

## 1. Algoritmia

### 1.1. Búsqueda exhaustiva, fuerza bruta o backtracking, como lo quieras llamar

Buscar todo/casi todo el espacio de soluciones, y hasta encontrar una solución. Es todo lo lento que puede ser, pero no es mala idea intentarlo si no se ocurre otra idea.

```

1 // Búsqueda exhaustiva incluye, entre otras cosas:
2 // Probar permutaciones
3 void permutaciones() {
4     int n = 8, p[8] = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
5     do {
6         // Comprobar si la permutación p es válida
7     } while (
8         next_permutation(p, p + n)); // next_permutation genera la siguiente
9                                         // permutación y devuelve true si existe
10 }
11
12 // Backtracking
13 bool se_puede_colocar(int c, const vector<int> &reinas);
14
15 void backtrack(int c, vector<int> &reinas) {
16     // Ejemplo de backtracking para el problema de las 8 reinas
17     if (c == 8) {
18         // Solución encontrada, imprimir reinas o devolver o lo que sea
19         // Para salir del todo estaría bien devolver un booleano, o algo así
20         // ...
21         return;
22     }
23
24     // Buscamos todos los estados hijos
25     for (int i = 0; i < 8; i++) {
26         if (se_puede_colocar(c, reinas)) {
27             reinas[c] = i; // Colocamos la reina en la columna c y fila i
28             backtrack(c + 1, reinas); // Llamamos al siguiente nivel
29             reinas[c] = -1;          // Deshacemos el movimiento (backtracking)
30         }
31     }
32
33     // Si no se puede colocar ninguna reina en la columna c, no hacemos nada
34     return;
35 }

```

### 1.2. Divide y vencerás

Consiste en seguir tres sencillos pasos: dividir el problema en sub-problemas (como por la mitad más menos), encontrar soluciones a esos problemas más pequeños (que será más fácil, porque son más pequeños) y combinar las soluciones de los subproblemas. Normalmente consiste en utilizar una estructura que haga esto (montículos, bBST, etc.) o en hacer **búsqueda binaria de la solución**.

```

1 // Pongamos una función que nos dice si un valor x cumple y
2 bool can(int x);
3
4 // El problema quiere encontrar el mínimo valor x que cumpla y
5 // Para ello, podemos hacer una búsqueda binaria sobre el espacio de soluciones
6 int bsta(int low, int high) {
7     while (low < high) {
8         int mid = (low + high) / 2; // Punto medio
9         if (can(mid))              // Lo probamos
10             high = mid;           // Si cumple, buscamos valores más pequeños
11         else                       // Si no,
12             low = mid + 1;        // buscamos valores más grandes
13     }
14
15     // Al final, low y high valen lo mismo, y es el valor mínimo que cumple la
16     // condición
17     return low;
18 }
19
20 // Se puede hacer con flontantes también, estableciendo un epsilon y sin
21 // necesidad de incrementar low en 1

```

### 1.3. Voraz, greedy

Para que un problema se pueda resolver con un algoritmo voraz hace falta que: tenga sub-estructuras óptimas (aka. que la solución óptima para el problema completo contenga las soluciones de los sub-problemas) y cumple la *propiedad voraz*, escoger la mejor opción en algún momento siempre lleva al mejor resultado, nunca hay que hacer backtrack (esta segunda no merece la pena intentar demostrarla durante el concurso, mejor implementarlo y probar). Tirar una cola de prioridad a las cosas acostumbra a ser greedy.

### 1.4. Programación dinámica

Backtracking pero mejor. Se utiliza principalmente en problemas de optimización o contar cosas. Para que un problema se pueda resolver con DP hacen falta dos cosas: que tenga sub-estructuras óptimas (como voraz) y que sus sub-problemas se superpongan (es decir, hay varias maneras de llegar a un mismo estado de búsqueda). DP consiste en cachear los resultados de los subproblemas para usos posteriores. Se puede hacer “desde arriba” o “desde abajo”.

```

1 int fib_tonto(int n) {
2     if (n <= 1) return n; // Caso base
3     return fib_tonto(n - 1) + fib_tonto(n - 2); // Llamadas recursivas
4 }
5
6 // Programación dinámica, top-down
7 // Utiliza la tabla de memoización para evitar cálculos repetidos
8 // Basicamente, "cachea" los resultados de las llamadas recursivas
9 vector<int> memo_td(100, -1); // Tabla de memoización, inicializada a -1
10 int fib_dp_td(int n) {
11     if (n <= 1) return n; // Caso base
12     auto &res = memo_td[n]; // Referencia a la posición n de memo
13     if (res != -1) return res; // Si ya está calculado, lo devolvemos
14     res = fib_dp_td(n - 1) +
15           fib_dp_td(n - 2); // Si no, lo calculamos y lo guardamos
16     return res; // Devolvemos el resultado
17 }
18
19 // Programación dinámica, bottom-up
20 // Rellena en la tabla de memoización los casos base. A partir de ahí, calcula
21 // los siguientes casos utilizando los anteriores hasta llegar al caso n.
22 vector<int> memo_bu(100, -1); // Tabla de memoización, inicializada a -1
23 int fib_dp_bu(int n) {
24     memo_bu[0] = 0; // Caso base
25     memo_bu[1] = 1; // Caso base
26
27     for (int i = 2; i <= n; i++) {
28         memo_bu[i] = memo_bu[i - 1] + memo_bu[i - 2]; // Calculamos el valor
29     }
30     return memo_bu[n]; // Devolvemos el resultado
31 }

```

### LIS

```

1 typedef vector<int> vi;
2
3 /*
4  * Si solo se quiere la longitud del LIS, se puede obviar todo lo relacionado
5  * con el array de predecesores (p, lis_end, L_id) y la función print_lis.
6  */
7
8 int n; // Longitud del array A
9 vi A; // Array de entrada
10 vi p; // Array de predecesores
11
12 void print_lis(int i) {
13     if (p[i] == -1) {
14         cout << A[i];
15         return;
16     }
17
18     print_lis(p[i]); // Imprimir el LIS recursivamente
19     cout << " " << A[i]; // Imprimir el elemento actual
20 }
21
22 void lis() {

```

```
23     int k = 0;           // Longitud del LIS
24     int lis_end = 0; // Índice del último elemento del LIS
25     vi L(n, 0), L_id(n, 0);
26     p.assign(n, -1); // Inicializar el array de predecesores
27
28     for (int i = 0; i < n; i++) {
29         // Búsqueda binaria para encontrar la posición de A[i] en L
30         int pos = lower_bound(L.begin(), L.begin() + k, A[i]) - L.begin();
31         L[pos] = A[i]; // Actualizar L con el nuevo valor
32         L_id[pos] = i; // Guardar el índice del elemento en L_id
33         p[i] = pos ? L_id[pos - 1] : -1; // Actualizar el predecesor
34         if (pos == k) {
35             k++;           // Incrementar la longitud del LIS
36             lis_end = i; // Actualizar el índice del último elemento del LIS
37         }
38     }
39
40     // La longitud del LIS es k
41     print_lis(lis_end); // Imprimir el LIS
42 }
```

