# Álgebras, Grupos y Representaciones

Ejercicios

Luis Antonio Ortega Andrés,
Guillermo Galindo Ortuño

March 31, 2020

**Ejercicio 1.** *Sea $A$ un anillo. Diremos que $A$ es trivial si $A = \{0\}$. Demostrar que $A$ es trivial si, y sólo si, $1 = 0$.*

Supongamos que $A$ es trivial, entonces como $A$ es un anillo, $\exists 1 \in A \implies 0 = 1$. Sea ahora $1 = 0$, sea $a \in A$ se tiene que $a = a * 1 = a * 0 = 0 \implies A = \{0\}$.

**Ejercicio 2.** *Sea $K$ un cuerpo y $M_n(K)$ el anillo de matrices cuadradas de orden $n$ con entradas en $K$. Demostrar que $Z(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\}$, donde $I_n$ es la matriz identidad de orden $n$.*

Es evidente que $\{kI_n \mid k \in K\} \subset Z(M_n(K))$. Tomemos $A \in Z(M_n(K))$, $E_{ij} \in M_n(K)$ la matriz de ceros salvo un 1 en la position $(i, j)$. Se tiene que

$$E_{ij}A = AE_{ij} \ \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Pero es sencillo comprobar que $E_{ij}A$ es una matriz de ceros salvo por tener la fila $j$-ésima de $A$ en la fila $i$-ésima. De igual forma $AE_{ij}$ es una matriz de ceros salvo por tener la columna $i$-ésima de $A$ en la columna $j$-ésima.
Luego estamos igualando una matriz con una sola fila no nula y una con una sola columna no nula, por ello $A$ debe ser diagonal. Además, el valor $i$-ésimo y el valor $j$-ésimo de la diagonal deben coincidir. Con esto $A \in \{kI_n \mid k \in K\}$.

**Ejercicio 3.** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $K$ y el conjunto*

$$End_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

*comprobar que es un subanillo de $End(V)$. Consideremos la aplicación $h : K \to End_K(V)$ que asigna a cada $k \in K$ la homotecia $h(k) : V \to V$, definido por $h(k)(v) = kv \ \forall v \in V$. Comprobar que $h$ está bien definida y que es un morfismo de anillos. Además si $T : V \to V$ es $K$-lineal y $k \in K$, comprobar que $T \circ h(k) = h(k) \circ T$, luego $Im(h) \subset Z(End_K(V))$. Con esto $End_K(V)$ es una $K$-álgebra.*

Es claro que con las operaciones de $End(V)$, se converva la $K$-linealidad, luego $End_K(V)$ es un subanillo.
La aplicación $h$ está bien definida por ser $V$ un espacio vectorial sobre $K$. Veamos que es un morfismo de anillos.

- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(a+b)(v) = (a+b)v = av+bv = h(a)(v)+h(b)(v) = (h(a)+h(b))(v)$
- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = ak(b)(v) = k(a) \circ k(b)(v)$
- Sea $v \in V$, $k(1)(v) = 1v = v = Id(v)$

Hagamos la última comprobación que se nos pide $T \circ h(k)(v) = T(kv) = kT(v) = h(k) \circ T(v)$.

**Ejercicio 4.** *Supongamos que $A$ y $B$ son $K$-álgebras con morfismos de estructura $\rho_A$ y $\rho_B$. Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos. Demostrar que $\phi$ es un morfismo de $K$-álgebras si, y sólo si, $\phi \circ \rho_A = \rho_B$.*

Supongamos que $\phi \circ \rho_A = \rho_B$, sean $k \in K$ y $a \in A$

$$\phi(ka) = \phi(\rho_A(k) \star a) = \phi \circ \rho_A(k) \star \phi(a) = \rho_B(k) \star \phi(a) = k\phi(a)$$

Que es la única propiedad que necesita $\phi$ para ser un morfismo de $K$-espacios vectoriales.
Supongamos ahora que $\phi$ un morfismo de $K$-álgebras, veamos que $\phi \circ \rho_A = \rho_B$. Sea $k \in K, b \in B$

$$\phi \circ \rho_A(k) = \phi(k \star 1_A) = \phi(k) \star \phi(1_A) = k \star 1_B = k1_B = \rho_B(k)$$

