

Álgebras, Grupos y Representaciones

Ejercicios

Luis Antonio Ortega Andrés

March 2, 2020

Ejercicio 1. Sea A un anillo. Diremos que A es trivial si $A = \{0\}$. Demostrar que A es trivial si, y sólo si, $1 = 0$.

Supongamos que A es trivial, entonces como A es un anillo, $\exists 1 \in A \implies 0 = 1$. Sea ahora $1 = 0$, sea $a \in A$ se tiene que $a = a * 1 = a * 0 = 0 \implies A = \{0\}$.

Ejercicio 2. Sea K un cuerpo y $M_n(K)$ el anillo de matrices cuadradas de orden n con entradas en K . Demostrar que $Z(M_n(K)) = \{kI_n \mid k \in K\}$, donde I_n es la matriz identidad de orden n .

Es evidente que $\{kI_n \mid k \in K\} \subset Z(M_n(K))$. Tomemos $A \in Z(M_n(K))$, $E_{ij} \in M_n(K)$ la matriz de ceros salvo un 1 en la position (i, j) . Se tiene que

$$E_{ij}A = AE_{ij} \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Pero es sencillo comprobar que $E_{ij}A$ es una matriz de ceros salvo por tener la fila j -ésima de A en la fila i -ésima. De igual forma AE_{ij} es una matriz de ceros salvo por tener la columna i -ésima de A en la columna j -ésima.

Luego estamos igualando una matriz con una sola fila no nula y una con una sola columna no nula, por ello A debe ser diagonal. Además, el valor i -ésimo y el valor j -ésimo de la diagonal deben coincidir. Con esto $A \in \{kI_n \mid k \in K\}$.

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y el conjunto

$$\text{End}_K(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

comprobar que es un subanillo de $\text{End}(V)$. Consideremos la aplicación $h : K \rightarrow \text{End}_K(V)$ que asigna a cada $k \in K$ la homotecia $h(k) : V \rightarrow V$, definido por $h(k)(v) = kv \quad \forall v \in V$. Comprobar que h está bien definida y que es un morfismo de anillos. Además si $T : V \rightarrow V$ es K -lineal y $k \in K$, comprobar que $T \circ h(k) = h(k) \circ T$, luego $\text{Im}(h) \subset Z(\text{End}_K(V))$. Con esto $\text{End}_K(V)$ es una K -álgebra.

Es claro que con las operaciones de $\text{End}(V)$, se conserva la K -linealidad, luego $\text{End}_K(V)$ es un subanillo.

La aplicación h está bien definida por ser V un espacio vectorial sobre K . Veamos que es un morfismo de anillos.

- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(a+b)(v) = (a+b)v = av + bv = h(a)(v) + h(b)(v) = (h(a) + h(b))(v)$
- Sean $a, b \in K$ y $v \in V$, $h(ab)(v) = (ab)v = a(bv) = ak(b)(v) = k(a) \circ k(b)(v)$
- Sea $v \in V$, $k(1)(v) = 1v = v = Id(v)$

Hagamos la última comprobación que se nos pide $T \circ h(k)(v) = T(kv) = kT(v) = h(k) \circ T(v)$.

Ejercicio 4. Supongamos que A y B son K -álgebras con morfismos de estructura ρ_A y ρ_B . Sea $\phi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Demostrar que ϕ es un morfismo de K -álgebras si, y sólo si, $\phi \circ \rho_A = \rho_B$.

Supongamos que $\phi \circ \rho_A = \rho_B$, sean $k \in K$ y $a \in A$

$$\phi(ka) = \phi(\rho_A(k) \star a) = \phi \circ \rho_A(k) \star \phi(a) = \rho_B(k) \star \phi(a) = k\phi(a)$$

Que es la única propiedad que necesita ϕ para ser un morfismo de K -espacios vectoriales.

Supongamos ahora que ϕ un morfismo de K -álgebras, veamos que $\phi \circ \rho_A = \rho_B$. Sea $k \in K, b \in B$

$$\phi \circ \rho_A(k) = \phi(k \star 1_A) = \phi(k) \star \phi(1_A) = k \star 1_B = k1_B = \rho_B(k)$$

Ejercicio 5. Sea A un espacio vectorial sobre un cuerpo K . Demostrar que dar una estructura de K -álgebra asociativa unital sobre A es equivalente a dar una multiplicación asociativa K -bilineal $\star : A \times A \rightarrow A$ junto con una aplicación K -lineal $\tau : K \rightarrow A$ tal que $\tau(k) \star a = ka = a \star \tau(k) \forall k \in K, a \in A$