## 2. Estructuras

### 2.1. Listas, Pilas, colas, sets, hashmaps, heaps

Todas las estructuras de datos básicas que se pueden encontrar en la STL de C++.

```

1 vector<int> lista; // Suele venir bien inicializada
2 stack<int> pila; // LIFO
3 queue<int> cola; // FIFO
4 priority_queue<int> cola_prioridad; // La cabeza es el mayor elemento
5 unordered_set<int> conjunto; // Conjunto de elementos únicos
6 unordered_map<string, int> hashmap; // Mapa de clave-valor, sin orden
7 multimap<string, int> multimap; // Mapa de clave-valor, con claves repetidas
8 // un bBST
9
10 // No hay clase para el heap, pero se puede usar un vector
11 vector<int> H;
12 is_heap(H.begin(), H.end()); // Comprueba si es un heap
13 make_heap(H.begin(), H.end()); // Crea un heap a partir de un vector
14 push_heap(H.begin(), H.end()); // Incluye el último elemento en el heap
15 pop_heap(H.begin(), H.end()); // Mueve el mayor elemento al final
16 sort_heap(H.begin(), H.end()); // Convierte el heap en un vector ordenado

```

### 2.2. Conjuntos disjuntos

Modela conjuntos disjuntos. Útil para encontrar componentes conexos en grafos.

```

1 typedef vector<int> vi;
2
3 class UFDS {
4     private:
5         vi p, rank;
6
7     public:
8         // Crea un UFDS con n elementos
9         UFDS(int n) : p(n, 0), rank(n, 0) {
10             for (int i = 0; i < n; i++)
11                 p[i] = i;
12         }
13
14         // Encuentra el representante del conjunto al que pertenece i
15         int findRep(int i) {
16             if (p[i] != i) {
17                 p[i] = findRep(p[i]); // Path compression
18             }
19             return p[i];
20         }
21
22         // Comprueba si i y j pertenecen al mismo conjunto
23         bool sameSet(int i, int j) { return findRep(i) == findRep(j); }
24
25         // Hacer que i y j pertenezcan al mismo conjunto
26         void unionSet(int i, int j) {
27             if (sameSet(i, j))
28                 return;
29             int repI = findRep(i);
30             int repJ = findRep(j);
31             if (rank[repI] > rank[repJ])
32                 swap(repI, repJ);
33             p[repI] = repJ; // Unir los conjuntos
34             if (rank[repI] == rank[repJ])
35                 rank[repJ]++;
36         }
37 };

```

### 2.3. Grafos

Los grafos se pueden representar de varias formas, pero la más común es mediante una lista de adyacencia (es la que se usa en todos). También hay veces que no hace falta una estructura específica para los grafos. Ordenados de más a menos uso:

```

1 int n; // Número de nodos
2
3 /*
4  * Grafo como lista de adyacencia:
5  *   - El elemento AL[i] es un vector que contiene los nodos adyacentes a i.

```

```

6  *   - Si el grafo es ponderado, AL[i] contiene pares (nodo, peso).
7  *   - Puede representar multigrafos.
8  */
9  vector<vector<pair<int, int>>> AL(n);
10
11 /*
12 * Grafo como matriz de adyacencia:
13 *   - El elemento AM[i][j] es -1 si no hay arista entre i y j,
14 *     o el peso de la arista si existe.
15 *   - Si el grafo es no dirigido, AM es igual a su transpuesta.
16 *   - No puede representar multigrafos
17 *   - No debería usarse para grafos donde n > 5000
18 */
19 vector<vector<int>> AM(n, vector<int>(n, -1));
20
21 /*
22 * Grafo como lista de aristas:
23 *   - El elemento E[i] es una trupla (n1, n2, peso)
24 *   - Puede representar multigrafos.
25 *   - No es eficiente para consultas de adyacencia.
26 */
27 vector<tuple<int, int, int>> EL;

```

### BFS y DFS

Las dos formas más comunes de recorrer un grafo. BFS (Breadth-First Search) recorre el grafo primero por niveles mientras que DFS (Depth-First Search) recorre el grafo en profundidad. La primera se suele implementar con una cola y la segunda de manera recursiva (o con una pila).

Se pueden usar para: encontrar componentes conexos, detectar ciclos (al intentar volver a un nodo ya visitado), contar el orden topológico de un grafo dirigido (DFS), comprobar si un grafo es bipartito (BFS), si vamos guardando distancias nos aseguramos de que los nodos pares solo están conectados a impares y viceversa), etc.

```

1  typedef vector<int> vi;
2  typedef vector<vi> vvi;
3
4  int n; // Número de nodos
5  vvi AL; // Lista de adyacencia del grafo
6
7  void bfs(int start) {
8      vi dist(n, -1); // Distancias desde el nodo inicial
9      dist[start] = 0; // Distancia al nodo inicial es 0
10     queue<int> q; // Cola para BFS
11     q.push(start);
12
13     while (!q.empty()) {
14         int u = q.front();
15         q.pop();
16
17         // Se puede hacer algo con el nodo aquí
18
19         for (auto &[v, w] : AL[u]) {
20             if (dist[v] != -1)
21                 continue; // Nodo visitado
22             dist[v] = dist[u] + w; // Actualizar la distancia
23             q.push(v); // Añadir el nodo a la cola
24         }
25     }
26 }
27
28 vector<bool> visited(n, false); // Vector para DFS
29 void dfs(int u) {
30     visited[u] = true; // Marcar el nodo como visitado
31
32     // Se puede hacer algo con el nodo aquí
33
34     for (auto &[v, w] : AL[u]) {
35         if (!visited[v])
36             dfs(v); // Llamada recursiva a DFS
37     }
38 }

```

## Componentes conexos

```

1 typedef vector<int> vi;
2
3 int n; // Vértices del grafo
4 vector<vi> AL; // Lista de adyacencia
5 vector<bool> visitados; // -1: no visitado, 0: visitado
6
7 void dfs(int u); // Prototipo de la función DFS
8
9 // Componentes conexos
10 int cc() {
11     visitados.assign(AL.size(), -1);
12
13     int numCC = 0;
14     for (int u = 0; u < n; u++) // Por cada vértice
15         if (!visitados[u]) { // Si no ha sido visitado
16             numCC++; // Incrementa el contador de componentes conexas
17             dfs(u); // Llama a DFS para visitar todos los vértices de esta
18                 // componente
19         }
20
21     return numCC; // Retorna el número de componentes conexas
22 }

```

## Orden topológico

```

1 typedef pair<int, int> ii;
2 typedef vector<int> vi;
3 typedef vector<ii> vii;
4
5 int n; // Vértices del grafo
6 vector<vii> AL; // Lista de adyacencia
7 vector<bool> visitados; // -1: no visitado, 0: visitado
8 vi ts; // Vector para almacenar el orden topológico
9
10 void toposort(int u) {
11     visitados[u] = true;
12     for (auto &[v, w] : AL[u])
13         if (visitados[v] == false) toposort(v);
14     ts.push_back(u); // this is the only change
15 }
16
17 // Componentes conexos
18 void calc_toposort() {
19     visitados.assign(AL.size(), -1);
20     ts.clear(); // Limpiar el vector de orden topológico
21
22     for (int u = 0; u < n; u++) // Por cada vértice
23         if (!visitados[u]) // Si no ha sido visitado
24             toposort(u);
25
26     reverse(ts.begin(),
27            ts.end()); // Invertir el orden para obtener el topológico
28
29     // Ahora 'ts' contiene el orden topológico de los vértices
30 }