**Ejercicio 5.** *Sea $A$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $K$. Demostrar que dar una estructura de $K$-álgebra asociativa unital sobre $A$ es equivalente a dar una multiplicación asociativa $K$-bilineal $\star : A \times A \to A$ junto con una aplicación $K$-lineal $\tau : K \to A$ tal que $\tau(k) \star a = ka = a \star \tau(k)$ $\forall k \in K, a \in A$*

Supongamos que tenemos una estructura de $K$-álgebra sobre $A$. Denotamos $\star$ a la multiplicación de $A$ como anillo y $\tau : K \to Z(A)$ al morfismo que dota de estructura de $K$-álgebra. Veamos que $\tau$ es $K$-lineal, sea $k \in K$:

$$\tau(k) = \tau(k) \star 1_A = k1_A = k\tau(1_K)$$

Comprobemos ahora que $\star$ es $K$-bilineal, la bilinealidad viene dada por la estructura de anillo. Sean $k \in K, a, b \in A$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (ka) \star b$$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (a \star \tau(k)) \star b = a \star (\tau(k) \star b) = a \star (kb)$$

Supongamos ahora que tenemos ambas aplicaciones definidas. Notamos que $\tau(1_K) \star a = 1_K a = a = a \star \tau(1_K)$. Luego $\tau(1_K) := 1_A$ actua como elemento neutro de $A$ para la operación $\star$. Si comprobamos que $A$ con $(\star, 1_A)$ es un anillo, entonces tendremos que $A$ es una $K$-álgebra. Como la operación es asociativa por hipótesis y ya tenemos el elemento neutro, solo nos quedaría comprobar la distributividad que la tenemos por ser $\star$ una aplicación bilineal.

**Ejercicio 6. *** *Sea $K$ un cuerpo. Comprobar que el anillo de polinomios es una $K[X]$-álgebra. Si ahora tomamos un ideal no nulo $I$ de $K[X]$, comprobar que $A = K[X]/I$ tiene estructura de $K$-álgebra. Sabemos que existe un único polinómio $p(X) \in K[X]$ tal que $I = \langle p(X) \rangle$. Llamamos $n$*

*al grado de $p(X)$, y suponemos $n > 0$. Comprobar que $\mathcal{B} = \{1+I, x+I, \dots, x^{n-1}+I\}$ es una base de $A$ como $K$-espacio vectorial y, por tanto $dim_K A = n$. Sea*

$$p(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 \cdots + X^n$$

*Comprobar que la matriz de $M_n(K)$ que representa al endomorfismo $\lambda(x+I)$ con respecto a la base $\mathcal{B}$ es*

$$\tilde{N}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \dots & 0 & -p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

*y que $A$ es isomorfa a la subálgebra $\{a_0 I + a_1 \tilde{N}(p) + \cdots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K\} \subset M_n(K)$*

El anillo de polinomios $K[X]$ es una $K$-álgebra utilizando el morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \rho : K &\to K[X] \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

El morfismo de anillos que da a $A = K[X]/I$ estructura de $K$-álgebra es el siguiente:

$$\begin{aligned} \rho : K &\to K[X]/I \\ k &\mapsto k + I \end{aligned}$$

La comprobación de que se tratan de morfismos de anillos es rutinaria. El algoritmo de división nos asegura que todos los polinomios de $A$ tienen grado a lo sumo $n-1$, por tanto $\mathcal{B}$ es un sistema de generadores de $A$ y forman una base por ser linealmente independientes.
Sea el endomorfismo $\lambda(x+I)(a) = (x+I)a$, es claro que las primeras $n-1$ columnas de la matriz $\tilde{N}(p)$ corresponden a multiplicar $x+I$ por los elementos $1+I, \dots, x^{n-2}+I$. Ahora,

$$(x+I)(x^{n-1}+I) = x^n + I = -p(X) + I$$

De ahí la última columna de la matriz.
Dado $a \in A$ con $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ en $\mathcal{B}$ el morfismo de K-álgebras lleva $(a_0, \dots, a_{n-1}) \to a_0 I + a_1\tilde{N}(p) + \cdots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1}$
**TODO terminar**

**Ejercicio 7. *** *Sea $K$ un cuerpo. Dar la lista, salvo isomorfismos, de todas las $K$-álgebras asociativas unitales de dimensión 2.*

Sea $A$ una $K$-álgebra con morfismo de estructura $\rho$. Sea $\{1, a\}$ la base de $A$ como espacio vectorial. Consideramos

$$\begin{aligned} f : K[X] &\to A \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) \\ x &\mapsto a \end{aligned}$$

