 = a * 0 = 0 \implies A = \{0\}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $K$  un cuerpo y  $M_n(K)$  el anillo de matrices cuadradas de orden  $n$  con entradas en  $K$ . Demostrar que  $Z(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\}$ , donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

Es evidente que  $\{kI_n \mid k \in K\} \subset Z(M_n(K))$ . Tomemos  $A \in Z(M_n(K))$ ,  $E_{ij} \in M_n(K)$  la matriz de ceros salvo un 1 en la posición  $(i, j)$ . Se tiene que

$$E_{ij}A = AE_{ij} \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Pero es sencillo comprobar que  $E_{ij}A$  es una matriz de ceros salvo por tener la fila  $j$ -ésima de  $A$  en la fila  $i$ -ésima. De igual forma  $AE_{ij}$  es una matriz de ceros salvo por tener la columna  $i$ -ésima de  $A$  en la columna  $j$ -ésima.

Luego estamos igualando una matriz con una sola fila no nula y una con una sola columna no nula, por ello  $A$  debe ser diagonal. Además, el valor  $i$ -ésimo y el valor  $j$ -ésimo de la diagonal deben coincidir. Con esto  $A \in \{kI_n \mid k \in K\}$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$  y el conjunto

$$\text{End}_K(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

comprobar que es un subanillo de  $\text{End}(V)$ . Consideremos la aplicación  $h : K \rightarrow \text{End}_K(V)$  que asigna a cada  $k \in K$  la homotecia  $h(k) : V \rightarrow V$ , definido por  $h(k)(v) = kv \quad \forall v \in V$ . Comprobar que  $h$  está bien definida y que es un morfismo de anillos. Además si  $T : V \rightarrow V$  es  $K$ -lineal y  $k \in K$ , comprobar que  $T \circ h(k) = h(k) \circ T$ , luego  $\text{Im}(h) \subset Z(\text{End}_K(V))$ . Con esto  $\text{End}_K(V)$  es una  $K$ -álgebra.

Es claro que con las operaciones de  $\text{End}(V)$ , se conserva la  $K$ -linealidad, luego  $\text{End}_K(V)$  es un subanillo.

La aplicación  $h$  está bien definida por ser  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ . Veamos que es un morfismo de anillos.

- Sean  $a, b \in K$  y  $v \in V$ ,  $h(a+b)(v) = (a+b)v = av + bv = h(a)(v) + h(b)(v) = (h(a) + h(b))(v)$
- Sean  $a, b \in K$  y  $v \in V$ ,  $h(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = ak(b)(v) = k(a) \circ k(b)(v)$
- Sea  $v \in V$ ,  $k(1)(v) = 1v = v = Id(v)$

Hagamos la última comprobación que se nos pide  $T \circ h(k)(v) = T(kv) = kT(v) = h(k) \circ T(v)$ .

**Ejercicio 4.** *Supongamos que  $A$  y  $B$  son  $K$ -álgebras con morfismos de estructura  $\rho_A$  y  $\rho_B$ . Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Demostrar que  $\phi$  es un morfismo de  $K$ -álgebras si, y sólo si,  $\phi \circ \rho_A = \rho_B$ .*

Supongamos que  $\phi \circ \rho_A = \rho_B$ , sean  $k \in K$  y  $a \in A$

$$\phi(ka) = \phi(\rho_A(k) \star a) = \phi \circ \rho_A(k) \star \phi(a) = \rho_B(k) \star \phi(a) = k\phi(a)$$

Que es la única propiedad que necesita  $\phi$  para ser un morfismo de  $K$ -espacios vectoriales.

Supongamos ahora que  $\phi$  un morfismo de  $K$ -álgebras, veamos que  $\phi \circ \rho_A = \rho_B$ . Sea  $k \in K, b \in B$

$$\phi \circ \rho_A(k) = \phi(k \star 1_A) = \phi(k) \star \phi(1_A) = k \star 1_B = k1_B = \rho_B(k)$$

**Ejercicio 5.** *Sea  $A$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$ . Demostrar que dar una estructura de  $K$ -álgebra asociativa unital sobre  $A$  es equivalente a dar una multiplicación asociativa  $K$ -bilineal  $\star : A \times A \rightarrow A$  junto con una aplicación  $K$ -lineal  $\tau : K \rightarrow A$  tal que  $\tau(k) \star a = ka = a \star \tau(k) \forall k \in K, a \in A$*