```

## MST

Construcción de un árbol con coste mínimo que conecta todos los nodos de un grafo.

```

1 int n; // Número de nodos
2 vector<vii> AL; // Lista de adyacencia del grafo
3 vi taken; // Vector para marcar nodos visitados
4 priority_queue<ii> pq; // Para escoger los edges (es un max-heap por defecto)
5 // así que usamos el peso negativo
6
7 void process(int u) {
8     taken[u] = 1; // Marcar el nodo como visitado
9     for (auto &[v, w] : AL[u])
10         if (!taken[v])
11             pq.push({-w, -v}); // Añadir los edges al priority queue
12 }

```

```

13
14 void prim() {
15     taken.assign(n, 0); // Inicializar el vector de nodos visitados
16     process(0);         // Empezar desde el nodo 0
17
18     int mst_cost = 0, num_taken = 0; // Coste del MST y número de nodos tomados
19     while (!pq.empty()) {
20         auto [w, u] = pq.top(); // Obtener el edge con menor peso
21         pq.pop();
22         w = -w; // Convertir el peso y el nodo a su valor original
23         u = -u;
24         if (taken[u])
25             continue; // Si el nodo ya está visitado, saltar
26
27         mst_cost += w; // Añadir el peso al coste del MST
28
29         process(u); // Procesar el nodo
30         num_taken++; // Incrementar el número de nodos tomados
31         if (num_taken == n - 1) {
32             break; // Si ya hemos tomado n-1 nodos, el MST está completo
33         }
34     }
35 }

```

### Dijkstra

Camino mínimo desde un nodo a todos los demás en un grafo ponderado (con pesos **NO** negativos).

```

1 int n; // Número de nodos
2 vvi AL; // Lista de adyacencia del grafo
3
4 // s es el nodo de inicio
5 void dijkstra(int s) {
6     vi dist(n, 1e9);
7     dist[s] = 0;
8     priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> pq;
9     pq.emplace(0, s);
10
11     while (!pq.empty()) {
12         auto [d, u] = pq.top(); // Nodo con distancia mínima
13         pq.pop();
14         if (d > dist[u]) continue; // Si la distancia no es la mínima, saltamos
15
16         // Si quisiésemos salir al llegar a un nodo destino, podríamos añadir
17         // una condición aquí (sin no hay negativos):
18         // if (u == destino) return;
19
20         for (auto &[v, w] : AL[u]) { // Recorremos los vecinos del nodo u
21             if (dist[u] + w < dist[v]) { // Si encontramos una distancia menor
22                 dist[v] = dist[u] + w; // Actualizamos la distancia
23                 pq.emplace(dist[v], v); // Añadimos el nodo a la cola
24             }
25         }
26     }
27 }

```

### Bipartitos

Grafos en los que los nodos se pueden dividir en dos conjuntos disjuntos de tal forma que no hay aristas entre nodos del mismo conjunto. Se utilizan para modelar relaciones entre dos tipos de entidades. MCBM (Maximum Cardinality Bipartite Matching) es un algoritmo que encuentra el emparejamiento máximo en un grafo bipartito.

```

1 typedef vector<int> vi;
2 typedef vector<vi> vvi;
3 typedef pair<int, int> ii;
4 typedef vector<ii> vii;
5
6 vi match, vis;
7 vvi AL;
8
9 int try_kuhn(int v) {
10     if (vis[v]) return 0; // Si ya hemos visitado este nodo, no hacemos nada
11     vis[v] = 1;           // Marcamos el nodo como visitado

```

```

12     for (auto &to : AL[v]) { // Recorremos los nodos derechos conectados
13         if (match[to] == -1 || // Si el nodo derecho no está emparejado
14             try_kuhn(match[to])) { // o podemos emparejarlo recursivamente
15             match[to] = v; // Emparejamos el nodo derecho con el izquierdo
16             return 1;      // Retornamos que hemos encontrado un emparejamiento
17         }
18     }
19
20     return 0; // Si no hemos encontrado un emparejamiento, retornamos 0
21 }
22
23 int n, m; // n = nodos izquierdos, m = nodos derechos
24 int mcbm() {
25     match.assign(m, -1); // Inicializamos el emparejamiento con -1
26     int MCVM = 0;
27     for (int v = 0; v < n; v++) {
28         vis.assign(n, 0); // Reiniciamos el vector de visitados
29         MCVM += try_kuhn(v); // Intentamos emparejar el nodo izquierdo v
30     }
31
32     // En este punto, match contiene el emparejamiento máximo
33     // match[i] = j significa que el nodo i de la parte izquierda está
34     // emparejado con el nodo j de la parte derecha.
35     return MCVM; // Retornamos el número máximo de emparejamientos
36 }

```

### Max flow

Problema clásico de flujo máximo en un grafo. El algoritmo de Edmonds-Karp utiliza BFS para encontrar caminos aumentantes y calcular el flujo máximo. Si las capacidades de las aristas son enteros, el algoritmo termina en un tiempo polinómico, si son racionales la complejidad no está boundeada y con cantidades irracionales el algoritmo no funciona.

```

1 #define INF 1e9
2
3 int n; // Nodos del grafo
4 vvi capacity; // capacity[i][j] = capacidad de la arista i -> j
5 vvi adj; // adj[i] = lista de nodos adyacentes a i (grafo NO dirigido)
6
7 int bfs(int s, int t, vector<int> &parent) {
8     fill(parent.begin(), parent.end(), -1);
9     parent[s] = -2;
10    queue<pair<int, int>> q;
11    q.push({s, INF});
12
13    while (!q.empty()) {
14        int cur = q.front().first;
15        int flow = q.front().second;
16        q.pop();
17
18        for (int next : adj[cur]) {
19            if (parent[next] == -1 && capacity[cur][next]) {
20                parent[next] = cur;
21                int new_flow = min(flow, capacity[cur][next]);
22                if (next == t) return new_flow;
23                q.push({next, new_flow});
24            }
25        }
26    }
27
28    return 0;
29 }
30
31 // Flujo máximo usando el algoritmo de Edmonds-Karp
32 // desde el nodo source al nodo drain
33 int maxflow(int source, int drain) {
34     int flow = 0; // Flujo total encontrado
35     vi parent(n); // Vector para almacenar el camino encontrado por BFS
36     int new_flow; // Flujo encontrado en cada iteración
37
38     // Mientras haya un camino aumentante desde source a drain
39     // se actualiza el flujo total y las capacidades de las aristas
40     // en el camino encontrado
41     while ((new_flow = bfs(source, drain, parent))) {