Es un morfismo de álgebras por ser $\rho = f \circ \rho_K$ con $\rho_K$ el morfismo de estructura de $K[X]$. Notamos que la imagen de $f$ tiene dimensión 2 como espacio vectorial, luego es sobreyectivo (?). Esto nos dice que existe $I$ ideal de $K[X]$ tal que $K[X]/I \cong A$. Por ello, buscar álgebras de dimensión 2 es equivalente a buscar ideales del anillo de polinomios $K[X]$.
Tenemos entonces 3 opciones

- $K[X]/\langle x^2 - 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 + 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 \rangle$

**TODO Comprobar que es verdad TODO Comprobar cuales son asociativos unitales**

**Ejercicio 8.** *Expresar el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2}$ como una $\mathbb{Q}$-álgebra de un álgebra de matrices sobre $\mathbb{Q}$.*

Tomamos la base $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}\}$, el morfismo inyectivo de $\mathbb{Q}$-álgebras $m = M_{\mathcal{B}} \circ \lambda : \mathbb{Q} \to M_{''}(\mathbb{Q})$ verificando:

- $\lambda(a + b\sqrt{2})(1) = a + b\sqrt{2} \implies (a, b)$ en $\mathbb{B}$
- $\lambda(a + b\sqrt{2})(\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + 2b \implies (2b, a)$ en $\mathbb{B}$

Luego

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \{m(a + b\sqrt{2}), a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

**Ejercicio 9.** *Sea*

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

*1. Demostrar que $\mathbb{H}$ es una subálgebra real de $M_2(\mathbb{C})$ y que $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$*
*2. Demostrar que todo elemento no nulo de $\mathbb{H}$ es una unidad*
*3. Demostrar que las matrices*

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

*forman una base de $\mathbb{H}$ como espacio vectorial real.*
*4. Comprobar las identidades*

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \ \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \ \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

Para ver que es una subálgebra, vemos que $\mathbb{H}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{C})$, vemos que es cerrado para la suma de matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \bar{\alpha_1} + \bar{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

y para la multiplicación

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta_1} \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta_2} \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta_1}\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta_2} - \bar{\beta_1}\bar{\alpha_2} \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha_1}\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta_2} + \bar{\alpha_1}\bar{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

además $1 \in \mathbb{H}$
Para que un elemento esté en el centro deben coincidir

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta_1} \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta_2} \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta_1}\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta_2} - \bar{\beta_1}\bar{\alpha_2} \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha_1}\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta_2} + \bar{\alpha_1}\bar{\alpha_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta_2} \\ \beta_2 & \bar{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta_1} \\ \beta_1 & \bar{\alpha_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_1 - \bar{\beta_2}\beta_1 & -\alpha_2\bar{\beta_1} - \bar{\beta_2}\bar{\alpha_1} \\ \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha_2}\beta_1 & -\beta_2\bar{\beta_1} + \bar{\alpha_2}\bar{\alpha_1} \end{bmatrix}$$

Para tener esto necesitamos $\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha_1}\beta_2 = \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha_2}\beta_1 \implies \beta_1 = 0$ y $\alpha_1 = \bar{\alpha_1}$. Luego $\alpha \in \mathbb{R}$

$$Z(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : \; a \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

2. Para ver que todo elemento es una unidad basta tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}/\|\alpha\| & \bar{\beta}/\|\beta\| \\ -\beta/\|\beta\| & \alpha/\|\alpha\| \end{bmatrix}$$

3. Veamos ahora que dichas matrices son una base, es sencillo ver que son linealmente independientes, luego comprobemos que son un sistema de generadores

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = Re(\alpha)\mathbf{1} + Re(\beta)\mathbf{i} + Im(\alpha)\mathbf{j} + Im(\beta)\mathbf{k}$$

4. Para comprobar dichas identidades basta con realizar las cuentas correspondientes.

**Ejercicio 10.** *Dado un $A$-módulo $V$ no nulo, demostrar que*

$$Ann_A(V) = \{a \in A : av = 0 \; \forall v \in V\}$$

*es un ideal de $A$. Dotar a $V$ de estructura de $A/Ann_A(V)$-módulo fiel (es decir, la representación correspondiente es fiel).*