Supongamos que tenemos una estructura de K -álgebra sobre A . Denotamos \star a la multiplicación de A como anillo y $\tau : K \rightarrow Z(A)$ al morfismo que dota de estructura de K -álgebra. Veamos que τ es K -lineal, sea $k \in K$:

$$\tau(k) = \tau(k) \star 1_A = k1_A = k\tau(1_K)$$

Comprobemos ahora que \star es K -bilineal, la bilinealidad viene dada por la estructura de anillo. Sean $k \in K, a, b \in A$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (ka) \star b$$

$$k(a \star b) = \tau(k) \star (a \star b) = (\tau(k) \star a) \star b = (a \star \tau(k)) \star b = a \star (\tau(k) \star b) = a \star (kb)$$

Supongamos ahora que tenemos ambas aplicaciones definidas. Notamos que $\tau(1_K) \star a = 1_K a = a = a \star \tau(1_K)$. Luego $\tau(1_K) := 1_A$ actúa como elemento neutro de A para la operación \star . Si comprobamos que A con $(\star, 1_A)$ es un anillo, entonces tendremos que A es una K -álgebra. Como la operación es asociativa por hipótesis y ya tenemos el elemento neutro, solo nos quedaría comprobar la distributividad que la tenemos por ser \star una aplicación bilineal.

Ejercicio 6. * Sea K un cuerpo. Comprobar que el anillo de polinomios es una $K[X]$ -álgebra. Si ahora tomamos un ideal no nulo I de $K[X]$, comprobar que $A = K[X]/I$ tiene estructura de K -álgebra. Sabemos que existe un único polinomio $p(X) \in K[X]$ tal que $I = \langle p(X) \rangle$. Llamamos n

al grado de $p(X)$, y suponemos $n > 0$. Comprobar que $\mathcal{B} = \{1 + I, x + I, \dots, x^{n-1} + I\}$ es una base de A como K -espacio vectorial y, por tanto $\dim_K A = n$. Sea

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 \dots + X^n$$

Comprobar que la matriz de $M_n(K)$ que representa al endomorfismo $\lambda(x + I)$ con respecto a la base \mathcal{B} es

$$\tilde{N}(p) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \dots & 0 & -p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

y que A es isomorfa a la subálgebra $\{a_0I + a_1\tilde{N}(p) + \dots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K\} \subset M_n(K)$

El anillo de polinomios $K[X]$ es una K -álgebra utilizando el morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \rho : K &\rightarrow K[X] \\ k &\mapsto k \end{aligned}$$

El morfismo de anillos que da a $A = K[X]/I$ estructura de K -álgebra es el siguiente:

$$\begin{aligned} \rho : K &\rightarrow K[X]/I \\ k &\mapsto k + I \end{aligned}$$

La comprobación de que se tratan de morfismos de anillos es rutinaria. El algoritmo de división nos asegura que todos los polinomios de A tienen grado a lo sumo $n - 1$, por tanto \mathcal{B} es un sistema de generadores de A y forman una base por ser linealmente independientes.

Sea el endomorfismo $\lambda(x + I)(a) = (x + I)a$, es claro que las primeras $n - 1$ columnas de la matriz $\tilde{N}(p)$ corresponden a multiplicar $x + I$ por los elementos $1 + I, \dots, x^{n-2} + I$. Ahora,

$$(x + I)(x^{n-1} + I) = x^n + I = -p(X) + I$$

De ahí la última columna de la matriz.

Dado $a \in A$ con $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ en \mathcal{B} el morfismo de K -álgebras lleva $(a_0, \dots, a_{n-1}) \rightarrow a_0I + a_1\tilde{N}(p) + \dots + a_{n-1}\tilde{N}(p)^{n-1}$

TODO terminar

Ejercicio 7. * Sea K un cuerpo. Dar la lista, salvo isomorfismos, de todas las K -álgebras asociativas uniales de dimensión 2.

Sea A una K -álgebra con morfismo de estructura ρ . Sea $\{1, a\}$ la base de A como espacio vectorial. Consideramos

$$\begin{aligned} f : K[X] &\rightarrow A \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) \\ x &\mapsto a \end{aligned}$$

Es un morfismo de álgebras por ser $\rho = f \circ \rho_K$ con ρ_K el morfismo de estructura de $K[X]$.
 Notamos que la imagen de f tiene dimensión 2 como espacio vectorial, luego es sobreyectivo (?).
 Esto nos dice que existe I ideal de $K[X]$ tal que $K[X]/I \cong A$. Por ello, buscar álgebras de dimensión 2 es equivalente a buscar ideales del anillo de polinomios $K[X]$.

Tenemos entonces 3 opciones

- $K[X]/\langle x^2 - 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 + 1 \rangle$
- $K[X]/\langle x^2 \rangle$

TODO Comprobar que es verdad TODO Comprobar cuales son asociativos unitales

Ejercicio 8. Expresar el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ como una \mathbb{Q} -álgebra de un álgebra de matrices sobre \mathbb{Q} .