```



```

42     flow += new_flow; // Aumenta el flujo total con el flujo encontrado
43     int cur = drain; // Recorremos el camino encontrado hacia atrás
44     while (cur != source) { // actualizando las capacidades residuales
45         int prev = parent[cur];
46         capacity[prev][cur] -= new_flow;
47         capacity[cur][prev] += new_flow;
48         cur = prev;
49     }
50 }
51
52 return flow;
53 }

```

### Árboles de segmentos

Árboles que permiten realizar consultas y actualizaciones en un rango de un array de forma eficiente. Útiles para problemas que piden realizar operaciones en rangos de un array, como sumar o encontrar el mínimo y además es necesario actualizar el array de manera frecuente.

```

1 #define SEGTREE_EMPTY INT_MIN // cuidao con esto
2
3 class SegmentTree {
4 private:
5     int n;
6     vi A, st;
7
8     int l(int p) { return p << 1; }
9     int r(int p) { return (p << 1) + 1; }
10
11     int conquer(int a, int b) {
12         if (a == SEGTREE_EMPTY) return b; // child missing
13         if (b == SEGTREE_EMPTY) return a;
14
15         // Aquí va tu operación, la función que toma dos nodos consecutivos y
16         // devuelve un valor. En este caso es multiplicar
17         return a * b;
18     }
19
20     void build(int p, int L, int R) {
21         if (L == R)
22             st[p] = A[L]; // this is a leaf node
23         else {
24             int m = (L + R) / 2;
25             build(l(p), L, m); // left
26             build(r(p), m + 1, R); // right
27             st[p] = conquer(st[l(p)], st[r(p)]); // and conquer
28         }
29     }
30
31     int rmq(int p, int L, int R, int i, int j) {
32         if (i > j) return SEGTREE_EMPTY; // invalid range
33
34         if ((L >= i) && (R <= j)) return st[p]; // this is the node we want
35
36         int m = (L + R) / 2;
37         return conquer(rmq(l(p), L, m, i, min(m, j)), // conquer left
38                        rmq(r(p), m + 1, R, max(i, m + 1), j)); // and right
39     }
40
41     void update(int p, int L, int R, int i, int val) {
42         if (L == R) {
43             st[p] = val; // this is a leaf node, update it
44             return;
45         }
46
47         int m = (L + R) / 2;
48         if (i <= m)
49             update(l(p), L, m, i, val); // go left
50         else
51             update(r(p), m + 1, R, i, val); // go right
52
53         st[p] = conquer(st[l(p)], st[r(p)]); // conquer to update the value
54     }
55 }

```

```

56 public:
57     SegmentTree(int size) : n(size), st(4 * n) {}
58
59     SegmentTree(const vi &A) : SegmentTree(A.size()) {
60         // A TIENE que tener tamaño potencia de 2
61         assert(fmod(log2(A.size()), 1) == 0); // check útil para debuggear
62
63         this->A = A;
64         build(1, 0, n - 1);
65     }
66
67     // actualiza el valor en la posición i con el valor val
68     void update(int i, int val) { update(1, 0, n - 1, i, val); }
69
70     // devuelve el valor del rango [i, j]
71     int rmq(int i, int j) { return rmq(1, 0, n - 1, i, j); }
72 };

```

## Árbol de Fenwick

Hace algo

```

1 // https://cp-algorithms.com/data_structures/fenwick.html
2
3 struct FenwickTree {
4     vector<int> bit; // binary indexed tree
5     int n;
6
7     FenwickTree(int n) {
8         this->n = n;
9         bit.assign(n, 0);
10    }
11
12    FenwickTree(vector<int> const &a) : FenwickTree(a.size()) {
13        for (size_t i = 0; i < a.size(); i++)
14            add(i, a[i]);
15    }
16
17    int sum(int r) {
18        int ret = 0;
19        for (; r >= 0; r = (r & (r + 1)) - 1)
20            ret += bit[r];
21        return ret;
22    }
23
24    int sum(int l, int r) { return sum(r) - sum(l - 1); }
25
26    void add(int idx, int delta) {
27        for (; idx < n; idx = idx | (idx + 1))
28            bit[idx] += delta;
29    }
30 };

```

### 3. Mates

#### 3.1. Primos

Unos cuantos primos muy grandes:  $1e9 + 7$ ,  $1e9 + 9$ ,  $1e9 + 21$ .

Eratóstenes

```

1 typedef long long ll;
2 typedef vector<ll> vll;
3
4 ll _sieve_size;
5 bitset<10000010> bs; // 1e7 (más o menos el tope de lo que es viable)
6 vll p; // Vector de primos
7
8 void sieve(ll upperbound) {
9     _sieve_size = upperbound + 1; // +1 porque el límite es inclusivo
10    bs.set(); // Inicializar el bitset a 1
11    bs[0] = bs[1] = 0; // 0 y 1 no son primos
12    for (ll i = 2; i <= _sieve_size; i++) {
13        if (bs[i]) { // Si es primo
14            for (ll j = i * i; j <= _sieve_size; j += i) {
15                bs[j] = 0; // Marcar múltiplos de i como no primos
16            }
17            p.push_back(i); // Añadir i a la lista de primos
18        }
19    }
20 }
21
22 // Solo funciona para números menores que p.back()^2
23 bool is_prime(ll n) {
24     if (n < _sieve_size) return bs[n]; // 0(1) para números pequeños
25     for (ll i = 0; i < p.size() && p[i] * p[i] <= n; i++) {
26         if (n % p[i] == 0) return false; // Si es divisible por algún primo
27     }
28     return true; // Si no es divisible por ningún primo, es primo
29 }

```

Cosas con factores

```

1 vll p; // Vector de primos
2
3 vll fac_primos(ll n) {
4     vll res;
5     for (ll i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i] * p[i] <= n); i++) {
6         while (n % p[i] == 0) {
7             res.push_back(p[i]);
8             n /= p[i];
9         }
10    }
11
12    if (n > 1) {
13        res.push_back(n); // Si queda un factor primo mayor que sqrt(n)
14    }
15    return res;
16 }
17
18 // Número de primos de n
19 int numPF(ll n) {
20     int ans = 0;
21     for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i] * p[i] <= n); i++) {
22         while (n % p[i] == 0) {
23             n /= p[i];
24             ans++;
25         }
26     }
27     return ans + (n > 1); // Si queda un factor primo mayor que sqrt(n)
28 }
29
30 // Número de factores primos distintos de n
31 int numDiffPF(ll n) {
32     int ans = 0;
33     for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i] * p[i] <= n); i++) {
34         if (n % p[i] == 0) ans++;
35         while (n % p[i] == 0)
36             n /= p[i];