Sean $a, b \in Ann_A(V)$, tenemos que $(a+b)(v) = av + bv = 0 \implies a + b \in Ann_A(V)$. Sea ahora $a \in Ann_A(V), b \in A$, $(ab)v = a(bv) = 0 \implies ab \in Ann_A(V)$ luego tenemos un ideal.
Una representación es fiel si y solo si su núcleo es trivial. Sea $\rho$ el morfismo de estructura de $V$, tenemos que $Ker(\rho) = Ann_A(V)$ que hemos visto es un ideal, luego para dotar a $V$ de estructura de $A/Ann_A(V)$-módulo fiel definimos el morfismo de estructura

$$\begin{aligned} \tau : A/Ann_A(V) &\to End(V) \\ a + Ann_A(V) &\mapsto \rho(a) \end{aligned}$$

**Ejercicio 11.** *Sea $M$ un $A$-módulo*

1. *Dados submódulos $N_1, \ldots, N_m$ de $M$, tenemos que*

$$N_1 + \cdots + N_m = \{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\}.$$

2. *Dado $X = \{m_1, \ldots, m_n\} \subset M$, tenemos que $RX = Rm_1 + \cdots + Rm_n$.*

**1.** Por $N_1, \ldots, N_m$ submódulos es claro que $N_1 \cup \cdots \cup N_m \subset \{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\}$ y que $\{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\}$ es también un submódulos de $M$.
Supongamos ahora que existe $N$ submódulo de M con $\cup_i N_i \subset N$ submódulo de $M$. Para cualesquiera $n_1, \ldots, n_m$ en $N_1, \ldots, N_m$ respectivamente, por contener $N$ a la unión de todos los $N_i$,

$$n_i \in N \forall i = 1, \ldots, m.$$

Y por $N$ submódulo,

$$\sum_i n_i \in N \implies \{n_1 + \cdots + n_m : n_i \in Ni\} \subset N.$$

**2.** La inclusión de izquierda a derecha es inmediata pues $Rm_1 + \cdots + Rm_n$ es un submódulo que contiene $X$. Para la otra inclusión, claramente $Rm_1, \ldots, Rm_n \subset Rx$. Ahora, usando el apartado anterior, y que $Rx$ es un submódulo de $M$, tenemos $Rm_1 + \cdots + Rm_n \subset Rx$

**Ejercicio 12.** *Demostrar que un conjunto de generadores $m_i : i \in I$ de un módulo ${}_AM$ es una base si, y solo si, la igualdad $\sum_i r_i m_i = 0$ para $r_i \in A$ implica $r_i = 0$ para todo $\forall i \in I$. Dar un ejemplo de módulo no nulo finitamente generado que no sea libre.*

Razonemos por contradicción para la primera implicación. Supongamos que $m_1, \ldots, m_n$ es base de ${}_AM$ y que existen $r_1, \ldots, r_n$, con $r_k \neq 0$ tal que $\sum_i r_i m_i = 0$. Sea $m \in M$ con $m = \sum_i a_i m_i$. Entonces

$$m = \sum_i a_i m_i = \sum_i a_i m_i + \sum_i r_i m_i = \sum_i (a_i + r_i) m_i$$

con $a_k + r_k \neq a_k$. Por tanto $m_1, \ldots, m_n$ no sería base.
Para la otra implicación, supongamos que existen $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots a'_n \in A$ tales que $\sum_i a_i m_i = \sum_i a'_i m_i$. Entonces,

$$\sum_i a_i m_i - \sum_i a'_i m_i = 0 \implies \sum_i (a_i - a'_i) m_i = 0 \implies a_i = a'_i \quad \forall i \in I.$$

Un ejemplo de módulo no nulo finitamente generado que no sea libre es $\mathbb{Z}_2$ visto como $\mathbb{Z}$-módulo. Claramente es finitamente generado pues solo tiene 2 elementos, y la única posible base sería 1, pero no lo es por $2 \cdot 1 = 0$

**Ejercicio 13.** *Para cada A-módulo M, demostrar que el conjunto* $End_A(M)$ *es un subanillo de* $End(M)$*. Demostrar que si, además, M es libre con base* $m_1, \dots, m_n$*, entonces* $End_A(M)^{op}$ *es isomorfo, como anillo, a* $M_n(A)$*. Discutir qué ocurre cuando A es un álgebra sobre un cuerpo K.*