Supongamos que tenemos una estructura de  $K$ -álgebra sobre  $A$ . Denotamos  $\star$  a la multiplicación de  $A$  como anillo y  $\tau : K \rightarrow Z(A)$  al morfismo que dota de estructura de  $K$ -álgebra. Veamos que  $\tau$  es  $K$ -lineal, sea  $k \in K$ :

$$\tau(k) = \tau(k) \star 1_A = k1_A = k\tau(1_K)$$

Comprobemos ahora que  $\star$  es  $K$ -bilineal, la bilinealidad viene dada por la estructura de anillo. Sean  $k \in K, a, b \in A$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (ka) \star b$$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (a \star \tau(k)) \star b = a \star (\tau(k) \star b) = a \star (kb)$$

Supongamos ahora que tenemos ambas aplicaciones definidas. Notamos que  $\tau(1_K) \star a = 1_K a = a = a \star \tau(1_K)$ . Luego  $\tau(1_K) := 1_A$  actúa como elemento neutro de  $A$  para la operación  $\star$ . Si comprobamos que  $A$  con  $(\star, 1_A)$  es un anillo, entonces tendremos que  $A$  es una  $K$ -álgebra. Como la operación es asociativa por hipótesis y ya tenemos el elemento neutro, solo nos quedaría comprobar la distributividad que la tenemos por ser  $\star$  una aplicación bilineal.

**Ejercicio 6.** \* *Sea  $K$  un cuerpo. Comprobar que el anillo de polinomios es una  $K[X]$ -álgebra. Si ahora tomamos un ideal no nulo  $I$  de  $K[X]$ , comprobar que  $A = K[X]/I$  tiene estructura de  $K$ -álgebra. Sabemos que existe un único polinomio  $p(X) \in K[X]$  tal que  $I = \langle p(X) \rangle$ . Llamamos  $n$*

al grado de  $p(X)$ , y suponemos  $n > 0$ . Comprobar que  $\mathcal{B} = \{1 + I, x + I, \dots, x^{n-1} + I\}$  es una base de  $A$  como  $K$ -espacio vectorial y, por tanto  $\dim_K A = n$ . Sea

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 \dots + X^n$$

Comprobar que la matriz de  $M_n(K)$  que representa al endomorfismo  $\lambda(x + I)$  con respecto a la base  $\mathcal{B}$  es

$$\tilde{N}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \dots & 0 & -p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

y que  $A$  es isomorfa a la subálgebra  $\{a_0I + a_1\tilde{N}(p) + \dots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K\} \subset M_n(K)$

El anillo de polinomios  $K[X]$  es una  $K$ -álgebra utilizando el morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \rho : K &\rightarrow K[X] \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

El morfismo de anillos que da a  $A = K[X]/I$  estructura de  $K$ -álgebra es el siguiente:

$$\begin{aligned} \rho : K &\rightarrow K[X]/I \\ k &\mapsto k + I \end{aligned}$$

La comprobación de que se tratan de morfismos de anillos es rutinaria. El algoritmo de división nos asegura que todos los polinomios de  $A$  tienen grado a lo sumo  $n - 1$ , por tanto  $\mathcal{B}$  es un sistema de generadores de  $A$  y forman una base por ser linealmente independientes.

Sea el endomorfismo  $\lambda(x + I)(a) = (x + I)a$ , es claro que las primeras  $n - 1$  columnas de la matriz  $\tilde{N}(p)$  corresponden a multiplicar  $x + I$  por los elementos  $1 + I, \dots, x^{n-2} + I$ . Ahora,

$$(x + I)(x^{n-1} + I) = x^n + I = -p(X) + I$$

De ahí la última columna de la matriz.

Dado  $a \in A$  con  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$  en  $\mathcal{B}$  el morfismo de  $K$ -álgebras lleva  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \rightarrow a_0I + a_1\tilde{N}(p) + \dots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1}$

**TODO terminar**

**Ejercicio 7. \*** Sea  $K$  un cuerpo. Dar la lista, salvo isomorfismos, de todas las  $K$ -álgebras asociativas uniales de dimensión 2.

Sea  $A$  una  $K$ -álgebra con morfismo de estructura  $\rho$ . Sea  $\{1, a\}$  la base de  $A$  como espacio vectorial. Consideramos

$$\begin{aligned} f : K[X] &\rightarrow A \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) \\ x &\mapsto a \end{aligned}$$

Es un morfismo de álgebras por ser  $\rho = f \circ \rho_K$  con  $\rho_K$  el morfismo de estructura de  $K[X]$ .  
 Notamos que la imagen de  $f$  tiene dimensión 2 como espacio vectorial, luego es sobreyectivo (?).  
 Esto nos dice que existe  $I$  ideal de  $K[X]$  tal que  $K[X]/I \cong A$ . Por ello, buscar álgebras de dimensión 2 es equivalente a buscar ideales del anillo de polinomios  $K[X]$ .

