Álgebras, Grupos y Representaciones

Ejercicios

Luis Antonio Ortega Andrés

February 24, 2020

Ejercicio 1. *Sea A un anillo. Diremos que A es trivial si $A = \{0\}$. Demostrar que A es trivial si, y sólo si, $1 = 0$.*

Supongamos que A es trivial, entonces como A es un anillo, $\exists 1 \in A \implies 0 = 1$. Sea ahora $1 = 0$, sea $a \in A$ se tiene que $a = a * 1 = a * 0 = 0 \implies A = \{0\}$.

Ejercicio 2. *Sea K un cuerpo y $M_n(K)$ el anillo de matrices cuadradas de orden n con entradas en K. Demostrar que $Z(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\}$, donde I_n es la matriz identidad de orden n.*

Es evidente que $\{kI_n \mid k \in K\} \subset Z(M_n(K))$. Tomemos $A \in Z(M_n(K))$, $E_{ij} \in M_n(K)$ la matriz de ceros salvo un 1 en la position (i, j). Se tiene que

$$E_{ij}A = AE_{ij} \ \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Pero es sencillo comprobar que $E_{ij}A$ es una matriz de ceros salvo por tener la fila j-ésima de A en la fila i-ésima. De igual forma AE_{ij} es una matriz de ceros salvo por tener la columna i-ésima de A en la columna j-ésima.
Luego estamos igualando una matriz con una sola fila no nula y una con una sola columna no nula, por ello A debe ser diagonal. Además, el valor i-ésimo y el valor j-ésimo de la diagonal deben coincidir. Con esto $A \in \{kI_n \mid k \in K\}$.

Ejercicio 3. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y el conjunto*

$$End_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

comprobar que es un subanillo de $End(V)$. Consideremos la aplicación $h : K \to End_K(V)$ que asigna a cada $k \in K$ la homotecia $h(k) : V \to V$, definido por $h(k)(v) = kv \ \forall v \in V$. Comprobar que h está bien definida y que es un morfismo de anillos. Además si $T : V \to V$ es K-lineal y $k \in K$, comprobar que $T \circ h(k) = h(k) \circ T$, luego $Im(h) \subset Z(End_K(V))$. Con esto $End_K(V)$ es una K-álgebra.

Es claro que con las operaciones de $End(V)$, se converva la K-linealidad, luego $End_K(V)$ es un subanillo.
La aplicación h está bien definida por ser V un espacio vectorial sobre K. Veamos que es un morfismo de anillos.

- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(a+b)(v) = (a+b)v = av + bv = h(a)(v) + h(b)(v) = (h(a) + h(b))(v)$
- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = ak(b)(v) = k(a) \circ k(b)(v)$
- Sea $v \in V$, $k(1)(v) = 1v = v = Id(v)$

Hagamos la última comprobación que se nos pide $T \circ h(k)(v) = T(kv) = kT(v) = h(k) \circ T(v)$.

Ejercicio 4. TODO. *Supongamos que A y B son K-álgebras son morfismos de estructura ρ_A y ρ_B. Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos. Demostrar que ϕ es un morfismo de K-álgebras si, y sólo si, $\phi \circ \rho_A = \rho_B$.*

Sea $\phi \circ \rho_A = \rho_B$ la propiedad de ϕ que debemos comprobar para ser un morfismo de K-álgebras es que dados $a \in A$ y $k \in K$ se cumple que $\phi(ka) = k\phi(a)$.

Ejercicio 5. *Sea A un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demostrar que dar una estructura de K-álgebra asociativa unital sobre A es equivalente a dar una multiplicación asociativa K-bilineal $\star : A \times A \to A$ junto con una aplicación K-lineal $\tau : K \to A$ tal que $\tau(k) \star a = ka = a \star \tau(k)$ $\forall k \in K, a \in A$*

Supongamos que tenemos una estructura de K-álgebra sobre A. Denotamos $\star$ a la multiplicación de A como anillo y $\tau : K \to Z(A)$ al morfismo que dota de estructura de K-álgebra. Veamos que τ es K-lineal, sea $k \in K$:

$$\tau(k) = \tau(k) \star 1_A = k1_A = k\tau(1_K)$$

Comprobemos ahora que $\star$ es K-bilineal, la bilinealidad viene dada por la estructura de anillo. Sean $k \in K, a, b \in A$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (ka) \star b$$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (a \star \tau(k)) \star b = a \star (\tau(k) \star b) = a \star (kb)$$

Supongamos ahora que tenemos ambas aplicaciones definidas. Notamos que $\tau(1_K) \star a = 1_K a = a = a \star \tau(1_K)$. Luego $\tau(1_K) := 1_A$ actua como elemento neutro de A para la operación $\star$. Si comprobamos que A con $(\star, 1_A)$ es un anillo, entonces tendremos que A es una K-álgebra. Como la operación es asociativa por hipótesis y ya tenemos el elemento neutro, solo nos quedaría comprobar la distributividad que la tenemos por ser $\star$ una aplicación bilineal.

Ejercicio 6. * *Sea K un cuerpo. Comprobar que el anillo de polinomios es una $K[X]$-álgebra. Si ahora tomamos un ideal no nulo I de $K[X]$, comprobar que $A = K[X]/I$ tiene estructura de K-álgebra. Sabemos que existe un único polinómio $p(X) \in K[X]$ tal que $I = \langle p(X) \rangle$. Llamamos n al grado de $p(X)$, y suponemos $n > 0$. Comprobar que $\mathcal{B} = \{1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I\}$ es una base de A como K-espacio vectorial y, por tanto $dim_K A = n$. Sea*

$$p(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 \cdots + X^n$$

Comprobar que la matriz de $M_n(K)$ que representa al endomorfismo $\lambda(x+I)$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ es

$$\tilde{N}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \dots & 0 & -p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

y que A es isomorfa a la subálgebra $\{a_0 I + a_1 \tilde{N}(p) + \cdots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K\} \subset M_n(K)$

El anillo de polinomios $K[X]$ es una K-álgebra utilizando el morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \rho : K &\to K[X] \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

El morfismo de anillos que da a $A = K[X]/I$ estructura de K-álgebra es el siguiente:

$$\begin{aligned} \rho : K &\to K[X]/I \\ k &\mapsto k + I \end{aligned}$$

La comprobación de que se tratan de morfismos de anillos es rutinaria. El algoritmo de división nos asegura que todos los polinomios de A tienen grado a lo sumo $n-1$, por tanto $\mathcal{B}$ es un sistema de generadores de A y forman una base por ser linealmente independientes.
Sea el endomorfismo $(x+I)(a) = (x+I)a$, es claro que las primeras $n-1$ columnas de la matriz $\tilde{N}(p)$ corresponden a multiplicar $x+I$ por los elementos $1+I, \dots, x^{n-2}+I$. Ahora,

$$(x+I)(x^{n-1}+I) = x^n + I = -p(X) + I$$

De ahí la última columna de la matriz.
TODO: Dar isomorfismo y comprobarlo

Ejercicio 7. * *Sea K un cuerpo. Dar la lista, salvo isomorfismos, de todas las K-álgebras asociativas unitales de dimensión 2.*

Ejercicio 8. *Expresar el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt(2))$ como una $\mathbb{Q}$-álgebra de un álgebra de matrices sobre $\mathbb{Q}$.*