Veamos que $End_A(M)$ es un subanillo. Sean $f, g \in End_A(M)$. Entonces

- $(f+g)(am) = f(am) + g(am) = a(f(m) + g(m)) = a(f+g)(m)$
- $(fg)(am) = f(g(am)) = a(f(g(m))) = a(fg)(m)$
- $id(am) = am = a(id)(m)$

.
Ahora, por $m_1, \dots, m_n$ base de $M$, dado $f \in End_A(M)$, podemos realizar el procedimiento similar al que utilzamos para aplicaciones lineales en espacios vectoriales, definiendo el morfismo $\varphi : End_A(M)^{op} \to M_n(A) con$:

$$\varphi(f) = (a_{ij})^t =: \Lambda_f$$

donde $a_{ij}$ viene dado por $f(m_j) = \sum_i a_{ij} m_i$. La inversa sería, dada una matriz, el endomorfismo asociado a su transpuesta (de manera análoga a como se hace para aplicaciones lineales de espacios vectoriales). Para ver que son morfismo de anillos únicamente probaremos que respetan el producto, pues el resto de propiedades son inmediatas. Sean $f, g \in End_A(M)^{op}$,

$$\varphi(f * g) = \varphi(g \circ f) = (\Lambda_g * \Lambda_f)^t = (\Lambda_f)^t * (\Lambda_g)^t = \varphi(f) * \varphi(g).$$

**Ejercicio 14.** *Sea M un módulo sobre una álgebra finito-dimensional A. Demostrar que si M admite bases* $\{m_1, \dots, m_r\}$ *y* $\{n_1, \dots, n_t\}$*, entonces* $r = t$*.*

Supongamos $r \neq t$, entonces $M \cong A^r$ y $M \cong A^t \implies A^r \cong A^t$, pero como $A$ es finito-dimensional, sabemos que eso no puede pasar si $r \neq t$.

**Ejercicio 15** . *Sea* $\theta$ *y* $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *el endomorfismo que gira los vectores un ángulo* $\theta$ *en sentido contrario de las agujas del reloj. Consideremos la correspondiente estructura de* $R[X]$*-módulo definida por* $T_\theta$ *sobre* $\mathbb{R}^2$*. Llamamos a este módulo* $V_\theta$*. Discutir para que valores de* $\theta$ *es* $V_\theta$ *simple.*

Claramente, si $\theta = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{N}$, el submódulo generado por cualquier vector es la recta vetorial con ese vector director, y por tanto $V_\theta$ no es simple.
Por otro lado, si $\theta \neq k\pi \forall k \in \mathbb{N}$, tomando un vector $v$ cualquiera, y $T_\theta(v)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, y por tanto cualquier submódulo distinto del vacío es el total y $V_\theta$ es simple

**Ejercicio 16** *Siguiendo la notación del Ejercicio 15, ¿para qué valores* $\theta, \theta'$ *son los* $\mathbb{R}[X]$*-módulos* $V_\theta, V_{\theta'}$ *isomorfos?*

Idea: Si es $q \cdot \pi$ siendo $q$ racional únicamente si $\theta y \theta'$ son el mismo ángulo u opuestos. Si son el mismo el morfismo es la identidad, y si son opuestos, fijas un vector, y el morfismo es el que lleva cada vector en el simétrico respecto del eje dado por dicho vector. En caso contrario, tras aplicar un número de veces el giro sobre $V_\theta$ volvemos al vector original, y sin embargo eso no ocurre en el nuevo. (No está formalizado y es muy probable que esté mal.)

**Ejercicio 17** *Sea $M$ un $A$-módulo. Demostrar que $M$ es simple si, y solo si, $M = Am$ paa todo $0 \neq m \in M$.*

Claramente, si $M$ es simple, por $Am$ submódulo tiene que ser $M$ o $\{0\}$, y por $m \neq 0$ tenemos que $Am = M$.
La otra implicación es también casi inmediata. Supongamos que existe $N \subset M$ submódulo distinto de $\{0\}$. Entonces, sea $n \in N$ distinto de 0, tenemos que $An \subset N$, pero como $An = M$, $N = M$.