Tomamos la base $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}\}$, el morfismo inyectivo de \mathbb{Q} -álgebras $m = M_{\mathcal{B}} \circ \lambda : \mathbb{Q} \rightarrow M_2(\mathbb{Q})$ verificando:

- $\lambda(a + b\sqrt{2})(1) = a + b\sqrt{2} \implies (a, b) \text{ en } \mathbb{B}$
- $\lambda(a + b\sqrt{2})(\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + 2b \implies (2b, a) \text{ en } \mathbb{B}$

Luego

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \{m(a + b\sqrt{2}), a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Ejercicio 9. Sea

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

1. Demostrar que \mathbb{H} es una subálgebra real de $M_2(\mathbb{C})$ y que $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$
2. Demostrar que todo elemento no nulo de \mathbb{H} es una unidad
3. Demostrar que las matrices

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

forman una base de \mathbb{H} como espacio vectorial real.

4. Comprobar las identidades

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

Para ver que es una subálgebra, vemos que \mathbb{H} es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{C})$, vemos que es cerrado para la suma de matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

y para la multiplicación

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

además $1 \in \mathbb{H}$

Para que un elemento esté en el centro deben coincidir

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \bar{\beta}_1\beta_2 & -\alpha_1\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 & -\beta_1\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_1 - \bar{\beta}_2\beta_1 & -\alpha_2\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2\bar{\alpha}_1 \\ \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\beta_1 & -\beta_2\bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1 \end{bmatrix}$$

Para tener esto necesitamos $\beta_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\beta_2 = \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\beta_1 \implies \beta_1 = 0$ y $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$. Luego $\alpha \in \mathbb{R}$

$$Z(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}$$

2. Para ver que todo elemento es una unidad basta tomar

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}/\|\alpha\| & \bar{\beta}/\|\beta\| \\ -\beta/\|\beta\| & \alpha/\|\alpha\| \end{bmatrix}$$

3. Veamos ahora que dichas matrices son una base, es sencillo ver que son linealmente independientes, luego comprobemos que son un sistema de generadores

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \operatorname{Re}(\alpha)\mathbf{1} + \operatorname{Re}(\beta)\mathbf{i} + \operatorname{Im}(\alpha)\mathbf{j} + \operatorname{Im}(\beta)\mathbf{k}$$

4. Para comprobar dichas identidades basta con realizar las cuentas correspondientes.

Ejercicio 10. Dado un A -módulo V no nulo, demostrar que

$$\operatorname{Ann}_A(V) = \{a \in A : av = 0 \ \forall v \in V\}$$

es un ideal de A . Dotar a V de estructura de $A/\operatorname{Ann}_A(V)$ -módulo fiel (es decir, la representación correspondiente es fiel).

Sean $a, b \in \operatorname{Ann}_A(V)$, tenemos que $(a + b)(v) = av + bv = 0 \implies a + b \in \operatorname{Ann}_A(V)$. Sea ahora $a \in \operatorname{Ann}_A(V), b \in A, (ab)v = a(bv) = 0 \implies ab \in \operatorname{Ann}_A(V)$ luego tenemos un ideal.

Una representación es fiel si y solo si su núcleo es trivial. Sea ρ el morfismo de estructura de V , tenemos que $\operatorname{Ker}(\rho) = \operatorname{Ann}_A(V)$ que hemos visto es un ideal, luego para dotar a V de estructura de $A/\operatorname{Ann}_A(V)$ -módulo fiel definimos el morfismo de estructura

$$\tau : A/\operatorname{Ann}_A(V) \rightarrow \operatorname{End}(V)$$

$$a + \operatorname{Ann}_A(V) \mapsto \rho(a)$$

Ejercicio 27. ** Sea R un álgebra sobre un cuerpo de característica distinta de 2, y $a, b, e \in R$ idempotentes. Demostrar que si $e = a + b$, entonces $ab = ba = 0$. Si la característica es 2, encontrar un contraejemplo con $b \neq a$.

Por e, a, b idempotentes, tenemos que

$$a + b = e = e^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = a + b + ab + ba \implies ab + ba = 0.$$

$$ab = -ba \tag{1}$$

Ahora, si multiplicamos a izquierda y derecha por a , por ser a idempotente tenemos que $aba = -aba$. Ahora, como $\text{char}(R) \neq 2$, $aba = 0$. Ahora, sustituyendo ab ó ba respectivamente usando (1), tenemos

$$0 = aba = -baa = -ba \implies ba = 0.$$

$$0 = aba = -aab = -ab \implies ab = 0.$$

Veamos ahora el contraejemplo. Sea \mathbb{F}_2 el cuerpo de dos elementos (el más sencillo con característica 2), y $M_2(\mathbb{F}_2)$ la \mathbb{F}_2 -álgebra usual de matrices de orden 2 sobre este cuerpo. Entonces, tomamos

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = a + b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, es sencillo comprobar que a, b , y e son idempotentes, y que por $b = I_2$, efectivamente $ab = ba = a \neq 0$