```

```

37     }
38
39     return ans + (n > 1); // Si queda un factor primo mayor que sqrt(n)
40 }
41
42 // Número de divisores de n
43 int numDiv(ll n) {
44     int ans = 1;
45     for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i] * p[i] <= n); i++) {
46         int cnt = 0;
47         while (n % p[i] == 0) {
48             n /= p[i];
49             cnt++;
50         }
51         ans *= (cnt + 1);
52     }
53
54     return n > 1 ? ans * 2 : ans; // Si queda un factor primo mayor que sqrt(n)
55 }
56
57 // Suma de divisores de n
58 ll sumDiv(ll n) {
59     ll ans = 1;
60     for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i] * p[i] <= n); i++) {
61         ll multiplier = p[i], total = 1;
62         while (n % p[i] == 0) {
63             n /= p[i];
64             total += multiplier;
65             multiplier *= p[i];
66         }
67         ans *= total;
68     }
69
70     return (n > 1) ? ans * (n + 1)
71             : ans; // Si queda un factor primo mayor que sqrt(n)
72 }
73
74 ll phi(ll n) {
75     ll ans = n;
76     for (int i = 0; (i < (int)p.size()) && (p[i] * p[i] <= n); i++) {
77         if (n % p[i] == 0) ans -= ans / p[i];
78         while (n % p[i] == 0)
79             n /= p[i];
80     }
81     return (n > 1) ? ans - ans / n
82             : ans; // Si queda un factor primo mayor que sqrt(n)
83 }

```

## 3.2. Aritmética modular

### EGCD

```

1 // Modulo positivo siempre
2 int mod(int a, int m) { return ((a % m) + m) % m; }
3
4 // Exponente modular: b^p (mod m)
5 // 0 <= b < m
6 int modPow(int b, int p, int m) {
7     if (p == 0) return 1;
8     int ans = modPow(b, p / 2, m);
9     ans = mod(ans * ans, m);
10    if (p & 1) ans = mod(ans * b, m);
11    return ans;
12 }
13
14 // Euclides extendido (devuelve gcd(a, b) y x, y tal que a*x + b*y == gcd(a, b))
15 int extEuclid(int a, int b, int &x, int &y) {
16     int xx = y = 0;
17     int yy = x = 1;
18     while (b) {
19         int q = a / b;
20         tie(a, b) = make_tuple(b, a % b);
21         tie(x, xx) = make_tuple(xx, x - q * xx);
22         tie(y, yy) = make_tuple(yy, y - q * yy);

```

```

23     }
24     return a;
25 }
26
27 // Inverso modular: b-1 (mod m)
28 int modInverse(int b, int m) {
29     int x, y;
30     int d = extEuclid(b, m, x, y);
31     if (d != 1) return -1;
32     return mod(x, m);
33 }

```

### 3.3. Combinatoria

#### Números catalanes

Los números catalanes cuentan un montón de cosas, como:

- $Cat(n)$  es el número de árboles binarios con  $n$  nodos.
- $Cat(n)$  el número de expresiones de paréntesis bien formadas con  $n$  pares de paréntesis.
- $Cat(n)$  el número de formas de dividir un polígono convexo de  $n + 2$  lados en triángulos.
- $Cat(n)$  el número de caminos de  $n$  pasos que no suben por encima de la diagonal en un plano.

Números catalanes, fibonacci y coeficientes binomiales

```

1 // Fibonacci
2 int fact_pow(int n, int k) {
3     int res = 0;
4     while (n) {
5         n /= k;
6         res += n;
7     }
8     return res;
9 }
10
11 // Binomial coefficient
12 int C(int n, int k) {
13     int res = 1;
14     for (int i = n - k + 1; i <= n; ++i)
15         res *= i;
16     for (int i = 2; i <= k; ++i)
17         res /= i;
18     return res;
19 }
20
21 // Binomial coefficient (puede que el resultado sea ligeramente menor que el
22 // real)
23 int C_rara(int n, int k) {
24     double res = 1;
25     for (int i = 1; i <= k; ++i)
26         res = res * (n - k + i) / i;
27     return (int)(res + 0.01);
28 }
29
30 // Catalan
31 const int MOD = 1000000007;
32 const int MAX = 100000;
33 int catalan[MAX];
34
35 void init_cat(int n) {
36     catalan[0] = catalan[1] = 1;
37     for (int i = 2; i <= n; ++i) {
38         catalan[i] = 0;
39         for (int j = 0; j < i; ++j) {
40             catalan[i] += (catalan[j] * catalan[i - j - 1]) % MOD;
41             if (catalan[i] >= MOD) {
42                 catalan[i] -= MOD;
43             }
44         }
45     }
46 }

```

## Nth Permutation con Factoradic

El orden de las permutaciones se puede calcular con un sistema factorádico, que es una representación de números enteros en base factorial. Cada dígito del número factorádico representa la cantidad de veces que se usa cada factorial en la descomposición del número. (Por ejemplo, el número 1010 en factorádico es  $1*3! + 0*2! + 1*1! + 0*0! = 6 + 0 + 1 + 0 = 7$ ). Se puede utilizar para encontrar la  $k$ -ésima permutación de un conjunto de elementos sin necesidad de generar todas las permutaciones (muy rápido con un árbol de fenwick).

```

1
2 typedef vector<int> vi;
3
4 vi factoradic(int n) {
5     vi factors;
6     n--;
7     for (int i = 1; i <= n; i++) {
8         factors.push_back(n % i);
9         n /= i;
10    }
11
12    reverse(factors.begin(), factors.end());
13    return factors;
14 }
15
16 vi nth_permutation(vi &factors) {
17     vi res;
18     res.reserve(factors.size());
19
20     vi nums(factors.size());
21     for (int i = 0; i < factors.size(); i++)
22         nums[i] = i + 1;
23
24     for (auto f : factors) {
25         int n = nums[f];
26         nums.erase(nums.begin() + f); // esto es muy lento
27         res.push_back(n);
28     }
29
30     return res;
31 }

```

## 3.4. Matrices

## Ecuaciones

Se puede resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss a partir de la matriz aumentada del sistema.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \quad (3.1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \quad (3.2)$$

$$\vdots \quad (3.3)$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \quad (3.4)$$

```

1 // Resolver un sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss
2
3 const double EPS = 1e-9;
4 const int INF = 2; // it doesn't actually have to be infinity or a big number
5
6 // La entrada es la matriz aumentada del sistema de ecuaciones
7 int gauss(vector<vector<double>> a, vector<double> &ans) {
8     int n = (int)a.size();
9     int m = (int)a[0].size() - 1;
10
11     vector<int> where(m, -1);
12     for (int col = 0, row = 0; col < m && row < n; ++col) {
13         int sel = row;
14         for (int i = row; i < n; ++i)
15             if (abs(a[i][col]) > abs(a[sel][col])) sel = i;
16         if (abs(a[sel][col]) < EPS) continue;
17         for (int i = col; i <= m; ++i)
18             swap(a[sel][i], a[row][i]);

```

```

19     where[col] = row;
20
21     for (int i = 0; i < n; ++i)
22         if (i != row) {
23             double c = a[i][col] / a[row][col];
24             for (int j = col; j <= m; ++j)
25                 a[i][j] -= a[row][j] * c;
26         }
27     ++row;
28 }
29
30 ans.assign(m, 0);
31 for (int i = 0; i < m; ++i)
32     if (where[i] != -1) ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
33 for (int i = 0; i < n; ++i) {
34     double sum = 0;
35     for (int j = 0; j < m; ++j)
36         sum += ans[j] * a[i][j];
37     if (abs(sum - a[i][m]) > EPS) return 0;
38 }
39
40 for (int i = 0; i < m; ++i)
41     if (where[i] == -1) return INF;
42 return 1;
43 }