**Ejercicio 18** *Sea $A$ un anillo. Demostrar que $A$ es un anillo de división si, y solo si, $A$ es un $A$-módulo simple.*

Supongamos que $A$ es un anillo de división. Entonces, para todo $0 \neq m \in A$ tenemos que $1 \in Am$ y por tanto $Am = A$, y usando el ejercicio anterior tenemos que $A$ es un $A$-módulo simple.
Supongamos ahora que $A$ es un $A$-módulo simple. Entonces para todo $0 \neq m \in A$ tenemos que $Am = A$, y por tanto, $1 \in Am$, y como la acción de $A$ es el producto, existe un elemento $a^{-1} \in A$ tal que $a^{-1}a = 1$.

**Ejercicio 20. *** *Consideramos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y la estructura de $\mathbb{R}[X]$-módulo correspondiente sobre $\mathbb{R}^3$. Discutir los posibles valores de la longitud de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}[X]$-módulo, dependiendo de como sea $T$. Poner un ejemplo de $T$ para que se alcance cada longitud.*

Sabemos que un submódulo de nuestro $\mathbb{R}[x]$-módulo sobre $mathbbR^3$ tiene que ser un subespacio de este, por tanto las posibles longitudes son:

- 2. Supuesto que no podemos encontrar ningún submódulo distinto del total o el vacío.
- 3. En cuyo caso, el subespacio asociado al submódulo podrá ser de dimensión 1 o 2.
- 4. En cuyo caso, tendremos un subespacio de dimensión 1, y otro de dimensión 2.

A continuación mostramos un ejemplo de aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que genere un módulo de cada una de las posibles longitudes. Para dar la aplicación lineal únicamente tendremos que definir la imagen de una base de nuestro espacio, y por tanto utilizaremos la base usual $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ por comodidad.

**Longitud 2**
ESTO ESTÁ MAL

$$T : \mathbb{R}^3 :\to \mathbb{R}^3$$

tal que

$$T((1,0,0)) = (0,1,0),$$
$$T((0,1,0)) = (0,0,1),$$
$$T((0,0,1)) = (1,0,0).$$

Es facil ver que la dimesión de cualquier submódulo distinto del 0 tiene que ser el total, pues en cuanto tengas un vector distinto del vacío, aplicando $T$ una y dos veces obtiene.
**Longitud 3**

$$T : \mathbb{R}^3 :\to \mathbb{R}^3$$

tal que

$$T((1,0,0)) = (1,0,0),$$
$$T((0,1,0)) = (0,0,1),$$
$$T((0,0,1)) = (0,1,0).$$

Con esto, la cadena de longitud 3 sería:

$$0 \subset < (0,1,0), ().$$

**Ejercicio 21.** *Sea $\mathbb{P}_n$ el espacio vectorial real de las funcione polinómicas en una variable de grado menor o igual que $n$. Sea $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ la aplicación lineal que asigna a cada polinomio su derivada. Calcular una serie de composición de $\mathbb{P}_n$ visto como $\mathbb{R}[X]$-módulo via $T$.*

Consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{P}_{n-1}, \dots, \mathbb{P}_0$, es claro que $\mathbb{P}_i \subset \mathbb{P}_{i+1}$ es un subgrupo y es cerrado bajo derivación, luego es un submódulo. Esto nos permite crear la cadena

$$0 \subset \mathbb{P}_0 \subset \cdots \subset \mathbb{P}_n$$

Solo nos queda comprobar que cada eslabón este formado por un submódulo maximal, tomamos $\mathbb{P}_i \subset \mathbb{P}_{i+1}$, y añadamos un polinomio $p$ de grado $i+1$ a $\mathbb{P}_i$, entonces es claro que con las operaciones de grupo podemos construir cualquier polinomio de grado $i+1$, luego $\langle(p, \mathbb{P}_i)\rangle = \mathbb{P}_{i+1}$. Por lo tanto, los eslabones son maximales y tenemos una serie de composición.