Tenemos entonces 3 opciones

- $K[X]/\langle x^2 - 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 + 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 \rangle$

**TODO Comprobar que es verdad TODO Comprobar cuales son asociativos unitales**

**Ejercicio 8.** Expresar el cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  como una  $\mathbb{Q}$ -álgebra de un álgebra de matrices sobre  $\mathbb{Q}$ .

Tomamos la base  $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}\}$ , el morfismo inyectivo de  $\mathbb{Q}$ -álgebras  $m = M_{\mathcal{B}} \circ \lambda : \mathbb{Q} \rightarrow M_2(\mathbb{Q})$  verificando:

- $\lambda(a + b\sqrt{2})(1) = a + b\sqrt{2} \implies (a, b) \text{ en } \mathbb{B}$
- $\lambda(a + b\sqrt{2})(\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + 2b \implies (2b, a) \text{ en } \mathbb{B}$

Luego

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \{m(a + b\sqrt{2}), a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

**Ejercicio 9.** Sea

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

1. Demostrar que  $\mathbb{H}$  es una subálgebra real de  $M_2(\mathbb{C})$  y que  $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$
2. Demostrar que todo elemento no nulo de  $\mathbb{H}$  es una unidad
3. Demostrar que las matrices

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

forman una base de  $\mathbb{H}$  como espacio vectorial real.

4. Comprobar las identidades

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

Para ver que es una subálgebra, vemos que  $\mathbb{H}$  es un subespacio vectorial de  $M_2(\mathbb{C})$ , vemos que es cerrado para la suma de matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

y para la multiplicación

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

además  $1 \in \mathbb{H}$

Para que un elemento esté en el centro deben coincidir

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_1 - \bar{\beta}_2\beta_1 & -\alpha_2\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2\bar{\alpha}_1 \\ \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\beta_1 & -\beta_2\bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1 \end{bmatrix}$$

Para tener esto necesitamos  $\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 = \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\beta_1 \implies \beta_1 = 0$  y  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ . Luego  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$Z(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

2. Para ver que todo elemento es una unidad basta tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}/\|\alpha\| & \bar{\beta}/\|\beta\| \\ -\beta/\|\beta\| & \alpha/\|\alpha\| \end{bmatrix}$$

3. Veamos ahora que dichas matrices son una base, es sencillo ver que son linealmente independientes, luego comprobemos que son un sistema de generadores

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \operatorname{Re}(\alpha)\mathbf{1} + \operatorname{Re}(\beta)\mathbf{i} + \operatorname{Im}(\alpha)\mathbf{j} + \operatorname{Im}(\beta)\mathbf{k}$$

4. Para comprobar dichas identidades basta con realizar las cuentas correspondientes.

**Ejercicio 10.** Dado un  $A$ -módulo  $V$  no nulo, demostrar que

$$\operatorname{Ann}_A(V) = \{a \in A : av = 0 \ \forall v \in V\}$$

es un ideal de  $A$ . Dotar a  $V$  de estructura de  $A/\operatorname{Ann}_A(V)$ -módulo fiel (es decir, la representación correspondiente es fiel).

Sean  $a, b \in \operatorname{Ann}_A(V)$ , tenemos que  $(a + b)(v) = av + bv = 0 \implies a + b \in \operatorname{Ann}_A(V)$ . Sea ahora  $a \in \operatorname{Ann}_A(V), b \in A, (ab)v = a(bv) = 0 \implies ab \in \operatorname{Ann}_A(V)$  luego tenemos un ideal.