```

### Rank

El rango de una matriz es el número máximo de columnas linealmente independientes. Se puede calcular utilizando el método de eliminación de Gauss.

```

1  const double EPS = 1E-9;
2
3  int compute_rank(vector<vector<double>> A) {
4      int n = A.size();
5      int m = A[0].size();
6
7      int rank = 0;
8      vector<bool> row_selected(n, false);
9      for (int i = 0; i < m; ++i) {
10         int j;
11         for (j = 0; j < n; ++j) {
12             if (!row_selected[j] && abs(A[j][i]) > EPS) break;
13         }
14
15         if (j != n) {
16             ++rank;
17             row_selected[j] = true;
18             for (int p = i + 1; p < m; ++p)
19                 A[j][p] /= A[j][i];
20             for (int k = 0; k < n; ++k) {
21                 if (k != j && abs(A[k][i]) > EPS) {
22                     for (int p = i + 1; p < m; ++p)
23                         A[k][p] -= A[j][p] * A[k][i];
24                 }
25             }
26         }
27     }
28     return rank;
29 }

```

### Determinante

No te lo vas a creer, pero el determinante de una matriz se puede calcular utilizando un método que tiene un nombre que se parece a Mouse.

```

1  const double EPS = 1E-9;
2  int n;
3  vector<vector<double>> a(n, vector<double>(n));
4
5  double get_det() {
6      double det = 1;
7      for (int i = 0; i < n; ++i) {
8          int k = i;

```

```

9      for (int j = i + 1; j < n; ++j)
10          if (abs(a[j][i]) > abs(a[k][i])) k = j;
11      if (abs(a[k][i]) < EPS) {
12          det = 0;
13          break;
14      }
15      swap(a[i], a[k]);
16      if (i != k) det = -det;
17      det *= a[i][i];
18      for (int j = i + 1; j < n; ++j)
19          a[i][j] /= a[i][i];
20      for (int j = 0; j < n; ++j)
21          if (j != i && abs(a[j][i]) > EPS)
22              for (int k = i + 1; k < n; ++k)
23                  a[j][k] -= a[i][k] * a[j][i];
24      }
25
26      return det;
27 }

```

### Multiplicación

```

1  typedef long long ll;
2
3  const ll MOD = 1e9 + 7; // Módulo para las operaciones (primo grande)
4  const int MAXN = 2;    // Tamaño máximo de la matriz
5  struct Matrix {
6      ll mat[MAXN][MAXN];
7  };
8
9  // Asegura que el resultado sea positivo
10 ll mod(ll a, ll b) { return (a % b + b) % b; }
11
12 // Multiplica dos matrices
13 Matrix mat_mul(const Matrix &a, const Matrix &b) {
14     Matrix ans;
15
16     // Inicializa la matriz resultado a cero
17     for (int i = 0; i < MAXN; i++)
18         for (int j = 0; j < MAXN; j++)
19             ans.mat[i][j] = 0;
20
21     // Realiza la multiplicación de matrices
22     for (int i = 0; i < MAXN; i++) {
23         for (int k = 0; k < MAXN; k++) {
24             if (a.mat[i][k] == 0) continue;
25             for (int j = 0; j < MAXN; j++) {
26                 ans.mat[i][j] += mod(a.mat[i][k], MOD) * mod(b.mat[k][j], MOD);
27                 ans.mat[i][j] = mod(ans.mat[i][j], MOD);
28             }
29         }
30     }
31
32     return ans;
33 }

```



## 4. Geometría (no mates)

EVITAMOS LOS FLOTANTES A TODA COSTA EN ESTA CASA

Punto genérico

```

1 struct point {
2     int x, y;
3     point() : x(0), y(0) {}
4     point(int x, int y) : x(x), y(y) {}
5
6     bool operator==(const point &p) const { return x == p.x && y == p.y; }
7
8     // bool operator==(const point &p) const { return (fabs(x - p.x) < EPS) &&
9     // (fabs(y - p.y) < EPS); }
10
11     point operator+(const point &p) const { return point(x + p.x, y + p.y); }
12     point operator-(const point &p) const { return point(x - p.x, y - p.y); }
13     point operator*(int k) const { return point(x * k, y * k); }
14     point operator/(int k) const { return point(x / k, y / k); }
15
16     bool operator<(const point &p) const {
17         if (x != p.x) return x < p.x;
18         return y < p.y;
19     }
20
21     double dist(const point &p) const { return hypot(x - p.x, y - p.y); }
22 };
23
24 int dot(point a, point b) { return a.x * b.x + a.y * b.y; }
25 int norm(point a) { return dot(a, a); }
26 double abs(point a) { return sqrt(norm(a)); }
27 double proj(point a, point b) { return dot(a, b) / abs(b); }
28 double angle(point a, point b) { return acos(dot(a, b) / abs(a) / abs(b)); }
29 int cross(point a, point b) { return a.x * b.y - a.y * b.x; }
30
31 point lines_intersect(point a1, point d1, point a2, point d2) {
32     return a1 + d1 * (cross(a2 - a1, d2) / cross(d1, d2));
33 }

```

Líneas

```

1 // https://cp-algorithms.com/geometry/lines-intersection.html
2 struct pt {
3     double x, y;
4 };
5
6 struct line {
7     double a, b, c;
8 };
9
10 const double EPS = 1e-9;
11
12 double det(double a, double b, double c, double d) { return a * d - b * c; }
13
14 bool intersect(line m, line n, pt &res) {
15     double zn = det(m.a, m.b, n.a, n.b);
16     if (abs(zn) < EPS) return false;
17     res.x = -det(m.c, m.b, n.c, n.b) / zn;
18     res.y = -det(m.a, m.c, n.a, n.c) / zn;
19     return true;
20 }
21
22 bool parallel(line m, line n) { return abs(det(m.a, m.b, n.a, n.b)) < EPS; }
23
24 bool equivalent(line m, line n) {
25     return abs(det(m.a, m.b, n.a, n.b)) < EPS &&
26         abs(det(m.a, m.c, n.a, n.c)) < EPS &&
27         abs(det(m.b, m.c, n.b, n.c)) < EPS;
28 }

```

```

1 // https://cp-algorithms.com/geometry/check-segments-intersection.html
2 struct pt {
3     long long x, y;
4     pt() {}

```

```

5   pt(long long _x, long long _y) : x(_x), y(_y) {}
6   pt operator-(const pt &p) const { return pt(x - p.x, y - p.y); }
7   long long cross(const pt &p) const { return x * p.y - y * p.x; }
8   long long cross(const pt &a, const pt &b) const {
9       return (a - *this).cross(b - *this);
10  }
11 };
12
13 int sgn(const long long &x) { return x >= 0 ? x ? 1 : 0 : -1; }
14
15 bool inter1(long long a, long long b, long long c, long long d) {
16     if (a > b) swap(a, b);
17     if (c > d) swap(c, d);
18     return max(a, c) <= min(b, d);
19 }
20
21 bool check_inter(const pt &a, const pt &b, const pt &c, const pt &d) {
22     if (c.cross(a, d) == 0 && c.cross(b, d) == 0)
23         return inter1(a.x, b.x, c.x, d.x) && inter1(a.y, b.y, c.y, d.y);
24     return sgn(a.cross(b, c)) != sgn(a.cross(b, d)) &&
25           sgn(c.cross(d, a)) != sgn(c.cross(d, b));
26 }