**Ejercicio 22. **** *En las condiciones del ejercicio anterior, calcular todos los $\mathbb{R}[X]$-submódulos de $\mathbb{P}_n$.*

Como hemos visto en el apartado anterior, disponemos de $\{\mathbb{P}_i\}_{i=0,\dots,n}$ Comprobemos que no tenemos otros submódulos, notemos que estamos buscando subgrupos cerrados bajo la acción de $\mathbb{R}[X]$, de forma que, potencias de $x$ actúan derivando el polinomio el número de veces que indique el exponente, y los números reales actúan multiplicándose por los polinomios.
Es decir, si tomamos $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_qx^q \in \mathbb{R}[X]$, actúa sobre un polinomio $p \in \mathbb{P}_n$, de la forma

$$f \star p = a_0p + a_1p^{(1)} + \cdots + a_qp^{(q)}$$

donde $p^{(i)}$ denota la derivada $i$-ésima de $p$.
Supongamos entonces que queremos ver cuál es el menor submódulo que contiene a $p$. Notamos que al tener $p$, tenemos todos sus polinomios proporcionales y todas sus derivadas, luego tenemos un polinomio de cada grado hasta el 0. Supongamos que el grado de $p$ es $m$, entonces existen unos coeficientes reales $b_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^m = b_0p + b_1p^{(1)} + \cdots + b_mp^{(m)}$$

Luego $x^m$, está en nuestro submódulo, de igual forma están todos los $x^i$ para $i = 0, \dots, m$, luego el submódulo resulta ser $\mathbb{P}_m$.
Por ello estos son todos los submódulos que tenemos.

**Ejercicio 25.** ** *Supongamos $T : V \to V$ un endomorfismo K-lineal, donde $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita que consideramos, como de costumbre, como un $K[X]$-módulo. Supongamos que el polinomio mínimo $m(X)$ de $T$ es irreducible en $K[X]$. Demostrar que existen $K[X]$-submódulos simples $V_1, \dots, V_t$ de $V$ tales que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ como $K[X]$-módulo.*

Por $m(X)$ irreducible, tenemos que $K[X]/Ker\ e_T = K[X]/m(X)$ es un cuerpo. Entonces, podemos ver $V$ como un $K[X]/Ker\ e_T$ espacio vectorial, utilizando la misma acción que utilizamos para la estructura de $K[X]$-módulo. Para ello, tenemos que comprobar que la acción está bien definida. En efecto, sean $p(X), q(X)$ pertencientes a una misma clase del cociente. Entonces

$$p(X) = q(X) + r(X)m(X),$$

y por tanto

$$p(T) = q(T) + r(T)m(T) = q(T)$$

por $m(X) \in Ker\ e_T$.

Ahora, sea $\{v_i : i \in I\} \subset V$ un conjunto de generadores de $V$, por el corolario 1.6.6 existe $J \in I$ tal que $V = \oplus_{j\in J}(K[X]/Ker\ e_T)v_j$, siendo cada uno de estos submódulos simples. Ahora, volviendo a ver $V$ como $K[X]$-módulo, los submódulos $K[X]v_j$ para $j \in J$ son simples, pues en caso de tener un súbmodulo propio $M$, este sería también submódulo de $(K[X]/Ker\ e_T)v_j$.

Por tanto, tenemos que $V = \sum_{j\in J} K[X]v_j$, con $K[X]v_j$ simple para todo $j$ en $J$. Al igual que hicimos en el corolario 1.6.6, aplicamos el teorema 1.6.5 para obtener un $\Gamma$ tal que $V = \oplus_{t\in\Gamma} K[X]v_t$.

**Ejercicio 27.** ** *Sea $R$ un álgebra sobre un cuerpo de característica distinta de 2, y $a, b, e \in R$ idempotentes. Demostrar que si $e = a+b$, entonces $ab = ba = 0$. Si la característica es 2, encontrar un contraejemplo con $b \neq a$.*

Por $e, a, b$ idempotentes, tenemos que

$$a + b = e = e^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = a + b + ab + ba \implies ab + ba = 0.$$

Luego

$$ab = -ba. \tag{1}$$

Multiplicando a izquierda y derecha por $a$, por ser este idempotente tenemos que $aba = -aba$. Ahora, usando que $char(R) \neq 2$, $aba = 0$. Por último, sustituyendo $ab$ ó $ba$ respectivamente usando (1), tenemos

$$0 = aba = -baa = -ba \implies ba = 0$$
$$0 = aba = -aab = -ab \implies ab = 0.$$

Veamos ahora el contraejemplo. Sea $\mathbb{F}_2$ el cuerpo de dos elementos (el más sencillo con característica 2), y $M_2(\mathbb{F}_2)$ la $\mathbb{F}_2-$álgebra usual de matrices de orden 2 sobre este cuerpo. Entonces, tomamos

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e = a + b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, es sencillo comprobar que $a, b,$ y $e$ son idempotentes, y que por $b = I_2$, efectivamente $ab = ba = a \neq 0$