Una representación es fiel si y solo si su núcleo es trivial. Sea  $\rho$  el morfismo de estructura de  $V$ , tenemos que  $\operatorname{Ker}(\rho) = \operatorname{Ann}_A(V)$  que hemos visto es un ideal, luego para dotar a  $V$  de estructura de  $A/\operatorname{Ann}_A(V)$ -módulo fiel definimos el morfismo de estructura

$$\tau : A/\operatorname{Ann}_A(V) \rightarrow \operatorname{End}(V)$$

$$a + \operatorname{Ann}_A(V) \mapsto \rho(a)$$

**Ejercicio 11.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo

1. Dados submódulos  $N_1, \dots, N_m$  de  $M$ , tenemos que

$$N_1 + \dots + N_m = \{n_1 + \dots + n_m : n_i \in N_i\}.$$

2. Dado  $X = \{m_1, \dots, m_n\} \subset M$ , tenemos que  $RX = Rm_1 + \dots + Rm_n$ .

1. Por  $N_1, \dots, N_m$  submódulos es claro que  $N_1 \cup \dots \cup N_m \subset \{n_1 + \dots + n_m : n_i \in N_i\}$  y que  $\{n_1 + \dots + n_m : n_i \in N_i\}$  es también un submódulo de  $M$ .

Supongamos ahora que existe  $N$  submódulo de  $M$  con  $\cup_i N_i \subset N$  submódulo de  $M$ . Para cualesquiera  $n_1, \dots, n_m$  en  $N_1, \dots, N_m$  respectivamente, por contener  $N$  a la unión de todos los  $N_i$ ,

$$n_i \in N \forall i = 1, \dots, m.$$

Y por  $N$  submódulo,

$$\sum_i n_i \in N \implies \{n_1 + \dots + n_m : n_i \in N_i\} \subset N.$$

2. La inclusión de izquierda a derecha es inmediata pues  $Rm_1 + \dots + Rm_n$  es un submódulo que contiene  $X$ . Para la otra inclusión, claramente  $Rm_1, \dots, Rm_n \subset Rx$ . Ahora, usando el apartado anterior, y que  $Rx$  es un submódulo de  $M$ , tenemos  $Rm_1 + \dots + Rm_n \subset Rx$

**Ejercicio 12.** Demostrar que un conjunto de generadores  $m_i : i \in I$  de un módulo  ${}_A M$  es una base si, y solo si, la igualdad  $\sum_i r_i m_i = 0$  para  $r_i \in A$  implica  $r_i = 0$  para todo  $\forall i \in I$ . Dar un ejemplo de módulo no nulo finitamente generado que no sea libre.

Razonemos por contradicción para la primera implicación. Supongamos que  $m_1, \dots, m_n$  es base de  ${}_A M$  y que existen  $r_1, \dots, r_n$ , con  $r_k \neq 0$  tal que  $\sum_i r_i m_i = 0$ . Sea  $m \in M$  con  $m = \sum_i a_i m_i$ . Entonces

$$m = \sum_i a_i m_i = \sum_i a_i m_i + \sum_i r_i m_i = \sum_i (a_i + r_i) m_i$$

con  $a_k + r_k \neq a_k$ . Por tanto  $m_1, \dots, m_n$  no sería base.

Para la otra implicación, supongamos que existen  $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$  tales que  $\sum_i a_i m_i = \sum_i a'_i m_i$ . Entonces,

$$\sum_i a_i m_i - \sum_i a'_i m_i = 0 \implies \sum_i (a_i - a'_i) m_i = 0 \implies a_i = a'_i \forall i \in I.$$

**Ejercicio 27. \*\*** Sea  $R$  un álgebra sobre un cuerpo de característica distinta de 2, y  $a, b, e \in R$  idempotentes. Demostrar que si  $e = a + b$ , entonces  $ab = ba = 0$ . Si la característica es 2, encontrar un contraejemplo con  $b \neq a$ .

Por  $e, a, b$  idempotentes, tenemos que

$$a + b = e = e^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = a + b + ab + ba \implies ab + ba = 0.$$

Luego

$$ab = -ba. \tag{1}$$

Multiplicando a izquierda y derecha por  $a$ , por ser este idempotente tenemos que  $aba = -aba$ . Ahora, usando que  $\text{char}(R) \neq 2$ ,  $aba = 0$ . Por último, sustituyendo  $ab$  ó  $ba$  respectivamente usando (1), tenemos

$$0 = aba = -baa = -ba \implies ba = 0$$

$$0 = aba = -aab = -ab \implies ab = 0.$$

Veamos ahora el contraejemplo. Sea  $\mathbb{F}_2$  el cuerpo de dos elementos (el más sencillo con característica 2), y  $M_2(\mathbb{F}_2)$  la  $\mathbb{F}_2$ -álgebra usual de matrices de orden 2 sobre este cuerpo. Entonces, tomamos

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = a + b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, es sencillo comprobar que  $a, b$ , y  $e$  son idempotentes, y que por  $b = I_2$ , efectivamente  $ab = ba = a \neq 0$