```

```

1 // https://cp-algorithms.com/geometry/segments-intersection.html
2 const double EPS = 1E-9;
3
4 struct pt {
5     double x, y;
6
7     bool operator<(const pt &p) const {
8         return x < p.x - EPS || (abs(x - p.x) < EPS && y < p.y - EPS);
9     }
10 };
11
12 struct line {
13     double a, b, c;
14
15     line() {}
16     line(pt p, pt q) {
17         a = p.y - q.y;
18         b = q.x - p.x;
19         c = -a * p.x - b * p.y;
20         norm();
21     }
22
23     void norm() {
24         double z = sqrt(a * a + b * b);
25         if (abs(z) > EPS) a /= z, b /= z, c /= z;
26     }
27
28     double dist(pt p) const { return a * p.x + b * p.y + c; }
29 };
30
31 double det(double a, double b, double c, double d) { return a * d - b * c; }
32
33 inline bool betw(double l, double r, double x) {
34     return min(l, r) <= x + EPS && x <= max(l, r) + EPS;
35 }
36
37 inline bool intersect_1d(double a, double b, double c, double d) {
38     if (a > b) swap(a, b);
39     if (c > d) swap(c, d);
40     return max(a, c) <= min(b, d) + EPS;
41 }
42
43 bool intersect(pt a, pt b, pt c, pt d, pt &left, pt &right) {
44     if (!intersect_1d(a.x, b.x, c.x, d.x) || !intersect_1d(a.y, b.y, c.y, d.y))
45         return false;
46     line m(a, b);
47     line n(c, d);
48     double zn = det(m.a, m.b, n.a, n.b);
49     if (abs(zn) < EPS) {
50         if (abs(m.dist(c)) > EPS || abs(n.dist(a)) > EPS) return false;

```

```

51     if (b < a) swap(a, b);
52     if (d < c) swap(c, d);
53     left = max(a, c);
54     right = min(b, d);
55     return true;
56 } else {
57     left.x = right.x = -det(m.c, m.b, n.c, n.b) / zn;
58     left.y = right.y = -det(m.a, m.c, n.a, n.c) / zn;
59     return betw(a.x, b.x, left.x) && betw(a.y, b.y, left.y) &&
60         betw(c.x, d.x, left.x) && betw(c.y, d.y, left.y);
61 }
62 }

```

#### 4.1. Polígonos simples

Area de triángulos y polígonos

```

1 int signed_area_parallelogram(point p1, point p2, point p3) {
2     return cross(p2 - p1, p3 - p1);
3 }
4
5 double triangle_area(point p1, point p2, point p3) {
6     return abs(signed_area_parallelogram(p1, p2, p3)) / 2.0;
7 }
8
9 bool clockwise(point p1, point p2, point p3) {
10     return signed_area_parallelogram(p1, p2, p3) < 0;
11 }
12
13 bool counter_clockwise(point p1, point p2, point p3) {
14     return signed_area_parallelogram(p1, p2, p3) > 0;
15 }

```

```

1 double area(const vector<point> &fig) {
2     double res = 0;
3     for (unsigned i = 0; i < fig.size(); i++) {
4         point p = i ? fig[i - 1] : fig.back();
5         point q = fig[i];
6         res += (p.x - q.x) * (p.y + q.y);
7     }
8     return fabs(res) / 2;
9 }

```

Comprobar si un punto está en un polígono

```

1 struct pt {
2     long long x, y;
3     pt() {}
4     pt(long long _x, long long _y) : x(_x), y(_y) {}
5     pt operator+(const pt &p) const { return pt(x + p.x, y + p.y); }
6     pt operator-(const pt &p) const { return pt(x - p.x, y - p.y); }
7     long long cross(const pt &p) const { return x * p.y - y * p.x; }
8     long long dot(const pt &p) const { return x * p.x + y * p.y; }
9     long long cross(const pt &a, const pt &b) const {
10         return (a - *this).cross(b - *this);
11     }
12     long long dot(const pt &a, const pt &b) const {
13         return (a - *this).dot(b - *this);
14     }
15     long long sqrLen() const { return this->dot(*this); }
16 };
17
18 bool lexComp(const pt &l, const pt &r) {
19     return l.x < r.x || (l.x == r.x && l.y < r.y);
20 }
21
22 int sgn(long long val) { return val > 0 ? 1 : (val == 0 ? 0 : -1); }
23
24 vector<pt> seq;
25 pt translation;
26 int n;
27
28 bool pointInTriangle(pt a, pt b, pt c, pt point) {

```

```

29     long long s1 = abs(a.cross(b, c));
30     long long s2 = abs(point.cross(a, b)) + abs(point.cross(b, c)) +
31         abs(point.cross(c, a));
32     return s1 == s2;
33 }
34
35 void prepare(vector<pt> &points) {
36     n = points.size();
37     int pos = 0;
38     for (int i = 1; i < n; i++) {
39         if (lexComp(points[i], points[pos])) pos = i;
40     }
41     rotate(points.begin(), points.begin() + pos, points.end());
42
43     n--;
44     seq.resize(n);
45     for (int i = 0; i < n; i++)
46         seq[i] = points[i + 1] - points[0];
47     translation = points[0];
48 }
49
50 bool pointInConvexPolygon(pt point) {
51     point = point - translation;
52     if (seq[0].cross(point) != 0 &&
53         sgn(seq[0].cross(point)) != sgn(seq[0].cross(seq[n - 1])))
54         return false;
55     if (seq[n - 1].cross(point) != 0 &&
56         sgn(seq[n - 1].cross(point)) != sgn(seq[n - 1].cross(seq[0])))
57         return false;
58
59     if (seq[0].cross(point) == 0) return seq[0].sqrLen() >= point.sqrLen();
60
61     int l = 0, r = n - 1;
62     while (r - l > 1) {
63         int mid = (l + r) / 2;
64         int pos = mid;
65         if (seq[pos].cross(point) >= 0)
66             l = mid;
67         else
68             r = mid;
69     }
70     int pos = l;
71     return pointInTriangle(seq[pos], seq[pos + 1], pt(0, 0), point);
72 }

```

## 4.2. Convex hull

```

1 // https://cp-algorithms.com/geometry/convex-hull.html
2
3 struct pt {
4     double x, y;
5     bool operator==(pt const &t) const { return x == t.x && y == t.y; }
6 };
7
8 int orientation(pt a, pt b, pt c) {
9     double v = a.x * (b.y - c.y) + b.x * (c.y - a.y) + c.x * (a.y - b.y);
10    if (v < 0) return -1; // clockwise
11    if (v > 0) return +1; // counter-clockwise
12    return 0;
13 }
14
15 bool cw(pt a, pt b, pt c, bool include_collinear) {
16     int o = orientation(a, b, c);
17     return o < 0 || (include_collinear && o == 0);
18 }
19 bool collinear(pt a, pt b, pt c) { return orientation(a, b, c) == 0; }
20
21 void convex_hull(vector<pt> &a, bool include_collinear = false) {
22     pt p0 = *min_element(a.begin(), a.end(), [](pt a, pt b) {
23         return make_pair(a.y, a.x) < make_pair(b.y, b.x);
24     });
25     sort(a.begin(), a.end(), [&p0](const pt &a, const pt &b) {
26         int o = orientation(p0, a, b);
27         if (o == 0)

```

```

28         return (p0.x - a.x) * (p0.x - a.x) + (p0.y - a.y) * (p0.y - a.y) <
29             (p0.x - b.x) * (p0.x - b.x) + (p0.y - b.y) * (p0.y - b.y);
30     return o < 0;
31 });
32 if (include_collinear) {
33     int i = (int)a.size() - 1;
34     while (i >= 0 && collinear(p0, a[i], a.back()))
35         i--;
36     reverse(a.begin() + i + 1, a.end());
37 }
38
39 vector<pt> st;
40 for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
41     while (st.size() > 1 &&
42         !cw(st[st.size() - 2], st.back(), a[i], include_collinear))
43         st.pop_back();
44     st.push_back(a[i]);
45 }
46
47 if (include_collinear == false && st.size() == 2 && st[0] == st[1])
48     st.pop_back();
49
50 a = st;
51 }

```

### 4.3. Sweep line

```

1 // https://cp-algorithms.com/geometry/intersecting_segments.html
2
3 const double EPS = 1E-9;
4
5 struct pt {
6     double x, y;
7 };
8
9 struct seg {
10     pt p, q;
11     int id;
12
13     double get_y(double x) const {
14         if (abs(p.x - q.x) < EPS) return p.y;
15         return p.y + (q.y - p.y) * (x - p.x) / (q.x - p.x);
16     }
17 };
18
19 bool intersect1d(double l1, double r1, double l2, double r2) {
20     if (l1 > r1) swap(l1, r1);
21     if (l2 > r2) swap(l2, r2);
22     return max(l1, l2) <= min(r1, r2) + EPS;
23 }
24
25 int vec(const pt &a, const pt &b, const pt &c) {
26     double s = (b.x - a.x) * (c.y - a.y) - (b.y - a.y) * (c.x - a.x);
27     return abs(s) < EPS ? 0 : s > 0 ? +1 : -1;
28 }
29
30 bool intersect(const seg &a, const seg &b) {
31     return intersect1d(a.p.x, a.q.x, b.p.x, b.q.x) &&
32         intersect1d(a.p.y, a.q.y, b.p.y, b.q.y) &&
33         vec(a.p, a.q, b.p) * vec(a.p, a.q, b.q) <= 0 &&
34         vec(b.p, b.q, a.p) * vec(b.p, b.q, a.q) <= 0;
35 }
36
37 bool operator<(const seg &a, const seg &b) {
38     double x = max(min(a.p.x, a.q.x), min(b.p.x, b.q.x));
39     return a.get_y(x) < b.get_y(x) - EPS;
40 }
41
42 struct event {
43     double x;
44     int tp, id;
45
46     event() {}
47     event(double x, int tp, int id) : x(x), tp(tp), id(id) {}

```

```

48
49     bool operator<(const event &e) const {
50         if (abs(x - e.x) > EPS) return x < e.x;
51         return tp > e.tp;
52     }
53 };
54
55 set<seg> s;
56 vector<set<seg>::iterator> where;
57
58 set<seg>::iterator prev(set<seg>::iterator it) {
59     return it == s.begin() ? s.end() : --it;
60 }
61
62 set<seg>::iterator next(set<seg>::iterator it) { return ++it; }
63
64 pair<int, int> solve(const vector<seg> &a) {
65     int n = (int)a.size();
66     vector<event> e;
67     for (int i = 0; i < n; ++i) {
68         e.push_back(event(min(a[i].p.x, a[i].q.x), +1, i));
69         e.push_back(event(max(a[i].p.x, a[i].q.x), -1, i));
70     }
71     sort(e.begin(), e.end());
72
73     s.clear();
74     where.resize(a.size());
75     for (size_t i = 0; i < e.size(); ++i) {
76         int id = e[i].id;
77         if (e[i].tp == +1) {
78             set<seg>::iterator nxt = s.lower_bound(a[id]), prv = prev(nxt);
79             if (nxt != s.end() && intersect(*nxt, a[id]))
80                 return make_pair(nxt->id, id);
81             if (prv != s.end() && intersect(*prv, a[id]))
82                 return make_pair(prv->id, id);
83             where[id] = s.insert(nxt, a[id]);
84         } else {
85             set<seg>::iterator nxt = next(where[id]), prv = prev(where[id]);
86             if (nxt != s.end() && prv != s.end() && intersect(*nxt, *prv))
87                 return make_pair(prv->id, nxt->id);
88             s.erase(where[id]);
89         }
90     }
91
92     return make_pair(-1, -1);
93 }

```

## 5. Otras cosas

### 5.1. Plantillas

```

1 #include <iostream>
2 #include <bits/stdc++.h>
3 using namespace std;
4
5 /*
6 %Descripcion%
7 */
8
9 typedef long long ll;
10 typedef pair<int, int> ii;
11 typedef vector<int> vi;
12 typedef vector<ii> vii;
13
14 void casoDePrueba()
15 {
16     // Aquí va todo
17 }
18
19 int main()
20 {
21     ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0); cout.tie(0);
22
23     unsigned int numCasos;
24
25     cin >> numCasos;
26     for(unsigned int i = 0; i < numCasos; ++i)
27     {
28         casoDePrueba();
29     }
30
31     return 0;
32 }

```

```

1 #include <iostream>
2 #include <bits/stdc++.h>
3 using namespace std;
4
5 /*
6 %Descripcion%
7 */
8
9 typedef long long ll;
10 typedef pair<int, int> ii;
11 typedef vector<int> vi;
12 typedef vector<ii> vii;
13
14 bool casoDePrueba()
15 {
16     /*
17      * leer caso de prueba
18      * si es el final -> devolver false
19      * hacer todo
20      * devolver true
21      */
22
23     return true;
24 }
25
26 int main()
27 {
28     ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0); cout.tie(0);
29
30     while(casoDePrueba());
31
32     return 0;
33 }

```

```

1 #include <iostream>
2 #include <bits/stdc++.h>
3 using namespace std;

```

```
4
5 /*
6 %Descripcion%
7 */
8
9 typedef long long ll;
10 typedef pair<int, int> ii;
11 typedef vector<int> vi;
12 typedef vector<ii> vii;
13
14 bool casoDePrueba()
15 {
16     // leer el inicio del caso de prueba (cin)
17     if (!cin) return false;
18
19     // CÓDIGO PRINCIPAL AQUÍ (incluyendo el resto de la lectura)
20
21     return true;
22 }
23
24 int main()
25 {
26     ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0); cout.tie(0);
27
28     while(casoDePrueba());
29
30     return 0;
31 }
```